ФГБОУ ВО "Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова"

На правах рукописи

УДК 511.3+511.44

Добровольский Николай Николаевич

Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы

Специальность 1.1.5. — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,

профессор В. И. Иванов

Москва

2023

Аннотация

Работа относится к аналитической теории чисел и теории диофантовых приближений. В ней рассматриваются вопросы приложения теории чисел к задачам приближенного анализа.

В диссертации рассмотрены следующие пять основных тем:

1. Логарифмы эйлеровых произведений и их ветви вблизи абсциссы абсолютной сходимости;
2. Теория гиперболической дзета-функции Гурвица;
3. Дзета-функции моноидов натуральных чисел;
4. Теория приведённых алгебраических иррациональностей произвольной степени и обобщённых чисел Пизо;
5. Классы периодических функций, порожденных моноидами натуральных чисел, и алгебры рядов Дирихле моноидов натуральных чисел.

Ключевые слова: решётка, сетка, параллелепипедальная сетка, квадратурная формула, метод оптимальных коэффициентов, гиперболическая дзета-функция решётки, дзета-функция решётки, гиперболическая дзета-функция сетки, дзета-функция Гурвица, периодизированная дзета-функция Гурвица, дзета-функция Гурвица второго рода, гиперболическая дзета-функция Гурвица, полиномы Бернулли, контур Ханкеля, дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, логарифм эйлерова произведения, минимальный многочлен, приведённая алгебраическая иррациональность, обобщенное число Пизо, остаточные дроби, цепные дроби.

Библиография: 253 названий.

Оглавление

Введение

0.1. Общая характеристика работы

0.1.1. Актуальность темы исследования

Мультипликативный моноид натуральных чисел $\mathbb{N}$ является основным объектом изучения в теории чисел. Со времён Л. Эйлера известно, что его арифметические свойства тесно связаны с дзета-функцией $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^{-\alpha}$ $(\alpha > 1)$ и произведением Эйлера $P(\alpha) = \prod\limits_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha}}\right)^{-1}$, где $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \ldots\}$ — множество всех простых чисел. В частности, основная теорема арифметики об однозначности разложения на простые множители эквивалентна равенству $\zeta(\alpha) = P(\alpha)$, а бесконечность множества простых чисел эквивалентна расходимости дзета-ряда при $\alpha = 1$.

Хорошо известны моноиды натуральных чисел, образующие геометрические прогрессии с первым членом равным 1 и арифметические прогрессии с первым членом равным 1 и произвольной натуральной разностью. Последний пример был частным случаем знаменитой теоремы Дирихле о простых в арифметической прогрессии, при доказательстве которой он использовал характеры Дирихле и L-функции Дирихле, а заодно и заложил основы теории рядов Дирихле.

Отметим, что моноид $M_{1,4} = \{1+4n | n \geqslant 0, n \in \mathbb{Z}\}$, как пишет Г. Дэвенпорт в своей "Высшей арифметике", Д. Гильберт использовал как пример замкнутой мультипликативной системы, в которой отсутствует однозначность разложения на простые элементы (простые числа и псевдопростые).

Необходимость изучения дзета-функций произвольных моноидов натуральных чисел естественным образом возникла в рамках развития теоретико-числового метода в приближенном анализе, основанным в 1957 году в работах профессора Н. М. Коробова. Одними из основных объектов исследования в теоретико-числовом методе в приближенном анализе являются гиперболическая дзета-функция решёток и дзета-функция сеток с весами.

Гиперболическая дзета-функция в общем виде была определена в работе [51] 1984 года. Дзета-функция сеток с весами в общем виде была определена гораздо позже в 2001 году (см. [72], [41], [202]).

Определение 1. *Гиперболической дзета-функции решёток $\zeta(\Lambda|\alpha)$ называется функция, которая задаётся в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ дзета рядом*[1]

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{-\alpha}. \tag{1}$$

В работе [201] доказана уточненная асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки.

Через $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s-1}$ обозначим набор фундаментальных единиц кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$, а через $\varepsilon_j^{(1)} = = \varepsilon_j, \ldots, \varepsilon_j^{(s)}$ $\quad (j = 1, \ldots, s-1)$ — их алгебраические сопряженные единицы.

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов чисто-вещественного поля F:

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F) = \sum_{(\omega)} |N(\omega)|^{-\alpha},$$

тогда

$$\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F) = (-1)^\nu \sum_{(\omega)} \ln^\nu |N(\omega)||N(\omega)|^{-\alpha}, \quad \nu \geqslant 1.$$

Пусть далее везде $\sum\limits_{(\omega)}$ обозначает суммирование по всем главным идеалам кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$, а $\sum\limits_{\varepsilon}$ обозначает суммирование по всем единицам кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$. Как обычно,через R обозначим регулятор поля F_s, т. е.

$$R = \left\| \begin{vmatrix} \ln|\varepsilon_1^{(1)}| & \ldots & \ln|\varepsilon_1^{(s-1)}| \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ln|\varepsilon_{s-1}^{(1)}| & \ldots & \ln|\varepsilon_{s-1}^{(s-1)}| \end{vmatrix} \right\|.$$

---

[1] Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Пусть

$$a = \frac{s-1}{2} \max_{\substack{1 \leqslant m \leqslant s-1, \\ 1 \leqslant n \leqslant s}} |\ln|\varepsilon_m^{(n)}||.$$

Теорема 1. *При $t > e^a$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \frac{2(\det\Lambda)^\alpha}{R(s-1)!} \sum_{\nu=0}^{s-1} C_{s-1}^\nu \frac{(\ln\det\Lambda(t) - \ln\det\Lambda)^{s-1-\nu}(-1)^\nu \zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^\alpha} + \\ + R(\Lambda, \alpha, \theta), \quad (2)$$

где

$$R(\Lambda, \alpha, \theta) = O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det\Lambda(t))}{(\det\Lambda(t))^\alpha}\right) \quad и \quad R - регулятор\ поля.$$

Множество значений нормы $|N(\omega)|$ образуют моноид натуральных чисел $M(\mathbb{Z}_F)$, а дзета-функция Дедекинда главных идеалов чисто-вещественного поля F является первым нетривиальным примером дзета-функции моноида натуральных чисел.

Общее определение дзета-функции произвольного множества натуральных чисел следующее [195]:

Определение 2. *Для любого множества A натуральных чисел определим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ равенством*

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > \sigma_A), \quad (3)$$

где σ_A — абсцисса абсолютной сходимости.

Если множество A конечное, то равенство (3) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (3) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$. Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Будем через $M(A)$ обозначать минимальный мультипликативный моноид, содержащий множество A. Таким образом, мы имеем:

$$M(A) = \{a_1 \dots a_l | a_1, \dots, a_l \in A, l \geqslant 0\}.$$

Здесь мы используем естественное соглашение, что пустое произведение равно 1.

Нетрудно понять, что имеется несчетное множество моноидов натуральных чисел и, следовательно, несчетное множество различных дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Следуя за Б. М. Бредихиным [15], обозначим через $\nu_M(x)$ — количество элементов моноида M, непревосходящих x, а через $\pi_M(x)$ — количество простых элементов, непревосходящих x.

Работы по дзета-функции моноидов натуральных чисел оказались тесно связаны с циклом работ Б. М. Бредихина о чём говорится в обзорной работе [73].

Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности (см. [15]), и для таких последовательностей элементарными методами получал асимптотический закон распределения образующих элементов. Для моноидов это понятие звучит следующим образом:

Определение 3. *Моноид M натуральных чисел имеет C степенную θ-плотность, если существует предел*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\nu_M(x)}{x^\theta}=C. \tag{4}$$

Ясно, что натуральный ряд имеет единичную степенную 1-плотность.

Пусть $\mathbb{P}_k=\{2^k,3^k,5^k,\ldots\}$ — множество k-ых степеней всех простых чисел. Ясно, что $M(\mathbb{P})=\mathbb{N}$, а $M(\mathbb{P}_k)=\mathbb{N}_k=\{1^k,2^k,3^k,4^k,\ldots\}$ — множество k-ых степеней всех натуральных чисел. Моноид $M(\mathbb{P}_k)$ — с однозначным разложением на простые элементы, а множеством простых элементов являются псевдопростые числа, которые образуют множество $\mathbb{P}_k$. Легко видеть, что моноид $M(\mathbb{P}_k)$ имеет единичную степенную $\frac{1}{k}$-плотность, так как $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x)=[x^{\frac{1}{k}}]$. Так как $\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x)=\pi(x^{\frac{1}{k}})$, то справедлив асимптотический закон

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x)\sim k\frac{x^{\frac{1}{k}}}{\ln x},$$

который согласно Б. М. Бредихину можно получить элементарно, минуя асимптотический закон для простых чисел.

Наилучший результат здесь получается, конечно, исходя из оценок И. М. Виноградова [28] и Н. М. Коробова [86]:

$$\pi(x)=\int\limits_2^x \frac{dx}{\ln x}+O\left(xe^{-a(\ln x)^{0.6}(\ln\ln x)^{-0.2}}\right),$$

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x)=\int\limits_2^{x^{\frac{1}{k}}} \frac{dx}{\ln x}+O\left(x^{\frac{1}{k}}e^{-a(\frac{1}{k}\ln x)^{0.6}(\ln\ln x-\ln k)^{-0.2}}\right),$$

где $a>0$ — некоторая положительная константа.

Здесь используется очевидное равенство $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)=\zeta(k\alpha)$.

Несомненно, что является **актуальным** построение теории дзета-функций произвольных моноидов натуральных чисел, в которой будут изучены различные классы моноидов натуральных чисел и отличие этих классов от моноида $\mathbb{N}$. Среди **актуальных** задач этой теории можно выделить следующие основные:

1. определение областей сходимости дзета-ряда для различных моноидов;
2. построение аналитического продолжения или определение области голоморфности дзета-функции моноидов;
3. определение асимптотических законов распределения простых элементов в моноиде;
4. решение обратной задачи по распределению элементов моноида;
5. исследование новых классов функций, заданных моноидами натуральных чисел;
6. уточнение некоторых асимптотических формул в теоретико-числовом методе в приближенном анализе;
7. исследование закономерностей для остаточных дробей алгебраических чисел.

0.1.2. Степень разработанности

Одной из первых работ по аналитической теории чисел была работа Л. Эйлера [158] 1737 года, когда впервые появилась дзета-функция Эйлера для вещественного аргумента и её представление в виде бесконечного произведения Эйлера. Следующий принципиальный шаг в становлении аналитической теории чисел был сделан через 100 лет П. Г. Лежёном-Дирихле [156], когда он в 1837 году доказал свою знаменитую теорему о простых числах в арифметической прогрессии. Данная работа заложила основы теории рядов Дирихле и L-функций Дирихле.

Современная теория простых чисел начинается с двух работ П. Л. Чебышёва [145, 146]. Для наших исследований имеет принципиальное значение постулат Бертрана, доказанный П. Л. Чебышёвым. После основополагающей работы Б. Римана [173] дзета-функция Эйлера стала рассматриваться как функция комплексного переменного и называться дзета-функцией Римана.

После доказательства Ж. Адамаром [164] и Шарль Жан де ла Валле Пуссеном [179] в 1896 году асимптотического закона распределения простых чисел вышло огромное количество различных работ. Для целей нашего исследования особую роль играют теорема Ингама [163] о том, что между x^3 и $(x+1)^3$ имеется простое число для любого достаточно большого x, и теорема Россера [174] о границах для p_n — n-ого простого числа.

В 1948 году А. Сельберг [175] дал элементарное доказательство асимптотического закона распределения простых чисел. В 1955 году А. Г. Постников и Н. П. Романов предложили упрощение элементарного доказательства А. Сельберга асимптотического закона распределения простых чисел [110]. Это доказательство Б. М. Бредихин перенёс на случай свободных числовых полугрупп со степенными плотностями [17].

В работе [14] Б. М. Бредихиным и в монографии [109] А. Г. Постниковым разработана связь некоторых вопросов мультпликативной теории чисел и аддитивной теории чисел. В частности, важную роль в наших исследованиях играет аддитивная теорема Ингама (см. [109], стр. 180).

Как было указано выше, одной из движущих сил разработки теории дзета-функций моноидов натуральных чисел явилось развитие теории дзета-функция сеток и теории гиперболической дзета-функции решёток.

Впервые дзета-функция сеток появилась в 1957 году в работе Н. М. Коробова [85], с которой ведется отсчет истории создания теоретико-числового метода. Сам термин появился гораздо позже в 2001 году в работе [72], и в более общем виде определение дзета-функции сетки с весами дается в работе [41]. Такая ситуация объясняется логикой развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

На первом этапе его развития к задачам интегрирования периодических функций многих переменных применялись известные результаты из теории чисел о тригонометрических суммах. После введения в 1959 году Н. М. Коробовым параллелепипедальных сеток и понятия оптимальных коэффициентов стали выделяться собственно актуальные задачи теории чисел, решение которых требовалось для развития метода оптимальных коэффициентов.

Прежде всего заметим, что появление метода тригонометрических сумм при анализе вопросов численного интегрирования стало возможным благодаря выделению Н. М. Коробовым класса E_s^α периодических функций с быстро убывающими коэффициентами кратного ряда Фурье.

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R_N[f]. \qquad (5)$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s$$

средним взвешенным значением функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1 \ldots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы.* Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы.

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}, \tag{6}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем, также, рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{N}\rho(M).$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S^*_M(\vec{m})$.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул.

Теорема 5. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*[2]

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m}) S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m}) S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \tag{7}$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

Из этой теоремы непосредственно следует, что для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования $R_N[f]$ на классе A_s всех

[2] Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1,\ldots,m_s) \neq (0,\ldots,0)$.

периодических функций $f(x_1, \ldots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной и абсолютно сходящимся рядом Фурье справедливо равенство

$$\|R_N[\cdot]\|_{A_s} = \max\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|, \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\}} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|\right). \tag{8}$$

Как показали Н. М. Коробов и его последователи на классе E_s^α вопрос о скорости сходимости погрешности к нулю становится содержательным, а дзета-функция сеток с весами в случае параллелепипедальных сеток превращается в гиперболическую дзета-функцию решёток.

В работе [51] доказывается теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции решёток.

Теорема 11. **(Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции решёток)** *Для любой s-мерной решётки Λ справедливы оценки*

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant \begin{cases} (2+2\zeta(\alpha))^s \cdot \left(1 + \left[\dfrac{1}{\lambda}\right]\right)^s, & \text{при } q(\Lambda) = 1; \\ 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \dfrac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}, & \text{при } q(\Lambda) > 1, \end{cases}$$

где λ — наибольшее число такое, что s-мерный куб $[-\lambda; \lambda]^s$ не содержит ни одной ненулевой точки решётки Λ.

Отметим сразу, что и дзета-функция сеток с весами и гиперболическая дзета-функция решётки задаются рядом Дирихле, а значит, их можно рассматривать при комплексных значениях аргумента α и встаёт естественный вопрос об аналитическом продолжении этих рядов Дирихле.

В ряде работ изучены сетки Смоляка, построенные в работах [126, 127]. Отметим, что в работе [208] построено аналитическое продолжение с одним полюсом на всю комплексную плоскость дзета-функции сетки Смоляка с весами.

В работе [182] были найдены граничные функции для сеток Смоляка. Термин граничные функции ввёл Н. М. Коробов в статье [100].

Ещё в 1967 году в работе [96] Н. М. Коробов указывал на связь теории диофантовых приближений с развитием теоретико-числового метода в приближенном анализе. Поэтому естественным является продолжение исследований в области теоретико-числового метода в приближенном анализе и традиционным направлением для Тульской школы теории чисел, связанным с приближением алгебраических чисел [106] — [108], [217, 134], [150].

0.1.3. Цели и задачи

Целью диссертационной работы является формирование основ теории дзета-функции моноидов натуральных чисел.

Также целью данной работы является изучение остаточных дробей алгебраических иррациональностей и законов образования их минимальных многочленов.

Для достижения указанных целей необходимо решить следующие задачи:

1. изучить логарифм эйлерова произведения;
2. построить аналитическое продолжении одного класса рядов Дирихле, связанного с дзета-функцией Гурвица;
3. рассмотреть дзета-функцию моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители;
4. описать моноиды натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы;
5. построить дзета-функции моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости;
6. доказать гипотезу о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых и рассмотреть обобщенное эйлерово произведение, задающее мероморфную функцию на всей комплексной плоскости;
7. вывести новые асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции решёток;
8. изучить вопрос о количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел;

9. исследовать вопрос о количестве простых и псевдопростых в моноиде квадратичных вычетов;

10. решить обратную задачу для моноида с экспоненциальной последовательностью простых;

11. описать законы поведения минимальных многочленов остаточных дробей для алгебраических иррациональностей;

12. описать новые направления исследований, связанные с теорией дзета-функций моноидов натуральных чисел.

0.1.4. Научная новизна

Представленные в работе результаты являются новыми, получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации следующие:

1. Доказано что почленное логарифмирование эйлерова произведения задает в области абсолютной сходимости непрерывную функцию, которая в подходящей полуплоскости задает главное значение логарифма эйлерова произведения, а при приближении к границе области абсолютной сходимости пробегает все ветви логарифмической функции.

2. Построена теория гиперболической дзета-функции Гурвица.

3. Дано определение дзета-функции моноида натуральных чисел и установлена его связь с произведением Эйлера.

4. Описан общий вид моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы.

5. Построены дзета-функции моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости.

6. Доказана гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых и построено обобщенное эйлерово произведение, задающее мероморфную функцию на всей комплексной плоскости.

7. Выведены две новые асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции решёток.

8. Получены асимптотические формулы для количества простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел.

9. Получены асимптотические формулы для количества простых и псевдопростых в моноиде квадратичных вычетов.

10. Решена обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых.

11. Найдены формулы для минимальных многочленов остаточных дробей для алгебраических иррациональностей.

12. Описаны новые направления исследований, связанные с теорией дзета-функций моноидов натуральных чисел.

0.1.5. Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертационного исследования имеют значение для теоретико-числового метода Коробова в приближенном анализе, аналитической теории чисел и теории диофантовых приближений. В нем содержатся основы теории дзета-функций моноидов натуральных чисел, развитие теории гиперболической дзета-функций решёток и дзета-функций сеток с весами. Исследования также содержат важные результаты по теории диофантовых приближений. Результаты относящиеся к теории рассматриваемых дзета-функций могут использоваться в развитии теории рядов Дирихле.

0.1.6. Методология и методы исследования

Исследование базировалось на общей методологии теоретико-числового метода Коробова в приближенном анализе. Согласно этому методу центральными объектами исследования являются тригонометрические суммы сеток с весами, гиперболическая дзета-функция решёток и дзета-функция сеток с весами. При реализации этой методологии использовались метод тригонометрических сумм, геометрия чисел, теория сравнений.

При изучении дзета-функций моноидов натуральных чисел использовались общие подходы из теории дзета-функции Римана и теории рядов Дирихле.

При изучении закономерностей поведения остаточных дробей алгебраических иррациональностей использовался метод дробно-линейных преобразований для минимальных многочленов.

0.1.7. Положения выносимые на защиту

По результатам исследования на защиту выносятся следующие утверждения:

- Почленное логарифмирование бесконечного эйлерова произведения задает в области абсолютной сходимости непрерывную функцию, которая в подходящей полуплоскости задает главное значение логарифма эйлерова произведения, а при приближении к границе области абсолютной сходимости пробегает все ветви логарифмической функции.

- Теория гиперболической дзета-функции Гурвица является вполне содержательной и аналогична теории обычной дзета-функции Гурвица.

- Моноиды натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы характеризуются тем свойством, что их дзета-функция равна произведению Эйлера.

- Для дзета-функций вложенных моноидов натуральных чисел справедлив принцип вложенности.

- Для дзета-функции моноидов натуральных чисел значение абсциссы абсолютной сходимости может изменяться от 0 до 1.

- Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.

- Методом параметрических множеств, получены две новые асимптотические формулы из теории гиперболической дзета-функции решёток.

- При $q = 3, 4, 6$ для количества простых элементов в моноиде $M_{q,1}$ при $x > \frac{q^4}{64}$ справедливо соотношение

$$\pi_{M_{q,1}}(x) \leqslant \frac{(2+\eta)x}{2\ln(2x/q)} + \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

- Для моноида квадратичных вычетов справедливо асимптотическое равенство

$$\pi_{M^{(2)}_{p,2}}(x) = \frac{x\ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}\right).$$

- Любой моноид $M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых PE типа q имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ и $\theta = \frac{1}{2}$.

- Приведённые алгебраические иррациональности в случае чисто-вещественных алгебраических полей и обобщённые числа Пизо в общем случае играют принципиальную роль в вопросах разложения алгебраических иррациональностей в цепную дробь. Начиная с некоторого места все остаточные дроби являются приведёнными алгебраическими числами в первом случае и приведёнными обобщёнными числами Пизо — во втором случае.

- Во-первых, с каждым моноидом M натуральных чисел связывается класс периодических функций M^α_s, который вложен в хорошо известный класс E^α_s.

  Оказалось, что класс периодических функций M^α_s замкнуты относительно интегральных операторов Фредгольма и на нем разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

  Во-вторых, теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел.

0.1.8. Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность всех результатов исследования обоснована строгими математическими доказательствами.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых по грантам РФФИ №05-01-00672а, №08-01-00790а, №11-01-00571а, №15-01-01540-а, №15-41-03263 р-центр-а, №16-41-710194 р-а, №19-41-710004 р-а, №19-41-710005 р-а.

Апробация результатов исследования проводилась на всероссийских и международных конференциях:

- VII международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная памяти профессора А. А. Карацубы — г. Тула, 11 — 15 мая 2010 г.,

- Международная научно-практическая конференция «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», посвященная 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина — г. Тула, 3 — 7 октября 2011 г.,

- International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" — Odessa, August 20 — 26, 2012,

- X международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» — г. Волгоград, 10 — 16 сентября 2012 г.,

- XI международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» — г. Саратов, 9 — 14 сентября 2013 г.

- XII Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева. — г. Тула, 21 —- 25 апреля 2014 г.

- XIII Международной конференции « Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. — г. Тула, 25 — 30 мая 2015 г.

- Международная научно-практическая конференция « Актуальные проблемы социально-экономического развития предприятий, отраслей, комплексов» — г. Тула, 11 — 14 декабря 2015 г.

- VII Международная научно-техническая конференция в рамках II Международного Научного форума Донецкой Народной Республики — г. Донецк, 26 мая 2016 г.

- Всероссийская конференция « Университет XXI века: научное измерение.» — г. Тула, 17 — 31 мая 2016 г.

- XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. — г. Тула, 28 — 31 мая 2018 г.

- XVI Международная конференция « Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. — г. Тула, 13 — 18 мая 2019 г.

- Международная конференция «Байкальская теория чисел» (26 — 30 августа 2019, о. Ольхон, Россия).

- XVII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённая 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. — г. Тула, 26 — 27 марта 2019 г.

- XVIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. — г. Тула, 23 — 28 сентября 2020 г.

- XIX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённая 200-летию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва. — г. Тула, 18 — 22 2021 г.

- XX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённая 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова. — г. Тула, 21 — 24 сентября 2021 г.

- XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 85-летию со дня рождения А. А Карацубы. — г. Тула, 17 — 21 мая 2022 г.

- Вторая конференция Математических центров России. — г. Москва, 7 — 11 ноября 2022 г.

- XXII Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната №18 при Московском университете. —- г. Тула, 26 — 29 сентября 2023 г.

- II Всероссийская научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д. А. Граве. — г. Вологда, 19 —- 23 сентября 2023 г.

- III Конференция Математических центров России. — г. Майкоп, 10 — 15 октября 2023 г.

0.1.9. Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 34 статьях из списка ВАК, Scopus и Web of Scince [181]–[214], в 5 статьях из РИНЦ [215]–[219], в

6 монографиях [220]–[225] и 28 тезисах и материалах различных конференциях [226]–[253].

0.1.10. Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 12 глав, разбитых на 83 параграфа, заключения и списка литературы. Полный объем работы составляет 366 страницы. Список литературы содержит 253 наименования.

0.2. Содержание работы

Во введении рассматривается актуальность темы исследования, краткая история развития теории, предшествующей данной работе, приводятся основные результаты исследования и их теоретическая и практическая значимость.

Первая глава — «Логарифм эйлерова произведения» — посвящена изучению логарифмов бесконечных произведений Эйлера. В этой главе изучаются непрерывные функции, задающие логарифмы бесконечных произведений Эйлера, полученные почленным логарифмированием. Доказывается ряд лемм, позволяющих установить важный факт, что сумма главных значений логарифма сомножителей бесконечного произведения Эйлера задают главное значение только в некоторой полуплоскости, а при приближении к абсциссе абсолютной сходимости эта непрерывная сумма пробегает все ветви логарифмической функции.

Во введении к первой главе кратко говорится о роли произведений Эйлера и о направлении исследований в первой главе.

В параграфе 2 доказывается следующая основная лемма о ветвях логарифма.

Лемма 1.**(О логарифме)**(стр. 39) *Пусть в окрестности точки α_0 логарифм аналитической функции $f(\alpha)$ задан непрерывной функцией $h(\alpha)$: $\ln f(\alpha) = h(\alpha)$. Если в точке α_0 функция $h(\alpha)$ переходит с одной ветви логарифма на другую, то значение $f(\alpha_0)$ — отрицательное.*

В параграфе 3 на основании леммы о логарифме доказываются две леммы о значениях специальных функций.

В параграфе 4 приводятся необходимые вспомогательные леммы о главных значениях логарифма.

В параграфе 5 исследуется логарифм дзета-функции Римана и доказывается теорема о значении.

Теорема 2.(стр. 52) *Для любого натурального N существует τ_N, такое что на отрезке*

$$\left[1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}} + i\tau_N; 2 + i\tau_N\right]$$

найдутся точки $\alpha_k = \sigma_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — отрицательное число ($k = 1, \ldots, N$);

— $\alpha_k = \lambda_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — положительное число ($k = 1, \ldots, N$);

— $\alpha_k = \delta_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — чисто мнимое число ($k = 1, \ldots, N$).

В параграфе 6 исследуются ветви логарифма одной обобщённой L-функции с Эйлеровым произведением. А именно, рассмотрим мультипликативную функцию $h(n) = i^{\sum_{p|n} \alpha_p}$ при $n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}$ и ряд Дирихле $M(\alpha, h)$, заданный равенством

$$M(\alpha, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^\alpha} = \prod_p \left(1 - \frac{i}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Доказана следующая лемма.

Лемма 14.(стр. 53)*Существует $\delta > 0$ такое, что при $1 < \alpha < 1 + \delta$ справедливо неравенство*

$$(\ln M(\alpha, h)) \neq \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}}.$$

В заключении к первой главе подводится итог рассмотренным в главе вопросам.

Во второй главе — «Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле» строится теория гиперболической дзета-функции Гурвица и рассматривается ряд смежных вопросов. Для полноты изложения приводится ряд известных фактов, но они подаются в новом контексте, который позволяет судить о роли этих фактов в развитии теоретико-числового метода в приближенном анализе и связи с последующей теорией дзета-функции моноидов натуральных чисел.

Во введении ко второй главе достаточно подробно описывается связь теории гиперболической дзета-функции решёток и теории гиперболической дзета-функции Гурвица.

В параграфе 2 формулируются цели и дается краткое содержание этой самой объемной главы диссертации.

В третьем разделе мы рассматриваем несобственные интегралы с полиномами Бернулли, которые естественно возникают в этой проблематике, когда от ряда Дирихле с помощью теоремы Абеля переходят к несобственному интегралу.

В четвертом разделе приводятся все необходимые факты о периодизированной по параметру b дзета-функции Гурвица $\zeta(\alpha; b)$ и о дзета-функции Гурвица второго рода.

В пятом разделе вводится понятие гиперболической дзета-функции Гурвица и развивается соответствующая теория, которая во многом является аналогом теории дзета-функции Гурвица.

На основании полученных результатов в шестом разделе строится функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции сдвинутых диагональных решёток.

В седьмом разделе дается подробное изложение теоремы С. М. Воронина о нулях суммы дзета-функций Гурвица по модулю 5 в критической полосе, а в восьмом разделе аналогичный результат излагается для произвольного простого модуля $p > 5$.

Наконец, в заключении ко второй главе обсуждаются полученные результаты и возникающие трудности при реализации намеченной программы.

В третьей главе — «Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители» начинается изучение основной темы диссертации.

Во введении к третьей главе даются многочисленные определения и обозначения, а также формулируются основные цели — изучить свойства дзета-функций мультипликативных моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители и её логарифмов.

Во втором параграфе приводятся различные примеры дзета-функций моноидов натуральных чисел и рассматривается обобщённая функция Мёбиуса.

В параграфе 3 вводится одно из центральных понятий данного исследования — последовательности простых чисел экспоненциального роста.

В заключении к третьей главе дается краткая справка о предшествующих работах, из которых естественным образом возникла новое направление исследований. Кроме этого, указаны наиболее интересные направления дальнейших исследований.

Четвертая глава — «О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы» посвящена описанию моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы, изучению их свойств, дзета-функции этих моноидов натуральных чисел и нахождению их обратных рядов Дирихле.

Во втором разделе этой главы решается вопрос об обращении дзета-функций для произвольных множеств натуральных чисел.

В третьем разделе изучается дзета-функция множества простых чисел. Доказывается теорема об обратной дзета-функции (см. теорему 22, стр. 129).

В четвертом разделе изучаются вложенные последовательности моноидов. Сформулирован и доказан принцип вложенности, с помощью которого доказаны ряд теорем об обратных рядах для дзета-функций моноидов.

В пятом разделе четвертой главы рассматриваются некоторые важные примеры моноидов с однозначным разложением на простые элементы.

В шестом разделе изучаются дзета-функции множества простых элементов моноида. Получены результаты об обратных рядах Дирихле для этих дзета-функций.

В седьмом разделе найден общий вид моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы.

В заключении к четвертой главе перечислены ряд актуальных и перспективных тем дальнейших исследований по данной тематике.

В пятой главе находятся дзета-функции моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости.

Во введении к пятой главе поставлена задача построения системы простых чисел $\mathbb{P}_{\sigma_0}$ такой, что для абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции

$\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha)$ выполнялось равенство $\sigma_{M(\mathbb{P}_{\sigma_0})} = \sigma$, где $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Во втором разделе этой главы поставленная задача решается при значениях абсциссы от 0 до $\frac{1}{3}$, используя теорему Ингама и её следствия.

В третьем разделе при значениях от $\frac{1}{3}$ до 1 используется теорема Россера об оценках простого p_n.

Четвертый раздел посвящён изучению обобщённых произведений Эйлера, для которых удается вычислить абсциссу абсолютной сходимости.

В заключении к пятой главе обрисованы актуальных и перспективные темы дальнейших исследований по данной тематике.

Шестая глава — «Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых и обобщенное эйлерово произведение, задающее мероморфную функцию на всей комплексной плоскости» посвящена изучению аналитических свойств некоторых дзета-функций моноидов натуральных чисел и одного обобщенного эйлерова произведения, задающего мероморфную функцию на всей комплексной плоскости.

Во введении к этой главе формулируются основные задачи по трём классам дзета-функций моноидов натуральных чисел, связанные с аналитическими свойствами этих дзета-функций. Кроме этого, изучаются аналитические свойства одного обобщенного произведения Эйлера и одного специального ряда Дирихле с быстро убывающими коэффициентами.

Во втором разделе доказывается явный вид теорем Вейерштрасса и Миттаг–Леффлера для геометрической прогрессии.

В третьем разделе находится представление для дзета-функции геометрической прогрессии через гамму функцию, что позволило найти функциональное уравнение для дзета-функции геометрической прогрессии.

Четвертый раздел посвящён изучению следующего по сложности случая дзета-функции моноида натуральных чисел, порожденного конечным числом простых чисел.

Пятый раздел изучает дзета-функцию моноида натуральных чисел $M^*(\vec{p}) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})$ с однозначным разложением на простые множители, состоящего из натуральных чисел n взаимно простых с $P(\vec{p}) = p_1 \ldots p_n$, а эйлерово произведение $P(M^*(\vec{p})|\alpha)$ состоит из сомножителей по всем простым числам отличным от $p_1, \ldots, p_n$.

В шестом разделе рассматривается моноид $M_{3,1}(p_1, p_2) \subset M(p_1, p_2)$, заданный равенством

$$M_{3,1}(p_1, p_2) = \{n = 3k + 1 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \,|\, \beta_1 + \beta_2 \equiv 0 \pmod 2\},$$

который для краткости называется основным моноидом. Для него найден явный вид обратной дзета-функции и явный вид отношения двух дзета-функций:

$$\zeta(M(p_1, p_2), M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)\zeta^{-1}(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha).$$

В седьмом разделе продолжены исследования аналитических свойств объектов из предыдущего раздела.

В восьмом разделе вводятся два новых моноида натуральных чисел: моноид Эйлера по модулю q множество E_q и единичный моноид по модулю q множество U_q. Оба моноида относятся к классу моноидов с однозначным разложением на простые элементы. Отличия заключаются в том, что в первом случае все простые элементы являются простыми числами, а во втором случае все простые элементы являются псевдопростыми числами.

Девятый раздел посвящён рассмотрению эффекта Дэвенпорта — Хейльбронна для моноидов, рассмотренных в предыдущих разделах данной главы. Отмечены новые особенности этого эффекта для некоторых рассмотренных моноидов.

Десятый раздел посвящён изучению дзета-функции моноида для любого экспоненциального множества PE простых чисел. В результате исследования была сформулирована гипотеза о заградительном ряде для аналитического продолжения этой дзета-функции.

В следующем одиннадцатом разделе «Вес, порядок и радиус в точке» разрабатываются простые эффективные средства, которые будут использоваться для решения гипотезы о заградительном ряде.

Двенадцатый раздел «Область голоморфности дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых» содержит доказательство гипотезы о заградительном ряде и другие примеры дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых областью голоморфности является правая полуплоскость с $\sigma > 0$.

Тринадцатый раздел содержит примеры рядов Дирихле с быстро убывающими коэффициентами, которые сходятся на всей комплексной области.

Четырнадцатый раздел «Ряд Дирихле моноида с конечным числом простых чисел» содержит описание различных результатов об этих рядах Дирихле и их связь с результатами о соответствующих дзета-функциях.

В пятнадцатом разделе исследуются широкий класс рядов Дирихле, заданных обобщёнными произведениями Эйлера. Сформулированы условия при которых эти ряды Дирихле задают мероморфные функции на всей комплексной плоскости, которые имеют бесконечное множество полюсов первого порядка $S_\pi(M, a(p))$.

В заключении к шестой главе дается широкая панорама дальнейших исследований, связанных с тематикой данной главы.

Седьмая глава — «Две асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции решёток» посвящена выводу двух новых асимптотических формул: первая для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки; вторая для числа точек решётки в гиперболическом кресте.

Во ведении к седьмой главе дается небольшая историческая справка об исследованиях по гиперболической дзета-функции решёток.

Во втором разделе разработан новый метод параметрических множеств, с помощью которого получены новые формы для главного члена асимптотических формул, отличный от работ [63] и [79] с более точной оценкой остаточного члена.

В третьем разделе продолжено успешное применение метода параметрических множеств к получению асимптотических формул для числа точек решётки в гиперболическом кресте.

В заключении к седьмой главе подводится итог для обсуждения нового метода параметрических множеств.

Восьмая глава — «О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел» посвящена изучению вопроса о распределении простых элементов в моноидах $M_{3,1}$, $M_{3,1,1}$, $M_{3,1,2}$, $M_{3,2}$ и связанных с ними множествах $M_{3,1,2,0}$, $\mathbb{N}_{3,2}$ и $\mathbb{N}_{3,2,2}$. Кроме этого, изучаются аналогичные вопросы для моноидов $M_{6,1}$, $M_{6,1,1}$, $M_{4,1}$ и $M_{4,1,1}$.

Во втором разделе даются общие формулы для числа составных с двумя делителями.

В третьем разделе «Исторические замечания» описываются подходы в духе мемуаров П. Л. Чебышева двумя способами.

В четвертом разделе приводятся необходимые для дальнейшего классические результаты о распределении простых в арифметических прогрессиях.

В пятом разделе с помощью оценки Бруна-Титчмарша решается вопрос о количестве составных с двумя делителями в прогрессии.

Шестой раздел посвящён решению поставленных задач для моноидов $M_{3,1}$, $M_{4,1}$ и $M_{6,1}$ и связанных с ними.

В заключении к восьмой главе обсуждаются различные формулировки дальнейших исследований по данной тематике.

Девятая глава — «О моноиде квадратичных вычетов» посвящена изучению моноида $M_{p,2}$ всех натуральных чисел, являющихся квадратичными вычетами по модулю p, который разлагается в произведение двух взаимно простых моноидов $M_{p,2} = M_{p,2}^{(1)} \cdot M_{p,2}^{(2)}$. Все простые элементы в моноиде $M_{p,2}^{(1)}$ имеют порядок 1, то есть являются обычными простыми числам, которые одновременно являются квадратичными вычетами по модулю p, таким образом, $M_{p,2}^{(1)} = M\left(\mathbb{P}_p^{(1)}\right)$. Все простые элементы из моноида $M_{p,2}^{(2)}$ имеют порядок 2 и являются псевдопростыми числами, то есть составными числами, равными произведению двух простых чисел, каждое из которых квадратичный невычет по модулю p. Таким образом, справедливо равенство $M_{p,2}^{(2)} = M\left(\mathbb{P}_p^{(2)} \cdot \mathbb{P}_p^{(2)}\right)$.

Цель данной главы — изучить свойства функции распределения простых элементов $\pi_{M_{p,2}^{(\nu)}}(x)$ для $\nu = 1, 2$. Отметим, что $\pi_{M_{p,2}}(x) = \pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x) + \pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x)$.

Во введении к девятой главе описываются объекты исследования и формулируется цель этих исследований.

Во втором разделе даются общие формулы для числа простых и псевдопростых.

В третьем разделе приводятся вспомогательные утверждения, которые далее используются в этой главе.

В четвертом разделе выводится асимптотическая формулу для числа простых в моноиде $M_{p,2}^{(1)}$.

Пятый раздел посвящён выводу асимптотической формулы для числа псевдопростых чисел в моноиде $M_{p,2}^{(2)}$.

В заключении к девятой главе подводится итог исследований простых элементов в моноиде квадратичных вычетов по заданному модулю.

Десятая глава — «Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых» посвящена получению аналогов результатов Б. М. Бредихина о связи функции распределения простых элементов в образе свободной группы с функцией распределения элементов для этого образа.

Во введении к этой главе дается обзор результатов связанных с постановкой обратной задачи для моноида с экспоненциальной последовательностью простых. Вводятся новые обозначения и формулируются цель исследований десятой главы.

Во втором разделе приводятся вспомогательные леммы и дается объяснение, почему подход Б. М. Бредихина не работает в случае моноида с экспоненциальной последовательностью простых.

В третьем разделе строятся два гомоморфизма мультипликативного моноида $M(PE)$ в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Даются важные формулы, связывающие функции распределения моноида $M(PE)$ с распределением для образов при этих гомоморфизма.

В четвертом разделе рассматриваются как экспоненциальные последовательности простых чисел, так и общая конструкция экспоненциальной последовательности натуральных чисел.

В пятом разделе из аддитивной теоремы Ингама получены искомые результаты о функции распределения моноида с экспоненциальной последовательностью простых.

В заключении к десятой главе дается определение нового понятия — C логарифмическая θ-степенная плотность. Таким образом, любой моноид $M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых PE типа q имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ и $\theta = \frac{1}{2}$.

Одиннадцатая глава — «О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей» посвящена рассмотрению важной проблемы, решение которой важно для развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

Во ведении к одиннадцатой главе дано описание рассматриваемой задачи теории цепных дробей алгебраических иррациональностей степени 3 и выше. Указана связь с теоретико-числовым методом в приближенном анализе. Сформулированы цели исследований одиннадцатой главы.

Во втором разделе даются определения новых понятий: обобщенное число Пизо n-ой степени, приведённое обобщенное число Пизо; доказаны некоторые свойства остаточных дробей в разложения в цепную дробь.

В третьем разделе рассматриваются принципиально важные свойства дробно-линейных преобразований M многочленов $f(x) \in \mathbb{P}_n[x]$.

Четвертый раздел содержит доказательство принципиального свойства цепных дробей для алгебраических иррациональностей степени 3 и выше, что начиная с некоторого места все остаточные дроби являются приведёнными обобщёнными числами Пизо.

В пятом разделе исследуются минимальные многочлены остаточных дробей. В этом разделе выводятся формулы для коэффициентов минимальных многочленов остаточных дробей и оценки значений минимального многочлена в подходящих дробях к алгебраическому числу. Для остаточных дробей найдена формула, связывающая эту дробь с отношением знаменателей двух последовательных подходящих дробей.

В шестом разделе даётся применение обобщённых чисел Пизо к модификации алгоритма Лагранжа разложения алгебраического числа в цепную дробь. Оказывается, что начиная с некоторого места очередное неполное частное выражается через значение m-ного минимального многочлена в $m-1$-ого неполного частного.

В седьмом разделе рассматривается новое понятие — цепная последовательность преобразований плоскости. С помощью этого понятия дается объяснения эффекта концентрации алгебраически-сопряжённых чисел к остаточной дроби α_m около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

В заключении к одиннадцатой главе подводится итог о роли приведенных алгебраических иррациональностей в случае чисто-вещественных алгебраических иррациональностей и обобщённых чисел Пизо в общем случае. Ставится задача о структуре рационального сопряжённого спектра вещественного алгебраического числа.

Двенадцатая глава — «Новые направления исследований» посвящена описанию новых направлений исследований, связанных с тематикой диссертационного исследования.

Во ведении к главе кратко описываются новые направления исследований.

Во втором разделе дается новая конструкция, которая позволяет с каждым моноидом M натуральных чисел связать класс M_s^α периодических функций многих переменных. Рассмотрен вопрос об уравнении Фредгольма второго рода на этом классе функций. Показано, что относительно интегрального оператора Фредгольма этот класс функций замкнут.

В третьем разделе описаны конструкции бесконечномерных линейных функциональных пространств рядов Дирихле моноида натуральных чисел — $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле. Показано, что $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ является коммутативной алгеброй над полем $\mathbb{K}$.

В заключении к двенадцатой главе перечислены возможные дальнейшие направления исследований, связанных и с новыми функциональными пространствами, и с алгебрами рядов Дирихле, порождёнными моноидами натуральных чисел.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту профессору Валерию Ивановичу Иванову за постоянное внимание и неоценимую поддержку.

Глава 1

Логарифм эйлерова произведения

1.1. Введение к первой главе

Эйлерово произведение играет существенную роль в теории дзета-функции Римана. Оказалось, что и в новой теории дзета-функций моноидов натуральных чисел оно также играет важную роль.

В классической теории дзета-функции Римана эйлерово произведение состоит из сомножителей вида

$$\left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1},$$

где p — простое число. Важность этих сомножителей объясняется тем фактом, что они не имеют нулей во всей α-плоскости.

В классической теории, обычно, рассматривают поведение этих сомножителей при $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$. В нашей теории важно рассмотреть поведение этих сомножителей во всей α-плоскости. Одним из средств этого изучения являются логарифмы этих сомножителей. Именно этому и посвящена данная глава.

1.2. Лемма о ветвях логарифма

Будем в этом разделе через $(\ln z)$ обозначать, следуя [38], главное значение $\ln z$. Таким образом, если $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, то $(\ln z) = \ln \rho + i\varphi$, где $\ln \rho$ — обычный вещественный логарифм, изменяющийся от $-\infty$ до ∞. Отсюда следует, что

$$\varphi = -i\left(\ln \frac{z}{|z|}\right).$$

Приведём важное тождество для главного значения логарифма произведения (см. [38]):

$$z_j = \rho_j e^{i\varphi_j}, \quad \rho_j > 0, \quad -\pi < \varphi_j \leqslant \pi \quad (j = 1, 2), \tag{1.1}$$

$$(\ln z_1 z_2) = (\ln z_1) + (\ln z_2) + 2\pi n i, \tag{1.2}$$

$$n = n(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant \pi, \\ 1, & \text{при } -2\pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant -\pi, \\ -1, & \text{при } \pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что

$$n = n(\varphi_1, \varphi_2) = \left[-\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi} + \frac{1}{2}\right],$$

$$(\ln z_1 z_2) = (\ln z_1) + (\ln z_2) + 2\pi\left[-\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i =$$

$$= (\ln z_1) + (\ln z_2) + 2\pi\left[i\frac{\left(\ln \frac{z_1}{|z_1|}\right) + \left(\ln \frac{z_2}{|z_2|}\right)}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i.$$

Так как все ветви многозначной функции $\ln z$ выражаются через главную ветвь, то мы пронумеруем все ветви номерами k от $-\infty$ до ∞ следующим образом:

$$\ln_k z = (\ln z) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Тождество (1.2) можно обобщить следующим образом

$$\ln_{k_1+k_2} z_1 z_2 = \ln_{k_1} z_1 + \ln_{k_2} z_2 + 2\pi\left[i\frac{\left(\ln \frac{z_1}{|z_1|}\right) + \left(\ln \frac{z_2}{|z_2|}\right)}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i.$$

Действительно,

$$\ln_{k_1+k_2} z_1 z_2 = (\ln z_1 z_2) + 2(k_1 + k_2)\pi i = (\ln z_1) + (\ln z_2) +$$

$$+2\pi\left[i\frac{\left(\ln \frac{z_1}{|z_1|}\right) + \left(\ln \frac{z_2}{|z_2|}\right)}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i + 2(k_1 + k_2)\pi i =$$

$$= \ln_{k_1} z_1 + \ln_{k_2} z_2 + 2\pi\left[i\frac{\left(\ln \frac{z_1}{|z_1|}\right) + \left(\ln \frac{z_2}{|z_2|}\right)}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i.$$

Как известно (см. [38], стр. 81) каждая ветвь $\ln_k z$ — регулярная ветвь в области D, состоящей из всех точек комплексной плоскости, за исключением точек отрицательной части действительной оси (в том числе и точки $z = 0$). При переходе через этот разрез происходит переход с одной ветви на другую соседнюю, согласно нумерации.

Лемма 1. **(О логарифме)** *Пусть в окрестности точки α_0 логарифм аналитической функции $f(\alpha)$ задан непрерывной функцией $h(\alpha)$: $\ln f(\alpha) = h(\alpha)$. Если в точке α_0 функция $h(\alpha)$ переходит с одной ветви логарифма на другую, то значение $f(\alpha_0)$ — отрицательное.*

Доказательство. Рассмотрим малую ε-окрестность точки α_0: $|\alpha-\alpha_0| < \varepsilon$, в которой непрерывная функция $h(\alpha)$ принимает либо значение $\ln_k f(\alpha)$, либо $\ln_{k+1} f(\alpha)$. Так как значения ветви $\ln_k f(\alpha)$ имеют вид $a + bi$, $-\pi + 2\pi k < b \leqslant \pi + 2\pi k$, а значения ветви $\ln_{k+1} f(\alpha)$ имеют вид $a + bi$, $-\pi + 2\pi(k + 1) < b \leqslant \pi+2\pi(k+1)$, то равенство двух ветвей может достигаться только в тех точках, где $b = \pi + 2\pi k = -\pi + 2\pi(k + 1)$. Но если $h(\alpha) = a + (\pi + 2\pi k)i$, то значение $f(\alpha)$ — отрицательное. Если мы через γ обозначим границу между областью $D_\nu = \{\alpha | h(\alpha) = \ln_\nu f(\alpha), |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon\}$ $(\nu = k, k + 1)$, то для всех точек $\alpha \in \gamma$ значение $f(\alpha)$ будет отрицательное. Так как по условию $\alpha_0 \in \gamma$, то лемма полностью доказана. □

Важно отметить, что если дано какое-то значение $\ln z = a + bi$, то легко определить номер ветви логарифма и выразить главное значение, а именно

$$\ln z = \ln_k z, \quad k = -\left[-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2}\right],$$
$$(\ln z) = \ln z + 2\pi \left[-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i = a + 2\pi \left(\frac{1}{2} - \left\{-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2}\right\}\right) i.$$

Пользуясь этой формулой, можно легко указать как меняются ветви логарифма и как выражаются главные значения, если $\ln f(\alpha) = = h(\alpha)$[1]*:*

$$\ln f(\alpha) = \ln_{k(\alpha)} f(\alpha), \quad k(\alpha) = -\left[-\frac{\Im h(\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2}\right],$$
$$(\ln f(\alpha)) = h(\alpha) + 2\pi \left[-\frac{\Im h(\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i.$$

[1] Здесь для любого комплексного числа z имеем: $z = \Re z + \Im z \cdot i$.

1.3. Значения логарифмируемой функции

Лемма 2. *Пусть при* $1 < \alpha < 2$ *комплекснозначная функция*

$$F(\alpha) = e^{-\frac{i}{2}\ln(\alpha-1)+f(\alpha)}$$

и непрерывная функция $f(\alpha)$ *ограничена константой* $c > 0$, $|f(\alpha)| \leqslant c < 2$, *тогда на интервале* $(1,2)$ *существует бесконечная последовательность* $2 > > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > 1$ *нулей действительной части* $F(\alpha)$*:*

$$\Re(F(\alpha_j)) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

бесконечная последовательность $2 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > 1$ *нулей мнимой части* $F(\alpha)$*:*

$$\Im(F(\beta_j)) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

бесконечная последовательность $2 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > 1$ *отрицательных значений* $F(\alpha)$*:*

$$F(\lambda_j) < 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

бесконечная последовательность $2 > \delta_1 > \delta_2 > \ldots > 1$ *положительных значений* $F(\alpha)$*:*

$$F(\delta_j) > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Обозначим через $g(\alpha)$ действительную часть $f(\alpha)$, а через $h(\alpha)$ — мнимую часть. Таким образом, $f(\alpha) = g(\alpha) + ih(\alpha)$, $|g(\alpha)| \leqslant c$, $|h(\alpha)| \leqslant c$.

Имеем:

$$F(\alpha) = e^{g(\alpha)}\left(\cos\left(-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1)+h(\alpha)\right) + i\sin\left(-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1)+h(\alpha)\right)\right).$$

Так как для непрерывной функции $-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1)+h(\alpha)$ на интервале $(1,2)$ выполнены условия

$$-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1)+h(\alpha) > -c, \qquad \lim_{\alpha\to 1^+}\left(-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1)+h(\alpha)\right) = \infty,$$

то для любого φ с $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ на каждом отрезке вида

$$\left[1+e^{-2\varphi-4\pi k-2c}, 1+e^{-2\varphi-4\pi k+2c}\right]$$

имеется хотя бы один корень уравнения

$$-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1)+h(\alpha)=\varphi+2k\pi.$$

Действительно, если положить $\alpha=1+e^{-2\varphi-4\pi k-2\beta}$, то при β, пробегающем отрезок $[-c,c]$, α будет пробегать отрезок $\left[1+e^{-2\varphi-4\pi k-2c},1+e^{-2\varphi-4\pi k+2c}\right]$. При этом уравнение

$$-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1)+h(\alpha)=\varphi+2k\pi$$

перейдёт в уравнение

$$\beta+h\left(1+e^{-2\varphi-4\pi k-2\beta}\right)=0,$$

которое имеет хотя бы одно решение, так как график функции

$$y(\beta)=-h\left(1+e^{-2\varphi-4\pi k-2\beta}\right)$$

лежит в квадрате $(\beta,y)\in[-c,c]^2$ и диагональ квадрата имеет с графиком хотя бы одну точку пересечения, которая соответствует корню уравнения.

Так как все отрезки $\left[1+e^{-2\varphi-4\pi k-2c},1+e^{-2\varphi-4\pi k+2c}\right]$ при $\frac{c-\varphi}{2\pi}\leqslant k$ вложены в отрезок $[1,2]$ и их объединение при $k\geqslant 0$ вложено в отрезок $[1,1+e^{-2\varphi+2c}]$, то на отрезке $[1,2]$ имеется бесконечное множество значений α, для которых $\arg F(\alpha)=\varphi$.

При $\varphi=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$ получаем первое утверждение леммы о бесконечном числе нулей действительной части $F(\alpha)$.

При $\varphi=0,\pi$ получаем второе утверждение леммы о бесконечном числе нулей мнимой части $F(\alpha)$.

При $\varphi=\pi$ получаем третье утверждение леммы о бесконечном числе отрицательных значений $F(\alpha)$.

Наконец, при $\varphi=0$ получаем последнее утверждение леммы о бесконечном числе положительных значений $F(\alpha)$. □

Другой вариант леммы 2 звучит так.

Лемма 3. *Пусть N — натуральное и при $1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}<\alpha<2$ комплекснозначная функция*

$$F(\alpha)=e^{-i\ln(\alpha-1)+f(\alpha)}$$

и непрерывная функция $f(\alpha)$ *ограничена константой* $c > 0$, $|f(\alpha)| \leqslant c < 2$, *тогда на интервале* $(1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}}, 2)$ *существуют:*
последовательность $2 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_N > 1$ *нулей действительной части* $F(\alpha)$*:*

$$\Re(F(\alpha_j)) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N);$$

последовательность $2 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_N > 1$ *нулей мнимой части* $F(\alpha)$*:*

$$\Im(F(\beta_j)) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N);$$

последовательность $2 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_N > 1$ *отрицательных значений* $F(\alpha)$*:*

$$F(\lambda_j) < 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N);$$

последовательность $2 > \delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_N > 1$ *положительных значений* $F(\alpha)$*:*

$$F(\delta_j) > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

Доказательство. Обозначим через $g(\alpha)$ действительную часть $f(\alpha)$, а через $h(\alpha)$ — мнимую часть. Таким образом, $f(\alpha) = g(\alpha) + ih(\alpha)$, $|g(\alpha)| \leqslant c$, $|h(\alpha)| \leqslant c$.

Имеем:

$$F(\alpha) = e^{g(\alpha)} \left(\cos\left(-\ln(\alpha - 1) + h(\alpha)\right) + i \sin\left(-\ln(\alpha - 1) + h(\alpha)\right)\right).$$

Так как для непрерывной функции $-\ln(\alpha - 1) + h(\alpha)$ на интервале

$$(1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}}, 2)$$

выполнены условия

$$-\ln(\alpha - 1) + h(\alpha) > -c, \qquad \lim_{\alpha \to 1^+} \left(-\ln(\alpha - 1) + h(\alpha)\right) = \infty,$$

то для любого φ с $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ на каждом отрезке вида

$$\left[1 + e^{-\varphi - 2\pi k - c}, 1 + e^{-\varphi - 2\pi k + c}\right]$$

имеется хотя бы один корень уравнения

$$-\ln(\alpha - 1) + h(\alpha) = \varphi + 2k\pi.$$

Действительно, если положить $\alpha = 1+e^{-\varphi-2\pi k-\beta}$, то при β, пробегающем отрезок $[-c, c]$, α будет пробегать отрезок $\left[1+e^{-\varphi-2\pi k-c}, 1+e^{-\varphi-2\pi k+c}\right]$. При этом уравнение

$$-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)=\varphi+2k\pi$$

перейдёт в уравнение

$$\beta+h\left(1+e^{-\varphi-2\pi k-\beta}\right)=0,$$

которое имеет хотя бы одно решение, так как график функции

$$y(\beta)=-h\left(1+e^{-\varphi-2\pi k-2\beta}\right)$$

лежит в квадрате $(\beta, y)\in[-c,c]^2$ и диагональ квадрата имеет с графиком хотя бы одну точку пересечения, которая соответствует корню уравнения.

Так как все отрезки $\left[1+e^{-\varphi-2\pi k-c}, 1+e^{-\varphi-2\pi k+c}\right]$ при $1\leqslant k\leqslant N$ вложены в отрезок $[1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}, 2]$, то на отрезке $[1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}, 2]$ имеется бесконечное множество значений α, для которых $\arg F(\alpha)=\varphi$.

При $\varphi=\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ получаем первое утверждение леммы об N нулях действительной части $F(\alpha)$.

При $\varphi=0, \pi$ получаем второе утверждение леммы об N нулях мнимой части $F(\alpha)$.

При $\varphi=\pi$ получаем третье утверждение леммы об N отрицательных значениях $F(\alpha)$.

Наконец, при $\varphi=0$ получаем последнее утверждение леммы об N положительных значениях $F(\alpha)$. $\square$

1.4. Логарифм обобщённой L-функции с эйлеровым произведением

Пусть мультипликативная функция $f(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$f(n)=\prod_{p|n}f(p)^{\alpha_p}\quad (n=\prod_{p|n}p^{\alpha_p}),\quad \forall\varepsilon>0\quad f(n)=O\left(n^{\varepsilon}\right),$$

тогда обобщенная L-функция, заданная рядом Дирихле

$$L(\alpha,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^{\alpha}},$$

который абсолютно сходится в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$, в этой полуплоскости имеет разложение в эйлерово произведение

$$L(\alpha, f) = \prod_p \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} \right) = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^\alpha} \right)^{-1}.$$

Обобщённая L-функция $L(\alpha, f)$ для $\alpha = \sigma + it$ при фиксированном значении t и при $\sigma \to \infty$ имеет предел

$$\lim_{\sigma\to\infty} L(\alpha, f) = 1.$$

Поэтому для главного значения логарифма обобщённой L-функции $L(\alpha, f)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\sigma\to\infty} (\ln L(\alpha, f)) = 0,$$

кроме того, всегда выполнено соотношение

$$(\ln L(\alpha, f)) = \ln |L(\alpha, f)| + i\varphi(\alpha, f), \quad -\pi < \varphi(\alpha, f) \leqslant \pi.$$

Для дальнейшего потребуется частный случай леммы о степенном ряде для главного значения логарифма.

Лемма 4. *Главное значение* $(\ln(1-z))$ *логарифма при* $|z| < 1$ *представляется сходящимся степенным рядом*

$$(\ln(1-z)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Доказательство. См. [38], стр. 79–81. □

Лемма 5. *Главное значение* $(\ln(1-e^{i\varphi}))$ *логарифма при* $0 < |\varphi| \leqslant \pi$ *представляется условно сходящимся степенным рядом*

$$(\ln(1-e^{i\varphi})) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}.$$

Доказательство. Прежде всего запишем комплексное число $1 - e^{i\varphi}$ в тригонометрической форме. Для модуля $\rho = |1 - e^{i\varphi}|$ имеем:

$$\rho = \sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Далее имеем:

$$1-e^{i\varphi}=e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}-e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)=-ie^{i\frac{\varphi}{2}}2\sin\frac{\varphi}{2}=\begin{cases} e^{i\frac{\varphi-\pi}{2}}2\sin\frac{\varphi}{2}, & \text{при } 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\ e^{i\frac{\varphi+\pi}{2}}2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|, & \text{при } -\pi\leqslant\varphi\leqslant 0.\end{cases}$$

Отсюда следует, что для главного значения логарифма справедливо равенство

$$(\ln(1-e^{i\varphi}))=\ln 2+\ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|+i\begin{cases}\frac{\varphi-\pi}{2}, & \text{при } 0<\varphi\leqslant\pi,\\ \\ \frac{\varphi+\pi}{2}, & \text{при } -\pi\leqslant\varphi<0.\end{cases}$$

Для ряда

$$S(\varphi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\varphi}}{n}=-\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos n\varphi}{n}+i\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin n\varphi}{n}\right)=$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}.$$

Имеем $S(\varphi)=S_1(\varphi)+iS_2(\varphi)$, где

$$S_1(\varphi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n},\quad S_2(\varphi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}.$$

Рассмотрим на отрезке $[-\pi;\pi]$ две функции

$$f(\varphi)=\begin{cases}0, & \text{при } \varphi=0.\\ \ln 2+\ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|, & \text{при } 0<|\varphi|\leqslant\pi,\end{cases}\qquad g(\varphi)=\begin{cases}\frac{\varphi-\pi}{2}, & \text{при } 0<\varphi\leqslant\pi.\\ 0, & \text{при } \varphi=0,\\ \frac{\varphi+\pi}{2}, & \text{при } -\pi\leqslant\varphi<0\end{cases}$$

и разложим их в ряды Фурье.

Первая функция чётная, поэтому её ряд Фурье будет по косинусам

$$f(\varphi)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos n\varphi,\quad c_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi,\quad c_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\quad n\geqslant 1$$

и

$$f(\varphi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}$$

(см. [137], стр. 457).

Вторая функция нечётная, поэтому её ряд Фурье будет по синусам

$$g(\varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}$$

(см. [137], стр. 447).

Отсюда следует утверждение леммы. □

1.5. Логарифм дзета-функции Римана

Нам потребуется некоторые простейшие свойства дзета-функции Римана, которые в силу важности для дальнейшего кратко изложим.

Как известно, $\zeta(\alpha)$ аналитически продолжается на всю α-плоскость кроме точки $\alpha = 1$, в которой полюс первого порядка.

Определим сумматорную функции $A(x)$: $A(x) = \sum\limits_{n=1}^{x} 1$.

Лемма 6. *При $x \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$A(x) = x - \{x\}\,.$$

Доказательство. Действительно,

$$A(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} 1 = [x] = x - \{x\}\,.$$

□

Лемма 7. *При $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 0$ справедливо интегральное представление*

$$\zeta(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) - \alpha \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Доказательство. Действительно, по теореме Абеля (см. [143], стр. 106) имеем:

$$\zeta(\alpha) = \alpha \int\limits_{1}^{\infty} \frac{A(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int\limits_{1}^{\infty} \frac{x - \{x\}}{x^{\alpha+1}} dx = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) - \alpha \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx$$

и все интегралы абсолютно сходятся, так как $\sigma > 0$. □

Из доказанной леммы следует, что дзета-функция $\zeta(\alpha)$ аналитически продолжается с помощью указанного интегрального представления на полуплоскость $\sigma>0$ кроме точки $\alpha=1$, в которой полюс первого порядка с вычетом 1.

Лемма 8. *При $\alpha>0$ и для*

$$\theta(\alpha)=\alpha\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}}dx$$

справедливы соотношения

$$\zeta(\alpha)=\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)-\theta(\alpha),\quad 0<\theta(\alpha)<1,\quad \alpha\neq 1. \tag{1.4}$$

При $\sigma>0$ справедливы соотношения

$$\zeta(\alpha)=\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)+\theta(\alpha),\quad |\theta(\alpha)|<\frac{|\alpha|}{\sigma},\quad \alpha\neq 1. \tag{1.5}$$

Доказательство. Для числителя $\{x\}$ подынтегрального выражения справедливы неравенства $0\leqslant\{x\}<1$. Поэтому для $\theta(\alpha)$ при $\alpha>0$ имеем соотношения

$$\theta(\alpha)=\alpha\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}}dx,\quad 0<\theta(\alpha)<\alpha\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha+1}}dx=1$$

и первое утверждение леммы доказано.

При $\sigma>0$ имеем:

$$|\theta(\alpha)|=|\alpha|\left|\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}}dx\right|<|\alpha|\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{\sigma+1}}dx=\frac{|\alpha|}{\sigma}$$

и лемма полностью доказана. □

Лемма 9. *При $\alpha>1$ справедливы неравенства*

$$-\ln(\alpha-1)<\ln\zeta(\alpha)<\begin{cases}-\ln(\alpha-1)+\ln(\alpha), & \text{при } 1<\alpha<2,\\ \ln 2, & \text{при } \alpha\geqslant 2.\end{cases} \tag{1.6}$$

Доказательство. Действительно, из предыдущей леммы следует, что при $\alpha>1$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{\alpha-1}<\zeta(\alpha)<\frac{1}{\alpha-1}+1=\frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

После логарифмирования получим соотношение (1.6). □

Положим при $\sigma \geqslant 1$

$$\theta_1(\alpha) = \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

Лемма 10. *При $\sigma \geqslant 1$ функция $\theta_1(\alpha)$ — непрерывная функция, заданная абсолютно, равномерно сходящемся рядом.*

При $\sigma \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$|\theta_1(\alpha)| < \frac{1}{2^\sigma - 1} - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma - 1} \leqslant 1.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $|\theta_1(\alpha)| \leqslant \theta_1(\sigma)$, $(\sigma \geqslant 1)$. Далее имеем:

$$\theta_1(\sigma) = \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{n\sigma}} < \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{n\sigma}} = \sum_p \frac{1}{p^\sigma(p^\sigma - 1)} =$$

$$= \sum_p \left(\frac{1}{p^\sigma - 1} - \frac{1}{p^\sigma} \right) < \frac{1}{2^\sigma - 1} - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma - 1},$$

$$\lim_{\sigma \to \infty} \theta_1(\alpha) = 0, \quad 0 < \theta_1(\sigma) < 1 \quad (\sigma \geqslant 1).$$

□

Лемма 11. *При $\alpha > 1$ справедливы соотношения*

$$\ln \zeta(\alpha) = \sum_p \frac{1}{p^\alpha} + \theta_1(\alpha), \quad 0 < \theta_1(\alpha) < 1, \tag{1.7}$$

$$-\ln(\alpha - 1) - 1 < \sum_p \frac{1}{p^\alpha} < \begin{cases} -\ln(\alpha-1) + \ln(\alpha), & \text{при } 1 < \alpha < 2, \\ \ln 2, & \text{при } \alpha \geqslant 2. \end{cases} \tag{1.8}$$

Доказательство. Действительно, при $\alpha > 1$ выполняются неравенства

$$0 < \frac{1}{p^\alpha} < \frac{1}{2}.$$

Поэтому абсолютно и равномерно сходятся при $\alpha \geqslant 1$ следующие ряды для логарифмов:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}$$

и

$$\ln P(\alpha) = \ln\left(\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}\right) = \sum_p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}.$$

Отсюда следует, что при $\alpha > 1$ справедливы оценки

$$0 < \ln P(\alpha) - \sum_p \frac{1}{p^\alpha} = \sum_p \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}} < \sum_p \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{p^\nu} = \sum_p \frac{1}{p(p-1)} < 1.$$

Таким образом,

$$\ln\zeta(\alpha) - 1 < \sum_p \frac{1}{p^\alpha} < \ln\zeta(\alpha).$$

□

Хорошо известна формула для главного значения логарифма дзета-функции (см. [133], стр. 8):

$$(\ln\zeta(\alpha)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^\alpha} \quad (\sigma > 1), \quad \Lambda_1(n) = \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \tag{1.9}$$

и $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{при } n = p^m, \\ 0, & \text{при } \nu(n) > 1 \text{ или } \nu(n) = 0. \end{cases}$$

Формулу для главного значения логарифма дзета-функции можно переписать в следующем виде:

$$(\ln\zeta(\alpha)) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\alpha}} = L(\alpha) + \theta_1(\alpha) \quad (\sigma > 1),$$

$$L(\alpha) = \sum_p \frac{1}{p^\alpha}, \quad \theta_1(\alpha) = \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

В силу леммы 11 при $\alpha > 1$ справедливы неравенства

$$-\ln(\alpha-1) - 1 < L(\alpha) < \begin{cases} -\ln(\alpha-1) + \ln(\alpha), & \text{при } 1 < \alpha < 2, \\ \ln 2, & \text{при } \alpha \geqslant 2. \end{cases}$$

Формула (1.9) требует уточнения, которое дается с помощью следующих лемм.

Лемма 12. *Для произвольного $T > 1$, $\sigma_0 > 1$ и $\varepsilon > 0$ найдётся $\tau > T$ такое что во всей полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ выполняются неравенства*

$$|L(\alpha + i\tau) - iL(\alpha)| < \varepsilon, \quad |L(\alpha - i\tau) + iL(\alpha)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем простое $P = P(\varepsilon, \sigma_0)$ такое, что

$$\sum_{p>P} \frac{1}{|p^\alpha|} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\sigma \geqslant \sigma_0 > 1),$$

тогда

$$\left| \sum_{p>P}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} - \sum_{p>P}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha+i\tau}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу равномерной, абсолютной сходимости ряда, задающего $L(\alpha)$, в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ это возможно.

Так как величины $\ln 2, \dots, \ln P$ линейно независимые действительные числа, то по теореме Кронекера (см. [133], стр. 180) найдётся такое $\tau > T$, что найдутся целые k_p такие, что выполнены условия

$$\left| \tau \frac{\ln p}{2\pi} - k_p + \frac{1}{4} \right| < \delta, \text{ при } p \leqslant P$$

которые можно переписать следующим образом

$$\tau \ln p - k_p 2\pi + \frac{\pi}{2} = \delta_p, \quad |\delta_p| < 2\pi\delta, \text{ при } p \leqslant P.$$

Отсюда следует, что для любого $p \leqslant P$ имеем

$$p^{-i\tau} = e^{-i\tau \ln p}, \quad i = e^{\frac{i\pi}{2}},$$
$$p^{-i\tau} = e^{\frac{i\pi}{2} - i\delta_p} = ie^{-i\delta_p},$$
$$\left|p^{i\tau} + i\right| = \left|p^{-i\tau} - i\right| = \left|e^{-i\delta_p} - 1\right| = |\cos(\delta_p) - 1 - i\sin(\delta_p)| =$$
$$= \sqrt{2 - 2\cos(\delta_p)} = 2\left|\sin \frac{\delta_p}{2}\right| \leqslant |\delta_p| < 2\pi\delta.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{p\leqslant P} \frac{i}{p^\alpha} - \sum_{p\leqslant P} \frac{1}{p^{\alpha+i\tau}} \right| < 2\pi\delta\zeta(\sigma_0), \quad \left| \sum_{p\leqslant P} \frac{-i}{p^\alpha} - \sum_{p\leqslant P} \frac{1}{p^{\alpha-i\tau}} \right| < 2\pi\delta\zeta(\sigma_0).$$

Полагая $\delta = \frac{\varepsilon}{4\pi\zeta(\sigma_0)}$, получим

$$|L(\alpha + i\tau) - iL(\alpha)| < \varepsilon, \quad |L(\alpha - i\tau) + iL(\alpha)| < \varepsilon$$

и лемма полностью доказана. □

Лемма 13. *Для любого натурального N существует τ_N, такое что на отрезке*

$$\left[1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}+i\tau_N;2+i\tau_N\right]$$

найдутся точки $\alpha_k=\sigma_k+i\tau_N$, выражение для логарифма дзета-функции

$$\ln\zeta(\alpha)=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{m\alpha}},$$

в которых принимает значения для k-ой ветви $\ln_k\zeta(\alpha)$, а на отрезке

$$\left[1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}-i\tau_N;2-i\tau_N\right]$$

найдутся точки $\alpha_{-k}=\sigma_{-k}-i\tau_N$ выражение для логарифма дзета-функции, в которых принимает значения для $-k$-ой ветви $\ln_{-k}\zeta(\alpha)$ $(k=0,1,\dots,N)$.

Доказательство. Во-первых, для любого вещественного t имеем

$$|\ln\zeta(2+it)|=|L(2+it)+\theta_1(2+it)|\leqslant\ln\zeta(2)=\ln\frac{\pi^2}{6}=0.498..<\frac{\pi}{6},$$

поэтому для любого вещественного t значение

$$\ln\zeta(2+it)=\sum_p\sum_{m=1}^{2}\frac{1}{mp^{m(2+it)}}$$

— главное значение логарифма.

Возьмём в лемме 12 $\sigma_0=1+e^{-2(N+2)\pi+\frac{5}{2}}$ и $\varepsilon=\frac{1}{2}$, тогда найдётся τ_N такое, что

$$|L(\sigma)i-L(\sigma+i\tau_N)|<\frac{1}{2},\quad|-L(\sigma)i-L(\sigma-i\tau_N)|<\frac{1}{2}$$

для любого $\sigma\geqslant\sigma_0$.

Действительная функция $L(\sigma)$ монотонно убывает. При $\sigma=\sigma_0$ имеем

$$L(\sigma_0)>-\ln(\sigma_0-1)-1=2(N+2)\pi-\frac{5}{2}-1.$$

Поэтому $L(\sigma_0+i\tau_N)+\theta_1(\sigma_0+i\tau_N)=a+bi$ и

$$b=L(\sigma_0)+\delta,\quad|\delta|<\frac{3}{2},\quad b>2(N+1)\pi-\frac{5}{2}-1-\frac{3}{2}=2(N+1)\pi-5.$$

Но это означает, что величина $L(\sigma_0 + i\tau_N) + \theta_1(\sigma_0 + i\tau_N) = a + bi$ принадлежит k-ой ветви логарифма, где

$$k = -\left[-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] \geqslant -\left[-\frac{2(N+1)\pi - 5}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] = N.$$

Отсюда следует, что непрерывная функция

$$\ln\zeta(\sigma + i\tau_N) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m(\sigma+i\tau_N)}}$$

при изменении σ от σ_0 до 2 последовательно движется по ветвям $\ln_k$ от $k = N$ до $k = 0$.

Аналогично доказывается второе утверждение леммы в силу сопряженности значения логарифма. □

Теорема 2. *Для любого натурального N существует τ_N, такое что на отрезке*

$$\left[1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}} + i\tau_N; 2 + i\tau_N\right]$$

найдутся точки $\alpha_k = \sigma_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — отрицательное число ($k = 1, \ldots, N$);

— $\alpha_k = \lambda_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — положительное число ($k = 1, \ldots, N$);

— $\alpha_k = \delta_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — чисто мнимое число ($k = 1, \ldots, N$).

Доказательство. Действительно, в силу предыдущей леммы на отрезке

$$\left[1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}} + i\tau_N; 2 + i\tau_N\right]$$

функция $\ln\zeta(\sigma + i\tau_N)$ принимает последовательно значения из различных ветвей логарифмической функции. При переходе от одной ветви к другой логарифмируемая функция проходит через отрицательное значение. Так как таких переходов не менее N, то первое утверждение теоремы доказано.

Два следующих утверждения следуют из лемм 3. □

1.6. Ветви логарифма одной обобщённой L-функции с Эйлеровым произведением

Рассмотрим мультипликативную функцию $h(n) = i^{\sum_{p|n}\alpha_p}$ при $n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}$ и ряд Дирихле $M(\alpha, h)$, заданный равенством

$$M(\alpha,h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^{\alpha}} = \prod_{p} \left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Следующая лемма показывает, что почленное логарифмирование Эйлерова произведения для $M(\alpha, h)$ не дает главного значения логарифма $M(\alpha, h)$.

Лемма 14. *Существует $\delta > 0$ такое, что при $1 < \alpha < 1 + \delta$ справедливо неравенство*

$$(\ln M(\alpha,h)) \neq \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $\sigma > 1$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{i}{p^{\alpha}}\right| < \frac{1}{2},$$

поэтому абсолютно и равномерно сходятся при $\sigma \geqslant 1$ следующие ряды для логарифмов:

$$\ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}, \quad \ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)^{-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}},$$

которые в силу леммы 4 задают главные значения логарифмов. Таким образом

$$\left(\ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}, \quad \left(\ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)^{-1}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}.$$

Рассмотрим значение $\ln M(\alpha, h)$, заданное рядом

$$\ln M(\alpha,h) = \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}} = iL(\alpha) + R_h(\alpha), \qquad R_h(\alpha) = \sum_{p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}}.$$

который получен почленным логарифмированием Эйлерова произведения.

Нетрудно видеть, что $|R_h(\alpha)| \leqslant R(\sigma) < 1$, $(\sigma > 1)$.

Так как при $\alpha > 1$ имеем:

$$\lim_{\alpha \to 1^+} L(\alpha) = \infty,$$

то найдётся $\delta > 0$ такое, что при $1 < \alpha < 1 + \delta$ будут выполнены неравенства

$$L(\alpha) + \Im R(\alpha) > \pi,$$

и, значит, $(\ln M(\alpha, h)) \neq iL(\alpha) + R(\alpha)$, что и требовалось доказать. $\Box$

Замечание 1. *Из доказательства леммы следует, что при $\alpha \to 1^+$ логарифм от $M(\alpha, h)$, заданный равенством*

$$\ln M(\alpha, h) = iL(\alpha) + R(\alpha),$$

пробегает все ветви логарифмической функции.

1.7. Заключение к первой главе

Из материала первой главы следует, что почленное логарифмирование эйлерова произведения задает в области абсолютной сходимости непрерывную функцию, которая в подходящей полуплоскости задает главное значение логарифма эйлерова произведения, а при приближении к границе области абсолютной сходимости пробегает все ветви логарифмической функции. Именно это глубокое свойство используется при доказательстве теоремы Дэвенпорта–Хельбронна [155].

Глава 2

Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле

2.1. Введение ко второй главе

Гиперболическая дзета-функция решёток возникла в методе оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова [89], [95], [102] — одному из центральных направлений исследований в теоретико-числовом методе в приближенном анализе. Термин был введён в работе [51]. Теория гиперболической дзета-функции решёток излагается в монографиях [102], [59] и [220], которые опираются на результаты из работ [42]–[51], [56]–[74], [114], [115]. Теории гиперболической дзета-функции решёток и обобщенной гиперболической дзета функции сдвинутых решёток были посвящены диссертации [54], [119], [116], [57] и [47], содержание которых отражено в авторефератах [55], [120], [117], [58] и [48].

В работе [188] получена новая асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки квадратичного поля. Таким образом, теория развивается как для произвольной размерности s, так и для конкретных значений, а именно, для $s = 2$, а в работе [201] для алгебраических решёток произвольной размерности $s > 2$. В работе [191] внимание сосредоточено на одномерном случае, так как логика развития теории показала, что именно к этому случаю естественно сводится вся теория гиперболической дзета-функции декартовых решёток.

В большой обзорной работе [215] и в работе [186] приводятся последние достижения в этой теории — даётся вывод функционального уравнения для дзета-функции произвольной декартовой решётки. Кроме этого, в последнем разделе работы [215] даётся список актуальных нерешенных проблем теории гиперболической дзета-функции решёток. Одной из таких проблем — получению аналитического продолжения и выводу функционального уравнения для гиперболической дзета-функции Гурвица — посвящена работа [191].

Данная постановка вопросов возникла естественным образом в процессе изучения гиперболической дзета-функции решётки приближений Дирихле квадратичной иррациональности.

Как обычно, используются обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел и $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел;

через $\{x\}$ и $[x]$ обозначаются дробная часть и целая часть вещественного числа x: $0 \leqslant \{x\} < 1$, $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leqslant x < [x] + 1$, $x = [x] + \{x\}$.

В этой главе для вещественных m используем очень удобное обозначение Коробова $\overline{m} = \max(1, |m|)$. Как правило, из контекста видно, что речь идет об обозначении Коробова, а не о комплексно-сопряженном числе.

2.2. Цели и содержание главы

В работе [215] были перечислены несколько актуальных нерешенных проблем теории гиперболической дзета-функции решёток. Одной из таких проблем является **Проблема существования аналитического продолжения.** Такая постановка вопроса естественна, так как каждая гиперболическая дзета-функция решёток является рядом Дирихле, а изучение рядов Дирихле как функции комплексного переменного — одна из центральных задач теории функций комплексного переменного и аналитической теории чисел.

Как показано ранее в наших предыдущих работах, для любой декартовой решётки существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки. Более того, для произвольной декартовой решётки получено функциональное уравнение, задающее это аналитическое продолжение в явном виде.

Естественно возникают вопросы о существовании аналитического продолжения для гиперболической дзета-функции в случае, когда решётка не является декартовой. Простейшей такой решёткой является решётка приближений Дирихле квадратичных иррациональностей.

По-видимому, ключом к решению проблемы аналитического продолжения является дальнейшее изучение возможности предельного перехода для гиперболических дзета-функций декартовых решеток в левой полуплоскости по сходящейся последовательности декартовых решёток. На такой подход наводит тот факт, что в правой полуплоскости для последовательности решёток, сходящихся к некоторой решётки, имеем равномерную сходимость последовательности соответствующих гиперболических дзета-функций решёток к гиперболической дзета-функции предельной решётки [74].

Если такой предел всегда существует, то, переходя в функциональном уравнении слева и справа к пределу, получим функциональное уравнение для предельной решётки. Наиболее перспективно должно быть получение функционального уравнения только в терминах взаимных решёток, так как сходимость последовательности решёток эквивалентна сходимости соответствующих взаимных решёток. Здесь необходимо подчеркнуть, что основная сложность должна быть в случае, когда предельная решётка недекартовая.

В процессе осуществления указанной программы для случая решётки приближений Дирихле квадратичных иррациональностей естественным образом возникло понятие гиперболической дзета-функции Гурвица и вопрос об аналитическом продолжении этой гиперболической дзета-функции, которая тесно связана с гиперболической дзета-функцией одномерной сдвинутой решётки.

Цели данной главы —

- дать обзор по теории аналитического продолжения дзета-функции Гурвица первого и второго родов, гиперболической дзета-функции Гурвица, гиперболической дзета-функцией одномерной сдвинутой решётки;

- везде, где это удается, доказать **теоремы о непрерывности** соответствующих объектов исследования на подходящих множествах параметров.

В третьем разделе мы рассматриваем несобственные интегралы с полиномами Бернулли, которые естественно возникают в этой проблематике, когда от ряда Дирихле с помощью теоремы Абеля переходят к несобственному интегралу.

