

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Григорьев Олег Михайлович

Логика систем обобщенных истинностных значений

5.7.5. Логика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философских наук

Москва — 2025

Диссертация выполнена на кафедре логики философского факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Официальные оппоненты: **Васюков Владимир Леонидович**,
доктор философских наук (б/звания), ФГБУН
Институт философии Российской академии наук,
отдел онтологии, теории познания и логики,
сектор логики, ведущий научный сотрудник;
Микиртумов Иван Борисович,
доктор философских наук, доцент,
Санкт-Петербургский филиал ФГАОУ ВО
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», факультет
«Санкт-Петербургская школа гуманитарных
наук и искусств», кафедра философии,
заведующий кафедрой;
Одинцов Сергей Павлович,
доктор физико-математических наук (б/звания),
ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии
наук, лаборатория логических систем, ведущий
научный сотрудник.

Защита диссертации состоится «8» октября 2025 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета МГУ.057.1 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4 (учебно-научный корпус «Шуваловский»), философский факультет, аудитория А-518 (Зал заседаний Ученого совета факультета).

E-mail: diss@philos.msu.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:
<https://dissovet.msu.ru/dissertation/3504>.

Автореферат разослан «__» _____ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат философских наук, доцент

Е.В. Брызгалина

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Изучение систем обобщенных истинностных значений и их логик оформилось в самостоятельное направление исследований относительно недавно. Термин «обобщенное истинностное значение» в техническом смысле был использован впервые в работе М. Данна, Т. Такенаки и Я. Шрамко¹ в качестве обозначения для семантического объекта, который возникает в результате обобщения функции оценки выражений формализованного языка. В свою очередь идея обобщения функции оценки была предложена – намного раньше – М. Данном² в качестве инструмента, служащего для определения отношения релевантного следования, а к первым системам обобщенных истинностных значений можно отнести логическую и аппроксимационную четырехэлементные решетки, введенные в исследовательский обиход Н. Белнапом³.

Таким образом, указанное направление исследований обладает как широким контекстом, охватывающим необозримое поле научных работ, так и более узким, определяемым исследовательскими проектами, продолжающими линию работ Х. Ванзинга, Д. В. Зайцева, С. П. Одинцова, Я. В. Шрамко⁴.

Некоторые значимые области исследований, лежащие на стыке философской и символической логики, а также теоретической информатики, генетически также восходят к изучению систем обобщенных истинностных значений. В особенности это относится к многочисленным работам, посвященным разработке теории и приложений так называемых бирешеток – структур, нашедших свое применение в анализе широкого спектра проблем и задач – от философской теории истины до семантики языков логического программирования⁵.

Процедуры порождения множеств обобщенных истинностных значений и возможность определять на этих множествах разнообразные отношения и операции дают весьма гиб-

¹Shramko Y., Dunn J. M., Takenaka T. The trilattice of constructive truth-values // Journal of Logic and Computation. 2001. Vol. 11. № 6. P. 761–788.

²Dunn J. M. Intuitive semantics for first-degree entailment and ‘coupled trees’ // Philosophical Studies. 1976. Vol. 29. P. 149–168.

³Belnap N. D., A Useful Four-Valued Logic // Dunn J. M., Epstein G. (eds) Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Episteme. Vol 2. Springer, Dordrecht. 1977; Belnap, N. D. How a computer should think // Ryle G. (ed), Contemporary aspects of philosophy. Stocksfield, Oriel Press. 1977. P. 30–56.

⁴Zaitsev D. A few more useful 8-valued logics for reasoning with tetralattice *EIGHT*₄ // Studia Logica. 2009. Vol. 92. № 2. P. 265–280; Shramko Y., Wansing H. Some useful 16-valued logics: how a computer network should think // Journal of Philosophical Logic 2005. Vol. 34. № 2. P. 121–153; Shramko, Y., Wansing, H. Hyper-Contradictions, Generalized Truth Values and Logics of Truth and Falsehood // Journal of Logic, Language, and Information. 2006. Vol. 15. № 4. P. 403–424; Odintsov S. P. On axiomatizing Shramko-Wansing’s logic // Studia Logica. 2009. Vol. 91. 407–428; Odintsov S. P. Wansing H. The Logic of Generalized Truth Values and the Logic of Bilattices // Studia Logica. 2015. Vol. 103. P. 91–112; Wansing H. The power of Belnap. Sequent systems for *SIXTEEN*₃ // Journal of Philosophical Logic. 2010. Vol. 39. № 4. P. 369–393.

⁵Ginsberg M. L., Multi-valued Logics // Proceedings of AAAI-86, Fifth National Conference on Artificial Intelligence. Morgan Kaufmann. 1986. P. 243–247; Ginsberg M. L. Multivalued Logics: A Uniform Approach to Inference in Artificial Intelligence. 1988. // Computational Intelligence. Vol. 4, № 3. P. 265–316; Fitting M. C. Bilattices and the theory of truth. Journal of Philosophical Logic, 18:225–256, 1989. Fitting M. C. Bilattices in logic programming // Proceedings of the Twentieth International Symposium on Multiple-Valued Logic, Charlotte, NC, USA, 1990, P. 238–246; Fitting M. C. Kleene’s three-valued logics and their children // Fundamenta Informaticae. 1994. Vol. 20. P. 113–131; Arieli O., Avron A. Reasoning with logical bilattices // Journal of Logic, Language and Information. 1996. № 5. P. 25–63; Fitting M. C. Bilattices are nice things // Bolander T., Hendricks V., Pedersen S. A. (eds). Self-Reference. Chapter 3. P 53–77. Center for the Study of Language and Information. 2006.

кий и тонкий инструмент для анализа широкого круга познавательных задач, значимых в философском отношении. В частности, это моделирование и анализ рассуждений в условиях противоречивой или неполной информации, моделирование эпистемических состояний рационального субъекта, логический анализ подходящего для этих целей логического инструментария, включая расширение арсенала операторов и пропозициональных связок формализованных языков.

