МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Калинин Александр Николаевич

СВЯЗЬ ЗАДАЧ МОНЖА И КАНТОРОВИЧА

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	**Богачев Владимир Игоревич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Колесников Александр Викторович** доктор физико-математических наук, профессор факультета математики НИУ ВШЭ
	Петров Федор Владимирович доктор физико-математических наук, профессор факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета
	Шапошников Станислав Валерьевич доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится «16» декабря 2022 г. в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.3(01.07). Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 12-25.
E-mail: mexmat_disser85@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Ломносовский пр-т, д. 27) и на сайте ИАС «Истина»:

https://istina.msu.ru/dissertations/507229356/

Автореферат разослан «15» ноября 2022г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3(01.07),
кандидат физико-математических наук
доцент

Н.А. Раутиан

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тематика диссертации находится на стыке функционального анализа, теории меры, теории вероятностей и теории экстремальных задач. Рассмотренные в ней задачи важны не только для указанных областей, но и для бесконечномерного анализа, нелинейного анализа и дифференциальной геометрии (см. работы[1,2]). В данной работе объектами исследования выступают задачи оптимизации на бесконечномерных пространствах. Основные результаты работы относятся к области теории меры и теории экстремальных задач, хотя в силу специфики задач иногда используется вероятностная терминология.

Задача Монжа возникла еще в XVIII веке и в первоначальной постановке заключалась в нахождении оптимальных путей переноса масс (в частности грунта) с минимизацией работы. При этом считалось, что оптимальная транспортировка есть, а вопрос состоял только в ее описании. Точная постановка этой задачи появилась спустя два столетия после работ Монжа и состояла в следующем. Для вероятностных мер μ и ν на $\mathbb{R}^n$, заданных плотностями относительно меры Лебега, надо найти борелевское отображение T пространства $\mathbb{R}^n$, переводящее μ в ν, т. е. $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ для всех борелевских множеств B, которое минимизирует интеграл

$$\int |x - T(x)|\, \mu(dx)$$

среди всевозможных отображений, переводящих μ в ν. Однако доказательство существования оптимального отображения оказалось удивительно сложным и было получено уже в XXI веке. В 1970-х годах, начиная с работ А. М. Вершика[3,4], стала рассматриваться более общая задач минимизации интеграла от функции $h(x, T(x))$ для так называемой функции стоимости h на произведении множеств, на которых заданы меры μ и ν (например для метрики на произведении двух общих метрических пространств). В общей задаче Монжа в современной трактовке исследуются отображения T одного пространства с мерой (X, μ) в другое пространство (Y, ν), которые переводят меру μ в меру ν, причем на $X \times Y$ также задана неотрицательная функция стоимости h. Сама задача

---

[1] Богачев В.И., Колесников А.В. Задача Монжа – Канторовича: достижения, связи и перспективы// Успехи мат. наук. – 2012. – Т. 67. – № 5. – С. 3–110.

[2] Kannan R., Lovász L. Simonovits M. Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma// Discrete Comput. Geom. – 1995. – V.13. – № 3-4. – P. 541 – 559.

[3] Вершик А. М. Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования//Успехи матем. наук. – 1970. – Т. 25. – № 5 – С. 117–124.

[4] Вершик А. М. Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения//Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2004. – Т. 312. – С. 69–85.

состоит в минимизации интеграла

$$\int_X h(x, T(x))\, \mu(dx)$$

по отображениям T, переводящим μ в ν. Значение указанного интеграла называют стоимостью транспортировки T.

В конце 1930-х – начале 1940-х годов Л. В. Канторович поставил свою задачу оптимизации, не зная о существовании задачи Монжа. Эта задача вызвала значительный поток исследований, которые продолжаются и на данный момент. Задача Канторовича также ставится на измеримых пространствах X и Y с вероятностными мерами μ и ν и заданной функцией стоимости h на $X \times Y$, но теперь требуется найти вероятностную меру π на $X \times Y$, проекции которой на X и Y есть μ и ν соответственно и которая минимизирует интеграл