В четвертом разделе приводятся все необходимые факты о периодизированной по параметру b дзета-функции Гурвица $\zeta(\alpha; b)$ и о дзета-функции Гурвица второго рода.

В пятом разделе вводится понятие гиперболической дзета-функции Гурвица и развивается соответствующая теория, которая во многом является аналогом теории дзета-функции Гурвица.

На основании полученных результатов в шестом разделе строится функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции сдвинутых диагональных решёток.

В седьмом разделе дается подробное изложение теоремы С. М. Воронина о нулях суммы дзета-функций Гурвица по модулю 5 в критической полосе, а в восьмом разделе аналогичный результат излагается для произвольного простого модуля $p > 5$.

Наконец, в заключении обсуждаются полученные результаты и возникающие трудности при реализации намеченной программы.

Пропущенные доказательства можно найти в работах [191], [188].

2.3. Полиномы Бернулли и несобственные интегралы с ними

Для дальнейшего нам потребуются числа и полиномы Бернулли, сведения о которых мы приведём из [37] и [102].

Числа и полиномы Бернулли определяются равенствами:

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{n+1-k} B_k = 0 \quad (n \geqslant 1),$$

$$B_0(x) = 1, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k} \quad (n \geqslant 1),$$

$$y_\nu(x) = B_\nu(x) - B_\nu \quad (\nu \geqslant 1).$$

Для полиномов Бернулли справедливы следующие важные свойства:

$$B_n(1) - B_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, n \geqslant 0; \\ 1, & \text{если } n = 1; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1); \tag{2.2}$$

$$\int\limits_0^1 B_n(x)dx = 0 \quad (n \geqslant 1). \tag{2.3}$$

Нетрудно подсчитать первые пять многочленов $y_\nu(x)$:

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2 - x, \quad y_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad y_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2,$$
$$y_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.$$

Из следующей леммы видно, что периодизированные многочлены Бернулли $y_\nu(\{x\})$ принадлежат классу E_1^ν периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье и имеют непосредственное отношение к теоретико-числовому методу Н. М. Коробова [102].

Лемма 15. *Справедливо разложение в ряд Фурье*

$$y_\nu(\{x\}) = -B_\nu + {\sum_{m=-\infty}^{\infty}}' \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}+\left\{\frac{\nu}{2}\right\}} i^{2\left\{\frac{\nu}{2}\right\}} \nu!}{(2\pi m)^\nu} e^{2\pi i m x} =$$

$$= \begin{cases} -B_{2\mu} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^{\mu-1}(2\mu)!}{(2\pi m)^{2\mu}} \cos 2\pi m x, & \text{\textit{при} } \nu = 2\mu, \\ \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{\pi m} \sin 2\pi m x, & \text{\textit{при} } \nu = 1, \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^{\mu}(2\mu+1)!}{(2\pi m)^{2\mu+1}} \sin 2\pi m x, & \text{\textit{при} } \nu = 2\mu+1, \end{cases} \quad (\mu = 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Доказательство. Действительно, для разложения в ряд Фурье

$$y_\nu(\{x\}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C(m) e^{2\pi i m x}, \quad C(m) = \int\limits_0^1 y_\nu(x) e^{-2\pi i m x} dx$$

имеем

$$C(0)=\int\limits_0^1 y_\nu(x)dx=\int\limits_0^1 (B_\nu(x)-B_\nu)\,dx=\int\limits_0^1 B_\nu(x)dx-B_\nu=$$

$$=-B_\nu=\begin{cases} -B_{2\mu}, & \text{при } \nu=2\mu,\\ \frac{1}{2}, & \text{при } \nu=1, \qquad\qquad (\mu=1,2,\ldots),\\ 0, & \text{при } \nu=2\mu+1,\end{cases}$$

согласно равенству (2.3) и свойствам чисел Бернулли.

При $m\neq 0$ получим

$$C(m)=\int\limits_0^1 y_\nu(x)e^{-2\pi imx}dx=\frac{y_\nu(x)}{-2\pi im}e^{-2\pi imx}\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{y'_\nu(x)}{-2\pi im}e^{-2\pi imx}dx=$$

$$=-\frac{\nu}{-2\pi im}\int\limits_0^1 B_{\nu-1}(x)e^{-2\pi imx}dx=\ldots=\frac{(-1)^{\nu-1}\nu!}{(-2\pi im)^{\nu-1}}\,\frac{B_1(x)}{-2\pi im}e^{-2\pi imx}\Big|_0^1-$$

$$-\frac{(-1)^{\nu-1}\nu!}{(-2\pi im)^{\nu}}\int\limits_0^1 e^{-2\pi imx}dx=\frac{(-1)^{\nu-1}\nu!}{(-2\pi im)^{\nu}}=\frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}+\left\{\frac{\nu}{2}\right\}}i^{2\left\{\frac{\nu}{2}\right\}}\nu!}{(2\pi m)^{\nu}}.$$

□

В работе [191] для любой пары параметров (q,β) из множества

$$\mathcal{I}=\{(q,\beta)|0<\beta\leqslant 1, q\geqslant 0\}$$

рассматривался несобственный интеграл при $\nu=1,2,\ldots$

$$I_\nu(\alpha;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\int\limits_q^\infty\frac{y_\nu(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}, \tag{2.5}$$

который абсолютно сходится для $\alpha=\sigma+it$ при $\sigma>1-\nu$.

Расширим область изменения параметров до $\mathcal{I}_1$, где

$$\mathcal{I}_1=\{(q,\beta)|0<\beta+q\},\quad \mathcal{I}_2=\left\{(q,\beta)\;\middle|\;\begin{array}{ll} 0<\beta+q, & \text{при } \{\beta\}>0,\\ q\geqslant 1-[\beta], & \text{при } \{\beta\}=0.\end{array}\right\}.$$

Ясно, что $\mathcal{I}\subset\mathcal{I}_2\subset\mathcal{I}_1$. Кроме того, следующее преобразование переводит $\mathcal{I}_2$ в $\mathcal{I}$. Положим $\beta_1=\{\beta\}$, $q_1=q+[\beta]$ при $\{\beta\}>0$ и $\beta_1=1$, $q_1=q+[\beta]-1$ при

$\{\beta\}=0$, тогда для β_1 и q_1 выполнены соотношения $0<\beta_1\leqslant 1$, $q_1\geqslant 0$ и

$$I_\nu(\alpha;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\int\limits_q^\infty\frac{y_\nu(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}=$$

$$=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\int\limits_{q_1}^\infty\frac{y_\nu(\{x\})dx}{(x+\beta_1)^{\alpha+\nu}}=I_\nu(\alpha;q_1,\beta_1). \tag{2.6}$$

В силу равенства (2.6) все ниже следующие утверждения, доказанные в [191], остаются справедливыми для новой расширенной области изменения параметров.

Отметим сразу, что, по-прежнему, $I_\nu(\alpha;q,\beta)=0$ при $\alpha=0,-1,\ldots,2-\nu$, так как при этих значения α несобственный интеграл абсолютно сходится, а множитель перед интегралом обращается в ноль. Вопрос о значении в точке $\alpha=1-\nu$ должен исследоваться отдельно, так как интеграл в определении (2.5) расходится, а аналитическое продолжение будет построено позже.

Лемма 16. *Справедливо равенство*

$$I_\nu(\alpha;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)-$$

$$-\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-2}(\alpha+\mu)\cdot\frac{(\alpha+\nu)B_\nu}{(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\frac{B_\nu\beta}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+I_{\nu+1}(\alpha;q,\beta). \tag{2.7}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\int\limits_0^1 y_\nu(x)dx=-B_\nu\quad(\nu\geqslant 1). \tag{2.8}$$

Действительно,

$$\int\limits_0^1 y_\nu(x)dx=\int\limits_0^1\left(B_\nu(x)-B_\nu\right)dx=\int\limits_0^1 B_\nu(x)dx-B_\nu=-B_\nu$$

согласно равенству (2.3).

Далее заметим, что

$$\int\limits_0^x y_\nu(\{t\})dt = [x]\int\limits_0^1 y_\nu(t)dt + \int\limits_0^{\{x\}} y_\nu(t)dt = -[x]B_\nu + \int\limits_0^{\{x\}} y_\nu(t)dt =$$

$$= -xB_\nu + \int\limits_0^{\{x\}} \left(y_\nu(t) + B_\nu\right)dt = -xB_\nu + \left(\frac{B_{\nu+1}(t)}{\nu+1}\right)\Bigg|_0^{\{x\}} =$$

$$= -xB_\nu + \frac{B_{\nu+1}(\{x\}) - B_{\nu+1}}{\nu+1} = -xB_\nu + \frac{y_{\nu+1}(\{x\})}{\nu+1}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_q^\infty \frac{y_\nu(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}} = \left(\frac{\int\limits_0^x y_\nu(\{t\})dt}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)\Bigg|_q^\infty + (\alpha+\nu)\int\limits_q^\infty \frac{\left(\int\limits_0^x y_\nu(\{t\})dt\right)dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}} =$$

$$= \left(\frac{-xB_\nu + \frac{y_{\nu+1}(\{x\})}{\nu+1}}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)\Bigg|_q^\infty + (\alpha+\nu)\int\limits_q^\infty \frac{\left(-xB_\nu + \frac{y_{\nu+1}(\{x\})}{\nu+1}\right)dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}} =$$

$$= \frac{qB_\nu - \frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}} + (\alpha+\nu)B_\nu\left(-\int\limits_q^\infty \frac{dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}} + \int\limits_q^\infty \frac{\beta dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}\right) +$$

$$+\frac{\alpha+\nu}{\nu+1}\int\limits_q^\infty \frac{y_{\nu+1}(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}} = \frac{qB_\nu - \frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}} +$$

$$+(\alpha+\nu)B_\nu \cdot \left(-\frac{1}{(\alpha+\nu-1)(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}} + \frac{\beta}{(\alpha+\nu)(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right) +$$

$$+\frac{\alpha+\nu}{\nu+1}\int\limits_q^\infty \frac{y_{\nu+1}(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}.$$

Подставляя последний результат в правую часть равенства (2.5), получим

$$I_\nu(\alpha;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+(\alpha+\nu)B_\nu\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{1}{(\alpha+\nu-1)(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+\frac{\beta}{(\alpha+\nu)(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)+\frac{\alpha+\nu}{\nu+1}\int\limits_q^\infty\frac{y_{\nu+1}(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)-\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-2}(\alpha+\mu)\cdot\frac{(\alpha+\nu)B_\nu}{(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+$$

$$+\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\frac{B_\nu\beta}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+I_{\nu+1}(\alpha;q,\beta)$$

и лемма полностью доказана. □

Замечание 2. *Из указанной леммы вытекает, что функция $I_\nu(\alpha;q,\beta)$, заданная в правой полуплоскости $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma>1-\nu)$, последовательно аналитически продолжается на всю комплексную α-плоскость.*

Теперь мы можем ответить на вопрос о величине $I_\nu(1-\nu;q,\beta)$.

Лемма 17. *Справедливо равенство*

$$I_\nu(1-\nu;q,\beta)=\frac{(-1)^\nu B_\nu}{\nu}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Действительно,

$$I_\nu(1-\nu;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(1-\nu+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{q+\beta}\right)-$$

$$-\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-2}(1-\nu+\mu)\cdot B_\nu+\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(1-\nu+\mu)\cdot\frac{B_\nu\beta}{q+\beta}+I_{\nu+1}(1-\nu;q,\beta)=\frac{(-1)^\nu B_\nu}{\nu}.$$

□

Теорема 3. *Для любой точки (q,β) из открытой области $\mathcal{I}_1$ функция $I_\nu(\alpha;q,\beta)$ непрерывна.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения и доказанных лемм. □

2.4. Периодизированная по вещественному параметру дзета-функция Гурвица и дзета-функция Гурвица второго рода

В дальнейшем будет использоваться периодизированная по вещественному параметру b дзета-функция Гурвица

$$\zeta^*(\alpha;b)=\sum_{0<n+b}(n+b)^{-\alpha}=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}, & \text{при } \{b\}=0,\\ \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+\{b\})^{-\alpha}, & \text{при } \{b\}>0\end{cases}, \quad (\sigma>1). \tag{2.10}$$

Кроме того, определим дзета-функцию Гурвица второго рода $\zeta^{**}(\alpha;b)$ равенством

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{\alpha}}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi inb}}{\overline{n}^{\alpha}}, \quad (\sigma>1) \tag{2.11}$$

и дзета-функцию Гурвица третьего рода $\zeta^{***}(\alpha;b)$ равенством

$$\zeta^{***}(\alpha;b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nb}{n^{\alpha}}, \quad (\sigma>1). \tag{2.12}$$

По теореме Абеля (см. [143] стр. 106) получаем интегральное представление для периодизированной дзета-функции Гурвица ($\sigma>1$):

$$\zeta^*(\alpha;b)=\begin{cases}\alpha\int\limits_{1}^{\infty}\frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}=0,\\ \\ \alpha\int\limits_{0}^{\infty}\frac{([x]+1)dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=\alpha\int\limits_{\{b\}}^{\infty}\frac{[x+1-\{b\}]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}\neq 0\end{cases} \tag{2.13}$$

и интегральное представление для дзета-функции Гурвица второго рода ($\sigma>1$):

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\begin{cases}\alpha\int\limits_{1}^{\infty}\frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}=0,\\ \\ \alpha\int\limits_{1}^{\infty}\frac{(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\,dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}\neq 0,\end{cases} \tag{2.14}$$

которое получается из выражения для сумматорной функции при $\{b\} > 0$

$$A(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \cos(2\pi nb) = \frac{1}{\sin(\pi b)} \sum_{n=1}^{[x]} \cos(2\pi nb)\sin(\pi b) =$$
$$= \frac{1}{2\sin(\pi b)} \sum_{n=1}^{[x]} (\sin(\pi(2n+1)b) - \sin(\pi(2n-1)b)) =$$
$$= \frac{\sin(\pi(2[x]+1)b) - \sin(\pi b)}{2\sin(\pi b)}.$$

Аналогично, получается интегральное представление для дзета-функции Гурвица третьего рода ($\sigma > 1$):

$$\zeta^{***}(\alpha; b) = \begin{cases} 0, & \text{при } \{b\} = 0, \\ \alpha \int\limits_1^\infty \frac{(\cos(\pi b) - \cos(\pi(2[x]+1)b))\,dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\} \neq 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

которое получается из выражения для сумматорной функции при $\{b\} > 0$

$$A(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \sin(2\pi nb) = \frac{1}{\sin(\pi b)} \sum_{n=1}^{[x]} \sin(2\pi nb)\sin(\pi b) =$$
$$= \frac{1}{2\sin(\pi b)} \sum_{n=1}^{[x]} (\cos(\pi(2n-1)b) - \cos(\pi(2n+1)b)) =$$
$$= \frac{\cos(\pi b) - \cos(\pi(2[x]+1)b)}{2\sin(\pi b)}.$$

2.4.1. Аналитическое продолжение периодизированной по вещественному параметру дзета-функции Гурвица

Нетрудно выписать различные явные формулы для аналитического продолжения на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, периодизированной дзета-функции Гурвица. В этой точке при всех вещественных значениях b периодизированная дзета-функции Гурвица имеет полюс первого порядка с вычетом равным 1.

Приведенные ниже формулы покрывают всю комплексную плоскость, задавая явный вид аналитического продолжения $\zeta^*(\alpha; b)$.

Лемма 18. *Справедливы равенства*

$$\zeta^*(\alpha;b)=\begin{cases}\sum\limits_{0<n+b}(n+b)^{-\alpha}, & \sigma>1,\\[2ex] \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1), & {\scriptstyle \{b\}=0, \atop \sigma>-1},\\[2ex] \dfrac{1}{\{b\}^\alpha}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\alpha-1}+(1-\{b\})\left(1-\dfrac{\alpha\{b\}}{2}\right)-I_2\left(\alpha;1-\{b\},\{b\}\right), & {\scriptstyle \{b\}\neq 0, \atop \sigma>-1},\\[2ex] 2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}+\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}\right), & \sigma<0.\end{cases} \tag{2.16}$$

Доказательство. Действительно, первое равенство при $\sigma>1$ совпадает с определением периодизированной по вещественному параметру b дзета-функции Гурвица (2.10).

Во втором случае из первой формулы в равенстве (2.13) и леммы 16 (стр. 61) имеем при $b\in\mathbb{Z}$

$$\zeta^*(\alpha;b)=\alpha\int\limits_1^\infty\frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}=\alpha\int\limits_1^\infty\frac{(x-\{x\})dx}{x^{\alpha+1}}=\frac{\alpha}{\alpha-1}-\alpha\int\limits_1^\infty\frac{\{x\}dx}{x^{\alpha+1}}=$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-1}-I_1(\alpha;0,1)=\frac{\alpha}{\alpha-1}-\alpha\cdot\left(\frac{0\cdot B_1-\frac{y_2(0)}{2}}{1}\right)+$$

$$+\frac{(\alpha+1)B_1}{1}-\alpha\cdot\frac{B_1}{1}-I_2(\alpha;0,1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1),$$

что доказывает второй случай равенства (2.16).

Аналогично, в третьем случае из второй формулы в равенстве (2.13) имеем при $b\notin\mathbb{Z}$

$$\zeta^*(\alpha;b)=\alpha\int\limits_0^\infty\frac{([x]+1)dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=\alpha\int\limits_0^{1-\{b\}}\frac{dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}+\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{([x]+1)dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=$$

$$= \frac{1}{\{b\}^\alpha} - 1 + \alpha \int\limits_{1-\{b\}}^{\infty} \frac{(x+1-\{x\})dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}} = \frac{1}{\{b\}^\alpha} - 1 + \alpha \int\limits_{1-\{b\}}^{\infty} \frac{dx}{(x+\{b\})^{\alpha}} +$$

$$+\alpha \int\limits_{1-\{b\}}^{\infty} \frac{(1-\{b\})dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}} - \alpha \int\limits_{1-\{b\}}^{\infty} \frac{\{x\}dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}} =$$

$$= \frac{1}{\{b\}^\alpha} - 1 + \frac{\alpha}{\alpha-1} + 1 - \{b\} - I_1(\alpha, 1-\{b\}, \{b\}) =$$

$$= \frac{1}{\{b\}^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} + 1 - \{b\} - \left(\alpha \cdot \frac{(1-\{b\})B_1 - \frac{y_2(\{1-\{b\}\})}{2}}{1} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha+1)B_1}{1} + \alpha \cdot \frac{B_1 \cdot \{b\}}{1} + I_2(\alpha; 1-\{b\}, \{b\}) \right) =$$

$$= \frac{1}{\{b\}^\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha-1} + (1-\{b\}) \left(1 - \frac{\alpha\{b\}\}}{2}\right) - I_2\left(\alpha; 1-\{b\}, \{b\}\right),$$

что доказывает третий случай равенства (2.16).

Наконец, четвертый случай следует из функционального уравнения для дзета-функции Гурвица (см. [133], стр. 48), так как

$$\zeta^*(\alpha; b) = \begin{cases} \zeta(\alpha; \{b\}), & \text{при } \{b\} > 0; \\ \zeta(\alpha) = \zeta(\alpha; 1), & \text{при } \{b\} = 0. \end{cases}$$

□

2.4.2. Множитель Римана и множитель Гурвица

Через

$$M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \tag{2.17}$$

будем обозначать множитель из функционального уравнения для дзета-функции Римана (См. [133], стр. 19)

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha),$$

а через $M_1(\alpha)$ — множитель

$$M_1(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \cos\frac{\pi\alpha}{2}$$

из функционального уравнения для дзета-функции Гурвица (См. [133], стр. 48)

$$\zeta(\alpha; b) = M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha, b) + M_1(\alpha)\zeta^{***}(1-\alpha, b).$$

Легко проверить, что
$$M(\alpha)\cdot M(1-\alpha)=1. \tag{2.18}$$
Действительно,
$$M(\alpha)\cdot M(1-\alpha)=\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\frac{2\Gamma(\alpha)}{(2\pi)^{\alpha}}\sin\frac{\pi(1-\alpha)}{2}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi}\sin\pi\alpha=1$$
согласно формулы дополнения для гамма-функции (см. [136], стр. 19).

Множитель $M(\alpha)$ будем называть *множителем Римана*, а формулу (2.18) — *формулой дополнения для множителя Римана*, а множитель $M_1(\alpha)$ — *множителем Гурвица.*

Из свойств гамма-функции, определения (2.17) и формулы дополнения (2.18) следует, что множитель Римана — аналитическая функция для любого комплексного α, кроме точек $\alpha=1,3,5,\ldots$ — нечетных натуральных значений, где он имеет полюс первого порядка.

Действительно, при $\alpha=n\in\mathbb{N}$ имеется полюс первого порядка у гамма-функции $\Gamma(1-\alpha)$ и это все полюса, а множитель $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ имеет значения
$$\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}(-1)^m, & \text{при } n=1+2m,\ m=0,1,2,\ldots.\\ 0, & \text{при } n=2m,\ m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$
Поэтому при нечетных натуральных значениях $\alpha=1,3,5,\ldots$ множитель Римана $M(\alpha)$ имеет полюса с вычетом
$$\operatorname*{Res}_{\alpha=1+2n}M(\alpha)=\frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{-2n}}\operatorname*{Res}_{\alpha=-2n}\Gamma(\alpha)=\frac{2(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!}. \tag{2.19}$$
При натуральных четных значений $\alpha=2n$, $(n\in\mathbb{N})$ имеем:
$$M(\alpha)=\lim_{\alpha\to 2n}\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}}\sin\frac{\pi\alpha}{2}=\frac{2}{(2\pi)^{1-2n}}\lim_{\alpha\to 2n}\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha-(1-2n))\cdot$$
$$\cdot\lim_{\alpha\to 2n}\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)}\lim_{\alpha\to 2n}\frac{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)}{2n-\alpha}=\frac{2}{(2\pi)^{1-2n}}\cdot\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n-1)!}.$$
По свойствам гаммы функции $\Gamma(1+2n)=(2n)!$, $(n=0,1,2,\ldots)$. Поэтому в четных отрицательных значениях α множитель Римана имеет нули первого порядка
$$M(-2n)=\frac{2\Gamma(1+2n)}{(2\pi)^{1+2n}}\sin(-\pi n)=0,\quad n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\bigcup\{0\}. \tag{2.20}$$

Так как гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то нули множителя Римана являются нулями функции $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ и формулой (2.20) исчерпываются все нули множителя Римана.

Наконец, в точках $\alpha = -1, -3, -5, \ldots$ имеем:

$$M(\alpha) = M(1-2n) = \frac{2\Gamma(2n)}{(2\pi)^{2n}}\sin\frac{\pi(1-2n)}{2} = \frac{2(2n-1)!(-1)^n}{(2\pi)^{2n}}, \quad (n\in\mathbb{N})$$

и

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Следующая лемма является своеобразным функциональным уравнением для периодизированной по параметру b дзета-функции Гурвица и дзета-функции Гурвица второго рода.

Лемма 19. *Для $0 < b < 1$ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо равенство*

$$\zeta^*(\alpha;b)+\zeta^*(\alpha;1-b) = 2M(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} = 2M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha;b) =$$
$$= M(\alpha)\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi inb}}{\overline{n}^{1-\alpha}}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Действительно, при $\sigma < 0$ согласно (2.16) имеем

$$\zeta^*(\alpha;b)+\zeta^*(\alpha;1-b)=2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}+\cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}\right)+$$
$$+2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n(1-b)}{n^{1-\alpha}}+\cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n(1-b)}{n^{1-\alpha}}\right) =$$
$$= 4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} = 2M(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} =$$
$$= 2M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha;b) = M(\alpha)\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi inb}}{\overline{n}^{1-\alpha}}$$

что и требовалось доказать. □

Эта лемма наводит на мысль, что удобно ввести две новые функции:

$$\tilde{\zeta}^*(\alpha;b) = \zeta^*(\alpha;b)+\zeta^*(\alpha;1-b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{|n+b|^{\alpha}},$$

которая называется дзета-функцией Гурвица первого рода, и

$$\tilde{\zeta}^{**}(\alpha;b)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi inb}}{|n|^{\alpha}},$$

которая называется симметризованной дзета-функцией Гурвица второго рода. В новых обозначениях равенство (2.21) приобретет более элегантный вид:

$$\tilde{\zeta}^{*}(\alpha;b)=M(\alpha)\tilde{\zeta}^{**}(1-\alpha;b). \tag{2.22}$$

2.4.3. Аналитическое продолжение дзета-функции Гурвица второго рода

Справедлив аналог леммы 18 (стр. 66) для дзета-функции Гурвица второго рода.

Лемма 20. *Справедливы равенства*

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{\alpha}}, & \sigma>1,\\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1), & {}^{\{b\}=0,}_{\sigma>-1},\\[2ex] \displaystyle\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^{\infty}\frac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}-\frac{1}{2}, & {}^{\{b\}\neq 0,}_{\sigma>-1},\\[2ex] \displaystyle\frac{M(\alpha)}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\overline{n+b}^{1-\alpha}}=\frac{M(\alpha)}{2}\left(\zeta^{*}(1-\alpha;b)+\zeta^{*}(1-\alpha;1-b)\right), & {}^{\{b\}\neq 0,}_{\sigma<0},\\ M(\alpha)\zeta(1-\alpha), & {}^{\{b\}=0,}_{\sigma<0}.\end{cases} \tag{2.23}$$

Доказательство. Действительно, первое равенство при $\sigma>1$ совпадает с определением дзета-функции Гурвица второго рода (2.11) (стр. 64).

Второй случай совпадает со вторым случаем равенства (2.16) (стр. 66), так как при $\{b\}=0$ имеем равенство $\zeta^{**}(\alpha;b)=\zeta^{*}(\alpha;b)$.

В третьем случае воспользуемся вторым интегральным представлением (2.14) (стр. 64) для дзета-функции Гурвица второго рода, получим, интегрируя по частям,

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\alpha\int\limits_{1}^{\infty}\frac{(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\,dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+1}}=$$

$$=\alpha\left.\frac{f(x)}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+1}}\right|_{1}^{\infty}+\alpha(\alpha+1)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{f(x)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}=\alpha(\alpha+1)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{f(x)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}},$$

где

$$f(x)=\int\limits_{1}^{x}(\sin(\pi(2[t]+1)b)-\sin(\pi b))\,dt=\sum_{k=1}^{[x]-1}\int\limits_{k}^{k+1}(\sin(\pi(2k+1)b)-\sin(\pi b))\,dt+$$

$$+\int\limits_{[x]}^{x}(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\,dt=\sum_{k=1}^{[x]-1}(\sin(\pi(2k+1)b)-\sin(\pi b))+$$

$$+(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\{x\}=\sum_{k=1}^{[x]-1}\sin(\pi(2k+1)b)-$$

$$-([x]-1+\{x\})\sin(\pi b)+\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}=\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}-$$

$$-(x-1)\sin(\pi b)+\frac{1}{2\sin(\pi b)}\sum_{k=1}^{[x]-1}(\cos(\pi(2k+1)b-\pi b)-\cos(\pi(2k+1)b+\pi b))=$$

$$=\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}-(x-1)\sin(\pi b)+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\alpha(\alpha+1)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}-$$

$$-\alpha(\alpha+1)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{(x-1)dx}{2x^{\alpha+2}}=$$

$$=\alpha(\alpha+1)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}-\frac{1}{2},$$

что доказывает третий случай равенства (2.23).

Наконец, четвертый случай следует из формулы (2.21) и формулы дополнения для множителя Римана, а пятый случай совпадает с функциональным уравнением для дзета-функции Римана. □

Из лемм 19 и 20 следует, что для любых $\alpha \neq 1$ справедливы равенства

$$\zeta^{**}(\alpha; b) = \begin{cases} \zeta(\alpha), & \text{при } \{b\} = 0; \\ \frac{M(\alpha)}{2}\left(\zeta^*(1-\alpha; b) + \zeta^*(1-\alpha; 1-b)\right), & \text{при } \{b\} > 0. \end{cases}$$

Используя обозначения на стр. 70, можно эти равенства переписать как одно

$$\tilde{\zeta}^{**}(\alpha; b) = M(\alpha)\tilde{\zeta}^*(1-\alpha; b).$$

Лемма 21. *Справедливо равенство*

$$\sum_{l=1}^{q-1} q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha; \frac{l}{q}\right) + \zeta^*\left(\alpha; 1-\frac{l}{q}\right)\right) = 2\zeta(\alpha)\left(1-q^{-\alpha}\right). \qquad (2.24)$$

Доказательство. Действительно, в правой полуплоскости $\sigma > 1$ имеем:

$$\sum_{l=1}^{q-1} q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha; \frac{l}{q}\right) + \zeta^*\left(\alpha; 1-\frac{l}{q}\right)\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{q-1} q^{-\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{l}{q}\right)^{-\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1-\frac{l}{q}\right)^{-\alpha}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{q-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(qn+l)^{-\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}(qn+q-l)^{-\alpha}\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(qn)^{-\alpha} = 2\zeta(\alpha)(1-q^{-\alpha}).$$

Переходя к аналитическому продолжению, получим утверждение для любого $\alpha \neq 1$.

Проверим утверждение для левой полуплоскости $\sigma < 0$. По лемме 19 имеем

$$\sum_{l=1}^{q-1} q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha; \frac{l}{q}\right) + \zeta^*\left(\alpha; 1-\frac{l}{q}\right)\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{q-1} q^{-\alpha} 4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n\frac{l}{q}}{n^{1-\alpha}} =$$

$$= q^{-\alpha} 4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}\sum_{l=1}^{q-1}\cos 2\pi n\frac{l}{q}.$$

Так как

$$\sum_{l=1}^{q-1}\cos 2\pi n\frac{l}{q} = -1+\sum_{l=0}^{q-1}\frac{e^{2\pi i\frac{nl}{q}}+e^{-2\pi i\frac{nl}{q}}}{2} = q\delta_q(n)-1,$$

то

$$\sum_{l=1}^{q-1} q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\frac{l}{q}\right)\right) =$$

$$= q^{-\alpha}4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q}{(qn)^{1-\alpha}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) =$$

$$= 4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\zeta(1-\alpha)\left(1-q^{-\alpha}\right) = 2\zeta(\alpha)\left(1-q^{-\alpha}\right)$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 3. *Используя обозначения на стр. 70, можно формулировку сформулированной леммы переписать в более элегантном виде:*

$$\sum_{l=0}^{q-1} q^{-\alpha}\tilde{\zeta}^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right) = \tilde{\zeta}^*(\alpha), \tag{2.25}$$

где

$$\tilde{\zeta}^*(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{|n|^{\alpha}}.$$

2.5. Гиперболическая дзета-функция Гурвица

Определение 4. *Назовём гиперболической дзета-функцией Гурвица при $d\neq 0$, $d,b\in\mathbb{R}$ функцию $\zeta_H(\alpha;d,b)$, заданную в правой α-полуплоскости $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma>1)$ равенством* [1]

$$\zeta_H(\alpha;d,b) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha}. \tag{2.26}$$

Если мы рассмотрим сдвинутую одномерную решетку $\Lambda(d,b)=d\mathbb{Z}+b$, то для гиперболической дзета-функции этой сдвинутой решетки мы получим

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases} \zeta_H(\alpha;d,b), & \text{при } \left\{\frac{b}{d}\right\}\neq 0,\\ \zeta_H(\alpha;d,b)-1, & \text{при } \left\{\frac{b}{d}\right\}=0. \end{cases} \tag{2.27}$$

[1] Здесь и далее для вещественных m используем обозначение $\overline{m}=\max(1,|m|)$.

Кроме этого нам потребуется дзета-функция сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)$, которая задается равенством

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' |dm+b|^{-\alpha}, \quad \sigma > 1, \tag{2.28}$$

где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена точка m, для которой $dm+b=0$, и аналитическая функция $f_1(\alpha;d,b)$, задаваемая равенством

$$f_1(\alpha;d,b) = \sum_{-1<dm+b<1}{}' \left(1-|dm+b|^{-\alpha}\right). \tag{2.29}$$

Ясно, что справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha) = \zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) + f_1(\alpha;d,b). \tag{2.30}$$

Будем как обычно через $\|b\| = \min(\{b\}, 1-\{b\})$ обозначать расстояние до ближайшего целого. Как хорошо известно, функция $\|b\|$ — чётная: $\|b\| = \|-b\|$.

В работе [188] рассматривалась аналитическая по α функция $f(\alpha,d)$, заданная равенством

$$f(\alpha,d) = \begin{cases} 0, & \text{при } d \geqslant 1,\\ \sum\limits_{1\leqslant|m|\leqslant\left[\frac{1}{d}\right]} \left(1-\dfrac{1}{|dm|^{\alpha}}\right), & \text{при } 0<d<1. \end{cases} \tag{2.31}$$

Ясно, что

$$f_1(\alpha;d,0) = f(\alpha,d). \tag{2.32}$$

Положим

$$f_1^*(\alpha;d,b) = \begin{cases} f_1\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| \neq 0;\\ \\ f_1\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)+1, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Лемма 22. *Для гиперболической дзета-функции Гурвица $\zeta_H(\alpha;d,b)$ в правой α-полуплоскости $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma>1)$ справедливы равенства*

$$\zeta_H(\alpha;d,b) = \zeta_H\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) =$$
$$= \zeta\left(\Lambda\left(|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\middle|\,\alpha\right) + f_1^*\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \tag{2.34}$$

Доказательство. Действительно, при $\left\{\frac{b}{d}\right\}=0$ имеем $\left[\frac{b}{d}\right]=\frac{b}{d}$ и

$$\zeta_H(\alpha;d,b)=1+\sum_{m=1-\frac{b}{d}}^{\infty}\overline{d\left(m+\frac{b}{d}\right)}^{-\alpha}+\sum_{m=-\infty}^{-1-\frac{b}{d}}\overline{d\left(m+\frac{b}{d}\right)}^{-\alpha}=$$

$$=1+2\sum_{m=1}^{\infty}\overline{|d|m}^{-\alpha}=\zeta_H\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$$

и в этом случае первое равенство доказано.

Пусть теперь $\left\{\frac{b}{d}\right\}\neq 0$, тогда

$$\zeta_H(\alpha;d,b)=\sum_{m=-\left[\frac{b}{d}\right]}^{\infty}\overline{d\left(m+\frac{b}{d}\right)}^{-\alpha}+\sum_{m=-\infty}^{-1-\left[\frac{b}{d}\right]}\overline{d\left(m+\frac{b}{d}\right)}^{-\alpha}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\overline{|d|\left(m+\left\{\frac{b}{d}\right\}\right)}^{-\alpha}+\sum_{m=0}^{\infty}\overline{|d|\left(m+1-\left\{\frac{b}{d}\right\}\right)}^{-\alpha}=\zeta_H\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$$

и первое равенство полностью доказано.

Аналогично первому равенству доказывается, что

$$f_1(\alpha;d,b)=f_1\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \tag{2.35}$$

Действительно, при $d<0$ имеем

$$f_1(\alpha;d,b)=\sum_{-1<dm+b<1}{}'\left(1-|dm+b|^{-\alpha}\right)=\sum_{-\frac{1}{d}>m+\frac{b}{d}>\frac{1}{d}}{}'\left(1-\left(|d|\left|m+\frac{b}{d}\right|\right)^{-\alpha}\right)=$$

$$=\sum_{-\left|\frac{1}{d}\right|<m+\left\|\frac{b}{d}\right\|<\left|\frac{1}{d}\right|}{}'\left(1-\left(|d|\left|m+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right|\right)^{-\alpha}\right)=f_1\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \tag{2.36}$$

Отсюда и из равенств (2.27), (2.30) и (2.33) следует справедливость второго равенства в формуле (2.34). □

Лемма 23. *Справедливо равенство*

$$f_1\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)=$$

$$
= \begin{cases}
0, & \text{при } |d| \geqslant 1, \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\
\sum\limits_{1\leqslant|m|\leqslant\left[\frac{1}{|d|}\right]} \left(1 - \dfrac{1}{|dm|^{\alpha}}\right), & \text{при } 0 < |d| < 1, \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\
0, & \text{при } |d| \geqslant 2, \left\|\frac{b}{d}\right\| \geqslant \frac{1}{|d|}; \\
1 - \left(|d| \left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } |d| \geqslant 2, 0 < \left\|\frac{b}{d}\right\| < \frac{1}{|d|}; \\
2 - \left(|d| \left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha} - \left(|d| - |d| \left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } \begin{cases} 1\leqslant|d|<2, \\ \left\|\frac{b}{d}\right\|>\left\|\frac{1}{|d|}\right\| \end{cases}; \\
1 - \left(|d| \left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } \begin{cases} 1\leqslant|d|<2, \\ 0<\left\|\frac{b}{d}\right\|\leqslant\left\|\frac{1}{|d|}\right\| \end{cases}; \\
\sum\limits_{m=-\left[\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right]}^{\left[\left|\frac{1}{d}\right|-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right]} \left(1 - \left(|d| \left|m + \left\|\dfrac{b}{d}\right\|\right|\right)^{-\alpha}\right), & \text{при } 0 < |d| < 1, 0 < \left\|\frac{b}{d}\right\|.
\end{cases}
\tag{2.37}
$$

Доказательство. При $\left\|\frac{b}{d}\right\| = 0$ первый и второй случай в равенстве (2.37) следует из (2.35), (2.32) и (2.31).

При $\left\|\frac{b}{d}\right\| \geqslant \frac{1}{|d|}$ и $|d| \geqslant 2$ область суммирования в формуле (2.36) не содержит целых точек, поэтому сумма равна 0 и третий случай в равенстве (2.37) доказан.

При $0 < \left\|\frac{b}{d}\right\| < \frac{1}{|d|}$ и $|d| \geqslant 2$ область суммирования в формуле (2.36) содержит только одну целую точку $m = 0$, поэтому сумма содержит только одно слагаемое и четвертый случай в равенстве (2.37) доказан.

При $\left\|\frac{b}{d}\right\| > \left\|\frac{1}{|d|}\right\|$ и $1 \leqslant |d| < 2$ область суммирования в формуле (2.36) содержит только две целых точки $m = 0$ и $m = -1$, поэтому сумма содержит только два слагаемых и пятый случай в равенстве (2.37) доказан.

При $0 < \left\|\frac{b}{d}\right\| \leqslant \left\|\frac{1}{|d|}\right\|$ и $1 \leqslant |d| < 2$ область суммирования в формуле (2.36) также как и в четвертом случае содержит только одну целую точку $m = 0$, поэтому сумма содержит только одно слагаемое и шестой случай в равенстве (2.37) доказан.

Наконец, при $0 < \left\|\frac{b}{d}\right\|$ и $0 < |d| < 1$ область суммирования $-\left|\frac{1}{d}\right| < m + \left\|\frac{b}{d}\right\| < \left|\frac{1}{d}\right|$ в формуле (2.36) можно записать в виде $-\left[\frac{1}{|d|} + \left\|\frac{b}{d}\right\|\right] \leqslant m \leqslant \left[\left|\frac{1}{d}\right| - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right]$, поэтому сумма преобретает указанный вид и седьмой случай в равенстве (2.37) доказан. □

2.5.1. Дзета-функция сдвинутой решетки

Для получения функционального уравнения для дзета-функции сдвинутой решетки $\Lambda(d,b)$ нам еще потребуется дзета-функция второго рода сдвинутой решетки $\zeta^*(\Lambda(d,b)|\alpha)$, которая задается равенством

$$\zeta^*(\Lambda(d,b)|\alpha)=\begin{cases}\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|=0,\\ \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}{}' \dfrac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{|dm|^\alpha}, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|>0.\end{cases} \tag{2.38}$$

Взаимную сдвинутую решётку определим равенством $\Lambda^*(d,b)=\Lambda\left(\frac{1}{d},\frac{b}{d^2}\right)$. Нетрудно видеть, что $\Lambda^{**}(d,b)=\Lambda^*\left(\frac{1}{d},\frac{b}{d^2}\right)=\Lambda(d,b)$.

Лемма 24. *Для дзета-функции сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)$ на всей α-плоскости, кроме точки $\alpha=1$, где полюс первого порядка, справедливо равенство*

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2\zeta(\alpha)}{|d|^\alpha}, & \textit{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|=0;\\ \dfrac{1}{|d|^\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\left\|\dfrac{b}{d}\right\|\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\left\|\dfrac{b}{d}\right\|\right)\right), & \textit{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|>0.\end{cases} \tag{2.39}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала правую полуплоскость $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma>1)$.

При $\left\|\frac{b}{d}\right\|=0$ согласно равенству (2.28) (стр. 74) имеем

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}'|dm+b|^{-\alpha}=\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}'\left(|d|\left|m+\frac{b}{d}\right|\right)^{-\alpha}=$$
$$=\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}'\left(|d|\left|m+\left\{\frac{b}{d}\right\}\right|\right)^{-\alpha}=\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}'(|d|\,|m|)^{-\alpha}=\frac{2\zeta(\alpha)}{|d|^\alpha},$$

и первый случай равенства (2.39) для правой полуплоскости доказан.

Аналогично, при $\left\|\frac{b}{d}\right\| > 0$ имеем

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' |dm+b|^{-\alpha} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(|d|\left|m+\frac{b}{d}\right|\right)^{-\alpha} =$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(|d|\left|m+\left\{\frac{b}{d}\right\}\right|\right)^{-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(|d|\left(m+\left\{\frac{b}{d}\right\}\right)\right)^{-\alpha} +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty}{}' \left(|d|\left(m+1-\left\{\frac{b}{d}\right\}\right)\right)^{-\alpha} = \frac{1}{|d|^\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) + \zeta^*\left(\alpha;1-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\right),$$

и второй случай равенства (2.39) для правой полуплоскости доказан.

Так как все функции, входящие в правую часть равенства (2.39), аналитичны на всей α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, где у двух функций полюс первого порядка, то, применяя принцип аналитического продолжения, получим справедливость равенства (2.39) на всей α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$. $\square$

Лемма 25. *Для дзета-функции сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)$ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases} \dfrac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha), & \textit{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\ \\ \dfrac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha), & \textit{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| > 0. \end{cases} \tag{2.40}$$

Доказательство. Действительно, если $\left\|\frac{b}{d}\right\| = 0$, то $\Lambda(d,b) = \Lambda(d)$, $\Lambda^*(d,b) = \Lambda^*(d) = \Lambda\left(\frac{1}{d}\right) = \Lambda\left(\frac{1}{d},\frac{b}{d^2}\right)$ и согласно лемме 24 и функциональному уравнению для дзета-функции Римана

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \frac{2\zeta(\alpha)}{|d|^\alpha} = \frac{2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)}{|d|^\alpha} =$$
$$= \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{\left|\frac{m}{d}+\frac{b}{d^2}\right|^{1-\alpha}} = \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha),$$

и первый случай равенства (2.40) доказан.

Пусть теперь $\left\|\frac{b}{d}\right\| > 0$, тогда по лемме 24 имеем:

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \frac{1}{|d|^\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) + \zeta^*\left(\alpha;1-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\right).$$

Применим функциональное уравнение (19) (стр. 69) к правой части, получим

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha}\zeta^{**}\left(1-\alpha; \left\|\frac{b}{d}\right\|\right) = \frac{M(\alpha)}{|d|^\alpha}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{|m|^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\cos\left(2\pi\frac{m\frac{b}{d^2}}{\frac{1}{d}}\right)}{\left|\frac{m}{d}\right|^{1-\alpha}} = \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha).$$

□

Рассмотрим теперь двумерную сдвинутую решётку

$$\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) = \Lambda(d_1,b_1)\times\Lambda(d_2,b_2) = d_1\mathbb{Z}\times d_2\mathbb{Z} + (b_1,b_2).$$

Её дзета-функция определяется естественным образом:

$$\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha) = \zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)\cdot\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha).$$

Аналогично определяется дзета-функция второго рода сдвинутой решетки:

$$\zeta^*(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha) = \zeta^*(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)\cdot\zeta^*(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha).$$

Нетрудно видеть, что если положить $\Lambda^*(d_1,b_1,d_2,b_2) = \Lambda^*(d_1,b_1)\times\Lambda^*(d_2,b_2)$, то

$$\Lambda^{**}(d_1,b_1,d_2,b_2) = \Lambda^*\left(\frac{1}{d_1},\frac{b_1}{d_1^2},\frac{1}{d_2},\frac{b_2}{d_2^2}\right) = \Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2).$$

Лемма 26. *Для дзета-функции сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)|\alpha)$ в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)|\alpha) = \frac{M^2(\alpha)}{\det\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)}\zeta^*(\Lambda^*(d_1,b_1,d_2,b_2)|1-\alpha). \qquad (2.41)$$

Доказательство. Действительно, так как

$$\det\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) = \det\Lambda(d_1,b_1)\cdot\det\Lambda(d_2,b_2),$$

то утверждение леммы непосредственно следует из определения дзета-функции сдвинутой решётки и леммы 25. □

2.5.2. Интегральные представления

Обозначим через $n(d,b)$ количество решений системы неравенств

$$-1 \leqslant dm + b \leqslant 1$$

в целых числах m, а через $n^*(d,b)$ — количество решений системы неравенств

$$-1 < dm + b < 1.$$

Нетрудно видеть, что $n(d,b) = n\left(|d|, |d| \cdot \left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$, $n^*(d,b) = n^*\left(|d|, |d| \cdot \left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$, кроме того

$$n^*(d,b) = \begin{cases} n(d,b), & \text{при } \frac{1-b}{d}, \frac{1+b}{d} \notin \mathbb{Z}; \\ n(d,b) - 1, & \text{при } \frac{1-b}{d} \in \mathbb{Z},\ \frac{1+b}{d}, \frac{2}{d} \notin \mathbb{Z}; \\ n(d,b) - 1, & \text{при } \frac{1-b}{d}, \frac{2}{d} \notin \mathbb{Z},\ \frac{1+b}{d} \in \mathbb{Z}; \\ n(d,b) - 2, & \text{при } \frac{1-b}{d}, \frac{1+b}{d}, \frac{2}{d} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Рассмотрим шесть положительных чисел

$$\omega_1 = \omega_1(d,b) = 1 + \frac{1}{|d|} - \left\{\frac{1}{|d|} - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}, \quad \omega_2 = \omega_2(d,b) = 1 + \frac{1}{|d|} - \left\{\frac{1}{|d|} + \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\},$$

$$\omega_1^* = \omega_1^*(d,b) = \frac{1}{|d|} + \left\{\left\|\frac{b}{d}\right\| - \frac{1}{|d|}\right\}, \quad \omega_2^* = \omega_2^*(d,b) = \frac{1}{|d|} + \left\{-\frac{1}{|d|} - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\},$$

$$\omega_1^{**} = \begin{cases} \{\omega_1^*(d,b)\}, & \text{при } \{\omega_1^*(d,b)\} > 0; \\ 1, & \text{при } \{\omega_1^*(d,b)\} = 0; \end{cases}, \quad \omega_2^{**} = \begin{cases} \{\omega_2^*(d,b)\}, & \text{при } \{\omega_2^*(d,b)\} > 0; \\ 1, & \text{при } \{\omega_2^*(d,b)\} = 0. \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что

$$\omega_1 = \begin{cases} \omega_1^*, & \text{при } \left\{\frac{1}{|d|}\right\} \neq \left\|\frac{b}{d}\right\|; \\ \omega_1^* + 1, & \text{при } \left\{\frac{1}{|d|}\right\} = \left\|\frac{b}{d}\right\|; \end{cases}, \quad \omega_2 = \begin{cases} \omega_2^*, & \text{при } \left\{1 - \frac{1}{|d|}\right\} \neq \left\|\frac{b}{d}\right\|; \\ \omega_2^* + 1, & \text{при } \left\{1 - \frac{1}{|d|}\right\} = \left\|\frac{b}{d}\right\|; \end{cases}$$

Теорема 4. *В α-полуплоскости $\alpha=\sigma+it$, $\sigma>1$ справедливы тождества*

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha;d,b)=n(d,b)\Gamma(\alpha)+$$

$$+|d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}\right)dx= \tag{2.42}$$

$$=n^*(d,b)\Gamma(\alpha)+\frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}+\left\{\left\|\frac{b}{d}\right\|-\frac{1}{|d|}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(\frac{1}{|d|}+\left\{-\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}\right)dx= \tag{2.43}$$

$$=f_1^*(\alpha;d,b)\Gamma(\alpha)+\begin{cases}\dfrac{1}{|d|^\alpha}\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}\left(e^{-\left\|\frac{b}{d}\right\|\cdot x}+e^{-\left(1-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\cdot x}\right)}{1-e^{-x}}dx, & \textit{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|>0;\\ \dfrac{2}{|d|^\alpha}\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}e^{-x}dx, & \textit{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|=0.\end{cases} \tag{2.44}$$

Доказательство. Без ограничения общности согласно лемме 22 (стр. 74) можно считать $d>0$, $0\leqslant b\leqslant\frac{d}{2}$.

Известно, что при $\sigma>0$ справедливо интегральное представление для гамма функции

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Заменим теперь в этом интеграле переменную x на $\overline{dm+b}\cdot x$ [2]. Эта замена даст равенство:

$$\Gamma(\alpha)\left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha}=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\overline{dm+b}\cdot x}dx.$$

[2]Здесь и далее $\overline{dm+b}=\max(1,|dm+b|)$

Суммируя по всем целым $m \in \mathbb{Z}$, получим

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha; d, b) = \Gamma(\alpha) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=-N}^{N} \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\overline{dm+b}\cdot x} dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} \left(\sum_{m=-N}^{N} e^{-\overline{dm+b}\cdot x} \right) dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} S(N,d,b) dx,$$

где

$$S(N,d,b) = \sum_{m=-N}^{N} e^{-\overline{dm+b}\cdot x}.$$

Пусть $N_1 = \left[\frac{1-b}{d}\right]$, $N_2 = \left[\frac{1+b}{d}\right]$, тогда $n(d,b) = N_1 + N_2 + 1$. Аналогично, положим $N_1^* = -\left[\frac{b-1}{d}\right] - 1$, $N_2^* = -\left[-\frac{1+b}{d}\right] - 1$, тогда $n^*(d,b) = N_1^* + N_2^* + 1$ и справедливы неравенства $N_1^* \leqslant N_1$, $N_2^* \leqslant N_2$ и

$$N_1^* = \begin{cases} N_1, & \text{при } \left\{\frac{1-b}{d}\right\} > 0; \\ N_1 - 1, & \text{при } \left\{\frac{1-b}{d}\right\} = 0, \end{cases} \qquad N_2^* = \begin{cases} N_2, & \text{при } \left\{\frac{1+b}{d}\right\} > 0; \\ N_2 - 1, & \text{при } \left\{\frac{1+b}{d}\right\} = 0; \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что при $N > \max(N_1, N_2)$

$$S(N,d,b) = \sum_{m=-N}^{N} e^{-\overline{dm+b}\cdot x} = \sum_{m=N_1+1}^{N} e^{-|dm+b|\cdot x} + \sum_{m=-N_2}^{N_1} e^{-x} + \sum_{m=-N}^{-(N_2+1)} e^{-|dm+b|\cdot x} =$$

$$= (N_1+N_2+1)e^{-x} + \sum_{m=1}^{N-N_1} e^{-(dm+dN_1+b)\cdot x} + \sum_{m=1}^{N-N_2} e^{-(dm+dN_2-b)\cdot x} =$$

$$= (N_1+N_2+1)e^{-x} + \sum_{m=1}^{N-N_1} e^{-\left(dm+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x} + \sum_{m=1}^{N-N_2} e^{-\left(dm+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x} =$$

$$= (N_1+N_2+1)e^{-x} + \frac{e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x} - e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}} +$$

$$+ \frac{e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x} - e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}.$$

Поэтому

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha;d,b)=\Gamma(\alpha)(N_1+N_2+1)+$$
$$+\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}dx-$$
$$-\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}dx=$$
$$=n(d,b)\Gamma(\alpha)+|d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}\right)dx,$$

так как

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}dx=0$$

в силу оценок

$$\left|x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}\right|\leqslant$$
$$\leqslant x^{\sigma-2}\left(e^{-\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}\right)\frac{x}{e^{dx}-1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{d}\cdot x^{\sigma-2}\left(e^{-\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}\right);$$

$$\left|\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^\infty\frac{1}{d}\cdot x^{\sigma-2}\left(e^{-\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}\right)dx=\frac{1}{d}\cdot$$

$$\cdot\left(\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)^{1-\sigma}+\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)^{1-\sigma}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^\infty x^{\sigma-2}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(\sigma-1)}{d}\cdot(dN)^{1-\sigma}\cdot$$

$$\cdot\left(\left(1-\frac{N_1}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1-b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}+\left(1-\frac{N_2}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1+b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}\right),$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma(\sigma-1)}{d}\cdot(dN)^{1-\sigma}=0,$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\left(1-\frac{N_1}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1-b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}+\left(1-\frac{N_2}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1+b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}\right)=2.$$

Аналогично получим и тождество (2.43).

Для полноты изложения проверим непосредственно, что правые части в (2.42) и (2.43) равны. Для этого надо рассмотреть только случай, когда $\left\{\frac{1-b}{d}\right\}=$ $=0$ или $\left\{\frac{1+b}{d}\right\}=0$. Оба эти случаи разбираются одинаково и сводятся к доказательству равенства

$$\Gamma(\alpha)+|d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx=\frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx.$$

Но

$$\frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx-|d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)\left(1-e^{-x}\right)dx=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\Gamma(\alpha),$$

и равенство правых частей в (2.42) и (2.43) доказано.

Перейдем к доказательству последнего равенства в утверждении теоремы. Из леммы 22 (стр. 74) следует, что

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha;d,b)=\Gamma(\alpha)\zeta\left(\Lambda\left(|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\Bigg|\,\alpha\right)+\Gamma(\alpha)f_1^*\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right).$$

Повторяя для дзета-функции $\zeta\left(\Lambda\left(|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\big|\,\alpha\right)$ предыдущие рассуждения, получим

$$\Gamma(\alpha)\zeta\left(\Lambda\left(|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\Bigg|\,\alpha\right)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{|d|^\alpha}\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}\left(e^{-\left\|\frac{b}{d}\right\|\cdot x}+e^{-\left(1-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\cdot x}\right)}{1-e^{-x}}dx, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|>0;\\ \dfrac{2}{|d|^\alpha}\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}e^{-x}dx, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|=0\end{cases}$$

и доказательство полностью завершено. □

Напомним определение контура Ханкеля C, состоящего из трех последовательных частей C_1, C_2 и C_3.

Делается разрез комплексной α-плоскости вдоль вещественной оси от 0 до бесконечности. Берется положительное число r, удовлетворяющее неравенствам $0<r<2\pi$.

C_1 обозначает луч, начинающийся в бесконечности и идущий до точки $\alpha=r$ вдоль верхнего края разреза плоскости, C_2 — окружность радиуса r с центром в точке $\alpha=0$, которая обходится в положительном направлении, и C_3 — луч, начинающийся в точке $\alpha=r$ и идущий в бесконечность вдоль нижнего края разреза плоскости.

Определим для комплексных α и положительных ω функцию $F(\alpha;\omega)$ равенством

$$F(\alpha;\omega)=\int\limits_C\frac{z^{\alpha-1}e^{-\omega z}}{1-e^{-z}}dz. \tag{2.45}$$

Теорема 5. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Интеграл $F(\alpha;\omega)$ всюду сходится и изображает целую функцию.*

2. *Для любого $\alpha\neq1$ справедливы тождества*

$$F(\alpha;\omega_1)+F(\alpha;\omega_2)=\left(e^{2\pi i\alpha}-1\right)\cdot|d|^\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\left(\zeta_H(\alpha;d,b)-n(d,b)\right), \tag{2.46}$$

$$F(\alpha;\omega_1^*)+F(\alpha;\omega_2^*)=\left(e^{2\pi i\alpha}-1\right)\cdot|d|^\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\left(\zeta_H(\alpha;d,b)-n^*(d,b)\right). \quad (2.47)$$

3. Функция $\zeta_H(\alpha;d,b)$ аналитически продолжается на всю α-плоскость, кроме точки $\alpha=1$, где она имеет полюс 1-го порядка, причём

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=1}\zeta_H(\alpha;d,b)=\frac{2}{|d|}. \quad (2.48)$$

4. В полуплоскости $\sigma<0$ справедливы тождества:

$$\zeta_H(\alpha;d,b)=f_1^*(\alpha;d,b)+\frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{m^{1-\alpha}}=$$
$$=f_1^*(\alpha;d,b)+\frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha}\cdot\zeta^{**}\left(1-\alpha,\frac{b}{d}\right). \quad (2.49)$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 31 из [147] (см. [147], стр. 82).

При $\sigma>1$, повторяя рассуждения из теоремы 31 из [147] и пользуясь теоремой 4 (стр. 80), получим первое равенство второго утверждения теоремы. Второе равенство доказывается аналогично.

Так как все входящие в (2.46) функции имеют аналитическое продолжение на всю комплексную α-плоскость, кроме точки $\alpha=1$, то и функция $\zeta_H(\alpha;d,b)$ аналитически продолжается на всю α-плоскость, кроме точки $\alpha=1$.

Таким образом, второе утверждение доказано полностью, причём из равенства (2.46) следует, что в α-полуплоскости $\sigma\leqslant 1$ гиперболическая дзета-функция Гурвица определяется равенством

$$\zeta_H(\alpha;d,b)=n(d,b)+\frac{F(\alpha;\omega_1)+F(\alpha;\omega_2)}{(e^{2\pi i\alpha}-1)\cdot|d|^\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}.$$

Из последнего выражения следует, что особенности гиперболической дзета-функции Гурвица, если таковые вообще существуют, могут находиться только в точках $\alpha=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Но в точках $\alpha=2,3,\ldots$ особенностей быть не может, ибо во всей α-полуплоскости $\sigma>1$ гиперболическая дзета-функция Гурвица изображается абсолютно сходящимся рядом (2.26).

Далее, в точках $\alpha=0,-1,-2,\ldots$ нули функции $e^{2\pi i\alpha}-1$ "гасят" полюсы гамма функции; поэтому эти точки также не являются особыми точками для гиперболической дзета-функции Гурвица. Остаётся только точка $\alpha = 1$. Для неё имеем:

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=1}\zeta_H(\alpha;d,b) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\alpha-1}{e^{2\pi i\alpha}-1}\cdot\frac{F(1;\omega_1)+F(1;\omega_2)}{|d|\cdot\Gamma(1)} =$$
$$= \frac{1}{|d|\cdot 2\pi i}\left(\int\limits_C \frac{z^{\alpha-1}e^{-\omega_1 z}}{1-e^{-z}}dz + \int\limits_C \frac{z^{\alpha-1}e^{-\omega_2 z}}{1-e^{-z}}dz\right) = \frac{2}{|d|}$$

в силу рассуждений при доказательстве теоремы 31 из [147] (см. стр. 85). Тем самым третье утверждение теоремы доказано.

Наконец, повторяя дословно рассуждения из монографии [147] на стр. 87, при $\sigma < 0$ получим:

$$\zeta_H(\alpha;d,b) = f_1^*(\alpha;d,b) + \frac{i(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha}\left(e^{-\pi i\frac{\alpha}{2}}\sum_{m=1}^\infty \frac{e^{-2\pi i m\omega_1^{**}}+e^{-2\pi i m\omega_2^{**}}}{m^{1-\alpha}} - \right.$$
$$\left. - e^{\pi i\frac{\alpha}{2}}\sum_{m=1}^\infty \frac{e^{2\pi i m\omega_1^{**}}+e^{2\pi i m\omega_2^{**}}}{m^{1-\alpha}}\right) = f_1^*(\alpha;d,b) + \frac{2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha}\cdot$$
$$\cdot\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{m=1}^\infty \frac{\sin(2\pi m\omega_1^{**})+\sin(2\pi m\omega_2^{**})}{m^{1-\alpha}} + \sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{m=1}^\infty \frac{\cos(2\pi m\omega_1^{**})+\cos(2\pi m\omega_2^{**})}{m^{1-\alpha}}\right).$$

Теперь воспользуемся периодичность тригонометрических функций и видом величин ω_1^{**} и ω_2^{**}, получим:

$$\sin(2\pi m\omega_1^{**}) + \sin(2\pi m\omega_2^{**}) = \sin\left(2\pi m\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) +$$
$$+ \sin\left(2\pi m\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) = \sin\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) - \sin\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) = 0,$$
$$\cos(2\pi m\omega_1^{**}) + \cos(2\pi m\omega_2^{**}) = \cos\left(2\pi m\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) +$$
$$+ \cos\left(2\pi m\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) = 2\cos\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right),$$

$$\zeta_H(\alpha;d,b) = f_1(\alpha;d,b) + \frac{4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{m=1}^\infty \frac{\cos\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)}{m^{1-\alpha}} =$$
$$= f_1(\alpha;d,b) + \frac{4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{m=1}^\infty \frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{m^{1-\alpha}} =$$
$$= f_1(\alpha;d,b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha}\sum_{m=1}^\infty \frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{m^{1-\alpha}} = f_1^*(\alpha;d,b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha}\cdot\zeta^{**}\left(1-\alpha,\frac{b}{d}\right)$$

и теорема полностью доказана. □

2.6. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции сдвинутых диагональных решёток

Диагональные решётки и сдвинутые диагональные решётки относятся к классу простейших декартовых решёток. Уже на их примере видно, что функциональные уравнения для гиперболической дзета-функции решёток имеют дополнительные слагаемые, которых нет в функциональном уравнении для дзета-функции Римана.

В этом разделе рассмотрим одномерный случай функционального уравнения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(d\mathbb{Z}+b \mid \alpha)$ и двумерный случай функционального уравнения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(d_1\mathbb{Z}\times d_2\mathbb{Z}+\vec{b} \mid \alpha)$.

Нам потребуется следующее определение.

Определение 5. *Гиперболической дзета-функцией второго рода сдвинутой решетки $\Lambda(d,b)$ называется функция $\zeta^*_H(\Lambda(d,b)|\alpha)$, которая задается равенством*

$$\zeta^*_H(\Lambda(d,b)|\alpha)=\begin{cases}\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|=0,\\ \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{\overline{dm}^{\alpha}}, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|>0.\end{cases} \tag{2.50}$$

Если ввести обозначения

$$f_2(\alpha;d,b)=\sum_{-1<dm<1}{}' \cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)\left(1-|dm|^{-\alpha}\right), \tag{2.51}$$

то ясно, что справедливо равенство

$$\zeta^*_H(\Lambda(d,b)|\alpha)=\zeta^*(\Lambda(d,b)|\alpha)+f_2(\alpha;d,b). \tag{2.52}$$

2.6.1. Одномерный случай

Лемма 27. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(d,b) \mid \alpha)$ произвольной сдвинутой решётки $\Lambda(d,b)$ вида $\Lambda(d,b)=d\cdot\mathbb{Z}+b$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda(d,b) \mid \alpha)$ справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(d,b) \mid \alpha)=\zeta(\Lambda(d,b) \mid \alpha)+f_1(\alpha;d,b). \tag{2.53}$$

Доказательство. Действительно, из определения гиперболической дзета-функции решётки следует, что

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)\mid\alpha)=\sum_{|dm+b|\geqslant 1}|dm+b|^{-\alpha}+\sideset{}{'}\sum_{-1<dm+b<1}1=$$
$$=\sideset{}{'}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|dm+b|^{-\alpha}+\sideset{}{'}\sum_{-1<dm+b<1}\left(1-|dm+b|^{-\alpha}\right)=\zeta(\Lambda(d,b)\mid\alpha)+f_1(\alpha;d,b).$$

□

Теорема 6. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda=d\cdot\mathbb{Z}$, где $d>0$, в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda\mid\alpha)-f(\alpha,d)=\frac{M(\alpha)}{\det\Lambda}\left(\zeta_H\left(\Lambda^*|\,1-\alpha\right)-f(1-\alpha,d^{-1})\right). \tag{2.54}$$

Доказательство. См. [188]. □

Для сдвинутой решётки $\Lambda(d,b)$, когда $\left\|\frac{b}{d}\right\|\neq 0$, ситуация несколько другая.

Теорема 7. *Для гиперболической дзета-функции произвольной сдвинутой декартовой решётки $\Lambda(d,b)$ вида $\Lambda(d,b)=d\cdot\mathbb{Z}+b$, где $\left\|\frac{b}{d}\right\|>0$, в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)\mid\alpha)-f_1(\alpha,d,b)=$$
$$=\frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\left(\zeta_H^*\left(\Lambda^*(d,b)|\,1-\alpha\right)-f_2\left(1-\alpha,\frac{1}{d},\frac{b}{d^2}\right)\right). \tag{2.55}$$

Доказательство. Действительно, согласно формулам (2.29) и (2.52) имеем:

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha)-f_1(\alpha;d,b)=\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha),$$
$$\zeta_H^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha)-f_2\left(1-\alpha;\frac{1}{d},\frac{b}{d^2}\right)=\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha).$$

Согласно лемме 25 (см. стр. 78) правые части связаны функциональным уравнением, отсюда следует утверждение теоремы. □

Уже в одномерном случае можно проиллюстрировать эффективность функционального уравнения для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки.

Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda(d) = d \cdot \mathbb{Z}$ и её подрешетку $\Lambda(d_1) = d_1 \cdot \mathbb{Z}$. Ясно, что $d_1 = n \cdot d$, $n \in \mathbb{N}$ и имеет место разбиение на сдвинутые подрешётки

$$\Lambda(d) = \bigcup_{b=0}^{n-1} \Lambda\left(d_1, bd\right). \tag{2.56}$$

Из этого разбиения вытекает равенство в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$:

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \sum_{b=0}^{n-1} \zeta_H(\Lambda\left(d_1, bd)|\alpha\right). \tag{2.57}$$

Применим функциональные уравнения для левой и правой частей данного равенства, тогда в левой полуплоскости $\sigma < 0$ получим

$$\zeta_H(\Lambda(d) \mid \alpha) - f(\alpha, d) = \frac{M(\alpha)}{\det \Lambda(d)} \left(\zeta_H\left(\Lambda^*(d)\right| 1-\alpha) - f(1-\alpha, d^{-1})\right),$$

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, bd) \mid \alpha) - f_1(\alpha, d_1, bd) =$$
$$= \frac{M(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, bd)} \left(\zeta_H^*\left(\Lambda^*(d_1, bd)\right| 1-\alpha) - f_2\left(1-\alpha, \frac{1}{d_1}, \frac{bd}{d_1^2}\right)\right).$$

Лемма 28. *Справедливо равенство*

$$f(\alpha, d) = \sum_{b=0}^{n-1} f_1(\alpha, dn, bd). \tag{2.58}$$

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{b=0}^{n-1} f_1(\alpha, dn, bd) = \sum_{b=0}^{n-1} \sideset{}{'}\sum_{-1<dnm+bd<1} \left(1 - |dnm + db|^{-\alpha}\right) =$$
$$= \sideset{}{'}\sum_{-1<dm<1} \left(1 - |dm|^{-\alpha}\right) = f(\alpha, d),$$

так как

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{b=0}^{n-1} \{nm + b | m \in \mathbb{Z}\}.$$

□

Лемма 29. *Справедливо равенство*

$$f(1-\alpha, d^{-1}) = \frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} f_2\left(1-\alpha, \frac{1}{dn}, \frac{bd}{(dn)^2}\right). \tag{2.59}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1} f_2\left(1-\alpha, \frac{1}{dn}, \frac{bd}{(dn)^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1} \sideset{}{'}\sum_{-1<\frac{m}{dn}<1} \cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right)\left(1-\left|\frac{m}{dn}\right|^{\alpha-1}\right) =$$

$$= \sideset{}{'}\sum_{-1<\frac{m}{dn}<1}\left(1-\left|\frac{m}{dn}\right|^{\alpha-1}\right)\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right) =$$

$$= \sideset{}{'}\sum_{-1<\frac{m}{d}<1}\left(1-\left|\frac{m}{d}\right|^{\alpha-1}\right) = f(\alpha, d^{-1}),$$

так как

$$\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right) = \begin{cases} 1, & \text{при } m\equiv 0 \pmod n, \\ 0, & \text{при } m\not\equiv 0 \pmod n \end{cases}.$$

□

Лемма 30. *Справедливо равенство*

$$\zeta\left(\Lambda^*(d)\right|1-\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\zeta^*(\Lambda^*(dn, bd)|1-\alpha). \tag{2.60}$$

Доказательство. Действительно, $\Lambda^*(dn, bd) = \Lambda\left(\frac{1}{dn}, \frac{b}{dn^2}\right)$ и

$$\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\sideset{}{'}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right)}{\left|\frac{m}{dn}\right|^{1-\alpha}} =$$

$$= \sideset{}{'}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left|\frac{m}{dn}\right|^{1-\alpha}}\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right) = \sideset{}{'}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left|\frac{m}{d}\right|^{1-\alpha}} = \zeta\left(\Lambda^*(d)\right|1-\alpha),$$

так как

$$\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right) = \begin{cases} 1, & \text{при } m\equiv 0 \pmod n, \\ 0, & \text{при } m\not\equiv 0 \pmod n \end{cases}.$$

□

Из лемм 28 — 30 видно, что правые части функционального уравнения для сдвинутых решёток, содержащие функции второго рода, обеспечивают выделение подрешёток из решёток.

Теорема 8. *Для любого $\alpha_0 = \sigma_0 + it_0$ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ пусть $K(\alpha_0)$ — произвольный компакт в этой полуплоскости, содержащий точку α_0,* *тогда для любого $d_0 > 0$ и для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки $\Lambda(d)$ вида $\Lambda(d) = d \cdot \mathbb{Z}$, где $d > 0$, справедливо равенство*

$$\lim_{d \to d_0} \zeta_H(\Lambda(d) \mid \alpha) = \zeta_H \left(\Lambda(d_0) \middle| \alpha\right). \tag{2.61}$$

и эта сходимость равномерная во всем компакте $K(\alpha_0)$.

Доказательство. Действительно, для любой точки α из компакта $K(\alpha_0)$ точка α принадлежит левой полуплоскости $\sigma < 0$, а $1 - \alpha$ — правой полуплоскости $\sigma > 1$, и согласно теореме 6 (стр. 89) имеем:

$$\zeta_H(\Lambda(d) \mid \alpha) = f(\alpha, d) + \frac{M(\alpha)}{\det \Lambda(d)} \left(\zeta_H \left(\Lambda^*(d) \middle| 1 - \alpha\right) - f(1 - \alpha, d^{-1})\right).$$

В правой части все функции, зависящие от d, непрерывны, а множитель $M(\alpha)$ — аналитическая функция на компакте $K(\alpha_0)$, поэтому ограничена некоторой константой, зависящей от компакта. Отсюда следует равномерная сходимость в равенстве (2.61). $\square$

2.6.2. Двумерный случай

Перейдем к рассмотрению двумерного случая.

Положим $\Lambda_\nu = d_\nu \cdot \mathbb{Z}$, $\Lambda_\nu(d_\nu, b_\nu) = d_\nu \cdot \mathbb{Z} + b_\nu$, $(\nu = 1, 2)$.

Лемма 31. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda \mid \alpha)$ произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d_1 \cdot \mathbb{Z} \times d_2 \cdot \mathbb{Z}$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda \mid \alpha)$ справедливо равенство*

$$\begin{gathered}
\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + \zeta(\Lambda_1 \mid \alpha) + \zeta(\Lambda_2 \mid \alpha) + \\
+ f(\alpha, d_1)\zeta(\Lambda_2 \mid \alpha) + f(\alpha, d_2)\zeta(\Lambda_1 \mid \alpha) + \\
+ f(\alpha, d_1) f(\alpha, d_2) + f(\alpha, d_1) + f(\alpha, d_2) = \\
= \zeta(\Lambda \mid \alpha) + \zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) + \zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) + \\
+ f(\alpha, d_1)\zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) + f(\alpha, d_2)\zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) - f(\alpha, d_1) f(\alpha, d_2).
\end{gathered} \tag{2.62}$$

Доказательство. См. [188]. $\square$

Теорема 9. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d_1 \cdot \mathbb{Z} \times d_2 \cdot \mathbb{Z}$, где $d_1, d_2 > 0$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) - f(\alpha, d_1)\zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) - f(\alpha, d_2)\zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) + \\ + f(\alpha, d_1) f(\alpha, d_2) = \frac{M(\alpha)^2}{\det \Lambda} \left(\zeta_H\left(\Lambda^* \right| 1-\alpha) - \zeta_H(\Lambda_1^* \mid 1-\alpha) - \zeta_H(\Lambda_2^* \mid 1-\alpha) - \right. \\ - f(1-\alpha, d_1^{-1})\zeta_H(\Lambda_2^* \mid 1-\alpha) - f(1-\alpha, d_2^{-1})\zeta_H(\Lambda_1^* \mid 1-\alpha) + \\ \left. + f(1-\alpha, d_1^{-1}) f(1-\alpha, d_2^{-1})\right).\end{gathered} \tag{2.63}$$

Доказательство. См. [188]. $\square$

Теперь мы можем получить новую форму функционального уравнения для гиперболической дзета-функции двумерной диагональной решётки.

Теорема 10. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d_1 \cdot \mathbb{Z} \times d_2 \cdot \mathbb{Z}$, где $d_1, d_2 > 0$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \frac{M(\alpha)^2}{\det \Lambda} \zeta_H\left(\Lambda^* \right| 1-\alpha) + \\ + \zeta_H\left(\Lambda_1^* \right| 1-\alpha) \left(\frac{M(\alpha)}{d_1} \left(1 + f(\alpha, d_2)\right) - \frac{M(\alpha)^2}{\det \Lambda} \left(1 + f(1-\alpha, d_2^{-1})\right) \right) + \\ + \zeta_H\left(\Lambda_2^* \right| 1-\alpha) \left(\frac{M(\alpha)}{d_2} \left(1 + f(\alpha, d_1)\right) - \frac{M(\alpha)^2}{\det \Lambda} \left(1 + f(1-\alpha, d_1^{-1})\right) \right) + \\ + \frac{M(\alpha)^2}{\det \Lambda} f(1-\alpha, d_1^{-1}) f(1-\alpha, d_2^{-1}) + f(\alpha, d_1) + f(\alpha, d_2) + f(\alpha, d_1) f(\alpha, d_2) - \\ - \frac{M(\alpha)}{d_1} f(1-\alpha, d_1^{-1}) \left(1 + f(\alpha, d_2)\right) - \frac{M(\alpha)}{d_2} f(1-\alpha, d_2^{-1}) \left(1 + f(\alpha, d_1)\right).\end{gathered} \tag{2.64}$$

Доказательство. Действительно, по теореме 6 имеем:

$$\zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) - f(\alpha, d_1) = \frac{M(\alpha)}{d_1} \left(\zeta_H\left(\Lambda_1^* \right| 1-\alpha) - f(1-\alpha, d_1^{-1}) \right),$$

$$\zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) - f(\alpha, d_2) = \frac{M(\alpha)}{d_2} \left(\zeta_H\left(\Lambda_2^* \right| 1-\alpha) - f(1-\alpha, d_2^{-1}) \right).$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha)\,(1+f(\alpha,d_2)) =$$
$$= \left(f(\alpha,d_1) + \frac{M(\alpha)}{d_1}\left(\zeta_H\left(\Lambda_1^*\middle|\, 1-\alpha\right) - f(1-\alpha, d_1^{-1})\right)\right)(1+f(\alpha,d_2))\,, \tag{2.65}$$
$$\zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha)\,(1+f(\alpha,d_1)) =$$
$$= \left(f(\alpha,d_2) + \frac{M(\alpha)}{d_2}\left(\zeta_H\left(\Lambda_2^*\middle|\, 1-\alpha\right) - f(1-\alpha, d_2^{-1})\right)\right)(1+f(\alpha,d_1))\,. \tag{2.66}$$

Сложив почленно (2.63), (2.65) и (2.66), получим

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) + f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2) = \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\zeta_H\left(\Lambda^*\middle|\,1-\alpha\right) +$$
$$+\zeta_H\left(\Lambda_1^*\middle|\,1-\alpha\right)\left(\frac{M(\alpha)}{d_1}(1+f(\alpha,d_2)) - \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(1+f(1-\alpha,d_2^{-1})\right)\right) +$$
$$+\zeta_H\left(\Lambda_2^*\middle|\,1-\alpha\right)\left(\frac{M(\alpha)}{d_2}(1+f(\alpha,d_1)) - \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(1+f(1-\alpha,d_1^{-1})\right)\right) +$$
$$+\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}f(1-\alpha,d_1^{-1})f(1-\alpha,d_2^{-1}) + f(\alpha,d_1) + f(\alpha,d_2) + 2f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2) -$$
$$-\frac{M(\alpha)}{d_1}f(1-\alpha,d_1^{-1})\,(1+f(\alpha,d_2)) - \frac{M(\alpha)}{d_2}f(1-\alpha,d_2^{-1})\,(1+f(\alpha,d_1))\,.$$

После приведения подобных получим утверждение теоремы. □

Перейдем к получению функционального уравнения для гиперболической дзета-функции двумерной сдвинутой диагональной решётки

$$\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) = (d_1\mathbb{Z}+b_1)\times(d_2\mathbb{Z}+b_2).$$

Лемма 32. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) \mid \alpha)$ произвольной сдвинутой решётки $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)$ вида*

$$\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) = (d_1\mathbb{Z}+b_1)\times(d_2\mathbb{Z}+b_2)$$

и дзета-функции $\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) \mid \alpha)$ в правой α-полуплоскости $\sigma > 1$ справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) \mid \alpha) = \zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) \mid \alpha) + \zeta(\Lambda(d_1,b_1) \mid \alpha)\cdot$$
$$\cdot f_1(\alpha;d_2,b_2) + \zeta(\Lambda(d_2,b_2) \mid \alpha)f_1(\alpha;d_1,b_1) + f_1(\alpha;d_1,b_1)f_1(\alpha;d_2,b_2). \tag{2.67}$$

Доказательство. Действительно, из определения гиперболической дзета-функции решётки следует, что

$$\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)=\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|\geqslant 1\\|d_2m_2+b_2|\geqslant 1}}(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}+$$

$$+\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|\geqslant 1\\|d_2m_2+b_2|<1}}{}'(|d_1m_1+b_1|)^{-\alpha}+\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|\geqslant 1}}{}'(|d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}+\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}{}'1=$$

$$=\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2}{}'(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}+\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|\geqslant 1\\|d_2m_2+b_2|<1}}{}'(|d_1m_1+b_1|)^{-\alpha}\left(1-|d_2m_2+b_2|^{-\alpha}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|\geqslant 1}}{}'(|d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\left(1-|d_1m_1+b_1|^{-\alpha}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}{}'\left(1-(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\right)=\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)+$$

$$+\zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_2,b_2)-\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}{}'(|d_1m_1+b_1|)^{-\alpha}\left(1-|d_2m_2+b_2|^{-\alpha}\right)+$$

$$+\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_1,b_1)-\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}{}'(|d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\left(1-|d_1m_1+b_1|^{-\alpha}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}{}'\left(1-(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\right)=\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)+$$

$$+\zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_2,b_2)+\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_1,b_1)+f_1(\alpha;d_1,b_1)f_1(\alpha;d_2,b_2).$$

□

Теорема 11. *Для гиперболической дзета-функции произвольной сдвинутой решётки* $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)$ *вида* $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)=(d_1\mathbb{Z}+b_1)\times(d_2\mathbb{Z}+b_2)$, *где* $d_1,d_2>0$, *в левой полуплоскости* $\sigma<0$ *справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)-\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_2,b_2)-$$
$$-\zeta_H(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_1,b_1)+f_1(\alpha;d_1,b_1)f_1(\alpha;d_2,b_2)=$$
$$=\frac{M^2(\alpha)}{\det\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)}\zeta^*(\Lambda^*(d_1,b_1,d_2,b_2)|1-\alpha).\qquad(2.68)$$

Доказательство. Действительно, из лемм 31 (стр. 92) и 32 (стр. 94) следует, что

$$\zeta_H(\Lambda(d_\nu, b_\nu) \mid \alpha) = \zeta(\Lambda(d_\nu, b_\nu) \mid \alpha) + f_1(\alpha; d_\nu, b_\nu), \quad (\nu = 1, 2),$$

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) = \zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) +$$

$$+\zeta(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) + \zeta(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2),$$

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - (\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) - f_1(\alpha; d_1, b_1)) f_1(\alpha; d_2, b_2) -$$

$$-(\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) - f_1(\alpha; d_2, b_2)) f_1(\alpha; d_1, b_1) - f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) =$$

$$= \zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha),$$

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) -$$

$$-\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) = \zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha).$$

По принципу аналитического продолжения последнее равенство справедливо на всей комплексной α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$.