Обобщенные истинностные значения представляют собой наиболее яркий пример эволюции идей в контексте исследовательского поля философской логики: от содержательных допущений онтологического характера – например о комплексной структуре истинностного значения – до реализации этих идей в виде конкретных семантических структур и формализации определяемых ими логических теорий.

В связи с этим сам характер исследовательских задач, возникающих в данной предметной области, может быть совершенно различным, иметь в большей степени философский, или же формально-логический оттенок. С одной стороны, можно разрабатывать теорию истины на основе определенного подхода к построению множества обобщенных истинностных значений, с другой – исследовать метатеоретические вопросы, связанные с построением логических исчислений, формализующих логические теории, порождаемые тем же самым множеством, как семантической структурой.

Степень разработанности темы

Как отмечалось ранее, проблематика, связанная с изучением обобщенных истинностных значений имеет давнюю историю и восходит к работам М. Данна и Н. Белнапа 70-х годов XX века⁶.

Идеи Данна и Белнапа сыграли ключевую роль в зарождении и развитии релевантной логики, одного из важнейших разделов современной неклассической логики. Однако в контексте данного исследования определенную роль играет лишь система **FDE**, наиболее фундаментальная из систем релевантной логики.

Семантические конструкции, которые явным образом относятся (прежде всего самими авторами) к системам обобщенных истинностных значений появились уже в работах первого десятилетия XXI века⁷. С выходом этих работ стало понятно, что обобщенные истинностные значения представляют собой удобное средство для описания семантическими средствами широкого круга содержательных философских идей (связанных, тем или иным образом, с различным пониманием истинности). Достигается это за счет усложнения структуры самих истинностных значений, а также в силу того, что появляется возможность различными способами определять отношение логического следования. Кроме того, стало ясно, что некоторые, давно и хорошо известные семантические конструкции,

⁶См. ставшие классическими работы: Belnap N.D., A Useful Four-Valued Logic // Dunn J. M., Epstein G. (eds) Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Episteme. Vol 2. Springer, Dordrecht. 1977; Belnap, N. D. How a computer should think // Ryle G. (Ed.), Contemporary aspects of philosophy. Stocksfield, Oriel Press. 1977. P. 30–56., а также более современные: Dunn J. M. Partiality and its dual // Studia Logica. 2000. Vol. 66. P. № 4. 5–40; Dunn J. M., Restall G., Relevance logic // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 6. 2002. P. 1–128.

⁷Начиная с упоминавшейся ранее статьи Shramko Y., Dunn J. M., Takenaka T. The trilattice of constructive truth-values // Journal of Logic and Computation. 2001. Vol. 11. № 6. P. 761–788. и тематически связанных с ней Shramko Y., Wansing H. Some useful 16-valued logics: how a computer network should think // Journal of Philosophical Logic 2005. Vol. 34. № 2. P. 121–153; Shramko, Y., Wansing, H. Hyper-Contradictions, Generalized Truth Values and Logics of Truth and Falsehood // Journal of Logic, Language, and Information. 2006. Vol. 15. № 4. P. 403–424.

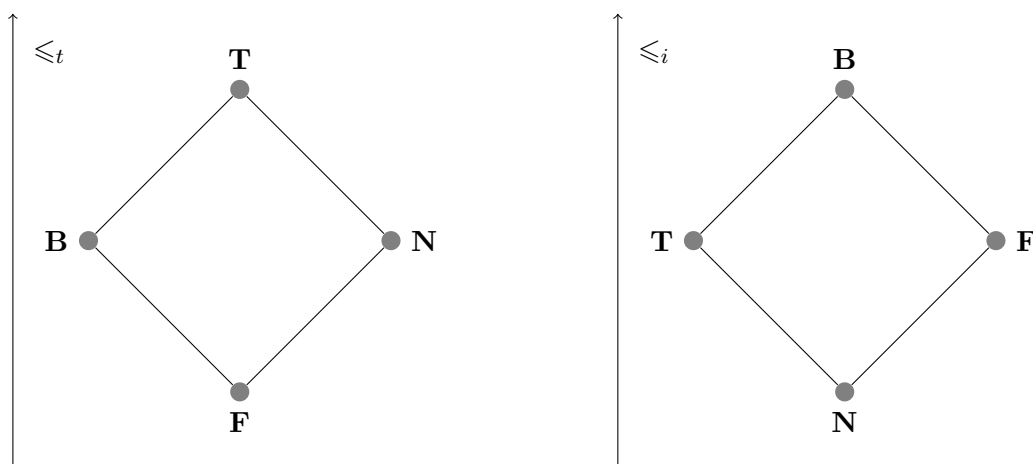


Рисунок 1. Логическая решетка $L4$ и аппроксимационная решетка $A4$.

фактически являются примерами систем обобщенных истинностных значений. В первую очередь это относится к семантическим построениям, основанным на множестве истинностных значений Данна и Белнапа⁸, к которым относятся описанные еще в работах Белнапа четырехэлементные решетки с различными отношениями порядка (см. диаграмму 5), бирешетки, начало изучению которых положил М. Гинзберг, и ряд других конструкций⁹.

Логические теории, индуцируемые разнообразными семантическими конструкциями, построенными на основе множества истинностных значений Данна и Белнапа, изучались на протяжении длительного времени. Литература, относящаяся к данной проблематике, практически необозрима. Собственно для изучения систем обобщенных истинностных значений и их логик основополагающими являются упоминавшиеся ранее работы М. Данна, Х. Ванзинга, Я. В. Шрамко и др. Техническим задачам, связанным с формализациями логических теорий разнообразных систем обобщенных истинностных значений (генетически восходящим к истинностным значениям Данна и Белнапа), и изучением их метатеоретических свойств посвящен отдельный корпус работ¹⁰.

Обобщенные истинностные значения строятся не только как обобщения истинностных значений классической логики. В работе Д. В. Зайцева¹¹ в качестве базисного множества использовалось множество значений трехзначной логики. Онтоэпистемические истинностные значения были представлены в докладе О. М. Григорьева¹² и в последовавших ста-

⁸Поэтому, в частности, важнейшие для развития направления исследований статьи, указанные в предшествующей сноске, начинаются с описания множества истинностных значений Данна-Белнапа и семантики релевантной системы преуороневского следования.