$$\int_{X\times Y} h(x, y)\, \pi(dxdy)$$

по всем мерам π с данными проекциями. Меры с заданными проекциями называются планами Канторовича или транспортными планами. Минимизирующая мера (если такая есть) называется оптимальным планом или решением задачи Канторовича. Минимальное значение интеграла, соответствующее решению задачи, называют стоимостью оптимальной транспортировки. Связь двух задач состоит в том, что для всякого отображения T, переводящего меру μ в меру ν, можно взять меру σ на $X \times Y$, равную образу μ при отображении $x \mapsto (x, T(x))$. Эта мера имеет проекции μ и ν на сомножители. В постановке Л. В. Канторовича X и Y — метрические компакты, h — соответствующая метрика на их произведении, но позже стало ясно, что его задача имеет смысл в гораздо более широкой постановке. Узнав после выхода своей заметки о работах Г. Монжа, Л. В. Канторович указал, что решение его задачи позволяет решить и задачу Монжа, что в общем случае не совсем так. Оказалось, что задача Канторовича имеет решение при более широких условиях, чем задача Монжа. Например, для существования решения в задаче Канторовича достаточно полунепрерывности снизу функции стоимости на вполне регулярных топологических пространствах с мерами Радона, в то время как задача Монжа может быть неразрешима даже для хороших функций стоимости. Тем не менее есть очень глубокая связь между обеими задачами в случае непрерывных функций стоимости и радоновских мер без атомов. В этом случае решения задач совпадают при довольно общих условиях на пространства и меры. Часть основных результатов диссертации посвящена построению точных достаточных условий для совпадения этих решений. В силу того, что получены точные условия, дальнейшее направление изучения вопросов связи задач можно перенести на задачи с дополнительными ограничениями на исходные меры, транспортные планы или на функцию стоимости. Такие задачи получили широкое распространение за последние десять лет. Задачи на $\mathbb{R}^n$ с дополнительными ограничениями на плотности транспортных планов были рассмотрены в работах Korman J., McCann R. J.[5,6,7,8]. Позднее эти результаты были распространены на бесконечномерные пространства (см. работы[9,10]). Общие ограничения иного характера были изучены в работе[11]. Часть результатов диссертации посвящена теории локализации и в частности свойствам α-вогнутых мер, которые в дальнейшем можно использовать для получения конструктивных ограничений для задач Монжа и Канторовича.

Работу можно разделить на три основных части, соответствующие трем главам.

В первой и второй главах изучаются вопросы, связанные с решениями задач Монжа и Канторовича для непрерывной функции стоимости и радоновских мер на вполне регулярных пространствах. Исследованием этого вопроса на протяжении последних пятидесяти лет занимались многие российские и зарубежные математики, в том числе А. М. Вершик[3], В. Н. Судаков[12], Л. Амброзио[13] и А. Прателли[14]. В случае разрывной функции стоимости несложно построить пример задач на квадрате, где равенство значений в задачах Монжа и Канторовича нарушается (такой пример можно найти в работе[1]). Однако в случае непрерывной функции стоимости известно, что равенство сохраняется при довольно общих условиях (см. работы[13,14,15]). В частности, в работе[15] доказано, что равенство верно для пространств, в которых компакты метризуемы (например

[5]Korman J., McCann R. J. Optimal transportation with capacity constraints// Trans. Amer. Math. Soc. – 2015. – vol. 367. – P. 1501–1521.

[6]Korman J., McCann R. J. Insights into capacity constrained optimal transport// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2013. – V. 110. – P. 10064–10067.

[7]Seis C., Korman J., McCann R. J. Dual potentials for capacity constrained optimal transport// Calc. Var. Partial Differ. Equ. – 2015. – V.54. – P.573–584.

[8]Korman J., McCann R. J., Seis C. An elementary approach to linear programming duality with application to capacity constrained transport// Convex Anal. – 2015. – V. 22. – P. 797–808.

[9]Доледенок А. Н. О задаче Канторовича с ограничениями на плотность// Матем. заметки. – 2018. – Т. 104. – №1. – С. 45–55.

[10]Богачев В. И., Доледенок А. Н., Малофеев И. И. Задача Канторовича с параметром и ограничениями на плотность// Матем. заметки. – 2021. – Т. 110. – № 6. – С. 922–926.