По лемме 26 (стр. 79) имеем для правой части равенство:

$$\zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)|\alpha) = \frac{M^2(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)} \zeta^*(\Lambda^*(d_1, b_1, d_2, b_2)|1 - \alpha).$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) -$$

$$-\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) =$$

$$= \frac{M^2(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)} \zeta^*(\Lambda^*(d_1, b_1, d_2, b_2)|1 - \alpha),$$

и утверждение теоремы доказано. □

2.7. Нули суммы дзета-функций Гурвица

Рассмотрим полный набор характеров Дирихле[3] по модулю 5:

[3]Здесь и далее $\left(\frac{m}{5}\right)$ — символ Лежандра по модулю 5.

$$\chi_0(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } (m,5)=1, \\ 0, & \text{при } m \equiv 0 \pmod 5, \end{cases}$$

$$\chi_1(m) = \left(\frac{m}{5}\right) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 1,4 \pmod 5, \\ -1, & \text{при } m \equiv 2,3 \pmod 5, \\ 0, & \text{при } m \equiv 0 \pmod 5, \end{cases}$$

$$\chi_2(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 1 \pmod 5, \\ i, & \text{при } m \equiv 2 \pmod 5, \\ -i, & \text{при } m \equiv 3 \pmod 5, \\ -1, & \text{при } m \equiv 4 \pmod 5, \\ 0, & \text{при } m \equiv 0 \pmod 5, \end{cases}$$

$$\chi_3(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 1 \pmod 5, \\ -i, & \text{при } m \equiv 2 \pmod 5, \\ i, & \text{при } m \equiv 3 \pmod 5, \\ -1, & \text{при } m \equiv 4 \pmod 5, \\ 0, & \text{при } m \equiv 0 \pmod 5. \end{cases}$$

Ясно, что справедливы равенства

$$\overline{\chi}_0(m) = \chi_0(m), \quad \overline{\chi}_1(m) = \chi_1(m), \quad \overline{\chi}_2(m) = \chi_3(m), \quad \overline{\chi}_3(m) = \chi_2(m).$$

Определим величину $\zeta_5(\alpha)$ равенством

$$\zeta_5(\alpha) = \frac{1}{5^\alpha}\left(\zeta\left(\alpha, \frac{1}{5}\right) + \zeta\left(\alpha, \frac{2}{5}\right) + \zeta\left(\alpha, \frac{3}{5}\right) + \zeta\left(\alpha, \frac{4}{5}\right)\right) = \sum_{m=1}^{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(5n+m)^\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\zeta_5(\alpha) = \zeta(\alpha) - \frac{1}{5^\alpha}\zeta(\alpha), \quad \zeta_5(\alpha) = \zeta(\alpha)\left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right).$$

Нам потребуется полный набор L-функций Дирихле $L(\alpha, \chi)$, задаваемых равенствами:

$$L(\alpha, \chi_\nu) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi_\nu(m)}{m^\alpha} \quad (\nu = 0, \ldots, 3).$$

Лемма 33. *При $a = 1, 2, 3, 4$ справедливо равенство*

$$\zeta\left(\alpha, \frac{a}{5}\right) = \frac{5^\alpha}{4}\sum_{\nu=0}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha, \chi_\nu). \tag{2.69}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{5^\alpha}{4}\sum_{\nu=0}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha,\chi_\nu) = \frac{5^\alpha}{4}\sum_{\nu=0}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi_\nu(m)}{m^\alpha} =$$

$$= 5^\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha}\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3}\chi_\nu(m)\overline{\chi}_\nu(a) = 5^\alpha\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(5m+a)^\alpha} = \zeta\left(\alpha, \frac{a}{5}\right),$$

так как

$$\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)\chi_\nu(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } a \equiv m \pmod 5, \\ 0, & \text{при } a \not\equiv m \pmod 5. \end{cases}$$

□

Лемма 34. *Справедливо равенство*

$$\zeta_5(\alpha) = \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{4}\sum_{\nu=0}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha,\chi_\nu) = L(\alpha,\chi_0). \tag{2.70}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{4}\sum_{\nu=0}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha,\chi_\nu) = \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{4}\sum_{\nu=0}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi_\nu(m)}{m^\alpha} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha}\sum_{\nu=0}^{3}\chi_\nu(m)\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{4}\overline{\chi}_\nu(a) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha}\chi_0(m) = \zeta_5(\alpha),$$

так как

$$\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{4}\overline{\chi}_\nu(a) = \begin{cases} 1, & \text{при } \nu = 0, \\ 0, & \text{при } \nu = 1, 2, 3. \end{cases}$$

□

При $a = 1, 2, 3, 4$ положим $\zeta_5(\alpha, a) = \zeta_5(\alpha) - 5^{-\alpha}\zeta\left(\alpha, \frac{a}{5}\right)$. Таким образом, имеем:

$$\zeta_5(\alpha, a) = \frac{1}{5^\alpha}\sum_{1\leqslant b\leqslant 4, b\neq a}\zeta\left(\alpha, \frac{b}{5}\right).$$

Лемма 35. *Справедливо равенство*

$$\zeta_5(\alpha, a) = \frac{3}{4}L(\alpha,\chi_0) - \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha,\chi_\nu). \tag{2.71}$$

Доказательство. Действительно, в силу лемм 33 и 34 имеем:

$$\zeta_5(\alpha,a)=\zeta_5(\alpha)-5^{-\alpha}\zeta\left(\alpha,\frac{a}{5}\right)=L(\alpha,\chi_0)-\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha,\chi_\nu)=$$
$$=\frac{3}{4}L(\alpha,\chi_0)-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha,\chi_\nu),$$

так как $\overline{\chi}_0(a)=1$. □

Сформулируем частный случай теоремы 1 (стр. 264) из монографии С. М. Воронина и А. А. Карацубы [33].

Теорема 12. *Пусть $0<r<\frac{1}{4}$, $f_0(\alpha),\ldots,f_3(\alpha)$ — функции, аналитические внутри круга $|\alpha|\leqslant r$, непрерывные вплоть до границы круга и не имеющие нулей при $|\alpha|<r$. Тогда для всякого $\varepsilon>0$ существует $t>0$ такое, что для всех $\nu=0,1,2,3$ выполняется*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f_\nu(\alpha)-L\left(\alpha+\frac{3}{4}+it,\chi_\nu\right)\right|<\varepsilon. \tag{2.72}$$

Найдется постоянная $c=c(f_0,\ldots,f_3,\varepsilon)>0$ такая, что при достаточно больших T существует не менее cT различных значений $0<t<T$ для которых выполняется неравенство (2.72).

Теорема 13. *(принцип аргумента). Если две функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$, аналитические внутри и на контуре Γ, удовлетворяют на Γ условиям $\varphi(\alpha)\neq 0$ и $|\psi(\alpha)|<|\varphi(\alpha)|$, то внутри Γ функции $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)+\psi(\alpha)$ имеют одинаковое число нулей.*

Используя эти теоремы, докажем теорему о нулях $\zeta_5(\alpha,a)$ при $a=1,2,3,4$.

Теорема 14. *Пусть $a=1,2,3,4$. Тогда для любых σ_1, σ_2 таких, что $\frac{1}{2}<\sigma_1<\sigma_2<1$, в области, определяемой неравенствами[4] $\sigma_1<\Re\alpha<\sigma_2$, $|\Im\alpha|<T$, найдется при достаточно большом T более чем cT нулей $\zeta_5(\alpha,a)$ ($c=c(a,\sigma_1,\sigma_2)$ — положительная постоянная, не зависящая от T).*

[4] Здесь и далее $\Re\alpha=\operatorname{Re}\alpha$ — действительная часть комплексного числа α, а $\Im\alpha=\operatorname{Im}\alpha$ — мнимая.

Доказательство. Положим

$$\sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, \quad f_0(\alpha) = (\alpha-\sigma)+10, \quad f_1(\alpha) = \left(\frac{a}{5}\right)\cdot 30,$$
$$f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = \delta = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{6}.$$

В силу теоремы 12 найдутся t такие, что

$$\max_{\nu=0,1,2,3}\max_{\left|\alpha-\frac{3}{4}\right|\leqslant r}\left|L\left(\alpha+it,\chi_\nu\right)-f_\nu(\alpha)\right|<\delta, \tag{2.73}$$

где $r=\max\left(\left|\sigma_2-\frac{3}{4}\right|,\left|\sigma_1-\frac{3}{4}\right|\right)$. Следовательно, для таких t будет выполняться

$$\left|\frac{3}{4}L(\alpha+it,\chi_0)-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha+it,\chi_\nu)-\frac{3}{4}f_0(\alpha)+\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)\right|<$$
$$<\frac{5\delta}{4}=\frac{5(\sigma_2-\sigma_1)}{24}. \tag{2.74}$$

Поскольку

$$\frac{3}{4}f_0(\alpha)-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)=\frac{3}{4}\left((\alpha-\sigma)+10\right)-\frac{1}{4}\left(\left(\frac{a}{5}\right)^2\cdot 30+(\overline{\chi}_2(a)+\overline{\chi}_3(a))\delta\right)=$$
$$=\frac{3(\alpha-\sigma)}{4}-\frac{(\overline{\chi}_2(a)+\overline{\chi}_3(a))\delta}{4},$$
$$\left|\frac{3}{4}f_0(\alpha)-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)\right|\geqslant\frac{3|\alpha-\sigma|}{4}-\frac{\delta}{2},$$

то

$$\min_{|\alpha-\sigma|=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}}\left|\frac{3}{4}f_0(\alpha)-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)\right|\geqslant\frac{3(\sigma_2-\sigma_1)}{8}-\frac{\sigma_2-\sigma_1}{12}=$$
$$=\frac{7(\sigma_2-\sigma_1)}{24}>\frac{\sigma_2-\sigma_1}{4}. \tag{2.75}$$

Рассмотрим функции

$$\varphi(\alpha)=\frac{3}{4}f_0(\alpha)-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)=\frac{3(\alpha-\sigma)}{4}-\frac{(\overline{\chi}_2(a)+\overline{\chi}_3(a))\delta}{4},$$
$$\psi(\alpha)=\frac{3}{4}L(\alpha+it,\chi_0)-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha+it,\chi_\nu)-\frac{3}{4}f_\nu(\alpha)+\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha).$$

Ясно, что

$$\zeta_5(\alpha+it,a)=\frac{3}{4}L(\alpha+it,\chi_0)-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha+it,\chi_\nu)=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha).$$

Функция $\varphi(\alpha)$ имеет единственный ноль на всей комплексной плоскости:

$$\alpha_0=\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}+\frac{(\overline{\chi}_2(a)+\overline{\chi}_3(a))\delta}{3},\qquad \left|\alpha_0-\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}\right|\leqslant\frac{\sigma_2-\sigma_1}{9},$$

который принадлежит внутренности круга $\left|\alpha-\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}\right|\leqslant\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$.

В следствии принципа аргумента из оценок (2.74) и (2.75) следует, что внутри круга

$$\left|\alpha-\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}\right|\leqslant\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$$

найдётся нуль функции

$$\zeta_5(\alpha+it,a)=\frac{3}{4}L(\alpha+it,\chi_0)-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha+it,\chi_\nu).$$

Обозначим этот ноль через α_t. Таким образом, для каждого t, для которого выполнено неравенство (2.73), точка $\alpha_t^*=\alpha_t+ti$ будет нулём функции $\zeta_5(\alpha,a)$.

В силу замечания к теореме 1 из книги [33] (см. стр. 265) мера таких $t\in(0,T)$ при T, достаточно больших, будет больше cT. Теорема доказана. □

2.8. Нули одного дзета-ряда

Пусть p — простое число, $p\geqslant 3$. Рассмотрим полный набор характеров Дирихле[5] по модулю p:

$$\chi_0(m)=\begin{cases}1, & \text{при } (m,p)=1,\\ 0, & \text{при } m\equiv 0 \pmod p,\end{cases}$$

$$\chi_1(m)=\left(\frac{m}{p}\right)=\begin{cases}1, & \text{при } m \text{ — квадратичный вычет},\\ -1, & \text{при } m \text{ — квадратичный невычет},\\ 0, & \text{при } m\equiv 0 \pmod p,\end{cases}$$

$$\chi_\nu(m)\text{— все остальные характеры по модулю } p \quad (\nu=2,\ldots,p-2).$$

[5] Здесь и далее $\left(\frac{m}{p}\right)$ — символ Лежандра по модулю р.

Ясно, что справедливы равенства

$$\overline{\chi}_0(m) = \chi_0(m), \quad \overline{\chi}_1(m) = \chi_1(m), \quad \overline{\chi}_\nu(m) \cdot \chi_\nu(m) = \chi_0(m) \quad (\nu = 2, \ldots, p-2).$$

Кроме того, так как

$$\sum_{\nu=0}^{p-2} \overline{\chi}_\nu(a) = \begin{cases} p-1, & \text{при } a = 1, \\ 0, & \text{при } a = 2, \ldots, p-1, \end{cases}$$

то при $p \geqslant 5$ имеем:

$$\sum_{\nu=2}^{p-2} \overline{\chi}_\nu(a) = \begin{cases} p-3, & \text{при } a = 1, \\ -1 - \left(\frac{a}{p}\right), & \text{при } a = 2, \ldots, p-1, \end{cases}$$

а при $p = 3$

$$\sum_{\nu=2}^{p-2} \overline{\chi}_\nu(a) = 0,$$

так как сумма пустая.

Определим величину $\zeta_p(\alpha, p-1)$ равенством

$$\zeta_p(\alpha, p-1) = \sum_{m=1}^{p-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn+m)^\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\zeta_p(\alpha, p-1) = \zeta(\alpha) - \frac{1}{p^\alpha}\zeta(\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(pm-1)^\alpha}.$$

Ясно, что

$$\lim_{p\to\infty} \zeta_p(\alpha, p-1) = \zeta(\alpha).$$

Нам потребуется полный набор L-функций Дирихле $L(\alpha, \chi)$ по модулю p, задаваемых равенствами:

$$L(\alpha, \chi_\nu) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_\nu(m)}{m^\alpha} \quad (\nu = 0, \ldots, p-2).$$

Лемма 36. *При $a = 1, \ldots, p-1$ справедливо равенство*

$$\zeta\left(\alpha, \frac{a}{p}\right) = \frac{p^\alpha}{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-2} \overline{\chi}_\nu(a) L(\alpha, \chi_\nu). \tag{2.76}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{p^\alpha}{p-1}\sum_{\nu=0}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha,\chi_\nu)=\frac{p^\alpha}{p-1}\sum_{\nu=0}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi_\nu(m)}{m^\alpha}=$$
$$=p^\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha}\frac{1}{p-1}\sum_{\nu=0}^{p-2}\chi_\nu(m)\overline{\chi}_\nu(a)=p^\alpha\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(pm+a)^\alpha}=\zeta\left(\alpha,\frac{a}{p}\right),$$

так как

$$\frac{1}{p-1}\sum_{\nu=0}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)\chi_\nu(m)=\begin{cases}1, & \text{при } a\equiv m \pmod p,\\ 0, & \text{при } a\not\equiv m \pmod p.\end{cases}$$

□

Определим величину $\zeta_p(\alpha)$ равенством

$$\zeta_p(\alpha)=\frac{1}{p^\alpha}\left(\zeta\left(\alpha,\frac{1}{p}\right)+\zeta\left(\alpha,\frac{2}{p}\right)+\ldots+\zeta\left(\alpha,\frac{p-2}{p}\right)+\zeta\left(\alpha,\frac{p-1}{p}\right)\right)=$$
$$=\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(pn+m)^\alpha}.$$

Лемма 37. *Справедливо равенство*

$$\zeta_p(\alpha)=\frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{\nu=0}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha,\chi_\nu)=L(\alpha,\chi_0). \tag{2.77}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{\nu=0}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha,\chi_\nu)=\frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{\nu=0}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi_\nu(m)}{m^\alpha}=$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha}\sum_{\nu=0}^{p-2}\chi_\nu(m)\frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p-1}\overline{\chi}_\nu(a)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha}\chi_0(m)=\zeta_p(\alpha),$$

так как

$$\frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p-1}\overline{\chi}_\nu(a)=\begin{cases}1, & \text{при } \nu=0,\\ 0, & \text{при } \nu=1,\ldots,p-2.\end{cases}$$

□

При $a=1,\ldots,p-1$ положим $\zeta_p(\alpha,a)=\zeta_p(\alpha)-p^{-\alpha}\zeta\left(\alpha,\frac{a}{p}\right)$. Таким образом, имеем:

$$\zeta_p(\alpha,a)=\frac{1}{p^\alpha}\sum_{1\leqslant b\leqslant p-1,b\neq a}\zeta\left(\alpha,\frac{b}{p}\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\zeta_p(\alpha, a) = \zeta(\alpha) - \frac{1}{p^\alpha}\zeta(\alpha) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(pm+a)^\alpha}.$$

Ясно, что для любого c с $0 < c < 1$

$$\lim_{p\to\infty} \zeta_p(\alpha, [cp]) = \zeta(\alpha).$$

Лемма 38. *Справедливо равенство*

$$\zeta_p(\alpha, a) = \frac{p-2}{p-1}L(\alpha, \chi_0) - \frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2} \overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha, \chi_\nu). \tag{2.78}$$

Доказательство. Действительно, в силу лемм 36 и 37 имеем:

$$\zeta_p(\alpha, a) = \zeta_p(\alpha) - p^{-\alpha}\zeta\left(\alpha, \frac{a}{p}\right) = L(\alpha, \chi_0) - \frac{1}{p-1}\sum_{\nu=0}^{p-2} \overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha, \chi_\nu) =$$

$$= \frac{p-2}{p-1}L(\alpha, \chi_0) - \frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2} \overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha, \chi_\nu),$$

так как $\overline{\chi}_0(a) = 1$. □

Сформулируем частный случай теоремы 1 (стр. 264) из монографии С. М. Воронина и А. А. Карацубы [33].

Теорема 15. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$, $f_0(\alpha)$, $\ldots$, $f_{p-2}(\alpha)$ — функции, аналитические внутри круга $|\alpha| \leqslant r$, непрерывные вплоть до границы круга и не имеющие нулей при $|\alpha| < r$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $t > 0$ такое, что для всех $\nu = 0, \ldots, p-2$ выполняется*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left| f_\nu(\alpha) - L\left(\alpha + \frac{3}{4} + it, \chi_\nu\right)\right| < \varepsilon. \tag{2.79}$$

Найдется постоянная $c = c(f_0, \ldots, f_3, \varepsilon) > 0$ такая, что при достаточно больших T существует не менее cT различных значений $0 < t < T$ для которых выполняется неравенство (2.79).

Используя эту теорему, докажем теорему о нулях $\zeta_p(\alpha, a)$ при $a = 1, \ldots, p-1$.

Теорема 16. *Пусть $a = 1, \ldots, p-1$. Тогда для любых σ_1, σ_2 таких, что $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, в области, определяемой неравенствами $\sigma_1 < \Re\alpha < \sigma_2$, $|\Im\alpha| < T$, найдется при достаточно большом T более чем cT нулей $\zeta_p(\alpha, a)$ ($c = c(a, \sigma_1, \sigma_2)$ — положительная постоянная, не зависящая от T).*

Доказательство. Положим

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad f_0(\alpha) = (\alpha - \sigma) + 10, \quad f_1(\alpha) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot 10(p-2),$$
$$f_\nu(\alpha) = \delta = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{6} \quad (\nu = 2, \ldots, p-2).$$

В силу теоремы 15 найдутся t такие, что

$$\max_{\nu=0,\ldots,p-2} \max_{\left|\alpha - \frac{3}{4}\right| \leqslant r} |L(\alpha + it, \chi_\nu) - f_\nu(\alpha)| < \delta, \tag{2.80}$$

где $r = \max\left(\left|\sigma_2 - \frac{3}{4}\right|, \left|\sigma_1 - \frac{3}{4}\right|\right)$. Следовательно, для таких t будет выполняться при $p \geqslant 5$

$$\left|\frac{p-2}{p-1}L(\alpha+it,\chi_0) - \frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha+it,\chi_\nu) - \frac{p-2}{p-1}f_0(\alpha) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)\right| < \frac{p\delta}{p-1} = \frac{p(\sigma_2 - \sigma_1)}{6(p-1)}, \tag{2.81}$$

а при $p = 3$

$$\left|\frac{1}{2}L(\alpha+it,\chi_0) - \frac{1}{2}\overline{\chi}_1(a)L(\alpha+it,\chi_\nu) - \frac{1}{2}f_0(\alpha) + \frac{1}{2}\overline{\chi}_1(a)f_1(\alpha)\right| < \delta = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{6}. \tag{2.82}$$

Поскольку при $p \geqslant 5$

$$\frac{p-2}{p-1}f_0(\alpha) - \frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha) =$$
$$= \frac{p-2}{p-1}\left((\alpha - \sigma) + 10\right) - \frac{1}{p-1}\left(\left(\frac{a}{p}\right)^2 10(p-2) + \delta\sum_{\nu=2}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)\right) =$$
$$= \frac{(p-2)(\alpha-\sigma)}{p-1} - \frac{\delta\sum\limits_{\nu=2}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)}{p-1},$$

$$\left|\sum_{\nu=2}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)\right| \leqslant 2, \quad \left|\frac{p-2}{p-1}f_0(\alpha) - \frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)\right| \geqslant \frac{(p-2)|\alpha-\sigma|}{p-1} - \frac{2\delta}{p-1},$$

то

$$\min_{|\alpha-\sigma|=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}}\left|\frac{p-2}{p-1}f_0(\alpha)-\frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)\right|\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(p-2)(\sigma_2-\sigma_1)}{2(p-1)}-\frac{\sigma_2-\sigma_1}{3(p-1)}=\frac{(3p-8)(\sigma_2-\sigma_1)}{6(p-1)},\tag{2.83}$$

а при $p=3$

$$\frac{p-2}{p-1}f_0(\alpha)-\frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)=\frac{1}{2}\left((\alpha-\sigma)+10\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{p}\right)^2 10=\frac{\alpha-\sigma}{2},$$

поэтому

$$\min_{|\alpha-\sigma|=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}}\left|\frac{p-2}{p-1}f_0(\alpha)-\frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)\right|=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{4}.\tag{2.84}$$

Рассмотрим функции

$$\varphi(\alpha)=\frac{p-2}{p-1}f_0(\alpha)-\frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha)=\frac{(p-2)(\alpha-\sigma)}{p-1}-\frac{\delta\sum\limits_{\nu=2}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)}{p-1},$$

$$\psi(\alpha)=\frac{p-2}{p-1}L(\alpha+it,\chi_0)-\frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha+it,\chi_\nu)-$$
$$-\frac{p-2}{p-1}f_0(\alpha)+\frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)f_\nu(\alpha).$$

Ясно, что

$$\zeta_p(\alpha+it,a)=\frac{p-2}{p-1}L(\alpha+it,\chi_0)-\frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha+it,\chi_\nu)=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha).$$

Функция $\varphi(\alpha)$ имеет единственный ноль на всей комплексной плоскости:

$$\alpha_0=\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}+\frac{\delta\sum\limits_{\nu=2}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)}{p-2},\qquad\left|\alpha_0-\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}\right|\leqslant\frac{\sigma_2-\sigma_1}{3(p-2)},$$

который принадлежит внутренности круга $\left|\alpha-\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}\right|\leqslant\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$.

В следствии принципа аргумента из оценок (2.81) и (2.83) при $p\geqslant 5$ и оценок (2.82) и (2.84) при $p=3$ следует, что внутри круга

$$\left|\alpha-\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}\right|\leqslant\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$$

найдётся нуль функции

$$\zeta_p(\alpha+it,a)=\frac{p-2}{p-1}L(\alpha+it,\chi_0)-\frac{1}{p-1}\sum_{\nu=1}^{p-2}\overline{\chi}_\nu(a)L(\alpha+it,\chi_\nu).$$

Обозначим этот ноль через α_t. Таким образом, для каждого t, для которого выполнено неравенство (2.80), точка $\alpha_t^*=\alpha_t+ti$ будет нулём функции $\zeta_p(\alpha,a)$.

В силу замечания к теореме 1 из книги [33] (см. стр. 265) мера таких $t\in(0,T)$ при T, достаточно больших, будет больше cT. Теорема доказана. □

2.9. Заключение ко второй главе

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

- во-первых, теория гиперболической дзета-функции Гурвица является вполне содержательной и аналогична теории обычной дзета-функции Гурвица;
- во-вторых, на наш взгляд, выделение дзета-функций второго рода является удачным и перспективным;
- в-третьих, последняя доказанная теорема 11 позволяет наметить дальнейшую программу исследований. Следующим этапом должно стать получение функционального уравнения для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки в аналогичной форме. Имеющееся в настоящее время функциональное уравнение не позволяет переходить в нем к пределу, так как предел дзета-функций решёток не всегда существует;
- в-четвертых, на наш взгляд, важным и перспективным является получение интегрального представления для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки в критической полосе $\alpha=\sigma+it, 0\leqslant\sigma\leqslant 1$ α-плоскости и изучение возможности предельного перехода в этом интегральном представлении;
- в-пятых, было бы интересно выяснить имеются ли аналоги последних двух параграфов для гиперболической дзета-функции Гурвица?

- в-шестых, сравнивая результаты последних двух разделов, мы видим, что они имеют много общего с теоремой 7 С. М. Воронина из книги [33] (см. стр. 268).

Действительно, из теоремы С. М. Воронина о нулях дзета-функции Гурвица в критической полосе немедленно следует утверждение о нулях аналитического продолжения дзета-ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(nq+a)^{\alpha}}=\frac{1}{q^{\alpha}}\zeta\left(\alpha,\frac{a}{q}\right)\quad \alpha=\sigma+it,\sigma>1,\quad 1\leqslant a<q,\quad (a,q)=1$$

при $q>2$.

В наших теоремах речь идёт о существовании нулей в критической полосе у аналитического продолжения дзета-ряда

$$\zeta_p(\alpha,a)=\sum_{1\leqslant b\leqslant p-1,b\neq a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(pm+b)^{\alpha}}.$$

Ясно, что теорема должна оставаться верной при замене простого $p\geqslant 3$ на любое натуральное $q>2$ и для дзета-ряда

$$\zeta_q(\alpha,a)=\sum_{1\leqslant b\leqslant q-1,b\neq a,(b,q)=1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(qm+b)^{\alpha}}\quad \alpha=\sigma+it,\sigma>1,$$
$$1\leqslant a<q,\ (a,q)=1.$$

Более того, как нам кажется, незначительно изменив доказательство, можно доказать следующую теорему. Рассмотрим $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_k)$ с $1\leqslant k<\varphi(q)$, $1\leqslant a_1<\ldots<a_k<q$, $(a_\nu,q)=1$ $(1\leqslant\nu\leqslant k)$, которой будем называть допустимым вектором по модулю q, и определим дзета-ряд

$$\zeta_q(\alpha,\vec{a})=\sum_{1\leqslant b\leqslant q-1,b\neq a_\nu(1\leqslant\nu\leqslant k),(b,q)=1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(qm+b)^{\alpha}}\quad \alpha=\sigma+it,\sigma>1.$$

Ясно, что

$$\zeta_q(\alpha,\vec{a})=\zeta_q(\alpha)-q^{-\alpha}\sum_{\nu=1}^{k}\zeta\left(\alpha,\frac{a_\nu}{q}\right).$$

Теорема 17. *Пусть* $\vec{a}$ *— допустимый вектор по модулю* q. *Тогда для любых* σ_1, σ_2 *таких, что* $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, *в области, определяемой неравенствами* $\sigma_1 < \Re\alpha < \sigma_2$, $|\Im\alpha| < T$, *найдется при достаточно большом* T *более чем* cT *нулей* $\zeta_q(\alpha, \vec{a})$ *(*$c = c(a, \sigma_1, \sigma_2)$ *— положительная постоянная, не зависящая от* T*).*

Глава 3

Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители

3.1. Введение к третьей главе

Для любого множества A натуральных чисел определим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ равенством

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x\in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > 1). \tag{3.1}$$

Если множество A конечное, то равенство (3.1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (3.1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$ (см. [133], [143]). Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Будем через $M(A)$ обозначать минимальный мультипликативный моноид, содержащий множество A. Таким образом, мы имеем:

$$M(A) = \{a_1 \dots a_l | a_1, \dots, a_l \in A, l \geqslant 0\}.$$

Здесь мы используем естественное соглашение, что пустое произведение равно 1.

Будем говорить, что два множества натуральных чисел A и B взаимно просты, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $(a, b) = 1$. В этом случае будем писать $(A, B) = 1$.

Нетрудно видеть, что при $(A, B) = 1$ справедливы равенства

$$M(A \cdot B) = M(A) \cdot M(B), \quad \zeta(M(A \cdot B)|\alpha) = \zeta(M(A)|\alpha)\zeta(M(B)|\alpha). \tag{3.2}$$

Ясно, что последнее равенство имеет место при $\sigma > \sigma_{M(A \cdot B)}$ и $\sigma_{M(A \cdot B)} = = \max(\sigma_{M(A)}, \sigma_{M(B)})$. Равенство (3.2) следует из того, что при $(A, B) = 1$ представление $n = n_1 n_2$, где $n \in M(A \cdot B)$, $n_1 \in M(A)$ и $n_2 \in M(B)$, единственное.

Если через $\zeta^*(A|\alpha)$ обозначается обратный ряд, то есть $\zeta^*(A|\alpha) = \zeta^{-1}(A|\alpha)$, то нетрудно понять, что если $1 \in A$, то

$$\zeta^*(A|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}, \tag{3.3}$$

где коэффициенты $x_A(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$x_A(1) = 1, \sum_{m|n,\, m \in A} x_A\left(\frac{n}{m}\right) = 0 \quad (n \in M(A), n > 1). \tag{3.4}$$

Обозначим через $\sigma_{A,1}$ число, такое что для $A^* = A \setminus \{1\}$ и

$$S(A, \alpha) = \sum_{n \in A^*} \frac{1}{n^\alpha}$$

выполнено $|S(A, \alpha)| < 1$ при $\sigma > \sigma_{A,1}$, тогда

$$\zeta^{-1}(A|\alpha) = \frac{1}{1 + S(A, \alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu S^\nu(A, \alpha) =$$

$$= 1 - \sum_{n \in A^*} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{n_1, \dots, n_\nu \in A^*} \frac{1}{(n_1 \dots n_\nu)^\alpha} = \sum_{n \in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}$$

и для $x_A(n)$ выполнены соотношения

$$x_A(1) = 1, \quad x_A(n) = \sum_{\nu \geqslant 1} (-1)^\nu y_\nu(n) \quad n \in M^*(A),$$

где $y_\nu(n)$ — количество решений уравнения $n = n_1 \dots n_\nu$ в натуральных $n_1, \dots, n_\nu \in A^*$.

Таким образом, если σ_A^* определяет правую полуплоскость $\sigma > \sigma_A^*$ абсолютной сходимости обратного ряда $\zeta^*(A|\alpha)$, то $\sigma_A^* \leqslant \sigma_{A,1}$.

Если M_1 и M_2 — два взаимно простых моноида[1] $(M_1, M_2) = 1$, то из равенства

$$\zeta(M_1 \cdot M_2|\alpha) = \zeta(M_1|\alpha)\zeta(M_2|\alpha)$$

вытекает

$$\zeta^*(M_1 \cdot M_2)|\alpha) = \zeta^*(M_1|\alpha)\zeta^*(M_2|\alpha),$$
$$x_{M_1 \cdot M_2}(n_1 n_2) = x_{M_1}(n_1) x_{M_2}(n_2), \quad n_\nu \in M_\nu \quad (\nu = 1, 2).$$

Пусть M — произвольный мультипликативный моноид натуральных чисел. Будем через $P(M)$ обозначать множество его простых элементов. Понятно, что если через $\mathbb{P}$ мы обозначаем множество простых чисел, то $M \bigcap \mathbb{P} \subset P(M)$. Кроме простых чисел, попавших в M, множество простых элементов $P(M)$ состоит из псевдопростых чисел. Если любые два простых элемента из $P(M)$ взаимнопросты, то моноид M имеет однозначное разложение на простые элементы. Это достаточное условие однозначности разложения на простые элементы, но оно не является необходимым.

Обозначим через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

[1]Как правило здесь и далее слово мультипликативный будем опускать, так как все моноиды в данной работе мультипликативные.

Будем называть каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \dots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \dots < r_k, \quad r_1, \dots, r_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа x, тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

Для произвольной мультипликативной функции $f(n)$ через $L(\alpha, f)$ будем обозначать обобщенную L-функцию, если ряд Дирихле

$$L(\alpha, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\alpha} \tag{3.5}$$

абсолютно сходится в некоторой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$. В этой полуплоскости будет справедливо разложение в эйлерово произведение

$$L(\alpha, f) = \prod_p \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} \right).$$

Если выполнено дополнительное условие $f(p^\nu) = f^\nu(p)$, то эйлерово произведение будет иметь более компактный вид

$$L(\alpha, f) = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^\alpha} \right)^{-1}.$$

Если выполнено другое дополнительное условие $f(p^\nu) = af_1^\nu(p)$ при $\nu \geqslant 1$, то эйлерово произведение будет иметь другой компактный вид

$$L(\alpha, a, f_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\nu(n)} f_1(n)}{n^\alpha} = \prod_p \left(1 + \frac{af_1(p)}{p^\alpha - f_1(p)} \right).$$

Если для мультипликативной функции $f(n)$ выполнено соотношение $f(n) = O(n^\varepsilon)$ для произвольного $\varepsilon > 0$, то ряд Дирихле (3.5) абсолютно сходится в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Обозначим через $\chi_M(n)$ характеристическую функцию мультипликативного моноида M натуральных чисел:

$$\chi_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n \in M, \\ 0, & \text{при } n \in \mathbb{N} \setminus M. \end{cases}$$

Если $P(M) \subset \mathbb{P}$, то $\chi_M(n)$ — мультипликативная функция и мультипликативный моноид M имеет однозначное разложение на простые множители. В этом случае дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ является обобщённой L-функцией $L(\alpha, \chi_M)$.

Цель данной главы — изучить свойства дзета-функций мультипликативных моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители и её логарифмов.

3.2. Примеры моноидов и обобщённая функция Мёбиуса

Простейшем примером моноида натуральных чисел является геометрическая прогрессия. Пусть $A = \{1, a\}$ и $a > 1$, тогда $M(A) = \{a^\nu | \nu \geqslant 0\}$, $P(M(A)) = \{a\}$,

$$\zeta(A|\alpha) = 1 + \frac{1}{a^\alpha}, \quad \zeta^*(A|\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{a^{\nu\alpha}} = \sum_{n \in M(A)} \frac{\mu_A(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_A(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса на моноиде $M(A)$:

$$\mu_A(n) = (-1)^\nu \text{ при } n = a^\nu.$$

Для моноида $M(A)$ имеем:

$$\zeta(M(A)|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{1}{n^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{a^\alpha}\right)^{-1}, \quad \zeta^*(M(A)|\alpha) = 1 - \frac{1}{a^\alpha}.$$

Будем для любого простого числа $p \in \mathbb{P}$ через $M(p)$ обозначать геометрическую прогрессию со знаменателем p и первым членом 1. Теорему о разложении любого натурального числа в произведение простых чисел можно записать следующим образом

$$\mathbb{N} = \prod_{p \in \mathbb{P}} M(p),$$

а теорема об однозначности такого разложения означает, что $k(n) = 1$ — число канонических разложений для натурального числа n.

Таким образом, наиболее известными моноидами натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители являются $\mathbb{N}$ и $M(p)$ $(p \in \mathbb{P})$. Для случая $M(p)$ обратный ряд $\zeta^*(M(p)|\alpha)$ для $\zeta(M(p)|\alpha)$ выписан выше, а для случая $\mathbb{N}$ он хорошо известен:

$$\zeta(\mathbb{N}|\alpha) = \zeta(\alpha), \quad \zeta^*(\mathbb{N}|\alpha) = \zeta^{-1}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{\alpha}},$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мёбиуса.

Рассмотрим ещё два примера. Пусть $(a, b) = d$, $a = da_1$, $b = db_1$, $a_1 > 1$, $b_1 > 1$ и $A(a, b) = \{1, a, b\}$. Ясно, что

$$M(A(a, b)) = \{a^{\nu} b^{\mu} | \nu, \mu \geqslant 0\}, \quad P(M(A(a, b))) = \{a, b\}$$

и $M(A(a, b))$ — моноид с однозначным разложением на простые множители.

Лемма 39. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(A(a, b)) = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^{\nu} b^{\mu})^{\alpha}}.$$

Доказательство. Действительно, перемножая ряды Дирихле, получим

$$\zeta(A(a, b))\zeta^*(A(a, b)) = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^{\nu} b^{\mu})^{\alpha}} + \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^{\nu+1} b^{\mu})^{\alpha}} +$$
$$+ \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^{\nu} b^{\mu+1})^{\alpha}} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} + (-1)^{\nu-1}}{(a^{\nu})^{\alpha}} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} + (-1)^{\mu-1}}{(b^{\mu})^{\alpha}} +$$
$$+ \sum_{\nu,\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+\mu}(C_{\nu+\mu}^{\nu} - C_{\nu+\mu-1}^{\nu} - C_{\nu+\mu-1}^{\nu-1})}{(a^{\nu} b^{\mu})^{\alpha}} = 1,$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Пусть $a > 1$ и $\nu > 1$, тогда для $A(a, a^{\nu})$ имеем:

$$M(A(a, a^{\nu})) = \{a^{\mu} | \mu \geqslant 0\}, \quad P(M(A(a, a^{\nu}))) = \{a\}$$

и $M(A(a, a^{\nu}))$ — моноид с однозначным разложением на простые множители.

Лемма 40. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(A(a,a^\nu)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^\mu)^\alpha},$$

где $x(\mu) = (-1)^\mu$ *при* $0 \leqslant \mu \leqslant \nu - 1$ *и* $x(\mu) = -x(\mu-1) - x(\mu-\nu)$ *при* $\mu \geqslant \nu$.

Доказательство. Действительно, перемножая ряды Дирихле, получим

$$\zeta(A(a,a^\nu))\zeta^*(A(a,a^\nu)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^\mu)^\alpha} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^{\mu+1})^\alpha} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^{\nu+\mu})^\alpha} = 1+$$
$$+\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{x(\mu)+x(\mu-1)}{(a^\mu)^\alpha} + \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \frac{x(\mu)+x(\mu-1)+x(\mu-\nu)}{(a^\mu)^\alpha} = 1.$$

Отсюда следует, что $x(\mu) = (-1)^\mu$ при $0 \leqslant \mu \leqslant \nu-1$ и $x(\mu) = -x(\mu-1)-x(\mu-\nu)$ при $\mu \geqslant \nu$, что и доказывает утверждение леммы. □

Из доказанной леммы следует, что при всех значениях $\nu \geqslant 2$ минимальные моноиды $M(A(a,a^\nu))$ совпадают, а коэффициенты в числителях отличаются.

Если M — моноид с однозначным разложением на простые множители, то существует эйлерово произведение и мы легко находим обратный ряд

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$
$$\zeta^*(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n\in M} \frac{\mu_M(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_M(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами

$$\mu_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ (-1)^\nu, & \text{при } n = r_1 \ldots r_\nu,\ r_1 < \ldots r_\nu, \\ 0, & \text{при } n = r^2 n_1,\ r, n_1 \in M. \end{cases}$$

В общем случае, описываемым формулами (3.3) и (3.4), для нахождения явного вида коэффициентов $x_A(n)$ нам потребуется обобщённая функция Мёбиуса на частично упорядоченном моноиде $M(A)$.

Рассмотрим на $M(A)$ естественное частичное упорядочение индуцированное отношением делимости натуральных чисел.

Определение 6. *Говорим, что для $a, b \in M(A)$ выполнено $a \prec b$, если $a|b$, $a \in A$ и $a < b$. Соотношение $a \preceq b$ означает, что либо $a \prec b$, либо $a = b$.*

Воспользуемся известными обозначениями и фактами из комбинаторной теории (см. [131], [1]):
дельта функция Кронекера

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y; \end{cases}$$

дзета-функция

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \preceq y, \\ 0, & \text{если } x \npreceq y; \end{cases}$$

функция Мёбиуса

$$\mu(x, y) = \zeta^{-1}(x, y).$$

Последнее равенство означает, что

$$(\zeta * \mu)(x, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \zeta(x, z)\mu(z, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(z, y) = \delta(x, y),$$
$$(\mu * \zeta)(x, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(x, z)\zeta(z, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(x, z) = \delta(x, y).$$

Если

$$g(x) = \sum_{y \preceq x} f\left(\frac{x}{y}\right),$$

то

$$f(x) = \sum_{y \preceq x} g\left(\frac{x}{y}\right)\mu(y, x).$$

Лемма 41. *Для коэффициентов $x_A(n)$ справедливо равенство*

$$x_A(n) = \mu(1, n)$$

для любого $n \in M(A)$.

Доказательство. Действительно, перемножим ряды $\zeta(A|\alpha)$ и $\zeta^*(A|\alpha)$, получим

$$\zeta(A|\alpha)\zeta^*(A|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{m \preceq n} x\left(\frac{n}{m}\right) = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m\preceq n} x\left(\frac{n}{m}\right) = \delta(1,n).$$

Поэтому

$$x(n) = \sum_{m\preceq n} \delta(1,m)\mu(m,n) = \mu(1,n),$$

что доказывает утверждение леммы. □

3.3. Последовательности простых чисел экспоненциального роста

Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечную последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ будем называть экспоненциальной, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым, (см. [143]) для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел.

Теорема 18. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

Доказательство. Так как $M(PE)$ — моноид с однозначным разложением на простые множители, то в области абсолютной сходимости дзета-функция $\zeta(M(PE))$ имеет эйлерово произведение

$$P(M(PE)|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)^{-1}.$$

Для логарифма эйлерова произведения с помощью почленного логарифмирования получаем равномерно, абсолютно сходящийся ряд

$$\ln\zeta(M(PE))|\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu p_\nu^{\alpha\mu}},$$

так как для него при $\sigma \geqslant \sigma_0$, $\sigma_0 > 0$ имеется мажорирующий ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu q^{\sigma_0\mu\nu}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{n(\lambda)}{q^{\lambda\sigma_0}},$$

где

$$n(\lambda) = \sum_{\mu|\lambda}\frac{1}{\mu} < 1 + \ln\lambda$$

и мажорирующий ряд равномерно сходится. Это доказывает утверждение теоремы. □

Из существования эйлерова произведения вытекает, что для любой экспоненциальной последовательности простых чисел в правой полуплоскости $\sigma > 0$ дзета-функция $\zeta(M(PE))|\alpha)$ не имеет нулей.

3.4. Заключение к третьей главе

Данная тема исследований возникла в связи с изучением гиперболической дзета-функции решёток (см. [215, 46, 191], [186]). Другими источниками этих исследований были работы [9, 30, 33], [82, 112, 133, 144, 155].

В следующих работах мы планируем рассмотреть естественно возникающие в данной области проблемы, а именно:

- аналитическое продолжение для дзета-функции произвольного моноида натуральных чисел;
- получение функционального уравнения;
- обратные ряды для дзета-функции моноида натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители.

Важным классом моноидов натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители на наш взгляд являются моноиды, соответствующие подгруппам мультипликативной группы классов вычетов по произвольному модулю.

Глава 4

О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы

4.1. Введение к четвертой главе

В данной главе продолжаются исследования из работы [195] и сохраняются обозначения и определения из этой работы.

Будем через $\mathbb{P}_{3,1}$ и $\mathbb{P}_{3,2}$ обозначать множество всех простых чисел вида $3n+1$ и $3n+2$, соответственно. Таким образом, мы имеем:

$$\mathbb{P}_{3,1} = \{7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, \ldots\},$$
$$\mathbb{P}_{3,2} = \{2, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, \ldots\}$$

и согласно теореме Дирихле о простых в арифметической прогрессии множества простых $\mathbb{P}_{3,1}$ и $\mathbb{P}_{3,2}$ — бесконечные множества.

Рассмотрим мультипликативные функции $\chi_{3,1}(n)$ и $\chi_{3,2}(n)$, заданные равенствами

$$\chi_{3,1}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^\alpha,\ p = 3m+1,\ \alpha \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } n = p^\alpha,\ p = 3, 3m+2,\ \alpha \geqslant 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{3,1}(p^{\alpha_p}), & \text{при } n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}; \end{cases}$$

.

$$\chi_{3,2}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^{\alpha},\ p = 3m+2,\ \alpha \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } n = p^{\alpha},\ p = 3, 3m+1,\ \alpha \geqslant 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{3,2}(p^{\alpha_p}), & \text{при } \ n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}. \end{cases}$$

.

Основными объектами исследования в данной главе будут моноиды $M_{3,1}$, $M_{3,1,1}$, $M_{3,1,2}$ и $M_{3,1,2,0}$, заданные равенствами

$$M_{3,1} = \{n = 3k+1 | k \geqslant 0\}, \quad M_{3,1,1} = \{n = 3k+1 | \chi_{3,1}(n) = 1\},$$
$$M_{3,1,2} = \{n = 3k+1 | \chi_{3,2}(n) = 1\}, \quad M_{3,1,2,0} = \{n \in M_{3,1,2} | n \neq p^{\alpha}\}.$$

Ясно, что $M_{3,1} = M_{3,1,1} \cdot M_{3,1,2}$, поэтому $\zeta(M_{3,1}|\alpha) = \zeta(M_{3,1,1}|\alpha) \cdot \zeta(M_{3,1,2}|\alpha)$.

Нетрудно описать $P(M)$ — множество простых элементов для этих моноидов.

$$P(M_{3,1,1}) = \mathbb{P}_{3,1}.$$

$P(M_{3,1,2}) = \mathbb{P}_{3,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2}$ и состоит из псевдопростых чисел вида p_1p_2, где p_1, p_2 — произвольные простые числа вида $3m+2$. В частности, в это множество псевдопростых чисел входят квадраты простых.

Множество простых элементов $P(M_{3,1,2,0})$ состоит из псевдопростых чисел вида p_1p_2, где p_1, p_2 — произвольные различные простые числа вида $3m+2$.

Таким образом, $P(M_{3,1,2,0}) \subset P(M_{3,1,2})$ и в $P(M_{3,1,2,0})$ не входят квадраты простых.

Ясно, что $P(M_{3,1}) = \mathbb{P}_{3,1} \bigcup (\mathbb{P}_{3,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2})$.

Обозначим через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^{\alpha}}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

В частности,

$$\zeta(M_{3,1,1}|\alpha) = P(M_{3,1,1}|\alpha).$$

Будем называть каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \dots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \dots < r_k, \quad r_1, \dots, r_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа x, тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

Так как в моноиде $M_{3,1,2}$ нет однозначности разложения на простые элементы, то

$$\zeta(M_{3,1,2}|\alpha) \neq P(M_{3,1,2}|\alpha).$$

Цель данной главы — описать моноиды натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы, изучить их свойства, дзета-функции этих моноидов натуральных чисел и найти их обратные ряды Дирихле.

4.2. Обращение дзета-функций для произвольных множеств натуральных чисел

Для произвольного непустого множества A натуральных чисел рассмотрим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$, заданную равенством

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \, \sigma > \sigma_A), \tag{4.1}$$

где $\sigma_A \leqslant 1$ — абсцисса сходимости дзета-ряда, и через $\zeta^*(A|\alpha)$ обозначается обратный ряд, то есть $\zeta^*(A|\alpha) = \zeta^{-1}(A|\alpha)$.

Если A — конечное множество натуральных чисел, то дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ задается конечной суммой, которая определяет аналитическую функцию на всей комплексной α-плоскости, поэтому $\sigma_A = -\infty$.

Если A — бесконечное множество натуральных чисел, то ряд для дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ при $\alpha = 0$ расходится, поэтому $\sigma_A \geqslant 0$. По теореме Ландау (см. [143], стр. 156) в точке $\alpha = \sigma_A$ будет особая точка дзета-функции $\zeta(A|\alpha)$.

Пусть $\beta > 1$ и множество натуральных чисел $A_{\mathbb{N},\beta}$ имеет вид

$$A_{\mathbb{N},\beta} = \left\{ \left[n^\beta\right] \middle| \, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Лемма 42. *Для любого натурального n справедливо неравенство $\left[n^\beta\right] < \left[(n+1)^\beta\right]$.*

Доказательство. Рассмотрим при $\beta \geqslant 1$ функцию $f(\beta) = (n+1)^\beta - n^\beta$. Так как $f'(\beta) = (n+1)^\beta \ln(n+1) - n^\beta \ln n > 0$, то при $\beta > 1$ имеем $f(\beta) > f(1) = 1$. Отсюда следует, что $\left[(n+1)^\beta\right] > n^\beta$ и, следовательно, $\left[n^\beta\right] < \left[(n+1)^\beta\right]$, что и требовалось доказать. □

Теорема 19. *Для $\beta > 1$ и дзета-функции $\zeta(A_{\mathbb{N},\beta}|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_{A_{\mathbb{N},\beta}} = \frac{1}{\beta}$.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей леммы следует, что

$$\zeta(\beta\sigma) - \frac{1}{2^{\beta\sigma}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\beta\sigma}} < \zeta(A_{\mathbb{N},\beta}|\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[n^\beta\right]^\sigma} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{\beta\sigma}} = \\ = 1 + \zeta(\beta\sigma).$$

Так как ряд для $\zeta(\beta\sigma)$ сходится при $\beta\sigma > 1$ и расходится при $\beta\sigma \leqslant 1$, то утверждение теоремы доказано. □

Доказанная теорема допускает следующее частичное обобщение. Пусть B — произвольное множество натуральных чисел с единицей и $\beta > 1$ — натуральное число. Определим множество натуральных чисел $A_{B,\beta}$ равенством

$$A_{B,\beta} = \left\{ n^\beta \middle| \, n \in B\right\}.$$

Теорема 20. *Для натурального $\beta > 1$ и дзета-функции $\zeta(A_{B,\beta}|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_{A_{B,\beta}} = \frac{\sigma_B}{\beta}$.*

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(B|\beta\sigma) = \sum_{n\in B} \frac{1}{n^{\beta\sigma}} = \sum_{m \in A_{B,\beta}} \frac{1}{m^\sigma} = \zeta(A_{B,\beta}|\sigma).$$

Так как ряд для $\zeta(B|\beta\sigma)$ сходится при $\beta\sigma > \sigma_B$ и расходится при $\beta\sigma \leqslant \sigma_B$, то утверждение теоремы доказано. □

Нетрудно понять, что если $1 \in A$, то

$$\zeta^*(A|\alpha) = \sum_{n\in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}, \tag{4.2}$$

где коэффициенты $x_A(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$x_A(1) = 1, \sum_{m|n,\, m\in A} x_A\left(\frac{n}{m}\right) = 0 \quad (n \in M(A), n > 1) \tag{4.3}$$

и $M(A)$ — минимальный моноид, порожденный множеством A.

Обозначим через $\sigma_{A,1}$ число, такое что для $A^* = A \setminus \{1\}$ и

$$S(A,\alpha) = \sum_{n\in A^*} \frac{1}{n^\alpha}$$

выполнено $|S(A,\alpha)| < 1$ при $\sigma > \sigma_{A,1}$, тогда

$$\zeta^{-1}(A|\alpha) = \frac{1}{1+S(A,\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu S^\nu(A,\alpha) =$$

$$= 1 - \sum_{n\in A^*}\frac{1}{n^\alpha} + \sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^\nu \sum_{n_1,\ldots,n_\nu\in A^*} \frac{1}{(n_1\ldots n_\nu)^\alpha} = \sum_{n\in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}$$

и для $x_A(n)$ выполнены соотношения

$$x_A(1) = 1, \quad x_A(n) = \sum_{\nu\geqslant 1}(-1)^\nu y_\nu(n) \quad n \in M^*(A^*),$$

где $y_\nu(n)$ — количество решений уравнения $n = n_1 \ldots n_\nu$ в натуральных $n_1,\ldots,n_\nu \in A^*$. Ясно, что $M(A) = M^*(A^*)\bigcup\{1\}$.

Таким образом, если σ_A^* определяет правую полуплоскость $\sigma > \sigma_A^*$ абсолютной сходимости обратного ряда $\zeta^*(A|\alpha)$, то $\sigma_A^* \leqslant \sigma_{A,1}$.

Определим последовательно следующие множества натуральных чисел:

$$\mathbb{N}_1(A^*) = A^*, \quad \mathbb{N}_{\nu+1}(A^*) = \mathbb{N}_\nu(A^*)\cdot A^* \quad (\nu \geqslant 1).$$

Моноид $M(A)$ называется свободным, если $\mathbb{N}_\nu(A^*)\bigcap\mathbb{N}_\mu(A^*) = \emptyset$ для любых $\nu \neq \mu$.

Лемма 43. *Если $M(A)$ — свободный моноид, то $P(M(A)) = A^*$.*

Доказательство. Действительно, если найдется элемент $a \in A^*$ такой, что

$$a = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_\nu \quad (\nu \geqslant 2),$$

то $a \in \mathbb{N}_\nu(A^*)$ и $\mathbb{N}_\nu(A^*) \bigcap \mathbb{N}_1(A^*) \neq \emptyset$, что доказывает утверждение леммы. $\square$

Лемма 44. *Для любого множества A натуральных чисел, для которого $M(A)$ — свободный моноид, справедливы соотношения*

$$S(A, \sigma_{A,1}) = 1, \quad \sigma_A^* = \sigma_{A,1}.$$

Доказательство. Действительно, так как $S(A, \sigma)$ монотонно убывает при росте σ, то найдётся $\sigma_{A,1} \geqslant 0$ такое, что $S(A, \sigma_{A,1}) = 1$. Очевидно, что при $\sigma > \sigma_{A,1}$ будет выполнено неравенство $|S(A, \alpha)| < 1$. Тем самым доказано первое утверждение леммы.

Далее заметим, что при $\sigma > \sigma_{A,1}$ выполняется равенство

$$\frac{1}{1 - S(A, \alpha)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} S^\nu(A, \alpha).$$

Так как $M(A)$ — свободный моноид, то

$$M(A) = \{1\} \bigcup \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathbb{N}_\nu(A^*) \right)$$

и

$$\frac{1}{1 + S(A, \alpha)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{n \in \mathbb{N}_\nu(A^*)} \frac{y_\nu(n)}{n^\alpha},$$

$$\frac{1}{1 - S(A, \alpha)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}_\nu(A^*)} \frac{y_\nu(n)}{n^\alpha}.$$

Отсюда следует, что если ряд для $\frac{1}{1+S(A,\sigma)}$ сходится абсолютно, то и ряд для $\frac{1}{1-S(A,\sigma)}$ сходится. Так как ряд для $\frac{1}{1-S(A,\sigma)}$ при $\sigma = \sigma_{A,1}$ расходится, то следовательно $\sigma_A^* = \sigma_{A,1}$ и лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 45. *Для любого множества A натуральных чисел справедливо неравенство*

$$\sigma_{A,1} < 2.$$

Доказательство. Действительно, для $\alpha = \sigma + it$ справедливы неравенства

$$|S(A, \alpha)| \leqslant S(A, \sigma) \leqslant S(\mathbb{N}, \sigma).$$

Далее имеем

$$S(\mathbb{N}, 2) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1,$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Пусть имеется бесконечная вложенная последовательность множеств натуральных чисел с единицей:

$$\{1\} \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A. \tag{4.4}$$

Определение 7. *Будем говорить, что бесконечная последовательность (4.4) сходится к A:*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A,$$

если для любого натурального T найдется натуральное $n(T)$ такое, что для любого $n \geqslant n(T)$ выполняется равенство

$$[1; T] \bigcap A_n = [1; T] \bigcap A.$$

Теорема 21. *Для любой сходящейся последовательности (4.4) выполняются соотношения*

$$\sigma_{A_1} \leqslant \sigma_{A_2} \leqslant \ldots \leqslant \sigma_{A_n} \leqslant \ldots \leqslant \sigma_A \tag{4.5}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(A_n|\alpha) = \zeta(A|\alpha) \tag{4.6}$$

равномерно сходится в любой α-полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma_A$.

Доказательство. Действительно, из определения сходимости следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и $\sigma_0 > \sigma_A$ найдётся натуральное $T(\varepsilon, \sigma_0)$ такое, что для любого $T \geqslant T(\varepsilon, \sigma_0)$ выполняется

$$0 \leqslant \zeta(A, T|\sigma_0) = \sum_{n\in A, n>T} \frac{1}{n^{\sigma_0}} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любого натурального $n \geqslant n(T)$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant \zeta(A|\sigma_0) - \zeta(A_n|\sigma_0) \leqslant \zeta(A, T|\sigma_0) < \varepsilon,$$

что доказывает равномерную сходимость предела (4.6). Соотношения (4.5) очевидны. □

4.3. Дзета-функция множества простых чисел

В работе [195] важную роль играл ряд Дирихле

$$L(\alpha) = \sum_p \frac{1}{p^\alpha},$$

через который выражается логарифм дзета-функции

$$\ln \zeta(\alpha) = L(\alpha) + \theta_1(\alpha) \quad (\sigma > 1), \quad \theta_1(\alpha) = \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

Если $\mathbb{P}$ — множество всех простых, то $L(\alpha) = \zeta(\mathbb{P}|\alpha)$.

Будем через $\mathbb{P}_0$ обозначать множество простых дополненное 1. Тогда имеем соотношение для дзета-функций $\zeta(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \zeta(\mathbb{P}|\alpha)$. Так как согласно лемме 45 $|\zeta(\mathbb{P}|\alpha)| < 1$ при $\sigma \geqslant 2$, то справедливо равенство

$$\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \zeta^\nu(\mathbb{P}|\alpha) \quad (\sigma > \sigma^*_{\mathbb{P}_0}), \quad 1 < \sigma^*_{\mathbb{P}_0} < 2.$$

Пусть $\nu(n)$ — количество различных простых делителей числа n, а $V(n)$ обозначает общее число простых делителей числа n с учётом их кратности. Таким образом, если $n = \prod\limits_{j=1}^{\nu(n)} p_j^{\alpha_j}$ — каноническое разложение числа n на простые множители $1 < p_1 < \ldots < p_{\nu(n)}$, то $V(n) = \sum\limits_{j=1}^{\nu(n)} \alpha_j$.

Функция $\nu(n)$ является аддитивной арифметической функцией, так как для любых взаимно простых n и m имеем $\nu(nm) = \nu(n) + \nu(m)$. Функция $V(n)$ является вполне аддитивной арифметической функцией, так как для любых натуральных n и m имеем $V(nm) = V(n) + V(m)$.

Обозначим через $\mathbb{N}_\nu$ $(\nu \geqslant 0)$ множество всех натуральных чисел n с $V(n) = \nu$. Ясно, что справедливо разбиение

$$\mathbb{N} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{N}_\nu, \quad \mathbb{N}_0 = \{1\}, \quad \mathbb{N}_\nu \bigcap \mathbb{N}_\mu = \emptyset \quad (\nu \neq \mu). \tag{4.7}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{N}_1 = \mathbb{P}, \quad \mathbb{N}_\nu = \mathbb{N}_{\nu-1} \cdot \mathbb{P} \quad (\nu \geqslant 0).$$

Для дальнейшего нам потребуется ещё одна мультипликативная функция $\mathrm{rad}(n)$ — радикал натурального числа, которая определяется следующими условиями

$$\mathrm{rad}(n)|n, \quad \nu(n) = \nu(\mathrm{rad}(n)), \quad \nu(\mathrm{rad}(n)) = V(\mathrm{rad}(n)).$$

Другими словами, если $n = \prod\limits_{p|n} p^{\alpha_p}$, то $\mathrm{rad}(n) = \prod\limits_{p|n} p$.

В силу разбиения (4.7) можно определить единую функцию $x(n)$ такую, что

$$\zeta^\nu(\mathbb{P}|\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu} \frac{x(n)}{n^\alpha} \quad (\nu \geqslant 0).$$

Лемма 46. *Справедливы рекуррентные соотошения*

$$x(1) = 1, \quad x(n) = \sum_{p|n} x\left(\frac{n}{p}\right) \quad (n > 1).$$

Доказательство. Первое утверждение тривиально.

Пусть $\nu = 1$, тогда $\mathbb{N}_1 = \mathbb{P}$ и $x(p) = 1$ и утверждение леммы выполнено.

Пусть $\nu > 1$, тогда

$$\zeta^\nu(\mathbb{P}|\alpha) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu-1}} \frac{x(n)}{n^\alpha}\right) \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{p|n} x\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 47. *Справедливо равенство*

$$x(n) = \frac{(V(n))!}{\prod\limits_{p|n} (\alpha_p)!}.$$

Доказательство. Проведём индукцию по n.

При $n = 1$ утверждение леммы тривиально.

Пусть $n = m > 1$ и для всех $n < m$ утверждение леммы выполнено. Предположим, что $m = \prod\limits_{\nu=1}^{k} p_\nu^{\alpha_\nu}$, тогда по лемме 46 имеем:

$$x(n) = \sum_{\nu=1}^{k} x\left(\frac{n}{p_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k - 1)!\alpha_\nu}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!} =$$
$$= \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k - 1)!(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!} = \frac{(V(n))!}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!},$$

что доказывает утверждение леммы. □

Теорема 22. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{V(n)} \frac{(V(n))!}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!}}{n^\alpha}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \zeta^\nu(\mathbb{P}|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu} \frac{x(n)}{n^\alpha} =$$
$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{V(n)}x(n)}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{V(n)} \frac{(V(n))!}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!} \cdot \frac{1}{n^\alpha},$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Обозначим через $\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha)$ отношение двух дзета-функций:

$$\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) = \zeta(\alpha)\zeta^{-1}(\mathbb{P}_0|\alpha).$$

Обозначим коэффициенты соответствующего ряда Дирихле через $y(n)$:

$$\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y(n)}{n^\alpha}, \quad y(1) = 1. \tag{4.8}$$

Лемма 48. *Справедливо рекуррентное равенство*

$$y(n) = 1 - \sum_{p|n} y\left(\frac{n}{p}\right).$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(\alpha)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}_\nu}\frac{1}{n^\alpha},\quad \zeta(\mathbb{N},\mathbb{P}_0|\alpha)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}_\nu}\frac{y(n)}{n^\alpha},\quad \zeta(\mathbb{P}_0|\alpha)=1+\sum_{n\in\mathbb{P}}\frac{1}{n^\alpha},$$

поэтому

$$\zeta(\mathbb{N}_\nu|\alpha)=\sum_{n\in\mathbb{N}_\nu}\frac{y(n)}{n^\alpha}+\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu-1}}\frac{y(n)}{n^\alpha}\right)\zeta(\mathbb{P}|\alpha),\quad 1=y(n)+\sum_{p|n}y\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 49. *Справедливо равенство*

$$y(p^\alpha)=\frac{1+(-1)^\alpha}{2}.$$

Доказательство. Действительно,

$$y(p^\alpha)=1-y(p^{\alpha-1}),$$

поэтому

$$y(p)=0,\quad y(p^2)=1,\quad y(p^3)=0,\dots,y(p^\alpha)=\frac{1+(-1)^\alpha}{2},\dots$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 50. *Если $n=\mathrm{rad}(n)$, то справедливы равенства*

$$y(n)=(-1)^{\nu(n)}(\nu(n))!\left(1+\sum_{\mu=1}^{\nu(n)}\frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right),\quad \lim_{\nu(n)\to\infty}\frac{y(n)(-1)^{\nu(n)}}{\nu(n)!}=\frac{1}{e}.$$

Доказательство. Действительно, если $n=\mathrm{rad}(n)$, то $n=p_1p_2\dots p_{\nu(n)}$ и $p_\mu\neq p_\lambda$ при $\mu\neq\lambda$.

При $\nu(n)=1$ имеем: $n=p$ и утверждение леммы справедливо в силу предыдущей леммы.

Далее проведём индукцию по величине $\nu(n)$, получим при $\nu(n)=m+1$:

$$y(n)=1-(m+1)(-1)^m m!\left(1+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right)=(-1)^{m+1}(m+1)!\left(1+\sum_{\mu=1}^{m+1}\frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

С помощью принципа вложенности, который будет разработан в следующем разделе, можно доказать общую теорему о величине $y(n)$.

Теорема 23. *Пусть* $\nu(n) = k \geqslant 1$ *и*

$$n = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}, \quad p_1 < \dots < p_k, \quad n_1, \dots, n_k \geqslant 1,$$

тогда справедливо равенство

$$y(n) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \dots \sum_{\nu_k=0}^{n_k} (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_k} \frac{(\nu_1 + \dots + \nu_k)!}{\prod\limits_{i=1}^{k} (\nu_i)!}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{V(n)} \frac{(V(n))!}{\prod\limits_{p|n} (\alpha_p)!}}{n^\alpha}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{m|n} (-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod\limits_{p|m} (\alpha_p)!}.$$

Так как из $m|n$ следует, что $m = p_1^{\nu_1} \dots p_k^{\nu_k}$, то

$$\sum_{m|n} (-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod\limits_{p|m} (\alpha_p)!} = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \dots \sum_{\nu_k=0}^{n_k} (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_k} \frac{(\nu_1 + \dots + \nu_k)!}{\prod\limits_{i=1}^{k} (\nu_i)!}$$

и теорема доказана. □

4.4. Вложенные последовательности моноидов

Рассмотрим естественную нумерацию простых чисел

$$\mathbb{P} = \{2 < 3 < 5 < 7 < 11 < \dots < p_n < \dots\},$$

где через p_n обозначается n-ое простое число в порядке их следования в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Обозначим через P_n начальный отрезок последовательности простых чисел:

$$P_n = \{2 < 3 < 5 < 7 < 11 < \dots < p_n\} \quad (n \geqslant 1).$$

Через $P_n^{(0)}$ будем обозначать последовательность простых чисел $p_1 < \dots < p_n$ с добавленной единицей:

$$P_n^{(0)} = \{1\} \bigcup P_n = \{1 < p_1 < \dots < p_n\}.$$

Вложенная последовательность множеств простых чисел

$$P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n \subset \ldots \subset \mathbb{P} \tag{4.9}$$

порождает вложенную последовательность моноидов с однозначным разложением на простые числа

$$\{1\} \subset M(P_1) \subset M(P_2) \subset \ldots \subset M(P_n) \subset \ldots \subset M(\mathbb{P}) = \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Теперь рассмотрим свойства соответствующих последовательностей дзета-функций:

$$\zeta(P_1|\alpha),\, \zeta(P_2|\alpha),\, \ldots,\, \zeta(P_n|\alpha),\, \ldots,\, \zeta(\mathbb{P}|\alpha), \tag{4.11}$$

$$\zeta^*(P_1^{(0)}|\alpha),\, \zeta^*(P_2^{(0)}|\alpha),\, \ldots,\, \zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha),\, \ldots,\, \zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha), \tag{4.12}$$

$$\zeta(\{1\}|\alpha),\, \zeta(M(P_1)|\alpha),\, \zeta(M(P_2)|\alpha),\, \ldots,\, \zeta(M(P_n)|\alpha),\, \ldots,\, \zeta(\mathbb{N}|\alpha) = \zeta(\alpha), \tag{4.13}$$

$$\zeta(M(P_1), P_1^{(0)}|\alpha),\, \zeta(M(P_2), P_2^{(0)}|\alpha),\, \ldots,\, \zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha),\, \ldots,\, \zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha), \tag{4.14}$$

где $\zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha) = \zeta(M(P_n)|\alpha)\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$.

Во-первых, мы имеем

$$\sigma_{\{1\}} = \sigma_{P_1} = \sigma_{P_2} = \ldots = \sigma_{P_n} = \ldots = -\infty, \quad \sigma_{\mathbb{P}} = 1, \tag{4.15}$$

так как $\zeta(\{1\}|\alpha) = 1$ и для любого n дзета-функция $\zeta(P_n|\alpha) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{p_\nu^\alpha}$ — аналитическая функция на всей комплексной α-плоскости. Последнее равенство в (4.15) хорошо известно (см. [133]).

Во-вторых, на обратные дзета-функции $\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$ удается перенести некоторые свойства обратной дзета-функции $\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha)$, а именно, справедливы следующие утверждения.

Обозначим через $\mathbb{N}_\nu(P_n)$ $(\nu \geqslant 0)$ множество всех натуральных чисел m из $M(P_n)$ с $V(m) = \nu$. Ясно, что справедливо разбиение

$$M(P_n) = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{N}_\nu(P_n), \quad \mathbb{N}_0(P_n) = \{1\}, \quad \mathbb{N}_\nu(P_n) \bigcap \mathbb{N}_\mu(P_n) = \emptyset \quad (\nu \neq \mu). \tag{4.16}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{N}_1(P_n) = P_n, \quad \mathbb{N}_\nu(P_n) = \mathbb{N}_{\nu-1}(P_n) \cdot P_n \quad (\nu \geqslant 0)$$

и моноид $M(P_n)$ — свободный моноид, следовательно, к нему применимы леммы 43—45 и теорема 21, которые можно сформулировать следующим образом.

Лемма 51. *Для любого n и свободного моноида $M(P_n)$ выполняется равенство*

$$P(M(P_n)) = P_n.$$

Лемма 52. *Для любого n и свободного моноида $M(P_n)$ справедливы соотношения*

$$S(P_n, \sigma_{P_n,1}) = 1, \quad \sigma^*_{P_n^{(0)}} = \sigma_{P_n,1} < \sigma^*_{P_{n+1}^{(0)}}.$$

Таким образом, имеем цепочку неравенств:

$$0 = \sigma^*_{P_1^{(0)}} < \sigma^*_{P_2^{(0)}} < \ldots < \sigma^*_{P_n^{(0)}} < \ldots < \sigma^*_{\mathbb{P}_0}, \quad 1 < \sigma_{\mathbb{P}_0} < 2.$$

Теорема 24. *Последовательность множеств простых (4.9) сходится к множеству всех простых $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$.*

Последовательность вложенных моноидов (4.10) сходится к $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M(P_n)$.

Предел

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(P_n|\alpha) = \zeta(\mathbb{P}|\alpha) \tag{4.17}$$

равномерно сходится в любой α-полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Предел

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha) = \zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha) \tag{4.18}$$

равномерно сходится в любой α-полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma^*_{\mathbb{P}_0}$.

Предел

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(M(P_n)|\alpha) = \zeta(\alpha) \tag{4.19}$$

равномерно сходится в любой α-полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Предел

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha) = \zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) \tag{4.20}$$

равномерно сходится в любой α-полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma^*_{\mathbb{P}_0}$.

В-третьих, мы обнаруживаем важное свойство *вложенности* дзета-функций вложенных моноидов, которое заключается в том что каждая из четырех дзета-функций $\zeta(P_n|\alpha)$, $\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$, $\zeta(M(P_n)|\alpha)$ и $\zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha)$ образуется из соответствующих дзета-функций с номером $n+1$ сужением области суммирования, а значения коэффициентов остается неизменным. Более того, это остается применительно и к предельным дзета-функциям. Тот факт, что $\zeta(P_n|\alpha)$ и $\zeta(M(P_n)|\alpha)$

получаются сужением области суммирования из $\zeta(\mathbb{P}|\alpha)$ и $\zeta(\alpha)$ тривиально следуют из определения этих дзета-функций.

Аналогичное утверждение для $\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$ и $\zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha)$ можно обосновать на основании того факта, что количество решений уравнения $m = m_1 \dots m_\nu$ в натуральных $m_1, \dots, m_\nu \in P_n$ и в натуральных $m_1, \dots, m_\nu \in \mathbb{P}$ одинаково для $m \in M(P_n)$. Из свойства вложенности сразу вытекают утверждения следующих теоремы и леммы.

Теорема 25. *Для любого натурального n справедливо равенство*

$$\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha) = \sum_{m \in M(P_n)} \frac{(-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod\limits_{p|m} (\alpha_p)!}}{m^\alpha}.$$

Лемма 53. *Для любого натурального n справедливо равенство*

$$\zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha) = \sum_{m \in M(P_n)} \frac{y(m)}{m^\alpha},$$

где $y(m)$ определяются равенством (4.8).

Будем доказательство с помощью обобщенного свойства вложенности называть принципом вложенности. Покажем его применение. Пусть q — произвольное простое число, $A = \{q\}$ — одноэлементное множество, $A^{(0)} = \{1, q\}$ и $M(q) = \{q^\nu | \nu \geqslant 0\}$ — геометрическая прогрессия с единичным первым членом и знаменателем q тогда

$$\zeta(A|\alpha) = \frac{1}{q^\alpha}, \tag{4.21}$$

$$\zeta^*(A^{(0)}|\alpha) = \frac{1}{1 + \frac{1}{q^\alpha}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(q^\nu)^\alpha} = \sum_{m \in M(q)} \frac{(-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod\limits_{p|m} (\alpha_p)!}}{m^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > 0), \tag{4.22}$$

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n)^\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > 0), \tag{4.23}$$

$$\zeta(M(q), A^{(0)}|\alpha) = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{q^\alpha}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2\alpha}}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^{2n})^\alpha} = \sum_{m \in M(q)} \frac{\frac{(-1)^{V(m)}+1}{2}}{m^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > 0). \tag{4.24}$$

Из формулы (4.23) следует, что дзета-функция геометрической прогрессии аналитическая функция во всей α-плоскости кроме точек $\alpha_0 = 0$, где у неё простой полюс с вычетом

$$\operatorname*{Res}_{0} \zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

и точек $\alpha_k = \frac{2ki\pi}{\ln q}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, в которых простые полюса с вычетами

$$\operatorname*{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}} \zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

Можно показать, что для мероморфной функции $\zeta(M(q)|\alpha)$ справедливы следующие представления:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} =$$
$$= \frac{q^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \ln q}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right),$$

которые справедливы во всей комплексной плоскости, за исключением простых полюсов.

Перейдем к более сложному случаю. Пусть $q < r$ — произвольные простые числа, $A = \{q, r\}$ — двухэлементное множество, $A^{(0)} = \{1, q, r\}$ и $M(q,r) = \{q^\nu r^\mu | \nu, \mu \geqslant 0\}$ — произведение двух геометрических прогрессий с единичными первыми членами и знаменателем q и r, соответственно, тогда

$$\zeta(A|\alpha) = \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}, \tag{4.25}$$

$$\zeta^*(A^{(0)}|\alpha) = \frac{1}{1 + \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}} = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+\mu} \frac{(\nu+\mu)!}{\nu!\mu!}}{(q^\nu r^\mu)^\alpha} =$$
$$= \sum_{m \in M(q,r)} \frac{(-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod\limits_{p|m} (\alpha_p)!}}{m^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > \sigma_A > 0), \tag{4.26}$$

$$\zeta(M(q,r)|\alpha) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n r^m)^\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{r^\alpha}} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > 0), \tag{4.27}$$

$$\zeta(M(q,r),A^{(0)}|\alpha)=\frac{1}{1-\frac{1}{q^\alpha}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{r^\alpha}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{q^\alpha}+\frac{1}{r^\alpha}}=$$
$$=\left(\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{(q^nr^m)^\alpha}\right)\left(\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+\mu}\frac{(\nu+\mu)!}{\nu!\mu!}}{(q^\nu r^\mu)^\alpha}\right)=$$
$$=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{(q^nr^m)^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\nu+\mu}\frac{(\nu+\mu)!}{\nu!\mu!}=$$
$$=\sum_{m\in M(P_n)}\frac{y(m)}{m^\alpha}\quad(\alpha=\sigma+it,\,\sigma>\sigma^*_{P_n^{(0)}}),\tag{4.28}$$

где

$$y(q^nr^m)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\nu+\mu}\frac{(\nu+\mu)!}{\nu!\mu!}.$$

В общем случае, когда $q_1<\ldots<q_k$ — произвольные простые числа, $n\in\in M(q_1,\ldots,q_k)$, то для

$$n=q_1^{n_1}\ldots q_k^{n_k},\qquad n_1,\ldots,n_k\geqslant 1$$

имеем

$$y(n)=\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{\nu_k=0}^{n_k}(-1)^{\nu_1+\ldots+\nu_k}\frac{(\nu_1+\ldots+\nu_k)!}{\prod\limits_{i=1}^{k}(\nu_i)!}.$$

4.5. Примеры моноидов с однозначным разложением на простые элементы

Рассмотрим множество псевдопростых четных чисел

$$A_{3,1,2,2}=\{2p|p=3n+2,\,n\geqslant 1\}$$

и минимальный моноид $M(A_{3,1,2,2})$, для которого выполнено соотношение

$$M(A_{3,1,2,2})=\left\{n=\prod_{p|n}(2p)^{\alpha_p}\,\middle|\,p\in\mathbb{P}_{3,2},\,p>2\right\}.$$

Нетрудно видеть, что $M(A_{3,1,2,2})$ — моноид с однозначным разложением на простые множители. Поэтому для дзета-функции этого моноида имеет место разложение в Эйлерово произведение

$$\zeta(M(A_{3,1,2,2})|\alpha)=P(M(A_{3,1,2,2})|\alpha)=\prod_{p\in\mathbb{P}_{3,2},\,p>2}\left(1-\frac{1}{(2p)^\alpha}\right)^{-1}.$$

Для любого натурального числа n определим четную и нечетную части $n^{(1)}$, $n^{(2)}$ формулами

$$n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}, \quad n^{(1)} = \prod_{p|n,\, p>2} p^{\alpha_p}, \quad n^{(2)} = 2^{\alpha_2}.$$

Ясно, что если $2 \not| n$, то $n^{(2)} = 1$.

Лемма 54. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(M(A_{3,1,2,2})|\alpha) = \sum_{n\in M(A_{3,1,2,2})} \frac{\mu(n^{(1)})}{n^\alpha}.$$

Доказательство. Действительно, если $n \in M(A_{3,1,2,2})$, то $n = \prod\limits_{p|n,\, p>2} (2p)^{\alpha_p}$ и

$$n^{(1)} = \prod_{p|n,\, p>2} p^{\alpha_p}, \quad n^{(2)} = 2^{\alpha_2},$$

где $\alpha_2 = \sum\limits_{p|n,\, p>2} \alpha_p$.

Так как

$$\zeta^*(M(A_{3,1,2,2})|\alpha) = \frac{1}{P(M(A_{3,1,2,2})|\alpha)} = \prod_{p\in\mathbb{P}_{3,2},\, p>2} \left(1 - \frac{1}{(2p)^\alpha}\right) =$$
$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{2<p_1<\ldots<p_\nu\in\mathbb{P}_{3,2}} \frac{1}{2^\nu p_1 \cdot \ldots \cdot p_\nu} = \sum_{n\in M(A_{3,1,2,2})} \frac{\mu(n^{(1)})}{n^\alpha},$$

то утверждение леммы доказано. □

Доказанная лемма — частный случай следующего общего утверждения.

Теорема 26. *Если M — моноид с однозначным разложением на простые множители, то справедливо равенство*

$$\zeta^*(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n\in M} \frac{\mu_M(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_M(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами

$$\mu_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{при} } n = 1, \\ (-1)^\nu, & \text{\textit{при} } n = r_1 \ldots r_\nu,\ r_1 < \ldots < r_\nu \in P(M), \\ 0, & \text{\textit{при} } n = r^2 n_1,\ r, n_1 \in M,\ r > 1. \end{cases}$$

Доказательство.

Если M — моноид с однозначным разложением на простые множители, то существует эйлерово произведение и мы легко находим обратный ряд

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$
$$\zeta^*(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n\in M} \frac{\mu_M(n)}{n^\alpha}$$

и теорема полностью доказана. □

Следующая конструкция даёт несчетное множество моноидов с однозначным разложением на простые множители.

Пусть P — произвольное непустое собственное подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Через $\overline{P}$ обозначим его непустое дополнение: $\overline{P} = \mathbb{P}\backslash P$. Рассмотрим произвольную функцию $f : P \to M(\overline{P})$. Моноид $M(P,f)$ определим следующим равенством

$$M(P,f) = \left\{ n = \prod_{p\in P} (f(p)p)^{\alpha_p} \middle| \sum_{p\in P} \alpha_p < \infty \right\}.$$

Для любого натурального числа n из $M(P,f)$ определим два сомножителя $n^{(P)}$, $n^{(\overline{P})}$ формулами

$$n = \prod_{p\in P} (f(p)p)^{\alpha_p}, \quad n^{(P)} = \prod_{p\in P} p^{\alpha_p}, \quad n^{(\overline{P})} = \prod_{p\in P} (f(p))^{\alpha_p}.$$

Теорема 27. *Для любого множества простых P и любой функции $f : P \to M(\overline{P})$ моноид $M(P,f)$ имеет однозначное разложение на простые множители. Для дзета-функции $\zeta(M(P,f)|\alpha)$ имеется разложение в эйлерово произведение*

$$\zeta(M(P,f)|\alpha) = P(M(P,f)|\alpha) = \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{(f(p)p)^\alpha}\right)^{-1}.$$

Для множества $P(M(P,f))$ простых элементов моноида $M(P,f)$ выполняется равенство

$$P(M(P,f)) = \{f(p)p | p \in P\}.$$

Справедливо равенство

$$\zeta^*(M(P,f)|\alpha) = \prod_{r\in P(M(P,f))}\left(1-\frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n\in M(P,f)}\frac{\mu_{M(P,f)}(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_{M(P,f)}(n)$ *— обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами*

$$\mu_{M(P,f)}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n=1,\\ (-1)^\nu, & \text{при } n=r_1\dots r_\nu,\ r_1<\dots<r_\nu\in P(M(P,f)),\\ 0, & \text{при } n=r^2n_1,\ r,n_1\in M(P,f),\ r>1.\end{cases}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$\prod_{p\in P}(f(p)p)^{\alpha_p} = \prod_{p\in P}(f(p)p)^{\beta_p},$$

тогда в силу основной теоремы арифметики имеем

$$\prod_{p\in P}p^{\alpha_p} = \prod_{p\in P}p^{\beta_p}, \quad \prod_{p\in P}(f(p))^{\alpha_p} = \prod_{p\in P}(f(p))^{\beta_p}.$$

Из первого равенства следует, что для любого $p\in P$ выполняется равенство показателей степеней: $\alpha_p=\beta_p$. тем самым однозначность разложения на простые элементы доказана. Одновременно отсюда следует, что $P(M(P,f)) = \{f(p)p|p\in \in P\}$. Все остальные утверждения теоремы вытекают из однозначности разложения на простые элементы. □

Так как различных подмножеств счетного множества несчетное множество, то мы получаем несчетное множество различных моноидов $M(P,f)$ с однозначным разложением на простые элементы.