⁹Например, фактор-семантика, предложенная в статье Karpenko A. Factor semantics for n -valued logics // *Studia Logica*. 1983. Vol. 42. № 2/3. P. 179–185., в которой истинностные значения представляют собой последовательности классических истинностных значений.

¹⁰См., например: Wansing H. The power of Belnap. Sequent systems for *SIXTEEN*₃ // *Journal of Philosophical Logic*. 2010. Vol. 39. № 4. P. 369–393; Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A. First-degree entailment and its relatives // *Studia Logica*. 2017. Vol. 105. № 6. P. 1291–1347; Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A. The *fmla*-*finla* axiomatizations of the exactly true and non-falsity logics and some of their cousins // *Journal of Philosophical Logic*. 2019. Vol. 48, № 5. P. 787–808; Odintsov S. P. On axiomatizing Shramko-Wansing's logic // *Studia Logica*. 2009. Vol. 91. 407–428; Omori H., Sano K. Generalizing functional completeness in Belnap-Dunn logic // *Studia Logica*. 2015. Vol. 103. № 5. P. 883–917

¹¹Zaitsev D. A few more useful 8-valued logics for reasoning with tetralattice *EIGHT*₄ // *Studia Logica*. 2009. Vol. 92. № 2. P. 265–280.

¹²Grigoriev O. Bipartite truth and semi-negations // Материалы международной научной конференции «Седьмые Смирновские чтения по логике». Москва, 22–24 июня 2011 г. Современные тетради. Москва. 2011. С. 54–55.

тях, развивающих данную тематику¹³. Аксиоматизация отношения следования, определяемого через сохранение порядка в решетке онтоэпистемических истинностных значений появилась впервые в статье Д. В. Зайцева¹⁴, однако в данном диссертационном исследовании предложена иная формализация того же самого отношения следования. Вариант онтоэпистемических истинностных значений с компонентом неопределенности был предложен в одной из работ О. М. Григорьева¹⁵. Там же была предложена формализация отношения следования.

Реляционная семантика, которая использовалась в данном исследовании для развития идеи двухкомпонентной истины, была описана (довольно кратко) в статье М. Данна и Дж. Олвейна¹⁶ для совершенно других целей. Этой же семантике посвящен небольшой фрагмент книги М. Данна и К. Бимбо¹⁷, где также дано аксиоматизирующее соответствующую логику исчисление секвенций, но без связки типа отрицания в языке.

Семантические конструкции с циклической операцией, мотивированные логикой квантовых вычислений, были предложены в работах О. М. Григорьева, Д. В. Зайцева и А. А. Беликова¹⁸, в которых были построены исчисления для формализации отношений логического следования и изучены отношения некоторых из полученных исчислений с исчислением для классической логики высказываний. Родственные логические системы с циклическим отрицанием (но отличные от систем из указанных работ А. А. Беликова, О. М. Григорьева и Д. В. Зайцева), изучались в работах П. Руэта, Н. Камиде, Х. Омори и Х. Ванзинга¹⁹, исходя из совершенно других мотиваций. Идеи, предложенные в работах А. А. Беликова, О. М. Григорьева и Д. В. Зайцева получили дальнейшее развитие в статье Х. Омори и Дж. Арэнхарта²⁰.

Изучение абстрактных n -решеток началось сравнительно недавно, хотя уже в работах Х. Ванзинга и Я. В. Шрамко²¹ даются определения n -решеток (мультирешеток, в терминологии авторов), а Я. В. Шрамко²² предложено секвенциальное исчисление, формализующее пропозициональную логику n -решеток, являющееся обобщением исчисления, построенного О. Ариели и А. Авроном²³ для случая бирешеток. Детальные доказательства

¹³Григорьев О. М., Зайцев Д. В. Две истины – одна логика // Логические исследования. 2011. Т. 17. С. 121–139; Zaitsev D., Shramko Y. Bi-facial truth: a case for generalized truth values // Studia Logica. 2013. Vol. 101. № 6. P. 1299–1318.

¹⁴Zaitsev D. Logics of generalized classical truth values // Arazim P., Peliš M. (eds) The Logica Yearbook 2014. College Publications London. 2015. P. 331–341.

¹⁵Grigoriev O. M. Logic of bipartite truth with uncertainty dimension // Journal of Applied Logics – IfCoLoG Journal of Logics and their Applications. 2019. Vol. 6. № 2. P. 291–319.

¹⁶Allwein G., Dunn J. M. Kripke models for linear logic // Journal of Symbolic Logic. 1993. Vol. 58. № 2. P. 514–545.

¹⁷Bimbo K., Dunn M., Generalized Galois logics. Relational semantics of nonclassical logical calculi. CSLI lecture notes № 188. 2008.

¹⁸Belikov A., Grigoriev O., Zaitsev D. On connegation // Relevance Logics and other Tools for Reasoning. Essays in Honor of J. Michael Dunn. Vol. 46 of Tributes. United States: College Publications. 2022. P. 73–88; Grigoriev O., Zaitsev D. Basic four-valued systems of cyclic negations // Bulletin of the section of logic. 2022. Vol. 51, № 4. P. 507–533.

¹⁹Ruet P. Complete set of connectives and complete sequent calculus for Belnap's logic // Tech. rep. Ecole Normale Supérieure. Logic Colloquium 96. Document LIENS-96–28; 1996. Kamide N. Paraconsistent double negations as classical and intuitionistic negations // Studia Logica. 2017. Vol. 105. № 6. P. 1167–1191; Omori H., Wansing H. On contra-classical variants of Nelson logic N4 and its classical extension // The Review of Symbolic Logic. 2018. Vol. 11. № 4. P. 805–820.

²⁰Omori H., Arenhart J. A note on Grigoriev and Zaitsev's system CNL_4^2 // Proceedings Eleventh International Conference on Non-Classical Logics. Theory and Applications (NCL'24), Łódź, Poland, 5–8 September 2024. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. Vol. 415, P. 229–243.