[11]Заев Д. А. О задаче Монжа – Канторовича с дополнительными линейными ограничениями// Матем. заметки. – 2015. – Т. 98. – №5. – С. 664–683.

[12]Судаков В. Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений// Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1976. – Т. 140. – С. 1–190.

[13]Ambrosio L. Lecture notes on optimal transport problems// Lecture Notes in Math. – 2003. – V. 1812. – P. 1–52.

[14]Pratelli A. On the equality between Monge's infimum and Kantorovich's minimum in optimal mass transportation// Ann. Inst. H. Poincaré (B) Probab. Statist. – 2007. – V. 43. – I. 1. – P. 1–13.

[15]Липчюс А. А Замечание о равенстве в задачах Монжа и Канторовича// Теория вероятн. и ее примен. – 2005. – Т.50. – № 4. – С. 779–782.

для суслинских пространств). Таким образом, возникает вопрос об обобщении этих результатов и поиске точных достаточных условий на равенство значений в задачах. В первой главе диссертации построен пример, показывающий, что нельзя без дополнительных ограничений отказаться от метризуемости компактов. А именно можно построить непрерывную функцию стоимости на пространстве, являющемся объединением счетной и несчетной степеней отрезка с мерой, равной полусумме счетной и несчетной степеней меры Лебега на $[0,1]$, для которой значения в задачах Монжа и Канторовича различны.

Вторая глава посвящена нахождению достаточных условий для равенства значений в задачах. Для обоснования примера из первой главы было существенно, что мера μ на пространстве X была несепарабельна (т. е. $L^1(\mu)$ несепарабельно), что позволяло ограничить множество допустимых отображений в задаче Монжа так, чтобы их не хватало для достижения минимума Канторовича. Во второй главе получены достаточные условия для равенства и показано, что полученные условия являются точными. Просто формулируемое достаточное условие в терминах сепарабельности таково: меры μ и ν сепарабельны, причем μ не имеет атомов.

Третья глава посвящена задачам теории локализации, которые не относятся напрямую к задачам Монжа и Канторовича, однако идейно и технически тесно связаны с ними, поскольку их решение также сводится к поиску экстремума функционала на пространстве мер. В данной главе используются вероятноснтые радоновские меры на локально выпуклых пространствах и, в некоторых результатах, пространства Фреше. В частности, для решения задач локализации вводится специальный класс радоновских мер, который в дальнейшем можно использовать для постановки задач Монжа и Канторовича с ограничением на меру исходного пространства. Локализационная теория имеет множество приложений в геометрии и геометрических задачах теории меры (см. работы[2,16,17,18,19]). Большой интерес в этой теории представляют локализация гиперболических мер и описание крайних точек семейств α-вогнутых мер на локальнов выпуклых пространствах. В работе[20] дана геометрическая интерпретация локализационной теории, где искомая мера выступает как крайняя

[16] Guédon O. Kahane–Khinchine type inequalities for negative exponent// Mathematika. – 1999. – V. 46. – N 1. – P. 165–173

[17] Bobkov S. G. Remarks on the growth of L^p-norms of polynomials// Lecture Notes in Math. Springer. – 2000. – V. 1745. – P. 27–35.

[18] Бобков С. Г. Некоторые обобщения результатов Ю. В. Прохорова о неравенствах типа Хинчина для полиномов// Теория вероятн. и ее примен. – 2000. – Т. 45. – №4. – С. 745–748.

[19] Бобков С. Г. Локализационное доказательство изопериметрического неравенства Бакри–Леду и некоторые приложения// Теория вероятн. и ее примен. – 2002. – Т. 47. – №2. – С. 340–346.

[20] Fradelizi M., Guédon O.The extreme points of subsets of s-concave probabilities and a geometric localization theorem// Discrete Comput. Geom. – 2004. – V. 31. – N 2. – P. 327–335.