Рассмотренную конструкцию можно обобщить следующим образом. Прежде всего заметим, что моноиды $M(P)$ и $M(\overline{P})$ взаимно просты. Пусть r_i $(i\in I)$ — конечная или бесконечная последовательность попарно взаимно простых натуральных чисел больше 1 из моноида $M(P)$ и f — произвольная функция на последовательности r_i с $f(r_i)\in M(\overline{P})$. Моноид $M(r_i,I,f)$ определим следующим равенством

$$M(r_i,I,f) = \left\{n=\prod_{i\in I}(f(r_i)r_i)^{\alpha_i}\,\middle|\,\sum_{i\in I}\alpha_i<\infty\right\}.$$

Для любого натурального числа n из $M(r_i, I, f)$ определим два сомножителя $n^{(I)}$, $n^{(f,I)}$ формулами

$$n = \prod_{i \in I} (f(r_i) r_i)^{\alpha_i}, \quad n^{(I)} = \prod_{i \in I} r_i^{\alpha_i}, \quad n^{(f,I)} = \prod_{i \in I} (f(r_i))^{\alpha_i}.$$

Теорема 28. *Для любой последовательности r_i $(i \in I)$ попарно взаимно простых натуральных чисел больше 1 из моноида $M(P)$ и любой функции f с $f(r_i) \in M(\overline{P})$ моноид $M(r_i, I, f)$ имеет однозначное разложение на простые множители. Для дзета-функции $\zeta(M(r_i, I, f)|\alpha)$ имеется разложение в эйлерово произведение*

$$\zeta(M(r_i, I, f)|\alpha) = P(M(r_i, I, f)|\alpha) = \prod_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{(f(r_i) r_i)^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Для множества $P(M(r_i, I, f))$ простых элементов моноида $M(r_i, I, f)$ выполняется равенство

$$P(M(r_i, I, f)) = \{f(r_i) r_i | i \in I\}.$$

Справедливо равенство

$$\zeta^*(M(r_i, I, f)|\alpha) = \prod_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{(f(r_i) r_i)^{\alpha}}\right) = \sum_{n \in M(r_i, I, f)} \frac{\mu_{M(r_i, I, f)}(n)}{n^{\alpha}},$$

где $\mu_{M(r_i, I, f)}(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами

$$\mu_{M(r_i,I,f)}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ (-1)^{\nu}, & \text{при } n = (f(r_{i_1}) r_{i_1}) \ldots (f(r_{i_\nu}) r_{i_\nu}), \\ & r_{i_1} < \ldots < r_{i_\nu} \ (i_\mu \in I, \ 1 \leqslant \mu \leqslant \nu), \\ 0, & \text{при } n = r^2 n_1, \ r, n_1 \in M(r_i, I, f), \ r > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$\prod_{i \in I} (f(r_i) r_i)^{\alpha_i} = \prod_{i \in I} (f(r_i) r_i)^{\beta_i},$$

тогда в силу основной теоремы арифметики имеем

$$\prod_{i \in I} r_i^{\alpha_i} = \prod_{i \in I} r_i^{\beta_i}, \quad \prod_{i \in I} (f(r_i))^{\alpha_i} = \prod_{i \in I} (f(r_i))^{\beta_i}.$$

Из первого равенства следует, что для любого $i \in I$ выполняется равенство показателей степеней: $\alpha_i = \beta_i$. Тем самым однозначность разложения на простые элементы доказана. Одновременно отсюда следует, что $P(M(r_i, I, f)) = \{f(r_i)r_i | i \in I\}$. Все остальные утверждения теоремы вытекают из однозначности разложения на простые элементы. □

Остановимся на вопросе о количестве простых элементов в моноиде $M(A)$, не превосходящих x, которое будем обозначать через $\pi_{M(A)}(x)$. В общем случае это непростая задача, однако для случая любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ и моноида $M(PE)$ можно дать удовлетворительный ответ.

Теорема 29. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ для количества простых элементов в моноиде $M(PE)$, не превосходящих x, справедливо равенство*

$$\pi_{M(PE)}(x) = \pi_{PE}(x) = \frac{\ln x}{\ln q} - \theta_{PE}(x),$$

где $0 \leqslant \theta_{PE}(x) < 2$.

Доказательство. Действительно, по определению экспоненциальной последовательности простых чисел имеем: $q^\nu \leqslant p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 1)$. Поэтому, если $q^n \leqslant x < q^{n+1}$, то $n - 1 \leqslant \pi_{PE}(x) \leqslant n$. Но $n \leqslant \frac{\ln x}{\ln q} < n + 1$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Лемма 55. *Для $\theta_{PE}(x)$ при $q^n \leqslant x < q^{n+1}$ справедливо равенство*

$$\theta_{PE}(x) = \left\{\frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q}\right\} + \left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\left\{\frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q}\right\} = \begin{cases} 1 + \left\{\frac{\ln x}{\ln q}\right\} - \left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\}, & \text{при } q^n \leqslant x < p_n, \\ \left\{\frac{\ln x}{\ln q}\right\} - \left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\}, & \text{при } p_n \leqslant x < q^{n+1} \end{cases},$$

что и доказывает утверждение леммы. □

4.6. Дзета-функция множества простых элементов моноида

Предыдущие утверждения переносятся со случая множества простых $\mathbb{P}$ на случай моноида $M(r_i, I, f)$ с однозначным разложением на простые элементы и множества его простых элементов $P(M(r_i, I, f))$. Будем для краткости считать, что $A = P(M(r_i, I, f))$, $M(A) = M(r_i, I, f)$. Через $q_i = f(r_i)r_i$ $(i \in I)$ будем обозначать простые элементы из A.

Пусть $\nu_A(n)$ — количество различных простых элементов моноида $M(A)$, делящих число $n \in M(A)$, а $V_A(n)$ — общее число простых элементов, на которые разлагается число n с учётом их кратности. Таким образом, если $n = \prod\limits_{j=1}^{\nu_A(n)} q_{i_j}^{\alpha_j}$ — каноническое разложение числа n на простые элементы моноида $M(A)$ $1 < i_1 < \ldots < i_{\nu_A(n)}$, то $V_A(n) = \sum\limits_{j=1}^{\nu(n)} \alpha_j$.

Функция $\nu_A(n)$ является аддитивной арифметической функцией на моноиде $M(A)$, так как для любых взаимно простых относительно делимости в $M(A)$ n и m имеем

$$\nu_A(nm) = \nu_A(n) + \nu_A(m).$$

Функция $V_A(n)$ является вполне аддитивной арифметической функцией на моноиде $M(A)$, так как для любых натуральных n и m из $M(A)$ имеем

$$V_A(nm) = V_A(n) + V_A(m).$$

Обозначим через $\mathbb{N}_\nu(A)$ $(\nu \geqslant 0)$ множество всех натуральных чисел n из $M(A)$ с $V_A(n) = \nu$. Ясно, что справедливо разбиение

$$M(A) = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{N}_\nu(A), \quad \mathbb{N}_0(A) = \{1\}, \quad \mathbb{N}_\nu(A) \bigcap \mathbb{N}_\mu(A) = \emptyset \quad (\nu \neq \mu). \tag{4.29}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{N}_1(A) = A, \quad \mathbb{N}_\nu(A) = \mathbb{N}_{\nu-1}(A) \cdot A \quad (\nu \geqslant 0).$$

Для дальнейшего нам потребуется ещё одна мультипликативная функция $\mathrm{rad}_A(n)$ — радикал натурального числа из $M(A)$, которая определяется следующими условиями

$$\mathrm{rad}_A(n)|n, \quad \nu_A(n) = \nu_A(\mathrm{rad}_A(n)), \quad \nu_A(\mathrm{rad}_A(n)) = V_A(\mathrm{rad}_A(n)).$$

Другими словами, если $n = \prod\limits_{j=1}^{\nu_A(n)} q_{i_j}^{\alpha_j}$, то $\mathrm{rad}_A(n) = \prod\limits_{j=1}^{\nu_A(n)} q_{i_j}$.

В силу разбиения (4.29) можно определить единую функцию $x_A(n)$ такую, что

$$\zeta^\nu(A|\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha} \quad (\nu \geqslant 0).$$

Лемма 56. *Справедливы рекуррентные соотошения*

$$x_A(1) = 1, \quad x_A(n) = \sum_{r|n,\, r\in A} x_A\left(\frac{n}{p}\right) \quad (n > 1).$$

Доказательство. Первое утверждение тривиально.

Пусть $\nu = 1$, тогда $\mathbb{N}_1(A) = A$ и $x_A(r) = 1$ и утверждение леммы выполнено.

Пусть $\nu > 1$, тогда

$$\zeta^\nu(A|\alpha) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu-1}(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}\right) \sum_{r\in A} \frac{1}{r^\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu(A)} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{r|n,\, r\in A} x_A\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 57. *Справедливо равенство*

$$x_A(n) = \frac{(V_A(n))!}{\prod\limits_{r|n,\, r\in A} (\alpha_r)!}.$$

Доказательство. Проведём индукцию по n.

При $n = 1$ утверждение леммы тривиально.

Пусть $n = m > 1$ и для всех $n < m$ утверждение леммы выполнено. Предположим, что $m = \prod\limits_{\nu=1}^{k} r_\nu^{\alpha_{r_\nu}}$, тогда по лемме 56 имеем:

$$x_A(n) = \sum_{\nu=1}^{k} x_A\left(\frac{n}{r_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(\alpha_{r_1} + \ldots + \alpha_{r_k} - 1)!\alpha_{r_\nu}}{\prod\limits_{r|n,\, r\in A} (\alpha_r)!} =$$

$$= \frac{(\alpha_{r_1} + \ldots + \alpha_{r_k} - 1)!(\alpha_{r_1} + \ldots + \alpha_{r_k})}{\prod\limits_{r|n,\, r\in A} (\alpha_r)!} = \frac{(V_A(n))!}{\prod\limits_{r|n,\, r\in A} (\alpha_r)!},$$

что доказывает утверждение леммы. □

Будем через A_0 обозначать объединение $A_0 = \{1\} \bigcup A$.

Теорема 30. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(A_0|\alpha) = 1 + \sum_{n\in M^*(A)} \frac{(-1)^{V_A(n)} \frac{(V_A(n))!}{\prod\limits_{r|n,\, r\in A}(\alpha_r)!}}{n^\alpha}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta^*(A_0|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \zeta^\nu(A|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha} =$$

$$= 1 + \sum_{n\in M^*(A)} \frac{(-1)^{V_A(n)}x_A(n)}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n\in M^*(A)} (-1)^{V_A(n)} \frac{(V_A(n))!}{\prod\limits_{r|n,\, r\in A}(\alpha_r)!} \cdot \frac{1}{n^\alpha},$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Обозначим через $\zeta(M(A), M_0|\alpha)$ отношение двух дзета-функций:

$$\zeta(M(A), A_0|\alpha) = \zeta(M(A)|\alpha)\zeta^{-1}(A_0|\alpha).$$

Обозначим коэффициенты соответствующего ряда Дирихле через $y_A(n)$:

$$\zeta(M(A), A_0|\alpha) = 1 + \sum_{n\in M^*(A)} \frac{y_A(n)}{n^\alpha}, \quad y_A(1) = 1.$$

Лемма 58. *Справедливо рекуррентное равенство*

$$y_A(n) = 1 - \sum_{r|n,\, r\in A} y_A\left(\frac{n}{r}\right).$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}_\nu} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}_\nu} \frac{y(n)}{n^\alpha}, \quad \zeta(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{P}} \frac{1}{n^\alpha},$$

поэтому

$$\zeta(\mathbb{N}_\nu|\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu} \frac{y(n)}{n^\alpha} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu-1}} \frac{y(n)}{n^\alpha}\right)\zeta(\mathbb{P}|\alpha), \quad 1 = y(n) + \sum_{p|n} y\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 59. *Справедливо равенство*

$$y(p^\alpha) = \frac{1 + (-1)^\alpha}{2}.$$

Доказательство. Действительно,

$$y(p^\alpha) = 1 - y(p^{\alpha-1}),$$

поэтому

$$y(p) = 0, \quad y(p^2) = 1, \quad y(p^3) = 0, \ldots, y(p^\alpha) = \frac{1 + (-1)^\alpha}{2}, \ldots$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 60. *Если $n = \mathrm{rad}(n)$, то справедливы равенства*

$$y(n) = (-1)^{\nu(n)}(\nu(n))! \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\nu(n)} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right), \quad \lim_{\nu(n)\to\infty} \frac{y(n)(-1)^{\nu(n)}}{\nu(n)!} = \frac{1}{e}.$$

Доказательство. Действительно, если $n = \mathrm{rad}(n)$, то $n = p_1 p_2 \ldots p_{\nu(n)}$ и $p_\mu \neq p_\lambda$ при $\mu \neq \lambda$.

При $\nu(n) = 1$ имеем: $n = p$ и утверждение леммы справедливо в силу предыдущей леммы.

Далее проведём индукцию по величине $\nu(n)$, получим при $\nu(n) = m + 1$:

$$y(n) = 1 - (m+1)(-1)^m m! \left(1 + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right) = (-1)^{m+1}(m+1)! \left(1 + \sum_{\mu=1}^{m+1} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

4.7. Общий вид моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы

Из предыдущих рассмотрений возникает естественный вопрос об общем виде моноида натуральных чисел $M(A)$, где A — множество его простых элементов, с однозначным разложением на простые элементы. Будем элементы из A обозначать через q_n. Таким образом

$$A = \{q_1 < q_2 < \ldots < q_n < \ldots\}. \tag{4.30}$$

Допускается как конечное множество A, так и бесконечное. Определим конечную или бесконечную последовательность вложенных множеств A_n, где

$$A_n = \{q_1 < q_2 < \ldots < q_n\}. \tag{4.31}$$

Последовательность вложенных множеств вида (4.31) порождает последовательность вложенных моноидов

$$\{1\} \subset M(A_1) \subset M(A_2) \subset \ldots \subset M(A_n) \subset \ldots \subset M(A). \tag{4.32}$$

Лемма 61. *Если A — бесконечное множество простых элементов и $M(A)$ — моноид с однозначным разложением на простые элементы, то*

$$\sigma_A = \sigma_{M(A)}. \tag{4.33}$$

Доказательство. Действительно, из однозначности разложения на простые элементы следует, что дзета-функция моноида $M(A)$ равна эйлерову произведению $P(M(A)|\alpha)$:

$$\zeta\left(M(A)|\alpha\right) = \sum_{n\in M(A)} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{q_i^\alpha}\right)^{-1} = P(M(A)|\alpha).$$

Прологарифмируем эйлерово произведение в правой полуплоскости $\sigma > \sigma_{M(A)}$, получим

$$\ln\zeta\left(M(A)|\alpha\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\alpha}} = \zeta(A|\alpha) + \theta_A(\alpha),$$

где

$$\theta_A(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\alpha}}.$$

При $\sigma > \sigma_A$ имеем:

$$\frac{1}{2q_n^{2\sigma}} < \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\sigma}} = \left(1 - \frac{1}{q_n^\sigma}\right)^{-1} \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\sigma}} - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-1)q_n^{m\sigma}}\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{q_n^\sigma}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2q_n^{2\sigma}} - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-1)mq_n^{m\sigma}}\right) \leqslant \frac{1}{2q_n^{2\sigma}} \frac{1 - \frac{1}{3q_n^\sigma}}{1 - \frac{1}{q_n^\sigma}} = \frac{1}{2q_n^{2\sigma}} \frac{3q_n^\sigma - 1}{3q_n^\sigma - 3} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2q_n^{2\sigma}} \left(1 + \frac{2}{3(2^\sigma - 1)}\right).$$

Отсюда вытекают неравенства

$$\frac{1}{2}\zeta(A|2\sigma) < \theta_A(\sigma) < \frac{1}{2}\zeta(A|2\sigma)\left(1 + \frac{2}{3(2^\sigma - 1)}\right).$$

Таким образом, ряд для $\theta_A(\alpha)$ сходится в полуплоскости $\sigma > \frac{\sigma_A}{2} > 0$ и логарифм эйлерова произведения существует при $\sigma > \sigma_A$. Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 62. *Если A — бесконечное множество простых элементов и $M(A)$ — моноид с однозначным разложением на простые элементы, то для любого натурального n имеем $\sigma_{M(A_n)} = 0$ и в правой полуплоскости $\sigma > 0$ справедливо разложение в эйлерово произведение*

$$\zeta\left(M(A_n)|\alpha\right) = \sum_{n\in M(A_n)} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{q_i^\alpha}\right)^{-1} = P(M(A_n)|\alpha). \tag{4.34}$$

Кроме того, в любой полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma_A$ равномерно сходится предел

$$\lim_{n\to\infty}\zeta\left(M(A_n)|\alpha\right) = \zeta\left(M(A)|\alpha\right). \tag{4.35}$$

Доказательство. Действительно, из однозначности разложения на простые элементы следует равенство (4.35). Более того, из равенства

$$\zeta\left(M(A_n)|\alpha\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{q_i^\alpha}\right)^{-1}$$

вытекает, что $\zeta\left(M(A_n)|\alpha\right)$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости, кроме точки $\alpha = 0$, в которой у неё полюс порядка n. При этом в левой полуплоскости $\sigma < 0$ имеет место функциональное уравнение

$$\zeta\left(M(A_n)|\alpha\right) = (-1)(q_1\ldots q_n)^\alpha\zeta\left(M(A_n)| - \alpha\right).$$

Обозначим через $\chi_{M(A)}(m)$ характеристическую функцию моноида $M(A)$, а через — $\chi_{M(A_n)}(m)$ характеристическую функцию моноида $M(A_n)$:

$$\chi_{M(A)}(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \in M(A), \\ 0, & \text{при } m \in \mathbb{N}\setminus M(A), \end{cases} \qquad \chi_{M(A_n)}(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \in M(A_n), \\ 0, & \text{при } m \in \mathbb{N}\setminus M(A_n). \end{cases}$$

Ясно, что $0 \leqslant \chi_{M(A)}(m) - \chi_{M(A_n)}(m) \leqslant 1$ и $\chi_{M(A)}(m) - \chi_{M(A_n)}(m) = 0$ при $1 \leqslant m \leqslant q_n$. Пользуясь этими обозначениями, получим

$$|\zeta\,(M(A_n)|\alpha) - \zeta\,(M(A)|\alpha)\,| = \left|\sum_{m>q_n} \frac{\chi_{M(A)}(m) - \chi_{M(A_n)}(m)}{m^\alpha}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m\in M(A),\, m>q_n} \frac{1-\chi_{M(A_n)}(m)}{m^{\sigma_0}} \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Определим множество простых $P_n(A)$ равенством

$$P_n(A) = \{p\,|\,p|q_1\dots q_n\}.$$

Количество элементов в $P_n(A)$ обозначим через K_n. Так как выполнена цепочка вложений

$$P_1(A) \subseteq P_2(A) \subseteq \ldots \subseteq P_n(A) \subseteq \ldots \subseteq P_\infty(A),$$

где $P_\infty(A) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(A)$, то определим единую нумерацию простых чисел из $P_\infty(A)$ следующим образом:

$$\left\{p_{K_n+1} < p_{K_n+2} < \ldots < p_{K_{n+1}}\right\} = P_{n+1}(A) \setminus P_n(A).$$

Теперь каждому элементу q_i можно поставить в соответствие вектор показателей

$$\vec{\alpha_{n,i}} = (\alpha_{n,i,1}, \ldots, \alpha_{n,i,K_n}),$$

исходя из равенства

$$q_i = \prod_{\nu=1}^{K_n} p_\nu^{\alpha_{n,i,\nu}} \quad (i \leqslant n).$$

Лемма 63. *Если справедливо неравенство*

$$K_n < n,$$

то в моноиде $M(A_n)$ отсутствует единственность разложения на простые множители.

Доказательство. Действительно, рассмотрим рациональное линейное арифметическое пространство $\mathbb{Q}^{K_n}$ размерности $K_n < n$. Отсюда следует, что

n векторов $\vec{\alpha_{n,i}}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ будут линейно зависимы. Таким образом, найдутся n рациональных чисел λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, одновременно неравные нулю, такие что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{\alpha_{n,i}} = \vec{0}.$$

Представив рациональные числа λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ в виде $\lambda_i = \frac{m_i}{M}$, где M — наименьший общий знаменатель, а m_i — целые числа, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\alpha_{n,i}} = \vec{0}.$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{m_i>0} q_i^{m_i} = \prod_{m_i<0} q_i^{-m_i}.$$

Следовательно, однозначность разложения на простые элементы нарушена и утверждение леммы доказано. □

Лемма 64. *Если справедливо равенство*

$$K_n = n,$$

то моноид $M(A_n)$ имеет единственность разложения на простые множители тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n,1,1} & \ldots & \alpha_{n,1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,n,1} & \ldots & \alpha_{n,n,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство. Действительно, из доказательства предыдущей леммы видно, что если вектора показателей линейно зависимые, то однозначность разложения на простые элементы отсутствует.

Если выполнено условие леммы, то вектора показателей будут линейно независимы.

С другой стороны, если однозначность разложения на простые элементы отсутствует, то вектора показателей будут линейно зависимые, отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 65. *Если справедливо неравенство*

$$K_n > n,$$

то моноид $M(A_n)$ имеет единственность разложения на простые множители тогда и только тогда, когда в матрице

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,1,1} & \dots & \alpha_{n,1,K_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,n,1} & \dots & \alpha_{n,n,K_n} \end{pmatrix}$$

найдётся минор порядка n отличный от нуля.

Доказательство. Действительно, наличие такого минора является необходимым и достаточным условием линейной независимости векторов показателей, что, в свою очередь, является необходимым и достаточным условием однозначности разложения на простые множители. Отсюда следует утверждение леммы. □

Теорема 31. *Для бесконечного множества простых элементов A моноид $M(A)$ имеет единственность разложения на простые множители тогда и только тогда, когда для любого n в матрице*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,1,1} & \dots & \alpha_{n,1,K_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,n,1} & \dots & \alpha_{n,n,K_n} \end{pmatrix}$$

найдётся минор порядка n отличный от нуля.

Доказательство. Если условия теоремы выполнены, то любой моноид $M(A_n)$ имеет единственность разложения на простые множители. Так как

$$M(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(A_n),$$

то отсюда следует утверждение теоремы. □

4.8. Заключение к четвертой главе

Данная тема продолжает исследования из работы [195].

В следующих работах мы планируем рассмотреть естественно возникающие в данной области проблемы, а именно:

- аналитическое продолжение для дзета-функции произвольного моноида натуральных чисел;
- получение функционального уравнения;
- обратные ряды для дзета-функции моноида натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители.

Важным классом моноидов натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители, на наш взгляд, являются моноиды соответствующие подгруппам мультипликативной группы классов вычетов по произвольному модулю.

На наш взгляд, актуальным является вопрос о справедливости аналога теоремы Дэвенпорта-Хельброна для случая дзета-функции произвольного моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы.

Глава 5

Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости

5.1. Введение к пятой главе

Пусть σ — произвольное вещественное число из интервала $(0;1)$. В работе [195] показано, что для произвольной экспоненциальной системе PE простых чисел дзета-функция $\zeta(M(PE)|\alpha)$ минимального моноида $M(PE)$, образованного системой простых PE, имеет абсциссу абсолютной сходимости $\sigma_{M(PE)} = 0$. С другой стороны, дзета-функция Римана $\zeta(\alpha) = \zeta(\mathbb{N}|\alpha)$ имеет абсциссу абсолютной сходимости $\sigma_{\mathbb{N}} = 1$.

В работе [196] для $\beta > 1$ рассмотрено множество натуральных чисел $A_{\mathbb{N},\beta}$ вида

$$A_{\mathbb{N},\beta} = \left\{ \left[n^{\beta}\right] \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 32. *Для $\beta > 1$ и дзета-функции $\zeta(A_{\mathbb{N},\beta}|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_{A_{\mathbb{N},\beta}} = \frac{1}{\beta}$.*

Из которой следует, что имеются дзета-функции множеств натуральных чисел, для которых значение абсциссы абсолютной сходимости — любое число от

0 до 1. Возникает естественный вопрос о справедливости аналогичного утверждения для дзета-функции моноида натуральных чисел.

Цель настоящей главы — построить систему простых чисел $\mathbb{P}_{\sigma_0}$ такую, что для абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha)$ выполнялось равенство $\sigma_{M(\mathbb{P}_{\sigma_0})} = \sigma$.

5.2. Следствия из теоремы Ингама

Нам потребуется теорема Ингама о простых числах в следующей формулировке (см. [135], стр. 66).

Теорема 33. *Существует $X_I > 1$ такое, что для любого $x > X_I$ найдется простое число p_x, для которого выполнены неравенства*

$$x^3 \leqslant p_x \leqslant (x+1)^3. \tag{5.1}$$

Из этой теоремы сразу следует следующее утверждение.

Пусть $\sigma > 3$ и $X_{I,\sigma} = X_I^{\frac{3}{\sigma}}$, тогда для любого $x > X_{I,\sigma}$ найдется простое число $p_{x,\sigma}$, для которого выполнены неравенства

$$x^\sigma \leqslant p_{x,\sigma} \leqslant (x+1)^\sigma. \tag{5.2}$$

Действительно, пусть $x > X_{I,\sigma}$. Положим $y = x^{\frac{\sigma}{3}}$, тогда $x^\sigma = y^3$ и $y > X_I$. Поэтому, по теореме Ингама найдется простое число p_y такое, что $y^3 \leqslant p_y \leqslant$ $\leqslant (y+1)^3$, но от сюда следует, что $x^\sigma = y^3 \leqslant p_y$. Далее заметим, что $(y+1)^3 \leqslant$ $\leqslant (x+1)^\sigma$. Действительно, положим $\beta = \frac{\sigma}{3}$, тогда $\beta > 1$ и надо показать, что $y + 1 = x^\beta + 1 \leqslant (x+1)^\beta$. Положим $f(x) = (x+1)^\beta - x^\beta - 1$, тогда $f(0) = 0$. Имеем $f'(x) = (x+1)^\beta \ln(x+1) - x^\beta \ln x > 0$, поэтому $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $p_y \leqslant (y+1)^3 < (x+1)^\sigma$. Следовательно, простое число $p_{x,\sigma} = p_y$ удовлетворяет неравенствам (5.2) и утверждение доказано. $\square$

Дадим определение σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел.

Определение 8. *Последовательность $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел называется σ-последовательностью, если*

$$\mathbb{P}_\sigma = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots\}$$

и найдется N_σ *такое, что для любого* $n > N_\sigma$ *выполняются неравенства*

$$n^\sigma \leqslant p_n < (n+1)^\sigma. \tag{5.3}$$

Из следствия из теоремы Ингама следует, что σ-последовательности простых чисел существуют для любого $\sigma \geqslant 3$. Вопрос о существовании таких последовательностей при $1 < \sigma < 3$ остается открытым, хотя для $\sigma = 1$ они заведомо отсутствуют.

Рассмотрим дзета-функцию $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)$:

$$\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha) = \sum_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{1}{p^\alpha}.$$

Теорема 34. *Для абсциссы абсолютной сходимости* $\sigma_{\mathbb{P}_{\sigma_0}}$ *дзета-функции* $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)$ *справедливо равенство*

$$\sigma_{\mathbb{P}_{\sigma_0}} = \frac{1}{\sigma_0}.$$

Доказательство. Действительно, для любого $\alpha = \sigma + it$ справедливо равенство $|\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)| \leqslant \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma)$. Далее справедлива цепочка неравенств:

$$\sum_{n\leqslant N_{\sigma_0}} \frac{1}{p_n^\sigma} - \sum_{n=1}^{N_{\sigma_0}+1} \frac{1}{n^{\sigma\sigma_0}} + \zeta(\sigma\sigma_0) = \sum_{n\leqslant N_{\sigma_0}} \frac{1}{p_n^\sigma} + \sum_{n>N_{\sigma_0}} \frac{1}{(n+1)^{\sigma\sigma_0}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^\sigma} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n\leqslant N_{\sigma_0}} \frac{1}{p_n^\sigma} + \sum_{n>N_{\sigma_0}} \frac{1}{n^{\sigma\sigma_0}} = \sum_{n\leqslant N_{\sigma_0}} \frac{1}{p_n^\sigma} - \sum_{n=1}^{N_{\sigma_0}} \frac{1}{n^{\sigma\sigma_0}} + \zeta(\sigma\sigma_0).$$

Отсюда следует, что $\sigma\sigma_0 > 1$ и, следовательно, $\sigma_{\mathbb{P}_{\sigma_0}} = \frac{1}{\sigma_0}$. Теорема доказана. □

Теорема 35. *Для абсциссы абсолютной сходимости* $\sigma_{M(\mathbb{P}_{\sigma_0})}$ *дзета-функции* $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha)$ *справедливо равенство*

$$\sigma_{M(\mathbb{P}_{\sigma_0})} = \frac{1}{\sigma_0}.$$

Доказательство. Действительно, для любого $\alpha = \sigma + it$ в области абсолютной сходимости справедливо равенство

$$\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)^{-1}.$$

Для логарифма эйлерова произведения имеем:

$$\ln\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kp_n^{k\alpha}} = \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp_n^{k\alpha}}$$

Отсюда следует, что $\sigma_{M(\mathbb{P}_{\sigma_0})} = \sigma_{\mathbb{P}_{\sigma_0}}$ и теорема доказана. □

Остановимся на вопросе о распределении простых чисел в σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел. Обозначим количество простых чисел в σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел, не превосходящих x через $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$.

Теорема 36. *При $x > N_\sigma : \sigma$ для функции $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$ справедливы равенства*

$$\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x) = x^{\frac{1}{\sigma}} + \theta(x), \tag{5.4}$$

где $-2 < \theta(x) < -1$.

Доказательство. Пусть $n^\sigma \leqslant x < (n+1)^\sigma$, тогда из определения σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел вытекает, что

$$\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x) = \begin{cases} n-1, & \text{при } n^\sigma \leqslant x < p_n, \\ n, & \text{при } p_n \leqslant x < (n+1)^\sigma. \end{cases}$$

Так как $n = \left[x^{\frac{1}{\sigma}}\right]$, то

$$\theta(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\sigma}} - \left\{x^{\frac{1}{\sigma}}\right\} - 1, & \text{при } n^\sigma \leqslant x < p_n, \\ \\ x^{\frac{1}{\sigma}} - \left\{x^{\frac{1}{\sigma}}\right\}, & \text{при } p_n \leqslant x < (n+1)^\sigma. \end{cases}$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

5.3. Следствия из теоремы Россера

Теперь нам потребуется теорема Россера о простых числах в следующей формулировке (см. [174]).

Теорема 37. *Для любого $n > 1$ и простого p_n выполнены неравенства*

$$n\ln n < p_n < n(\ln n + 2\ln\ln n). \tag{5.5}$$

Рассмотрим при $\sigma_0 > 1$ ряд $S_{\sigma_0}(\alpha)$, заданный равенством:

$$S_{\sigma_0}(\alpha) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^{\sigma_0} \ln n)^{\alpha}}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

расходится, то абсцисса абсолютной сходимости ряда $S_{\sigma_0}(\alpha)$ при $\alpha = \sigma + it$ будет $\beta_0 = \frac{1}{\sigma_0}$. Таким образом, при $\sigma \geqslant \beta > \beta_0$ ряд $S_{\sigma_0}(\alpha)$ равномерно сходится, а при $\sigma \leqslant \beta_0$ расходится.

Определение 9. *Последовательность $\mathbb{N}_\sigma$ натуральных чисел называется σ-последовательностью, если*

$$\mathbb{N}_\sigma = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots\}$$

и найдется σ такое, что для любого n выполняются неравенства

$$n^\sigma \leqslant m_n < (n+1)^\sigma. \tag{5.6}$$

Очевидно, что σ-последовательности натуральных чисел существуют для любого $\sigma \geqslant 1$.

Определение 10. *Последовательность $\mathbb{P}^*_\sigma$ простых чисел называется σ-последовательностью второго рода, если*

$$\mathbb{P}^*_\sigma = \{p_{m_1} < p_{m_2} < \ldots < p_{m_n} < \ldots\}$$

и множество номеров m_n образуют σ-последовательность $\mathbb{N}_\sigma$ натуральных чисел.

Теорема 38. *Для абсциссы абсолютной сходимости $\sigma_{\mathbb{P}^*_{\sigma_0}}$ дзета-функции $\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)$ справедливо равенство*

$$\sigma_{\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} = \frac{1}{\sigma_0}.$$

Доказательство. Действительно, для любого $\alpha = \sigma + it$ справедливо равенство $|\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)| \leqslant \zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma)$.

Далее заметим, что

$$m_n \ln m_n < p_{m_n} < m_n(\ln m_n + 2\ln\ln m_n), \quad n^{\sigma_0} \leqslant m_n < (n+1)^{\sigma_0};$$
$$\sigma_0 n^{\sigma_0} \ln n < p_{m_n} < 3\sigma_0(n+1)^{\sigma_0}\ln(n+1).$$

Отсюда следует, что $\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma)$ оценивается сверху и снизу через $S_{\sigma_0}(\sigma)$, а значит $\sigma\sigma_0 > 1$ и, следовательно, $\sigma_{\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} = \frac{1}{\sigma_0}$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 39. *Для абсциссы абсолютной сходимости $\sigma_{M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})}$ дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha)$ справедливо равенство*

$$\sigma_{M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})} = \frac{1}{\sigma_0}.$$

Доказательство. Действительно, для любого $\alpha = \sigma + it$ в области абсолютной сходимости справедливо равенство

$$\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Для логарифма эйлерова произведения имеем:

$$\ln\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kp_n^{k\alpha}} = \zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp_n^{k\alpha}}$$

Отсюда следует, что $\sigma_{M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})} = \sigma_{\mathbb{P}^*_{\sigma_0}}$ и теорема доказана. $\square$

Вопрос о распределении простых чисел в σ-последовательности второго рода более сложный и требует специального рассмотрения. Это связано с тем, что интервалы для простого p_{m_ν} и $p_{m_{\nu+1}}$ пересекаются. Более того, количество пересекающихся интервалов растёт с ростом номера ν.

5.4. Об абсциссе абсолютной сходимости одного класса обобщённых произведений Эйлера

5.4.1. Введение

В теории рядов Дирихле и в теории дзета-функции Римана различные произведения Эйлера играют значительную роль на протяжении почти трёх столетий со времён Л. Эйлера до наших дней (см. например [104, 103, 152]).

В работе [195] для произвольного моноида M натуральных чисел определена дзета-функция моноида $\zeta(M|\alpha)$:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > \sigma_M),$$

σ_M — абсцисса абсолютной сходимости. Ясно, что справедливы неравенства $0 \leqslant \sigma_M \leqslant 1$, если $M \neq \{1\}$. При $M = \mathbb{N}$ получаем обычную дзета-функцию Римана. Если $M = \{mk + 1 | k \geqslant 0\}$, то получаем хорошо известные примеры моноидов, которые изучались со времен Дирихле. Другим примером моноида является множество всех квадратичных вычетов по произвольному модулю q.

В работе [195] определена экспоненциальная последовательность простых. Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечную последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ будем называть экспоненциальной, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым, (см. [143]) для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел. Доказана теорема

Теорема 40. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

В работе [203] доказано, что дзета-функция $\zeta(M(PE))|\alpha)$ имеет мнимую ось в качестве особой линии, которая является границей естественной области голоморфности.

Теорема 41. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Там же даются и другие примеры моноидов с такой же областью голоморфности.

В работе [198] показано, что для любого σ_0 при $\sigma_0 \geqslant 3$ существует бесконечно много σ_0-последовательностей простых чисел $\mathbb{P}_{\sigma_0}$ таких что дзета-функция

$\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)$, $\alpha = \sigma+it$ имеет абсциссу абсолютной сходимости $\frac{1}{\sigma_0}$ и такую же абсциссу абсолютной сходимости имеет дзета-функция $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha)$ моноида $M(\mathbb{P}_{\sigma_0})$. Определение σ_0-последовательностей простых чисел более сложное.

Определение 11. *Последовательность $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел называется σ-последовательностью, если $\mathbb{P}_\sigma = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots\}$ и найдется N_σ такое, что для любого $n > N_\sigma$ выполняются неравенства $n^\sigma \leqslant p_n < (n+1)^\sigma$.*

Существование таких последовательностей при $\sigma \geqslant 3$ следует из теоремы Ингама о простых числах в следующей формулировке (см. [135], стр. 66).

Теорема 42. *Существует $X_I > 1$ такое, что для любого $x > X_I$ найдется простое число p_x, для которого выполнены неравенства $x^3 \leqslant p_x \leqslant (x+1)^3$.*

При $1 \leqslant \sigma_0 < 3$ существует бесконечно много σ_0-последовательностей простых чисел второго рода $\mathbb{P}^*_{\sigma_0}$, для которых дзета-функция $\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)$, $\alpha = \sigma + it$ имеет абсциссу абсолютной сходимости $\frac{1}{\sigma_0}$ и такую же абсциссу абсолютной сходимости имеет дзета-функция $\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha)$ моноида $M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})$. Определение σ_0-последовательностей простых чисел второго рода двухступенчатое.

Определение 12. *Последовательность $\mathbb{N}_\sigma$ натуральных чисел называется σ-последовательностью, если $\mathbb{N}_\sigma = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots\}$ и найдется σ такое, что для любого n выполняются неравенства $n^\sigma \leqslant m_n < (n+1)^\sigma$.*

Очевидно, что σ-последовательности натуральных чисел существуют для любого $\sigma \geqslant 1$.

Определение 13. *Последовательность $\mathbb{P}^*_\sigma$ простых чисел называется σ-последовательностью второго рода, если $\mathbb{P}^*_\sigma = \{p_{m_1} < p_{m_2} < \ldots < p_{m_n} < \ldots\}$ и множество номеров m_n образуют σ-последовательность $\mathbb{N}_\sigma$ натуральных чисел.*

Для исследования таких последовательностей используется теорема Россера о простых числах в следующей формулировке (см. [174]).

Теорема 43. *Для любого $n > 1$ и простого p_n выполнены неравенства $n \ln n < p_n < n(\ln n + 2 \ln\ln n)$.*

Так как моноиды $M(\mathbb{P}_{\sigma_0})$ и $M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})$ относятся к числу моноидов с однозначным разложением на простые множители, то для них имеет место разложение дзета-функции в Эйлерово произведение:

$$\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha) = \prod_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} \left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}, \quad \zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha) = \prod_{p\in\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} \left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Равенства справедливы при $\sigma > \frac{1}{\sigma_0}$, при этом в точке $\alpha = \frac{1}{\sigma_0}$ полюс первого порядка.

Как хорошо известно (см. [38], стр. 79–81.), главное значение $(\ln(1-z))$ логарифма при $|z| < 1$ представляется сходящимся степенным рядом $(\ln(1-z)) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}$.

Если положить $z = \frac{1}{p^\alpha}$, $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 0$, то для любого простого p имеем $|z| < 1$ и справедливо равенство для главного логарифма

$$\left(\ln\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

Обозначим через $S_N(p,\alpha)$ и $R_N(p,\alpha)$ частичную сумму и остаточный ряд, соответственно,

$$S_N(p,\alpha) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{np^{n\alpha}}, \quad R_N(p,\alpha) = \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

Рассмотрим множитель $M_N(p,\alpha)$, заданный равенством

$$M_N(p,\alpha) = \prod_{n=1}^N e^{-\frac{1}{np^{n\alpha}}}.$$

Очевидно, что $\ln M_N(p,\alpha) = -S_N(p,\alpha)$. Заметим, что, вообще говоря, нельзя утверждать, что данное значение будет главным при всех значениях N и α (см. [195]).

Обозначим через $E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)$ и $E_N(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)$ обобщённые произведения Эйлера

$$E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha) = \prod_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{M_N(p,\alpha)}{1-\frac{1}{p^\alpha}}, \quad E_N(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha) = \prod_{p\in\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} \frac{M_N(p,\alpha)}{1-\frac{1}{p^\alpha}}. \tag{5.7}$$

Цель данного раздела — показать, что оба произведения Эйлера имеют абсциссу абсолютной сходимости равную $\frac{1}{(N+1)\sigma_0}$.

Важность изучения этих вопросов можно пояснить на следующих примерах.

Если для произвольного моноида M натуральных чисел рассмотреть моноид M^{-1}, определяемый условиями $M \cdot M^{-1} = \mathbb{N}$, $M \bigcap M^{-1} = \{1\}$, то будем иметь равенство $\zeta(\alpha) = \zeta(M|\alpha)\zeta(M^{-1}|\alpha)$. Ясно, что если $0 < \sigma_M < 1$, то $\sigma_{M^{-1}} = 1$, но в точке $\alpha = \sigma_M$ дзета-функция $\zeta(M^{-1}|\alpha)$ будет иметь ноль, так как у $\zeta(M|\alpha)$ в этой точке полюс.

Если моноид M с однозначным разложением на простые множители и $P(M)$ — множество его простых элементов, то из (5.7) следует, что абсциссы абсолютной сходимости для дзета-функций $\zeta(M|\alpha)$ и $\zeta(P(M)|\alpha)$ совпадают. Дальше возникает вопрос о совпадении их областей аналитического продолжения.

Наконец, можно поставить вопрос об аналоге гипотезы Римана для дзета-функции произвольного моноида с однозначным разложением на простые множители.

5.4.2. Леммы об остаточном ряде

Лемма 66. *Для любого $\alpha = \sigma + it$ при $\sigma > 0$ справедливо неравенство $|R_N(p, \alpha)| \leqslant R_N(p, \sigma)$.*

Доказательство. Действительно, для любого вещественного значения σ имеем равенство $\left|\frac{1}{p^{n\alpha}}\right| = \frac{1}{p^{n\sigma}}$. Отсюда следует, что если $\alpha = \sigma + it$ и $\sigma > 0$, то

$$|R_N(p, \alpha)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{np^{n\alpha}}\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{np^{n\sigma}} = R_N(p, \sigma),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 67. *Для любого $\sigma > 0$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{(N+1)p^{(N+1)\sigma}} < R_N(p, \sigma) < \frac{1}{p^{(N+1)\sigma}} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma \ln p}\right).$$

Доказательство. Действительно, при $n > N+1$ имеем:

$$\frac{1}{\sigma \ln p} \left(\frac{1}{p^{(n-1)\sigma}} - \frac{1}{p^{n\sigma}}\right) = \int\limits_{n-1}^{n} \frac{dx}{p^{x\sigma}} > \frac{1}{p^{n\sigma}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{(N+1)p^{(N+1)\sigma}} < R_N(p,\sigma) < \frac{1}{(N+1)p^{(N+1)\sigma}} + \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{1}{n\sigma\ln p}\left(\frac{1}{p^{(n-1)\sigma}} - \frac{1}{p^{n\sigma}}\right) =$$
$$= \frac{1}{(N+1)p^{(N+1)\sigma}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sigma\ln p}\frac{1}{p^{n\sigma}} - \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{1}{n\sigma\ln p}\frac{1}{p^{n\sigma}} =$$
$$= \frac{1}{p^{(N+1)\sigma}}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma\ln p}\right) - \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\sigma\ln p}\frac{1}{p^{n\sigma}} <$$
$$< \frac{1}{p^{(N+1)\sigma}}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma\ln p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

5.4.3. Основной результат

Для любого множества A натуральных чисел будем через $\zeta(A|\alpha)$ обозначать дзета-функцию множества A, заданную равенством

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Лемма 68. *Для любого σ из области сходимости дзета-функций $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)$ и $\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)$ справедливы неравенства*

$$\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma) < \ln\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\sigma) < \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma)\left(1 + \frac{1}{2\sigma\ln 2}\right), \tag{5.8}$$
$$\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma) < \ln\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\sigma) < \zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma)\left(1 + \frac{1}{2\sigma\ln 2}\right). \tag{5.9}$$

Доказательство. Действительно, из определения остаточного ряда следует, что

$$\ln\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\sigma) = \sum_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} R_0(p,\sigma), \quad \ln\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\sigma) = \sum_{p\in\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} R_0(p,\sigma).$$

Применяя лемму 67, получим

$$\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma) = \sum_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{1}{p^\sigma} < \sum_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} R_0(p,\sigma) < \sum_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{1}{p^\sigma}\left(1 + \frac{1}{2\sigma\ln p}\right) <$$
$$< \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma)\left(1 + \frac{1}{2\sigma\ln 2}\right),$$

$$\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma) < \sum_{p\in\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} R_0(p,\sigma) < \zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma)\left(1+\frac{1}{2\sigma\ln 2}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Теорема 44. *Ряды для $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)$, $\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)$, $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha)$ и $\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha)$ имеют одну и ту же абсциссу абсолютной сходимости, равную $\frac{1}{\sigma_0}$.*

Доказательство. Так как абсцисса абсолютной сходимости ряда, имеющего эйлерово произведение, и его логарифма совпадают, то утверждение теоремы следует из леммы 68. □

Лемма 69. *Для любого σ из области абсолютной сходимости для логарифмов обобщенных эйлеровых произведений $E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma)$ и $E_N(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma)$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{N+1}\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma(N+1)) < \ln E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma) <$$
$$< \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma(N+1))\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{(N+2)\sigma\ln 2}\right), \tag{5.10}$$
$$\frac{1}{N+1}\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma(N+1)) < \ln E_N(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma) <$$
$$< \zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma(N+1))\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{(N+2)\sigma\ln 2}\right). \tag{5.11}$$

Доказательство. Действительно, из определения обобщенного эйлерова произведения и остаточного ряда следует, что

$$\ln E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma) = \sum_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} R_N(p,\sigma), \quad \ln E_N(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma) = \sum_{p\in\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} R_N(p,\sigma).$$

Применяя лемму 67, получим

$$\frac{1}{N+1}\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma(N+1)) = \sum_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{1}{(N+1)p^{(N+1)\sigma}} < \sum_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} R_N(p,\sigma) <$$
$$< \sum_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{1}{p^{(N+1)\sigma}}\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{(N+2)\sigma\ln p}\right) <$$
$$< \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma(N+1))\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{(N+2)\sigma\ln 2}\right),$$
$$\frac{1}{N+1}\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma(N+1)) < \sum_{p\in\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} R_N(p,\sigma) <$$
$$< \zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma(N+1))\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{(N+2)\sigma\ln 2}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Теорема 45. *Обобщённые произведения Эйлера* $E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)$ *и* $E_N(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)$ *имеют одну и ту же абсциссу абсолютной сходимости, равную* $\frac{1}{(N+1)\sigma_0}$.

Доказательство. Так как абсцисса абсолютной сходимости эйлерова произведения и его логарифма совпадают, то утверждение теоремы следует из леммы 69. □

5.4.4. Заключение

Если ввести два множителя $M_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)$ и $M_N(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)$, заданные равенствами:

$$M_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha) = \prod_{p\in\mathbb{P}_{\sigma_0}} M_N(p,\alpha) = e^{-\sum_{n=1}^{N}\frac{\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)}{n}},$$

$$M_N(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha) = \prod_{p\in\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} M_N(p,\alpha) = e^{-\sum_{n=1}^{N}\frac{\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)}{n}},$$

то для обобщённых эйлеровых произведений в области абсолютной сходимости дзета-функций $\sigma > \frac{1}{\sigma_0}$ будут справедливы равенства

$$E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha) = M_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha), \quad E_N(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha) = M_N(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha).$$

Последние равенства перестают быть верными в области $\frac{1}{(N+1)\sigma_0} < \sigma \leqslant \frac{1}{\sigma_0}$, так как оба сомножителя в правых частях равенства расходятся.

Остаются открытыми вопросы об аналитическом продолжении дзета-функций
$\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha)$ и $\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha)$ в левую полуплоскость $\sigma \leqslant \frac{1}{\sigma_0}$.

5.5. Заключение к пятой главе

Из предыдущего видно, что для дзета-функции моноидов натуральных чисел значение абсциссы абсолютной сходимости может изменяться от 0 до 1. При построении соответствующих множеств простых чисел при значениях абсциссы от 0 до $\frac{1}{3}$ можно использовать теорему Ингама и её следствия. При значениях от $\frac{1}{3}$ до 1 требуется использовать теорему Россера. Первый случай в некотором смысле более простой и удается описать функцию распределения простых чисел, второй случай оказывается более сложным и требует новых исследований.

Так как в полуплоскости абсолютной сходимости дзета-функция любого моноида натуральных чисел, порожденного произвольным множеством простых чисел, представляется в виде эйлерова произведения, то отсюда следует, что в полуплоскости абсолютной сходимости эта дзета-функция не имеет нулей.

Для любого $q > 2$ дзета-функцию любого моноида натуральных чисел можно разбить на сумму рядов Дирихле, соответствующим суммам по пересечению моноида и произвольного класса вычетов по модулю q. Как известно, для натурального ряда соответствующие ряды Дирихле выражаются через дзета-функцию Гурвица, а для неё справедливы результаты о нуля: теоремы Дэвенпорта — Хейльброна [9, 155] и теорема Воронина [30, 33].

Возникает естественный вопрос об исследовании возможных аналогов этих результатов на случай дзета-функцию произвольного моноида натуральных чисел, порожденного множеством простых чисел.

Данная тематика имеет естественное многомерное обобщение. Действительно, рассмотрим многомерный моноид $\mathbb{N}^s$ с операцией покоординатного умножения и единичным элементом $(1, \ldots, 1)$. Дзета-функция этого моноида определяется естественным образом:

$$\zeta\left(\mathbb{N}^s \middle|\, \alpha\right) = \sum_{\vec{x} \in \mathbb{N}^s} \frac{1}{(x_1 \ldots x_s)^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

Очевидно, что $\zeta\left(\mathbb{N}^s \middle|\, \alpha\right) = \zeta^s(\alpha)$.

В моноиде $\mathbb{N}^s$ имеется несчетное множество различных подмоноидов $M \subset \subset \mathbb{N}^s$, для которых можно определить дзета-функцию $\zeta\left(M \middle|\, \alpha\right)$ по формуле

$$\zeta\left(M \middle|\, \alpha\right) = \sum_{\vec{x} \in M} \frac{1}{(x_1 \ldots x_s)^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где $0 \leqslant \sigma_M \leqslant 1$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда.

Другое многомерное обобщение связано с чисто-вещественными алгебраическими полями. Пусть F_s — чисто вещественное алгебраическое поле степени s, $F_s^{(1)} = F_s, F_s^{(2)}, \ldots, F_s^{(s)}$ — набор его сопряженных полей и для любого алгебраического числа Θ из F_s $\Theta^{(1)} = \Theta, \Theta^{(2)}, \ldots, \Theta^{(s)}$ — набор его алгебраически сопряженных чисел. Через $\mathbb{Z}_{F_s}$ обозначим кольцо целых алгебраических чисел поля F_s.

Рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda = \left\{ \left(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \ldots, \Theta^{(s)}\right) \middle| \, \Theta \in \mathbb{Z}_{F_s} \right\}$. Относительно операции покоординатного умножения решётка Λ является моноидом с единицей $(1, \ldots, 1)$, так как, согласно Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддееву, являются решётками, повторяющимися умножением. Как показано в теории гиперболической дзета-функции решёток, для алгебраической решётки Λ нельзя определить дзета-функцию, так как она будет расходиться для любого значения α в силу теоремы Дирихле об алгебраических единицах.

Таким образом, мы видим, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел тесно связана с теорией гиперболических дзета-функций решёток, с которой можно познакомиться по работам [181, 220, 215, 46, 191, 186].

Глава 6

Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых и обобщенное эйлерово произведение, задающее мероморфную функцию на всей комплексной плоскости

6.1. Введение к шестой главе

Гиперболическая дзета-функция решёток задаётся в правой полуплоскости $\alpha > 1$ дзета рядом[1]

[1] Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{-\alpha}. \qquad (6.1)$$

Очевидно, что при $s = 1$ гиперболическая дзета-функции решётки выражается через дзета-функцию Римана. В многомерном случае имеются свои существенно новые задачи, не имеющие аналогов в одномерном случае.

В работе [181] приводятся необходимые факты из истории создания и развития теории гиперболической дзета-функции решёток. Выделены основные направления современных исследований по развитию этой теории.

Не повторяясь в перечислении основных достижений в области развития теории гиперболической дзета-функции решёток, укажем на одно новое направление исследований. Проблема аналитического продолжения гиперболической дзета-функции решёток на всю комплексную плоскость в последнее время привела к необходимости сосредоточиться на одномерном случае, а именно, на гиперболической дзета-функции Гурвица.

В процессе анализа различных одномерных случаев неожиданно возник вопрос о дзета-функциях моноидов натуральных чисел. Среди всех моноидов натуральных чисел особое место занимают моноиды с однозначным разложением на простые элементы, так как именно для них имеет место разложение дзета-функции моноида в эйлерово произведение. Здесь важно подчеркнуть, что среди простых элементов моноида встречаются как простые числа, так и псевдопростые числа. В работе [195] начаты эти исследования, а в [196] они продолжены.

Обратим внимание, что простейшем примером моноида с однозначным разложением на простые элементы является геометрическая прогрессия $M(q)$ с начальным членом равным единице и знаменателем $q > 1$ — произвольным натуральным числом. В следующем разделе мы более подробно обсудим этот случай и возникающие проблемы.

Пусть $p_1 < p_2$ — два простых числа вида $3n + 2$. Например, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$. Через $M(p_1, p_2)$ обозначаем, как обычно, моноид, порожденный простыми числами p_1 и p_2:

$$M(p_1, p_2) = \{n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \,|\, \beta_1, \beta_2 \geqslant 0\},$$

$$\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)=\sum_{n\in M(p_1,p_2)}\frac{1}{n^\alpha}\quad(\alpha=\sigma+it,\sigma>0).$$

Ясно, что моноид $M(p_1,p_2)$ с однозначным разложением на простые множители, и поэтому его дзета-функция выражается через конечное эйлерово произведение:

$$\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)=P(M(p_1,p_2)|\alpha)=\left(1-\frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1}.$$

Рассмотрим моноид $M_{3,1}(p_1,p_2)\subset M(p_1,p_2)$, заданный равенством

$$M_{3,1}(p_1,p_2)=\{n=3k+1=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\,|\,\beta_1+\beta_2\equiv 0\pmod 2\},$$

который для краткости будем называть основным моноидом, и основное множество

$$A_{3,1}(p_1,p_2)=M(p_1,p_2)\backslash M_{3,1}(p_1,p_2)=\{n=3k+2=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\,|\,\beta_1+\beta_2\equiv 1\pmod 2\}.$$

Для моноида $M_{3,1}(p_1,p_2)$ нетрудно описать $P(M_{3,1}(p_1,p_2))$ — множество простых элементов: $P(M_{3,1}(p_1,p_2))=\{q_1,q_2,q_3\}$ и состоит из псевдопростых чисел

$$q_1=p_1^2<q_2=p_1p_2<q_3=p_2^2.$$

Обозначим через $P(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)=\prod_{q\in P(M_{3,1}(p_1,p_2))}\left(1-\frac{1}{q^\alpha}\right)^{-1}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.$$

Будем называть каноническим разложением элемента n из мультипликативного моноида $M_{3,1}(p_1,p_2)$ натуральных чисел представление вида $n=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}q_3^{\beta_3}$. Через $k(n)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа n, тогда эйлерово произведение $P(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)=\sum_{n\in M_{3,1}(p_1,p_2)}\frac{k(n)}{n^\alpha}.$$

Так как в моноиде $M_{3,1}(p_1, p_2)$ нет однозначности разложения на простые элементы, действительно, $q_1q_3 = q_2^2$, то $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) \neq P(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$.

Интересно, что моноид $M(q_1, q_2)$ имеет однозначное разложение на множители, так как $q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2} = p_1^{2\beta_1+\beta_2}p_2^{\beta_2}$, что доказывает однозначность разложения на простые элементы. Поэтому

$$\zeta(M(q_1, q_2)|\alpha) = \sum_{n\in M(q_1,q_2)} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{\left(q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\right)^\alpha} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1} = P(M(q_1, q_2)|\alpha).$$

И вообще, справедливо равенство

$$\zeta(M(q_\nu, q_\mu)|\alpha) = P(M(q_\nu, q_\mu)|\alpha) \quad 1 \leqslant \nu < \mu \leqslant 3.$$

В работе [195] введено понятие экспоненциальной системы PE простых чисел и показано, что дзета-функция минмального моноида $M(PE)$ натуральных чисел, образованного произвольной экспоненциальной системой PE простых чисел, обладает эйлеровым произведением, сходящемся в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 0$. Таким образом, голоморфная дзета-функция $\zeta(M(PE)|\alpha)$ принимает все значения, кроме 0.

Кроме этого, в данной главе изучается произведение Эйлера вида

$$P_\pi(M, a(p)|\alpha) = \prod_{p\in P(M)} \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1},$$

где M — произвольный моноид натуральных чисел, образованный множеством простых чисел $P(M)$.

Другим объектом изучения является ряд Дирихле вида

$$f_\pi(M|\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}}.$$

Оказывается, что они обладают совершенно разными свойствами. Ряд Дирихле $f_\pi(M|\alpha)$ определяет голоморфную функцию на всей комплексной плоскости.

Цели данной главы — найти обратный ряд Дирихле для дзета-функции $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ и аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость;

сформулировать гипотезу, что не существует аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$ из-за наличия всюду плотного на мнимой оси заградительного ряда

$$S(M(PE)) = \left\{ \frac{2\pi ik}{\ln p_n} \middle| k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad PE = \{p_n | n \in \mathbb{N}\},$$

состоящего из объединения множеств полюсов дзета-функций $\zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$;

доказать гипотезу о заградительном ряде для дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых чисел;

изучить свойства указанного произведения Эйлера.

6.2. Дзета-функция геометрической прогрессии и теоремы Вейерштрасса и Миттаг–Леффлера

Прежде всего, рассмотрим целую функцию $q^\alpha - 1$, которая имеет бесконечно много нулей, а, именно, $\alpha = 0$ и $\alpha_n = \frac{2\pi ni}{\ln q}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Лемма 70. *Справедливо равенсто*

$$e^\alpha - 1 = e^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2 n^2}\right). \tag{6.2}$$

Доказательство. Хорошо известно разложение в бесконечное произведение (см. [136], стр. 235)

$$\sin \alpha = \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Применяя формулу Эйлера $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$, получим

$$e^\alpha - 1 = e^{\frac{\alpha}{2}} \left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}\right) = 2ie^{\frac{\alpha}{2}} \frac{e^{-i\frac{i\alpha}{2}} - e^{i\frac{i\alpha}{2}}}{2i} = -2ie^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{i\alpha}{2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$e^\alpha - 1 = -2ie^{\frac{\alpha}{2}} \frac{i\alpha}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\left(\frac{i\alpha}{2}\right)^2}{n^2 \pi^2}\right) = e^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2 n^2}\right)$$

и утверждение леммы доказано. □

Следствие 1. *Справедливо равенсто*

$$q^{\alpha}-1=q^{\frac{\alpha}{2}}(\alpha\ln q)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2\ln^2 q}{4\pi^2n^2}\right). \tag{6.3}$$

Доказательство. Действительно,

$$q^{\alpha}-1=e^{\alpha\ln q}-1=e^{\frac{\alpha\ln q}{2}}(\alpha\ln q)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(\alpha\ln q)^2}{4\pi^2n^2}\right)=$$
$$=q^{\frac{\alpha}{2}}(\alpha\ln q)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2\ln^2 q}{4\pi^2n^2}\right).$$

□

Таким образом, для целой функции $q^{\alpha}-1$ теорема Вейерштрасса имеет вид:

$$q^{\alpha}-1=q^{\frac{\alpha}{2}}(\alpha\ln q)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2\ln^2 q}{4\pi^2n^2}\right). \tag{6.4}$$

Дзета-функция геометрической прогрессии $M(q)$ задается формулой

$$\zeta(M(q)|\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q^n)^{\alpha}}=\frac{1}{1-\frac{1}{q^{\alpha}}}\quad(\alpha=\sigma+it,\ \sigma>0). \tag{6.5}$$

Из формулы (6.5) следует, что дзета-функция геометрической прогрессии аналитическая функция во всей α-плоскости кроме точек $\alpha_0=0$, где у неё простой полюс с вычетом

$$\operatorname*{Res}_{0}\zeta(M(q)|\alpha)=\frac{1}{\ln q}.$$

и точек $\alpha_k=\frac{2ki\pi}{\ln q}$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$, в которых простые полюса с вычетами

$$\operatorname*{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}}\zeta(M(q)|\alpha)=\frac{1}{\ln q}.$$

Действительно, применяя правило Лопиталя, получим

$$\operatorname*{Res}_{0}\zeta(M(q)|\alpha)=\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha}{1-\frac{1}{q^{\alpha}}}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha}{q^{\alpha}-1}=\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\ln q q^{\alpha}}=\frac{1}{\ln q}.$$

Аналогично,

$$\operatorname*{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}}\zeta(M(q)|\alpha)=\lim_{\alpha\to\frac{2ki\pi}{\ln q}}\frac{\alpha-\frac{2ki\pi}{\ln q}}{1-\frac{1}{q^{\alpha}}}=\lim_{\alpha\to\frac{2ki\pi}{\ln q}}\frac{\alpha-\frac{2ki\pi}{\ln q}}{q^{\alpha}-1}=\lim_{\alpha\to\frac{2ki\pi}{\ln q}}\frac{1}{q^{\alpha}\ln q}=\frac{1}{\ln q}.$$

Отсюда следует, что $\zeta(M(q)|\alpha)$ — мероморфная функция на комплексной α-плоскости, которая имеет следующее разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1}. \tag{6.6}$$

А следовательно, к ней применима теорема Миттаг–Леффлера (см. [135], стр. 225). Таким образом, мы получаем, что для некоторой целой функции $h_q(\alpha)$ и некоторых многочленов $P_{n,q}(\alpha)$ для $\zeta(M(q)|\alpha)$ справедливо разложение в ряд

$$\zeta(M(q)|\alpha) = h_q(\alpha) + \frac{1}{\alpha \ln q} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\left(\alpha - \frac{2ni\pi}{\ln q}\right) \ln q} + P_{n,q}(\alpha) + \frac{1}{\left(\alpha + \frac{2ni\pi}{\ln q}\right) \ln q} + P_{-n,q}(\alpha) \right). \tag{6.7}$$

Теперь возникают два естественных вопроса: Как найти целую функцию $h_q(\alpha)$? И как найти многочлены $P_{n,q}(\alpha)$, которые обеспечат сходимость ряда?

На второй вопрос ответ несложно найти в книге Б. В. Шабата (см. [135], стр. 226). Надо положить $P_{n,q}(\alpha) = \frac{1}{2ni\pi}$.

Действительно,

$$\frac{1}{\left(\alpha - \frac{2ni\pi}{\ln q}\right) \ln q} + \frac{1}{2ni\pi} = \frac{\alpha \ln q}{(\alpha \ln q - 2ni\pi)2ni\pi}.$$

Далее имеем:

$$\frac{\alpha \ln q}{(\alpha \ln q - 2ni\pi)2ni\pi} + \frac{\alpha \ln q}{(\alpha \ln q + 2ni\pi)(-2ni\pi)} = \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta(M(q)|\alpha) = h_q(\alpha) + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2}.$$

Для дзета-функции геометрической прогрессии легко найти функциональное уравнение. Действительно,

$$\zeta(M(q)| - \alpha) = \frac{q^{-\alpha}}{q^{-\alpha} - 1} = \frac{1}{1 - q^{\alpha}} = -\frac{\zeta(M(q)|\alpha)}{q^{\alpha}}.$$

И так, целая функция $h_q(\alpha)$ задаётся равенством

$$h_q(\alpha) = 1 + \frac{1}{q^{\alpha} - 1} - \frac{1}{\alpha \ln q} - 2\alpha \ln q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n,q}}{n!} \alpha^n,$$

где

$$a_{n,q} = h_q^{(n)}(\alpha)\big|_{\alpha=0}.$$

Так как

$$h_q(-\alpha) = 1 + \frac{1}{q^{-\alpha}-1} + \frac{1}{\alpha\ln q} + 2\alpha\ln q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2\ln^2 q + 4n^2\pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n,q}(-1)^n}{n!}\alpha^n,$$

то

$$h_q(\alpha) + h_q(-\alpha) = 2 + \frac{1}{q^{\alpha}-1} + \frac{1}{q^{-\alpha}-1} = 1 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n,q}}{(2n)!}\alpha^{2n},$$

поэтому $a_{0,q} = \frac{1}{2}$ и $a_{2n,q} = 0$ $(n \geqslant 1)$,

$$h_q(\alpha) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n+1,q}}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1}.$$

По правилу Лопиталя для $a_{0,q}$ находим аналогичный результат:

$$a_{0,q} = \lim_{\alpha\to 0}\left(1 + \frac{1}{q^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha\ln q}\right) = 1 + \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\ln q - q^{\alpha} + 1}{(q^{\alpha}-1)\alpha\ln q} = 1+$$
$$+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln q - \ln q q^{\alpha}}{\ln q q^{\alpha}\alpha\ln q + (q^{\alpha}-1)\ln q} = 1 + \lim_{\alpha\to 0}\frac{1-q^{\alpha}}{q^{\alpha}\alpha\ln q + q^{\alpha} - 1} =$$
$$= 1 - \lim_{\alpha\to 0}\frac{q^{\alpha}\ln q}{q^{\alpha}\alpha\ln^2 q + q^{\alpha}\ln q + q^{\alpha}\ln q} = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию $M(e) = \{e^n | n \geqslant 0\}$. Она не является моноидом натуральных чисел, но — моноид трансцендентных чисел. Нетрудно видеть, что дзета-функция $\zeta(M(q)|\alpha)$ моноида $M(q)$ для любого $q > 1$ легко выражается через дзета-функцию $\zeta(M(e)|\alpha)$: $\zeta(M(q)|\alpha) = \zeta(M(e)|\alpha\ln q)$.

Положим

$$h(\alpha) = 1 + \frac{1}{e^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha} - 2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n+1}}{(2n+1)!}\alpha^n,$$

тогда

$$\zeta(M(e)|\alpha) = h(\alpha) + \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2}, \quad h_q(\alpha) = h(\alpha\ln q), \quad a_{n,q} = a_n\ln^n q.$$

Численные расчёты в Mathcad позволяют сделать предположение, что $h(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Лемма 71. *Справедливо равенство* $h(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно показать, что целая функция $h(\alpha)$ ограничена по модулю на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для этого, прежде всего, установим, что $h(\alpha)$ периодична с периодом $2\pi i$.

Действительно,

$$h(\alpha) = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} - 2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1} - f(\alpha),$$

где

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha - 2n\pi i} + \frac{1}{\alpha + 2n\pi i}\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha - 2n\pi i}.$$

Далее имеем:

$$f(\alpha + 2\pi i) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha + 2\pi i - 2n\pi i} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha - 2n\pi i} - \frac{1}{\alpha - 2N\pi i} + \frac{1}{\alpha + 2(N+1)\pi i}\right) = f(\alpha).$$

И в силу периодичности e^α периодичность $h(\alpha)$ доказана.

Рассмотрим полосу $\alpha = \sigma + it$ с $-\infty < \sigma < \infty$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$.

Положим $g(\alpha) = 1 + \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}$ и

$$f_1(\alpha) = 2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = f(\alpha) - \frac{1}{\alpha},$$

тогда

$$h(\alpha) = g(\alpha) + f_1(\alpha), \quad h(0) = g(0) = \frac{1}{2}, \quad f_1(0) = 0.$$

В прямоугольнике $|\sigma| \leqslant 2\pi$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ функция $g(\alpha)$ непрерывна, следовательно ограниченна.

При $\sigma > 2\pi$ справедливы оценки

$$|g(\alpha)| = \left|1 + \frac{1}{e^{\sigma+it} - 1} - \frac{1}{\sigma + it}\right| \leqslant \frac{e^\sigma}{e^\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma} \to 1 \text{ при } \sigma \to \infty.$$

При $-\sigma < -2\pi$ справедливы оценки

$$|g(\alpha)| = \left|1 + \frac{1}{e^{-\sigma+it} - 1} - \frac{1}{-\sigma + it}\right| \leqslant \frac{1}{e^\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma} \to 0 \text{ при } \sigma \to \infty.$$

Отсюда следует, что $g(\alpha)$ ограниченно в рассматриваемой полосе.

Так как $f_1(-\alpha) = -f_1(\alpha)$, то достаточно рассмотреть полосу $\sigma \geqslant 0$, $-\pi \leqslant \leqslant t \leqslant \pi$. Имеем при $\sigma > \pi$:

$$|f_1(\alpha)| \leqslant 2(\sigma+\pi)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{dx}{\sigma^2+4\pi^2x^2} = 2(\sigma+\pi)\left(\left.\frac{\arctan\left(\frac{2\pi x}{\sigma}\right)}{2\pi\sigma}\right|_0^{\infty}\right) = \frac{\sigma+\pi}{2\sigma} \leqslant 1.$$

При $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ имеем:

$$|f_1(\alpha)| \leqslant 2(\sigma+\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2\pi^2} = \frac{\sigma+\pi}{12} < 1.$$

Отсюда следует, что $f_1(\alpha)$ ограниченно в рассматриваемой полосе.

Таким образом, целая периодическая функция ограничена в полосе основного периода, следовательно, она ограничена на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, что доказывает, что она константа: $h(\alpha) = \frac{1}{2}$. □

И так, теорема Миттаг–Леффлера для дзета-функции геометрической прогрессии записывается следующим образом:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha\ln q} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha\ln q}{\alpha^2\ln^2 q + 4n^2\pi^2}.$$

6.3. Дзета-функция геометрической прогрессии и гамма-функция Эйлера

Хорошо известна формула (см. [33], стр. 326)

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \alpha e^{\gamma\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}}. \tag{6.8}$$

Из неё следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)} = -\alpha^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2\ln^2 q}{4\pi^2n^2}\right)^{-1} = -\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)^2\Gamma\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right).$$

Но тогда из равенства (6.6) следует, что

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}\alpha\ln q}{4\pi^2}\Gamma\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right). \tag{6.9}$$

Из формулы (6.9) сразу следует, что дзета-функция геометрической прогрессии имеет полюса в точках $\alpha = \frac{2\pi ni}{\ln q}$, $(n \in \mathbb{Z})$, так как гамма функция имеет полюса в 0 и в отрицательных целых точках.

Также из формулы (6.9) сразу следует функциональное уравнение для дзета-функции геометрической прогрессии:

$$\zeta(M(q)|-\alpha) = \frac{q^{\frac{-\alpha}{2}}(-\alpha)\ln q}{4\pi^2}\Gamma\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right) = -\frac{\zeta(M(q)|\alpha)}{q^\alpha}. \tag{6.10}$$

Так как

$$\lim_{\sigma\to\infty}\zeta(M(q)|\alpha) = 1 \quad (\alpha = \sigma + it),$$

то

$$\lim_{\sigma\to\infty}\zeta(M(q)|-\alpha) = 0 \quad (\alpha = \sigma + it).$$

6.4. Дзета-функция моноида с конечным числом простых чисел

Пусть $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ — произвольный вектор с простыми $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Через $M(\vec{p})$ обозначим минимальный моноид натуральных чисел, образованный простыми числами $p_1, \ldots, p_n$, тогда, очевидно, что для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ справедливо равенство

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n}\zeta(M(p_\nu)|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}}. \tag{6.11}$$

Из равенств (6.11) и (6.6) следует, что дзета-функция $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ — мероморфная функция на комплексной α-плоскости, которая имеет следующее разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{p_\nu^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha\ln p_\nu}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2\ln^2 p_\nu}{4\pi^2 m^2}\right)^{-1}\right). \tag{6.12}$$

Если положить $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, $Q(\vec{p}) = \ln p_1 \dots \ln p_n$, то равенство (6.12) можно переписать в следующем виде:

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \frac{P(\vec{p})^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^n Q(\vec{p})} \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_\nu}{4\pi^2 m^2}\right)^{-1}. \qquad (6.13)$$

Будем через $S(A)$ обозначать множество полюсов дзета-функции

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 1)$$

произвольного множества натуральных чисел A. Если A — конечное множество, то $S(A) = \emptyset$.

Используя эти обозначения, получим равенство

$$S(M(\vec{p})) = \bigcup_{\nu=1}^{n} S(M(p_\nu)) = \left\{ \frac{2\pi k i}{\ln p_\nu} \middle| k \in \mathbb{Z},\ \nu = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ справедливо функциональное уравнение

$$\zeta(M(\vec{p})| - \alpha) = (-1)^n \frac{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)}{P(\vec{p})^\alpha}. \qquad (6.14)$$

Обозначим через $\zeta(A, B|\alpha)$ функцию отношения двух дзета-функций:

$$\zeta(A, B|\alpha) = \frac{\zeta(A|\alpha)}{\zeta(B|\alpha)}.$$

Рассмотрим $\zeta(\mathbb{N}, M(\vec{p})|\alpha)$. Эта функция в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ задается дзета-рядом

$$\zeta(\mathbb{N}, M(\vec{p})|\alpha) = \zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{p \in \mathbb{P} \setminus \vec{p}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1} = P(M^*(\vec{p})|\alpha),$$

где моноид натуральных чисел $M^*(\vec{p}) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})$ с однозначным разложением на простые множители состоит из натуральных чисел n взаимно простых с $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, а эйлерово произведение $P(M^*(\vec{p})|\alpha)$ состоит из сомножителей по всем простым числам отличным от $p_1, \dots, p_n$.

В следующих разделах мы изучим аналитическое продолжение дзета-функции

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = \zeta(\mathbb{N}, M(\vec{p})|\alpha).$$

Рассмотрим обратный ряд $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. По принципу вложенности из работы [196] получаем, что

$$\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n\in M(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}\right),$$

$$\zeta^*(M^*(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n\in M^*(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{p\neq p_\nu(\nu=1,\ldots,n)}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right),$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мёбиуса.

Функция $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ задается своим эйлеровым произведением на всей комплексной плоскости и является целой функцией, для которой множество нулей совпадает с множеством полюсов $S(M(\vec{p}))$ дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. Для неё справедливо функциональное уравнение

$$\zeta^*(M(\vec{p})|-\alpha) = (-1)^n P(\vec{p})^\alpha \zeta^*(M(\vec{p})|\alpha).$$

6.5. Множитель Римана, модифицированный множитель Римана

Необходимые сведения о множителе Римана приведены на стр. 67.

Теорема 46. *Для дзета-функции моноида $M^*(\vec{p})$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = M(\vec{p},\alpha)\zeta(M^*(\vec{p})|1-\alpha), \tag{6.15}$$

где

$$M(\vec{p},\alpha) = M(\alpha)\cdot\frac{M_1(\vec{p},\alpha)}{M_1(\vec{p},1-\alpha)},\quad M_1(\vec{p},\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}\right).$$

Доказательство. Действительно, при $\alpha=-\sigma+it$, $\sigma\geqslant 0$ имеем:

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)} = \frac{M(\alpha)\zeta(1-\alpha)}{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)} = \frac{M(\alpha)\zeta(M(\vec{p})|1-\alpha)}{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)}\zeta(M^*(\vec{p})|1-\alpha).$$

Отсюда следует, что

$$M(\vec{p},\alpha) = M(\alpha)\cdot\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}}{1-\frac{1}{p_\nu^{1-\alpha}}} = M(\alpha)\cdot\frac{M_1(\vec{p},\alpha)}{M_1(\vec{p},1-\alpha)},$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Из утверждения теоремы сразу следует, что

$$M(\vec{p},\alpha)M(\vec{p},1-\alpha)=1,\quad M\left(\vec{p},\frac{1}{2}\right)=1.$$

Другое важное следствие доказанной теоремы состоит в том, что дзета-функция моноида $M^*(\vec{p})$ имеет эйлеровское произведение, модифицированное функциональное уравнение и дополнительное множество *"тривиальных нулей"*, которое совпадает с множеством полюсов $S(M(\vec{p}))$ дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ моноида $M(\vec{p})$.

6.6. Обращение дзета-функции для основного моноида

Обращение дзета-функций для основного моноида будем осуществлять по схеме из работы [196].

Рассмотрим дзета-функцию $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$, заданную равенством

$$\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)=\sum_{n\in M_{3,1}(p_1,p_2)}\frac{1}{n^\alpha}\quad(\alpha=\sigma+it,\,\sigma>\sigma_{M_{3,1}(p_1,p_2)}),\tag{6.16}$$

где $\sigma_{M_{3,1}(p_1,p_2)}\leqslant 1$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда, и через $\zeta^*(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ обозначается обратный ряд, то есть ряд $\zeta^*(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)=$ $=\zeta^{-1}(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$.

Лемма 72. *Для произвольного числа $n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\in M_{3,1}(p_1,p_2)$ и числа $k(n)$ канонических представлений $n=q_1^{\lambda_1}q_2^{\lambda_2}q_3^{\lambda_3}$ справедливо равенство*

$$k(n)=\begin{cases}\frac{\min(\beta_1,\beta_2)+1}{2}, & \text{при } \beta_1\equiv\beta_2\equiv 1\pmod 2,\\ \frac{\min(\beta_1,\beta_2)+2}{2}, & \text{при } \beta_1\equiv\beta_2\equiv 0\pmod 2.\end{cases}$$

Доказательство. Действительно, так как $n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\in M_{3,1}(p_1,p_2)$, то

$$\beta_1+\beta_2\equiv 0\pmod 2.$$

Рассмотрим два случая.

Пусть $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 1 \pmod 2$, тогда $\lambda_2 = 1+\lambda$, $\beta_1 = 2\lambda_1+1+\lambda$, $\beta_2 = 2\lambda_3+1+\lambda$. Следовательно, $\lambda = 2\lambda'$, $0 \leqslant \lambda' \leqslant \frac{\min(\beta_1,\beta_2)-1}{2}$ и $k(n) = \frac{\min(\beta_1,\beta_2)+1}{2}$.

Пусть $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 0 \pmod 2$, тогда $\lambda_2 = 2\lambda$, $\beta_1 = 2\lambda_1 + 2\lambda$, $\beta_2 = 2\lambda_3 + 2\lambda$. Следовательно, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{\min(\beta_1,\beta_2)}{2}$ и $k(n) = \frac{\min(\beta_1,\beta_2)+2}{2}$. □

Ряд Дирихле для произведения Эйлера

$$P(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{\beta_1+\beta_2\equiv 0 \pmod 2} \frac{\left[\frac{\min(\beta_1,\beta_2)}{2}\right]+1}{\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\right)^{\alpha}}$$

абсолютно сходится при $\sigma > 0$ и является мажорирующим рядом для вещественных $\alpha > 0$ дзета-ряду $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$. Поэтому абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ будет $\sigma_{M_{3,1}(p_1,p_2)} = 0$. По теореме Ландау (см. [143], стр. 156) в точке $\alpha = \sigma_{M_{3,1}(p_1,p_2)} = 0$ будет особая точка дзета-функции $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$, хотя это и так очевидно в силу бесконечности моноида $M_{3,1}(p_1,p_2)$.