²¹Shramko Y., Wansing H. Some useful 16-valued logics: how a computer network should think // Journal of Philosophical Logic 2005. Vol. 34. № 2. P. 121–153; Shramko, Y., Wansing, H. Hyper-Contradictions, Generalized Truth Values and Logics of Truth and Falsehood // Journal of Logic, Language, and Information. 2006. Vol. 15. № 4. P. 403–424.

²²Shramko, Y., Truth, falsehood, information and beyond: the American plan generalized // Bimbo K. (ed) J. Michael Dunn on Information Based Logics, Outstanding Contributions to Logic. Springer, Dordrecht. 2016. P. 191–212.

²³Arieli O., Avron A. Reasoning with logical bilattices // Journal of Logic, Language and Information. 1996. № 5. P.

теорем об адекватности исчисления семантике в статье Шрамко однако не приводятся. В ряде последующих работ Н. Камиде и Я. В. Шрамко²⁴ также сформулированы исчисления секвенций, формализующие пропозициональные логики n -решеток, однако оценка формул определяется в иных семантических структурах (предположительно детерминирующих ту же самую логику, что и классы n -решеток), а доказательства их непротиворечивости и полноты проводятся через погружающие функции.

Добавление к алфавиту пропозиционального языка модальных операторов также можно отнести к стандартным процедурам, расширяющим сферу исследований логических систем, при учете многообразия содержательных интерпретаций модальностей. В упомянутой выше работе Н. Камиде и Я. В. Шрамко, опубликованной в журнале *Logica Universalis*, и следующих в этом же русле О. М. Григорьева и Я. И. Петрухина²⁵ предпринята попытка построить формализации модальных логик n -мерных решеток. Модальности при этом интерпретируются как операции в самих n -решетках, а именно решеточные операции взятия внутреннейности и замыкания. Н. Камиде и Я. В. Шрамко отталкивались от результатов и терминологии серии исследований²⁶, в которых решетки вместе с операциями взятия внутреннейности и замыкания служат в качестве математического аппарата для неточных множеств (rough sets). При этом сами операции взятия внутреннейности и замыкания могут обладать различными свойствами, сближающими их с модальностями некоторых известных систем модальной логики.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются пропозициональные системы неклассической логики, семантика которых предполагает использование конструкций, основанных на множествах таких истинностных значений, которые можно отнести к категории обобщенных истинностных значений в силу их структурных особенностей или способа их порождения.

Предметом исследования выступают множества обобщенных истинностных значений, логические теории, определяемые семантическими структурами (решетками, логическими матрицами, реляционными структурами), построенными на множествах обобщенных истинностных значений, отношения между теориями. Особое внимание уделяется вопросу о формализации таких логических теорий в виде систем бинарного следования, исчислений секвенций и аксиоматических исчислений гильбертовского типа. Исследуются мета-теоретические свойства полученных формализаций, в первую очередь их семантические

25–63.

²⁴Kamide N., Shramko Y. Embedding from multilattice logic into classical logic and vice versa // *Journal of Logic and Computation*. 2017. Vol. 27. № 5. P. 1549–1575; Kamide N., Shramko Y. Modal Multilattice Logic // *Logica Universalis*. Vol. 11. № 3. P. 317–343.

²⁵Grigoriev O., Petrukhin Y. On a multilattice analogue of a hypersequent S5 calculus // *Logic and Logical Philosophy*. 2019. Vol. 28, № 4. P. 683–730; Grigoriev, O., Petrukhin, Y.: Two proofs of the algebraic completeness theorem for multilattice logic // *Journal of Applied Non-classical logics*. 2019. Vol. 29. № 4. P. 358–381; Grigoriev, O., Petrukhin, Y.: Modal multilattice logics with Tarski, Kuratowski and Halmos operators // *Logic and Logical Philosophy*. 2021. Vol. 30, № 3. P. 385–415; Grigoriev O., Petrukhin Y. Basic modal congruent and monotonic multilattice logics // *Journal of Logic and Computation*. 2023. Vol. 33, № 6. P. 1379–1398.

²⁶Cattaneo G. Algebraic Methods for Rough Approximation Spaces by Lattice Interior–Closure Operations // Mani A., Cattaneo G., Düntsch I. (eds) *Algebraic Methods in General Rough Sets*. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. 2018. P. 13–156; Cattaneo G., Ciucci D. Lattices with interior and closure operators and abstract approximation spaces. // Peters J. F. et al. (eds.) *Transactions on Rough Sets X. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 5656. 2009. P. 67–116.

непротиворечивость и полнота.

Цель и задачи исследования

Цели диссертационной работы:

- Построение и исследование свойств систем обобщенных истинностных значений, реализующих идею различения онтологического и эпистемического компонента истины и лжи (как значений высказываний или выражений формализованного языка), а также систем обобщенных истинностных значений, структура которых обусловлена циклической природой операций, схожих по своим свойствам с отрицанием.
- Исследование метатеоретических свойств формализующих указанные системы логических исчислений.
- Построение формализаций семантических структур, получаемых в результате абстрагирования от конкретных характеристик обобщенных истинностных значений, их внутренней структуры и способа их образования. Доказательство утверждений об их метатеоретических свойствах.

Для достижения поставленных целей были поставлены и решены следующие задачи:

- Определение семантических структур на основе множества онтоэпистемических истинностных значений, задание правил означивания выражений формализованного языка (с двумя разновидностями отрицания), в таких структурах, определение различных отношений логического следования.
- Исследование формальных свойств семантических структур, построенных на множествах онтоэпистемических истинностных значений.
- Построение формализации логических теорий, определяемых семантическими структурами, построенными на множестве онтоэпистемических истинностных значений, как с компонентом онтологической и эпистемической неопределенности (множество 9^u), так и без него (множество 4^{oe}).
- Доказательство метатеорем об адекватности полученных исчислений.
- Построение реляционной семантики с двумя видами (онтологическим и эпистемическим) означивания формул, определение отношений логического следования, изучение формальных свойств построенных семантических структур.
- Построение формализации одного из отношений логического следования, определяемого в реляционной семантике. Доказательство метатеорем об адекватности полученной формализации.
- Определение семантических структур (логических матриц), построенных на основе множества истинностных значений, мотивированных преобразованиями информации в квантовых вычислениях. Задание правил означивания выражений формализованного языка (с циклическим отрицанием), определение отношений логического следования.