точка множества всех α-вогнутых мер, для которых интегралы по заданным полунепрерывным снизу функциям положительны. В статье [21], напротив, рассматривается задача локализационной теории в случае бесконечномерного пространства, но для одной функции. В третьей главе диссертации построено обобщение локализационной теории с использованием обоих подходов одновременно и получено два важных результата. Первый результат заключается в описании крайних точек семейства α-вогнутых мер, для которых интегралы по заданному конечному числу полунепрерывных снизу функций положительны. А именно найдены ограничения на размерность носителя крайней точки и получено описание меры в терминах плотностей для мер с дополнительным ограничением на параметр α. Второй основной результат касается метода нахождения локализующей меры на пространствах Фреше. В работе[14] описан метод бисекций для нахождения локализующей меры на пространстве Фреше с борелевской вероятностной мерой μ, с помощью которого по заданным полунепрерывным снизу функциям u и v с положительными интегралами строится локализующая мера на отрезке. Закономерно поставить вопрос о том, можно ли построить локализующую меру для произвольного конечного числа функций. Доказательство основной теоремы этого метода в случае двух функций существенно опиралось на теорему о промежуточном значении на окружности, которая в случае большего числа функций становится сферой, где применение теоремы о промежуточном значении невозможно. Второй основной результат третьей главы заключается в построении алгоритма метода бисекции для произвольного конечного числа функций без использования теоремы о промежуточном значении.

Цель работы.

• Построить пример непрерывной функции стоимости, для которой значения в задачах Монжа и Канторовича различны.

• Исследовать условия для равенства значений в задачах Монжа и Канторовича для непрерывной функции стоимости.

• Исследовать свойства крайних точек семейства вогнутых мер и дать их описание в терминах плотности.

• Исследовать метод построения локализующей меры для борелевских вероятностных мер на бесконечномерном пространстве.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

[21] Бобков С. Г., Мельбурн Дж. Локализация для бесконечномерных гиперболических мер// Докл. АН. – 2015. – Т. 462. – №3. – С. 261–263.

1. Получены достаточные условия равенства значений в задачах Монжа и Канторовича на бесконечномерных вполне регулярных топологических пространствах с радоновскими вероятностными мерами для непрерывной функцией стоимости. В частности, достаточно, чтобы меры были сепарабельными безатомическими.

2. Построен пример компактного пространства с вероятностными мерами и непрерывной функции стоимости, для которых значения в задачах Монжа и Канторовича не совпадают.

3. Получено описание крайних точек семейств α-вогнутых мер на бесконечномерных пространствах с произвольным конечным числом ограничений.

4. Построено обобщение метода локализации гиперболических мер на пространствах Фреше на случай произвольного конечного числа ограничивающих функций.

Положения, выносимые на защиту.

1. Пример непрерывной функции стоимости, для которой минимумы в задачах Монжа и Канторовича различны.

2. Достаточные условия для совпадения значений в задачах Монжа и Канторовича для непрерывной функции стоимости.

3. Оценка размерности носителя крайних точек семейства α-вогнутых мер, заданных конечным числом непрерывных ограничений, в терминах плотностей и описание свойств этих точек для разных показателей вогнутости.

4. Метод построения локализующей меры для мер, удовлетворяющих закону $0-1$, на пространстве Фреше для случая произвольного конечного числа ограничивающих функций.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, функционального анализа и теории локализации, а также несколько оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах бесконечномерного анализа, теории меры, теории оптимального планирования и теории локализации. Результаты и методы работы будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» и Национальном исследовательском университете «Московский физико-технический университет».

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются меры и интегрирование в бесконечномерных пространствах, их линейные отображения, а также функционалы на бесконечномерных пространствах с мерами, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «функциональный анализ».

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2018, 2019, 2020 г.),
2. Международная научная конференция “Infinite-dimensional analysis and mathematical physics” (Москва, МГУ, 2019 г.),
3. Международная конференция “Recent advances in mass transportation” (Москва НИУ ВШЭ, 2019 г.),
4. Третья Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, 2019 г.),
5. Международная конференция “New frontiers in high-dimensional probability and applications to machine learning” (Сочи, Сириус, 2021 г.).

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. Научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, С. В. Шапошникова и Н. А. Толмачева (МГУ, многократно, 2017–2021 г.),
2. Международный научно-исследовательский семинар “Infinite-dimensional stochastic analysis” в университете г. Билефельд, Германия(2018, 2019 г).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах автора (см. [1], [2], [3], первые две из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science, а также представлены в тезисах 3 международных конференций (см. [4] – [6]).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 77 наименований. Общий объем диссертации составляет 67 страниц.