Лемма 73. *При $\sigma > 0$ справедливо представление*

$$\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^{\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \\ = \left(1+\frac{1}{q_2^{\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{q_1^{\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_3^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{n\in M_{3,1}(p_1,p_2)} \frac{1}{n^{\alpha}} = \sum_{\beta_1+\beta_2\equiv 0 \pmod 2} \frac{1}{\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\right)^{\alpha}} = \\ = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\right)^{\alpha}} + \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1+1}p_2^{2\beta_2+1}\right)^{\alpha}} = \\ = \left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^{\alpha}}\right)\left(\sum_{\beta_1=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1}\right)^{\alpha}}\right)\left(\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_2^{2\beta_2}\right)^{\alpha}}\right) = \\ = \left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^{\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \\ = \left(1+\frac{1}{q_2^{\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{q_1^{\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_3^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

□

Лемма 74. *При $\sigma > 0$ справедливо представление*

$$\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(\frac{1}{p_1^\alpha}+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = $$
$$= \left(\frac{1}{p_1^\alpha}+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{q_1^{\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_3^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{n\in A_{3,1}(p_1,p_2)}\frac{1}{n^\alpha} = \sum_{\beta_1+\beta_2\equiv 1 \pmod 2}\frac{1}{\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\right)^\alpha} =$$

$$= \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1+1}p_2^{2\beta_2}\right)^\alpha} + \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2+1}\right)^\alpha} =$$
$$= \left(\frac{1}{p_1^\alpha}+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(\sum_{\beta_1=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1}\right)^\alpha}\right)\left(\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_2^{2\beta_2}\right)^\alpha}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{p_1^\alpha}+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{p_1^\alpha}+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{q_1^{\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_3^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

□

Лемма 75. *При $\sigma > 0$ справедливо представление*

$$\zeta^*(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right) =$$
$$= \left(1+\frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{q_3^\alpha}\right) =$$
$$= 1-\frac{1}{q_2^\alpha}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k 2}{q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_1^\alpha q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_3^\alpha q_2^{k\alpha}}.$$

Доказательство. Действительно, из леммы 73 следует, что

$$\zeta^*(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right) =$$
$$= \left(1+\frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{q_3^\alpha}\right).$$

Далее имеем:

$$\left(1+\frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_2^{k\alpha}}, \quad q_1q_3 = q_2^2.$$

Поэтому

$$\zeta^*(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_1^{\alpha}q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_3^{\alpha}q_2^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_2^{(k+2)\alpha}} =$$
$$= 1 - \frac{1}{q_2^{\alpha}} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k 2}{q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_1^{\alpha}q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_3^{\alpha}q_2^{k\alpha}}.$$

□

Обозначим через $\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ отношение двух дзета-функций:

$$\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)\zeta^{-1}(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha).$$

Обозначим коэффициенты соответствующего ряда Дирихле через $y(n)$:

$$\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{y(n)}{n^{\alpha}}, \quad y(1)=1. \tag{6.17}$$

Теорема 47. *При $\sigma>0$ справедливо равенство*

$$\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1+\frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{p_2^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^{\alpha}}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y(n)}{n^{\alpha}},$$

где

$$y(1)=1, \quad y(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{при } n = p_1(p_1p_2)^k,\ k\geqslant 0,\\ (-1)^k, & \text{при } n = p_2(p_1p_2)^k,\ k\geqslant 0,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. Действительно, из леммы 75 следует, что

$$\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) =$$
$$= \left(1-\frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{\alpha}}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^{\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right) =$$
$$= \left(1+\frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{p_2^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^{\alpha}}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(p_1p_2)^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p_1^{\alpha}(p_1p_2)^{k\alpha}} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p_2^{\alpha}(p_1p_2)^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(p_1p_2)^{(k+1)\alpha}} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p_1^{\alpha}(p_1p_2)^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p_2^{\alpha}(p_1p_2)^{k\alpha}}.$$

□

6.7. Аналитическое продолжение и функциональное уравнение

Хорошо известна производящая функция для чисел Бернулли (см. [37], стр. 254–257):

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

из которой несложно получить следующее разложение мероморфной функции $\frac{1}{e^x-1}$ в ряд Лорана

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} x^n,$$

который абсолютно сходится при $0 < |x| < 2\pi$, и имеет полюс первого порядка при $x = 0$ с вычетом равным 1. Кроме того, так как $e^x = e^{x+2k\pi i}$ для любого целого k, то в каждой точке $x = 2k\pi i$ для любого целого k имеется полюс первого порядка с вычетом равным 1 и разложение в ряд Лорана

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x - 2k\pi i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (x - 2k\pi i)^n,$$

который абсолютно сходится при $0 < |x - 2k\pi i| < 2\pi$.

Подставляя $x = -\alpha \ln p$, получим, что дзета-функция геометрической прогрессии $M(p)$ является мероморфной функцией на всей комплексной α-плоскости с рядом Лорана

$$\zeta(M(p)|\alpha) = \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha \ln p} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (-\alpha \ln p)^n = \frac{1}{\alpha \ln p} + \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (-\alpha \ln p)^n,$$

который абсолютно сходится при $0 < |\alpha| < \frac{2\pi}{\ln p}$, и имеет полюс первого порядка при $\alpha = 0$ с вычетом равным $\frac{1}{\ln p}$.

Другой способ получения ряда Лорана связан с подстановкой $x = \alpha \ln p$. Действительно,

$$\zeta(M(p)|\alpha) = 1 + \frac{1}{p^\alpha - 1} = 1 + \frac{1}{\alpha \ln p} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (\alpha \ln p)^n =$$

$$= \frac{1}{\alpha \ln p} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (\alpha \ln p)^n.$$

Эти два ряда Лорана совпадают, так как все нечетные числа Бернулли начиная с третьего номера равны нулю, и поэтому

$$\zeta(M(p)|\alpha) = \frac{1}{\alpha\ln p} + \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}(\alpha\ln p)^{2n+1}.$$

Кроме того, так как $p^{\alpha} = p^{\alpha+\frac{2k\pi}{\ln p}i}$ для любого целого k, то в каждой точке $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p}i$ для любого целого k имеется полюс первого порядка с вычетом равным $\frac{1}{\ln p}$ и разложение в ряд Лорана

$$\zeta(M(p)|\alpha) = \frac{1}{\ln p\left(\alpha - \frac{2k\pi}{\ln p}i\right)} + \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n+2}(\ln p)^{2n+1}}{(2n+2)!}\left(\alpha - \frac{2k\pi}{\ln p}i\right)^{2n+1},$$

который абсолютно сходится при $0 < \left|\alpha - \frac{2k\pi}{\ln p}i\right| < \frac{2\pi}{\ln p}$.

Конечное эйлерово произведение:

$$P(M(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1-\frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{\alpha}}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p_1^{\alpha}-1} + \frac{1}{p_2^{\alpha}-1} + \frac{1}{(p_1^{\alpha}-1)(p_2^{\alpha}-1)}$$

является мероморфной функцией на всей комплексной α-плоскости кроме точки $\alpha = 0$, в которой у неё полюс второго порядка, и точек $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p_1}i$, $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p_2}i$, $k \neq 0$, в которых полюса первого порядка.

Так как при $0 < |\alpha| < \frac{2\pi}{\ln p_2}$ оба ряда Лорана

$$\left(1-\frac{1}{p_{\nu}^{\alpha}}\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha\ln p_{\nu}} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(\alpha\ln p_{\nu})^{n} \quad \nu = 1,2$$

абсолютно сходятся, то перемножая их, находим

$$\begin{aligned}
P(M(p_1,p_2)|\alpha) &= \left(1-\frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{\alpha}}\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha^2\ln p_1\ln p_2} + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln p_1}+\frac{1}{\ln p_2}\right)\frac{1}{\alpha} + \\
&+ \frac{\ln p_2}{\ln p_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(\alpha\ln p_2)^{n-1} + \frac{\ln p_1}{\ln p_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(\alpha\ln p_1)^{n-1} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\alpha^{n}\left((\ln p_1)^{n}+(\ln p_2)^{n}\right) + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(\ln p_1)^{k}\frac{B_{n-k+1}}{(n-k+1)!}(\ln p_2)^{n-k}\right)\alpha^{n}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для вычета в точке $\alpha = 0$ справедливо равенство

$$\operatorname*{Res}_{0} P(M(p_1, p_2)|\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln p_1} + \frac{1}{\ln p_2}\right).$$

Так как логарифмы двух простых чисел линейно независимы, то

$$\zeta\left(M(p_\nu)\left|\frac{2k\pi}{\ln p_\mu}i\right.\right) = \left(1 - \frac{1}{p_\nu^{\frac{2k\pi}{\ln p_\mu}i}}\right)^{-1}$$

определено и отлично от 0 при $\nu \neq \mu$, $k \neq 0$. Таким образом, дзета-функция $\zeta(M(p_1)|\alpha)$ имеет в точке $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p_1}i$ порядок -1 с весом $\frac{1}{\ln p_1}$, а дзета-функция $\zeta(M(p_2)|\alpha)$ порядок 0 с весом $\left(1 - \frac{1}{p_2^{\frac{2k\pi}{\ln p_1}i}}\right)^{-1}$. Поэтому по лемме 76 их произведение в этой точке имеет порядок -1 с весом $\frac{1}{\ln p_1}\left(1 - \frac{1}{p_2^{\frac{2k\pi}{\ln p_1}i}}\right)^{-1}$. Аналогичное утверждение справедливо для точек $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p_2}i$ с $k \neq 0$. Поэтому для вычета дзета-функции $\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)$ в точке $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p_\nu}i$, $k \neq 0$, $\nu = 1, 2$ справедливо равенство

$$\operatorname*{Res}_{\frac{2k\pi}{\ln p_\nu}i} \zeta(M(p_1, p_2)|\alpha) = \frac{1}{\ln p_\nu}\left(1 - \frac{1}{p_\mu^{\frac{2k\pi}{\ln p_\nu}i}}\right)^{-1}, \quad \mu = 2 - \left[\frac{\nu}{2}\right].$$

В работе [197] доказано функциональное уравнение для дзета-функции $\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)$, которое имеет вид

$$\zeta(M(p_1, p_2)| - \alpha) = \frac{\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)}{(p_1 p_2)^\alpha}.$$

Из леммы 43 следует, что дзета-функция $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ — мероморфная функция на всей комплексной α-плоскости кроме точки $\alpha = 0$, где у неё полюс второго порядка, и точек $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln q_\nu}i$, $k \neq 0$, $\nu = 1, 3$, где полюса первого порядка.

Также из леммы 43 несложно найти функциональное уравнение

$$\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)| - \alpha) = \frac{q_2^\alpha}{(q_1 q_3)^\alpha}\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \frac{\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)}{(p_1 p_2)^\alpha}.$$

Из леммы 44 мы находим функциональное уравнение для дзета-функции основного множества:

$$\zeta(A_{3,1}(p_1, p_2)| - \alpha) = \frac{\zeta(A_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)}{(p_1 p_2)^\alpha}.$$

Из теоремы 47 находим очень простое функциональное уравнение для дзета-функции $\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$, из которого следует четность этой дзета-функции:

$$\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|-\alpha)=\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha).$$

6.8. Моноиды степеней, Эйлера и единичные моноиды по модулю

Наиболее простым по своей структуре можно считать моноид M_k — моноид k-х степеней:

$$M_k=\left\{n^k\,|n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Это моноид с однозначным разложением на простые элементы и множество простых элементов $P(M_k)$ состоит из псевдопростых чисел:

$$P(M_k)=\{p^k\,|\,p\in\mathbb{P}\}.$$

Поэтому для дзета-функции $\zeta(M_k|\alpha)$ справедливы равенства

$$\zeta(M_k|\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^k)^\alpha}=P(M_k|\alpha)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{(p^k)^\alpha}\right)^{-1}=\zeta(k\alpha),$$

$$\alpha=\sigma+it,\quad \sigma>\frac{1}{k}.$$

Пусть q — натуральное число больше 2. Для любого натурального числа n с каноническим разложением $n=p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}$, где простые $p_1<\dots<p_k$, его эйлеровой компонентой по модулю q назовем число $E_q(n)$, а единичным делителем по модулю q — число $U_q(n)$, заданные равенствами

$$E_q(n)=\prod_{p_\nu\not\equiv1\pmod q,\,(p_\nu,q)=1}p_\nu^{\varphi(q)\left[\frac{\beta_\nu}{\varphi(q)}\right]},\quad U_q(n)=\prod_{p_\nu\equiv1\pmod q}p_\nu^{\beta_\nu}.$$

Через n_q^* будем обозначать мультипликативное дополнение эйлеровой компоненты до числа n: $n_q^*=\frac{n}{E_q(n)}$, а через n_q^{**} — мультипликативное дополнение произведения эйлеровой компоненты на единичный делитель до числа n: $n_q^{**}=\frac{n}{E_q(n)U_q(n)}$. Очевидно, что выполняются сравнения

$$E_q(n)\equiv U_q(n)\equiv1\pmod q,\quad n\equiv n_q^*\equiv n_q^{**}\pmod q.$$

Назовём *моноидом Эйлера по модулю q* множество E_q, заданное равенством

$$E_q = \left\{ n^{\varphi(q)} \,\middle|\, n = \prod_{p|n} p^{\beta_p},\ p \not\equiv 1 \pmod q,\ (p,q)=1 \right\}.$$

Назовём *единичным моноидом по модулю q* множество U_q, заданное равенством

$$U_q = \left\{ n \,\middle|\, n = \prod_{p|n} p^{\beta_p},\ p \equiv 1 \pmod q \right\}.$$

Моноиды E_q и U_q имеют однозначное разложение на простые элементы. Для единичного моноида по модулю q множество простых элементов $P(U_q)$ состоит из простых чисел:

$$P(U_q) = \{p \,|\, p \equiv 1 \pmod q\}.$$

Это бесконечное множество простых чисел согласно теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Поэтому

$$\zeta(U_q|\alpha) = P(U_q|\alpha) = \prod_{p\equiv 1 \pmod q} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

Для моноида Эйлера по модулю q множество простых элементов $P(E_q)$ состоит из псевдопростых чисел:

$$P(E_q) = \{p^{\varphi(q)} \,|\, p \not\equiv 1 \pmod q,\ (p,q)=1\}.$$

Это бесконечное множество псевдопростых чисел согласно теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Поэтому

$$\zeta(E_q|\alpha) = P(E_q|\alpha) = \prod_{p\not\equiv 1 \pmod q,\, (p,q)=1} \left(1 - \frac{1}{p^{\varphi(q)\alpha}}\right)^{-1} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \frac{1}{\varphi(q)}.$$

6.9. Эффект Дэвенпорта — Хейльбронна

В знаменитой работе Г. Дэвенпорта и Г. Хейльброна [155] было установлено, что дзета-функция Гурвица $\zeta(s,a)$ для рациональных a, $0 < a < 1$, $a \neq \frac{1}{2}$ имеет бесконечно много нулей в полуплоскости абсолютной сходимости определяющего ряда Дирихле. Отсюда сразу следует, что если $a = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q > 2$, то дзета-функция класса вычетов по модулю q

$$\zeta(p,q|\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(nq+p)^{\alpha}}\quad \alpha=\sigma+it,\quad \sigma>1$$

имеет бесконечно много нулей в полуплоскости абсолютной сходимости дзета-ряда.

Таким образом, суть эффекта Дэвенпорта — Хейльбронна состоит в том, что дзета-функция Римана разбивается на сумму слагаемых

$$\zeta(\alpha)=\sum_{p=1}^{q}\zeta(p,q|\alpha),$$

часть из которых имеет нули справа от абсциссы абсолютной сходимости $\sigma=1$, а дзета-функция Римана в этой области не имеет нулей.

Как следует из конечного представления дзета-функции $\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)$ моноида $M(p_1,p_2)$ натуральных чисел в виде эйлерова произведения

$$\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)=\left(1-\frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{\alpha}}\right)^{-1},$$

она не имеет нулей во всей комплексной α-плоскости.

Согласно определению справедливо равенство

$$\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)=\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)+\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha).$$

Теорема 48. *Дзета-функция $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ обращается в ноль в точках $\alpha=\frac{\pi(1+2k)}{\ln(p_1p_2)}i$, где k — любое целое число.*

Дзета-функция $\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ обращается в ноль в точках $\alpha=\frac{\pi(1+2k)}{\ln p_2-\ln p_1}i$, где k — любое целое число.

Доказательство. Действительно, согласно лемме 43 имеем:

$$\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)=\left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^{\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1}.$$

Второй и третий сомножители не обращаются в ноль во всей комплексной α-плоскости, а первый сомножитель обращается в ноль в точках $\alpha=\frac{\pi(1+2k)}{\ln(p_1p_2)}i$, где k — любое целое число. Так как эти нули не совпадают с полюсами второго и третьего сомножителей, то они остаются и нулями дзета-функции $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$.

Согласно лемме 44 имеем:

$$\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(\frac{1}{p_1^\alpha} + \frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1}.$$

Второй и третий сомножители не обращаются в ноль во всей комплексной α-плоскости, а первый сомножитель обращается в ноль в точках $\alpha = \frac{\pi(1+2k)}{\ln p_2 - \ln p_1} i$, где k — любое целое число. Так как эти нули не совпадают с полюсами второго и третьего сомножителей, то они остаются и нулями дзета-функции $\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что эффект Дэвенпорта — Хейльбронна имеет место и в этом случае, но его характер несколько изменился, так как нули слагаемых, выделяемых классами вычетов по модулю 3, появляются на абсциссе абсолютной сходимости дзета-функции основного моноида.

Другая ситуация возникает в случае моноида Эйлера E_q по модулю q и в случае единичного моноида U_q по модулю q. Дело в том, что все элементы этих моноидов принадлежат одному классу вычетов по модулю q, а наличие произведения Эйлера для дзета-функции этих моноидов исключает наличие нулей в области абсолютной сходимости.

Вопрос о наличии эффекта Дэвенпорта — Хейльбронна для моноида k-х степеней требует отдельного рассмотрения, так как здесь возможны разные постановки вопросов.

6.10. Дзета-функция для экспоненциальной последовательности простых чисел

В работе [148] дано следующее определение экспоненциальной последовательности простых чисел и доказана теорема.

Пусть $q \geqslant 2$ *— произвольное натуральное число, тогда бесконечную последовательность простых чисел* $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ *будем называть экспоненциальной, если выполняются соотношения* $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым, (см. [143]) для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел.

Теорема 49. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

Естественно возникает вопрос о возможности аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$. Как будет показано дальше, ответ на этот вопрос будет, скорее всего, отрицательный. Отсюда будет следовать и отрицательный ответ на вопрос об аналитическом продолжении дзета-функции $\zeta(M^*(PE))|\alpha) = \zeta(\mathbb{N}, M(PE))|\alpha)$ моноида $M^*(PE) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(PE)$ с однозначным разложением на простые множители, который состоит из натуральных чисел n взаимно простых с простыми из экспоненциального множества простых PE, а эйлерово произведение $P(M^*(PE)|\alpha)$ состоит из сомножителей по всем простым числам отличным от простых из PE.

Для решения поставленной задачи рассмотрим для любого моноида $M(\vec{p})$ две аналитические функции:

$$\zeta^-(M(\vec{p})|\alpha) = \zeta(M(\vec{p})|\alpha) \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma \leqslant 0), \tag{6.18}$$

$$\zeta^+(M(\vec{p})|\alpha) = \zeta(M(\vec{p})|\alpha) \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma \geqslant 0). \tag{6.19}$$

Пусть $\mathbb{P}_1$ — произвольное бесконечное подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$, $p_1 < < p_2 < p_3 < \ldots$ — естественная нумерация всех простых чисел из $\mathbb{P}_1$ и $\vec{p}_n = (p_1, \ldots, p_n)$ для любого натурального n.

Теорема 50. *Для любого $\mathbb{P}_1$ справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^-(M(\vec{p}_n)|\alpha) = 0 \quad \textit{при } \sigma < 0, \tag{6.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^+(M(\vec{p}_n)|\alpha) = \zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha) \quad \textit{при } \sigma > \sigma_{\mathbb{P}_1}, \tag{6.21}$$

где $\sigma_{\mathbb{P}_1} \leqslant 1$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$.

При этом для любой полуплоскости с $\sigma \leqslant \sigma_0 < 0$ сходимость в (6.20) равномерная, а в (6.21) эта сходимость равномерная для любой полуплоскости с $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma_{\mathbb{P}_1}$.

Доказательство. Действительно, предельное соотношение (6.21) и соответствующая равномерная сходимость доказывается аналогично случаю дзета-функции Римана (см. [133], стр. 7).

Для доказательства предельного соотношения (6.20) заметим, что согласно функциональному уравнению (6.14) при $\sigma < 0$ имеем:

$$|\zeta(M(\vec{p_n})|\alpha)| = \frac{|\zeta(M(\vec{p_n})| - \alpha)|}{|P(\vec{p_n})^{-\alpha}|} \leqslant \frac{\zeta(M(\vec{p_n})| - \sigma)}{P(\vec{p_n})^{-\sigma}} \leqslant \frac{\zeta(M(\vec{p_n})| - \sigma_0)}{P(\vec{p_n})^{-\sigma_0}} \to 0$$

при $n \to \infty$, так как $P(\vec{p_n}) \to \infty$ при $n \to \infty$, $\sigma_0 < 0$ и $\zeta(M(\vec{p_n})| - \sigma_0) \leqslant \zeta(-\sigma_0)$. Тем самым теорема полностью доказана. □

Следствие 2. *Для любого бесконечного множества простых $\mathbb{P}_1$ не существует аналитической функции равной*

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(M(\vec{p_n})|\alpha)$$

на всей комплексной плоскости.

Доказательство. Действительно, пусть такая функция $f(\alpha)$ существует, тогда $f(\alpha) \equiv 0$ при $\sigma < 0$, но тогда она тождественный ноль на всей плоскости, что противоречит тому, что при $\sigma > \sigma_{\mathbb{P}_1}$ она должна быть равна дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$. □

Аналогичное утверждение справедливо для $\sigma > \sigma_{\mathbb{P}_1}$

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^*(M(\vec{p}_n)|\alpha),$$

так как в правой полуплоскости предел равен $\zeta^*(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$, а в левой полуплоскости $\sigma < 0$ каждая точка будет особой точкой предельной функции.

Объяснение данного явления, по-видимому, следующее. Если рассмотреть последовательность дзета-функций $\zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$ мероморфных функций на комплексной α-плоскости, то мы имеем вложенную последовательность множеств полюсов этих функций:

$$S(M(\vec{p}_1)) \subset S(M(\vec{p}_2)) \subset \ldots \subset S(M(\vec{p}_n)) \subset \ldots,$$

которая сходится к множеству $S(M(\mathbb{P}_1))$, заданному равенством

$$S(M(\mathbb{P}_1)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(M(\vec{p}_n)).$$

Нетрудно видеть, что множество $S(M(\mathbb{P}_1))$ всюду плотно на мнимой оси, поэтому если доказать, что $S(M(\mathbb{P}_1))$ является множеством особых точек, то оно будет выполнять функции заградительного ряда для аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$, когда $\sigma_{\mathbb{P}_1} = 0$.

Для случая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$ это заведомо не так, так как $\sigma_{\mathbb{P}} = 1$ и на прямой $\sigma = 1$ имеется только один полюс дзета-функции Римана. Предыдущее обсуждение позволяет сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. *Для любого экспоненциального множества PE простых чисел множество $S(M(PE))$ является множеством особых точек дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ моноида $M(PE)$ и образует заградительный ряд для существования аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$.*

Аналогично, множество $S(M(PE))$ является множеством нулей функции $\zeta^*(M(PE)|\alpha)$ и образует заградительный ряд для существования аналитического продолжения дзета-функции $\zeta^*(M(PE)|\alpha)$ в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$.

6.11. Вес, порядок и радиус в точке

Рассмотрим функцию $f(\alpha)$ от комплексного аргумента в окрестности точки α_0 и её разложение в ряд Лорана:

$$f(\alpha) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu (\alpha - \alpha_0)^\nu, \quad c_n \neq 0.$$

Назовём *порядком* и *весом в точке* α_0 величины n и c_n соответственно. Эти два функционала будем обозначать следующим образом:

$$\operatorname{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) = n, \quad \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha) = c_n.$$

Нетрудно видеть, что если $n > 0$, то порядок функции $f(\alpha)$ в точке α_0 равен порядку нуля в этой точке. Если порядок нулевой, то вес в точке α_0 равен значению функции в этой точке. Наконец, если порядок отрицательный, то он со знаком минус равен порядку полюса в точке α_0.

Лемма 76. *Функционал порядка аддитивен:*

$$\mathrm{ord}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = \mathrm{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) + \mathrm{ord}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

Функционал веса мультипликативен:

$$\mathop{\mathrm{Wei}}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = \mathop{\mathrm{Wei}}_{\alpha_0} f(\alpha) \cdot \mathop{\mathrm{Wei}}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

Доказательство. Действительно, пусть функции $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ раскладываются в ряды Лорана:

$$f(\alpha) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu(\alpha - \alpha_0)^\nu, \quad c_n \neq 0, \qquad g(\alpha) = \sum_{\mu=m}^{\infty} d_\mu(\alpha - \alpha_0)^\mu, \quad d_m \neq 0,$$

тогда

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{\nu=n+m}^{\infty} \left(\sum_{\mu=m}^{\nu-n} c_{\nu-\mu} d_\mu \right) (\alpha - \alpha_0)^\nu, \quad c_n d_m \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{ord}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = n + m = \mathrm{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) + \mathrm{ord}_{\alpha_0} g(\alpha),$$
$$\mathop{\mathrm{Wei}}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = c_n d_m = \mathop{\mathrm{Wei}}_{\alpha_0} f(\alpha) \cdot \mathop{\mathrm{Wei}}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

□

Обозначим через $\mathrm{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$ радиус сходимости ряда Лорана для функции $f(\alpha)$ в точке α_0. Таким образом, если порядок функции $f(\alpha)$ в точке α_0 неотрицательный, то $\mathrm{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$ — радиус сходимости соответствующего степенного ряда в точке α_0, а если он отрицательный, то ряд Лорана сходится при $0 < |\alpha - \alpha_0| < \mathrm{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$ и расходится при $|\alpha - \alpha_0| > \mathrm{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$.

Из леммы 76 вытекают следствия.

Следствие 3. *Справедливы равенства*

$$\mathrm{ord}_{\alpha_0} \frac{1}{f(\alpha)} = -\mathrm{ord}_{\alpha_0} f(\alpha), \qquad \mathop{\mathrm{Wei}}_{\alpha_0} \frac{1}{f(\alpha)} = \frac{1}{\mathrm{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha)}.$$

Доказательство. Действительно, если положить в лемме 76 $g(\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)}$ и воспользоваться очевидными равенствами $\operatorname{ord}_{\alpha_0} 1 = 0$, $\operatorname{Wei}_{\alpha_0} 1 = 1$, то утверждение следствия следует из леммы 76. □

Следствие 4. *Если* $\operatorname{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) + \operatorname{ord}_{\alpha_0} g(\alpha) = 0$, *то*

$$f(\alpha_0)g(\alpha_0) = \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha) \cdot \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

Доказательство. Действительно, если порядки функций $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ в точке α_0 нулевые, то их значения в этой точке равны весам и утверждение леммы справедливо. Если один порядок положительный, то это порядок нуля, а вторая функция имеет полюс в этой точке того же порядка. Поэтому в произведении он гасится нулём, а произведение весов будет значением произведения в точке. □

6.12. Область голоморфности дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых

В работе [195] была введена экспоненциальная последовательность простых чисел PE. Дзета-функция моноида $M(PE)$ обладает эйлеровым произведением:

$$\zeta(M(PE)|\alpha) = \sum_{n \in M(PE)} \frac{1}{n^\alpha} = P(M(PE)|\alpha) = \prod_{p \in PE} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1},$$

$$\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 0.$$

В работе [197] была высказана гипотеза, что дзета-функцию $\zeta(M(PE)|\alpha)$ нельзя продолжить в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$. Другими словами, её область голоморфности совпадает с правой полуплоскостью $\sigma > 0$.

Лемма 77. *Пусть* $\alpha_0 = \sigma_0 + it_0$ *— произвольная точка в правой полуплоскости* $\sigma_0 > 0$, *тогда порядок* $\operatorname{ord}_{\alpha_0} \zeta(M(PE)|\alpha) = 0$ *и радиус в этой точке* $\operatorname{rad}_{\alpha_0} \zeta(M(PE)|\alpha) = \sigma_0$.

Доказательство. Из наличия эйлерова произведения следует, что справедливо равенство

$$\zeta(M(PE)|\alpha) = \prod_{p\in PE} \zeta(M(p)|\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 0.$$

Очевидно, что для любого $p \in PE$ справедливы равенства

$$\operatorname{ord}_{\alpha_0} \zeta(M(p)|\alpha) = 0, \quad \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} \zeta(M(p)|\alpha) = \zeta(M(p)|\alpha_0),$$
$$\operatorname{rad}_{\alpha_0} \zeta(M(p)|\alpha) = \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2},$$

где $\tau_p = \min_{k\in\mathbb{Z}} \left| t_0 - \frac{2k\pi}{\ln p} \right|$ задает расстояние до ближайшего полюса $\frac{2k\pi}{\ln p} i$ дзета-функции $\zeta(M(p)|\alpha)$.

Нетрудно видеть, что круг $K(\alpha_0, \sigma_0) = \{\alpha \,|\, |\alpha - \alpha_0| < \sigma_0\}$ является пересечением всех кругов $K\left(\alpha_0, \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2}\right) = \{\alpha \,|\, |\alpha - \alpha_0| < \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2}\}$, когда p пробегает всё множество PE:

$$K(\alpha_0, \sigma_0) = \bigcap_{p\in PE} K\left(\alpha_0, \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2}\right).$$

Как известно (см. [38], стр. 59), на окружности круга сходимости всегда есть по меньшей мере одна особая точка. Так как все точки окружности круга $K(\alpha_0, \sigma_0)$ кроме точки касания с мнимой осью принадлежат области абсолютной сходимости дзета-ряда $\zeta(M(PE)|\alpha)$, то особой точкой является точка касания $\alpha = it_0$. Лемма полностью доказана. □

Теорема 51. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей леммы следует, что все точки мнимой оси являются особыми точками дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$. Отсюда следует, что мнимая ось целиком является особой линией для дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$. А это означает, что областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$. □

Доказанную теорему можно перенести на другой класс моноидов натуральных чисел.

Пусть Q — натуральное число и моноид $M = M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых чисел PE. Определим моноид M_{-Q} как множество натуральных чисел, не делящихся на простые p из $P(M)$ и больших Q. Если определить моноид M_{+Q} как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше Q, то $\mathbb{N} = M_{-Q} \cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$. Последнее равенство верно при $\sigma > 0$.

Лемма 78. *Пусть $\alpha_0 = \sigma_0 + it_0$ — произвольная точка в правой полуплоскости $\sigma_0 > 0$, тогда порядок* $\mathrm{ord}_{\alpha_0} \zeta(M_{+Q}|\alpha) = 0$ *и радиус в этой точке* $\mathrm{rad}_{\alpha_0} \zeta(M_{+Q}|\alpha) = \sigma_0$.

Доказательство. Дословно повторяя доказательство леммы 77, получим доказываемое утверждение, так как удаление конечного числа простых из экспоненциальной последовательности простых оставляет её экспоненциальной последовательностью. □

Теорема 52. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M_{+Q}|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Доказательство. Утверждение следует из предыдущей теоремы, так как для любой экспоненциальной последовательности простых PE моноид M_{+Q} задается той-же последовательность простых, из которой удалено конечное число начальных членов. □

Теорема 53. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M_{-Q}|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Доказательство. Из равенства

$$\zeta(M_{-Q}|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M_{+Q}|\alpha)}$$

следует, что дзета-функция $\zeta(M_{-Q}|\alpha)$ — аналитическая функция в α-полуплоскости $\sigma > 0$, кроме точки $\alpha = 1$, где у неё полюс первого порядка. Если бы, её область голоморфности была шире чем данная полуплоскость, то из равенства

$$\zeta(M_{+Q}|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M_{Q}|\alpha)}$$

вытекало бы противоречие с предыдущей теоремой. □

6.13. Ряды Дирихле, сходящиеся на всей комплексной плоскости

В работе [205] показано, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел, основы которой и были в ней изложены. Из анализа предыдущих статей видно, что особое место в данной теории занимают те ряды Дирихле моноидов натуральных чисел, которые имеют разложение в произведение Эйлера.

В настоящем и нескольких последующих разделах данной главы центральное место занимает изучение произведения Эйлера вида

$$P_{\pi}(\alpha) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1}. \tag{6.22}$$

Кроме этого будут изучены и другие обобщённые произведения Эйлера для моноидов натуральных чисел.

С произведением Эйлера (6.22) тесно связан следующий ряд Дирихле

$$\zeta_{\pi}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}}, \tag{6.23}$$

который, как будет показано далее, задает голоморфную функцию на всей комплексной плоскости.

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ — произвольный моноид натуральных чисел. Рассмотрим множество $P(M)$ — простых элементов из M. Если $P(M) \subset \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то моноид M будет моноид с однозначным разложением на простые множители. В работе [196] описан общий вид моноидов с однозначным разложением на простые множители.

В работе [195] показано, что равенство эйлерова произведения $P(M|\alpha)$ и дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha}} = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^{\alpha}}\right)^{-1} = P(M|\alpha) \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M, \tag{6.24}$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$. Как хорошо известно [143, 147], для любого моноида $\sigma_M \leqslant 1$. Если $M \neq \{1\}$ не является тривиальным моноидом, то он содержит бесконечно много элементов и, следовательно, $\sigma_M \geqslant 0$.

В работе [195] показано, что для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.

В работе [198] показано, что областью голоморфности дзета-функции моноида $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$. Таким образом, в данном случае $\sigma_M = 0$.

В случае, когда нет однозначности разложения на простые множители

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}, \tag{6.25}$$

где $k(x)$ — количество различных канонических представлений числа x и каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел называется представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \ldots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \ldots < r_k, \quad r_1, \ldots, r_k \in P(M).$$

В работе [205] было показано, что ряд Дирихле $f_1(M|\alpha) \in \mathbb{D}(M)_\mathbb{Q}$, заданный равенством

$$f_1(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha n!},$$

будет сходиться для любого комплексного α. Так как $\mathbb{D}(M)_\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$ для любого числового поля $\mathbb{K}$, то для любого числового поля $\mathbb{K}$ имеем: $\mathbb{DC}(M)_\mathbb{K}$ — множество рядов Дирихле, сходящихся для любого комплексного α, непусто.

Рассмотрим ряд Дирихле $f_\pi(M|\alpha) \in \mathbb{D}(M)_\mathbb{Q}$, заданный равенством

$$f_\pi(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha + \pi(n)}}.$$

Теорема 54. *Ряд Дирихле $f_\pi(M|\alpha) \in \mathbb{D}(M)_\mathbb{Q}$ сходится для любого комплексного α: $f_\pi(M|\alpha) \in \mathbb{DC}(M)_\mathbb{K}$.*

Доказательство. 24 мая 1848 г. П. Л. Чебышёв представил в Санкт-Петербургскую Академию наук мемуар “Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины” (Полн. собр. соч., т. I, с. 173–190), с которого началась современная теория распределения простых чисел.

Во втором мемуаре он доказал оценки

$$(0,92\ldots)\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant (1,105\ldots)\frac{x}{\ln x}.$$

Обозначим через $c_1 = 0,92\ldots$ и $c_2 = 1,105\ldots$ константы из неравенств Чебышёва для функции $\pi(x)$. Заметим, что конечная разность $\Delta\pi(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$ является на множестве натуральных чисел характеристической функцией множества простых чисел.

Из оценок П. Л. Чебышёва следует, что

$$\frac{1}{e^{\alpha \ln n + c_2 n}} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}} \leqslant \frac{1}{e^{\alpha \ln n + c_1 n}}.$$

Для любого $\alpha = \sigma + it$ мажорирующим рядом для $f_\pi(M|\alpha)$ будет ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma e^{c_1 n}},$$

который сходится по интегральному признаку Коши, так как сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\sigma e^{c_1 x}}, \quad \int\limits_{x_\sigma}^\infty \frac{dx}{x^\sigma e^{c_1 x}} \leqslant \int\limits_{x_\sigma}^\infty \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{2}{e^{\frac{x_\sigma}{2}}},$$

где $x_\sigma \geqslant 1$ определяется из условия $x > -\frac{2\sigma \ln x}{2c_1 - 1}$ при $x > x_\sigma$. $\square$

Рассмотрим множество $\mathbb{D}_\pi(M)$ — произвольных рядов Дирихле вида

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^{\alpha+\pi(n)}} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geqslant \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости. Как хорошо известно [143, 147], для любых рядов Дирихле справедливо неравенство $\sigma_f \leqslant \sigma_f^* + 1$.

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле. Таким образом, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Если все коэффициенты $a(n) \in \mathbb{K}$, то множество всех таких рядов Дирихле будем обозначать через $\mathbb{D}_\pi(M)_\mathbb{K}$ и оно является бесконечномерным линейным функциональным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Выделим подпространство $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ условием $\sup_{n\in M}|a(n)|<\infty$. Из теоремы 54 сразу следует, что $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}\subset\mathbb{DC}(M)_\mathbb{K}$.

На $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ зададим норму

$$\|f(\alpha)\|=\sup_{n\in M}|a(n)|.$$

Относительно заданной нормы $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ является несепарабельным пространством. Оно будет банаховым, если поле $\mathbb{K}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{Q}$ относительно нормы, заданной абсолютной величиной числа из поля $\mathbb{K}$. Так как отсюда следует, что либо $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, либо $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, то $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ — банахово пространство, только для $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, либо $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Нетрудно понять, что пространство $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ над полем $\mathbb{K}$ не является алгеброй, так как нет замкнутости относительно произведения рядов Дирихле. Действительно, если перемножить два ряда Дирихле из $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$:

$$f(\alpha)=\sum_{n\in M}\frac{a(n)}{n^{\alpha+\pi(n)}},\quad g(\alpha)=\sum_{n\in M}\frac{b(n)}{n^{\alpha+\pi(n)}},$$

то получим

$$f(\alpha)g(\alpha)=\sum_{n\in M}\frac{c(n)}{n^{\alpha+\pi(n)}},$$

$$c(n)=n^{\pi(n)}\sum_{m|n,\,m\in M}\frac{a(m)b\left(\frac{n}{m}\right)}{m^{\pi(m)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\pi\left(\frac{n}{m}\right)}}=$$

$$=\sum_{m|n,\,m\in M}a(m)b\left(\frac{n}{m}\right)m^{\pi(n)-\pi(m)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\pi(n)-\pi\left(\frac{n}{m}\right)}.$$

Таким образом, ограниченность коэффициентов $c(n)$, вообще говоря, отсутствует.

Рассмотрим геометрическую прогрессию $M(p)$:

$$M(p)=\{1,p,p^2,\ldots,p^n,\ldots\}$$

и ряд Дирихле из $\mathbb{D}_\pi(M(p))$

$$f_\pi(M(p),a|\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{p^{n(\alpha+\pi(p))}}=\left(1-\frac{a}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1},\quad |a|<\left|p^{\alpha+\pi(p)}\right|.$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$f_\pi(M(p),a|\alpha) = \left(1-\frac{a}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1} = \left(1-\frac{1}{p^{\alpha+\pi(p)-\frac{\ln a}{\ln p}}}\right)^{-1} =$$
$$= \zeta\left(M(p)\middle|\alpha+\pi(p)-\frac{\ln a}{\ln p}\right). \tag{6.26}$$

Отсюда следует, что ряд Дирихле $f_\pi(M(p),a|\alpha)$ аналитически продолжается и задаёт мероморфную функцию на всей комплексной плоскости, у которой бесконечное множество полюсов первого порядка с одним и тем же вычетом $\frac{1}{\ln p}$ в точках $\alpha_0 = -\pi(p)+\frac{\ln a}{\ln p}$ и $\alpha_k = -\pi(p)+\frac{\ln a}{\ln p}+\frac{2ki\pi}{\ln p}$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$.

Для этого ряда Дирихле теоремы Вейерштрасса и Миттаг–Леффлера запишутся следующим образом:

$$f_\pi(M(p),a|\alpha) = \frac{p^{\frac{\alpha+\pi(p)}{2}}}{((\alpha+\pi(p))\ln p-\ln a)a^{\frac{1}{2}}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{((\alpha+\pi(p))\ln p-\ln a)^2}{4\pi^2n^2}\right)^{-1}, \tag{6.27}$$

$$f_\pi(M(p),a|\alpha) = \frac{1}{2}+\frac{1}{(\alpha+\pi(p))\ln p-\ln a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((\alpha+\pi(p))\ln p-\ln a)}{((\alpha+\pi(p))\ln p-\ln a)^2+4n^2\pi^2}. \tag{6.28}$$

Из найденных соотношений несложно вывести функциональные уравнения для функции $f_\pi(M(p),a|\alpha)$:

$$f_\pi(M(p),a|\alpha) = 1-f_\pi\left(M(p),a\middle|-\alpha-2\pi(p)+\frac{2\ln a}{\ln p}\right), \tag{6.29}$$

$$f_\pi(M(p),a|\alpha) = -\frac{p^{\alpha+\pi(p)}}{a}f_\pi\left(M(p),a\middle|-\alpha-2\pi(p)+\frac{2\ln a}{\ln p}\right). \tag{6.30}$$

Из равенств 6.26 и 6.9 следует, что

$$f_\pi(M(p),a|\alpha) = \frac{p^{\frac{\alpha+\pi(p)}{2}}\beta}{4\pi^2a^{\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{i\beta}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{i\beta}{2\pi}\right), \quad \beta = (\alpha+\pi(p))\ln q-\ln a. \tag{6.31}$$

6.14. Ряд Дирихле моноида с конечным числом простых чисел

Пусть $\vec{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ — произвольный вектор с простыми $p_1<p_2<\ldots<p_n$. Через $M(\vec{p})$ обозначим минимальный моноид натуральных чисел, образованный

простыми числами $p_1, \ldots, p_n$, а через $a(p) \neq 0$ — произвольную функцию на множестве указанных простых, удовлетворяющую условию $0 < |a(p)| \leqslant p^{\pi(p)}$ и $\sigma_n < \sigma_{n-1} < \ldots < \sigma_1$, где $\sigma_\nu = \Re\left(-\pi(p_\nu) + \frac{\ln a(p_\nu)}{\ln p_\nu}\right)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Рассмотри ряд Дирихле

$$f\pi(M(\vec{p}), a(p)|\alpha) = \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} \frac{a^{m_1}(p_1)\ldots a^{m_n}(p_n)}{p_1^{m_1(\alpha+\pi(p_1))}\ldots p_n^{m_n(\alpha+\pi(p_n))}} = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{a(p_\nu)}{p_\nu^{\alpha+\pi(p_\nu)}}\right)^{-1},$$

который задает мероморфную функцию на всей комплексной плоскости с бесконечным множеством полюсов первого порядка в точках $\alpha_{\nu,0} = -\pi(p_\nu) + \frac{\ln a(p_\nu)}{\ln p_\nu}$ и $\alpha_{\nu,k} = -\pi(p_\nu) + \frac{\ln a(p_\nu)}{\ln p_\nu} + \frac{2ki\pi}{\ln p_\nu}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Через $P_\pi(M(\vec{p}), a(p)|\alpha)$ будем обозначать соответствующее обобщённое произведение Эйлера:

$$P_\pi(M(\vec{p}), a(p)|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} f\pi(M(p_\nu), a(p_\nu)|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{a(p_\nu)}{p_\nu^{\alpha+\pi(p_\nu)}}\right)^{-1}.$$

Если взять $a(p) = p^{\pi(p)}$, то получим дзета-функцию моноида $M(\vec{p})$:

$$P_\pi(M(\vec{p}), p^{\pi(p)}|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_\nu^{\alpha}}\right)^{-1} = \sum_{n\in M(\vec{p})} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(M(\vec{p})|\alpha)$$

$$(\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 0).$$

Будем через $S(A)$ обозначать множество полюсов дзета-функции

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 1)$$

произвольного множества натуральных чисел A. Если A — конечное множество, то $S(A) = \emptyset$.

Используя эти обозначения, получим равенство

$$S(M(\vec{p})) = \bigcup_{\nu=1}^{n} S(M(p_\nu)) = \left\{ \frac{2\pi ki}{\ln p_\nu} \middle| k \in \mathbb{Z},\ \nu = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Рассмотрим обратный ряд $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. По принципу вложенности из работы [196] получаем, что

$$\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n\in M(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right),$$

$$\zeta^*(M^*(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n\in M^*(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{p\neq p_\nu(\nu=1,\ldots,n)}\left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right),$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мёбиуса.

Функция $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ задается своим эйлеровым произведением на всей комплексной плоскости и является целой функцией, для которой множество нулей совпадает с множеством полюсов $S(M(\vec{p}))$ дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. Для неё справедливо функциональное уравнение

$$\zeta^*(M(\vec{p})|-\alpha) = (-1)^n P(\vec{p})^\alpha \zeta^*(M(\vec{p})|\alpha).$$

6.15. Обобщённые произведения Эйлера

Рассмотрим произвольную функцию $a(p) \neq 0$, удовлетворяющую условию $0<|a(p)|\leqslant p^{\pi(p)}$. Ряд Дирихле

$$f\pi(M(p), a(p)|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n(p)}{p^{n(\alpha+\pi(p))}} = \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1}$$

задает мероморфную функцию на всей комплексной плоскости с бесконечным множеством полюсов первого порядка с одним и тем же вычетом $\frac{1}{\ln p}$ в точках $\alpha_0 = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p}$ и $\alpha_k = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p} + \frac{2ki\pi}{\ln p}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Пусть M — произвольный моноид с однозначным разложением на простые множители: $P(M) \subset \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

Через $P_\pi(M, a(p)|\alpha)$ обозначим обобщённое произведение Эйлера:

$$P_\pi(M, a(p)|\alpha) = \prod_{p\in P(M)} f\pi(M(p), a(p)|\alpha) = \prod_{p\in P(M)} \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1}.$$

При $a(p) \equiv 1$ будем писать просто $P_\pi(M|\alpha)$.

Если взять $a(p) = p^{\pi(p)}$, то получим дзета-функцию моноида M:

$$P_\pi(M, p^{\pi(p)}|\alpha) = \prod_{p\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1} = \sum_{n\in M} \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости.

В частности, при $M = \mathbb{N}$ получим дзета-функцию Римана:

$$P_\pi(\mathbb{N}, p^{\pi(p)}|\alpha) = \zeta(\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

Теорема 55. *Если $a(p) \neq 0$ — произвольная ограниченная функция, то обобщённое произведение Эйлера $P_\pi(M, a(p)|\alpha)$ задаёт мероморфную функцию на всей комплексной плоскости, которая имеет бесконечное множество полюсов первого порядка $S_\pi(M, a(p))$:*

$$S_\pi(M, a(p)) = \bigcup_{p\in P(M)} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{p,0} = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p}, \\ \alpha_{p,k} = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p} + \frac{2ki\pi}{\ln p}\,(k = \pm 1, \pm 2, \ldots) \end{array} \right\}.$$

Доказательство. Если $P(M)$ — конечное множество, то обобщённое произведение Эйлера $P_\pi(M, a(p)|\alpha)$ состоит из конечного числа сомножителей, каждый из которых мероморфная функция на всей комплексной плоскости, и, значит, утверждение теоремы выполнено.

Пусть теперь $P(M)$ — бесконечное множество:

$$P(M) = \{p_{\nu_1} < p_{\nu_2} < \ldots < p_{\nu_n} < \ldots\},$$

где используется естественная нумерация простых чисел в $\mathbb{P}$. Отсюда следует, что $\pi(p_{\nu_n}) = \nu_n$.

Рассмотрим последовательность абсцисс абсолютной сходимости сомножителей

$$f\pi(M(p_{\nu_n}), a(p_{\nu_n})|\alpha): \quad \sigma_n = \Re\left(-\pi(p_{\nu_n}) + \frac{\ln a(p_{\nu_n})}{\ln p_{\nu_n}}\right),$$

предел которой равен $-\infty$. Отсюда следует, что для любого вещественного σ_0 найдётся номер N такой, что последовательность $\frac{a(p_{\nu_n})}{p_{\nu_n}^{\alpha+\pi(p_{\nu_n})}}$ мажорируется последовательностью $\frac{1}{p_{\nu_n}^2}$ в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_0$.

Отсюда следует, что произведение

$$\prod_{n=N}^{\infty}\left(1 - \frac{a(p_{\nu_n})}{p_{\nu_n}^{\alpha+\pi(p_{\nu_n})}}\right)^{-1}$$

в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_0$ абсолютно и равномерно сходится, так как сходится произведение

$$\prod_{n=N}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_{\nu_n}^2}\right)^{-1}.$$

Тем самым теорема полностью доказана в силу произвольности σ_0. $\square$

6.16. Заключение к шестой главе

В процессе обсуждений содержания этой главы с профессорами В. И. Ивановым и В. Н. Чубариковым наметились следующие актуальные и перспективные направления исследований.

Во-первых, встает вопрос о существовании таких бесконечных последовательностей $\mathbb{P}_1$ простых чисел, для которых дзета-функция $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$ моноида $M(\mathbb{P}_1)$ с однозначным разложением на простые числа и эйлеровым произведением имела бы $\sigma_{\mathbb{P}_1} \leqslant 1$ — абсциссу абсолютной сходимости дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$ равной заданному числу β с $0 < \beta < 1$.

Особый интерес представляют те последовательности, для которых $\beta = \frac{1}{2}$, так как для таких последовательностей множество полюсов дзета-функции соответствующего минимального моноида будет входить в множество нетривиальных нулей дзета-функции Римана.

Во-вторых, встает вопрос о связи распределения простых чисел в произвольном моноиде с однозначным разложением на простые числа и нулями дзета-функции этого моноида.

В-третьих, в случае моноидов с однозначным разложением на простые элементы, среди которых не только простые числа, но и псевдо-простые числа, какие законы распределения существуют?

Ещё более сложный вопрос — это распределение простых элементов в моноидах без однозначности разложения на простые элементы моноида.

В-четвертых, когда множество натуральных чисел разбивается на классы вычетов по модулю $q > 2$, то соответствующие дзета-функции классов вычетов, которые выражаются через дзета-функцию Гурвица, по теореме Дэвенпорта — Хейльброна имеют нули при $\sigma > 1$. Возникает вопрос, а справедлив ли аналог теоремы Дэвенпорта — Хейльброна при разбиении произвольного моноида с однозначным разложением на простые множители на классы вычетов по модулю $q > 2$?

В-пятых, для каких дзета-функций моноидов натуральных чисел существуют заградительные ряды из полюсов, наличие которых запрещает существование аналитического продолжения.

Наконец, на наш взгляд, важным направлением исследований является вопрос о разложении дзета-функции Римана в произведение различных дзета-функций множеств натуральных чисел и рядов Дирихле и изучение множеств их полюсов и нулей.

Достаточно простые соображения из одиннадцатого раздела позволили нам доказать гипотезу о заградительном ряде для дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых.

Рассмотрение модельной дзета-функции основного моноида и основного множества позволяют по-новому рассматривать вопрос о поведении соответствующих рядов Дирихле.

В работе [198] было дано определение специальных видов последовательностей простых чисел. Будем говорить, что бесконечная последовательность $\mathbb{P}_1$ простых чисел

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$$

является σ_0-последовательностью третьего рода, если дзета-функция $\zeta(\mathbb{P}_1|\alpha)$ имеет абсциссу абсолютной сходимости $\sigma_{\mathbb{P}_1} = \sigma_0$.

Из работ [195], [198] следует, что σ_0-последовательности третьего рода существуют для любого σ_0 из отрезка $[0;1]$.

Из доказательства последней теоремы следует, что для любой 0-последовательности третьего рода $\mathbb{P}_1$ областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)$ является полуплоскость $\sigma > 0$.

Возникает вопрос об области голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)$ для произвольного множества простых $\mathbb{P}_1$.

Следующий простой пример показывает, что полуплоскость $\sigma > 0$ без точки $\alpha = 1$ может быть областью голоморфности и для 1-последовательности простых чисел. Действительно, пусть $\mathbb{P}_1$ — произвольная 0-последовательность простых чисел, тогда $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_1$ будет 1-последовательностью простых чисел. Очевидно, что

$$\zeta(M(\mathbb{P}_2)|\alpha) = \zeta(M(\mathbb{P})|\alpha)\zeta^{-1}(M(\mathbb{P}_1)|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)}.$$

Отсюда следует утверждение об области голоморфности.

Известно логарифмическое свойство числа простых: $\pi(xy) > \pi(x) + \pi(y)$.

Отсюда следует, что $\pi(p^n) > n\pi(p)$. Тогда для любого $\alpha > -\pi(p)$ имеем

$$\left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(\alpha+\pi(p))}} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(\alpha+\pi(p^n))}}.$$

Отметим, что последний ряд абсолютно сходится для любого комплексного α.

Так как для любого вещественного α имеем

$$\frac{1}{(nm)^{\alpha+\pi(nm)}} < \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)} m^{\alpha+\pi(m)}},$$

то

$$f_\pi(M|\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}} < \prod_{p\in P(M)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(\alpha+\pi(p^n))}} <$$
$$< \prod_{p\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1} = P_\pi(M|\alpha).$$

Эта цепочка неравенств объясняет почему функция $f_\pi(M|\alpha)$ голоморфна на всей плоскости, а произведение $P_\pi(M|\alpha)$ мероморфно, причём имеет счетное множество особых вертикальных прямых, на каждой из которых имеется счетное множество полюсов.

Интересно было бы выяснить: имеет ли функция $f_\pi(M|\alpha)$ нули на комплексной плоскости? Очевидно, что их нет на вещественной прямой. Кроме того, если они есть, то они симметричны относительно вещественной прямой, так как образуют пары сопряженных значений.

Глава 7

Две асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции решёток

7.1. Введение к седьмой главе

В данной главе продолжаются исследования по теории гиперболической дзета-функции решёток.

Гиперболическая дзета-функция решёток задаётся в правой α-полуплоскости $\sigma > 1$, $\alpha = \sigma + it$ дзета рядом[1]

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{-\alpha}. \tag{7.1}$$

Очевидно, что при $s = 1$ гиперболическая дзета-функции решётки выражается через дзета-функцию Римана. В многомерном случае имеются свои существенно новые задачи, не имеющие аналогов в одномерном случае.

Впервые гиперболическая дзета-функция решёток возникла в работах Н. М. Коробова [87], [89] и Н. С. Бахвалова [6] в 1959 году для решёток решений линейного сравнения с несколькими переменными. В наиболее общем виде она появилась в работах К. К. Фролова [138], [140].

[1]Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Термин *"гиперболическая дзета-функция решётки"* был введен в 1984 году Н. М. Добровольским в работах [51] — [54], в которых начато систематическое изучение функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ как самостоятельного объекта исследований.

В частности, для действительных $\alpha > 1$ получены нижние оценки для гиперболической дзета-функции произвольной s-мерной решётки:

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda|\alpha) &\geqslant C_1(\alpha, s)(\det\Lambda)^{-1} && \text{при} \quad 0 < \det\Lambda \leqslant 1, \\ \zeta_H(\Lambda|\alpha) &\geqslant C_2(\alpha, s)(\det\Lambda)^{-\alpha}\ln^{s-1}\det\Lambda && \text{при} \quad \det\Lambda > 1, \end{aligned} \tag{7.2}$$

где $C_1(\alpha, s)$, $C_2(\alpha, s) > 0$ — константы, зависящие только от α и s.

Доказана верхняя оценка для гиперболической дзета-функции s-мерной решётки:

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda|\alpha) &\leqslant C_3(\alpha, s)C_1(\Lambda)^s && \text{при} \quad q(\Lambda) = 1, \\ \zeta_H(\Lambda|\alpha) &\leqslant C_4(\alpha, s)q^{-\alpha}(\Lambda)(\ln q(\Lambda) + 1)^{s-1} && \text{при} \quad q(\Lambda) > 1. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Этот результат является обобщением теоремы Н. С. Бахвалова [6]. Из оценки (7.3) получены различные следствия. В частности, из нее автоматически следует результат К. К. Фролова [138], так как гиперболический параметр $q(\Lambda(t, F)) = t^s$ при $t > 1$.

Для гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(t, F)$ в работе [63] Добровольским Н. М., Ваньковой В. С., Козловой С. Л. была получена асимптотическая формула

$$\zeta_H(\Lambda(t, F)|\alpha) = \frac{2\cdot(\det\Lambda(F))^\alpha}{R\cdot(s-1)!}\left(\sum_{(w)}\frac{1}{|N(w)|^\alpha}\right)\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t, F)}{(\det\Lambda(t, F))^\alpha} + O\left(\frac{\ln^{s-2}\det\Lambda(t, F)}{(\det\Lambda(t, F))^\alpha}\right), \tag{7.4}$$

где R — регулятор поля F (см. [10]) и в сумме $\sum\limits_{(w)}\frac{1}{|N(w)|^\alpha}$ суммирование проводится по всем главным идеалам кольца $\mathbb{Z}_F$.

На первом этапе исследований с 1984 года по 1990 год изучение функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ проводилось только для вещественных $\alpha > 1$. Начиная с 1995 года, в совместных работах Добровольского Н. М., Ребровой И. Ю. и Рощени А. Л. ([77], [78], [74]) начался новый этап изучения гиперболической дзета-функции

$\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ решётки Λ: во-первых, как функции комплексного аргумента α, во-вторых, как функции на метрическом пространстве решёток.

По теореме Абеля ([143], с.106) гиперболическую дзета-функцию решёток в правой α-полуплоскости $\sigma > 1$, $\alpha = \sigma + it$ можно представить в следующем интегральном виде

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int\limits_1^\infty \frac{D(t|\Lambda)dt}{t^{\alpha+1}},$$

где $D(T|\Lambda)$ — количество ненулевых точек решётки Λ в гиперболическом кресте $K_s(T)$.

Так как $D(T|\Lambda) = 0$ при $T < q(\Lambda)$, то

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int\limits_{q(\Lambda)}^\infty \frac{D(t|\Lambda)dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Возникает естественный вопрос о продолжении для произвольной решётки Λ гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ на всю комплексную плоскость. В работах Добровольского Н. М., Ребровой И. Ю. и Рощени А. Л. ([78], [74]) эти вопросы исследовались для PZ_s — множества всех целочисленных решёток, PQ_s — множества всех рациональных решёток, PD_s — множества всех решёток с диагональными матрицами. Доказано, что *для любой целочисленной решётки $\Lambda \in PZ_s$ гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ является регулярной функцией во всей α-плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс порядка s.*

Для любой решётки $\Lambda \in PQ_s$ гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ также является регулярной аналитической функцией во всей α-плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс порядка s.

Изучено поведение гиперболической дзета-функции решёток на пространстве решёток. В частности, установлено, что

если последовательность решёток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решётке Λ, то последовательность гиперболических дзета-функций решёток $\zeta_H(\Lambda_n|\alpha)$ равномерно сходится к гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в любой полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Другой результат такого типа формулируется следующим образом.

Для любой точки α из α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, найдется окрестность $|\alpha - \beta| < \delta$ такая, что для любой решётки $\Lambda = \Lambda(d_1, \ldots, d_s) \in PD_s$

$$\lim_{M\to\Lambda, M\in PD_s} \zeta_H(M|\beta) = \zeta_H(\Lambda|\beta),$$

причем эта сходимость равномерна в окрестности точки α.

Вывод этих результатов существенно опирается на асимптотическую формулу для числа точек произвольной решётки в гиперболическом кресте как функции от параметра гиперболического креста, полученную Н. М. Добровольским и А. Л. Рощеней ([79]):

$$D(T \mid \Lambda) = \frac{2^s T \ln^{s-1} T}{(s-1)! \det \Lambda} + \Theta \cdot C(\Lambda) \frac{2^s \cdot T \ln^{s-2} T}{\det \Lambda}, \tag{7.5}$$

где $C(\Lambda)$ – эффективная константа, вычисляемая через базис решётки, и $|\Theta| \leqslant 1$.

В работах [181]–[226], [87]–[102], [114]–[118], [138]–[140], [186], [167] освещены различные аспекты теории гиперболической дзета-функции решёток. В работах [162]–[171] используется асимптотическая формула (7.5).

Цель данной главы — дать новые варианты формул (7.4) и (7.5).

7.2. Асимптотическая формула для алгебраической решётки

Вывод нашей новой асимптотической формулы для дзета-функции алгебраической решётки будет опираться на доказательства из монографии [224], поэтому приведем ряд лемм из этой работы без доказательства, модифицируя где необходимо формулировки.

7.2.1. Вычисление вспомогательных интегралов

Обозначим через $Sim_k(A)$ k-мерный симплекс заданный равенством

$$Sim_k(A) = \{\vec{x} | x_1, \ldots, x_k \geqslant 0,\ x_1 + \ldots + x_k \leqslant A\}.$$

Лемма 79. *Пусть $A \geqslant 0, k \geqslant 1$ и*

$$I_k(A) = \int\limits_{Sim_k(A)} \dots \int dx_1 \dots dx_k.$$

Тогда справедливо равенство

$$I_k(A) = \frac{A^k}{k!}.$$

Доказательство. См. [224], стр. 66. □

Лемма 80. *Пусть $B \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant s-1, \alpha > 0$ и*

$$Y_k(B) = \int\limits_{\substack{x_j \geqslant 0 (j=1,\dots,k-1)\\ x_j \leqslant 0 (j=k,\dots,s-1)\\ B \geqslant x_1+\dots+x_{s-1}}} \dots \int e^{\alpha(x_k+\dots+x_{s-1})} dx_1 \dots dx_{s-1}.$$

Тогда справедливо равенство

$$Y_k(B) = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m \frac{(s-m)!}{(k-1)!(s-k-1)!\alpha^{s-m+1}} \cdot B^m.$$

Доказательство. См. [224], стр. 66–67. □

7.2.2. Интегральное представление для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки

Пусть F_s — чисто вещественное алгебраическое поле степени s, $F_s^{(1)} = F_s, F_s^{(2)}, \dots, \dots, F_s^{(s)}$ — набор его сопряженных полей и для любого алгебраического числа Θ из F_s $\Theta^{(1)} = \Theta, \Theta^{(2)}, \dots, \Theta^{(s)}$ — набор его алгебраически сопряженных чисел. Через $\mathbb{Z}_{F_s}$ обозначим кольцо целых алгебраических чисел поля F_s.

Рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda = \left\{ \left(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \dots, \Theta^{(s)}\right) \middle| \, \Theta \in \mathbb{Z}_{F_s} \right\}$.

Так как для любого ненулевого целого алгебраического числа Θ из $\mathbb{Z}_{F_s}$ имеем $|\Theta^{(1)}\Theta^{(2)} \dots \Theta^{(s)}| = |N(\Theta)| \geqslant 1$, то $q(\Lambda) = 1$.

Для произвольного $t > 1$ рассмотрим алгебраическую решётку

$$\Lambda(t) = \left\{ \left(\Theta^{(1)}t, \Theta^{(2)}t, \dots, \Theta^{(s)}t\right) \middle| \, \Theta \in \mathbb{Z}_{F_s} \right\}.$$

Ясно, что $q(\Lambda(t)) = t^s$. Так как $\det\Lambda(t) = t^s\det\Lambda$, то

$$q(\Lambda(t)) = \frac{\det\Lambda(t)}{\det\Lambda}. \tag{7.6}$$

Согласно (7.2), (7.3), (7.6) для гиперболической дзета–функции $\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)$

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \sum_{\Theta\in\mathbb{Z}_{F_s}}{}' \left(\overline{t\Theta^{(1)}}\ldots\overline{t\Theta^{(s)}}\right)^{-\alpha} \tag{7.7}$$

алгебраической решётки $\Lambda(t)$ справедливы оценки

$$C(\alpha,s,\Lambda)\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^\alpha} \leqslant \zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) \leqslant C_1(\alpha,s,\Lambda)\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^\alpha}.$$

Для вывода асимптотической формулы для гиперболической дзета – функции алгебраической решётки $\Lambda(t)$ нам потребуются следующие обозначения.

Через $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{s-1}$ обозначим набор фундаментальных единиц кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$, а через $\varepsilon_j^{(1)} = \varepsilon_j,\ldots,\varepsilon_j^{(s)}$ $(j = 1,\ldots,s-1)$ — их алгебраические сопряженные единицы.

Пусть далее везде $\sum\limits_{(\omega)}$ обозначает суммирование по всем главным идеалам кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$, а $\sum\limits_{\varepsilon}$ обозначает суммирование по всем единицам кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$. Как обычно,через R обозначим регулятор поля F_s, т. е.

$$R = \left\|\begin{vmatrix} \ln|\varepsilon_1^{(1)}| & \ldots & \ln|\varepsilon_1^{(s-1)}| \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ln|\varepsilon_{s-1}^{(1)}| & \ldots & \ln|\varepsilon_{s-1}^{(s-1)}| \end{vmatrix}\right\|.$$

Обозначения для различных областей суммирования и интегрирования будут вводиться по мере необходимости.

Лемма 81. *Справедливо равенство*

$$\zeta(\Lambda(t)|\alpha) = 2\sum_{(\omega)}\sum_{k_1,\ldots,k_{s-1}=-\infty}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{s}\overline{t\omega^{(j)}\varepsilon_1^{(j)k_1}\ldots\varepsilon_{s-1}^{(j)k_{s-1}}}\right)^{-\alpha}.$$

Доказательство. См. [224], стр. 68. □

Пусть ω — произвольное целое ненулевое алгебраическое число и вектор $\vec{j}$ — произвольный вектор из области $D(p)$ целочисленных векторов, заданной равенством

$$D(p) = \left\{(j_1,\ldots,j_s)\;\middle|\; \begin{matrix} 1\leqslant j_1<\ldots<j_p\leqslant s,\ 1\leqslant j_{p+1}<\ldots<j_s<s, \\ \{j_1,\ldots,j_s\} = \{1,\ldots,s\} \end{matrix}\right\}.$$

Через $B(\vec{j},p) = B(\vec{j},p,\omega)$ обозначим множество целочисленных векторов, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} \left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_1^{(j_\nu)k_1}\ldots\varepsilon_{s-1}^{(j_\nu)k_{s-1}}\right| \geqslant 1, \quad \text{при } \nu = 1,\ldots,p, \\ \\ \left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_1^{(j_\nu)k_1}\ldots\varepsilon_{s-1}^{(j_\nu)k_{s-1}}\right| < 1, \quad \text{при } \nu = p+1,\ldots,s. \end{cases}$$

Пусть далее

$$A(\vec{j},p) = A(\vec{j},p,\omega) = \sum_{\vec{k}\in B(\vec{j},p)} \prod_{\nu=p+1}^{s} \left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_1^{(j_\nu)k_1}\ldots\varepsilon_{s-1}^{(j_\nu)k_{s-1}}\right|^{\alpha} \tag{7.8}$$

и

$$A(\omega) = \sum_{p=1}^{s}\sum_{\vec{j}\in D(p)} A(\vec{j},p). \tag{7.9}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 82. *Справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = 2\sum_{(\omega)} \frac{A(\omega)}{(t^s|N(\omega)|)^{\alpha}}.$$

Доказательство. См. [224], стр. 69–70. □

Пусть

$$Y(\vec{j},p,\vec{k}) = \prod_{\nu=p+1}^{s}\left|t\omega^{(j_\nu)}\prod_{j=1}^{s-1}\varepsilon_j^{(j_\nu)k_j}\right|^{\alpha}, \tag{7.10}$$

$$C(\vec{j},p,m) = \begin{cases} 1 & \text{при } \displaystyle\sum_{\nu=p+1}^{s}\ln|\varepsilon_m^{(j_\nu)}| = 0, \\ \dfrac{\alpha\displaystyle\sum_{\nu=p+1}^{s}\ln|\varepsilon_m^{(j_\nu)}|}{2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\alpha}{2}\displaystyle\sum_{\nu=p+1}^{s}\ln|\varepsilon_m^{(j_\nu)}|\right)} & \text{при } \displaystyle\sum_{\nu=p+1}^{s}\ln|\varepsilon_m^{(j_\nu)}| \neq 0, \end{cases}$$

$$C(\vec{j},p) = \prod_{m=1}^{s-1} C(\vec{j},p,m),$$

$$L_n(x_1,\ldots,x_{s-1}) = \ln t + \ln|\omega^{(n)}| + \sum_{j=1}^{s-1} x_j\ln|\varepsilon_j^{(n)}| \quad (n=1,\ldots,s),(t>1).$$

Заметим, что для любых $x_1, \ldots, x_{s-1}$

$$\sum_{n=1}^{s} L_n(x_1, \ldots, x_{s-1}) = \ln t^s + \ln |N(\omega)|.$$

Так как

$$\lim_{b\to 0} \frac{b}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)} = \lim_{b\to 0} \frac{b}{e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}} = \lim_{b\to 0} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{b}{2}}} = 1,$$

то можно всегда писать

$$C(\vec{j}, p, m) = \frac{\alpha \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} \ln |\varepsilon_m^{(j_\nu)}|}{2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\alpha}{2} \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} \ln |\varepsilon_m^{(j_\nu)}|\right)}.$$

Лемма 83. *Справедливо равенство*

$$Y(\vec{j}, p, \vec{k}) = C(\vec{j}, p) \int\limits_{k_1-\frac{1}{2}}^{k_1+\frac{1}{2}} \ldots \int\limits_{k_{s-1}-\frac{1}{2}}^{k_{s-1}+\frac{1}{2}} e^{\alpha \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} L_{j_\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1})} dx_1 \ldots dx_{s-1}.$$

Доказательство. См. [224], стр. 71–72. □

Определим область $\Omega(\vec{j}, p) \subset \mathbb{R}^{s-1}$, как множество всех точек $(x_1, \ldots, x_{s-1})$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_{j_\nu}(x_1, \ldots, x_{s-1}) \geqslant \sum_{j=1}^{s-1} \left(\left\{x_j + \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}\right) \ln |\varepsilon_j^{(j_\nu)}| \quad (\nu = 1, \ldots, p),$$

$$L_{j_\nu}(x_1, \ldots, x_{s-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{s-1} \left(\left\{x_j + \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}\right) \ln |\varepsilon_j^{(j_\nu)}| \quad (\nu = p+1, \ldots, s).$$

Лемма 84. *Справедливо следующее интегральное представление*

$$A(\vec{j}, p) = C(\vec{j}, p) \int\limits_{\Omega(\vec{j},p)} \ldots \int e^{\alpha \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} L_{j_\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1})} dx_1 \ldots dx_{s-1}.$$

Доказательство. См. [224], стр. 72–73. □

Пусть далее везде

$$a = \frac{s-1}{2} \max_{\substack{1\leqslant m\leqslant s-1,\\ 1\leqslant n\leqslant s}} |\ln |\varepsilon_m^{(n)}||.$$

Определим область $\Omega_\lambda(\vec{j},p) \subset \mathbb{R}^{s-1}$ $(\lambda = 1,2)$ следующими соотношениями

$$L_{j\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1}) \geqslant (-1)^{\lambda-1}a \qquad (1 \leqslant \nu \leqslant p),$$

$$L_{j\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1}) \leqslant (-1)^{\lambda}a \qquad (p+1 \leqslant \nu \leqslant s),$$

а величины $A_\lambda(\vec{j},p)$ $(\lambda = 1,2)$ зададим равенствами

$$A_\lambda(\vec{j},p) = C(\vec{j},p) \underset{\Omega_\lambda(\vec{j},p)}{\int\ldots\int} e^{\alpha \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} L_{j_\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1})} dx_1 \ldots dx_{s-1} \quad (\lambda = 1,2).$$

Кроме указанных областей и величин из монографии [224], введем для параметра θ с $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ новую область $\Omega(\vec{j},p,\theta) \subset \mathbb{R}^{s-1}$ следующими соотношениями

$$L_{j\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1}) \geqslant -\theta a \qquad (1 \leqslant \nu \leqslant p),$$

$$L_{j\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1}) \leqslant \theta a \qquad (p+1 \leqslant \nu \leqslant s),$$

а величины $A(\vec{j},p,\theta)$ зададим равенствами

$$A(\vec{j},p,\theta) = C(\vec{j},p) \underset{\Omega(\vec{j},p,\theta)}{\int\ldots\int} e^{\alpha \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} L_{j_\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1})} dx_1 \ldots dx_{s-1}.$$

Для дальнейшего важно, что новые области и величины обладают следующими принципиальными свойствами:

$$\Omega_1(\vec{j},p) = \Omega(\vec{j},p,-1), \quad \Omega_2(\vec{j},p) = \Omega(\vec{j},p,1), \quad \Omega(\vec{j},p,\theta_1) \subset \Omega(\vec{j},p,\theta_2) \text{ при } \theta_1 < \theta_2$$

и величина $A(\vec{j},p,\theta)$ непрерывно, монотонно возрастает при изменении θ от -1 до 1.

Лемма 85. *Справедливы неравенства*

$$A(\vec{j},p,-1) = A_1(\vec{j},p) \leqslant A(\vec{j},p) \leqslant A_2(\vec{j},p) = A(\vec{j},p,1).$$

Доказательство. См. [224], стр. 73–74. □

Введем для параметра θ с $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ новую область $\Omega'(\vec{j},p,\theta) \subset \mathbb{R}^{s-1}$ следующим образом: пусть для произвольной точки $(y_1,\ldots,y_{s-1})$ величина

$$y_s = \ln t^s + \ln|N(\omega)| - (y_1 + y_2 + \ldots + y_{s-1}).$$

Тогда точка $(y_1, \ldots, y_{s-1})$ принадлежит $\Omega'(\vec{j}, p, \theta)$, если выполнены неравенства

$$\begin{cases} y_{j_\nu} \geqslant -\theta a & \text{при} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p, \\ y_{j_\nu} < \theta a & \text{при} \quad p+1 \leqslant \nu \leqslant s. \end{cases}$$

Лемма 86. *Справедливо равенство*

$$A(\vec{j}, p, \theta) = \frac{C(\vec{j}, p)}{R} \underset{\Omega'(\vec{j},p,\theta)}{\int \ldots \int} e^{\alpha(y_{j_{p+1}} + \ldots + y_{j_s})} dy_1 \ldots dy_{s-1} \quad (-1 \leqslant \theta \leqslant 1),$$

где R — регулятор поля.

Доказательство. Сделаем линейную замену в интеграле по области $\Omega(\vec{j}, p, \theta)$

$$y_j = L_j(x_1, \ldots, x_{s-1}) \quad (j = 1, \ldots, s-1).$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{s} L_j(x_1, \ldots, x_{s-1}) = \sum_{j=1}^{s} \left(\ln t + \ln |\omega^{(j)}| + \sum_{m=1}^{s-1} x_m \ln |\varepsilon_m^{(j)}| \right) =$$

$$= \ln t^s + \ln |N(\omega)| + \sum_{m=1}^{s-1} x_m \ln |N\varepsilon_m| = \ln t^s + \ln |N(\omega)|,$$

то $y_s = L_s(x_1, \ldots, x_{s-1})$.

Поэтому область $\Omega(\vec{j}, p, \theta)$, заданная соотношениями

$$\begin{cases} L_{j_\nu}(x_1, \ldots, x_{s-1}) \geqslant -\theta a & \text{при} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p, \\ L_{j_\nu}(x_1, \ldots, x_{s-1} < \theta a & \text{при} \quad p+1 \leqslant \nu \leqslant s, \end{cases}$$

перейдет в область $\Omega'(\vec{j}, p, \theta)$, заданную соотношениями

$$\begin{cases} y_{j_\nu} \geqslant -\theta a & \text{при} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p, \\ y_{j_\nu} < \theta a & \text{при} \quad p+1 \leqslant \nu \leqslant s, \end{cases}$$

а так как якобиан линейного преобразования имеет модуль, равный регулятору поля, то лемма доказана. □

7.2.3. Асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки

Пусть для $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ величины $I(\vec{j}; p, \theta)$ определены равенствами

$$I(\vec{j}, p, \theta) = \int\limits_{\Omega'(\vec{j},p,\theta)} \ldots \int e^{\alpha(y_{j_{p+1}}+\ldots+y_{j_{s-1}})} dy_1 \ldots dy_{s-1}$$

и

$$C_p(\theta) = e^{\theta(s-p)a\alpha},$$

$$B_p(\theta) = \ln t^s + \ln |N(\omega)| + \theta(2p-s)a.$$

Лемма 87. *Справедливы равенства:*
при $1 \leqslant p \leqslant s-1$

$$I(\vec{j}, p, \theta) = e^{\theta(s-p)\alpha a} \sum_{m=0}^{p-1} C_{p-1}^{m} \frac{(s-m)!}{(p-1)!(s-p-1)!\alpha^{s-m+1}} \cdot$$
$$\cdot \left(\ln t^s + \ln |N(\omega)| + \theta(2p-s)a\right)^m$$

и

$$I(\vec{j}, s, \theta) = \frac{(\ln t^s + \ln |N(\omega)|)^{s-1}}{(s-1)!} + \sum_{\nu=1}^{s-1} \frac{C_{s-1}^{\nu} s^{\nu} a^{\nu} \theta^{\nu} (\ln t^s + \ln |N(\omega)|)^{s-1-\nu}}{(s-1)!}.$$

Доказательство. При $p = s$ имеем $D(p) = \{(1, 2, \ldots, s)\}$ и, следовательно, $\vec{j} = (1,\, 2, \ldots, s) \in D(p)$.