- Построение исчислений различных типов, формализующих логические теории, определяемые построенными логическими матрицами. Доказательство метатеорем об адекватности полученных исчислений.
- Разработка доказательств алгебраических непротиворечивости и полноты пропозициональных исчислений, формализующих логики многомерных решеток с заданными на них семействами унарных операций.

Научная новизна исследования

В ходе проведения данного диссертационного исследования был получен ряд результатов, расширяющих как известные типы обобщенных истинностных значений, так и спектр построенных на их основе семантических структур, а также семейства определяемых семантическими структурами логических теорий. Научная новизна полученных научных результатов описывается следующими пунктами.

- Определены системы онтоэпистемических истинностных значений, образующие вместе с отношением порядка дистрибутивные решетки с четырех- или девятиэлементным множеством-носителем, допускающие различные определения отношения логического следования. Дана интерпретация пропозиционального языка $\mathcal{L}^{oe}$, содержащего среди логических символов две нестандартные логические связки $\neg_t$ и $\neg_1$, соответствующими унарным операциям на множестве онтоэпистемических истинностных значений.
- Предложены формализации отношений логического следования, определяемого на множествах онтоэпистемических истинностных значений, в виде систем бинарного следования.
- Построена реляционная семантика для языка $\mathcal{L}^{oe}$ с двумя типами означивания формул на множестве-носителе шкалы, соответствующими онтологической и эпистемической трактовке истины.
- Предложены особые разновидности обобщенных истинностных значений с циклической унарной операцией, которой в языке логических теорий соответствует так называемое циклическое отрицание. Поскольку множества истинностных значений допускают различные варианты упорядочения, были получены разные по структуре логические матрицы, порождающие семейство отношений логического следования. Результирующие логические теории получили формализации различных типов (системы бинарного следования, исчисления секвенций, аксиоматизации гильбертовского типа) с доказательствами их адекватности построенной семантике.
- Исследован вопрос об алгебраической полноте секвенциальных формализаций пропозициональных логик n -мерных решеток – наиболее абстрактных структур, обобщающих системы истинностных значений, изучаемых в данной диссертационной работе. При этом рассматривались n -мерные решетки с различными унарными операциями. Некоторые из них по своим свойствам родственны отрицанию, другие – модальным операторам из ряда известных систем модальной логики.

Положения, выносимые на защиту

- Построена система бинарного следования, представляющая собой адекватную формализацию логической теории $\mathbf{FDE}_{oe}$, определяемой решеткой онтоэпистемических истинностных значений $\mathcal{L}4^{oe}$.
- Построена система бинарного следования, представляющая собой адекватную формализацию логической теории $\mathbf{FDE}_u$, определяемой решеткой онтоэпистемических истинностных значений $\mathcal{L}9^u$.
- Сформулирована реляционная семантика для языка с онтологическим и эпистемическим отрицаниями, построена формализация одного из отношений следования, определяемого через сохранность онтологической истинности и обратную сохранность онтологической ложности. Доказаны теоремы о семантической непротиворечивости и полноте полученного исчисления.
- Построены непротиворечивые и полные исчисления, формализующие логические теории циклического отрицания, определяемые двумя видами матричных семантических структур, образованных над множествами обобщенных истинностных значений с унарной циклической операцией на множестве-носителе.
- Построены исчисления, формализующие логики n -решеток с инверсиями и с унарными операциями взятия замыкания и внутренности со свойствами, аналогичными свойствам модальности системы $\mathbf{S4}$. Доказаны алгебраическая непротиворечивость и полнота полученных исчислений.

Теоретическое и практическое значение исследования

Результаты, полученные в ходе написания диссертационной работы, существенно расширяют саму предметную область исследования систем обобщенных истинностных значений. Были предложены новые типы таких объектов, способы их конструирования, семантические структуры, определения отношений логического следования. Были разработаны необходимые модификации методов доказательств теорем об адекватности семантике исчислений, формализующих логические теории, определяемые новыми типами семантических структур.

Изученные в диссертационной работе проблемы далеко не исчерпывают весь спектр возможных направлений исследований. Остается открытым ряд технических проблем, а, кроме того, появляется обширное пространство для дальнейшего развития предложенных идей и методов.

Практическая значимость результатов исследования выражается в возможности разработки на их основе различных специальных курсов по современной неклассической логике, предназначенных как для студентов, специализирующихся на логической проблематике, так и для изучающих курсы по выбору. Гибкость в подборе материала обусловлена в данном случае спецификой самой проблематики, тесно связанной с философскими основаниями логики и познавательной деятельности в целом, но имеющей, в то же время, достаточно сложную техническую реализацию.

Методологическая основа исследования

В данном диссертационном исследовании использовались методы современной символической логики, среди которых можно выделить различные методы построения логических исчислений, применяемые при формализации логических теорий. В широком смысле это аксиоматический метод, имеющий конкретные реализации в форме исчислений гильбертовского типа, исчисления секвенций, систем бинарного следования. Для доказательства метатеорем широко применялся метод математической индукции в различных его формах (например, доказательства индукцией по построению формулы, по длине доказательства и т. п.), а также стандартные логические методы доказательств, такие, как рассуждение по случаям, рассуждение сведением к абсурду.

Степень достоверности и апробация результатов исследования

Результаты проведенной работы опубликованы в ведущих международных периодических изданиях, отвечающих требованиям п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, а также подкреплены ссылками на авторитетные научные исследования в соответствующей тематике работы сфере современной неклассической логики.

Всего по теме диссертации соискателем опубликовано **16** научных работ общим объемом 19,4 п.л., из них **15** статей – в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по научной специальности 5.7.5. Логика (индексируемых в ядре Российского индекса научного цитирования «eLibrary Science Index»).

Работа прошла обсуждение на заседании кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова и была рекомендована к защите.

Основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, и возможности их теоретического применения в различных предметных областях были представлены на всероссийских и международных конференциях:

1. Grigoriev O. M. Bipartite truth and semi-negations // Седьмые Смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции. 22-24 июня 2011 года. Современные тетради, Москва: 2011. Р. 54–55.
2. Grigoriev O. M. A tableau calculus for a logic of two-component truth // Восьмые Смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции. 19-21 июня 2013 года. Современные тетради. Москва. 2013. Р. 46–48.
3. Grigoriev O. M. Two Formalisms for a Logic of Generalized Truth Values. Logic Colloquium-2014, July 19–24, Austria, Vienna, 2014.
4. Grigoriev O. M. Semantic analysis of classical seminegations // Материалы международной научной конференции «Девятые Смирновские чтения по логике». Москва, 17–19 июня 2015 года. Современные тетради. Москва. 2015. Р. 58–59.
5. Grigoriev O. M. Generalized Truth Values: From Logic to the Applications in Cognitive Sciences. 13 International Symposium on Neural Networks, ISNN 2016. St. Petersburg, Russia, July 6–8, 2016.

6. Grigoriev O. M. Generalized truth values and quantum logic // Материалы Международной научной конференции «Десятые Смирновские чтения по логике». Москва, 15–17 июня 2017 года. Современные тетради. Москва. 2017. Р. 70–71.
7. Grigoriev O. M. Logic of Bipartite Truth with Uncertainty Dimension. ISRALOG'17. The Third Israeli Workshop on Non-Classical Logics and Their Applications. University of Haifa 15–17 Oct. 2017., University of Haifa, Israel.
8. Беликов А. А., Григорьев О. М., Зайцев Д. В. Две грани циклического отрицания // Материалы Международной научной конференции «Одиннадцатые Смирновские чтения по логике ». Москва, 19–21 июня 2019 года. Современные тетради. Москва. 2019. С. 8–10.
9. Grigoriev O. M., Petrukhin Y. I. On a multilattice version of the relevant logic R. Trends in Logic 19: Current Issues in Philosophical Logic, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики (НИУ ВШЭ), Москва, Россия, 2–4 октября 2019.
10. Grigoriev O. M., Petrukhin Y. I. On a multilattice version of S5 // Материалы Международной научной конференции «Одиннадцатые Смирновские чтения по логике». Москва, 19–21 июня 2019 года. Современные тетради. Москва. 2019. Р. 14–16.
11. Grigoriev O. M., Zaitsev D. V. Cyclic Negations and Four-valuedness. 10th International Conference NCL'22: Non-classical logics. Theory and applications 2022, Łódź, Poland, March, 14–18, 2022.
12. Григорьев О. М., Беликов А. А., Слюсарев И. Ю. О проблеме симуляции отрицаний в паранепротиворечивых и парapolных логиках // Тринадцатые Смирновские чтения по логике. Москва: 2023. С. 66–69.
13. Григорьев О. М. Обобщенные истинностные значения: от содержательных интерпретаций к абстрактным структурам. IV конгресс РОИФН «Наука, технологии и ценности в неустойчивом мире», Вологда, Россия, 27–29 сентября 2024 г.

Структура диссертации

Работа состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы, заключения и списка литературы.

II. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 202 страницы текста. Список литературы содержит 96 наименований, из которых 6 источников на русском и 90 – на английском языках.

Во **введении** работы описываются актуальность и научная новизна исследования, оценивается степень разработанности проблемы. Ставятся цель и задачи исследования, устанавливается степень достоверности и апробация, а также характеризуется практическое и теоретическое значение работы.

В **первой главе**, которая называется «**Системы обобщенных истинностных значений**», дается описание и общая характеристика семантических объектов, относящихся к той или иной разновидности обобщенных истинностных значений как в силу сложившегося в логической литературе словоупотребления, так и по наличию определенных структурных признаков и способов порождения этих объектов.

Первый параграф – «**Обобщенные истинностные значения и семантика FDE-подобных систем**» – начинается с описания наиболее известной семантической конструкции, которую обычно приводят в качестве канонического примера системы обобщенных истинностных значений. Речь идет о четырехзначном частично упорядоченном множестве истинностных значений $4 = \{\{T\}, \{F\}, \{T, F\}, \emptyset\}$, введенных в научный обиход Н. Белнапом, который, в свою очередь, опирался на семантические идеи М. Данна. Графическое представление систем белнаповских истинностных значений (с двумя различными отношениями порядка) показано на диаграмме 1²⁷. Хорошо известно, что указанные конструкции определяют релевантную логику первоуровневого следования (систему **FDE**). Истинностные значения множества **4** обладают характерными особенностями, присущими обобщенным истинностным значениям в целом²⁸, а именно, комплексной внутренней структурой и определенным способом их порождения (обычно посредством стандартных теоретико-множественных операций). Отмечается, эти особенности дают основание расширить круг тех объектов, которые попадают в объем термина «обобщенное истинностное значение». В качестве примера дается краткое описание семейств *онтоэпистемических* истинностных значений предложенных О.М. Григорьевым и Д.В. Зайцевым²⁹, а также истинностных значений с «памятью», инспирированных преобразованиями информации в квантовых вычислениях³⁰.

Второй параграф называется «**Обобщенные истинностные значения и возможные миры**», посвящен описанию специфической разновидности обобщенных истинностных значений, где истинностное значение представляет собой пару множеств, первое из которых несет позитивную информацию о высказывании, второе – негативную. М. Данн использовал такую конструкцию (*полярность* в его терминологии) для построения семантики релевантной логики³¹ и а М. Гинзберг отталкивался от нее для определения биреше-

²⁷Где используются общепринятые обозначения: **T** для $\{T\}$, **F** для $\{F\}$, **B** для $\{T, F\}$ и **N** для $\emptyset$.

²⁸По крайней мере, если принимать во внимание конечные их семейства.

²⁹Григорьев О. М., Зайцев Д. В. Две истины – одна логика // Логические исследования. 2011. Т. 17. С. 121–139.

³⁰Grigoriev O., Zaitsev D. Basic four-valued systems of cyclic negations // Bulletin of the section of logic. 2022. Vol. 51, № 4. P. 507–533.