В диссертацию вошли результаты, полученные при работе над проектом РНФ 17-01-00662 и проектом РФФИ 20-01-00432.

Краткое содержание диссертации.

Нумерация результатов в автореферате соответствует нумерации в самой диссертации.

Первая глава работы разделена на три параграфа. Первый является вводным. Он содержит описание задач, необходимые определения, обозначения и известные результаты. Для заданных вероятностных мер $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ и неотрицательной измеримой функции h на произведении $X \times Y$, называемой функцией стоимости, задача Монжа заключается в нахождении величины

$$M_h(\mu, \nu) = \inf_T M_h(\mu, \nu, T), \quad M_h(\mu, \nu, T) := \int_X h(x, T(x))\, \mu(dx),$$

где inf берется по всем измеримым отображениям $T\colon X \to Y$, переводящим меру μ в меру ν. Задача Канторовича для тех же мер заключается в минимизации величины

$$K_h(\mu, \nu, \sigma) = \int_{X \times Y} h(x, y)\, \sigma(dx\, dy)$$

по мерам σ из множества $\Pi(\mu, \nu)$ вероятностных мер, для которых проекция на X есть μ, а проекция на Y есть ν. Таким образом, рассматривается величина

$$K_h(\mu, \nu) = \inf\{K_h(\mu, \nu, \sigma)\colon\ \sigma \in \Pi(\mu, \nu)\}.$$

Во втором параграфе сформулирован основной результат первой главы.

Теорема 1.2.1. *Существуют радоновские вероятностные меры μ и ν на компактном пространстве $X = [0,1]^{\aleph_0} \cup [0,1]^{\aleph_1}$ и непрерывная функция h on $X \times X$ такие, что меру μ можно перевести в ν непрерывным отображением, но $M_h(\mu, \nu) > K_h(\mu, \nu)$, причем оба инфимума являются минимумами.*

Приведены три вспомогательные леммы и полное доказательство теоремы и всех вспомогательных утверждений. В третьем параграфе напоминается пример, показывающий, что условие непрерывности является существенным для данного вопроса.

Во **второй главе** исследуются достаточные условия для равенства значений в решениях задач Монжа и Канторовича для непрерывной функции стоимости. Основной результат второй главы заключается в следующей теореме.

Теорема 2.1.1. *Пусть X и Y — вполне регулярные топологические пространства, h — непрерывная функция на $X \times Y$, μ и ν — вероятностные радоновские меры на X и Y соответственно, причем μ не* *имеет атомов. Предположим, что всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть меры ν той же самой полной массы. Тогда*

$$\inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} K_h(\mu,\nu,\sigma) = \inf_{T\in T(\mu,\nu)} M_h(\mu,\nu,T).$$

Приведено полное доказательство теоремы этой с использованием одной вспомогательной леммы. Также описан ряд важных следствий из этой теоремы, которые показывают, что полученный результат применим для некоторых известных классов мер, в частности для сепарабельных мер.

Следствие 2.1.4. *Условие безатомичности меры ν можно опустить, если меру μ можно преобразовать в меру ν, а всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть этой же меры μ той же полной массы, либо если всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть меры $\nu \otimes \lambda$, где λ — мера Лебега на $[0,1]$.*

Следствие 2.1.5. *Если функция $h \geq 0$ непрерывна, радоновские вероятностные меры μ и ν сепарабельны, причем μ не имеет атомов и $K_h(\mu,\nu) < \infty$, то инфимум в задаче Монжа равен минимуму в задаче Канторовича.*

При доказательстве основного результата, фактически, вместо непрерывности функции h было использовано более слабое условие: для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие компакты $K_1 \subset X$ и $K_2 \subset Y$, что $\mu(X\backslash K_1) < \varepsilon$ и $\nu(Y\backslash K_2) < \varepsilon$, причем на $K_1 \times K_2$ функция h непрерывна. Такое свойство называется в работе[22] виртуальной непрерывностью. Поэтому справедливо такое утверждение.