Поэтому

$$I(\vec{j}, s, \theta) = \int\limits_{\Omega'(\vec{j},s,\theta)} \ldots \int dy_1 \ldots dy_{s-1}$$

и $\Omega'(\vec{j}, s, \theta)$ задано соотношениями

$$\begin{cases} y_\nu \geqslant -\theta a \qquad (\nu = 1, \ldots, s-1), \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_s = \ln t^s + \ln |N(\omega)|. \end{cases}$$

Сделаем линейную замену переменных

$$z_\nu = y_\nu + \theta a \qquad (\nu = 1, \ldots, s-1),$$

тогда область $\Omega'(\vec{j},s,\theta)$ перейдет в область $\Omega''(\theta)$, заданную соотношениями

$$\begin{cases} z_\nu \geqslant 0 \qquad (\nu = 1,\ldots,s-1), \\ \ln t^s + \ln|N(\omega)| - \sum_{\nu=1}^{s-1}(z_\nu - \theta a) \geqslant -\theta a. \end{cases} \tag{7.11}$$

Неравенство (7.11) можно записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{s-1} z_\nu \leqslant \ln t^s + \ln|N(\omega)| + s\cdot\theta a.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$I(\vec{j},s,\theta) = I_{s-1}(A(\theta)),$$

где величина $I_s(A)$ определена в лемме 79 и

$$A(\theta) = \ln t^s + \ln|N(\omega)| + s\cdot\theta a = B_s(\theta).$$

Отсюда следует, что

$$I(\vec{j},s,\theta) = \frac{(\ln t^s + \ln|N(\omega)| + s\cdot\theta a)^{s-1}}{(s-1)!} =$$
$$= \frac{(\ln t^s + \ln|N(\omega)|)^{s-1}}{(s-1)!} + \sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{C_{s-1}^{\nu}s^\nu a^\nu\theta^\nu(\ln t^s + \ln|N(\omega)|)^{s-1-\nu}}{(s-1)!}.$$

Пусть теперь $1 \leqslant p \leqslant s-1$. Сделаем линейную замену переменных

$$z_\nu = \begin{cases} y_{j_{\nu+1}} + \theta a & \text{при} \quad \nu = 1,\ldots,p-1, \\ y_{j_{\nu+1}} - \theta a & \text{при} \quad \nu = p,\ldots,s-1, \\ y_{j_1} + \theta a & \text{при} \quad \nu = s. \end{cases}$$

Тогда область $\Omega'(\vec{j},p,\theta)$ перейдет в область $\Omega''(\theta)$ точек $(z_1,\ldots,z_{s-1})$, удовлетворяющих условиям

$$z_\nu \geqslant 0\ (\nu = 1,\ldots,p-1), \quad z_\nu < 0\ (\nu = p,\ldots,s-1), \quad z_s \geqslant 0.$$

При этом

$$z_1 + \ldots + z_s = \sum_{\nu=1}^{p}(y_{j_\nu} + \theta a) + \sum_{\nu=p+1}^{s}(y_{j_\nu} - \theta a) = \ln t^s + \ln|N(\omega)| + \theta(2p-s)a.$$

Отсюда следует, что

$$I(\vec{j},p,\theta)=\int\limits_{\Omega''_p(\theta)}\ldots\int e^{\alpha(z_p+\ldots+z_{s-1}+\theta(s-p)a)}dz_1\ldots dz_{s-1}=Y_p(B_p(\theta))\cdot e^{\theta(s-p)\alpha a},$$

где величина $Y_p(B)$ определена в лемме 80 и

$$B_p(\theta)=\ln t^s+\ln|N(\omega)|+\theta(2p-s)a.$$

Отсюда следует, что

$$I(\vec{j},p,\theta)=e^{\theta(s-p)\alpha a}\sum_{m=0}^{p-1}C_{p-1}^{m}\frac{(s-m)!}{(p-1)!(s-p-1)!\alpha^{s-m+1}}\cdot$$
$$\cdot(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+\theta(2p-s)a)^m.$$

Лемма полностью доказана. □

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов чисто-вещественного поля F:

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F)=\sum_{(\omega)}|N(\omega)|^{-\alpha},$$

тогда

$$\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F)=(-1)^{\nu}\sum_{(\omega)}\ln^{\nu}|N(\omega)||N(\omega)|^{-\alpha},\quad \nu\geqslant 1.$$

Теорема 56. *При $t>e^a$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)=\frac{2(\det\Lambda)^{\alpha}}{R(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-1}C_{s-1}^{\nu}\frac{(\ln\det\Lambda(t)-\ln\det\Lambda)^{s-1-\nu}(-1)^{\nu}\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^{\alpha}}+$$
$$+R(\Lambda,\alpha,\theta),\tag{7.12}$$

где

$$R(\Lambda,\alpha,\theta)=O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det\Lambda(t))}{(\det\Lambda(t))^{\alpha}}\right)\quad \text{и}\quad R\ -\text{регулятор поля.}$$

Доказательство. Согласно лемме 82 имеем

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)=2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^{\alpha}}A(\omega)\quad\text{и}\quad A(\omega)=\sum_{p=1}^{s}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A(\vec{j},p).$$

По лемме 85
$$A(\vec{j},p,-1)\leqslant A(\vec{j},p)\leqslant A(\vec{j},p,1).$$
Отсюда следует, что справедливы неравенства
$$2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A(\vec{j},p,-1)\leqslant\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)\leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A(\vec{j},p,1).$$

Так как величины $A(\vec{j},p,\theta)$ непрерывно, монотонно возрастают при изменении θ от -1 до 1, то найдётся значение $\theta=\theta(\Lambda(t),\alpha)$ с $-1\leqslant\theta\leqslant 1$, такое что
$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)=2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A(\vec{j},p,\theta).$$

Из лемм 86, 87, 79 следует, что при $t>e^a$
$$A(\vec{j},s,\theta)=\frac{1}{R}I_{s-1}(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+s\cdot\theta a)=\frac{(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+s\cdot\theta a)^{s-1}}{R\cdot(s-1)!}=$$
$$=\frac{(\ln t^s+\ln|N(\omega)|)^{s-1}}{R\cdot(s-1)!}+\frac{1}{R\cdot(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-2}C_{s-1}^{\nu}(\ln t^s+\ln|N(\omega)|)^{\nu}(s\cdot\theta a)^{s-1-\nu}. \tag{7.13}$$

Из лемм 86, 87, 80 следует, что при $1\leqslant p\leqslant s-1$
$$A(\vec{j},p,\theta)=\frac{C(\vec{j},p)e^{\theta(s-p)\alpha a}}{R}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(s-m)!C_{p-1}^{m}\cdot(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+\theta(2p-s)a)^m}{(p-1)!(s-p-1)!\alpha^{s-m+1}}. \tag{7.14}$$

Объединяя оценки (7.13) и (7.14), получим
$$\zeta(\Lambda(t)|\alpha)=2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}\frac{(\ln t^s+\ln|N(\omega)|)^{s-1}}{R\cdot(s-1)!}+R(\Lambda,\alpha,\theta),$$
где
$$R(\Lambda,\alpha,\theta)=\frac{1}{R\cdot(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-2}C_{s-1}^{\nu}(\ln t^s+\ln|N(\omega)|)^{\nu}(s\cdot\theta a)^{s-1-\nu}+\sum_{(\omega)}\frac{2}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}\cdot$$
$$\cdot\sum_{p=1}^{s-1}\sum_{\vec{j}\in D(p)}\frac{C(\vec{j},p)e^{\theta(s-p)\alpha a}}{R}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(s-m)!C_{p-1}^{m}\cdot(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+\theta(2p-s)a)^m}{(p-1)!(s-p-1)!\alpha^{s-m+1}},$$
$$R(\Lambda,\alpha,\theta)=O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det\Lambda(t))}{(\det\Lambda(t))^\alpha}\right).$$

Преобразуя главный член по t, окончательно находим

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \frac{2}{R(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-1} C_{s-1}^{\nu}\frac{\ln^{s-1-\nu} t^s}{t^{s\alpha}}\sum_{(\omega)}\frac{\ln^{\nu}|N(\omega)|}{|N(\omega)|^{\alpha}} + R(\Lambda,\alpha,\theta) =$$

$$= \frac{2(\det\Lambda)^{\alpha}}{R(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-1} C_{s-1}^{\nu}\frac{(\ln\det\Lambda(t) - \ln\det\Lambda)^{s-1-\nu}(-1)^{\nu}\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^{\alpha}} + R(\Lambda,\alpha,\theta),$$

что и требовалось доказать. □

7.3. Асимптотическая формула для числа точек решётки

Вывод нового варианта асимптотической формулы для числа точек решётки в гиперболическом кресте мы будем проводить тем же методом, что и получение асимптотической формулы для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки. Далее везде предполагаем, что размерность $s \geqslant 2$.

7.3.1. Вспомогательные леммы о многомерных областях и интегралах

Пусть $\vec{\lambda_j} = (\lambda_{j1}, ..., \lambda_{js})$ $(j = 1, ..., s)$ — произвольный фиксированный базис решетки Λ и

$$A = A(\vec{\lambda_1}, ..., \vec{\lambda_s}) = \max_{1\leqslant j\leqslant s} 1/2\sum_{\nu=1}^{s}|\lambda_{\nu j}|; \tag{7.15}$$

$\vec{\lambda}_j^* = (\lambda_{j1}^*, ..., \lambda_{js}^*)$ $(j = 1, ..., s)$ — взаимный базис взаимной решетки Λ^* (как известно, взаимный базис задается соотношениями

$$(\vec{\lambda_i}, \vec{\lambda}_j^*) = \sum_{\nu=1}^{s}\lambda_{i\nu}\lambda_{j\nu}^* = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j \end{cases}, \tag{7.16}$$

а взаимная решетка Λ^* однозначно определяется решеткой Λ).

Определим следующие области

$$\Pi(T\mid\Lambda) = \left\{\vec{t}\,\left|\prod_{j=1}^{s}\overline{\sum_{\nu=1}^{s}\lambda_{\nu j}t_{\nu} + \sum_{\nu=1}^{s}\lambda_{\nu j}(1/2 - \{t_{\nu} + 1/2\})} \leqslant T\right.\right\}, \tag{7.17}$$

для целого вектора $\vec{m}$

$$\Pi(\vec{m}) = \{\vec{t} \mid [t_\nu + 1/2] = m_\nu \, (\nu = 1, ..., s)\}, \tag{7.18}$$

$$\Pi^*(T \mid \Lambda) = \left\{\vec{y} \mid \prod_{j=1}^{s} \overline{y_j + \sum_{\nu=1}^{s} \lambda_{\nu j}(1/2 - \{1/2 + \sum_{k=1}^{s} y_k \lambda^*_{\nu k}\})} \leqslant T\right\}, \tag{7.19}$$

при $a \geqslant 0$, $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ положим

$$u(y, \theta a) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |y| + \theta a \leqslant 1, \\ |y| + \theta a & \text{при} \quad |y| + \theta a \geqslant 1 \end{cases} \tag{7.20}$$

и области

$$\Pi_1(T, a) = \left\{\vec{y} \mid \prod_{j=1}^{s} \overline{|y_j| + a} \leqslant T\right\}, \tag{7.21}$$

$$\Pi_2(T, a) = \left\{\vec{y} \mid \prod_{j=1}^{s} u(y_j, -a) \leqslant T\right\}, \tag{7.22}$$

$$\Pi(T, \theta a) = \left\{\vec{y} \mid \prod_{j=1}^{s} u(y_j, \theta a) \leqslant T\right\}. \tag{7.23}$$

Ясно, что

$$\Pi_1(T, a) = \Pi(T, a) \subset \Pi_2(T, a) = \Pi(T, -a).$$

Заметим, что $\Pi_1(T, 0) = \Pi_2(T, 0) = K(T)$.

Пусть при $a \geqslant 0$, $T \geqslant 0$, $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$

$$I_s(a, T) = \int\limits_{\substack{\prod_{j=1}^{s}(y_j + a) \leqslant T \\ y_1, \cdots, y_s \geqslant 0}} d\vec{y}, \tag{7.24}$$

$$J_s(a, T) = \int\limits_{\substack{\prod_{j=1}^{s} u(y_j, -a) \leqslant T \\ y_1, \cdots, y_s \geqslant 0}} d\vec{y}, \tag{7.25}$$

$$I_s(a, T, \theta) = \int\limits_{\substack{\prod_{j=1}^{s} u(y_j, a\theta) \leqslant T \\ y_1, \cdots, y_s \geqslant 0}} d\vec{y}. \tag{7.26}$$

Лемма 88. *Справедливо равенство*

$$\sum_{\substack{\prod_{j=1}^{s} \overline{\lambda_{1j}m_1+\dots+\lambda_{sj}m_s\leqslant T}}} \int\limits_{\Pi(\vec{m})} d\vec{t} = \int\limits_{\Pi(T|\Lambda)} d\vec{t}. \qquad (7.27)$$

Доказательство. См. [79]. □

Лемма 89. *Справедливы равенства*

$$\int\limits_{\Pi(T|\Lambda)} d\vec{t} = \frac{1}{\det\Lambda} \int\limits_{\Pi^*(T|\Lambda)} d\vec{y}, \qquad (7.28)$$

$$\int\limits_{\Pi_1(T,a)} d\vec{y} = 2^s I_s(a,T) \qquad \text{при } a \geqslant 1, \qquad (7.29)$$

$$\int\limits_{\Pi_2(T,a)} d\vec{y} = 2^s J_s(a,T) \qquad \text{при } a \geqslant 0. \qquad (7.30)$$

Доказательство. См. [79]. □

Лемма 90. *При $a > 0$, $T \geqslant a^s$ справедливо равенство*

$$I_s(a,T) = (-1)^{s+1}(T-a^s) + T\sum_{n=1}^{s-1} \frac{(\ln T - s\ln a)^n (-1)^{s-1-n}}{n!}. \qquad (7.31)$$

Доказательство. См. [79]. □

Лемма 91. *При $a \geqslant 0$, $T \geqslant 1$, $s \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$J_s(a,T) = a^s + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T\ln^n T}{n!} \sum_{k=0}^{s-1-n} C_s^k C_{s-k-1}^n a^k. \qquad (7.32)$$

Доказательство. См. [79]. □

Следствие 5. *При $a > 1$, $T \geqslant 3$ справедливо неравенство*

$$I_s(a,T) \geqslant \frac{T\ln^{s-1} T}{(s-1)!} - ea^s T\ln^{s-2} T - a^s. \qquad (7.33)$$

Доказательство. См. [79]. □

Следствие 6. *Справедливо неравенство*

$$J_s(a,T) \leqslant \frac{T\ln^{s-1} T}{(s-1)!} + (a+2)^s T\ln^{s-2} T + a^s. \qquad (7.34)$$

Доказательство. См. [79]. □

Лемма 92. *При $a > 0$, $T \geqslant a^s$, $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ справедливо равенство*

$$I_s(a,T,\theta) = \begin{cases} (-1)^{s+1}(T-(\theta a)^s) + T\sum\limits_{n=1}^{s-1} \frac{(\ln T - s\ln(\theta a))^n(-1)^{s-1-n}}{n!}, & \text{при } \theta a \geqslant 1, \\ (-\theta a)^s + \sum\limits_{n=0}^{s-1} \frac{T\ln^n T}{n!} \sum\limits_{k=0}^{s-1-n} C_s^k C_{s-k-1}^n (-\theta a)^k, & \text{при } \theta a \leqslant 1. \end{cases} \tag{7.35}$$

Доказательство. Из определения $I_s(a,T,\theta)$ имеем:
при $a\theta \geqslant 1$ будет $I_s(a,T,\theta) = I_s(a\theta, T$ и в силу леммы 90

$$I_s(a,T,\theta) = (-1)^{s+1}(T-(a\theta)^s) + T\sum_{n=1}^{s-1} \frac{(\ln T - s\ln(a\theta))^n(-1)^{s-1-n}}{n!};$$

при $a\theta \leqslant 1$

$$I_s(a,T,\theta) = \int\limits_0^{1-a\theta} dy_s \int\limits_{\substack{y_1,\cdots,y_{s-1}\geqslant 0\\ u(y_1,a)\cdot\ldots\cdot u(y_{s-1},a)\leqslant T}} dy_1\cdots dy_{s-1} +$$

$$+\int\limits_{1-a\theta}^{T-a\theta} dy_s \int\limits_{\substack{y_1,\cdots,y_{s-1}\geqslant 0\\ u(y_1,a)\cdot\ldots\cdot u(y_{s-1},a)\leqslant \frac{T}{y+a\theta}}} dy_1\cdots dy_{s-1} =$$

$$= (1-a\theta)I_{s-1}(a,T,\theta) + \int\limits_1^T I_{s-1}\left(a, \frac{T}{y}, \theta\right) dy. \tag{7.36}$$

Далее проведем индукцию по s, используя рекуррентное равенство (7.36).

При $s = 1$

$$I_1(a,T,\theta) = \int\limits_{\substack{y\geqslant 0\\ u(y,a\theta)\leqslant T}} dy = \int\limits_0^{1-a\theta} dy + \int\limits_{1-a\theta}^{T-a\theta} dy = 1 - a\theta + T - 1 = T - a\theta$$

и равенство (7.35) выполнено.

Пусть
$$Q_{s,n}(a\theta)=\sum_{k=0}^{s-1-n}C_s^kC_{s-k-1}^n(-a\theta)^k$$
и
$$I_s(a,T,\theta)=(-a\theta)^s+\sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}Q_{s,n}(a\theta),$$
тогда
$$I_{s+1}(a,T,\theta)=(1-a\theta)I_s(a,T,\theta)+\int\limits_1^T I_s\left(a,\frac{T}{y},\theta\right)dy=$$
$$=(1-a\theta)(-a\theta)^s+\sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}Q_{s,n}(a)(1-a\theta)+$$
$$+\int\limits_1^T\left((-a\theta)^s+\sum_{n=0}^{s-1}\frac{T/y\ln^n(T/y)}{n!}Q_{s,n}(a\theta)\right)dy=$$
$$=(-a\theta)^{s+1}+(-a\theta)^s+T(-a\theta)^s-(-a\theta)^s+\sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}Q_{s,n}(a)(1-a\theta)+$$
$$+\sum_{n=0}^{s-1}\frac{T}{n!}Q_{s,n}(a\theta)\frac{\ln^{n+1}T}{n+1}=(-a\theta)^{s+1}+T((-a\theta)^s+Q_{s,0}(a\theta)(1-a\theta))+$$
$$+\sum_{n=1}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}\left(Q_{s,n}(a\theta)(1-a\theta)+Q_{s,n-1}(a\theta)\right)+\frac{T\ln^s T}{s!}Q_{s,s-1}(a\theta)=$$
$$=(-a\theta)^{s+1}+\sum_{n=0}^{s}\frac{T\ln^n T}{n!}Q_{s+1,n}(a\theta),$$

где

$$Q_{s+1,0}(a\theta) = (-a\theta)^s + (1-a\theta)\sum_{k=0}^{s-1} C_s^k(-a\theta)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} C_s^{k-1}(-a\theta)^k + \sum_{k=0}^{s-1} C_s^k(-a\theta)^k + (-a\theta)^s =$$

$$= s(-a\theta)^s + \sum_{k=1}^{s-1}(C_s^{k-1} + C_s^k)(-a\theta)^k + 1 = \sum_{k=0}^{s} C_{s+1}^k(-a\theta)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{(s+1)-1-0} C_{s+1}^k C_{s+1-k-1}^0(-a\theta)^k;$$

$$Q_{s+1,s}(a\theta) = Q_{s,s-1}(a\theta) = 1 = \sum_{k=0}^{(s+1)-1-s} C_{s+1}^k C_{s+1-k-1}^s(-a\theta)^k;$$

и при $1 \leqslant n \leqslant s-1$

$$Q_{s+1,n}(a\theta) = Q_{s,n}(a\theta)(1-a\theta) + Q_{s,n-1}(a\theta) =$$

$$= (1-a\theta)\sum_{k=0}^{s-1-n} C_s^k C_{s-k-1}^n(-a\theta)^k + \sum_{k=0}^{s-1-(n-1)} C_s^k C_{s-k-1}^{n-1}(-a\theta)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{s-n} C_s^{k-1} C_{s-(k-1)-1}^n(-a\theta)^k + \sum_{k=0}^{s-1-n} C_s^k(C_{s-k-1}^n + C_{s-k-1}^{n-1})(-a\theta)^k +$$

$$+ C_s^{s-n}C_{n-1}^{n-1}(-a\theta)^{s-n} = \sum_{k=1}^{s-n} C_s^{k-1}C_{s-k}^n(-a\theta)^k + \sum_{k=0}^{s-n} C_s^k C_{s-k}^n(-a\theta)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{s-n}(C_s^{k-1} + C_s^k)C_{s-k}^n(-a\theta)^k + C_s^0 C_{s-0}^n(-a\theta)^0 = \sum_{k=0}^{s-n}(C_{s+1}^k C_{(s+1)-1-k}^n)(-a\theta)^k$$

и, значит, $I_{s+1}(a,T,\theta)$ удовлетворяет равенству (7.35).

Для полноты изложения покажем что при $a\theta = 1$ обе формулы в (7.35) задают одно и тоже значение

$$I_s(a,T,\theta) = (-1)^s + T\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(-1)^{s-1-n}\ln^n T}{n!}.$$

Действительно, в этом случае имеем:

$$I_{s+1}(a,T,\theta) = \int_1^T I_s\left(a,\frac{T}{y},\theta\right)dy = \int_1^T\left((-1)^s + \frac{T}{y}\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(-1)^{s-1-n}\ln^n\frac{T}{y}}{n!}\right) =$$

$$= (-1)^s(T-1) + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T}{n!}(-1)^{s-1-n}\frac{\ln^{n+1} T}{n+1} = (-1)^{s+1} + T\sum_{n=0}^{s} \frac{(-1)^{s-n}\ln^n T}{n!},$$

что и и завершает доказательство леммы. □

Следствие 7. *Объем гиперболического креста задается равенством*

$$V(K(T)) = 2^s \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T\ln^n T}{n!} C_{s-1}^n.$$

Доказательство. Действительно, $\Pi_1(T,0) = \Pi_2(T,0) = K(T)$. По леммам 89, 91 имеем:

$$V(K(T)) = 2^s J_s(0,T) = 2^s \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T\ln^n T}{n!} C_{s-1}^n$$

и следствие доказано. □

Лемма 93. *При* $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$|2^s I_s(a,T,\theta) - V(K(T))| \leqslant \begin{cases} \max\left(T(2+2\ln a) - a^2, 2(\ln a)T + a^2\right) & \text{при } s=2,\\ T\frac{c_1(a,s)\ln^{s-2} T}{(s-2)!} + c_2(a,s)T\ln^{s-3} T + a^s, & \text{при } s>2, \end{cases}$$

где

$$c_1(a,s) = \max\left(2+s\ln a, s-2+s\ln a\right), \quad c_2(a,s) = \max\left(e(a^s+1), (a+2)^s\right).$$

Доказательство. Действительно, $V(K(T)) = 2^s I_s(a,T,0)$ и

$$I_s(a,T) = I_s(a,T,1) \leqslant I_s(a,T,\theta) \leqslant I_s(a,T,-1) = J_s(a,T),$$

поэтому

$$\left|I_s(a,T,\theta) - 2^{-s}V(K(T))\right| \leqslant \max\left(2^{-s}V(K(T)) - I_s(a,T), J_s(a,T) - 2^{-s}V(K(T))\right),$$

в силу монотонного убывания величины $I_s(a,T,\theta)$ при изменении θ от -1 до 1.

Для первой разности под знаком максимума, которую обозначим через M_1, имеем:

$$M_1 = 2^{-s}V(K(T)) - I_s(a,T) =$$

$$= \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T\ln^n T}{n!} - (-1)^{s+1}(T-a^s) - T\sum_{n=1}^{s-1} \frac{(\ln T - s\ln a)^n(-1)^{s-1-n}}{n!} =$$

$$= (-1)^{s+1}a^s + T(1+(-1)^s) + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{T\ln^n T(1+(-1)^{s-n})}{n!} +$$

$$+ T\sum_{n=1}^{s-1} \frac{(-1)^{s-n}}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (-1)^{n-k}(s\ln a)^{n-k}\ln^k T.$$

Располагая по степеням $\ln^k T$, получим:

$$M_1 = (-1)^{s+1}a^s + T\left(1 + (-1)^s\left(1 + \sum_{n=1}^{s-1}\frac{1}{n!}(s\ln a)^n\right)\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{s-2}\frac{T\ln^n T(1+(-1)^{s-n})}{n!} + T\sum_{k=1}^{s-2}(-1)^{s-k}\ln^k T\sum_{n=k+1}^{s-1}\frac{C_n^k(s\ln a)^{n-k}}{n!} =$$

$$= (-1)^{s+1}a^s + T\left(1 + (-1)^s\left(1 + \sum_{n=1}^{s-1}\frac{1}{n!}(s\ln a)^n\right)\right) +$$

$$+T\sum_{n=1}^{s-2}\frac{\ln^n T}{n!}\left(1 + (-1)^{s-n}\left(1 + \sum_{k=1}^{s-1-n}\frac{(s\ln a)^k}{k!}\right)\right) = (-1)^{s+1}a^s +$$

$$+T\frac{(2+s\ln a)\ln^{s-2} T}{(s-2)!} + T\sum_{n=0}^{s-3}\frac{\ln^n T}{n!}\left(1 + (-1)^{s-n}\left(1 + \sum_{k=1}^{s-1-n}\frac{(s\ln a)^k}{k!}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant T\frac{(2+s\ln a)\ln^{s-2} T}{(s-2)!} + e(a^s+1)T\ln^{s-3} T + a^s.$$

При $s = 2$ справедливо более точное утверждение:

$$M_1 = T(2 + 2\ln a) - a^2.$$

Перейдём ко второй разности под знаком максимума, которую обозначим через M_2, имеем:

$$M_2 = J_s(a,T) - 2^{-s}V(K(T)) = a^s + \sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}\sum_{k=0}^{s-1-n}C_s^k C_{s-k-1}^n a^k - \sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!} =$$

$$= a^s + \sum_{n=0}^{s-2}\frac{T\ln^n T}{n!}\left(\sum_{k=0}^{s-1-n}C_s^k C_{s-k-1}^n a^k - 1\right) = a^s + T\frac{(s-2+s\ln a)\ln^{s-2} T}{(s-2)!} +$$

$$+\sum_{n=0}^{s-3}\frac{T\ln^n T}{n!}\left(\sum_{k=0}^{s-1-n}\frac{s!(s-k-1)!}{k!(s-k)!n!(s-k-n-1)!}a^k - 1\right) =$$

$$= a^s + T\frac{(s-2+s\ln a)\ln^{s-2} T}{(s-2)!} +$$

$$+T\sum_{n=0}^{s-3}\frac{\ln^n T}{n!}\left(C_s^n\sum_{k=0}^{s-1-n}\frac{s-n}{s-k}C_{s-n-1}^k a^k - 1\right) \leqslant a^s + T\frac{(s-2+s\ln a)\ln^{s-2} T}{(s-2)!} +$$

$$+T\sum_{n=0}^{s-3}\frac{\ln^n T}{n!}C_s^n\frac{s-n}{n+1}(a+1)^{s-n-1} \leqslant a^s + T\frac{(s-2+s\ln a)\ln^{s-2} T}{(s-2)!} +$$

$$+(a+2)^s T\ln^{s-3} T.$$

При $s=2$ справедливо более точное утверждение:

$$M_2 = 2\ln aT + a^2.$$

Объединяя рассмотренные случаи, получаем утверждение леммы. □

7.3.2. Асимптотическая формула для числа точек в гиперболическом кресте

Рассмотрим произвольный базис решетки Λ:

$$\overrightarrow{\lambda}_j = (\lambda_{j1},...,\lambda_{js}) \quad (j=1,...,s)$$

и величину

$$A(\overrightarrow{\lambda}_1,...,\overrightarrow{\lambda}_s) = \frac{1}{2}\max_{1\leqslant j\leqslant s}\sum_{\nu=1}^{s}|\lambda_{\nu j}|. \tag{1}$$

Определим величину —

$$a(\Lambda) = \min_{\overrightarrow{\lambda}_1,...,\overrightarrow{\lambda}_s} \max(1, A(\overrightarrow{\lambda}_1,...,\overrightarrow{\lambda}_s)), \tag{2}$$

где минимум берется по всем базисам $\vec{\lambda}_1,...,\vec{\lambda}_s$ решетки Λ.

Далее до конца параграфа зафиксируем базис $\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_s$ решетки Λ, для которого величина $A(\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_s)$ — минимальна, то есть $a(\Lambda)=\max(1,A(\vec{\lambda}_1,...,\vec{\lambda}_s))$.

Для величины $D(T|\Lambda)$—количества ненулевых точек решетки Λ, лежащих в гиперболическом кресте $K(T)$, докажем следующую теорему.

Теорема 57. *Для любой решетки Λ справедливо асимптотическое равенство при $T\geqslant 3$*

$$D(T\mid\Lambda) = 2^s\sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}C_{s-1}^n - 1 + \Theta C_1(\Lambda,T), \quad |\Theta|\leqslant 1, \tag{7.37}$$

где

$$C_1(\Lambda,T) = \begin{cases} \max\left(T(2+2\ln a)-a^2, 2(\ln a)T+a^2\right) & \text{при } s=2,\\ T\frac{c_1(a,s)\ln^{s-2}T}{(s-2)!}+c_2(a,s)T\ln^{s-3}T+a^s, & \text{при } s>2\end{cases} \tag{7.38}$$

и

$$c_1(a,s)=\max\left(2+s\ln a, s-2+s\ln a\right), \quad c_2(a,s)=\max\left(e(a^s+1),(a+2)^s\right).$$

Доказательство. Из определения величины $D(T \mid \Lambda)$ следует, что

$$D(T \mid \Lambda) + 1 = \sum_{\substack{\vec{x} \in \Lambda \\ \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s \leqslant T}} 1 = \sum_{\prod_{j=1}^{s} \overline{\lambda_{1j} m_1 + \cdots + \lambda_{sj} m_s} \leqslant T} 1 = \int\limits_{\Pi(T|\Lambda)} d\vec{t} \qquad (7.39)$$

в силу леммы 88.

Применяя лемму 89, получим

$$D(T \mid \Lambda) + 1 = \frac{1}{\det \Lambda} \int\limits_{\Pi^*(T|\Lambda)} d\vec{t} \qquad (7.40)$$

Пусть $a = a(\Lambda)$, тогда справедливы включения

$$\Pi_1(T, a) \subseteq \Pi^*(T \mid \Lambda) \subseteq \Pi_2(T, a), \qquad (7.41)$$

так как

$$\prod_{j=1}^{s} u(|y_j|, a) \leqslant \prod_{j=1}^{s} \overline{y_j + \sum_{\nu=1}^{s} \lambda_{\nu j}(1/2 - \{1/2 + \sum_{k=1}^{s} y_k \lambda^*_{\nu k}\})} \leqslant \prod_{j=1}^{s} (|y_j| + a).$$

Из этого включения и леммы 89 следуют неравенства

$$\frac{2^s I_s(a, T, 1)}{\det \Lambda} = \frac{2^s I_s(a, T)}{\det \Lambda} \leqslant D(T \mid \Lambda) + 1 \leqslant \frac{2^s J_s(a, T)}{\det \Lambda} = \frac{2^s I_s(a, T, -1)}{\det \Lambda}. \qquad (7.42)$$

Так как $I_s(a, T, \theta)$ непрерывно зависит от θ при $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$, то найдется θ с $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ такое, что

$$D(T \mid \Lambda) + 1 = \frac{2^s I_s(a, T, \theta)}{\det \Lambda}.$$

Применяя оценку из леммы 93, получим

$$|D(T \mid \Lambda) + 1 - V(K(T))| \leqslant \begin{cases} \max\left(T(2 + 2\ln a) - a^2, 2(\ln a)T + a^2\right) & \text{при } s = 2, \\ T\frac{c_1(a,s)\ln^{s-2} T}{(s-2)!} + c_2(a, s) T \ln^{s-3} T + a^s, & \text{при } s > 2, \end{cases}$$

где

$$c_1(a, s) = \max\left(2 + s\ln a, s - 2 + s\ln a\right), \quad c_2(a, s) = \max\left(e(a^s + 1), (a + 2)^s\right).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. □

7.4. Заключение к седьмой главе

В данной главе методом, который можно назвать методом параметрических множеств, получены две новые асимптотические формулы из теории гиперболической дзета-функции решёток.

Суть метода состоит в том, что для оценки числа точек решётки в некоторой области находится система вложенных множеств, параметризованная параметром, изменяющимся от -1 до 1, при этом при нулевом значении параметра имеем исходное множество. Так как при крайних значениях параметра имеем оценки сверху и снизу, то объем одного из множеств в точности равен искомому числу точек, а объем исходного множества задает главный член.

Данный метод позволил найти новые формы для главного члена асимптотических формул, отличный от работ [63] и [79] с более точной оценкой остаточного члена.

Глава 8

О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел

8.1. Введение к восьмой главе

В работах [195], [196] начато исследование дзета-функций мультипликативных моноидов натуральных чисел. При изучении моноидов натуральных чисел существенную роль играют простые элементы моноида. Если M — произвольный моноид натуральных чисел, то $P(M)$ — множество его простых элементов состоит из тех элементов моноида M отличных от единицы, которые нельзя представить в виде произведения других неединичных элементов моноида M. Таким образом, если простое число $p \in M$, то $p \in P(M)$, но, вообще говоря, не все элементы из $P(M)$ являются простыми числами. В $P(M)$ могут входить и псевдопростые числа. Элемент q из M, являющийся составным числом, будет псевдопростым числом в M, если ни один его собственный делитель не является элементом из M.

В работе [196] дано описание общего вида моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы. В случае произвольного моноида M натуральных чисел общий вид $P(M)$ множества его простых элементов очень просто описать. А именно, $P(M)$ является максимальным множеством элементов из M таким, что ни один элемент из $P(M)$ не делится ни на какой другой элемент из $P(M)$. Через $\pi_M(x)$ будем обозначать количество простых элементов в моноиде M, не превосходящих x.

Так как множество простых элементов $P(M)$ может содержать псевдопростые числа, то можно определить порядок простого элемента $q \in P(M)$ как величину $V(q)$ — общее число простых делителей числа q с учетом их кратности.

Таким образом, простые числа p из $P(M)$ выделяются среди всех простых элементов q, как те, у которых порядок равен 1.

Как указывает К. Холли в своей монографии [142]: "Современный метод решета разрабатывается в надежде на то, что он сможет привести к доказательству гипотезы Гольдбаха и других подобных важных гипотез в теории чисел ... метод оказался полезным при изучении проблем, в которых простые числа заменяются числами с ограниченным количеством простых делителей." Таким образом, случай псевдопростых чисел разумно изучать с помощью методов решета.

"Метод решета традиционно ассоциируется с Эратосфеном. Ему принадлежит способ определения простых чисел между $\sqrt{x}$ и x посредством вычеркивания из ряда натуральных чисел, не превосходящих x, всех тех, простые делители которых не превосходят $\sqrt{x}$. Способ Эратосфена обладает отличительной чертой метода решета, который связан с пересчетом числа элементов множества, не обладающих определенными предписанными свойствами. Метод решета прежде всего является процессом исключения." [1]

Естественно, что решето Эратосфена применимо для любого моноида M натуральных чисел. Действительно, если нам известно множество простых элементов $P(M, \sqrt{x})$, не превосходящих $\sqrt{x}$, то для нахождения $P(M, x)$ достаточно в множестве $A(M, \sqrt{x}, x)$ всех чисел моноида M, больших $\sqrt{x}$ и не превосходящих x, вычеркнуть все числа кратные простым элементам из $P(M, \sqrt{x})$. Оставшиеся числа необходимо добавить к множеству $P(M, \sqrt{x})$ для получения множества $P(M, x)$.

Будем через $\mathbb{P}_{3,1}$ и $\mathbb{P}_{3,2}$ обозначать множество всех простых чисел вида $3n+1$

[1] См. [142], стр. 11.

и $3n+2$, соответственно. Таким образом, мы имеем:

$$\mathbb{P}_{3,1} = \{7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, \ldots\},$$
$$\mathbb{P}_{3,2} = \{2, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, \ldots\}$$

и согласно теореме Дирихле о простых в арифметической прогрессии множества простых $\mathbb{P}_{3,1}$ и $\mathbb{P}_{3,2}$ — бесконечные множества, объединение которых исчерпывает все множество простых за исключением числа 3.

Если через $\mathbb{P}_{6,1}$ и $\mathbb{P}_{6,5}$ обозначать множество всех простых чисел вида $6n+1$ и $6n+5$, соответственно, то:

$$\mathbb{P}_{6,1} = \{7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, \ldots\} = \mathbb{P}_{3,1},$$
$$\mathbb{P}_{6,5} = \{5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, \ldots\} = \mathbb{P}_{3,2} \setminus \{2\}$$

и объединение этих множеств исчерпывает все множество простых за исключением чисел 2 и 3.

Аналогично, рассмотрим множества $\mathbb{P}_{4,1}$ и $\mathbb{P}_{4,3}$ всех простых чисел вида $4n+1$ и $4n+3$, соответственно. Таким образом, мы имеем:

$$\mathbb{P}_{4,1} = \{5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, \ldots\},$$
$$\mathbb{P}_{4,3} = \{3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, \ldots\}$$

и объединение этих множеств исчерпывает все множество простых чисел за исключением числа 2.

Рассмотрим мультипликативные функции $\chi_{3,1}(n)$ и $\chi_{3,2}(n)$, заданные равенствами

$$\chi_{3,1}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^{\alpha},\ p = 3m+1,\ \alpha \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } n = p^{\alpha},\ p = 3, 3m+2,\ \alpha \geqslant 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{3,1}(p^{\alpha_p}), & \text{при } \ n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}; \end{cases}$$

.

$$\chi_{3,2}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^{\alpha},\ p = 3m+2,\ \alpha \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } n = p^{\alpha},\ p = 3, 3m+1,\ \alpha \geqslant 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{3,2}(p^{\alpha_p}), & \text{при } \ n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}. \end{cases}$$

.

Основными объектами исследования в данной главе будут моноиды $M_{3,1}$, $M_{3,1,1}$, $M_{3,1,2}$, $M_{3,2}$ и множества $M_{3,1,2,0}$, $\mathbb{N}_{3,2}$ и $\mathbb{N}_{3,2,2}$, заданные равенствами

$$\mathbb{N}_{3,1} = M_{3,1} = \{n = 3k+1 | k \geqslant 0\}, \quad M_{3,1,1} = \{n = 3k+1 | \chi_{3,1}(n) = 1\}, \tag{8.1}$$

$$M_{3,1,2} = \{n = 3k+1 | \chi_{3,2}(n) = 1\}, \quad M_{3,1,2,0} = \{n \in M_{3,1,2} | n \neq p^{\alpha}\}, \tag{8.2}$$

$$M_{3,2} = \{n | \chi_{3,2}(n) = 1\}, \quad \mathbb{N}_{3,2} = \{n = 3k+2 | k \geqslant 0\},$$

$$\mathbb{N}_{3,2,2} = \{n = 3k+2 | k \geqslant 0, \chi_{3,2}(n) = 1\}. \tag{8.3}$$

Ясно, что имеются равенства моноидов: $M_{3,1} = M_{3,1,1} \cdot M_{3,1,2}$, $M_{3,2} = M_{3,1,2} \bigcup \mathbb{N}_{3,2,2}$. Кроме этого, справедливы тождества для множеств $\mathbb{N}_{3,2}$ и $\mathbb{N}_{3,2,2}$:

$$\mathbb{N}_{3,2} = M_{3,1} \cdot \mathbb{P}_{3,2} = M_{3,1,1} \cdot M_{3,1,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2}, \quad \mathbb{N}_{3,2,2} = M_{3,1,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2}. \tag{8.4}$$

Если через A^n обозначать произведение числовых множеств $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ из n сомножителей, которое состоит из всевозможных произведений $a_1 a_2 \ldots a_n$ чисел из A, то можно записать равенства:

$$M_{3,1,1} = \{1\} \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{3,1}^{n}, \; M_{3,2} = \{1\} \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{3,2}^{n},$$

$$M_{3,1,2} = \{1\} \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{3,2}^{2n}, \; \mathbb{N}_{3,2} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{3,2}^{2n+1}.$$

Нетрудно описать $P(M)$ — множество простых элементов для этих моноидов.

$$P(M_{3,1,1}) = \mathbb{P}_{3,1}, \quad P(M_{3,2}) = \mathbb{P}_{3,2}.$$

$P(M_{3,1,2}) = \mathbb{P}_{3,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2}$ и состоит из псевдопростых чисел вида $p_1 p_2$, где p_1, p_2 — произвольные простые числа вида $3m+2$. В частности, в это множество псевдопростых чисел входят квадраты простых.

Множество простых элементов $P(M_{3,1,2,0})$ состоит из псевдопростых чисел вида $p_1 p_2$, где p_1, p_2 — произвольные различные простые числа вида $3m+2$.

Таким образом, $P(M_{3,1,2,0}) \subset P(M_{3,1,2})$ и в $P(M_{3,1,2,0})$ не входят квадраты простых.

Ясно, что $P(M_{3,1}) = \mathbb{P}_{3,1} \bigcup (\mathbb{P}_{3,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2})$.

Обозначим через $\zeta(M|\alpha)$ дзета-функцию моноида M:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

а через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

В частности,

$$\zeta(M_{3,1,1}|\alpha) = P(M_{3,1,1}|\alpha).$$

Будем называть каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \dots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \dots < r_k, \quad r_1, \dots, r_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа x, тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x\in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

Так как в моноиде $M_{3,1,2}$ нет однозначности разложения на простые элементы, то

$$\zeta(M_{3,1,2}|\alpha) \neq P(M_{3,1,2}|\alpha).$$

Ясно, что аналогичные утверждения справедливы для моноидов $M_{6,1}$, $M_{6,1,1}$, $M_{4,1}$ и $M_{4,1,1}$.

Моноиды $M_{3,1}$, $M_{4,1}$ и $M_{6,1}$ выделяются из множества всевозможных моноидов $M_{q,1}$ тем, что только для этих моноидов множество простых элементов состоит из множества простых чисел $\mathbb{P}_{q,1}$ и множества псевдопростых чисел второго порядка $\mathbb{P}^2_{q,q-1}$.

Цель данной главы — изучить свойства функции распределения простых элементов $\pi_{M_{q,1}}(x)$ для $q = 3, 4, 6$.

В данной главе для полноты изложения будут получены оценки для:

- количества натуральны чисел N таких что, $N < x$, $N = p_1p_2$, где p_1, p_2 — простые числа (для определенности $p_1 \leqslant p_2$). Обозначим количество таких натуральных чисел через $\pi_2(x)$.

- количества натуральны чисел N таких что,

$$N < x, \quad N \equiv 1 \pmod q, \quad N = p_1p_2,$$

  где p_1, p_2 — простые числа (для определенности $p_1 \leqslant p_2$). Обозначим количество таких натуральных чисел через $\pi_2(x, q)$.

- функции распределения $\pi_{M_{q,1}}(x)$ при $q = 3, 4, 6$.

8.2. Общие формулы для числа составных с двумя делителями

Прежде всего выразим $\pi_2(x)$ число натуральных N таких что,

$$N < x, \quad N = p_1p_2,$$

где p_1, p_2 — простые числа, через функцию $\pi(x)$.

Лемма 94. *Справедливо равенство*

$$\pi_2(x) = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \pi(p) + \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant \frac{x}{2}} \pi\left(\frac{x}{p}\right).$$

Доказательство. Действительно, если $p_2 \leqslant x$, $N = p_1p_2 \leqslant x$ и $p_1 \leqslant p_2$, то $p_1 \leqslant \min\left(p_2, \frac{x}{p_2}\right)$ и $p_2 \leqslant \frac{x}{2}$.

Отсюда следует, что

$$\pi_2(x) = \sum_{p_2 \leqslant \sqrt{x}} \sum_{p_1 \leqslant p_2} 1 + \sum_{\sqrt{x} < p_2 \leqslant \frac{x}{2}} \sum_{p_1 \leqslant \frac{x}{p_2}} 1.$$

Первая внутренняя сумма равна $\pi(p_2)$, а вторая — $\pi\left(\frac{x}{p}\right)$. Поэтому, полагая $p = p_2$ и разбивая сумму по p на две суммы: $p \leqslant \sqrt{x}$ и $\sqrt{x} < p \leqslant \frac{x}{2}$, получим утверждение леммы. □

Можно получить и другое выражение $\pi_2(x)$ через $\pi(x)$.

Лемма 95. *Справедливо равенство*

$$\pi_2(x)=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\pi\left(\frac{x}{p}\right)-\pi(p-1)\right).$$

Доказательство. Действительно, $p_1 \leqslant \sqrt{x}$ и $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \frac{x}{p_1}$. Так как количество p_2, удовлетворяющих этим условиям, равно $\pi\left(\frac{x}{p_1}\right)-\pi(p_1-1)$, то лемма доказана. □

Замечание 4. *Фактически лемма 95 использует идею Дирихле, которая позволяет в проблеме делителей использовать короткую сумму длиной $\sqrt{x}$ вместо суммы длиной x. Эти же соображения используются в леммах 97 и 98.*

Количество натуральных чисел N таких что p_1, p_2 — различные простые числа будем обозначать через $\pi_{2,0}(x,q)$. Таким образом величины $\pi_2(x,q)$ и $\pi_{2,0}(x,q)$ отличаются не более чем на количество квадратов простых, не превосходящих x. Отсюда следует, что

$$\pi_2(x,q) \leqslant \pi_{2,0}(x,q)+\pi(\sqrt{x}) = \pi_{2,0}(x,q)+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right). \tag{8.5}$$

Нетрудно найти выражение для $\pi_2(x,q)$. Для этого нам потребуются обозначение $\pi(x,a,q)$ — количество простых чисел p, не превосходящих x, для которых $p \equiv a \pmod q$. Кроме того, будем полагать a^* — обратное натуральное число по $\bmod\, q$ к натуральному числу a. Таким образом, если $1 \leqslant a \leqslant q-1$, $(a,q)=1$, то $1 \leqslant a^* \leqslant q-1$ и $aa^* \equiv 1 \pmod q$.

Лемма 96. *Справедливо равенство*

$$\pi_2(x,q)=\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,\,(a,q)=1}\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a \pmod q}\pi(p,a^*,q)+\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x,\,p\equiv a \pmod q}\pi\left(\frac{x}{p},a^*,q\right)\right).$$

Доказательство. Действительно, если

$$p_2 \leqslant x, \quad p_2 \equiv a \pmod q, \quad N=p_1p_2 \equiv 1 \pmod q$$

и $p_1 \leqslant p_2$, то $p_1 \equiv a^* \pmod q$ и $p_1 \leqslant \min\left(p_2, \frac{x}{p_2}\right)$.

Отсюда следует, что

$$\pi_2(x,q)=\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,\,(a,q)=1}\ \sum_{p_2\leqslant\sqrt{x},\,p_2\equiv a\pmod q}\ \sum_{p_1\leqslant\min\left(p_2,\frac{x}{p_2}\right),\,p_1\equiv a^*\pmod q} 1.$$

Внутренняя сумма равна $\pi\left(\min\left(p_2,\frac{x}{p_2}\right),a^*,q\right)$, поэтому, полагая $p=p_2$ и разбивая сумму по p на две суммы: $p\leqslant\sqrt{x}$ и $\sqrt{x}<p\leqslant x$, получим утверждение леммы.

□

Докажем лемму аналогичную лемме 95 только для $\pi_2(x,q)$.

Лемма 97. *Справедливо равенство*

$$\pi_2(x,q)=\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,\,(a,q)=1}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a\pmod q}\left(\pi\left(\frac{x}{p},a^*,q\right)-\pi(p-1,a^*,q)\right).$$

Доказательство. Действительно, для $p_1\equiv a\pmod q$ с $p_1\leqslant\sqrt{x}$ имеем

$$p_2\equiv a^*\pmod q\quad\text{ и } p_1\leqslant p_2\leqslant\frac{x}{p_1}.$$

Так как количество p_2, удовлетворяющих этим условиям, равно

$$\pi\left(\frac{x}{p_1},a^*,q\right)-\pi(p_1-1,a^*,q),$$

то лемма доказана. □

Наконец, выразим $\pi_{M_{q,1}}(x)$ при $q=3,4,6$ через $\pi(x,1,q)$ и $\pi_2(x,q-1,q)$, где $\pi_2(x,q-1,q)$ количество натуральных N таких что,

$$N\equiv 1\pmod q,\quad N<x,\quad N=p_1p_2,$$

где $p_1,p_2\equiv q-1\pmod q$ — простые числа.

Лемма 98. *При* $q=3,4,6$ *справедливо равенство*

$$\pi_{M_{q,1}}(x)=\pi(x,1,q)+\sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv q-1\pmod q}\left(\pi\left(\frac{x}{p},q-1,q\right)-\pi(p-1,q-1,q)\right).$$

Доказательство. Действительно, при $q=3,4,6$ имеем

$$P(M_{q,1})=\mathbb{P}_{q,1}\bigcup\mathbb{P}_{q,q-1}\cdot\mathbb{P}_{q,q-1}.$$

Отсюда и из леммы 97 следует утверждение доказываемой леммы, так как слагаемое, соответствующее $a=1$, отсутствует и $(q-1)^*=q-1$. □

8.3. Исторические замечания

24 мая 1848 г. П. Л. Чебышёв представил в Санкт-Петербургскую Академию наук мемуар "Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины" (Полн. собр. соч., т. I, с. 173–190). Таким образом, в этом году исполнилось 170 лет со дня выхода этой принципиальной работы, с которой началась современная теория распределения простых чисел.

Во втором мемуаре он доказал оценки

$$(0,92\ldots)\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant (1,105\ldots)\frac{x}{\ln x}.$$

Обозначим через $c_1 = 0,92\ldots$ и $c_2 = 1,105\ldots$ константы из неравенств Чебышёва для функции $\pi(x)$. Заметим, что конечная разность $\Delta\pi(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$ является на множестве натуральных чисел характеристической функцией множества простых чисел.

Положим $x_1 = [\sqrt{x}]$, $x_2 = \left[\frac{x}{2}\right]$ и

$$S_1(x) = \sum_{n=2}^{x_1} \frac{n}{\ln n}\Delta\pi(n), \quad S_2(x) = \sum_{n=x_1+1}^{x_2} \frac{\frac{x}{n}}{\ln\frac{x}{n}}\Delta\pi(n).$$

Лемма 99. *Для $\pi_2(x)$ справедливы неравенства:*

$$c_1(S_1(x) + S_2(x)) \leqslant \pi_2(x) \leqslant c_2(S_1(x) + S_2(x)). \tag{8.6}$$

Доказательство. Пользуясь леммой 94 и неравенствами Чебышёва, получим

$$\pi_2(x) \leqslant c_2 \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \frac{p}{\ln p} + c_2 \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant\frac{x}{2}} \frac{\frac{x}{p}}{\ln\frac{x}{p}} = c_2 \sum_{n\leqslant\sqrt{x}} \frac{n}{\ln n}\Delta\pi(n) + c_2 \sum_{\sqrt{x}<n\leqslant\frac{x}{2}} \frac{\frac{x}{n}}{\ln\frac{x}{n}}\Delta\pi(n);$$

$$\pi_2(x) \geqslant c_1 \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \frac{p}{\ln p} + c_1 \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant\frac{x}{2}} \frac{\frac{x}{p}}{\ln\frac{x}{p}} = c_1 \sum_{n\leqslant\sqrt{x}} \frac{n}{\ln n}\Delta\pi(n) + c_1 \sum_{\sqrt{x}<n\leqslant\frac{x}{2}} \frac{\frac{x}{n}}{\ln\frac{x}{n}}\Delta\pi(n),$$

что доказывает утверждение леммы. □

Лемма 100. *Справедливо неравенство*

$$S_1(x) < c_2\frac{4x}{\ln^2 x} + 1.$$

Доказательство. Действительно, имеем:

$$
\begin{aligned}
S_1(x) &= \sum_{n=2}^{x_1} \frac{n}{\ln n} \Delta\pi(n) = \sum_{n=2}^{x_1} \frac{n}{\ln n} (\pi(n) - \pi(n-1)) = \\
&= \frac{x_1}{\ln x_1}\pi(x_1) + \sum_{n=2}^{x_1-1} \frac{n}{\ln n}\pi(n) - \sum_{n=1}^{x_1-1} \frac{n+1}{\ln(n+1)}\pi(n) = \\
&= \frac{x_1}{\ln x_1}\pi(x_1) - \sum_{n=2}^{x_1-1} \pi(n) \left(\frac{n+1}{\ln(n+1)} - \frac{n}{\ln n} \right) = \\
&= \frac{x_1}{\ln x_1}\pi(x_1) - \sum_{n=3}^{x_1-1} \pi(n) \left(\frac{n+1}{\ln(n+1)} - \frac{n}{\ln n} \right) + \frac{\ln 1,125}{\ln 2 \cdot \ln 3}.
\end{aligned}
$$

Так как $\frac{\ln 1,125}{\ln 2 \cdot \ln 3} = 0,155\ldots$ и

$$
\frac{n+1}{\ln(n+1)} - \frac{n}{\ln n} > 0
$$

при $n > 2$, то по неравенству Чебышёва

$$
S_1(x) < c_2 \left(\frac{x_1}{\ln x_1} \right)^2 + 1 \leqslant c_2 \frac{4x}{\ln^2 x} + 1.
$$

□

Перейдём к оценке величины $S_2(x)$. Положим

$$
S_3(x) = \sum_{n=x_1+1}^{x_2-1} \frac{\pi(n)\,(\ln x - (n+1)\ln(n+1) + n \ln n)}{n(\ln x - \ln n)(n+1)(\ln x - \ln(n+1))}.
$$

Лемма 101. *Справедливо соотношение*

$$
S_2(x) = S_3(x) + O\left(\frac{1}{\ln x} \right) - O\left(\frac{1}{\ln^2 x} \right).
$$

Доказательство. Имеем:

$$
\begin{aligned}
S_2(x) &= \sum_{n=x_1+1}^{x_2} \frac{\frac{x}{n}}{\ln \frac{x}{n}} \Delta\pi(n) = x \sum_{n=x_1+1}^{x_2} \frac{1}{n(\ln x - \ln n)} (\pi(n) - \pi(n-1)) = \\
&= x \left(\sum_{n=x_1+1}^{x_2} \frac{1}{n(\ln x - \ln n)}\pi(n) - \sum_{n=x_1}^{x_2-1} \frac{1}{(n+1)(\ln x - \ln(n+1))}\pi(n) \right) = \\
&= x \left(\frac{\pi(x_2)}{x_2(\ln x - \ln x_2)} + \sum_{n=x_1+1}^{x_2-1} \frac{\pi(n)\,(\ln x - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n)}{n(\ln x - \ln n)(n+1)(\ln x - \ln(n+1))} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\pi(x_1)}{(x_1+1)(\ln x - \ln(x_1+1))} \right)
\end{aligned}
$$

По неравенствам Чебышёва имеем:

$$c_1 \frac{1}{\ln x_2(\ln x - \ln x_2)} \leqslant \frac{\pi(x_2)}{x_2(\ln x - \ln x_2)} \leqslant c_2 \frac{1}{\ln x_2(\ln x - \ln x_2)},$$
$$\frac{c_1 x_1}{(\ln x_1)(x_1+1)(\ln x - \ln(x_1+1))} \leqslant \frac{\pi(x_1)}{(x_1+1)(\ln x - \ln(x_1+1))} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_2 x_1}{(\ln x_1)(x_1+1)(\ln x - \ln(x_1+1))}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\pi(x_2)}{x_2(\ln x - \ln x_2)} = O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \quad \frac{\pi(x_1)}{(x_1+1)(\ln x - \ln(x_1+1))} = O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Так как выражение

$$f(n) = \ln x - (n+1)\ln(n+1) + n \ln n$$

меняет знак на промежутке от x_1 до x_2, то применить неравенство Чебышёва и получить

$$c_1 S_4(x) \leqslant S_3(x) \leqslant c_2 S_4(x),$$

где

$$S_4(x) = \sum_{n=x_1+1}^{x_2-1} \frac{(\ln x - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n)}{(\ln n)(\ln x - \ln n)(n+1)(\ln x - \ln(n+1))} =$$
$$= \sum_{n=x_1+1}^{x_2-1} \frac{\left(\ln x - \ln(n+1) - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{(\ln n)(\ln x - \ln n)(n+1)(\ln x - \ln(n+1))}.$$

нельзя. $\square$

8.3.1. Другой путь оценки

Лемма 95 открывает другой путь оценки величины $\pi_2(x)$. Положим

$$S_1^*(x) = \sum_{n=2}^{x_1} \frac{x}{n(\ln x - \ln n)} \Delta\pi(n)$$

Лемма 102. *Справедливы неравенства*

$$c_1 S_1^*(x) - c_2 S_1(x) + c_1 \frac{2\sqrt{x}}{\ln x} \leqslant \pi_2(x) \leqslant c_2 S_1^*(x) - c_1 S_1(x) + c_2 \frac{2\sqrt{x}}{\ln x}.$$

Доказательство. Так как $\pi(p-1) = \pi(p) - 1$, то из леммы вытекает

$$\pi_2(x) = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \left(\pi\left(\frac{x}{p}\right) - \pi(p-1) \right) = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \pi\left(\frac{x}{p}\right) - \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \pi(p) + \pi(\sqrt{x}).$$

Применяя неравенство Чебышева и доказательство леммы 100, получим

$$c_1 \frac{2\sqrt{x}}{\ln x} \leqslant \pi(\sqrt{x}) \leqslant c_2 \frac{2\sqrt{x}}{\ln x},$$
$$c_1 S_1(x) \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \pi(p) \leqslant c_2 S_1(x),$$
$$c_1 S_1^*(x) \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \pi\left(\frac{x}{p}\right) \leqslant c_2 S_1^*(x).$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 103. *При $x \geqslant 9$ справедливы соотношение*

$$S_1^*(x) = O\left(\frac{x \ln\ln x}{\ln x}\right).$$

Доказательство. Из определения величины $S_1^*(x)$ вытекает

$$S_1^*(x) = \sum_{n=2}^{x_1} \frac{x}{n(\ln x - \ln n)} \Delta\pi(n) =$$
$$= \sum_{n=2}^{x_1} \frac{x}{n(\ln x - \ln n)} \pi(n) - \sum_{n=1}^{x_1-1} \frac{x}{(n+1)(\ln x - \ln(n+1))} \pi(n) =$$
$$= \frac{x\pi(x_1)}{x_1(\ln x - \ln x_1)} + x \sum_{n=2}^{x_1-1} \pi(n) \left(\frac{1}{n(\ln x - \ln n)} - \frac{1}{(n+1)(\ln x - \ln(n+1))} \right)$$

Рассмотрим функцию $f(n) = (n+1)(\ln x - \ln(n+1)) - n(\ln x - \ln n)$. Для неё имеем:

$$f(n) = \ln x - \ln(n+1) - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$
$$f'(n) = \ln x - \ln(n+1) - 1 - \ln x + \ln n + 1 = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0.$$

Так как $f(x_1-1) = \ln x - \ln x_1 - (x_1-1)\ln(1+\frac{1}{x_1-1})$ и $f(x_1-1) > \frac{1}{2}\ln x - 1 > 0$ при $x \geqslant 9$, то $f(n) > 0$ при $2 \leqslant n \leqslant x_1$ и можно применить неравенство Чебышёва, получим для

$$S_2^*(x) = x\left(\frac{1}{(\ln x_1)(\ln x - \ln x_1)} + \sum_{n=2}^{x_1-1}\left(\frac{\ln x - \ln(n+1) - n\ln(1+\frac{1}{n})}{(\ln n)(\ln x - \ln n)(n+1)(\ln x - \ln(n+1))}\right)\right),$$

$$c_1 S_2^*(x) \leqslant S_1^*(x) \leqslant c_2 S_2^*(x).$$

Из предыдущего следует, что при $x \geqslant 9$ найдется некоторая константа $c_0 > 0$, такая, что выполнены неравенства

$$c_0(\ln x - \ln(n+1)) \leqslant \ln x - \ln(n+1) - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \ln x - \ln(n+1).$$

Численные расчёты показывают, что в качестве значения c_0 можно взять $\frac{1}{4}$.

Отсюда вытекает, что для величины

$$S_3^*(x) = \sum_{n=2}^{x_1-1}\left(\frac{1}{(\ln n)(\ln x - \ln n)(n+1)}\right)$$

справедливы неравенства

$$c_1 x\left(\frac{1}{(\ln x_1)(\ln x - \ln x_1)} + \frac{1}{4}S_3^*(x)\right) \leqslant S_2^*(x) \leqslant c_2 x\left(\frac{1}{(\ln x_1)(\ln x - \ln x_1)} + S_3^*(x)\right).$$

Рассмотрим величину

$$S_4^*(x) = \sum_{n=2}^{x_1-1}\left(\frac{1}{(\ln n)(\ln x - \ln n)n}\right),$$

для которой выполнены соотношения

$$S_3^*(x) < S_4^*(x),$$

$$S_4^*(x) - S_3^*(x) = \sum_{n=2}^{x_1-1}\left(\frac{1}{(\ln n)(\ln x - \ln n)n(n+1)}\right) \leqslant \sum_{n=2}^{x_1-1}\left(\frac{1}{(n(n+1)}\right) < \frac{1}{2}.$$

Применим формулу суммирования Эйлера

$$\sum_{n=a}^{b-1} g(n) = \int\limits_a^b g(x)dx - \frac{1}{2}(g(b) - g(a)) + \int\limits_a^b \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) g'(x)dx,$$

получим

$$S_4^*(x) = \int\limits_2^{x_1} \frac{dy}{(\ln y)(\ln x - \ln y)y} -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{(\ln x_1)(\ln x - \ln x_1)x_1}\right) - \left(\frac{1}{(\ln 2)(\ln x - \ln 2)2}\right)\right) +$$
$$+\int\limits_2^{x_1} \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{(\ln y)(\ln y - \ln x)y^2} \left(1 + \frac{1}{\ln y - \ln x} + \frac{1}{\ln y}\right) dy.$$

Вычисляя первый интеграл, получим

$$\int\limits_2^{x_1} \frac{dy}{(\ln y)(\ln x - \ln y)y} = \int\limits_{\ln 2}^{\ln x_1} \frac{dt}{t(\ln x - t)} = \frac{1}{\ln x} \int\limits_{\ln 2}^{\ln x_1} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln x - t}\right) dt =$$
$$= \frac{\ln\ln x_1 - \ln\ln 2 + \ln(\ln x - \ln 2) - \ln(\ln x - \ln x_1)}{\ln x}.$$

Нетрудно видеть, что первый интеграл по порядку есть величина $O(\frac{\ln\ln x}{\ln x})$, второй член в формуле суммирования имеет порядок $O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$, а третий — $O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$. Объединяя эти оценки, получим утверждение леммы. □

Теорема 58. *Для количества составных чисел, равных произведению двух простых, справедливо соотношение*

$$\pi_2(x) = O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

Доказательство. Действительно, применяя последовательно леммы 96, 100 и 103, получим утверждение теоремы. □

Замечание 5. *Из доказательства леммы 103 видно, что можно выписать константы сверху и снизу в знаке $O()$, но мы не стали этого делать в силу громоздкости необходимых вычислений.*

8.4. Вспомогательные утверждения

Нам потребуются следующие результаты, которые уже стали классическими.

Теорема 59. *(Теорема Бруна-Титчмарша) Для* $(a, k) = 1$ *и* $k \leqslant x$ *имеем*

$$\pi(x, a, k) < \frac{(2+\eta)x}{\varphi(k)\ln(2x/k)} \quad (x > x_0(\eta)),$$

где $\pi(x, a, k)$ *— количество простых чисел* p*, не превосходящих* x*, для которых* $p \equiv a \pmod{k}$*,* $\varphi(x)$ *— функция Эйлера.*

Доказательство. См. [142], стр. 19–20. □

В монографии К. Прахара [112], стр. 53 имеется другой вариант этой теоремы:

Теорема 60. *Пусть* $1 \leqslant k < x$*,* $0 \leqslant l < k$*,* $(k, l) = 1$ *и*

$$\pi(x, k, l) = N(p \leqslant x,\, p \equiv l \pmod{k}). \tag{8.7}$$

Тогда

$$\pi(x, k, l) < c\frac{x}{\varphi(k)\ln(x/k)}, \tag{8.8}$$

причем константа c *не зависит от* x *и* k*.*

Доказательство. См. [112], стр. 53. □

Доказательства теорем 59 и 60 проводится методами решета. С помощью L-функций Дирихле удается получить асимптотическое равенство.

Теорема 61. *Равенство*

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x_1^{\beta}}{\varphi(k)} + xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right) \tag{8.9}$$

выполняется равномерно при $k \leqslant \exp(c_{10}\sqrt{\ln x})$*.*

Доказательство. См. [112], стр. 157. □

Теорема 62. *При постоянном* k

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{li} x + O\left(xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right), \tag{8.10}$$

в частности,

$$\pi(x, k, l) \sim \frac{x}{\varphi(k)\ln x}, \quad x \to \infty. \tag{8.11}$$

Доказательство. См. [112], стр. 157. □

Теорема 63. *При $x \to \infty$ имеют место соотношения*

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + a + O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{8.12}$$

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = B \ln x + O\left(1\right). \tag{8.13}$$

Здесь a и B — некоторые константы, причём $B > 0$.

Доказательство. См. [112], стр. 28–30. На стр. 92 дается вариант теоремы с более точным остаточным членом чем в формуле (8.12):

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + \gamma - \sum_{p} \sum_{m \geqslant 2} \frac{1}{mp^m} + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right).$$

На стр. 94 дается более точное выражение формулы (8.13) в виде

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln x} \left(1 + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)\right).$$

Здесь γ — константа Эйлера,

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \ln n\right) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} du - \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

□

8.5. Количество составных с двумя делителями в прогрессии

Проведем аналогичные рассуждения, но вместо неравенства Чебышёва будем использовать оценку Бруна-Титчмарша.

Теперь приступим к оценке $\pi_2(x, q)$.

Теорема 64. *Для количества составных чисел, сравнимых с 1 по модулю q и равных произведению двух простых, при $x > \frac{q^4}{64}$ справедливо соотношение*

$$\pi_2(x, q) \leqslant \frac{3(2 + \eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln \ln x + 2a)}{\ln x - \ln q} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Доказательство. По лемме 97 (стр. 241) имеем:

$$\pi_2(x,q)=\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a\pmod q}\pi\left(\frac{x}{p},a^*,q\right)-$$
$$-\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a\pmod q}\pi(p-1,a^*,q).$$

Так как $x>q^2$, то при $p\leqslant\sqrt{x}$ будем иметь $\frac{x}{p}\geqslant\sqrt{x}>q$. Поэтому равенство для $\pi_2(x,q)$ можно переписать следующим образом:

$$\pi_2(x,q)=\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a\pmod q}\pi\left(\frac{x}{p},a^*,q\right)-$$
$$-\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{p\leqslant q,\,p\equiv a\pmod q}\pi(p-1,a^*,q)-$$
$$-\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{q<p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a\pmod q}\pi(p-1,a^*,q)=S_1(x,q)-S_2(x,q)-S_3(x,q).$$

Вторую сумму оценим тривиально с помощью неравенства Чебышева, аналогично лемме 100, получим

$$0\leqslant S_2(x,q)\leqslant\sum_{p\leqslant q}\pi(p)\leqslant c_2\sum_{n=2}^{q}\frac{n}{\ln n}\Delta\pi(n)=c_2\left(\frac{q}{\ln q}\pi(q)-\right.$$
$$\left.-\sum_{n=3}^{q-1}\pi(n)\left(\frac{n+1}{\ln(n+1)}-\frac{n}{\ln n}\right)+\frac{\ln 1,125}{\ln 2\cdot\ln 3}\right)\leqslant c_2^2\frac{q^2}{\ln^2 q}+c_2.$$

Для первой и третьей сумм можно применить оценку из теоремы Бруна-Титчмарша (стр. 248), получим:

$$0\leqslant S_3(x,q)=\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{q<p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a\pmod q}\pi(p-1,a^*,q)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{q<p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a\pmod q}\frac{(2+\eta)(p-1)}{\varphi(q)\ln(2(p-1)/q)}.$$

Так как выражение, стоящее под знаком суммы не зависит от a и a^*, то суммирование по a исчезнет, а останется только суммирование по $q<p\leqslant\sqrt{x}$. Таким образом, получим

$$S_3(x,q)\leqslant\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{q<p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a\pmod q}\frac{(2+\eta)(p-1)}{\varphi(q)\ln(2(p-1)/q)}=$$
$$=\sum_{q<p\leqslant\sqrt{x}}\frac{(2+\eta)(p-1)}{\varphi(q)\ln(2(p-1)/q)}.$$

Положим

$$S_3^*(x,q) = \sum_{q<n\leqslant\sqrt{x}} \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\Delta\pi(n) = \sum_{n=q+1}^{x_1} \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\Delta\pi(n),$$

тогда

$$S_3(x,q) \leqslant \frac{2+\eta}{\varphi(q)} S_3^*(x,q).$$

Аналогично, для $S_1(x,q)$ имеем:

$$S_1(x,q) = \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1} \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \pi\left(\frac{x}{p}, a^*, q\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2+\eta}{\varphi(q)} \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1} \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \frac{x}{p\ln(2x/(qp))} =$$
$$= \frac{2+\eta}{\varphi(q)} \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,(p,q)=1} \frac{x}{p\ln(2x/(qp))}.$$

Сначала оценим $S_3^*(x,q)$, действуя аналогично доказательству леммы 100, получим:

$$S_3^*(x,q) = \sum_{n=q+1}^{x_1} \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\Delta\pi(n) = \sum_{n=q+1}^{x_1} \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}(\pi(n)-\pi(n-1)) =$$
$$= \frac{x_1-1}{\ln(2(x_1-1)/q)}\pi(x_1) + \sum_{n=q+1}^{x_1-1} \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\pi(n) - \sum_{n=q}^{x_1-1} \frac{n}{\ln(2n/q)}\pi(n) =$$
$$= \frac{x_1-1}{\ln(2(x_1-1)/q)}\pi(x_1) - \sum_{n=q+1}^{x_1-1} \pi(n)\left(\frac{n}{\ln(2n/q)} - \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\right) - \frac{q}{\ln 2}\pi(q).$$

Так как при $n > \frac{eq}{2}$ коэффициенты

$$\left(\frac{n}{\ln(2n/q)} - \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\right) > 0,$$

а при $q < n < \frac{eq}{2}$ эти коэффициенты отрицательные, то для $S_3^*(x,q)$ выполняется оценка $S_3^*(x,q) = O\left(\frac{x}{\ln\sqrt{x}\ln\frac{2\sqrt{x}}{q}}\right) = O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$.

Перейдём к оценке $S_1^*(x,q)$. Прежде всего, заметим, что при $x > \frac{q^4}{64}$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{3}(\ln x - \ln q) < \ln 2 + \frac{1}{2}\ln x - \ln q.$$

Поэтому при $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{x}$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{3}(\ln x - \ln q) < \ln 2 + \frac{1}{2}\ln x - \ln q \leqslant \ln\frac{2x}{pq} \leqslant \ln x - \ln q.$$

Отсюда следует, что

$$S_1^*(x,q) \leqslant \frac{2+\eta}{\varphi(q)} \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,(p,q)=1} \frac{x}{p\ln(2x/(qp))} \leqslant \frac{3(2+\eta)x}{\varphi(q)(\ln x - \ln q)} \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \frac{1}{p}$$

К сумме по p применим теорему 63, получим:

$$S_1^*(x,q) \leqslant \frac{3(2+\eta)x}{\varphi(q)(\ln x - \ln q)}(\ln\ln\sqrt{x} + 2a) \leqslant \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q}.$$

Объединяя эту оценку с оценками величин $S_2(x,q)$, $S_3(x,q)$ и $S_3^*(x,q)$, получим

$$\pi_2(x,q) \leqslant \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

и теорема доказана. □

8.6. Количество простых элементов в трех моноидах

Согласно лемме 98 при $q = 3, 4, 6$ справедливо равенство

$$\pi_{M_{q,1}}(x) = \pi(x,1,q) + \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv q-1 \pmod q} \left(\pi\left(\frac{x}{p}, q-1, q\right) - \pi(p-1, q-1, q)\right).$$

Так как $\varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2$, то неравенство Бруна-Титчмарша запишется наиболее просто:

$$\pi(x,1,q) \leqslant \frac{(2+\eta)x}{2\ln(2x/q)}, \quad \pi\left(\frac{x}{p}, q-1, q\right) \leqslant \frac{(2+\eta)x}{2p\ln(2x/(pq))},$$
$$\pi(p-1, q-1, q) \leqslant \frac{(2+\eta)(p-1)}{2\ln(2(p-1)/q)}.$$

Согласно лемме 97 при $q = 3, 4, 6$ справедливо равенство

$$\pi_2(x,q) = \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv 1 \pmod q} \left(\pi\left(\frac{x}{p}, 1, q\right) - \pi(p-1, 1, q)\right) +$$
$$+ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv q-1 \pmod q} \left(\pi\left(\frac{x}{p}, q-1, q\right) - \pi(p-1, q-1, q)\right).$$

Отсюда следует, что

$$\pi_{M_{q,1}}(x) \leqslant \pi(x,1,q) + \pi_2(x,q)$$

и справедлива следующая теорема.

Теорема 65. *При $q = 3,4,6$ для количества простых элементов в моноиде $M_{q,1}$ при $x > \frac{q^4}{64}$ справедливо соотношение*

$$\pi_{M_{q,1}}(x) \leqslant \frac{(2+\eta)x}{2\ln(2x/q)} + \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Так как моноид $M_{q,1} = M_{q,1,1} \cdot M_{q,1,q-1}$, где моноиды $M_{q,1,1}$ и $M_{q,1,q-1}$ заданы равенствами

$$\mathbb{N}_{q,1} = M_{q,1} = \{n = qk+1 | k \geqslant 0\}, \quad M_{q,1,1} = \{n = qk+1 | \chi_{q,1}(n) = 1\}, \tag{8.14}$$

$$M_{q,1,q-1} = \{n = qk+1 | \chi_{q,q-1}(n) = 1\}, \quad M_{q,1,q-1,0} = \{n \in M_{q,1,q-1} | n \neq p^\alpha\}, \tag{8.15}$$

$$\begin{gathered} M_{q,q-1} = \{n | \chi_{q,q-1}(n) = 1\}, \quad \mathbb{N}_{q,q-1} = \{n = qk+q-1 | k \geqslant 0\}, \\ \mathbb{N}_{q,q-1,q-1} = \{n = qk+q-1 | k \geqslant 0, \chi_{q,q-1}(n) = 1\}. \end{gathered} \tag{8.16}$$

где мультипликативные функции $\chi_{q,1}(n)$ и $\chi_{q,q-1}(n)$ заданы равенствами

$$\chi_{q,1}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^\alpha,\ p = qm+1,\ \alpha \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } n = p^\alpha,\ p|q, p = qm+q-1,\ \alpha \geqslant 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{q,1}(p^{\alpha_p}), & \text{при } \ n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}; \end{cases}$$

.

$$\chi_{q,q-1}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^\alpha,\ p = qm+q-1,\ \alpha \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } n = p^\alpha,\ p|3,\ p = qm+1,\ \alpha \geqslant 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{q,q-1}(p^{\alpha_p}), & \text{при } \ n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}, \end{cases}$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 66. *При $q = 3,4,6$ для количества простых элементов в моноиде $M_{q,1,q-1}$ при $x > \frac{q^4}{64}$ справедливо соотношение*

$$\pi_{M_{q,1,q-1}}(x) \leqslant \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

С теоремами 65 и 66 связаны следующие замечания.

Во-первых, дзета-функция $\zeta(M_{q,1}|\alpha)$ моноида $M_{q,1}$ выражается через дзета-функцию Гурвица $\zeta\left(\alpha, \frac{1}{q}\right)$ по формуле

$$\zeta(M_{q,1}|\alpha) = \frac{1}{q^\alpha}\zeta\left(\alpha, \frac{1}{q}\right).$$

Отсюда следует, что дзета-функция $\zeta(M_{q,1}|\alpha)$ моноида $M_{q,1}$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, где у неё полюс первого порядка с вычетом

$$\operatorname*{Res}_{1} \zeta(M_{q,1}|\alpha) = \frac{1}{q}.$$

Так как моноиды $M_{q,1,1}$ и $M_{q,1,q-1}$ взаимно просты, то имеет место равенство для дзета-функций

$$\zeta(M_{q,1}|\alpha) = \zeta(M_{q,1,1}|\alpha)\zeta(M_{q,1,q-1}|\alpha) \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1. \tag{8.17}$$

Возникает вопрос об аналитическом продолжении сомножителей в правой части равенства (8.17) на всю комплексную плоскость кроме точки $\alpha = 1$, где оба сомножителя имеют полюса.

Во-вторых, как известно, дзета-функция Гурвица имеет нули как справа от прямой $\sigma = 1$, так и в полосе $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ (см. [9, 30, 33, 155]). Отсюда следует, что дзета-функция $\zeta(M_{q,1,q-1}|\alpha)$ имеет нули справа от прямой $\sigma = 1$. Вопрос о нулях в полосе $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ будет следующим, после того как удастся получить аналитическое продолжение для этой дзета-функции.

8.7. Заключение к восьмой главе

1. Из анализа оценки теоремы из введения видно, что формула из леммы 3 более удобная для оценок, чем формула из леммы 2. Это объясняется тем, что она содержит только один интервал суммирования длины $\sqrt{x}$ и возникающие на нём функции знакопостоянные.

2. Переход к изучению величины составных, равных произведению двух простых, в классе вычетов требует применения неравенства Бруна-Титчмарша

вместо более точного неравенства Чебышева. Поэтому таким способом можно получить только оценки сверху.

3. Результат для класса вычетов сравнимых с единицей должен быть справедлив для любого класса вычетов, взаимно простого с модулем.

4. Вопросы о распределении простых элементов в моноидах $M_{q,1}$ при $q \neq 2, 3, 4, 6$ являются более сложными, так как требуют подсчета псевдопростых чисел порядка больше 2.

5. На наш взгляд очень интересным является вопрос об аналогах теоремы Дэвенпорта–Хейльбронна для разбиения произвольных моноидов натуральных чисел на классы вычетов по модулю произвольного $q > 2$.

6. Пусть $1 < g_1 < \ldots < g_{\varphi(p-1)} < p$ — наименьшая положительная система первообразных корней по модулю p. Можно рассмотреть $\varphi(p-1)$ моноидов $M(\mathbb{P}_{p,g})$ с однозначным разложением на простые множители:

$$\mathbb{P}_{p,g} = \left\{ q \in \mathbb{P} \,|\, q \equiv g \pmod{p} \right\},$$

где g — произвольный первообразный корень по модулю p.

Рассмотрим моноид $M_1(\mathbb{P}_{p,g}) = M(\mathbb{P}_{p,g}) \bigcap \overline{\overline{1}}$, который уже не обладает однозначным разложением на простые элементы. Нетрудно понять, что множество его простых элементов $P(M_1(\mathbb{P}_{p,g}))$ задается равенством

$$P(M_1(\mathbb{P}_{p,g})) = (\mathbb{P}_{p,g})^{p-1},$$

то есть состоит из псевдопростых чисел порядка $p - 1$. Таким образом, интересная задача нахождения асимптотического закона распределения простых элементов для этого моноида существенно усложняется. Мы надеимся в одной из следующих работ решить эту задачу.

7. Рассмотрим бесконечные множества $A_k(\mathbb{P}_{p,g})$ при $k = 1, \ldots, p-1$, заданные равенствами

$$A_k(\mathbb{P}_{p,g}) = \left\{ a \in M(\mathbb{P}_{p,g}) \,|\, a \equiv g^k \pmod{p} \right\}.$$

Ясно, что $A_{p-1}(\mathbb{P}_{p,g}) = M_1(\mathbb{P}_{p,g})$.

На наш взгляд очень интересным является вопрос об аналогах теоремы Дэвенпорта–Хейльбронна для каждого из множеств $A_k(\mathbb{P}_{p,g})$ $1 \leqslant k \leqslant p-1$.

Глава 9

О моноиде квадратичных вычетов

9.1. Введение к девятой главе

Пусть $p > 2$ — простое число и $\mathbb{Z}_p = \left\{\overline{\overline{0}}, \ldots, \overline{\overline{p-1}}\right\}$ — простое поле классов вычетов[1] по модулю p. $\mathbb{Z}_p^* = \left\{\overline{\overline{1}}, \ldots, \overline{\overline{p-1}}\right\}$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{Z}_p$ и через $\mathbb{Z}_{p,2}^*$ будем обозначать подгруппу квадратичных вычетов по модулю p, которая, как хорошо известно, имеет индекс $\left[\mathbb{Z}_p^* : \mathbb{Z}_{p,2}^*\right] = 2$. Через $r_1 < r_2 < \ldots < r_{\frac{p-1}{2}}$ будем обозначать наименьшую положительную систему квадратичных вычетов по модулю p, соответственно, через $r_{\frac{p+1}{2}} < \ldots < r_{p-1}$ — наименьшую положительную систему квадратичных невычетов по модулю p.

В работах [195], [196] начато исследование дзета-функций мультипликативных моноидов натуральных чисел. В данной работе нас будет интересовать моноид $M_{p,2}$ всех натуральных чисел, являющихся квадратичными вычетами по модулю p. Таким образом[2],

$$M_{p,2} = \left\{ a \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left(\frac{a}{p}\right) = 1 \right\} = \bigcup_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}} (r_\nu + p\mathbb{N}_0),$$

где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$.

При изучении моноидов натуральных чисел существенную роль играют простые элементы моноида. Если M — произвольный моноид натуральных чисел,

[1] Здесь и далее через $\overline{\overline{a}}$ обозначается класс вычетов чисел сравнимых с a по модулю p.

[2] Здесь и далее, как обычно, $\left(\frac{a}{p}\right)$ — символ Лежандра числа a по модулю p.

то $P(M)$ — множество его простых элементов состоит из тех элементов моноида M отличных от единицы, которые нельзя представить в виде произведения других неединичных элементов моноида M. Таким образом, если простое число $p \in M$, то $p \in P(M)$, но, вообще говоря, не все элементы из $P(M)$ являются простыми числами. В $P(M)$ могут входить и псевдопростые числа. Элемент q из M, являющийся составным числом, будет псевдопростым числом в M, если ни один его собственный делитель не является элементом из M.

Разобьём множество простых чисел $\mathbb{P}$ на два бесконечных подмножества $\mathbb{P}_p^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2)$ и одноэлементное множество $\{p\}$:

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p^{(1)} \bigcup \mathbb{P}_p^{(2)} \bigcup \{p\}, \quad \mathbb{P}_p^{(\nu)} = \left\{ q \in \mathbb{P} \,\middle|\, \left(\frac{q}{p}\right) = 3 - 2\nu \right\} \quad (\nu = 1, 2).$$

Нетрудно понять, что множество простых элементов моноида $M_{p,2}$ состоит из множества простых чисел $\mathbb{P}_p^{(1)}$ и множества псевдопростых чисел $\mathbb{P}_p^{(2)} \cdot \mathbb{P}_p^{(2)}$:

$$P(M_{p,2}) = \mathbb{P}_p^{(1)} \bigcup \left(\mathbb{P}_p^{(2)} \cdot \mathbb{P}_p^{(2)} \right).$$

Это разбиение соответствует разложению моноида $M_{p,2}$ в произведение двух взаимно простых моноидов $M_{p,2} = M_{p,2}^{(1)} \cdot M_{p,2}^{(2)}$, где

$$M_{p,2}^{(\nu)} = \left\{ a \in M_{p,2} \,\middle|\, a = \prod_{j=1}^{n} q_j^{\alpha_j},\, q_j \in \mathbb{P}_p^{(\nu)} \right\}, \quad \nu = 1, 2.$$

Ясно, что при $\nu = 1$ показатели степени $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные натуральные числа, а при $\nu = 2$ они удовлетворяют дополнительному условию четности суммы:

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \equiv 0 \pmod 2.$$

В работе [196] дано описание общего вида моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы. В случае произвольного моноида M натуральных чисел общий вид $P(M)$ множества его простых элементов очень просто описать. А именно, $P(M)$ является максимальным множеством элементов из M таким, что ни один элемент из $P(M)$ не делится ни на какой другой элемент из $P(M)$. Через $\pi_M(x)$ будем обозначать количество простых элементов в моноиде M, не превосходящих x.