³¹Dunn J. M., Restall G., Relevance logic // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 6. 2002. P. 1–128.

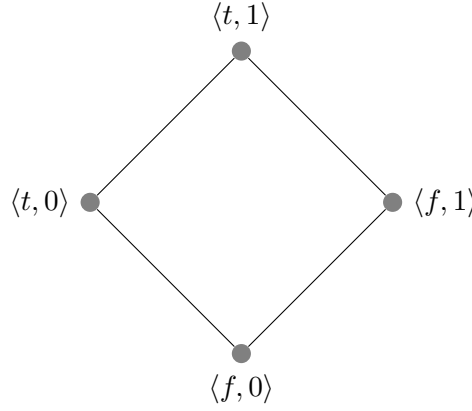


Рисунок 2. Решетка $\mathcal{L}\mathbf{4}^{oe}$ онтоэпистемических истинностных значений.

ток³². М. Фиттинг именно такие истинностные значения назвал (по-видимому, впервые в логической литературе) *обобщенными*³³.

В третьем параграфе – «**Онтоэпистемические истинностные значения**» – детально описываются особые двухкомпонентные онтоэпистемические истинностные значения. Онтоэпистемическое истинностное значение можно представить как пару, первая координата которой содержит онтологический компонент (онтологическую истину или ложь), а вторая – эпистемический (эпистемическую истину или ложь). Пусть $\{t, f\}$ есть множество онтологических истинностных значений, а $\{1, 0\}$ – множество эпистемических. Переход к новому семейству истинностных значений осуществляется через взятие декартова произведения этих двух множеств, которое дает множество пар $\mathbf{4}^{oe} = \{\langle t, 1 \rangle, \langle t, 0 \rangle, \langle f, 0 \rangle, \langle f, 1 \rangle\}$.

На множестве $\mathbf{4}^{oe}$ определяется отношение частичного порядка, графическое представление которого дано на диаграмме 2. Принимая во внимание неравенства $f \leq_t t$ и $0 \leq_1 1$, порядок на элементах $\mathbf{4}^{oe}$ можно задать покомпонентно: $\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$, если $a \leq_t c$ и $b \leq_1 d$ (где $a, c \in \{t, f\}$; $b, d \in \{0, 1\}$).

Бинарные решеточные операции $\cap$ и $\cup$ определяются на $\mathbf{4}^{oe}$ стандартно. Наибольший интерес представляют две унарные операции $\sim_t$ и $\sim_1$ на этом множестве. Их можно определить через унарные операции на $\{t, f\}$ и $\{1, 0\}$, для которых $\sim_t t = f$, $\sim_t f = t$, $\sim_1 1 = 0$, $\sim_1 0 = 1$. Тогда положим для всякого элемента $\langle a, b \rangle$ множества $\mathbf{4}^{oe}$: $\sim_t \langle a, b \rangle = \langle \sim_t a, b \rangle$, $\sim_1 \langle a, b \rangle = \langle a, \sim_1 b \rangle$.

Укажем на некоторые наиболее фундаментальные свойства операций $\sim_t$ и $\sim_1$, следующие из их определения (где $x, y \in \mathbf{4}^{oe}$):

- | | |
|--|---|
| (1) $\sim_t \sim_t x = \sim_1 \sim_1 x = x$, | (6) $\sim_t \sim_1 \sim_t \sim_1 x = x$, |
| (2) $\sim_t \sim_1 x = \sim_1 \sim_t x$, | (7) $\sim_t \sim_1 (x \cap y) = \sim_t \sim_1 x \cup \sim_t \sim_1 y$, |
| (3) $\sim_t x \leq \sim_1 y \iff \sim_1 x \leq \sim_t y$, | (8) $\sim_t \sim_1 (x \cup y) = \sim_t \sim_1 x \cap \sim_t \sim_1 y$, |
| (4) $\sim_1 x \leq \sim_t y \iff \sim_t x \leq \sim_1 y$, | (9) $x \cap \sim_t \sim_1 x \leq y$, |
| (5) $x \leq y \iff \sim_t \sim_1 y \leq \sim_t \sim_1 x$, | (10) $y \leq x \cup \sim_t \sim_1 x$. |

³²Ginsberg M. L. Multivalued Logics: A Uniform Approach to Inference in Artificial Intelligence // Computational Intelligence. 1988. Vol. 4, № 3. P. 265–316.

³³Fitting M. C. Bilattices and the theory of truth // Journal of Philosophical Logic. 1989. № 18. P. 225–256.

В четвертом параграфе – «Абстрактные решетки» – дается общая информация о решетках – разновидности частично упорядоченных множеств, играющих важнейшую роль в семантических конструкциях для многих языков неклассических логик. Системы обобщенных истинностных значений также в большинстве случаев представляют собой решетки.

В пятом параграфе – «Обобщение решеточных структур» – рассказывается о наиболее изученном обобщении решеточно упорядоченных множеств, бирешетках. Бирешетки представляют собой множества с двумя заданными на них отношениями решеточного порядка. Множество истинностных значений **4**, введенное Н. Белнапом, уже имело два различных упорядочения – по приращению истинности и по приращению информации (знания). В упомянутых выше работах М. Гинзберга бирешетки вводятся как особые математические структуры, которые в дальнейшем нашли широкое применение – от философских приложений к разработке теории истины до семантики языков логического программирования.