Следствие 2.1.6. *Условие непрерывности функции стоимости h в основной теореме и ее следствиях можно ослабить до виртуальной непрерывности.*

Полученные в первых двух главах результаты и их следствия показывают, что описанные достаточные условия являются точной границей.

В **третьей главе** рассматриваются крайние точки семейств α-вогнутых мер и алгоритмы локализации. Результаты получены для вероятностных радоновских мер на локально выпуклых пространствах. Часть результатов получена для пространств Фреше. Глава разделена на два параграфа. В первом параграфе приведены необходимые определения и известные результаты по теме главы. Во втором параграфе представлены два основных результата. Первый касается описания крайних точек в терминах плотности.

[22] Вершик А.М., Затицкий П.Б., Петров Ф.В. Виртуальная непрерывность измеримых функций многих переменных и ее приложения// Успехи мат. наук. – 2014 – Т. 69. – № 6. – С. 81–114.

Напомним, что неотрицательная радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве E называется α-вогнутой ($-\infty \le \alpha \le +\infty$), если для всех непустых борелевских множеств A и B и всех $t \in (0,1)$ верно неравенство

$$\mu_*((1-t)A + tB) \ge \Big[(1-t)\mu(A)^\alpha + t\mu(B)^\alpha\Big]^{1/\alpha},$$

где μ_* — внутренняя мера. Для множеств в пространствах Фреше суммы $(1-t)A + tB$ автоматически измеримы, поэтому можно писать μ вместо μ_*. В случае $\alpha = -\infty$ неравенство имеет вид

$$\mu_*((1-t)A + tB) \ge \min\{\mu(A), \mu(B)\},$$

а соответствующая мера будет называться выпуклой или гиперболической. В случае $\alpha = 0$ имеем

$$\mu_*((1-t)A + tB) \ge \mu(A)^{1-t}\mu(B)^t,$$

а мера μ называется логарифмически вогнутой. Важнейший пример логарифмически вогнутой меры — гауссовская мера.

Обозначим через $\mathcal{M}_\alpha(K)$, где $-\infty \le \alpha \le 1$, семейство всех α-вогнутых вероятностных мер с носителем в выпуклом компакте K в локально выпуклом пространстве E. Для заданных непрерывных функций $f_1, \ldots, f_n$ рассмотрим подмножество

$$\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n) = \Big\{\mu \in \mathcal{M}_\alpha(K)\colon \int_K f_i\, d\mu \ge 0,\ 1 \le i \le n\Big\}$$

и его замкнутую выпуклую оболочку $\overline{\mathrm{conv}}\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n)$.

Теорема 3.2.1. (i) *Размерность носителя всякой крайней точки μ из $\overline{\mathrm{conv}}\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n)$ не больше n.* (ii) *Если $\alpha \le \frac{1}{n+1}$, то либо крайняя мера μ сосредоточена в одной точке $x \in K$ и $f_i(x) \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$, либо ее носитель — выпуклый компакт в K, причем если $\dim H_\mu = n$, то*

$$\int f_i\, d\mu = 0 \quad \forall\, i \le n$$

и для каждой относительно внутренней точки x_0 носителя меры μ (т. е. внутренней в его аффинной оболочке) и каждого ненулевого функционала $l \in E'$ с условием $\mu(\{l = c\}) = 0$ при всех $c \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\int_{x\colon l(x-x_0)\ge 0} f_i\, d\mu \ne 0 \quad \forall\, i \le n.$$

Кроме того, в этом случае мера μ имеет плотность вида

$$g(x) = (V(x))^\gamma,\ \gamma = \frac{1}{\alpha} - n$$

с некоторой функцией $V\colon K \to (0,\infty)$, вогнутой при $\alpha > 0$ и выпуклой при $\alpha < 0$.

Второй результат касается метода нахождения локализующей меры и верен не только для гиперболических мер.

Определение 3.2.2. *Пусть дана конечная неотрицательная борелевская мера μ на локально выпуклом пространстве E. Назовем борелевскую вероятностную меру ν иглой меры μ, если она сосредоточена на отрезке $[a,b] \in E$ и получена как слабый предел вероятностных мер*

$$\mu_l(A) = \frac{1}{\mu(K_l)}\mu(A \cap K_l),$$

где A — борелевское множество, $\{K_l\}$ — сужающаяся последовательность выпуклых компактов в E положительной μ-меры с $\cap_l K_l = [a,b]$.