Если $\mathbb{P}^*$ — произвольное подмножество простых чисел, то простейшим примером моноида с однозначным разложением на простые множители является моноид $M(\mathbb{P}^*)$, образованный множеством простых $\mathbb{P}^*$:

$$M(\mathbb{P}^*) = \left\{ a \in \mathbb{N} \,\middle|\, a = \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j},\, p_j \in \mathbb{P}^* \right\}.$$

Так как множество простых элементов $P(M)$ может содержать псевдопростые числа, то можно определить порядок простого элемента $q \in P(M)$ как величину $V(q)$ — общее число простых делителей числа q с учетом их кратности.

Таким образом, простые числа p из $P(M)$ выделяются среди всех простых элементов q, как те, у которых порядок равен 1.

Согласно предыдущему определению все простые элементы в моноиде $M_{p,2}^{(1)}$ имеют порядок 1, то есть являются обычными простыми числам, которые одновременно являются квадратичными вычетами по модулю p, таким образом, $M_{p,2}^{(1)} = M\left(\mathbb{P}_p^{(1)}\right)$. А все простые элементы из моноида $M_{p,2}^{(2)}$ имеют порядок 2 и являются псевдопростыми числами, то есть составными числами, равными произведению двух простых чисел, каждое из которых квадратичный невычет по модулю p. Таким образом, справедливо равенство $M_{p,2}^{(2)} = M\left(\mathbb{P}_p^{(2)} \cdot \mathbb{P}_p^{(2)}\right)$.

Если через A^n обозначать произведение числовых множеств $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ из n сомножителей, которое состоит из всевозможных произведений $a_1 a_2 \ldots a_n$ чисел из A, то можно записать равенства:

$$M_{p,2}^{(1)} = \{1\} \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}_p^{(1)}\right)^n, \quad M_{p,2}^{(2)} = \{1\} \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}_p^{(2)}\right)^{2n}.$$

Обозначим через $\zeta(M|\alpha)$ дзета-функцию моноида M:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда, а через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{q \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{q^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha) \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M.$$

В частности,

$$\zeta\left(M_{p,2}^{(1)}\middle|\,\alpha\right) = P\left(M_{p,2}^{(1)}\middle|\,\alpha\right), \quad \sigma_{M_{p,2}^{(1)}} = 1.$$

Будем называть каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел представление вида

$$x = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}, \quad 1 < q_1 < \dots < q_k, \quad q_1, \dots, q_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа x, тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

Так как в моноиде $M_{p,2}^{(2)}$ нет однозначности разложения на простые элементы, то

$$\zeta\left(M_{p,2}^{(2)}\middle|\,\alpha\right) \neq P\left(M_{p,2}^{(2)}\middle|\,\alpha\right).$$

Из равенства для моноидов $M_{p,2} = M_{p,2}^{(1)} \cdot M_{p,2}^{(2)}$ в силу их взаимной простоты следует равенство для дзета-функций:

$$\zeta(M_{p,2}|\alpha) = \zeta\left(M_{p,2}^{(1)}\middle|\,\alpha\right) \cdot \zeta\left(M_{p,2}^{(2)}\middle|\,\alpha\right).$$

В моноиде $M_{p,2}^{(2)}$ есть подмоноид $M_{p,2}^{(2,2)}$ с однозначным разложение на простые элементы — это моноид, образованный из квадратов простых чисел, квадратичных невычетов по модулю p:

$$M_{p,2}^{(2,2)} = \left\{a \in \mathbb{N} \,\middle|\, a = p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n}, \quad p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_p^{(2)}\right\}.$$

Если через $R_{p,2}^{(2)}$ обозначить множество радикалов четного порядка[3], образованное из простых чисел, квадратичных невычетов по модулю p:

$$R_{p,2}^{(2)} = \left\{a \in \mathbb{N} \,\middle|\, a = p_1 \dots p_{2n}, \quad p_1 < \dots < p_{2n} \in \mathbb{P}_p^{(2)}\right\},$$

то будут справедливы равенства: $M_{p,2}^{(2)} = M_{p,2}^{(2,2)} \cdot R_{p,2}^{(2)}$,

$$\zeta\left(M_{p,2}^{(2)}\middle|\,\alpha\right) = \zeta\left(M_{p,2}^{(2,2)}\middle|\,\alpha\right) \cdot \zeta\left(R_{p,2}^{(2)}\middle|\,\alpha\right), \quad \zeta\left(M_{p,2}^{(2,2)}\middle|\,\alpha\right) = P\left(M_{p,2}^{(2,2)}\middle|\,\alpha\right).$$

Заметим, что справедливо интересное равенство эйлеровых произведений:

$$P\left(M_{p,2}^{(2,2)}\middle|\,\alpha\right) = P\left(M\left(\mathbb{P}_p^{(2)}\right)\middle|\,2\alpha\right),$$

из которого следует, что $\zeta\left(M_{p,2}^{(2,2)}\middle|\,\alpha\right)$ не имеет нулей при $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$.

Цель данной главы — изучить свойства функции распределения простых элементов $\pi_{M_{p,2}^{(\nu)}}(x)$ для $\nu = 1, 2$. Отметим, что $\pi_{M_{p,2}}(x) = \pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x) + \pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x)$.

9.2. Общие формулы для числа простых и псевдопростых

Пусть, как обычно, $\pi(x, a, p)$ — количество простых чисел q, не превосходящих x, для которых $q \equiv a \pmod p$, тогда с помощью этих обозначений можно легко написать выражение для $\pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x)$ и $\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x)$.

Лемма 104. *Справедливо равенство*

$$\pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x) = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \pi(x, r_j, p).$$

Доказательство. Действительно, если

$$q \leqslant x, \quad q \equiv r_j \pmod p, \quad j = 1, \dots, \frac{p-1}{2},$$

то $q \in \mathbb{P}_p^{(1)}$.

[3]Термин радикал мы используем как современный синоним понятия бесквадратное число. Таким образом, число n — радикал, если оно равно своему радикалу, то есть все простые делители числа n входят в него в первой степени.

Если $q \leqslant x$ и $q \in \mathbb{P}_p^{(1)}$, то найдется единственный квадратичный вычет r_j по модулю p такой, что

$$q \equiv r_j \pmod p.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

□

Лемма 105. *Справедливо равенство*

$$\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x) = \sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \sum_{\substack{q_1 \leqslant \sqrt{x}, \\ q_1 \equiv r_j \pmod p}} \sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \left(\pi\left(\frac{x}{q_1}, r_i, p\right) - \pi\left(q_1 - 1, r_i, p\right)\right).$$

Доказательство. Действительно, псевдопростое число $q \in P(M_{p,2}^{(2)})$, и непревосходящее x, имеет вид $q = q_1 q_2$, $1 < q_1 \leqslant \sqrt{x}$, $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \frac{x}{q_1}$, $q_1 \equiv r_j \pmod p$, $q_2 \equiv r_i \pmod p$, где $\frac{p+1}{2} \leqslant i, j \leqslant p-1$.

Так как количество q_2, удовлетворяющих условиям $q_2 \equiv r_i \pmod p$ и $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \frac{x}{q_1}$, равно $\pi\left(\frac{x}{q_1}, r_i, p\right) - \pi(q_1 - 1, r_i, p)$, то лемма доказана. □

9.3. Вспомогательные утверждения

Прежде всего, сформулируем неравенство Чебышёва. 24 мая 1848 г. П. Л. Чебышёв представил в Санкт-Петербургскую Академию наук мемуар “Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины” (Полн. собр. соч., т. I, с. 173–190). Таким образом, в этом году исполнилось 170 лет со дня выхода этой принципиальной работы, с которой началась современная теория распределения простых чисел.

Во втором мемуаре он доказал оценки

$$(0,92\ldots)\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant (1,105\ldots)\frac{x}{\ln x}. \tag{9.1}$$

Обозначим через $c_1 = 0,92\ldots$ и $c_2 = 1,105\ldots$ константы из неравенств Чебышёва для функции $\pi(x)$.

Заметим, что конечная разность $\Delta\pi(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$ является на множестве натуральных чисел характеристической функцией множества простых чисел. Аналогично, конечная разность $\Delta\pi(n,l,p) = \pi(n,l,p) - \pi(n-1,l,p)$ является на множестве натуральных чисел характеристической функцией множества простых чисел q вида $q = l + kp$.

Ещё нам потребуются следующие асимптотические равенства, которые уже стали классическими и получены с помощью дзета-функции Римана и L-функций Дирихле. Пусть β_1 — исключительный ноль исключительного характера χ_1 по модулю k, тогда $\frac{3}{4} \leqslant \beta_1 < 1$ (см. [112], стр. 150–151, 157).

Теорема 67. *Равенство*

$$\pi(x,l,k) = \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{\varphi(k)} + xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right) \tag{9.2}$$

выполняется равномерно при $k \leqslant \exp(c_{10}\sqrt{\ln x})$.

Доказательство. См. [112], стр. 157. □

Теорема 68. *При постоянном* k

$$\pi(x,l,k) = \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{li} x + O\left(xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right), \tag{9.3}$$

в частности,

$$\pi(x,l,k) \sim \frac{x}{\varphi(k)\ln x}, \quad x \to \infty. \tag{9.4}$$

Доказательство. См. [112], стр. 157. □

Теорема 69. *При постоянном* k

$$\pi(x,l,k) = \frac{x}{\varphi(k)\ln x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right), \quad x \to \infty. \tag{9.5}$$

Доказательство. См. [112], стр. 158. □

Теорема 70. *При* $x \to \infty$ *имеют место соотношения*

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + a + O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{9.6}$$

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = B\ln x + O(1). \tag{9.7}$$

Здесь a *и* B *— некоторые константы, причём* $B > 0$.

Доказательство. См. [112], стр. 28–30. На стр. 92 дается вариант теоремы с более точным остаточным членом чем в формуле (9.6):

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+\gamma-\sum_{p}\sum_{m\geqslant 2}\frac{1}{mp^m}+O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right).$$

На стр. 94 дается более точное выражение формулы (9.7) в виде

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\ln x}\left(1+O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)\right).$$

Здесь γ — константа Эйлера,

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n\right)=\int\limits_0^1\frac{1-e^{-u}}{u}du-\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du.$$

□

Из теорем 69 и 70 докажем следующий результат.

Теорема 71. *При постоянном k и $\frac{3}{4}\leqslant\beta_1<1$ справедливы соотношения:*

$$\sum_{\substack{q\leqslant x,\\ q\equiv l \pmod k}}\frac{1}{q}=\frac{1}{\varphi(k)}\left(\ln\ln x+a_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right),\quad x\to\infty, \tag{9.8}$$

$$\sum_{l=1,\,(l,k)=1}^{k-1}\ \sum_{\substack{q\leqslant x,\\ q\equiv l \pmod k}}\frac{1}{q^{\beta_1}}=O\left(\frac{x^{1-\beta_1}}{(1-\beta_1)\ln x}\right), \tag{9.9}$$

где a_1 — некоторая константа.

Доказательство. Действительно, пользуясь теоремой 69, получим:

$$\sum_{\substack{q\leqslant x,\\ q\equiv l \pmod k}}\frac{1}{q}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Delta\pi(n,l,k)}{n}=\frac{\pi([x],l,k)}{[x]}+\sum_{n=2}^{[x]-1}\pi(n,l,k)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\varphi(k)\ln[x]}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+\sum_{n=2}^{[x]-1}\frac{1}{\varphi(k)(n+1)\ln n}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\varphi(k)}\left(\ln\ln x+a_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)$$

и соотношение (9.8) доказано.

Аналогично, получим

$$\sum_{\substack{q\leqslant x,\\ q\equiv l \pmod k}} \frac{1}{q^{\beta_1}} = \sum_{n\leqslant x} \frac{\Delta\pi(n,l,k)}{n^{\beta_1}} = \frac{\pi([x],l,k)}{[x]^{\beta_1}} + \sum_{n=2}^{[x]-1} \pi(n,l,k)\left(\frac{1}{n^{\beta_1}} - \frac{1}{(n+1)^{\beta_1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[x]^{1-\beta_1}}{\varphi(k)\ln[x]}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) + \sum_{n=2}^{[x]-1} \frac{\beta_1}{\varphi(k)n^{\beta_1}\ln n}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} O\left(\frac{x^{1-\beta_1}}{(1-\beta_1)\ln x}\right)$$

и теорема полностью доказана. □

9.4. Количество простых

Сначала выведем асимптотическую формулу для числа простых в моноиде $M_{p,2}^{(1)}$.

Теорема 72. *Для количества простых чисел в моноиде* $M_{p,2}^{(1)}$ *при* $p < \exp(c_{10}\sqrt{\ln x})$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{2} + \frac{p-1}{2} x e^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right).$$

Доказательство. Так как $p < \exp(c_{10}\sqrt{\ln x})$, то $r_j < \exp(c_{10}\sqrt{\ln x})$ для $1 \leqslant j \leqslant \leqslant p-1$. Поэтому по теореме 67 имеем:

$$\pi(x, r_j, p) = \frac{1}{p-1}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{p-1} + x e^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right).$$

Применяя лемму 104, получим:

$$\pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x) = \sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \left(\frac{1}{p-1}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{p-1} + x e^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{2} + \frac{p-1}{2} x e^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right)$$

и теорема доказана. □

9.5. Количество псевдопростых

Перейдём к выводу асимптотической формулы для числа псевдопростых чисел в моноиде $M_{p,2}^{(2)}$. Для этого перепишем утверждение леммы 105 в виде

$$\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x) = S_1(x,p) - S_2(x,p),$$

где

$$S_1(x,p) = \sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \sum_{\substack{q_1 \leqslant \sqrt{x}, \\ q_1 \equiv r_j \pmod p}} \sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \pi\left(\frac{x}{q_1}, r_i, p\right),$$

$$S_2(x,p) = \sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \sum_{\substack{q_1 \leqslant \sqrt{x}, \\ q_1 \equiv r_j \pmod p}} \sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \pi\left(q_1 - 1, r_i, p\right).$$

Сумму $S_2(x,p)$ оценим грубо с помощью неравенства Чебышёва.

Лемма 106. *Справедлива оценка*

$$S_2(x,p) \leqslant 4c_2^2 \frac{x}{\ln^2 x}.$$

Доказательство. Действительно, при $q_1 \leqslant \sqrt{x}$ имеем:

$$\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \pi\left(q_1 - 1, r_i, p\right) \leqslant \pi\left(\sqrt{x}\right),$$

поэтому

$$S_2(x,p) \leqslant \sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \sum_{\substack{q_1 \leqslant \sqrt{x}, \\ q_1 \equiv r_j \pmod p}} \pi\left(\sqrt{x}\right) \leqslant \pi^2\left(\sqrt{x}\right) \leqslant \left(c_2 \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}\right)^2 = 4c_2^2 \frac{x}{\ln^2 x}.$$

$\square$

Введём обозначения

$$S_3(x,p)=\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\frac{1}{p-1}\operatorname{li}\left(\frac{x}{q_1}\right)=\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\frac{1}{2}\operatorname{li}\left(\frac{x}{q_1}\right),$$

$$S_4(x,p)=\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}O\left(\frac{\left(\frac{x}{q_1}\right)^{\beta_1}}{p-1}+\left(\frac{x}{q_1}\right)e^{-c_9\sqrt{\ln\left(\frac{x}{q_1}\right)}}\right)=$$

$$=\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}O\left(\frac{\left(\frac{x}{q_1}\right)^{\beta_1}}{2}+\frac{p-1}{2}\left(\frac{x}{q_1}\right)e^{-c_9\sqrt{\ln\left(\frac{x}{q_1}\right)}}\right).$$

Ясно, что в силу теоремы 67

$$S_1(x,p)=S_3(x,p)+S_4(x,p).$$

Лемма 107. *Справедлива оценка*

$$S_4(x,p)=O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}+\frac{p-1}{4}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\ln\ln\sqrt{x}\right).$$

Доказательство. Действительно,

$$e^{-c_9\sqrt{\ln\left(\frac{x}{q_1}\right)}}\leqslant e^{-c_9\sqrt{\ln\left(\sqrt{x}\right)}}=e^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}.$$

Поэтому

$$S_4(x,p)=O\left(\frac{x^{\beta_1}}{2}\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\frac{1}{q_1^{\beta_1}}+\frac{p-1}{2}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\frac{1}{q_1}\right).$$

Воспользуемся теоремой 71, получим

$$S_4(x,p)=$$

$$=O\left(\frac{x^{\beta_1}}{2}\frac{x^{1-\beta_1}}{(1-\beta_1)\ln x}+\frac{p-1}{2}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\frac{1}{2}\left(\ln\ln\sqrt{x}+a_1+O\left(\frac{1}{\ln\sqrt{x}}\right)\right)\right)=$$

$$=O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}+\frac{p-1}{4}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\ln\ln\sqrt{x}\right).$$

□

Лемма 108. *Справедлива оценка*

$$S_3(x,p) = \frac{x\ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{2\ln x}\right).$$

Доказательство. Действительно, имеем:

$$\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}} \frac{1}{2}\,\mathrm{li}\left(\frac{x}{q_1}\right) = \pi(\sqrt{x}, r_j, p)\frac{1}{2}\,\mathrm{li}\left(\sqrt{x}\right) + \int\limits_2^{\sqrt{x}} \frac{\pi(t,r_j,p)x}{t^2\ln\left(\frac{x}{t}\right)}dt =$$

$$= O\left(\frac{x}{2(p-1)\ln^2 x}\right) + \int\limits_2^{\sqrt{x}} \frac{tx}{(p-1)(\ln t)t^2\ln\left(\frac{x}{t}\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln t}\right)\right)dt =$$

$$= O\left(\frac{x}{2(p-1)\ln^2 x}\right) + O\left(\int\limits_2^{\sqrt{x}} \frac{x}{(p-1)(\ln^2 t)t\ln\left(\frac{x}{t}\right)}dt\right) +$$

$$+ \int\limits_2^{\sqrt{x}} \frac{x}{(p-1)(\ln t)t\ln\left(\frac{x}{t}\right)}dt = O\left(\frac{x}{2(p-1)\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{x}{(p-1)\ln x}\right) +$$

$$+ \frac{x}{p-1}\int\limits_{\ln 2}^{\ln\sqrt{x}} \frac{du}{u(\ln x - u)} = \frac{x\ln\ln x}{(p-1)\ln x} + O\left(\frac{x}{(p-1)\ln x}\right).$$

Отсюда следует, что

$$S_3(x,p) = \sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\left(\frac{x\ln\ln x}{(p-1)\ln x} + O\left(\frac{x}{(p-1)\ln x}\right)\right) =$$

$$= \frac{x\ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{2\ln x}\right).$$

□

Теорема 73. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x) = \frac{x\ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}\right).$$

Доказательство. Действительно, по леммам 106–108 имеем:

$$\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x) = S_1(x,p) - S_2(x,p) = S_1(x,p) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) = S_3(x,p) +$$

$$+ O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x} + \frac{p-1}{4}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\ln\ln\sqrt{x}\right) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) =$$

$$= \frac{x \ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{2\ln x}\right) + O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x} + \frac{p-1}{4} x e^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}} \ln\ln\sqrt{x}\right) +$$
$$+ O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) = \frac{x \ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x} + \frac{p-1}{4} x e^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}} \ln\ln\sqrt{x}\right) =$$
$$= \frac{x \ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}\right).$$

□

9.6. Заключение к девятой главе

В данной главе рассмотрен моноид $M_{p,2}$ натуральных чисел, образованный подгруппой всех квадратичных вычетов по заданному простому модулю p. Для такого моноида множество простых элементов очень просто описывается: либо это простое число, которое является квадратичным вычетом по модулю p, либо это псевдопростое число, которое является произведением двух простых квадратичных невычетов. Поэтому для этого моноида оказалось возможным найти асимптотический закон распределения простых элементов.

Глава 10

Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых

10.1. Введение к десятой главе

В работе [195] дано следующее определение экспоненциальной последовательностью простых чисел.

Определение 14. *Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечная последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ называется экспоненциальной типа q, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.*

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым, (см. [143]) для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел типа q.

В работе [195] было дано определение

Определение 15. *Для любого множества A натуральных чисел дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ определяется равенством*

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > \sigma_A). \tag{10.1}$$

Если множество A конечное, то равенство (3) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (3) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$ (см. [133], [143]). Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Пусть $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q и $M(PE)$ — моноид натуральных чисел, образованный с помощью PE. В работе [195] доказана следующая теорема.

Теорема 74. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ типа q дзета-ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

В работе [197] была высказана гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$, которая была доказана в работе [203]. Тем самым было установлено, что для этой дзета-функции её область голоморфности совпадает с правой полуплоскостью $\sigma > 0$.

В работе [196] доказана теорема о количестве простых элементов в моноиде $M(A)$, не превосходящих x, которое будем обозначать через $\pi_{P(M)}(x)$. В общем случае это непростая задача, однако для случая любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ типа q и моноида $M(PE)$ можно дать удовлетворительный ответ.

Теорема 75. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ типа q для количества простых элементов в моноиде $M(PE)$, не превосходящих x, справедливо равенство*

$$\pi_{PE}(x) = \frac{\ln x}{\ln q} - \theta_{PE}(x),$$

где $0 \leqslant \theta_{PE}(x) = \left\{\frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q}\right\} + \left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\} < 2$ *при* $q^n \leqslant x < q^{n+1}$.

В работе [198] было дано определение σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел.

Определение 16. *Последовательность $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел называется σ-последовательностью, если*

$$\mathbb{P}_\sigma = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots\}$$

и найдется N_σ такое, что для любого $n > N_\sigma$ выполняются неравенства

$$n^\sigma \leqslant p_n < (n+1)^\sigma. \tag{10.2}$$

Нам потребуется теорема Ингама о простых числах в следующей формулировке (см. [135], стр. 66).

Теорема 76. *Существует $X_I > 1$ такое, что для любого $x > X_I$ найдется простое число p_x, для которого выполнены неравенства*

$$x^3 \leqslant p_x \leqslant (x+1)^3. \tag{10.3}$$

Из этой теоремы сразу следует следующее утверждение.

Пусть $\sigma > 3$ и $X_{I,\sigma} = X_I^{\frac{3}{\sigma}}$, тогда для любого $x > X_{I,\sigma}$ найдется простое число $p_{x,\sigma}$, для которого выполнены неравенства

$$x^\sigma \leqslant p_{x,\sigma} \leqslant (x+1)^\sigma. \tag{10.4}$$

Из следствия из теоремы Ингама следует, что σ-последовательности простых чисел существуют для любого $\sigma \geqslant 3$.

Остановимся на вопросе о распределении простых чисел в σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел. Обозначим количество простых чисел в σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел, не превосходящих x через $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$. В работе [198] доказана следующая теорема.

Теорема 77. *При $x > N_\sigma : \sigma$ для функции $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$ справедливы равенства*

$$\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x) = x^{\frac{1}{\sigma}} + \theta(x), \tag{10.5}$$

где $-2 < \theta(x) < -1$.

Теоремы 75 и 77 непосредственно связаны с тематикой работ Б. М. Бредихина [13]–[21]. Следуя этим работам, определим функции $\nu_{M(PE)}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(PE)}(x) = \sum_{n \in M(PE),\, n \leqslant x} 1, \qquad \nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}_\sigma),\, n \leqslant x} 1.$$

Целью данной главы будет решение обратной задачи для функций $\nu_{M(PE)}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x)$, т. е. нахождение асимптотики для этих функций, зная асимптотики для функций $\pi_{PE}(x)$ и $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$.

10.2. Вспомогательные леммы

Пусть M — произвольный моноид натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы, $P(M)$ — множество его простых элементов и функции $\nu_M(x)$, $\pi_{P(M)}(x)$ заданы равенствами

$$\nu_M(x) = \sum_{n \in M,\, n \leqslant x} 1, \qquad \pi_{P(M)}(x) = \sum_{q \in P(M),\, q \leqslant x} 1.$$

Лемма 109. *Справедливо равенство*

$$\nu_M(x) \ln x = \int\limits_1^x \nu_M(u) \frac{du}{u} + \sum_{k \geqslant 1} \sum_{q \in P(M),\, q \leqslant x} \nu_M\left(\frac{x}{q^k}\right) \ln q. \tag{10.6}$$

Доказательство. Обозначим через $\Pi_M(x)$ произведение всех элементов из моноида M, непревосходящих x:

$$\Pi_M(x) = \prod_{n \in M,\, n \leqslant x} n,$$

тогда, в силу однозначности разложения на простые элементы в моноиде M, получим

$$\Pi_M(x) = \prod_{q \in P(M),\, q \leqslant x} q^{\beta_{M,q}(x)},$$

где $\beta_{M,q}(x)$ — показатель степени, с которым простой элемент q входит в произведение $\Pi_M(x)$.

По аналогии с формулой для факториала имеем:

$$\beta_{M,q}(x) = \sum_{k\geqslant 1} \nu_M\left(\frac{x}{q^k}\right).$$

Отсюда после логарифмирования получим

$$\sum_{n\in M,\, n\leqslant x} \ln n = \sum_{q\in P(M),\, q\leqslant x} \sum_{k\geqslant 1} \nu_M\left(\frac{x}{q^k}\right)\ln q. \tag{10.7}$$

Применяя теорему Абеля (см. [143], стр. 106) при $M = \{1 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\}$, $a_n = 1$, $\varphi(x) = \ln x$, $A(x) = \sum_{\lambda_n\leqslant x} a_n = \nu_M(x)$ к левой части последнего равенства, получим

$$\sum_{n\in M,\, n\leqslant x} \ln n = \nu_M(x)\ln x - \int\limits_1^x \nu_M(t)\frac{dt}{t}. \tag{10.8}$$

Заменяя левую часть в (10.8) на правую часть из (10.7), получим утверждение леммы

$$\nu_M(x)\ln x = \int\limits_1^x \nu_M(u)\frac{du}{u} + \sum_{k\geqslant 1}\sum_{q\in P(M),\, q\leqslant x} \nu_M\left(\frac{x}{q^k}\right)\ln q.$$

□

Лемма 110. *Пусть $q \geqslant 2$ и $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q. Справедливо неравенство*[1]

$$\prod_{p_j\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1} = \exp\left(\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1} + \frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2 p_1^k} - O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\right)\right), \tag{10.9}$$

где $x \geqslant p_1 > 1$.

Доказательство. Действительно,

$$\prod_{p_j\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1} = \exp\left(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{p_j\leqslant x}\frac{1}{kp_j^k}\right).$$

Применяя к внутренней сумме по p_j теорему Абеля, получим

$$\sum_{p_j\leqslant x}\frac{1}{kp_j^k} = \frac{\pi_{PE}(x)}{kx^k} + \int\limits_{p_1}^x \frac{\pi_{PE}(t)}{t^{k+1}}dt.$$

[1] Здесь и далее, как обычно, $\exp(x) = e^x$.

Применим теорему 75, получим

$$\sum_{p_j\leqslant x}\frac{1}{kp_j^k}=\frac{\frac{\ln x}{\ln q}-\theta_{PE}(x)}{kx^k}+\int\limits_{p_1}^{x}\frac{\frac{\ln t}{\ln q}-\theta_{PE}(t)}{t^{k+1}}dt.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k\geqslant 1}\sum_{p_j\leqslant x}\frac{1}{kp_j^k}=\left(\frac{\ln x}{\ln q}-\theta_{PE}(x)\right)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}+\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}-$$
$$-\frac{\ln x}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{p_1^k}-\frac{1}{x^k}\right)-\theta_1\ln\frac{1-\frac{1}{p_1}}{1-\frac{1}{x}}=$$
$$=\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2p_1^k}-O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{1}{x}\right)\to$$
$$\to\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2p_1^k}-O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\right)\ (x\to\infty),$$

где $0\leqslant\theta_1<2$. □

Лемма 111. *Пусть $q\geqslant 2$ и $PE=\{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q. Справедливо неравенство*

$$\nu_{M(PE)}(x)\leqslant x\exp\left(\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2p_1^k}-O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\right)\right),\tag{10.10}$$

где $x\geqslant p_1>1$.

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{n\in M(PE),\,n\leqslant x}\frac{1}{n}\leqslant\prod_{p_j\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1}.$$

Отсюда и из леммы 110 следует, что

$$\sum_{n\in M(PE),\,n\leqslant x}\frac{1}{n}\leqslant\exp\left(\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2p_1^k}-O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\right)\right).$$

По теореме Абеля

$$\sum_{n\in M(PE),\,n\leqslant x}\frac{1}{n}=\frac{\nu_{M(PE)}(x)}{x}+\int\limits_{1}^{x}\frac{\nu_{M(PE)}(t)}{t^2}dt.$$

Следовательно

$$\nu_{M(PE)}(x) \leqslant x \exp\left(\frac{\ln p_1}{\ln q} \ln\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)^{-1} + \frac{1}{\ln q} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2 p_1^k} - O\left(\ln\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\right)\right).$$

□

Мы видим, что в данном случае подход Б. М. Бредихина не работает, так как мы заведомо имеем случай для моноида $M(PE)$, когда отсутствует степенная θ-плотность. Так как при степенной плотности невозможна асимптотическая формула из теоремы 75. Далее мы будем опираться на аддитивную теорему Ингама, но нам удастся получить только две асимптотические оценки сверху и снизу.

10.3. О двух гомоморфизмах моноида с экспоненциальной последовательностью простых

Пусть G — произвольная свободная коммутативная мультипликативная полугруппа с нейтральным элементом e и со счетным числом образующих элементов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$, множество которох будем обозначать через $\Omega(G)$.

Рассмотрим произвольный гомоморфизм $N(g)$ полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел, обладающий тем свойством, что в полугруппе G имеется только конечное число элементов g с $N(g) \leqslant x$ для любого вещественного x. Обозначим через M его образ. Это будет мультипликативный моноид натуральных чисел $M = N(G)$. Вслед за Б. М. Бредихиным (см. [13]), рассмотрим дзета-функцию полугруппы G

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_{g \in G} \frac{1}{N^\alpha(g)}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_G,$$

где σ_G — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле для дзета-функции полугруппы G.

В силу мультипликативности гомоморфизма имеет место разложение в эйлерово произведение

$$\zeta_G(\alpha) = P_G(\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^\alpha(\omega_\nu)}\right)^{-1}$$

в правой полуплоскости $\sigma > \sigma_G$.

Рассмотрим дзета-функцию моноида $M = N(G)$

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле для дзета-функции моноида $M = N(G)$.

Вообще говоря, $\zeta_G(\alpha) \neq \zeta(M|\alpha)$. Дело в том, что

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_{g \in G} \frac{1}{N^\alpha(g)} = \sum_{n \in M} \frac{|N^{-1}(n)|}{n^\alpha},$$

где $N^{-1}(n) = \{g \in G|N(g) = n\}$ — прообраз натурального числа n при гомоморфизме $N(g)$ полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел, а $|N^{-1}(n)|$ — количество элементов в этом прообразе, которое конечно в силу ограничений на гомоморфизм $N(g)$.

Таким образом, равенство дзета-функций возможно только в случае изоморфизма G и $M = N(G)$.

Следующее важное обстоятельство связано с тем, что $P(M)$ — множество простых элементов мультипликативного моноида M, вообще говоря, не совпадает с образом множества образующих элементов полугруппы G: $P(M) \subset$ $\subset N(\Omega(G))$.

Напомним, что если через $P(M|\alpha)$ обозначается эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

Таким образом, возможны следующие ситуации:

$$\zeta(M|\alpha) \neq P(M|\alpha), \quad P(M|\alpha) \neq P_G(\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-|N^{-1}(r)|}.$$

Рассмотрим в качестве G мультипликативный моноид $M(PE)$, порожденный экспоненциальной системой простых чисел PE типа q, где $q \geqslant 2$ — любое натуральное число. Определим два гомоморфизма мультипликативного моноида $M(PE)$ в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел:

$$N_1 : M(PE) \to \mathbb{N} : N_1\left(\prod_{\nu=1}^{n} p_{j_\nu}^{\beta_\nu}\right) = q^{\sum_{\nu=1}^{n} j_\nu \beta_\nu},$$

$$N_2 : M(PE) \to \mathbb{N} : N_2\left(\prod_{\nu=1}^{n} p_{j_\nu}^{\beta_\nu}\right) = q^{\sum_{\nu=1}^{n} (j_\nu+1)\beta_\nu}.$$

Обозначим через $M_1(q)$ образ мультипликативного моноида $M(PE)$ при гомоморфизме N_1, а через $M_2(q)$ при гомоморфизме N_2. Непосредственно из определения следует, что

$$M_1(q) = \{1, q, q^2, \ldots\}, \quad M_2(q) = \{1, q^2, q^3, \ldots\}.$$

Отсюда сразу следует, что $P(M_1(q)) = \{q\}$ и $P(M_2(q)) = \{q^2, q^3\}$.

Определим функции $\nu_{M(PE),1}(x)$ и $\nu_{M(PE),2}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(PE),1}(x) = \sum_{n\in M(PE),\, N_1(n)\leqslant x} 1, \qquad \nu_{M(PE),2}(x) = \sum_{n\in M(PE),\, N_2(n)\leqslant x} 1.$$

Лемма 112. *Справедливы неравенства:*
для любого $n \in M(PE)$ имеем $N_1(n) \leqslant n \leqslant N_2(n)$,

$$\nu_{M(PE),2}(x) \leqslant \nu_{M(PE)}(x) \leqslant \nu_{M(PE),1}(x).$$

Доказательство. Пусть $n = \prod_{\nu=1}^{n} p_{j_\nu}^{\beta_\nu}$, тогда, так как $q^{j_\nu} \leqslant p_{j_\nu} \leqslant q^{j_\nu+1}$, имеем неравенства

$$N_1(n) = q^{\sum_{\nu=1}^{n} j_\nu \beta_\nu} \leqslant n \leqslant q^{\sum_{\nu=1}^{n} (j_\nu+1)\beta_\nu} = N_2(n).$$

Отсюда сразу вытекает двустороннее неравенство для функции $\nu_{M(PE)}(x)$. $\square$

Обозначим через $p_1(n)$ количество решений в неотрицательных целых числах x_1, x_2, ..., x_r, ... диофантова уравнения

$$n = 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + \ldots + r\cdot x_r + \ldots,$$

а через $p_2(n)$ количество решений диофантова уравнения

$$n = 2\cdot x_2 + \ldots + r\cdot x_r + \ldots.$$

Положим

$$P_1(x) = \sum_{n\leqslant x} p_1(n), \quad P_2(x) = \sum_{n\leqslant x} p_2(n).$$

Лемма 113. *Справедливы равенства*

$$\nu_{M(PE),1}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right), \quad \nu_{M(PE),2}(x) = P_2\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right).$$

Доказательство. Действительно, если $N_1(n) = q^m$, то $m = \sum_{\nu=1}^{n} j_\nu \beta_\nu$. Отсюда следует, что количество $n \in M(PE)$, таких что $N_1(n) = q^m$, в точности равно $p_1(m)$. Так как из $N_1(n) = q^m \leqslant x$ следует, что $m \leqslant \frac{\ln x}{\ln q}$, то первое равенство доказано. Второе равенство доказывается аналогично. □

10.4. Об экспоненциальных последовательностях

Дадим следующее определение.

Определение 17. *Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечная последовательность натуральных чисел $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < \ldots$ называется экспоненциальной последовательностью типа q, если выполняются соотношения $q \leqslant q_1 < q^2$, $q^\nu \leqslant q_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.*

Таким образом, минимальной экспоненциальной последовательностью натуральных чисел типа q будет геометрическая последовательность

$$\{q, q^2, \ldots, q^n, \ldots\}$$

со знаменателем q, а максимальной — сдвинутая геометрическая прогрессия $\{q^2-1, q^3-1, \ldots, q^n-1, \ldots\}$ со знаменателем q. Если QE — произвольная экспоненциальная последовательность натуральных чисел типа q, то через $M(QE)$ будем обозначать минимальный мультипликативный моноид натуральных чисел, порождённый последовательностью QE. Таким образом

$$M(QE) = \left\{ n = \prod_{\nu=1}^{m} q_{j_\nu}^{\beta_\nu} \,\middle|\, \beta_\nu > 0\,(\nu = 1, \ldots, m), m \geqslant 0 \right\}.$$

Нетрудно задать гомоморфизм N произвольной коммутативной свободной полугруппы G с нейтральным элементом e и системой образующих $\Omega(G)$ в мультипликативный моноид $M(QE)$, положив

$$N(e) = 1, \quad N(\omega_\nu) = q_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Тогда для любого $g \in G$ имеем:

$$g = \prod_{\nu=1}^{m} \omega_{j_\nu}^{\beta_\nu}, \quad N(g) = \prod_{\nu=1}^{m} q_{j_\nu}^{\beta_\nu}.$$

Если $M(QE)$ моноид с однозначным разложением на образующие элементы, то по аналогии со случаем мультипликативного моноида $M(PE)$ можно определить два гомоморфизма N_1 и N_2 мультипликативного моноида QE в мультипликативные моноиды $M_1(q)$ и $M_2(q)$, соответственно.

Определим функции $\nu_{M(QE),1}(x)$ и $\nu_{M(QE),2}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(QE),1}(x) = \sum_{n\in M(QE),\, N_1(n)\leqslant x} 1, \qquad \nu_{M(QE),2}(x) = \sum_{n\in M(QE),\, N_2(n)\leqslant x} 1,$$

а функции $\nu^*_{M(QE),1}(x)$ и $\nu^*_{M(QE),2}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu^*_{M(QE),1}(x) = \sum_{g\in G,\, N_1(N(g))\leqslant x} 1, \qquad \nu^*_{M(QE),2}(x) = \sum_{g\in G,\, N_2(N(g))\leqslant x} 1.$$

Необходимо различать две функции $\nu_{M(QE)}(x)$ и $\nu^*_{M(QE)}(x)$, которые задаются равенствами

$$\nu_{M(QE)}(x) = \sum_{n\in M(QE),\, n\leqslant x} 1, \qquad \nu^*_{M(QE)}(x) = \sum_{g\in g,\, N(g)\leqslant x} 1.$$

Ясно, что $\nu_{M(QE)}(x) \leqslant \nu^*_{M(QE)}(x)$, так как при гомоморфизме $N(g)$ некоторые элементы могут "склеиваться". Таким образом, $\nu^*_{M(QE)}(x)$ подсчитывает элементы в $M(QE)$ с учетом кратности, а $\nu_{M(QE)}(x)$ — без учёта кратности.

Лемма 114. *Справедливы неравенства:*
для любого $n \in M(QE)$ имеем $N_1(n) \leqslant n \leqslant N_2(n)$,

$$\nu_{M(QE),2}(x) \leqslant \nu_{M(QE)}(x) \leqslant \nu_{M(QE),1}(x), \quad \nu^*_{M(QE),2}(x) \leqslant \nu^*_{M(QE)}(x) \leqslant \nu^*_{M(QE),1}(x).$$

Доказательство. Дословно повторяет доказательство леммы 112. □

Аналогом леммы 113 будет следующая лемма.

Лемма 115. *Справедливы равенства*

$$\nu^*_{M(PE),1}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right), \quad \nu^*_{M(PE),2}(x) = P_2\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right).$$

Доказательство. Действительно, если $N_1(N(g)) = q^m$, то $m = \sum_{\nu=1}^{n} j_\nu \beta_\nu$. Отсюда следует, что количество $g \in G$, таких что $N_1(N(g)) = q^m$, в точности равно $p_1(m)$. Так как из $N_1(N(g)) = q^m \leqslant x$ следует, что $m \leqslant \frac{\ln x}{\ln q}$, то первое равенство доказано. Второе равенство доказывается аналогично. □

Обозначим через $\mathbb{PE}_q$ множество всех экспоненциальных последовательностей простых типа q, а через $\mathbb{QE}_q$ множество всех экспоненциальных последовательностей типа q.

Лемма 116. *Для мощностей множеств $\mathbb{PE}_q$ и $\mathbb{QE}_q$ справедливо равенство*

$$|\mathbb{PE}_q| = |\mathbb{QE}_q| = \mathfrak{c}.$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим множество Δ всех бесконечных последовательностей из 0 и 1. Как известно, его мощность — континуум: $|\Delta| = \mathfrak{c}$. Каждой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots) \in \Delta$ поставим в соответствие экспоненциальную последовательность QE_ε типа q, заданную равенством

$$QE_\varepsilon = \{q + \varepsilon_1, q^2 + \varepsilon_2, \ldots, q^n + \varepsilon_n, \ldots\}.$$

Так как все такие последовательности различные, то мощность множества всех экспоненциальных последовательностей типа q — континуум.

Из асимптотического закона распределения простых чисел вытекает, что для любого натурального $q \geqslant 2$ найдутся две экспоненциальные последовательности простых типа q, пусть это

$$PE_1 = \{p_{1,1} < p_{1,2} < \ldots < p_{1,n} < \ldots\}, \quad PE_2 = \{p_{2,1} < p_{2,2} < \ldots < p_{2,n} < \ldots\},$$

такие, что начиная с некоторого номера n_0 имеем $p_{1,n} \neq p_{2,n}$ при $n \geqslant n_0$. Каждой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots) \in \Delta$ поставим в соответствие экспоненциальную последовательность простых PE_ε типа q, заданную равенством

$$PE_\varepsilon = \{\varepsilon_1 p_{1,1} + (1-\varepsilon_1)p_{2,1}, \varepsilon_2 p_{1,2} + (1-\varepsilon_2)p_{2,2}, \ldots, \varepsilon_n p_{1,n} + (1-\varepsilon_n)p_{2,n}, \ldots\}.$$

Так как любые две такие последовательности различные, если существует $n \geqslant n_0$ такое, что элементы ε для этого номера различные, то мощность множества всех экспоненциальных последовательностей простых типа q — континуум. □

Для дальнейшего нам потребуется экспоненциальная последовательность $QE_1(q,a)$ типа q, заданная равенством

$$QE_1(q,a) = \left\{q + q\left\{\frac{a}{q}\right\}, q^2 + q^2\left\{\frac{a}{q^2}\right\}, \ldots, q^n + q^n\left\{\frac{a}{q^n}\right\}, \ldots\right\},$$

и последовательность $QE_2(q,a)$ типа q, заданная равенством

$$QE_2(q,a) = \left\{q^2 - q\left\{\frac{a}{q}\right\}, q^3 - q^2\left\{\frac{a}{q^2}\right\}, \ldots, q^{n+1} - q^n\left\{\frac{a}{q^n}\right\}, \ldots\right\},$$

Заметим, что при $n > \frac{\ln a}{\ln q}$ справедливо равенство $q^n + q^n\left\{\frac{a}{q^n}\right\} = q^n + a$ и равенство $q^{n+1} - q^n\left\{\frac{a}{q^n}\right\} = q^{n+1} - a$.

10.5. Следствия из аддитивной теоремы Ингама

Нам потребуется следующая аддитивная теорема Ингама (см. [109], стр. 180).

Теорема 78. *Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ — данная последовательность вещественных чисел, причём*

$$N(u) = Bu^\beta + R(u), \quad B > 0, \quad \beta > 0,$$

где $N(u)$ — количество чисел λ_ν, не превосходящих u, и

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv = b\ln u + c + o(1)$$

при $u \to \infty$. Для вещественного l пусть будет $p(l)$ — количество решений уравнения

$$l = r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \ldots$$

в целых $r_\nu \geqslant 0$.

Обозначим для вещественного u и $h > 0$

$$P(u) = \sum_{l<u} p(l),$$

где суммирование ведется по дискретному множеству чисел l, для которых $p(l) \neq 0$, и

$$P_h(u) = \frac{P(u) - P(u-h)}{h}.$$

Тогда при $u \to \infty$

$$P(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^c M^{-\left(b+\frac{1}{2}\right)\alpha} u^{\left(b+\frac{1}{2}\right)(1-\alpha)-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}(Mu)^\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad M = (B\beta\Gamma(\beta+1)\zeta(\beta+1))^{\frac{1}{\beta}}.$$

Также

$$P_h(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^c M^{-\left(b-\frac{1}{2}\right)\alpha} u^{\left(b-\frac{1}{2}\right)(1-\alpha)-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}(Mu)^\alpha},$$

где h — такая положительная константа, что $P_h(u)$ есть неубывающая функция и (если h принадлежит к данной последовательности λ_ν, то это условие выполняется).

Следствие 8. *При $x \to \infty$ справедливы соотношения*

$$P_1(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}, \quad \nu_{M(PE),1}(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

Доказательство. Положим $\lambda_\nu = \nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), тогда $N(u) = [u]$, $R(u) = [u] - u$, $B = \beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $M = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ и (см. [109], стр. 181)

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v} dv = -\frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1).$$

Таким образом $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}\ln 2\pi$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P_1(x) \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\ln 2\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{2\left(\frac{\pi^2}{6}x\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu_{M(PE),1}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

□

Следствие 9. *При $x \to \infty$ справедливы соотношения*

$$P_2(x) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}x} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}, \quad \nu_{M(PE),2}(x) \sim \frac{\ln q}{4\sqrt{3}\ln x} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

Доказательство. Положим $\lambda_\nu = \nu + 1$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), $f(u) = [u] - 1$, тогда

$$N(u) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ f(u), & \text{при } u \geqslant 1, \end{cases} \qquad R(u) = \begin{cases} -u, & \text{при } 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ f(u) - u, & \text{при } u \geqslant 1, \end{cases}$$

$B = \beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $M = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ и

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v} dv = -\frac{3}{2}\ln u - \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1).$$

Таким образом $b = -\frac{3}{2}$, $c = -\frac{1}{2}\ln 2\pi$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P_2(x) \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\ln 2\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-1} e^{2\left(\frac{\pi^2}{6}x\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{3}x} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu_{M(PE),2}(x) = P_2\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right) \sim \frac{\ln q}{4\sqrt{3}\ln x} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

□

Следствие 10. *При $x \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\nu_{M(QE_1(q,1))}(x) \sim \frac{\sqrt{\ln q}}{2\pi e^{c(q)}\sqrt{2\ln x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

Доказательство. Положим $\lambda_\nu = \ln(q^\nu + 1) = \nu \ln q + \ln\left(1 + \frac{1}{q^\nu}\right)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), тогда

$$N(u) = \frac{u}{\ln q} + R(u) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leqslant u < \lambda_1, \\ \nu, & \text{при } \lambda_\nu \leqslant u < \lambda_{\nu+1}, \end{cases}$$

$$R(u) = \begin{cases} -\frac{u}{\ln q}, & \text{при } 0 \leqslant u < \lambda_1, \\ \nu - \frac{u}{\ln q}, & \text{при } \lambda_\nu \leqslant u < \lambda_{\nu+1}, \end{cases}$$

$B = \frac{1}{\ln q}$, $\beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $M = \frac{\zeta(2)}{\ln q} = \frac{\pi^2}{6\ln q}$ и при $\lambda_n \leqslant u < \lambda_{n+1}$

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv = -\frac{u}{\ln q} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu \ln \frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu} + n\ln\frac{u}{\lambda_n} = -\frac{u}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n} \ln\lambda_\nu + n\ln u =$$

$$= n\ln u - \frac{u}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n}\left(\ln\nu + \ln\ln q + \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q}\right)\right).$$

Заметим, что $u = n\ln q + \theta(u)$, $\ln\left(1+\frac{1}{q^n}\right) \leqslant \theta(u) < \ln q + \ln\left(1+\frac{1}{q^{n+1}}\right)$, $\ln u = \ln n + \ln\ln q + \ln\left(1+\frac{\theta(u)}{n\ln q}\right)$,

$$\ln n + \ln\ln q + \ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^n}\right)}{n\ln q}\right) \leqslant \ln u < \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) +$$
$$+ \ln\ln q + \ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^{n+1}}\right)}{(n+1)\ln q}\right). \qquad (10.11)$$

Применим формулу Стирлинга

$$\sum_{\nu=1}^{n}\ln\nu = \frac{1}{2}(\ln 2\pi + \ln n) + n\ln n - n + \frac{1}{12n+\theta_n},$$

где $0 < \theta_n < 1$. Получим

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv = n\ln n + n\ln\ln q + n\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{n\ln q}\right) - n - \frac{\theta(u)}{\ln q} -$$
$$-\left(\frac{1}{2}(\ln 2\pi + \ln n) + n\ln n - n + \frac{1}{12n+\theta_n}\right) - n\ln\ln q -$$
$$-\sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q}\right) = n\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{n\ln q}\right) - \frac{\theta(u)}{\ln q} - \frac{1}{2}\ln 2\pi -$$
$$-\frac{\ln n}{2} - \frac{1}{12n+\theta_n} - \sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q}\right).$$

Так как $n\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{n\ln q}\right) - \frac{\theta(u)}{\ln q} = O\left(\frac{\theta^2(u)}{n\ln^2 q}\right)$, $\frac{\ln n}{2} = \frac{\ln u}{2} - \frac{\ln\ln q}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, сходится ряд

$$c(q) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q}\right)$$

и для остаточного ряда справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^{\nu}}\right)}{\nu\ln q}\right) = O\left(\frac{1}{nq^{n}}\right),$$

то справедливо асимптотическое равенство

$$\int\limits_{0}^{u} \frac{R(v)}{v}dv = -\frac{\ln u}{2} + \frac{\ln\ln q}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\pi - c(q) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{\ln\ln q}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\pi - c(q)$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P(x) \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\ln\ln q}{2}-\frac{\ln 2\pi}{2}-c(q)} x^{-\frac{1}{2}} e^{2\left(\frac{\pi^2}{6\ln q}x\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\ln q}}{2\pi e^{c(q)}\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}x}}.$$

Отсюда следует, что так как для $q_{\nu} = q^{\nu} + 1$ неравенство

$$\prod_{\nu=1}^{m} q_{j_{\nu}}^{\beta_{\nu}} \leqslant x$$

равносильно неравенству

$$\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{j_{\nu}}\beta_{\nu} \leqslant \ln x$$

то $\nu_{M(QE_1(q,1))}(x) = P\left(\ln x\right)$ и

$$\nu_{M(QE_1(q,1))}(x) = P\left(\ln x\right) \sim \frac{\sqrt{\ln q}}{2\pi e^{c(q)}\sqrt{2\ln x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

□

Следствие 11. *При $x \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\nu_{M(QE_2(q,1))}(x) \sim \frac{\sqrt{\ln^3 q}}{2\pi e^{c_1(q)}\sqrt{2}x} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

Доказательство. Положим $\lambda_{\nu} = \ln\left(q^{\nu+1} - 1\right) = (\nu+1)\ln q + \ln\left(1 - \frac{1}{q^{\nu+1}}\right)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, тогда

$$N(u) = \frac{u}{\ln q} + R(u) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leqslant u < \lambda_1, \\ \nu, & \text{при } \lambda_{\nu} \leqslant u < \lambda_{\nu+1}, \end{cases}$$

$$R(u) = \begin{cases} -\frac{u}{\ln q}, & \text{при } 0 \leqslant u < \lambda_1, \\ \nu - \frac{u}{\ln q}, & \text{при } \lambda_{\nu} \leqslant u < \lambda_{\nu+1}, \end{cases}$$

$B = \frac{1}{\ln q}$, $\beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $M = \frac{\zeta(2)}{\ln q} = \frac{\pi^2}{6\ln q}$ и при $\lambda_n \leqslant u < \lambda_{n+1}$

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv = -\frac{u}{\ln q} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu \ln\frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu} + n\ln\frac{u}{\lambda_n} = -\frac{u}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n} \ln\lambda_\nu + n\ln u =$$

$$= n\ln u - \frac{u}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n}\left(\ln(\nu+1) + \ln\ln q + \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{(\nu+1)\ln q}\right)\right).$$

Заметим, что $u = (n+1)\ln q + \theta(u)$, $\ln\left(1 - \frac{1}{q^{n+1}}\right) \leqslant \theta(u) < \ln q + \ln\left(1 - \frac{1}{q^{n+2}}\right)$, $\ln u = \ln(n+1) + {} + \ln\ln q + \ln\left(1 + \frac{\theta(u)}{(n+1)\ln q}\right)$,

$$\ln(n+1) + \ln\ln q + \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{q^{n+1}}\right)}{(n+1)\ln q}\right) \leqslant \ln u < \ln(n+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \ln\ln q +$$

$$+\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{q^{n+2}}\right)}{(n+2)\ln q}\right).$$

Применим формулу Стирлинга

$$\sum_{\nu=1}^{n}\ln(\nu+1) = \frac{1}{2}\left(\ln 2\pi + \ln(n+1)\right) + (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + \frac{1}{12(n+1) + \theta_{n+1}},$$

где $0 < \theta_{n+1} < 1$. Получим

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv = n\ln(n+1) + n\ln\ln q + n\ln\left(1 + \frac{\theta(u)}{(n+1)\ln q}\right) - (n+1) - \frac{\theta(u)}{\ln q} -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\left(\ln 2\pi + \ln(n+1)\right) + (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + \frac{1}{12(n+1) + \theta_{n+1}}\right) -$$

$$-n\ln\ln q - \sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{(\nu+1)\ln q}\right) = n\ln\left(1 + \frac{\theta(u)}{(n+1)\ln q}\right) - \frac{\theta(u)}{\ln q} -$$

$$-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{3\ln(n+1)}{2} - \frac{1}{12(n+1) + \theta_{n+1}} - \sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{(\nu+1)\ln q}\right).$$

Так как $n\ln\left(1 + \frac{\theta(u)}{(n+1)\ln q}\right) - \frac{\theta(u)}{\ln q} = O\left(\frac{\theta(u)}{n\ln q}\right)$, $\frac{3\ln(n+1)}{2} = \frac{3\ln u}{2} - \frac{3\ln\ln q}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, сходится ряд

$$c_1(q) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{(\nu+1)\ln q}\right)$$

и для остаточного ряда справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{(\nu+1)\ln q}\right)=O\left(\frac{1}{nq^n}\right),$$

то справедливо асимптотическое равенство

$$\int\limits_0^u\frac{R(v)}{v}dv=-\frac{3\ln u}{2}+\frac{3\ln\ln q}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\pi-c_1(q)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом $b=-\frac{3}{2}$, $c=\frac{3\ln\ln q}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\pi-c_1(q)$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P(x)\sim\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{3\ln\ln q}{2}-\frac{\ln 2\pi}{2}-c_1(q)}x^{-1}e^{2\left(\frac{\pi^2}{6\ln q}x\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\ln^3 q}}{2\pi e^{c_1(q)}\sqrt{2}x}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}x}}.$$

Отсюда следует, что так как для $q_\nu=q^{\nu+1}-1$ неравенство

$$\prod_{\nu=1}^{m}q_{j_\nu}^{\beta_\nu}\leqslant x$$

равносильно неравенству

$$\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_{j_\nu}\beta_\nu\leqslant\ln x$$

то $\nu_{M(QE_2(q,1))}(x)=P\left(\ln x\right)$ и

$$\nu_{M(QE_2(q,1))}(x)=P\left(\ln x\right)\sim\frac{\sqrt{\ln^3 q}}{2\pi e^{c_1(q)}\sqrt{2}x}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

□

Перейдём к изучению более сложного случая поведения функции $\nu_{M(PE)}(x)$.

Через λ_ν обозначим $\ln p_\nu$, где простые числа p_ν образуют экспоненциальную систему PE типа q. Ясно, что величина $N(u)$ выражается через величину $\pi_{PE}(x)$ по следующей формуле

$$N(u)=\pi_{PE}\left(e^u\right).$$

Действительно, $\lambda_\nu<u$ тогда и только тогда, когда $p_\nu=e^{\lambda_\nu}<e^u$.

Из теоремы 75 получаем, что

$$N(u)=\frac{u}{\ln q}+R(u),\quad R(u)=-\left\{\frac{u}{\ln q}-\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\}-\left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\}$$

при $n\ln q \leqslant u < (n+1)\ln q$. Следовательно, $B = \frac{1}{\ln q}$, $\beta = 1$. Нам необходимо изучить поведение интеграла $\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv$. Сложность заключается в том, что $\nu\ln q \leqslant \lambda_\nu < (\nu+1)\ln q$ и более тесных границ для произвольной экспоненциальной последовательности простых задать нельзя. Анализируя доказательства предыдущих следствий мы видим, что существенную роль играет поведение величин $\delta_\nu = \frac{\lambda_\nu - \nu\ln q}{\nu\ln q}$, $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q} \leqslant \delta_\nu \leqslant \frac{\ln q + \ln\left(1-\frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{\nu\ln q}$ и суммы

$$S_n(PE,q) = \sum_{\nu=1}^{n} \ln(1+\delta_\nu), \quad c(q) - O\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n(PE,q) \leqslant \ln n + O\left(1\right).$$

Лемма 117. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv = -\frac{\ln u}{2} + \frac{\ln\ln q}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) - S_n(PE,q).$$

Доказательство. Рассмотрим поведение функции $R(v)$ на различных интервалах изменения.

При $0 \leqslant v < \lambda_1 = \ln p_1$ имеем $N(v) = 0$,

$$R(v) = \begin{cases} -\frac{v}{\ln q}, & \text{при } 0 \leqslant v < \ln q, \\ -1 - \left\{\frac{v}{\ln q}\right\} = -\frac{v}{\ln q}, & \text{при } \ln q \leqslant v < \lambda_1, \end{cases} \qquad \int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv = -\frac{u}{\ln q}.$$

При $\lambda_n \leqslant v < \lambda_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеем $N(v) = n$, $R(v) = -\frac{v}{\ln q} + n$. Отсюда следует, что при $\lambda_n \leqslant u < \lambda_{n+1}$ имеем:

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv = -\frac{\lambda_1}{\ln q} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} \frac{R(v)}{v}dv + \int\limits_{\lambda_n}^{u} \frac{R(v)}{v}dv =$$

$$= -\frac{\lambda_1}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu}{\ln q} - \nu\ln\frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu}\right) - \left(\frac{u-\lambda_n}{\ln q} - n\ln\frac{u}{\lambda_\nu}\right) =$$

$$= -\frac{u}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n}\ln\lambda_\nu + n\ln u = n\ln u - \frac{u}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n}(\ln\nu + \ln\ln q) -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\ln(1+\delta_\nu) = F(u) - S_n(PE,q), \quad F(u) = n\ln u - \frac{u}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n}(\ln\nu + \ln\ln q).$$

Заметим, что $u = n\ln q + \theta(u)$, $0 < \lambda_n - n\ln q \leqslant \theta(u) < \lambda_{n+1} - n\ln q < \ln q$, $\ln u = \ln n + \ln\ln q + + \ln\left(1 + \frac{\theta(u)}{n\ln q}\right)$, поэтому как и при доказательстве следствия

3 получим

$$F(u) = n \ln\left(1 + \frac{\theta(u)}{n \ln q}\right) - \frac{\theta(u)}{\ln q} - \frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{12n + \theta_n}.$$

Так как $n \ln\left(1 + \frac{\theta(u)}{n \ln q}\right) - \frac{\theta(u)}{\ln q} = O\left(\frac{\theta^2(u)}{n \ln^2 q}\right)$, $\frac{\ln n}{2} = \frac{\ln u}{2} - \frac{\ln \ln q}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, то

$$F(u) = -\frac{\ln u}{2} + \frac{\ln \ln q}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v} dv = -\frac{\ln u}{2} + \frac{\ln \ln q}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) - S_n(PE, q).$$

□

Из доказанной леммы следует, что мы не можем непосредственно применить аддитивную теорему Ингама для получения асимптотики величины $\nu_{M(PE)}(x)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых PE типа q.

Следствие 12. *При $x \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\ln \nu_{M(PE)}(x) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}.$$

Доказательство. □

10.6. Заключение к десятой главе

В работе [17] и ряде последующих Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности. Из следствий видно, что это понятие не работает в случае моноидов, образованных произвольной экспоненциальной последовательностью простых. Естественно дать новое определение.

Определение 18. *Последовательность M натуральных чисел имеет C логарифмическую θ-степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством*

$$\nu_M(x) = \sum_{n \in M,\, n \leqslant x} 1,$$

справедливо равенство

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \nu_M(x)}{\ln^\theta x} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

Из следствия следует, что любой моноид $M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых PE типа q имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ и $\theta = \frac{1}{2}$.

Глава 11

О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей

11.1. Введение к одиннадцатой главе

Как хорошо известно, для любого вещественного иррационального[1] α имеет место единственное разложение в бесконечную непрерывную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1}}}}}, \tag{11.1}$$

где неполные частные q_k и остаточные дроби α_k однозначно определяются из условий

$$q_k = [\alpha_k], k \geqslant 0; \quad \alpha_k = \frac{1}{\alpha_{k-1} - q_{k-1}}, k \geqslant 1.$$

Как обычно, через P_k и Q_k будем обозначать числитель и знаменатель k-ой подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ к числу α. Эти числа связаны хорошо известными рекур-

[1] На протяжении всей главы через α обозначается только вещественное иррациональное число.

рентными соотношениями

$$\begin{cases} P_k = & q_k P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k = & q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{cases},$$

которые остаются верными при $k \geqslant 0$, если принять обычное соглашение, что $P_{-1} = 1$, $P_{-2} = 0$ и $Q_{-1} = 0$, $Q_{-2} = 1$.

Аналогичные формулы справедливы для числа α и его остаточных дробей:

$$\begin{cases} \alpha = & \dfrac{\alpha_{k+1} P_k + P_{k-1}}{\alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1}}, \\ & \\ \alpha_{k+1} = & \dfrac{\alpha Q_{k-1} - P_{k-1}}{P_k - \alpha Q_k}, \end{cases} \quad k \geqslant -1. \tag{11.2}$$

Благодаря известному равенству

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1} \quad (k \geqslant -1),$$

которое легко доказывается по индукции, соотношения между числом α и его остаточными дробями можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha = & \dfrac{P_k}{Q_k} + \dfrac{(-1)^k}{Q_k(\alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1})}, \\ & \\ \alpha_{k+1} = & -\dfrac{Q_{k-1}}{Q_k} + \dfrac{(-1)^{k-1}}{Q_k(P_k - \alpha Q_k)} = -\dfrac{Q_{k-1}}{Q_k} + \dfrac{1}{Q_k |P_k - \alpha Q_k|}, \end{cases} \quad (k \geqslant 0).$$

О разложении алгебраических иррациональностей степени $n > 2$ в цепные дроби известно очень мало. Это один из труднейших вопросов современной теории чисел. В работах [3], [8], [22], [23], [27], [51], [53], [60], [80], [81], [106] — [108] представлены различные аспекты этой теории.

Наиболее развита теория цепных дробей квадратических иррациональностей. В последнее время обнаруживаются новые интересные факты касающиеся этих дробей (см. [217, 134]).

Отметим, что в работе [150] даётся описание множества приведённых алгебраических иррациональностей n-ой степени и установлено, что это множество обладает свойством рациональной выпуклости. По-видимому, аналогичным свойством обладают и обобщенные числа Пизо.

Целью данной главы является изучение свойств минимальных многочленов остаточных дробей, которые возникают в процессе работы алгоритма Лагранжа для алгебраических иррациональностей n-ой степени. Нас будут интересовать как приведённые алгебраические иррациональности, так и общий случай обобщенных чисел Пизо.

Отметим, что случай приведённых алгебраических иррациональностей n-ой степени имеет тесную связь с квадратурными формулами с весами в методе К. К. Фролова (см. [51]—[60], [138], [140]). Дело в том, что приведённые иррациональности пораждают чисто-вещественные алгебраические поля n-ой степени. Если рассмотреть решётку подобную решётке целых сопряжённых алгебраических чисел из чисто-вещественного алгебраического поля, то точки взаимной решётки, попавших в единичный n-мерный куб, будут образовывать алгебраическую сетку. Именно эти сетки и используются в методе Фролова, решая проблему построения квадратурных формул, дающих правильный порядок убывания нормы линейного функционала погрешности приближённого интегрирования на классе E_s^α периодических функций с быстро убывающими коэффициентами Фурье.

11.2. Необходимые определения и факты

Прежде всего напомним определения приведённой алгебраической иррациональности n-ой степени и обобщенного числа Пизо n-ой степени. Здесь мы следуем работам [80], [81], [150].

Определение 19. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен[2]*, у которого все корни* $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *— различные вещественные числа, удовлетворяющие условию*

$$-1 < \alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < 0, \quad \alpha^{(1)} > 1,$$

[2] В частности, неприводимость многочлена означает, что $(a_0, \ldots, a_n) = 1$.

тогда алгебраическое число $\alpha = \alpha^{(1)}$ *называется приведённой алгебраической иррациональностью степени* n.

Определение 20. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен, у которого корни $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *удовлетворяют условию*

$$|\alpha^{(j)}| < 1, \ (2 \leqslant j \leqslant n), \quad \alpha^{(1)} > 1,$$

тогда алгебраическое число $\alpha = \alpha^{(1)}$ *называется обобщенным числом Пизо степени* n.

Нетрудно видеть, что если $\alpha = \alpha^{(1)}$ — приведённая алгебраическая иррациональность, то все n алгебраически сопряжённых полей $\mathbb{Q}[\alpha^{(1)}]$, ..., $\mathbb{Q}[\alpha^{(n)}]$ являются вещественными. При этом число α будет обобщенным числом Пизо, но не всякое обобщенное число Пизо будет приведённой алгебраической иррациональностью. Действительно, число $\beta = \beta^{(1)} = \left(\alpha^{(1)}\right)^2$ является обобщенным числом Пизо, так как $0 < \beta^{(j)} = \left(\alpha^{(j)}\right)^2 < 1$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$, но не является приведённой алгебраической иррациональностью.

Данное выше определение обобщенного числа Пизо отличается от определения числа Пизо тем, что не требуется, чтобы число было целым алгебраическим.

Заметим, что для минимального многочлена $f(x)$, задающего приведённую алгебраическую иррациональность α степени n, всегда выполнено неравенство

$$a_0 < 0, \tag{11.3}$$

так как на промежутке $[0; \infty)$ имеется только один корень α, при $x > \alpha$ имеем $f(x) > 0$, поэтому $f(0) < 0$. Кроме того выполняются неравенства

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = f(1) < 0, \tag{11.4}$$

$$a_n - a_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n a_0 = (-1)^n f(-1) > 0. \tag{11.5}$$

Для обобщенного числа Пизо можно утверждать только выполнение неравенств (11.4) и (11.5). Действительно, неравенство (11.4) вытекает из того факта, что на промежутке $[1;+\infty)$ минимальный многочлен $f(x)$ со старшим коэффициентом $a_n > 0$ имеет ровно один корень. А неравенство (11.5) связано с отсутствием корней на промежутке $(-\infty;-1]$. Кроме этого можно утверждать, что для любого обобщенного числа Пизо α найдется натуральное $q_0 = [\alpha]$ и для него справедливы неравенства $f_0(q_0) < 0$, $f_0(q_0+1) > 0$.

Лемма 118. *Для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени n её остаточная дробь α_1 также является вещественной алгебраической иррациональностью степени n, удовлетворяющей неприводимому многочлену*

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1}x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,1} > 0,$$

где

$$a_{k,1} = \frac{b_k}{d_0},\ d_0 = (b_0,\dots,b_n),\ b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n},\ (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Справедливо равенство

$$f_1(x) = \frac{-f_0(q_0)}{d_0}\prod_{j=1}^{n}\left(x - \frac{1}{\alpha^{(j)} - q_0}\right).$$

Доказательство. См. [80].

Из этой леммы по индукции доказывается следующая теорема.

Теорема 79. *Для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени n все её остаточные дроби α_m также являются вещественными алгебраическими иррациональностями степени n, удовлетворяющими неприводимым многочленам*

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m}x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0,$$

где

$$a_{k,m} = \frac{b_{k,m}}{d_m}, \quad d_m = (b_{0,m},\dots,b_{n,m}),$$
$$b_{k,m} = -\sum_{l=n-k}^{n} a_{l,m-1} C_l^{l+k-n} q_{m-1}^{l+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Многочлены $f_m(x)$ имеют корни

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)} Q_{m-2} - P_{m-2}}{P_{m-1} - \alpha^{(j)} Q_{m-1}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{11.6}$$

Справедливы равенства

$$f_m(x) = \frac{-f_{m-1}(q_{m-1})}{d_{m-1}} \prod_{j=1}^{n} \left(x - \alpha_m^{(j)}\right).$$

Доказательство. См. [80].

Нетрудно видеть, что если $\alpha = \alpha_0 = \alpha^{(1)}$ — обобщенное число Пизо, то остаточная дробь α_1, где

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - q_0}, \quad q_0 = [\alpha_0],$$

не обязана быть обобщенным числом Пизо.

Действительно, если $q_0 = 1$ и найдется такое ν, что $|\alpha^{(\nu)} - q_0| < 1$, то для сопряжённого числа $\alpha_1^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0}$ к остаточной дроби α_1 не выполняется неравенство $|\alpha_1^{(\nu)}| < 1$. Поэтому дадим следующее определение.

Определение 21. *Обобщенное число Пизо $\alpha = \alpha^{(1)}$ называется приведённым обобщенным числом Пизо, если выполнены дополнительные условия: для натурального числа $q_0 = \left[\alpha^{(1)}\right]$ справедливы неравенства*

$$|\alpha^{(j)} - q_0| > 1, \ (2 \leqslant j \leqslant n).$$

Лемма 119. *Для произвольного приведённого обобщенного числа Пизо α степени n его остаточная дробь α_1 также является приведённым обобщенным числом Пизо степени n, удовлетворяющим неприводимому многочлену*

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,1} > 0,$$

где

$$a_{k,1} = \frac{b_k}{d_0}, \ d_0 = (b_0, \dots, b_n), \ b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n}, \ (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Справедливо равенство

$$f_1(x) = \frac{-f_0(q_0)}{d_0} \prod_{j=1}^{n} \left(x - \frac{1}{\alpha^{(j)} - q_0}\right).$$

Доказательство. Действительно, сопряжёнными числами к остаточной дроби $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - q_0}$ являются числа $\alpha_1^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0}$, для которых в силу определения 21 имеем: $|\alpha_1^{(\nu)}| < 1$ $(2 \leqslant \nu \leqslant n)$, поэтому остаточная дробь α_1 является обобщённым числом Пизо.

Теперь необходимо доказать, что α_1 является приведённым обобщённым числом Пизо. Для этого рассмотрим три возможных случая.

I. Пусть $q_0 > 1$, тогда $\alpha^{(\nu)} - q_0 = -x_\nu + y_\nu i$, $x_\nu > q_0 - 1 \geqslant 1$,

$$\alpha_1^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0} = \frac{-x_\nu - y_\nu i}{x_\nu^2 + y_\nu^2}.$$

Поэтому $\alpha_1^{(\nu)}$ находится в левой полуплоскости, ограниченной мнимой прямой. Отсюда следует, что при $q_1 = [\alpha_1]$ имеем

$$\left|\alpha_1^{(\nu)} - q_1\right| > 1 \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Следовательно, в этом случае α_1 — приведённое обобщённое число Пизо.

II. Пусть $q_0 = 1$, $\alpha^{(\nu)} = -x_\nu + y_\nu i$, $x_\nu > 0$, $x_\nu^2 + y_\nu^2 < 1$, тогда

$$\alpha_1^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0} = \frac{-x_\nu - 1 - y_\nu i}{(x_\nu + 1)^2 + y_\nu^2}, \quad \left|\alpha_1^{(\nu)}\right| < 1$$

и $\alpha_1^{(\nu)}$ находится в левой полуплоскости, ограниченной мнимой прямой. Отсюда следует, что при $q_1 = [\alpha_1]$ имеем

$$\left|\alpha_1^{(\nu)} - q_1\right| > 1 \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Следовательно, в этом случае α_1 — приведённое обобщённое число Пизо.

III. Пусть $q_0 = 1$, и найдется ν такое, что $\alpha^{(\nu)} = x_\nu + y_\nu i$, $x_\nu > 0$, $x_\nu^2 + y_\nu^2 < 1$, тогда по условию $(1 - x_\nu)^2 + y_\nu^2 > 1$. Имеем

$$\alpha_1^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0} = \frac{x_\nu - 1 - y_\nu i}{(x_\nu - 1)^2 + y_\nu^2}, \quad \left|\alpha_1^{(\nu)}\right| < 1$$

и $\alpha_1^{(\nu)}$ находится в левой полуплоскости, ограниченной мнимой прямой. Отсюда следует, что при $q_1 = [\alpha_1]$ имеем

$$\left|\alpha_1^{(\nu)} - q_1\right| > 1 \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Следовательно, и в этом последнем случае α_1 — приведённое обобщённое число Пизо.

Рассмотрим многочлен $g(x) = -x^n f_0\left(q_0 + \frac{1}{x}\right)$. Так как

$$g(x) = -x^n a_n \prod_{\nu=1}^{n}\left(q_0 + \frac{1}{x} - \alpha^{(\nu)}\right) = -a_n \prod_{\nu=1}^{n}(q_0 - \alpha^{(\nu)}) \prod_{\nu=1}^{n}\left(x - \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0}\right) =$$

$$= -f_0(q_0) \prod_{\nu=1}^{n}\left(x - \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0}\right),$$

то его корни суть остаточная дробь α_1 и её алгебраически сопряжённые числа $\alpha_1^{(\nu)}$ $(2 \leqslant \nu \leqslant n)$.

По формуле Тейлора

$$f_0\left(q_0 + \frac{1}{x}\right) = f_0(q_0) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_0^{(\nu)}(q_0)}{\nu!}\frac{1}{x^\nu},$$

поэтому

$$g(x) = -f_0(q_0)x^n - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_0^{(\nu)}(q_0)}{\nu!}x^{n-\nu} \in \mathbb{Z}[x].$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Замечание 6. *Как будет показано дальше, всегда $d_0 = 1$, поэтому*

$$f_1(x) = -f_0(q_0)x^n - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_0^{(\nu)}(q_0)}{\nu!}x^{n-\nu} \in \mathbb{Z}[x].$$

11.3. Дробно-линейные преобразования многочленов

Обозначим через $\mathbb{P}_n[x]$ множество всех целочисленных многочленов $f(x) \in \in \mathbb{Z}[x]$ степени не выше n, а через $\mathbb{P}_n^*[x]$ — степени n . Таким образом, если $f(x) \in \mathbb{P}_n^*[x]$, то

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_j \in \mathbb{Z} \quad (0 \leqslant j \leqslant n).$$

Обозначим через $\mathcal{M}_2^*$ группу унимодулярных целочисленных матриц с определителем ± 1. Таким образом, матрица

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^*$$

если A, B, C, $D \in \mathbb{Z}$ и $\det M = AD - BC = \pm 1$.

Определение 22. *Для произвольной унимодулярной матрицы $M \in \in \mathcal{M}_2^*$ дробно-линейным преобразованием M многочленов $f(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ назовем преобразование, заданное формулой*

$$M(f(x)) = (Cx+D)^n f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right).$$

Очевидно, что единичная матрица E задает тождественное преобразование: $E(f(x)) = f(x)$.

Лемма 120. *Любое дробно-линейное преобразование с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ переводит $\mathbb{P}_n[x]$ в себя.*

Доказательство. Действительно, если $f(x) \in \mathbb{P}_n[x]$, то

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z} \quad (0 \leqslant j \leqslant n).$$

По определению имеем:

$$M(f(x)) = (Cx+D)^n \sum_{\nu=0}^{n} a_n \left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)^{\nu} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_n (Ax+B)^{\nu}(Cx+D)^{n-\nu} \in \mathbb{P}_n[x]$$

и лемма доказана. □

Обозначим согласно Г. Вейлю [27] через $Ct(f)$ содержание многочлена $f(x)$. Таким образом, $Ct(f) = (a_0, \ldots, a_n)$.

Лемма 121. *Для любого дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ справедливо равенство*

$$Ct(f) = Ct(M(f)).$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

и

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu, \quad M(f(x)) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu, \quad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{Z} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant n),$$

тогда коэффициенты a_ν и b_ν связаны равенствами

$$M(f(x)) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (Ax+B)^\nu (Cx+D)^{n-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} C_\nu^\mu A^\mu B^{\nu-\mu} x^\mu \sum_{\lambda=0}^{n-\nu} C_{n-\nu}^{\lambda} C^\lambda D^{n-\nu-\lambda} x^\lambda =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sum_{\lambda=0}^{n} x^\lambda \sum_{\mu=\max(0,\lambda+\nu-n)}^{\min(\nu,\lambda)} C_\nu^\mu C_{n-\nu}^{\lambda-\mu} A^\mu B^{\nu-\mu} C^{\lambda-\mu} D^{n+\mu-\nu-\lambda};$$

$$b_\lambda = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sum_{\mu=\max(0,\lambda+\nu-n)}^{\min(\nu,\lambda)} C_\nu^\mu C_{n-\nu}^{\lambda-\mu} A^\mu B^{\nu-\mu} C^{\lambda-\mu} D^{n+\mu-\nu-\lambda};$$

$$a_\lambda = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \sum_{\mu=\max(0,\lambda+\nu-n)}^{\min(\nu,\lambda)} C_\nu^\mu C_{n-\nu}^{\lambda-\mu} A_1^\mu B_1^{\nu-\mu} C_1^{\lambda-\mu} D_1^{n+\mu-\nu-\lambda}.$$

Отсюда следует, что $Ct(f)|Ct(M(f))$ и $Ct(M(f))|Ct(f)$, а поэтому

$$Ct(f) = Ct(M(f))$$

и лемма доказана. $\square$

Лемма 122. *Для любых многочленов $f(x)$, $g(x)$ и произвольного дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ справедливо равенство*

$$M(f(x)g(x)) = M(f(x))M(g(x)).$$

Образ любого неприводимого многочлена $f(x)$ при дробно-линейном преобразовании с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ является неприводимым многочленом.

Доказательство. Действительно, если $degre(f(x)) = k$, $degre(g(x)) = l$ и $n = k + l$, то

$$M(f(x)g(x)) = (Cx+D)^n f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right) g\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right) =$$

$$= \left((Cx+D)^k f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)\right)\left((Cx+D)^l g\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)\right) = M(f(x))M(g(x)).$$

Так как по доказаному дробно-линейное преобразование переводит произведение в произведение, то дробно-линейное преобразование с унимодулярной матрицей, имеющее обратное преобразование, переводит примитивный многочлен в примитивный, неприводимый многочлен в неприводимый. □

Лемма 123. *Для любого дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ и многочлена $f(x)$ с корнями $\alpha^{(\nu)}$ ($A \neq C\alpha^{(\nu)} \neq \neq -D$, $\quad \nu = 1, \ldots, n$) многочлен*

$$M(f(x)) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu$$

имеет корни

$$\beta^{(\nu)} = \frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{A - C\alpha^{(\nu)}} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n), \quad b_n = C^n f\left(\frac{A}{C}\right), b_0 = D^n f\left(\frac{B}{D}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Действительно, если

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = a_n \prod_{\nu=1}^{n} (x - \alpha^{(\nu)}),$$

то

$$M(f(x)) = (Cx + D)^n a_n \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{Ax + B}{Cx + D} - \alpha^{(\nu)}\right) =$$

$$= a_n \prod_{\nu=1}^{n} \left(Ax + B - C\alpha^{(\nu)}x - D\alpha^{(\nu)}\right) =$$

$$= a_n \prod_{\nu=1}^{n} \left(A - C\alpha^{(\nu)}\right) \prod_{\nu=1}^{n} \left(x - \frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{A - C\alpha^{(\nu)}}\right) =$$

$$= a_n C^n \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{A}{C} - \alpha^{(\nu)}\right) \prod_{\nu=1}^{n} \left(x - \beta^{(\nu)}\right) = C^n f\left(\frac{A}{C}\right) \prod_{\nu=1}^{n} \left(x - \beta^{(\nu)}\right).$$

Отсюда следует утверждение леммы, так как $b_0 = M(f(0)) = D^n f\left(\frac{B}{D}\right)$. □

Из доказанной леммы вытекает, что корни многочлена $f(x)$ преобразуются в корни многочлена $M(f(x))$ под действием дробно-линейного преобразования комплексной плоскости

$$M^*(z) = \frac{Dz - B}{-Cz + A}$$

с матрицей

$$M^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}.$$

Лемма 124. *Для композиции $\circ$ дробно-линейных преобразований справедливо равенство*

$$M_1 \circ M = M \cdot M_1,$$

где $\cdot$ — матричное умножение, при этом корни многочленов преобразуются по закону

$$(M_1 \circ M)^* = M_1^* \cdot M^*.$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

и $g(x) = M(f(x))$, тогда

$$M_1 \circ M(f(x)) = (C_1x + D_1)^n g\left(\frac{A_1x + B_1}{C_1x + D_1}\right) =$$
$$= (C_1x + D_1)^n \left(C\frac{A_1x + B_1}{C_1x + D_1} + D\right)^n f\left(\frac{A\frac{A_1x+B_1}{C_1x+D_1} + B}{C\frac{A_1x+B_1}{C_1x+D_1} + D}\right) =$$
$$= ((CA_1 + DC_1)x + (CB_1 + DD_1))^n \cdot$$
$$\cdot f\left(\frac{(AA_1 + BC_1)x + (AB_1 + BD_1)}{(CA_1 + DC_1)x + (CB_1 + DD_1)}\right) = M_2(f(x)),$$

где

$$M_2 = \begin{pmatrix} AA_1 + BC_1 & AB_1 + BD_1 \\ CA_1 + DC_1 & CB_1 + DD_1 \end{pmatrix} = M \cdot M_1$$

и первое утверждение леммы установлено.

Пусть $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ — корни многочлена $f(x)$, $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(n)}$ — $M(f(x))$ и $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)}$ — $(M_1 \circ M)(f(x))$, тогда

$$\beta^{(\nu)} = M^*\left(\alpha^{(\nu)}\right) = \frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{-C\alpha^{(\nu)} + A}, \quad \gamma^{(\nu)} = M_1^*\left(\beta^{(\nu)}\right) = \frac{D_1\beta^{(\nu)} - B_1}{-C_1\beta^{(\nu)} + A_1} =$$
$$= \frac{D_1\frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{-C\alpha^{(\nu)} + A} - B_1}{-C_1\frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{-C\alpha^{(\nu)} + A} + A_1} = \frac{D_1(D\alpha^{(\nu)} - B) - B_1(-C\alpha^{(\nu)} + A)}{-C_1(D\alpha^{(\nu)} - B) + A_1(-C\alpha^{(\nu)} + A)} =$$
$$= \frac{(D_1D + B_1C)\alpha^{(\nu)} - (D_1B + B_1A)}{-(C_1D + A_1C)\alpha^{(\nu)} + (C_1B + A_1A)} = M_2^*\left(\alpha^{(\nu)}\right),$$

где

$$M_2^* = \begin{pmatrix} CB_1 + DD_1 & -(AB_1 + BD_1) \\ -(CA_1 + DC_1) & AA_1 + BC_1 \end{pmatrix} = M_1^* \cdot M^*,$$

и лемма полностью доказана. □

Напомним определение дискримнанта $D(f)$ многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

имеющего корни $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$. Согласно определению

$$D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{\nu<\mu} \left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)}\right)^2.$$

Рассмотрим многочлен

$$g(x) = x^n f\left(q + \frac{1}{x}\right)$$

и поставим задачу вычислить дискриминант $D(g)$ этого многочлена.

Лемма 125. *При $a_0 \neq 0$ и $q \neq \alpha^{(\nu)}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ справедливо равенство*

$$D(g) = D(f).$$

Доказательство. Действительно, так как $a_0 \neq 0$, то все $\alpha^{(\nu)} \neq 0$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ и многочлен $g(x)$ имеет корни

$$\beta^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n).$$

Воспользуемся формулой Тейлора для многочлена $f(x)$ в точке $x = q$:

$$f(x) = f(q) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}(q)}{\nu!}(x-q)^\nu.$$

Получим

$$g(x) = f(q)x^n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}(q)}{\nu!} x^{n-\nu}.$$

Отсюда следует, что

$$D(g) = (f(q))^{2n-2} \prod_{\nu<\mu} (\beta^{(\nu)} - \beta^{(\mu)})^2 =$$

$$= (f(q))^{2n-2} \prod_{\nu<\mu} \left(\frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q} - \frac{1}{\alpha^{(\mu)} - q} \right)^2 =$$

$$= \left(a_n \prod_{\nu=1}^{n} (q - \alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2} \frac{\prod\limits_{\nu<\mu} (\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)})^2}{\prod\limits_{\nu<\mu} (q - \alpha^{(\nu)})^2 (q - \alpha^{(\mu)})^2} =$$

$$= D(f) \frac{\left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} (q - \alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2}}{\left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} (q - \alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2}} = D(f)$$

и лемма доказана. □

Справедливо более сильное утверждение.

Теорема 80. *Для любого дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ и многочлена $f(x)$ с корнями $\alpha^{(\nu)}$ ($A \neq C\alpha^{(\nu)} \neq \neq -D$, $\nu = = 1, \ldots, n$) и многочлена $M(f(x))$ справедливо равенство дискриминантов*

$$D(f) = D(M(f)).$$

Доказательство. Действительно, по лемме 123 имеем:

$$D(M(f)) = \left(C^n f \left(\frac{A}{C} \right) \right)^{2n-2} \prod_{\nu<\mu} \left(\beta^{(\nu)} - \beta^{(\mu)} \right)^2 =$$

$$= a_n^{2n-2} \left(\prod_{\nu=1}^{n} (A - C\alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2} \prod_{\nu<\mu} \left(\frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{A - C\alpha^{(\nu)}} - \frac{D\alpha^{(\mu)} - B}{A - C\alpha^{(\mu)}} \right)^2 =$$

$$= a_n^{2n-2} \frac{\left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} (A - C\alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2}}{\left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} (A - C\alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2}} \prod_{\nu<\mu} \left((DA - BC)(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\nu)}) \right)^2 = D(f)$$

и теорема доказана. □

11.4. Поведение остаточных дробей и их сопряжённых чисел

Введем следующие обозначения

$$\delta(\alpha) = \min_{2\leqslant j\leqslant n} \left|\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right| > 0,$$

так как все корни различные.

Для $m \geqslant 1$ величины θ_{m-1} $(0 < \theta_{m-1} < 1)$ определяются из равенства

$$\alpha = \alpha^{(1)} = \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^{m-1}\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\theta_{m-1} = \frac{Q_m}{\alpha_m Q_{m-1} + Q_{m-2}}.$$

Остаточная дробь $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ имеет разложение

$$\alpha_m = \alpha_m^{(1)} = q_m + \cfrac{1}{q_{m+1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}} > 1 \quad (m \geqslant 1).$$

Теорема 81. *Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена*

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\ldots$, $\alpha^{(n)}$ *— его корни, и число α имеет разложение в цепную дробь*

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Пусть последовательность многочленов $f_m(x)$ $(m \geqslant 1)$ определена рекуррентными соотношениями

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m}x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0,$$

$$\varepsilon_m = \operatorname{sign}(f_{m-1}(q_{m-1})),$$

$$a_{k,m} = \varepsilon_m \sum_{\nu=n-k}^{n} a_{\nu,m-1} C_{\nu}^{\nu+k-n} q_{m-1}^{\nu+k-n} = \varepsilon_m \frac{f_{m-1}^{(n-k)}(q_{m-1})}{(n-k)!} \quad (0 \leqslant k \leqslant n). \tag{11.7}$$

Многочлены $f_m(x)$ имеют корни

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)}Q_{m-2} - P_{m-2}}{P_{m-1} - \alpha^{(j)}Q_{m-1}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{11.8}$$

Справедливы равенства

$$f_m(x) = \varepsilon_m f_{m-1}(q_{m-1}) \prod_{j=1}^{n} \left(x - \alpha_m^{(j)}\right). \tag{11.9}$$

Существует номер $m_0 = m_0(\alpha)$ такой, что для любого $m \geqslant m_0$ остаточная дробь $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ является приведённым обобщённым числом Пизо и выполнены соотношения

$$\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} = \cfrac{1}{q_{m-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1}}}}, \tag{11.10}$$

$$\alpha_m^{(j)} = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)} \quad (2 \leqslant j \leqslant n). \tag{11.11}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность многочленов

$$f_m(x) = \varepsilon_m x^n f_{m-1}\left(q_{m-1} + \frac{1}{x}\right) \quad (m \geqslant 1).$$

По формуле Тейлора имеем:

$$f_{m-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu!}(x - q_{m-1})^{\nu},$$

поэтому

$$f_m(x) = \varepsilon_m \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu!} x^{n-\nu}.$$

Нетрудно видеть, что для коэффициентов многочлена

$$f_m(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,m} x^{\nu}$$

справедливы равенства

$$a_{\nu,m} = \varepsilon_m \frac{f_{m-1}^{(n-\nu)}(q_{m-1})}{(n-\nu)!} = \varepsilon_m \sum_{k=n-\nu}^{n} a_{k,m-1} C_k^{n-\nu} q_{m-1}^{k+\nu-n}.$$

Отсюда следует утверждение (11.7).

Если

$$\alpha_{m-1}^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)} Q_{m-3} - P_{m-3}}{P_{m-2} - \alpha^{(j)} Q_{m-2}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

— корни многочлена $f_{m-1}(x)$, то

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{1}{\alpha_{m-1}^{(j)} - q_{m-1}} = \frac{\alpha^{(j)} Q_{m-2} - P_{m-2}}{P_{m-1} - \alpha^{(j)} Q_{m-1}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

что доказывает утверждения (11.8) и (11.9).

Равенство (11.10) — общеизвестно.

Для доказательства последнего утверждения теоремы преобразуем выражение (11.8), получим:

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} \cdot \frac{\alpha^{(j)} - \frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}}{\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} - \alpha^{(j)}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{11.12}$$

При $j = 1$ мы имеем очевидное неравенство $\alpha_m^{(1)} > 1$, которое следует из определения остаточной дроби.

Пусть $2 \leqslant j \leqslant n$, тогда

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} \left(-1 + \frac{\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} - \frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}}{\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} - \alpha^{(j)}} \right) = \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} \left(-1 + \frac{\frac{(-1)^m}{Q_{m-1}Q_{m-2}}}{\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} - \alpha^{(j)}} \right) =$$
$$= \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} \left(-1 + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}Q_{m-2}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} - \alpha^{(j)}\right)} \right) =$$
$$= -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2 \left(\frac{(-1)^m \theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)} \right)}. \tag{11.13}$$

Существует номер m_0 такой, начиная с которого

$$\left|\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}\right| \leqslant \frac{\delta(\alpha)}{2}, \quad \frac{2}{Q_{m-1}\delta(\alpha)} < 1,$$

поэтому при $m \geqslant m_0$ будем иметь

$$|\alpha_m^{(j)}| \leqslant \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}\left(1 + \frac{2}{Q_{m-1}Q_{m-2}\delta(\alpha)}\right) = \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{2}{Q_{m-1}^2\delta(\alpha)} < 1, \tag{11.14}$$

что и доказывает $-$ $\alpha_m^{(1)}$ $-$ обобщённое число Пизо.

Покажем теперь, что выполнены неравенства из определения приведённого обобщённого числа Пизо, то есть $|q_m - \alpha_m^{(j)}| > 1$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$.

Рассмотрим два возможных случая.

I. Пусть $\alpha^{(j)}$ — вещественное алгебраическое число, тогда

$$-1 < -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} - \frac{2}{Q_{m-1}^2\delta(\alpha)} \leqslant \alpha_m^{(j)} = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)} \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{2}{Q_{m-1}^2\delta(\alpha)} < 0,$$

поэтому

$$q_m - \alpha_m^{(j)} > 1$$

и для этого алгебраически сопряжённого для остаточной дроби α_m условие выполнено.

II. Пусть теперь $\alpha^{(j)}$ — комплексное алгебраическое число, тогда $\alpha_m^{(j)}$ — комплексное алгебраически сопряжённое для остаточной дроби α_m будет находиться в круге радиуса меньше $\frac{1}{Q_{m-1}}$ с центром в точке $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$. Отсюда следует, что $|q_m - \alpha_m^{(j)}| > 1$ и, значит, в этом случае условие из определения выполнено.

Тем самым теорема полностью доказана. □

11.5. Минимальные многочлены остаточных дробей

Теорема 82. *Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена*

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ — его корни, и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Для последовательности минимальных многочленов $f_m(x)$ остаточных дробей $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ последовательность дискриминантов $D(f_m)$ целочисленная, стационарная.

Доказательство. Действительно, все многочлены $f_m(x) \in \mathbb{Z}[x]$, поэтому по свойству дискриминанта (см. [111], стр. 34) $D(f_m) \in \mathbb{Z}$. По лемме 123 $D(f_{m-1}) = D(f_m)$.

Отсюда следует справедливость утверждения теоремы. □

Теорема 83. *Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена*

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ — его корни, и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Если α — приведённое обобщённое число Пизо, то минимальный многочлен $f_m(x)$ для остаточной дроби α_m имеет вид

$$f_m(x) = (-1)^m (Q_{m-1}x + Q_{m-2})^n f_0\left(\frac{P_{m-1}x + P_{m-2}}{Q_{m-1}x + Q_{m-2}}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,m} x^{\nu}. \qquad (11.15)$$

Справедливы равенства

$$a_{n,m}=Q^n_{m-1}\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|,\quad a_{0,m}=-Q^n_{m-2}\left|f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right)\right|,\tag{11.16}$$

$$a_{\nu,m}=Q^{\nu}_{m-1}Q^{n-\nu}_{m-2}\sum_{\mu=0}^{n-\nu}\frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!}\frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^{\mu}}C^{\nu}_{n-\mu}\quad(0\leqslant\nu\leqslant n),\tag{11.17}$$

$$a_{n-1,m}=Q^{n-1}_{m-1}Q_{m-2}\left(n\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|-\frac{1}{Q_{m-2}Q_{m-1}}f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right).\tag{11.18}$$

Доказательство. Проведем индукцию по m.

При $m=0$ имеем:

$$P_{-1}=1,\ P_{-2}=0,\ Q_{-1}=0,\ Q_{-2}=1,$$
$$(Q_{-1}x+Q_{-2})^n f_0\left(\frac{P_{-1}x+P_{-2}}{Q_{-1}x+Q_{-2}}\right)=f_0(x)$$

и равенство (11.15) установлено.

Пусть утверждение справедливо для $m\geqslant 0$, тогда

$$f_m(x)=(-1)^m M_m\left(f_0(x)\right),\quad M_m=\begin{pmatrix}P_{m-1}&P_{m-2}\\Q_{m-1}&Q_{m-2}\end{pmatrix}.$$

Так как $a_{n,m}>0$ и α_m — приведённое обобщённое число Пизо, то $f_m(q_m)<0$ и

$$f_{m+1}(x)=-x^n f_m\left(q_m+\frac{1}{x}\right)=-M_m'\left(f_m(x)\right),\quad M_m'=\begin{pmatrix}q_m&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$M_m\cdot M_m'=\begin{pmatrix}P_{m-1}&P_{m-2}\\Q_{m-1}&Q_{m-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_m&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_mP_{m-1}+P_{m-2}&P_{m-1}\\q_mQ_{m-1}+Q_{m-2}&Q_{m-1}\end{pmatrix}=M_{m+1}.$$

Воспользуемся индукционным предположением и леммой 124 (стр. 302), получим

$$f_{m+1}(x)=-M_m'\left((-1)^m M_m\left(f_0(x)\right)\right)=(-1)^{m+1}(M_m\cdot M_m')\left(f_0(x)\right)=$$
$$=(-1)^{m+1}M_{m+1}\left(f_0(x)\right),$$

что доказывает равенство (11.15).

Перейдем к доказательству соотношений (11.16).

Согласно лемме 123

$$a_{n,m} = (-1)^m Q_{m-1}^n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right).$$

При m — четном $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} > \alpha$ и $f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) > 0$. При m — нечетном $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} < \alpha$ и $f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) < 0$. Поэтому

$$(-1)^m Q_{m-1}^n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) = Q_{m-1}^n \left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|$$

и равенство для $a_{n,m}$ доказано.

Аналогично,

$$a_{0,m} = (-1)^m Q_{m-2}^n f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right) = -Q_{m-2}^n \left|f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right)\right|$$

и равенства (11.16) полностью доказаны.

Для доказательства равенств (11.17) заметим, что

$$\frac{P_{m-1}x + P_{m-2}}{Q_{m-1}x + Q_{m-2}} = \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^{m-1}}{Q_{m-1}(Q_{m-1}x + Q_{m-2})}.$$

Поэтому по формуле Тейлора получим

$$(Q_{m-1}x + Q_{m-2})^n f_0\left(\frac{P_{m-1}x + P_{m-2}}{Q_{m-1}x + Q_{m-2}}\right) = (Q_{m-1}x + Q_{m-2})^n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_0^{(\nu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\nu!} \frac{(-1)^{(m-1)\nu}(Q_{m-1}x + Q_{m-2})^{n-\nu}}{Q_{m-1}^{\nu}} = Q_{m-1}^n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) x^n +$$

$$+f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \sum_{\nu=0}^{n-1} C_n^\nu Q_{m-1}^\nu Q_{m-2}^{n-\nu} x^\nu + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \frac{(-1)^{(m-1)\mu}}{Q_{m-1}^{\mu}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\nu=0}^{n-\mu} C_{n-\mu}^\nu Q_{m-1}^\nu Q_{m-2}^{n-\mu-\nu} x^\nu = Q_{m-1}^n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) x^n + f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \sum_{\nu=0}^{n-1} C_n^\nu Q_{m-1}^\nu Q_{m-2}^{n-\nu} x^\nu +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu Q_{m-1}^\nu Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{n-\nu} C_{n-\mu}^\nu \frac{(-1)^{(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} =$$

$$= Q_{m-1}^n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu Q_{m-1}^\nu Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} C_{n-\mu}^\nu \frac{(-1)^{(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!},$$

что и доказывает (11.17).

При $\nu = n-1$ получим

$$a_{n-1,m} = (-1)^m Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \sum_{\mu=0}^{1} C_{n-\mu}^{n-1} \frac{(-1)^{(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^{\mu}} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} =$$
$$= (-1)^m Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) + \frac{(-1)^{m-1}}{Q_{m-2}Q_{m-1}} f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right) =$$
$$= Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right| - \frac{1}{Q_{m-2}Q_{m-1}} f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right)$$

что и доказывает (11.18).

В заключении доказательства проверим, что из (11.17) следует (11.16).

Действительно, при $\nu = n$ получим

$$Q_{m-1}^{\nu} Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^{\mu}} C_{n-\mu}^{\nu} = Q_{m-1}^{n} f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)(-1)^m = a_{n,m}$$

и первое из равенств (11.16) установлено.

Аналогично, при $\nu = 0$ получим

$$Q_{m-1}^{\nu} Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^{\mu}} C_{n-\mu}^{\nu} =$$
$$= (-1)^m Q_{m-2}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)^{\mu} =$$
$$= (-1)^m Q_{m-2}^{n} f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right) = a_{0,m}$$

и второе из равенств (11.16) установлено. □

Лемма 126. *Пусть α корень минимального многочлена*

$$f_0(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x],$$

тогда

$$f_0^{(\nu)}(\alpha) \neq 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Доказательство. Действительно, $f_0^{(n)}(x) = n! a_n \neq 0$, так как $f_0(x) \in \mathbb{P}_n^*[x]$ и $a_n \neq 0$.

Пусть $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$ и $g(x) = f_0^{(\nu)}(x)$, $g(\alpha) = 0$. Так как $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f_0(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень, то $(f_0(x), g(x)) \neq 1$. Получаем противоречие с неприводимостью минимального многочлена. Лемма доказана. $\square$

Обозначим через $c(\alpha, \varepsilon) > 0$ константу в теореме Рота [176]. Таким образом для любого целого p и натурального q справедливо неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c(\alpha, \varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}. \tag{11.19}$$

Пусть

$$\Delta(\alpha) = \max_{2 \leqslant j \leqslant n} |\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}|.$$

Лемма 127. *Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и*

$$f_0(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x]$$

— минимальный многочлен, тогда при $m > m_0$ для любой подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу α справедливы неравенства

$$a_n \frac{c(\alpha, \varepsilon)\left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1}}{Q_m^{2+\varepsilon}} < \left|f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)\right| < a_n \frac{(1 + \Delta(\alpha))^{n-1}}{Q_m^2}. \tag{11.20}$$

Доказательство. Действительно,

$$\left|f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)\right| = a_n \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha^{(j)}\right| = a_n \left|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha\right| \prod_{j=2}^{n} \left|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right|.$$

Далее заметим, что при $m > m_0$ справедливы неравенства

$$\frac{c(\alpha, \varepsilon)}{Q_m^{2+\varepsilon}} < \left|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha\right| < \frac{1}{Q_m^2},$$
$$\frac{\delta(\alpha)}{2} < \left|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right| < 1 + \Delta(\alpha) \quad (2 \leqslant j \leqslant n).$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Из леммы 127 и теоремы 83 следует, что при $n > 2$ старший коэффициент $a_{n,m}$ минимального многочлена $f_m(x)$ для приведённого обобщённого числа Пизо α растет как величина порядка $O\left(Q_{m-1}^{n-2-\varepsilon}\right)$.

Действительно, при $m > m_0$ имеем

$$a_n\frac{c(\alpha,\varepsilon)\left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1}}{Q_m^{2+\varepsilon}} < \left|f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)\right| < a_n\frac{(1+\Delta(\alpha))^{n-1}}{Q_m^2},$$

$$a_n c(\alpha,\varepsilon)\left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1}Q_{m-1}^{n-2-\varepsilon} < a_{n.m} = Q_{m-1}^n\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right| < a_n(1+\Delta(\alpha))^{n-1}Q_{m-1}^{n-2}.$$

Обозначим через $A_\nu(\alpha)$ величину

$$A_\nu(\alpha) = \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{\left(\alpha^{(1)}-\alpha^{(j)}\right)^\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots.$$

Теорема 84. *Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и*

$$f_0(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x]$$

— минимальный многочлен, тогда при $m > m_0$ для любой подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к приведённому обобщённому числу Пизо α и остаточной дроби α_m справедливы соотношения

$$\alpha_m = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{Q_{m-1}^2\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|} + (-1)^{m-1}\frac{\lambda_m}{Q_{m-1}^2}, \tag{11.21}$$

где

$$\lambda_m = A_1(\alpha) + \frac{(-1)^{m-1}\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}A_2(\alpha)\varepsilon_m, \quad |\varepsilon_m| < 2. \tag{11.22}$$

Доказательство. Действительно, согласно теореме Виета

$$\alpha_m^{(1)} + \ldots + \alpha_m^{(n)} = -\frac{a_{n-1,m}}{a_{n,m}}.$$

Из формул (11.16) и (11.18) вытекает

$$\alpha_m^{(1)} + \ldots + \alpha_m^{(n)} = -n\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{Q_{m-1}^2\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|}.$$

Воспользуемся равенством (11.13), получим

$$\alpha_m^{(1)} + \ldots + \alpha_m^{(n)} = \alpha_m - (n-1)\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \sum_{j=2}^{n}\frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_m = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{Q_{m-1}^2\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|} + (-1)^{m-1}\frac{\lambda_m}{Q_{m-1}^2},$$

где

$$\lambda_m = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}}.$$

Далее заметим, что при $m > m_0$ имеем

$$\frac{1}{\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}} = \frac{1}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}} - (-1)^m\frac{\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)\left(\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)} = \frac{1}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}} +$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}\frac{\varepsilon}{\left(\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)^2},$$

где $|\varepsilon| < 2$. Отсюда следует, что

$$\lambda_m = A_1(\alpha) + \frac{(-1)^{m-1}\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}A_2(\alpha)\varepsilon_m, \quad |\varepsilon_m| < 2$$

и теорема доказана. □

11.6. Обобщённые числа Пизо и модификация алгоритма Лагранжа разложения алгебраического числа в цепную дробь

Важность обобщенных чисел Пизо для алгоритма Лагранжа разложения алгебраического числа в цепную дробь объясняется следующей леммой.

Лемма 128. *Если многочлен*

$$f_0(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n \geqslant 1$$

является минимальным для обобщенного числа Пизо $\alpha^{(1)} = \alpha_0$, *то для разложения в цепную дробь*

$$\alpha^{(1)} = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

выполняется неравенство

$$\left[-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right] + 1 - n \leqslant q_0 < -\frac{a_{n-1}}{a_n} + n - 1. \tag{11.23}$$

Доказательство. Действительно, по формуле Виета имеем:

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \ldots + \alpha^{(n)}.$$

В силу неприводимости минимального многочлена $f_0(x)$ имеем

$$\alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} + \ldots + \alpha^{(n)} \neq 0,$$

так как в противном случае $\alpha^{(1)} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \in \mathbb{Q}$, что противоречит неприводимости минимального многочлена $f_0(x)$.

Так как $\alpha^{(1)}$ — число Пизо, то

$$|\alpha^{(j)}| < 1, \quad (2 \leqslant j \leqslant n).$$

Поэтому

$$0 < |\alpha^{(2)} + \ldots + \alpha^{(n)}| < n - 1$$

и

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} + 1 - n < \alpha^{(1)} < -\frac{a_{n-1}}{a_n} + n - 1.$$

Так как $q_0 < \alpha^{(1)} < q_0 + 1$, то отсюда следует утверждение леммы. □

Таким образом из теоремы 81 и леммы 128 следует, что начиная с некоторого номера m_0 все неполные частные q_m $(m \geqslant m_0)$ требуют для своего вычисления не более $O(\ln n)$ вычислений значений многочлена $f_m(x)$. Этот результат можно существенно усилить с помощью асимптотической формулы (11.11) для сопряженных чисел к остаточным дробям.

Теорема 85. *Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена*

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\ldots$, $\alpha^{(n)}$ — *его корни, и число α имеет разложение в цепную дробь*

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Пусть последовательность минимальных многочленов $f_m(x)$ для остаточных дробей α_m задана формулами (11.7) и номер $m_0 = m_0(\alpha, \varepsilon)$ определен из неравенства

$$\frac{2(n-1)}{Q_{m_0-1}\delta(\alpha)} < \varepsilon, \tag{11.24}$$

тогда для любого $m > m_0$ справедливы равенства

$$q_m = \begin{cases} q_m^*, & \text{если } f_m\left(q_m^*+1\right) > 0 \& f_m\left(q_m^*\right) < 0 \\ \\ q_m^*+1, & \text{если } f_m\left(q_m^*+1\right) < 0 \\ \\ q_m^*-1, & \text{если } f_m\left(q_m^*\right) > 0 \end{cases} \tag{11.25}$$

где

$$q_m^* = \left[-\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} + \frac{(n-1)Q_{m-2}}{Q_{m-1}}\right].$$

Доказательство. По теореме 81

$$f_m(x) = -f_{m-1}(q_{m-1})x^n - \frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{1!}x^{n-1} - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{f^{(\nu)}_{m-1}(q_{m-1})}{\nu!}x^{n-\nu},$$

поэтому по формулам Виета получим

$$-\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} = \alpha_m^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\left(-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)}\right),$$

следовательно

$$\alpha_m^{(1)} = -\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} + \frac{(n-1)Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \Delta,$$

где

$$\Delta = \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{(-1)^{m-1}}{Q_{m-1}^2 \left(\frac{(-1)^m \theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)} \right)} \right)$$

и

$$|\Delta| < \frac{2(n-1)}{Q_{m-1}^2 \delta(\alpha)} < \frac{\varepsilon}{Q_{m-1}}.$$

Так как при $x > \alpha_m^{(1)}$ имеем $f_m(x) > 0$ и при $1 \leqslant x < \alpha_m^{(1)}$ имеем $f_m(x) < 0$, и $q_m^* - 1 < \alpha_m^{(1)} < q_m^* + 2$, то возможно три случая:

$q_m = q_m^* + 1$, если $f_m(q_m^* + 1) < 0$;

$q_m = q_m^*$, если $f_m(q_m^*) < 0 \& f_m(q_m^* + 1) > 0$;

$q_m = q_m^* - 1$, если $f_m(q_m^*) > 0$.

Теорема доказана. □

11.7. Цепные последовательности преобразований плоскости

В работе [106] дано определение сходимости последовательности целочисленных матриц к числу.

Определение 23. *Говорят, что матричное разложение*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

сходится к числу α, если для матриц

$$M_n = \prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{D_n} = \alpha.$$

В этом случае пишется

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}.$$

В работе [80] дается достаточно систематичное изложение теории матричных представлений действительных чисел. Нас сейчас будет интересовать случай, соответствующий обычным цепным дробям. Если число α разложено в цепную дробь (11.1), то справедливо матричное разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{\nu=0}^{\infty} \begin{pmatrix} q_\nu & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.26}$$

так как

$$M_m = \prod_{\nu=0}^{m} \begin{pmatrix} q_\nu & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_m & P_{m-1} \\ Q_m & Q_{m-1} \end{pmatrix} \quad (m \geqslant 0)$$

и последовательность матриц M_m сходится к числу α в силу свойств подходящих дробей.

Рассмотрим произвольное дробно-линейное преобразование комплексной плоскости с матрицей M:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad w = M(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}.$$

Из равенств (11.2) вытекает, что иррациональное число α и остаточная дробь α_{k+1} связаны взаимообратными дробно-линейными преобразованиями:

$$M_k = \begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{pmatrix}, \quad M_k^* = \begin{pmatrix} Q_{k-1} & -P_{k-1} \\ -Q_k & P_k \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \alpha = & M_k(\alpha_{k+1}) \\ \alpha_{k+1} = & M_k^*(\alpha) \end{cases}. \tag{11.27}$$

Анализируя формулы (11.6) для корней минимального многочлена $f_m(x)$, мы приходим к выводу, что они получаются из корней исходного минимального многочлена под действием дробно-линейного преобразования M_{k-1}^*.

Дадим следующее определение.

Определение 24. *Пусть α — вещественная иррациональность, тогда цепной последовательностью первого рода дробно-линейных преобразований для многочленов назовем последовательность*

$$\left\{ M_\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} P_\nu(\alpha) & P_{\nu-1}(\alpha) \\ Q_\nu(\alpha) & Q_{\nu-1}(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \nu = 0, 1, \dots \right\},$$

где $P_\nu(\alpha)$ *— числитель, а* $Q_\nu(\alpha)$ *— знаменатель подходящей дроби с номером* ν *к числу* α*.*

Цепной последовательностью первого рода дробно-линейных преобразований комплексной плоскости назовем последовательность

$$\left\{ M^*_\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} Q_{\nu-1}(\alpha) & -P_{\nu-1}(\alpha) \\ -Q_\nu(\alpha) & P_\nu(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \nu = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Чтобы лучше понять эффект концентрации алгебраически-сопряжённых чисел к остаточной дроби α_m около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ докажем следующие леммы.

Лемма 129. *Пусть* $M^*(z)$ *— произвольное дробно-линейное преобразование комплексной плоскости с унимодулярной матрицей* M^**:*

$$M^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \quad A, B, C, D \in \mathbb{Z}, |AD - BC| = 1, C \neq 0,$$

тогда:

внешность круга $K\left(\frac{A}{C}, 1\right) = \left\{ z \,\middle|\, \left|z - \frac{A}{C}\right| \geqslant 1 \right\}$ *переходит во внутренность круга* $K\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$ *с выколотым центром,*

окружность $C\left(\frac{A}{C}, 1\right)$ *переходит в окружность* $C\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$*,*

внутренность круга $K\left(\frac{A}{C}, 1\right)$ *с выколотым центром переходит во внешность круга* $K\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$*,*

любое кольцо

$$R\left(\frac{A}{C}, 1, r\right) = \left\{ z \,\middle|\, r < \left| z - \frac{A}{C} \right| < 1 \right\} \quad (0 < r < 1)$$

переходит в кольцо $R\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{rC^2}, \frac{1}{C^2}\right)$*,*

точка $z = \frac{A}{C}$ *— полюс дробно-линейного преобразования* $M^*(z)$ *с вычетом* $\frac{1}{C^2}$*.*

Доказательство. Действительно,

$$M^*(z) = \frac{Dz - B}{-Cz + A} = -\frac{D}{C} + \frac{AD - BC}{C(A - Cz)}, \qquad \left| M^*(z) + \frac{D}{C} \right| = \frac{1}{C^2 \left| \frac{A}{C} - z \right|},$$

отсюда следуют все утверждения леммы. □

Рассмотрим дробно-линейное преобразование $N^*(z)$ с матрицей

$$N^* = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad C, D \in \mathbb{Z}, C \neq 0, \quad N^*(z) = \frac{Cz + D}{C} = z + \frac{D}{C}.$$

Нетрудно видеть, что

$$M_1^* = N^* \cdot M^* = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AD - BC \\ -C^2 & AC \end{pmatrix}$$

Лемма 130. *Пусть*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} C & -D \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{Z}, \quad C \neq 0,$$

тогда для дробно-линейного преобразования многочленов $M_1 = N \circ M$ *с матрицей*

$$M_1 = M \cdot N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & BC - AD \\ C^2 & 0 \end{pmatrix}$$

и корней $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(n)}$ *многочлена* $g(x) = M_1(f(x))$ *справедливы соотношения*

$$g(x) = M_1(f(x)) = C^{2n} x^n f\left(\frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C^2 x}\right) =$$

$$= C^{2n} f\left(\frac{A}{C}\right) x^n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}\left(\frac{A}{C}\right)}{\nu!} C^{2(n-\nu)} x^{n-\nu} (BC - AD)^{\nu} \tag{11.28}$$

и

$$\beta^{(\nu)} = M_1^*\left(\alpha^{(\nu)}\right) = \frac{AD - BC}{C^2\left(\frac{A}{C} - \alpha^{(\nu)}\right)} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n). \tag{11.29}$$

Доказательство. Действительно, если $h(x) = M(f(x))$, то

$$h(x) = (Cx + D)^n f\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right), \quad g(x) = M_1(f(x)) = C^n h\left(x - \frac{D}{C}\right) =$$

$$= C^n \left(C\left(x - \frac{D}{C}\right) + D\right)^n f\left(\frac{A\left(x - \frac{D}{C}\right) + B}{C\left(x - \frac{D}{C}\right) + D}\right) =$$

$$= \left(C^2 x\right)^n f\left(\frac{ACx + (BC - AD)}{C^2 x}\right) = M_1(f(x)).$$

По формуле Тейлора получим:

$$\left(C^2 x\right)^n f\left(\frac{ACx + (BC - AD)}{C^2 x}\right) = \left(C^2 x\right)^n f\left(\frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C^2 x}\right) =$$

$$= C^{2n} f\left(\frac{A}{C}\right) x^n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}\left(\frac{A}{C}\right)}{\nu!} C^{2(n-\nu)} x^{n-\nu} (BC - AD)^{\nu}$$

и равенство (11.28) доказано.

Далее имеем:

$$g(x) = \left(C^2x\right)^n a_n \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{ACx + (BC - AD)}{C^2x} - \alpha^{(\nu)}\right) =$$

$$= a_n \prod_{\nu=1}^{n} \left((AC - C^2\alpha^{(\nu)})x - (AD - BC)\right) =$$

$$= C^{2n} f\left(\frac{A}{C}\right) \prod_{\nu=1}^{n} \left(x - \frac{AD - BC}{C^2\left(\frac{A}{C} - \alpha^{(\nu)}\right)}\right) = C^{2n} f\left(\frac{A}{C}\right) \prod_{\nu=1}^{n} \left(x - \beta^{(\nu)}\right)$$

что и доказывает равенство (11.29). □

Определение 25. *Пусть α — вещественная иррациональность, тогда цепной последовательностью второго рода дробно-линейных преобразований для многочленов назовем последовательность*

$$\left\{ M_{\nu,1}(\alpha) = \begin{pmatrix} P_\nu(\alpha)Q_\nu(\alpha) & P_{\nu-1}(\alpha)Q_\nu(\alpha) - P_\nu(\alpha)Q_{\nu-1}(\alpha) \\ Q_\nu^2(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \middle| \nu = 0, 1, \ldots \right\},$$

где $P_\nu(\alpha)$ — числитель, а $Q_\nu(\alpha)$ — знаменатель подходящей дроби с номером ν к числу α.

Цепной последовательностью второго рода дробно-линейных преобразований комплексной плоскости назовем последовательность

$$\left\{ M^*_{\nu,1}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & P_\nu(\alpha)Q_{\nu-1}(\alpha) - P_{\nu-1}(\alpha)Q_\nu(\alpha) \\ -Q_\nu^2(\alpha) & P_\nu(\alpha)Q_\nu(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \nu = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Теорема 86. *Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и*

$$f_0(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{P}^*_n[x]$$

— минимальный многочлен.

Для последовательности многочленов $g_\nu(x) = M_{\nu,1}(\alpha)(f_0(x))$ и корней

$$\beta_\nu^{(j)} = M^*_{\nu,1}(\alpha)(\alpha^{(j)}) \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

справедливы соотношения

$$\lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu^{(j)} = 0 \quad (2 \leqslant j \leqslant n), \tag{11.30}$$

$$\beta_\nu^{(1)} = \alpha_{\nu+1} + \frac{Q_{\nu-1}(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)}. \tag{11.31}$$

Доказательство. Действительно, согласно лемме 130 имеем

$$\beta_\nu^{(j)} = M_{\nu,1}^*(\alpha)(\alpha^{(j)}) = \frac{P_\nu(\alpha)Q_{\nu-1}(\alpha) - P_{\nu-1}(\alpha)Q_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)^2\left(\frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(j)}\right)} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{Q_\nu(\alpha)^2\left(\frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(j)}\right)}.$$

Отсюда сразу вытекает утверждение (11.30) при $2 \leqslant j \leqslant n$.

Так как

$$\alpha = \alpha^{(1)} = \frac{P_\nu}{Q_\nu} + \frac{(-1)^\nu \theta_\nu}{Q_\nu Q_{\nu+1}}, \quad \theta_\nu = \frac{Q_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}Q_\nu + Q_{\nu-1}},$$

то

$$\frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(1)} = \frac{(-1)^{\nu-1}\theta_\nu}{Q_\nu Q_{\nu+1}} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{Q_\nu(\alpha_{\nu+1}Q_\nu + Q_{\nu-1})}.$$

Отсюда следует, что

$$\beta_\nu^{(1)} = \frac{\alpha_{\nu+1}Q_\nu + Q_{\nu-1}}{Q_\nu} = \alpha_{\nu+1} + \frac{Q_{\nu-1}}{Q_\nu},$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

11.8. Заключение к одиннадцатой главе

Из материалов главы видно, что приведённые алгебраические иррациональности в случае чисто-вещественных алгебраических полей и обобщённые числа Пизо в общем случае играют принципиальную роль в вопросах разложения алгебраических иррациональностей в цепную дробь. Начиная с некоторого места все остаточные дроби являются приведёнными алгебраическими числами в первом случае и приведёнными обобщёнными числами Пизо — во втором случае.

Из теоремы 85 следует, что начиная с номера m_0 для вычисления очередного неполного частного достаточно вычислить два значения минимального многочлена $f_m(x)$ и имеется рекуррентная формула для вычисления очередного неполного частного.

По-видимому, представляет интерес дальнейшее изучение явления концентрации около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ сопряжённых к остаточной дроби α_m.

Рассмотрим множество всех сопряжённых к остаточным дробям — сопряжённый спектр иррационального числа α. При $n > 2$ сопряжённый спектр является бесконечным множеством, а при $n = 2$ — конечным множеством.

Если множество всех дробей вида $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ назвать рациональным сопряжённым спектром вещественного алгебраического числа, то возникает естественный вопрос о его структуре.

В квадратичном случае имеется конечное число предельных точек для рационального сопряжённого спектра — это сопряжённый спектр. Какая ситуация имеет место в общем случае?

Глава 12

Новые направления исследований

12.1. Введение к двенадцатой главе

В данной главе преследуется цель — показать, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел с одной стороны связана с теоретико-числовым методом в приближенном анализе (см. [204]), а с другой стороны входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел (см. [205]).

12.2. Моноиды натуральных чисел и классы периодических функций

Пусть M — произвольный моноид натуральных чисел. Определим класс функций M_s^α следующим образом. Этот класс периодических функций состоит из функций $f(\vec{x})$, которые задаются многомерным рядом Фурье вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

где коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)} |C(\vec{m})|(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha < \infty.$$

Если σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ моноида натуральных чисел M, то для любого $\alpha > \sigma_M$ ряд Фурье для функции $f(\vec{x}) \in \in M_s^\alpha$ абсолютно и равномерно сходится для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$.

Таким образом, справедливо вложение $M_s^\alpha \subset \mathfrak{A}_s$, где $\mathfrak{A}_s$ — пространство периодических функций от s переменных с абсолютно сходящимся рядом Фурье.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{M}_s$ периодических функций от s переменных, заданное равенством $\mathfrak{M}_s = \bigcup_{\alpha>\sigma_M} M_s^\alpha$. Ясно, что $\mathfrak{M}_s \subset \mathfrak{A}_s$.

Нетрудно видеть, что для нормы $\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^s} |f(\vec{x})|$ справедливо неравенство

$$\|f(\vec{x})\|_C \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(1 + 2\zeta(M|\alpha)\right)^s.$$

Рассмотрим оператор вложения $\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}$ пространства $M_s^{\alpha_1}$ в пространство $M_s^{\alpha_2}$ при $\alpha_1 > \alpha_2$. Естественно, что нормой оператора вложения $\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}$ называется величина, определяемая равенством

$$\|\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}\| = \sup_{f(\vec{x})\in M_s^{\alpha_1}} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}}}{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}}.$$

Лемма 131. *Для любых $\alpha_1 > \alpha_2 > \sigma_M$ для нормы оператора вложения пространства $M_s^{\alpha_1}$ в пространство $M_s^{\alpha_2}$ справедливо равенство*

$$\|\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}\| = 1.$$

Доказательство. Действительно, если $f(\vec{x}) = C$, то

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}} = \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}} = C$$

и, значит, $\|\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}\| \geqslant 1$.

С другой стороны, если $f(\vec{x}) \in M_s^{\alpha_1}$ и

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\, (\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

то

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^{\alpha_1}},$$

поэтому

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}} = \sup_{\overline{m_\nu}\in M,\, (\nu=1,\ldots,s)} |C(\vec{m})|(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^{\alpha_2} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\overline{m_\nu}\in M,\, (\nu=1,\ldots,s)} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^{\alpha_2}}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^{\alpha_1}} \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}$$

и $\|\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}\| \leqslant 1$. Следовательно, $\|\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}\| = 1$. $\square$

Очевидно, что для любого $\alpha > 1$ пространство периодических функций M_s^α является подпространством периодических функций E_s^α. Соответствующий оператор вложения будем обозначать через $\mathbb{A}_\alpha$. Ясно, что этот оператор имеет единичную норму: $\|\mathbb{A}_\alpha\| = 1$.

Одним из важных классов интегральных уравнений является уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = \lambda \iint\limits_{G_s} K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right) \varphi\left(\vec{u}\right) d\vec{u} + f\left(\vec{t}\right), \tag{12.1}$$

где $G_s = [0; 1)^s$.

Характерная особенность уравнения (12.1) — его линейность: неизвестная функция φ входит в него линейно.

Мы будем исследовать уравнение (12.1) для случая, когда свободный член $f\left(\vec{t}\right)$ и ядро $K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right)$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $M_s^\alpha(C_1)$ и $M_{2s}^\alpha(C_2)$.

Первые работы по применению теоретико-числовых методов для приближённого решения уравнение (12.1) принадлежат Н. М. Коробову (см. [88], [102]).

Сопоставим уравнению (12.1) оператор $A_{\lambda,f}$, определяемый равенством:

$$A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right) = g\left(\vec{t}\right).$$

Это означает, что:

$$g\left(\vec{t}\right) = A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right) = \lambda \iint\limits_{G_s} K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right) \varphi(\vec{u}) d\vec{u} + f\left(\vec{t}\right). \tag{12.2}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 132. *Пусть* $\alpha > \sigma_M$, $K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right) \in M_{2s}^\alpha$; $f\left(\vec{t}\right), \varphi\left(\vec{t}\right) \in M_s^\alpha$ *тогда*

$$A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right) \in M_s^\alpha$$

и

$$||A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right)||_{E_s^\alpha} \leqslant ||f\left(\vec{t}\right)||_{E_s^\alpha} + |\lambda| \cdot ||K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right)||_{E_{2s}^\alpha} \cdot ||\varphi\left(\vec{t}\right)||_{E_s^\alpha} \cdot (1 + 2\zeta(M|2\alpha))^s.$$

Доказательство. Пусть $C_2 = ||K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)||_{E^\alpha_{2s}}$, $C_1 = ||f\left(\vec{t}\right)||_{E^\alpha_s}$, $C = ||\varphi\left(\vec{t}\right)||_{E^\alpha_s}$, тогда

$$K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,n_1,\ldots,n_s\\ \overline{m_\nu},\overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m},\vec{n})e^{2\pi i((\vec{m},\vec{t})+(\vec{n},\vec{u}))},\quad |C(\vec{m},\vec{n})|\leqslant\frac{C_2}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\overline{n}_1\ldots\overline{n}_s)^\alpha};$$

$$f\left(\vec{t}\right)=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C_1(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})},\qquad |C_1(\vec{m})|\leqslant\frac{C_1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha};$$

$$\varphi\left(\vec{t}\right)=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})},\qquad |C(\vec{m})|\leqslant\frac{C}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Подставим данные равенства в соотношение (12.2):

$$g\left(\vec{t}\right)=$$
$$=\lambda\iint\limits_{G_s}\left(\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,n_1,\ldots,n_s\\ \overline{m_\nu},\overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m},\vec{n})e^{2\pi i((\vec{m},\vec{t})+(\vec{n},\vec{u}))}\right)\left(\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_s,\\ \overline{k_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{k})e^{2\pi i(\vec{k},\vec{u})}\right)d\vec{u}+$$
$$+\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C_1(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}.$$

Перемножим абсолютно сходящиеся ряды и почленно проинтегрируем их произведение, получим:

$$g\left(\vec{t}\right)=\lambda\sum_{\substack{\vec{m},\vec{n},\vec{k}\\ \overline{m_\nu},\overline{n_\nu},\overline{k_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m},\vec{n})C(\vec{k})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}\iint\limits_{G_s}e^{2\pi i(\vec{n}+\vec{k},\vec{u})}d\vec{u}+$$
$$+\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C_1(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}.$$

Так как

$$\iint\limits_{G_s}e^{2\pi i(\vec{n}+\vec{k},\vec{u})}d\vec{u}=\begin{cases}1 & \text{при}\quad \vec{n}+\vec{k}=\vec{0},\\ 0 & \text{при}\quad \vec{n}+\vec{k}\neq\vec{0},\end{cases}$$

то для $g\left(\vec{t}\right)$ справедливо равенство:

$$g\left(\vec{t}\right)=\lambda\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,n_1,\ldots,n_s\\ \overline{m_\nu},\overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m},\vec{n})C(-\vec{n})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}+\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C_1(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}=$$
$$=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}}\left(C_1(\vec{m})+\lambda\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_s,\\ \overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m},\vec{n})C(-\vec{n})\right)e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}=$$

$$= \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C_2(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}.$$

Оценим модуль коэффициента $C_2(\vec{m})$.

$$|C_2(\vec{m})| = |C_1(\vec{m}) + \lambda \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_s,\\ \overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m},\vec{n})C(-\vec{n})| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} + \lambda \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_s,\\ \overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} \frac{C_2}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\overline{n}_1\ldots\overline{n}_s)^\alpha}\frac{C}{(\overline{-n_1}\ldots\overline{-n_s})^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\left(C_1 + \lambda C_2 C \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_s,\\ \overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} \frac{1}{(\overline{n}_1\ldots\overline{n}_s)^{2\alpha}}\right) =$$

$$= \frac{C_1 + \lambda C_2 C(1+2\zeta(M|2\alpha))^s}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Таким образом показано, что функция $g\left(\vec{t}\right) = A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right)$ принадлежит классу M_s^α и

$$\|g\left(\vec{t}\right)\|_{E_s^\alpha} \leqslant \|f\left(\vec{t}\right)\|_{E_s^\alpha} + \lambda\cdot(1+2\zeta(M|2\alpha))^s\cdot\|\varphi\left(\vec{t}\right)\|_{E_s^\alpha}\cdot\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_{2s}^\alpha}.$$

А, следовательно, доказано, что оператор $A_{\lambda,f}$ при достаточно малом λ является сжимающим отображением. □

Лемма 133. *Пусть* $|\lambda| \leqslant \frac{q}{\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(M|2\alpha))^s}$ *и* $q<1$ *тогда оператор* $A_{\lambda,f}$ *является сжатием, то есть*

$$\|A_{\lambda,f}\varphi_1 - A_{\lambda,f}\varphi_2\|_{E_s^\alpha} \leqslant q\|\varphi_1-\varphi_2\|_{E_s^\alpha}.$$

Доказательство. Обозначим через A_λ оператор $A_{\lambda,f}$ при $f\equiv 0$. Из определения A_λ следует , что это линейный оператор и

$$A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right) = A_\lambda\varphi\left(\vec{t}\right) + f\left(\vec{t}\right)$$

Отсюда следует, что:

$$A_{\lambda,f}\varphi_1 - A_{\lambda,f}\varphi_2 = A_\lambda\varphi_1 - A_\lambda\varphi_2 = A_\lambda(\varphi_1-\varphi_2)$$

Применяя лемму 132 при $f\equiv 0$, получим

$$\|A_\lambda(\varphi_1-\varphi_2)\|_{E_s^\alpha} \leqslant |\lambda|((1+2\zeta(M|2\alpha))^s)\|\varphi_1\left(\vec{t}\right) - \varphi_2\left(\vec{t}\right)\|_{E_s^\alpha}\cdot\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_{2s}^\alpha}.$$

Тогда при

$$|\lambda| \leqslant \frac{q}{\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(M|2\alpha))^s}$$

справедливо неравенство:

$$\|A_{\lambda,f}\varphi_1 - A_{\lambda,f}\varphi_2\|_{E_s^\alpha} \leqslant q\|\varphi_1-\varphi_2\|_{E_s^\alpha},$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 87. *Пусть $q<1$ и*

$$|\lambda| \leqslant \frac{q}{\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(M|2\alpha))^s}. \tag{12.3}$$

Тогда уравнение Фредгольма (12.1) имеет единственное решение и для него справедливо представление в виде ряда Неймана

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) + \sum_{\vec{k}=1}^{\infty}\lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k.$$

Доказательство. Так как согласно лемме (12.2) при λ, удовлетворяющем условию (12.3) оператор $A_{\lambda,f}$ является сжатием полного пространства E_s^α, то он имеет единственную неподвижную точку, то есть уравнение

$$A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right) = \varphi\left(\vec{t}\right)$$

имеет единственное решение. Но это и означает, что $\varphi\left(\vec{t}\right)$ решение уравнения(12.1).

Как известно, для любой точки x_0 полного пространства E и сжимающего отображения A последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = A^n x_0$, сходится к неподвижной точке оператора A в норме пространства E. Применяя это к пространству $E=E_s^\alpha$, оператору $A=A_{\lambda,f}$, точке $x_0 = f\left(\vec{t}\right)$ и норме $\|\cdot\|_{E_s^\alpha}$, получим, что

$$A_{\lambda,f}^n f\left(\vec{t}\right) \to \varphi\left(\vec{t}\right)$$

где φ — решение уравнения (12.1). То есть

$$\|\varphi - A_{\lambda,f}^n f\|_{E_s^\alpha} \to 0, \text{ при } n\to\infty. \tag{12.4}$$

Так как

$$\|g(\vec{x})\|_C \leqslant (1+2\zeta(2\alpha))^s\|g(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$$

для любой функции $g(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, то из (12.4) следует, что

$$\|\varphi - A_{\lambda,f}^n f\|_C \to 0, \quad n \to \infty.$$

Другими словами, последовательность $A_{\lambda,f}^n f$ равномерно сходится к решению уравнения (12.1).

Докажем по индукции, что

$$A_{\lambda,f}^n f = f\left(\vec{t}\right) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s\left(\vec{t}, \vec{u}_1\right) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \ldots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \ldots d\vec{u}_k. \tag{12.5}$$

Действительно, (12.5) справедливо при $n = 1$, так как

$$A_{\lambda,f} f = f\left(\vec{t}\right) + \lambda \iint\limits_{G_s} K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right) f(\vec{u}) d\vec{u}.$$

Далее имеем:

$$A_{\lambda,f}^{n+1} f = A_{\lambda,f}(A_{\lambda,f}^n f) = f\left(\vec{t}\right) + A_\lambda\left(A_{\lambda,f}^n f\right) = f\left(\vec{t}\right) +$$

$$+A_\lambda\left(f\left(\vec{t}\right) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \iint\limits_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \ldots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \ldots d\vec{u}_k\right) =$$

$$= f\left(\vec{t}\right) + A_\lambda\left(f\left(\vec{t}\right)\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \lambda^k A_\lambda\left(\iint\limits_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \ldots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \ldots d\vec{u}_k\right) =$$

$$= f\left(\vec{t}\right) + \lambda \iint\limits_{G_s} K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right) f(\vec{u}) d\vec{u} + \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k+1} \iint\limits_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \cdot$$

$$\cdot\left(\iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \ldots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_{k+1}) f(\vec{u}_{k+1}) d\vec{u}_2 \ldots d\vec{u}_{k+1}\right) d\vec{u}_1.$$

Так как для непрерывных функций порядок интегрирования произвольный, то

$$\iint\limits_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1)\left(\iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \ldots K_s(\vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}) f(\vec{u}_{k+1}) d\vec{u}_2 \ldots d\vec{u}_{k+1}\right) d\vec{u}_1 =$$

$$= \iint\limits_{G_{(k+1)s}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \ldots K_s(\vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}) f(\vec{u}_{k+1}) d\vec{u}_1 \ldots d\vec{u}_{k+1}.$$

Из равномерной сходимости последовательности $A_{\lambda,f}f$ следует, что

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k,$$

и этот ряд равномерно сходится на G_s. Теорема полностью доказана. □

Следствие 13. *Пусть выполняется условие теоремы, тогда для решения уравнения (12.1) справедливо соотношение*

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k+$$
$$+\frac{q^{n+1}\cdot\Theta\cdot\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}}{1-q}, \quad \text{где} \quad |\Theta| \leqslant (1+2\zeta(2\alpha))^s.$$

Доказательство.

$$\lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k = A_\lambda^k f\left(\vec{t}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k\right\|_{E_s^\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_\lambda^k f\left(\vec{t}\right)\|_{E_s^\alpha}.$$

Так как A_λ линейный оператор и для его нормы $\|A_\lambda\|$ по лемме (12.1) справедливо неравенство

$$\|A_\lambda\| \leqslant |\lambda| \|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_2 s^\alpha} \cdot (1+2\zeta(M|2\alpha))^s \leqslant q, \quad \text{то} \quad \|A_\lambda^n\| \leqslant \|A_\lambda\|^n \leqslant q^n.$$

Поэтому

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k\right\|_{E_s^\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k ||f\left(\vec{t}\right)||_{E_s^\alpha} = \frac{q^{n+1}||f(\vec{t})||_{E_s^\alpha}}{1-q}.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda^k\iint\limits_{G_{sk}}K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k\right\|_C \leqslant$$

$$\leqslant (1+2\zeta(2\alpha))^s\frac{q^{n+1}||f(\vec{t})||_{E_s^\alpha}}{1-q},$$

чем следствие полностью доказано. □

12.3. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ — произвольный моноид натуральных чисел. Рассмотрим множество $\mathbb{D}(M)$ — произвольных рядов Дирихле вида

$$f(\alpha)=\sum_{n\in M}\frac{a(n)}{n^\alpha}\quad \alpha=\sigma+it,\quad \sigma>\sigma_f\geqslant\sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости.

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле. Таким образом, $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{K}\subseteq\mathbb{C}$. Если все коэффициенты $a(n)\in\mathbb{K}$, то множество всех таких рядов Дирихле будем обозначать через $\mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$ и оно является бесконечномерным линейным функциональным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Выделим подпространство $\mathbb{D}^\infty(M)_\mathbb{K}$ условием $\sup_{n\in M}|a(n)|<\infty$. На подпространстве $\mathbb{D}^\infty(M)_\mathbb{K}$ зададим норму

$$\|f(\alpha)\|=\sup_{n\in M}|a(n)|.$$

Относительно заданной нормы $\mathbb{D}^\infty(M)_\mathbb{K}$ является несепарабельным пространством. Оно будет банаховым, если поле $\mathbb{K}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{Q}$ относительно нормы, заданной абсолютной величиной числа из поля $\mathbb{K}$.

Рассмотрим произведение двух рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$:

$$f(\alpha)=\sum_{n\in M}\frac{a(n)}{n^\alpha},\quad g(\alpha)=\sum_{n\in M}\frac{b(n)}{n^\alpha}\quad a(n),b(n)\in\mathbb{K},$$

имеем:

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{c(n)}{n^\alpha},$$

где

$$c(n) = \sum_{m|n,\, m\in M} a(m)b\left(\frac{n}{m}\right) \in \mathbb{K} \qquad n \in M.$$

Следовательно $f(\alpha)g(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ и $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ является коммутативной алгеброй над полем $\mathbb{K}$.

Если ряд Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ имеет коэффициент $a(1) \neq 0$, то существует обратный ряд Дирихле $f^{-1}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$, то есть такой ряд Дирихле

$$f^{-1}(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{b(n)}{n^\alpha}, \quad \text{что} \quad f(\alpha)f^{-1}(\alpha) = 1.$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты $b(n)$ удовлетворяют соотношениям:

$$b(1) = \frac{1}{a(1)}, \quad b(n) = -\sum_{m|n,\, m\in M,\, m>1} a(m)b\left(\frac{n}{m}\right) \quad n \in M, n > 1.$$

Множество всех обратимых рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ обозначим через $\mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$. Ясно, что это мультипликативный моноид.

12.4. Заключение к двенадцатой главе

Из рассмотренных материалов видно.

Во-первых, с каждым моноидом M натуральных чисел связывается класс периодических функций M_s^α, который вложен в хорошо известный класс E_s^α.

Оказалось, что класс периодических функций M_s^α замкнуты относительно интегральных операторов Фредгольма и на нем разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Во-вторых, теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел.

Несомненно, что оба эти новых направлений исследований заслуживают внимания. По первому направлению возникает вопрос о погрешности приближенного интегрирования и точности решения интегрального уравнения Фредгольма. Другой вопрос связан с возможностью решения уравнений с частными производными на этом классе периодических функций.

По второму направлению представляет интерес, например, исследование подалгебры рядов Дирихле, сходящихся на всей комплексной плоскости. Другая интересная алгебра образована рядами Дирихле, которые имеют аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Айгнер Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. 558 с.

2. Акрамов У. А. Теорема изоляции для форм, отвечающих чисто вещественным алгебраическим полям, // Аналитическая теория чисел и теория функций: 10. Зап. науч. семинара. ЛОМИ. 1990. N 185. С. 5–12.

3. А. Г. Александров Исследование на ЭВМ непрерывных дробей // Алгоритмические исследования в комбинаторике. М.: Наука. 1978. С. 142–161, 187.

4. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1986.

5. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

6. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

7. Бахвалов Н. С., Коробов Н. М., Ченцов Н. Н., Применение теоретико-числовых сеток к задачам приближенного анализа // Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда. Л.: Наука, 1964. Т. II. С. 580 — 587.

8. В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров Цепные дроби, группа GL(2,Z) и числа Пизо // Матем. тр. 2007. Т. 10, № 1. С. 97–131.

9. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.

10. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

11. Бочарова Л. П., Ванькова В. С., Добровольский Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 2. С. 23–28.

12. Бочарова Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8. Вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4 — 109.

13. Б. М. Бредихин. Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$, Изв. вузов. Матем., 1960, 6, 40–49.

14. Б. М. Бредихин. Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп, Матем. сб., 50(92):2 (1960), 221–232.

15. Б. М. Бредихин. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями // Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.

16. Б. М. Бредихин. О степенных плотностях некоторых подмножеств свободных полугрупп, Изв. вузов. Матем., 1958, 3, 24–30.

17. Б. М. Бредихин. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями, Матем. сб., 46(88):2 (1958), 143–158.

18. Б. М. Бредихин. Пример конечного гомоморфизма с ограниченной сумматорной функцией, УМН, 11:4(70) (1956), 119–122.

19. Б. М. Бредихин. Некоторые вопросы теории характеров коммутативных полугрупп, Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, т. I, Москва, Изд. АН СССР (1956), 3.

20. Б. М. Бредихин. О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп, ДАН 94 (1954), 609 — 612.

21. Б. М. Бредихин. О характерах числовых полугрупп с достаточно редкой базой, ДАН 90 (1953), 707 — 710.

22. А. Д. Брюно Разложение алгебраических чисел в цепные дроби // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4, № 2. С. 211–221.

23. А. Д. Брюно Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 2. С. 35–65.

24. Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1960.

25. Быковский В. А. О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратичных отклонениях сеток. Владивосток: ВЦ, 1985. (Препринт.)

26. Быковский В. А. Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов. Хабаровск, 1995. С. 1–13. (Препринт.)

27. Г. Вейль Алгебраическая теория чисел. М.: Гос. из-во И. Л. 1947. 226 с.

28. И. М. Виноградов, Новая оценка функции $\zeta(1+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем., 22:2 (1958), 161–164.

29. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.

30. С. М. Воронин Избранные труды: Математика / Под ред. А. А. Карацубы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. — 480 с.

31. Воронин С. М. О квадратурных формулах // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58. N 5. С. 189–194.

32. Воронин С. М. О построении квадратурных формул // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59. N 4.

33. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физматлит, 1994. — 376 с.

34. Воронин С. М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Мат. заметки. 1989. Т. 46. N 2. С. 34–41.

35. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.; Л.: Гостехиздат, 1940.

36. Гельфанд И. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н. Вычисление интегралов методом Монте-Карло // Изв. вузов. Математика. 1958. N 5(6). С. 32–45.

37. А. О. Гельфонд Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. 376 с.

38. А. Гурвиц, Р. Курант Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

39. Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Теория иррациональностей третьей степени // Научн. тр. / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. 1940. Т.11.

40. Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М.; Л.: Изд–во. АН СССР, 1947.

41. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9, вып. 1(25). С. 185 — 223.

42. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9. Вып. 1. С. 82–90.

43. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник 2004. Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 95–121.

44. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006 Т. 3. Вып. 2(4). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 43 — 59.

45. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302 — 304.

46. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

47. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.

48. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.

49. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3 Вып. 2 (4) С. 43–59.

50. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГУ, 2002. С. 22–23

51. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, №6090–84.

52. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

53. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. — Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. — № 6091–84.

54. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

55. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

56. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

57. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Дис. ... доктора физ.–мат. наук. Тула, 2000.

58. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Автореф. дис. ... доктора физ.–мат. наук. Москва, 2000.

59. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005. — 195 с.

60. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

61. Добровольский Н. М.,Ванькова В. С. Об одной лемме А.О. Гельфонда. Деп. в ВИНИТИ 08.01.87, N 1467–В87.

62. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О гиперболической дзета–функции алгебраических решёток // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. республик. конф. Ташкент, 1990. С. 22.

63. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета–функция алгебраических решёток. Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, №2327–В90.

64. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.

65. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5. Вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.

66. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5 Вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.

67. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГу 2002. С. 18–20.

68. Добровольский Н. М., Клепикова Н. Л. Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов // ИОФАН СССР. 63. Москва, 1990. (Препринт.)

69. Добровольский Н.М., Коробов Н.М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток // Чебышевский сборник. Научные труды по математике. Т. 2. — Тула, 2001. — С. 41 — 53

70. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.

71. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5. Вып. 1. Тула, 1999. С. 100–113.

72. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. Тула, 2001. С. 82–86.

73. Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков. Борис Максимович Бредихин и его научно-педагогическая деятельность // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 19–28.

74. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.

75. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решетки в гиперболическом кресте при малых значениях параметра // Всерос. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики Тула, ТулГУ, 2000. С. 29–30

76. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

77. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета–функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

78. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77–87.

79. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

80. Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 1. С. 34–55.

81. Н. М. Добровольский, Е. И. Юшина О приведенных алгебраических иррациональностях // Алгебра и приложения: труды Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина, Нальчик, 6–11 сентября 2014 г. – Нальчик: из-во КБГУ. С. 44 – 46.

82. Г. Дэвенпорт Мультипликативная теория чисел. — М.: Наука, 1971. — 200 с.

83. А. А. Карацуба Основы аналитической теории чисел, 2-е изд. М.: Наука. ФизМатЛит, 1983. 240 с.

84. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.

85. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. № 6. С. 1062–1065.

86. Н. М. Коробов, Оценки сумм Вейля и распределение простых чисел // Докл. АН СССР, 123:1 (1958), 28–31.

87. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

88. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, №2. С. 235–238.

89. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

90. Коробов Н. М. О некоторых теоретико-числовых методах приближенного вычисления кратных интегралов. Резюме докл. на заседании Моск. мат. об-ва. // УМН. 1959. Т. 14. Вып. 2 (86). С. 227–230.

91. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009–1012.

92. Коробов Н. М. О некоторых задачах теории чисел, возникающих из потребностей приближенного анализа: Сообщение на IV математическом съезде (не опубл.).

93. Коробов Н. М. О применении теоретико-числовых сеток // Вычислительные методы и программирование: Сб. Моск. ун-т. 1962. С. 80–102.

94. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах в приближенном анализе // Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники. М.: Машгиз. 1963.

95. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

96. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22, 3 (135). С.83–118.

97. Коробов Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 267. 1982. № 2. С. 289–292.

98. Коробов Н. М. Об одной оценке А. О. Гельфонда // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1983. N3. С.3–7.

99. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

100. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83–90.

101. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования // Историко-матем. исследования. СПб., 1994. Вып. XXXV. С. 285–301.

102. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

103. А. Лауринчикас, Р. Мацайтене. Дискретная универсальность в классе Сельберга // Труды математического института имени В. А. Стеклова. 2017. Т. 299. С. 155–169.

104. Ю. В. Матиясевич. Небольшого количества сомножителей из эйлерова произведения достаточно для вычисления дзета-функции с большой точностью // Труды математического института имени В. А. Стеклова. 2017, Т. 299. С. 178–188.

105. Н. К. Огородничук, Е. Д. Ребров ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилами остановки // Материалы международной научно-практической конференции Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, С. 254 — 258.

106. В. Д. Подсыпанин О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 43—46.

107. Е. В. Подсыпанин, Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 67. С. 184–194.

108. Е. В. Подсыпанин О разложении иррациональностей высших степеней в обобщенную непрерывную дробь (по материалам В. Д. Подсыпанина) рукопись 1970 // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 47—49.

109. А. Г. Постников Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971. — 416 с.

110. А. Г. Постников и Н. П. Романов. Упрощение элементарного доказательства А. Сельберга асимптотического закона распределения простых чисел // Успехи матем. наук, т. X, вып. 4 (66) (1955), 75—87.

111. В. В. Прасолов Многочлены. — 3-е изд., исправленное. — М.: МЦНМО, 2003. — 336 с.

112. Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем. — М.: Мир, 1967. 511 с.

113. И. И. Привалов Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1977. — 444 с.

114. Реброва И. Ю. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Современные проблемы теории чисел: Тез. докл. III Междунар. конф. Тула: Изд-во ТГПУ, 1996. С. 119.

115. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

116. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1999.

117. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МПГУ, 1999.

118. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. / Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

119. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

120. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

121. Рышков С. С., Барановский Е. П. Классические методы теории решётчатых упаковок // УМН. Т. 34. В. 4 (208). 1979. С. 3–63.

122. Скубенко Б. Ф. О произведении n линейных форм от n переменных // Труды МИАН СССР. N 158. 1981. С. 175–179.

123. Скубенко Б. Ф. Теорема изоляции для разложимых форм чисто вещественных алгебраических полей степени $n \geqslant 3$ Аналитическая теория чисел и теория функций. 4. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 112. 1981. С. 167–171.

124. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных // Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 168. 1988. С. 125–139.

125. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geqslant 3$ // Модулярные функции и квадратичные формы. 1. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 183. 1990. С. 142–154.

126. Смоляк С. А. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α // ДАН СССР 131, 1960, N 5 С. 1028–1031

127. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 5, С. 1042–1045.

128. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. кандидатская диссертация

129. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

130. Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. / М.: Наука, 1969.

131. Р. Стенли Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990. — 440 с.

132. Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Матем. сб. 1990. Т. 181. N 4. С. 490–505.

133. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953. 408 с.

134. Е. В. Триколич, Е. И. Юшина, Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сб.2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.

135. Э. Трост Простые числа — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959. — 136 с.

136. Э. Т. Уиттекер, Д. Н. Ватсон Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции. — М.: Физматгиз, 1963. 516 с.

137. Г. М. Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 3 — М.: Наука, 1956. 656 с.

138. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

139. Фролов К. К. О связи квадратурных формул и подрешёток решётки целых векторов // ДАН СССР. 232. 1977. № 1. С. 40–43.

140. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

141. Фролов К. К. Оценка сверху дискренанса в метрике L_p, $2 \leqslant p < \infty$ // ДАН СССР. 252. 1980. № 4. С. 805–807.

142. К. Хооли Применение методов решета в теории чисел. — М.: Наука, 1987, 20 с.

143. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.

144. Чандрасекхаран К. Арифметические функции, пер. с англ. — М.: Наука, 1975. 272 с.

145. Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений, т. I–V. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1944–1951.

146. Чебышёв П. Л. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1955, 926 с.

147. Н. Г. Чудаков Введение в теорию L-функций Дирихле. М. — Л.: ОГИЗ, 1947. 204 с.

148. Б. В. Шабат Введение в комплексный анализ — М.: Наука, 1969. — 576 с.

149. Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 7. 1963. N 4. С. 784–802.

150. Е. И. Юшина О некоторых приведенных алгебраических иррациональностях // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Региональной научной студенческой конференции. Тула: ТулГУ 2015. С. 66–72.

151. Adcock B., "Multivariate Modified Fourier Series and Application to Boundary Value Problems", Numer. Math., 115:4 (2010), 511–552

152. J. C. Andrade, S. M. Gonek, J. P. Keating. Truncated product representations for L-functions in the hyperelliptic ensemble // Mathematika. 2018. V. 64, iss. 1. P. 137–158.

153. Chernov A., Duong Pham, "Sparse Tensor Product Spectral Galerkin Bem For Elliptic Problems With Random Input Data on a Spheroid", Adv. Comput. Math., 41:1 (2015), 77–104

154. Chernov A., Dung D., "New Explicit-in-Dimension Estimates For the Cardinality of High-Dimensional Hyperbolic Crosses and Approximation of Functions Having Mixed Smoothness", J. Complex., 32:1 (2016), 92–121

155. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

156. Dirichlet, PGL (1837), «Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält "// Abhandlungen

der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 48 : 45–71.

157. Dirichlet L. Über die Bestimmung der mitteleren Werthe in der Zahlentheorie // Abh. Akad. Berlin (Werke. 2. 49–66) 1849. Math. Abh., 69-83.

158. Leonard Euler. Several Remarks on Infinite Series // Commentarii academiae scientarum Petropolitanae 9 (1737), 1744, p. 160–188.

159. Faure H. Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s) // Acta Arith. 41. 1982. P. 337–351.

160. Gauss C. F. Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen Formen von Ludvig August Seeber // Göttingische gelehrte Anzeigen. 1831. Juli 9.

161. Gauss C. F. Werke. Bd 2. Göttingen, 1863. S. 269–291.

162. Griebel, M, “Sparse grids for the Schrodinger equation”, ESAIM-Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modelisation Mathematique et Analyse Numerique, 41:2 (2007), 215

163. Ingham, A. E. On the difference between consecutive primes (англ.) // Quarterly Journal of Mathematics (англ.)рус. : journal. — 1937. — Vol. 8, no. 1. — P. 255—266. — doi:10.1093/qmath/os-8.1.255

164. J. Hadamard. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 199-220.

165. Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals. // Numerische Math. 27. № 2 (1960) 84 — 90 Bd 2 № 2.

166. Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems // Proc. N 4. Acad. Sci. 1960.

167. Hua Loo Keng, Wang Yuan Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

168. Huybrechs D., Iserles A., Norsett S.P., “From High Oscillation to Rapid Approximation IV: Accelerating Convergence”, IMA J. Numer. Anal., 31:2 (2011), 442–468

169. Huxley M. N. Exponential sums and lattice points II. Proc. London Math. Soc. 66. 1993. No. 2. P. 273–301.

170. Larcher G. Niederreiter. Optional coefficients modulo prime powers in the three–dimensional case // Ann.mat.pura ed appl. 1989. N 155. P. 299–315.

171. Luo X., Xu X., Rabitz H., “On the fundamental conjecture of HDMR: a Fourier analysis approach”, J. Math. Chem., 55:2 (2017), 632–660

172. Minkowski H. Geometrie der Zahlen. Leipzig – Berlin, 1896.

173. B. Riemann. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe // Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.

174. B. Rosser The n-th Prime is greater than $n \log n$ // Proc. London. math. Soc. 1938. Vol. 45. pp. 21–44.

175. Atle Selberg. An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem // Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 50, No. 2 (Apr., 1949), pp. 305-313.

176. K. F. Roth Rational approximations to algebraic numbers // Mathematika. 1955. Vol. 2. P. 1–20. corrigendum: p. 168.

177. Shen J., Wang L.-L., “Sparse Spectral Approximations of High-Dimensional Problems Based on Hyperbolic Cross”, SIAM J. Numer. Anal., 48:3 (2010), 1087–1109

178. Shen J., Wang L.-L., Yu H., “Approximations By Orthonormal Mapped Chebyshev Functions For Higher-Dimensional Problems in Unbounded Domains”, J. Comput. Appl. Math., 265 (2014), 264–275

179. C.J. del la Vallee Poussin, Recherches analytiques sur la theorie des nombres: Premier partie: La fonction (s) de Riemann et les nombres premiers en general, Annales de la Soc. scientifique de Bruxelles 20, 183–256 (1896)

180. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)

Публикации автора

181. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 6–85.

182. Добровольский Н.Н., Киселева О.В., Симонов А.С. Граничные функции класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сеток Смоляка // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2011. Вып. 2. С. 11—29.

183. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" . Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.

184. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 47–52.

185. Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 6 — 18.

186. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovolsky, N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. V. 211. 2014. P. 23-62. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_2

Основные статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

187. **Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2015-16-3-147-182

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

English transl.: Dobrovol'skii, N. M.; Dobrovol'skii, N. N. About minimal polynomial of residual fractions for algebraic irrationalities. Dokl. Math. 106, Part Suppl. 2, S165-S180 (2022)

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

188. **Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сборник 2015. Т. 16, вып. 4(56). С. 100–149.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2015-16-4-100-149

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

189. **N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2016. № 2. P. 27–39.**

Журнал индексируется в Scopus. IF: SJR 0.29

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

190. **Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), Advances in Dynamical Systems and Control,**

Studies in Systems, Decision and Control 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5

DOI: 10.1007/978-3-319-40673-2_5

Книга проиндексированна в WoS, Scopus.

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

191. **Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.**

 DOI: 10.22405/2226-8383-2016-17-3-72-105

 Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

 Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

192. **Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. Н. Добровольский, Е. А. Матвеева О дробно-линейных преобразованиях форм А. Туэ — М. Н. Добровольского — В. Д. Подсыпанина // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 2. С. 54–97.**

 DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-54-97

 Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

 Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

193. **Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 2. С. 98–128.**

 DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-98-128

 Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

 Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

194. **Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.**

DOI: 0.22405/2226-8383-2017-18-4-325-337

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

195. **Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-187-207

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

196. **Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-1-79-105

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

197. **Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-1-106-123

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

198. **Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-142-150

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

199. **Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-123-141

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

200. **Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-3-95-108

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

201. **Добровольский Н. Н. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 3. С. 109–134.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-3-109-134

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

202. **И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-4-118-176

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Обзорная статья. Добровольскому Н. Н. принадлежат разделы 6, 7, 14.

203. **Н. Н. Добровольский. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-1-148-163

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

English trans.: Dobrovol'skii, N. N. A model zeta function of the monoid of natural numbers. Dokl. Math. 106, Part Suppl. 2, S192-S200 (2022);

204. **Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-1-164-178

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

205. **Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-1-179-194

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

206. **Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 156–168.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-2-156-168

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

207. **Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2020-21-3-165-185

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

208. **Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка II // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, с. 100–121.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-100-121

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Автору принадлежат разделы статьи посвященные вопросам теории чисел.

209. **Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 166–178.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-166-178

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

210. **Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных сдвинутых решёток // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 196–231.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-196-231

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

211. **Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 368–382.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-368-382

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Автору принадлежит раздел статьи посвященный вопросам теории чисел.

212. **А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-4-168-182

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

213. **М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский Об одном функциональном уравнении // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 359–364.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-359-364

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

214. **Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Об обобщённых неравномерных сетках Коробова // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 365–373.**

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-365-373

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

215. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

216. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.

217. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Е. И. Юшина О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). С. 47 — 52.

218. Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып.1. С. 91 — 95.

219. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110 — 152.

Монографии

220. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с.

221. Г. Т. Вронская, Н. Н. Добровольский Отклонения плоских сеток / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2012. 193 с.

222. Добровольский Н. Н. Гиперболический параметр сеток с весами и его применение: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ имени М. В. Ломоносова. 2014.

Основные монографии по теме диссертации

223. **Добровольский Н. Н., Добровольская Л. П., Серегина Н. К., Бочарова О. Е. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов: Моногр. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – 223 с.**

Добровольскому Н. Н. принадлежат главы 5, 6, 8, 9

224. **Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. / Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.**

Добровольскому Н. Н. принадлежат главы 2, 4

225. **Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. / Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. II. – 186 с.**

Добровольскому Н. Н. принадлежат главы 2, 3

Тезисы и материалы конференций

226. Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула, Изд-во ТулГУ, 2007. С. 36 – 36.

227. Добровольский Н. Н., Ребров Е. Д. Квадратичное отклонение двумерных сеток Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула, Изд-во ТулГУ, 2008. С. 51 – 52.

228. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Проблемно ориентированная информационно вычислительная система ТМК (теоретико-числовой метод Коробова) // Роль университетов в поддержке гуманитарных научных исследований: Материалы V Междунар. науч.-практ. конф.: В 2 т. / Отв. ред. О. Г. Вронский. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2010. Доп. том.

229. Н. Н. Добровольский О граничных функциях класса $E_2^2\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для сеток Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ 2011.

230. Добровольский Н. Н. ПОИВС ТМК: Гиперболический параметр сеток с весами // Материалы международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии". Тула, 3-7 октября 2011 издательство ТГПУ им Л.Н. Толстого С. 266 — 267.

231. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20–26, 2012. p. 22–24.

232. Добровольский Н.Н. О гиперболическом параметре сетки // В сборнике: Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Материалы XII Международной конференции,посвященной восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н.Толстого. 2014. С. 284-287.

233. Добровольский Н.М., Добровольский Н.Н. О некоторых проблемах теоретико-числового метода в приближенном анализе // В сборнике: Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Материалы XII Международной конференции,посвященной восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н.Толстого. 2014. С. 23-27.

234. Добровольский Н.Н., Вронская Г.Т. Об отклонении плоских сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 340-342.

235. Добровольский Н.Н. Гиперболические параметры сеток и их применения // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 336-339.

236. Добровольский Н.М., Добровольский Н.Н. Гиперболическая дзета-функция решёток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 28-31.

237. Добровольская Л.П., Бочарова О.Е., Добровольский Н.Н. Оптимальные коэффициенты и теоретико-числовые сетки // В сборнике: Актуальные проблемы социально-экономического развития предприятий, отраслей, комплексов. международная научно-практическая конференция. АНО ВО «Институт экономики и управления». 2015. С. 120-124.

238. Добровольский Н.Н. Об одном вопросе из элементарной теории чисел // В сборнике: Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование (ИУСМКМ - 2016). Сборник материалов VII Международной научно-технической конференции в рамках II Международного Научного форума Донецкой Народной Республики "Инновационные перспективы Донбасса". Редколлегия: А.Ю. Харитонов [и др.]. г. Донецк, 2016. С. 35-36.

239. Добровольский Н.М., Добровольский Н.Н., Балаба И.Н., Реброва И.Ю. Значение минимальной формы остаточной дроби в точках (-QM-2, QM-1) и (-PM-2, PM-1) и алгебраические решетки для остаточных дробей // В сборнике: Университет XXI века: научное измерение. Материалы Всероссийской конференции. Сер. "Библиотека Чебышевского сборника"Библиотека Чебышевского сборника, Московский педагогический государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет. 2016. С. 31-43.

240. Серегина Н.К., Добровольский Н.Н. О числе точек решетки решений линейного сравнения в областях // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. 2018. С. 323-325.

241. Климова Е.И., Добровольский Н.Н. Квадратичные поля и квадратурные формулы // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. 2018. С. 308-310.

242. Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей и теоретико-числовой метод в приближенном анализе // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. 2018. С. 304-305.

243. Добровольский Н.Н. Ряды Дирихле и гиперболическая дзета-функция решёток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. 2018. С. 303-304.

244. Серегина Н.К., Добровольский Н.Н. О количественной мере качества одной обобщенной параллелепипедальнои сетки // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. 2019. С. 301-302.

245. Добровольский Н.Н., Добровольский М.Н., Добровольский Н.М., Балаба И.Н., Реброва И.Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. 2019. С. 289-291.

246. Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М., Реброва И.Ю., Родионов А.В. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. 2019. С. 285-288.

247. Добровольский Н.Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. 2019. С. 283-285.

248. Добровольский Н.М., Добровольский Н.Н. Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближённом анализе // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. 2019. С. 185-187.

249. Добровольский Н.М., Добровольский Н.Н. Актуальные задачи теоретико-числового метода в приближенном анализе // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 2020. С. 290-294.

250. Добровольский Н.Н. Работы Б. М. Бредихина по свободным числовым полугруппам и современная аналитическая теория моноидов натуральных чисел // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: Современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 2020. С. 25-29.

251. Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М. Приближение алгебраических решеток целочисленными решетками // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П.Л. Чебышёва. Тула, 2021. С. 253-255.

252. Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М. Башни полей Дирихле и многомерные квадратурные формулы // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П.Л. Чебышёва. Тула, 2021. С. 250-253.

253. Добровольский Н.Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел и смежные вопросы // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П.Л. Чебышёва. Тула, 2021. С. 16-20.