Будем говорить, что для борелевской вероятностной меры μ на пространстве E выполнен закон $0-1$, если всякое μ-измеримое аффинное подпространство E имеет меру 0 или 1. Например, согласно сказанному выше, таким свойством обладают меры, абсолютно непрерывные относительно гиперболических мер.

Теорема 3.2.5. *Предположим, что для борелевской вероятностной меры μ на сепарабельном пространстве Фреше E выполнен закон $0-1$. Пусть даны две такие полунепрерывные снизу μ-интегрируемые функции $u, v\colon E \to \mathbb{R}$, что*

$$\int_E u\, d\mu > 0, \quad \int_E v\, d\mu > 0.$$

Тогда эти неравенства сохранятся для некоторой иглы ν для меры μ. Более того, если μ сосредоточена на замкнутом выпуклом множестве F, то ν также можно выбрать с носителем в F.

Заключение

В диссертации исследована связь значений в задачах Монжа и Канторовича. Для вполне регулярных топологических пространств с вероятностными мерами, не имеющими атомов, получены достаточные условия на равенство значений в задачах Монжа и Канторовича для непрерывной функции стоимости. Описаны три важных следствия, которые показывают, что для одной из мер можно отказаться от отсутствия атомов. Условие на непрерывность функции стоимости можно ослабить до виртуальной непрерывности. Построен пример, который показывает, что полученный результат дает точную границу справедливости утверждения о равенстве значений в указанных двух задачах.

В последней главе рассмотрена задача теории локализации. Описаны свойства крайних точек для семейств вогнутых мер на бесконечномерном локально выпуклом пространстве. Получено обобщение теоремы о локализации для гиперболических мер на бесконечномерных пространствах Фреше на случай произвольного конечного числа ограничивающих функций.

Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться в следующих направлениях:

1. Исследование связи задач Монжа и Канторовича с непрерывной функцией стоимости при дополнительных ограничениях на меры или пространство.

2. Постановка задач Монжа и Канторовича для гиперболических мер и нахождение достаточных условий на равенство значений.

3. Обобщение теоремы о локализации на случай счетного числа ограничивающих функций.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Игоревичу Богачеву за постановку задач, их обсуждение и постоянную поддержку в работе.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] Богачев В. И., Калинин А. Н. *Непрерывная функция стоимости, для которой минимумы в задачах Монжа и Канторовича не равны*// Доклады РАН. – 2015. – Т. 463. – №4. – С. 383–386. (Импакт-фактор WoS 0.486, SJR 0.385 / 0.25 п.л. / вклад соискателя 0.68).

В работе [1] диссертанту принадлежит основная теорема и доказательство. В. И. Богачеву принадлежит постановка задачи.

[2] Bogachev V. I., Kalinin A. N., Popova S. N. *On the Equality of Values in the Monge and Kantorovich Problems*// Journal of Mathematical Sciences – 2019. – V. 238. – P 377-389. (Импакт-фактор SJR 0.374 / 0.8125 п.л. / вклад соискателя 0.72).

В работе [2] диссертанту принадлежит основная теорема. В. И. Богачеву принадлежит постановка задачи. С. Н. Поповой принадлежат некоторые идеи доказательства.

[3] Калинин А. Н. *Локализация для гиперболических мер на бесконечномерных пространствах*// Функциональный анализ и его приложения. – 2021. – Т. 55. – № 4. – С. 40–54. (Импакт-фактор WoS 0.507, SJR 0.354 / 0.9375 п.л.).

Тезисы докладов на научных конференциях

[4] Калинин А.Н. Достаточные условия совпадения минимумов в решениях задач Монжа и Канторовича// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018». М.: МГУ. 2018. – 1 с.

[5] Калинин А.Н. Предельные точки семейств вогнутых мер// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019». М.: МГУ. 2019. – 1 с.

[6] Калинин А.Н. Достаточные условия совпадения минимумов в решениях задач Монжа и Канторовича// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции “Recent advances in mass transportation”. НИУ ВШЭ. 2019. – с. 6–7.