Шестой параграф – «Многомерные решетки» – посвящен обзору дальнейшего естественного обобщения решеточных структур, в котором на множестве объектов задается семейство частичных порядков. n -решетка (мультирешетка, n -мерная решетка) $\mathcal{M}_n$ есть кортеж $\langle \mathcal{S}, \leq_1, \dots, \leq_n \rangle$, где $\mathcal{S}$ – непустое множество, $\leq_1, \dots, \leq_n$ – частичные порядки на $\mathcal{S}$ такие, что $\langle \mathcal{S}, \leq_1 \rangle, \dots, \langle \mathcal{S}, \leq_n \rangle$ – различные решетки. Особый интерес представляют n -решетки с унарными операциями, называемыми инверсиями. Такие n -решетки обобщают бирешетки с операциями отрицанием и конфляцией. Пусть $\mathcal{M}_n$ есть n -решетка. Унарная операция $-_j$ называется j -инверсией ($1 \leq j \leq n$), если выполняются следующие условия для всякого k , $k \neq j$, и для любых $x, y \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} (\text{anti}) \quad & x \leq_j y \implies -_j y \leq_j -_j x, \\ (\text{iso}) \quad & x \leq_k y \implies -_j x \leq_k -_j y, \\ (\text{per2}) \quad & -_j -_j x = x. \end{aligned}$$

В статье Н. Камиде и Я.В. Шрамко, посвященной исследованию модальных многомерных решеток и их логик³⁴, решетки обогащаются дополнительными унарными операциями взятия замыкания и внутренности, свойства которых аналогичны свойствам модальностей ряда известных систем модальной логики (например, систем **S4** или **S5**). Такие n -решетки называются модальными. В параграфе описаны различные семейства модальных n -решеток.

Вторая глава называется «Логика онтоэпистемических истинностных значений». Основное содержание главы состоит в построении формализаций отношения логического следования, задаваемого на множествах онтоэпистемических истинностных значений.

В первом параграфе – «Логика онтоэпистемических истинностных значений: синтаксис и семантика» – множество 4^{oe} с отношением порядка используется как семантическая структура, служащая для означивания формул пропозиционального языка $\mathcal{L}^{oe}$, в алфавите которого имеются связки $\wedge, \vee, \neg_t, \neg_1$ соответствующие операциям $\cap, \cup, \sim_t$

³⁴Kamide N., Shramko Y. Modal Multilattice Logic // Logica Universalis. 2017. Vol. 11. № 3. P. 317–343.

Таблица 1. Дедуктивные постулаты системы $\mathbf{FDE}_{oe}$.

(1) $A \wedge B \vdash A$,	(11) $\neg_1 A \wedge B \vdash \neg_1(A \wedge B)$,
(2) $A \wedge B \vdash B$,	(12) $\neg_t A \wedge \neg_t B \vdash \neg_t(A \wedge B)$,
(3) $A \vdash A \vee B$,	(13) $\neg_1 A \wedge \neg_1 B \vdash \neg_1(A \wedge B)$,
(4) $B \vdash A \vee B$,	(14) $\neg_t(A \wedge B) \vdash \neg_t A \vee \neg_t B$,
(5) $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$,	(15) $\neg_1(A \wedge B) \vdash \neg_1 A \vee \neg_1 B$,
(6) $\neg_1 \neg_1 A \dashv\vdash A$,	(16) $\neg_t(A \vee B) \vdash \neg_t A \vee \neg_t B$,
(7) $A \dashv\vdash \neg_t \neg_t A$,	(17) $\neg_1(A \vee B) \vdash \neg_1 A \vee \neg_1 B$,
(8) $\neg_t A \wedge \neg_t B \vdash \neg_t(A \vee B)$,	(18) $\neg_t A \wedge \neg_1 A \vdash B$,
(9) $\neg_1 A \wedge \neg_1 B \vdash \neg_1(A \vee B)$,	(19) $A \wedge \neg_t A \vdash B \vee \neg_1 B$,
(10) $\neg_t A \wedge B \vdash \neg_t(A \wedge B)$,	(20) $A \wedge \neg_1 A \vdash B \vee \neg_t B$.
(R1) $A \vdash B, A \vdash C / A \vdash B \wedge C$	(R4) $\neg_t A \vdash \neg_1 B / \neg_t B \vdash \neg_1 A$
(R2) $A \vdash C, B \vdash C / A \vee B \vdash C$	(R5) $\neg_1 A \vdash \neg_t B / \neg_1 B \vdash \neg_t A$
(R3) $A \vdash B, B \vdash C / A \vdash C$	

и $\sim_1$ решетки $\mathcal{L}4^{oe} = \langle 4^{oe}, \leq \rangle$. Задается оценка пропозициональных переменных и ее расширение на множество всех формул языка $\mathcal{L}^{oe}$, обозначаемое как $\mathbf{For}_{oe}$.

Оценкой языка $\mathcal{L}^{oe}$ называется отображение $v: \mathbf{Var} \rightarrow 4^{oe}$. Расширением оценки v называется такое отображение $v': \mathbf{For}_{oe} \rightarrow 4^{oe}$, что для всяких $A, B \in \mathbf{For}_{oe}$: $v'(p) = v(p)$,

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (1) $v'(A \wedge B) = v'(A) \cap v'(B)$, | (3) $v'(\neg_t A) = \sim_t v'(A)$, |
| (2) $v'(A \vee B) = v'(A) \cup v'(B)$, | (4) $v'(\neg_1 A) = \sim_1 v'(A)$. |

Ключевое для логики отношение семантического следования $\models_{oe}$ определяется через решеточный порядок. Для всяких $A, B \in \mathbf{For}_{oe}$ и всякой оценки v формул языка $\mathcal{L}^{oe}$, $A \models_{oe} B \iff v(A) \leq v(B)$.

Во **втором** параграфе – «**Аксиоматизации отношений логического следования**» – обсуждается в общем виде задача формализаций логик, подобных системе $\mathbf{FDE}$. Такие логики допускают различные варианты формализаций, но чаще всего используются так называемые системы бинарного следования. Дедуктивные постулаты таких систем представляют собой множества пар формул, наделяемых статусом аксиом, а также правила вывода, позволяющие от (конечной совокупности) пар формул переходить к новым парам формул. В параграфе дается описание ключевых для доказательств теорем об адекватности конструкций, теорий и контртеорий. В частности, уточняется необходимый для доказательства метатеоретических свойств теорий и контртеорий дедуктивный аппарат систем бинарного следования.

В **третьем** параграфе, который называется «**Система $\mathbf{FDE}_{oe}$** » решается задача аксиоматизации отношения следования $\models_{oe}$. Система бинарного следования описывается набором дедуктивных постулатов, перечисленных в таблице 1. В этом же параграфе даны доказательства непротиворечивости и полноты системы $\mathbf{FDE}_{oe}$.

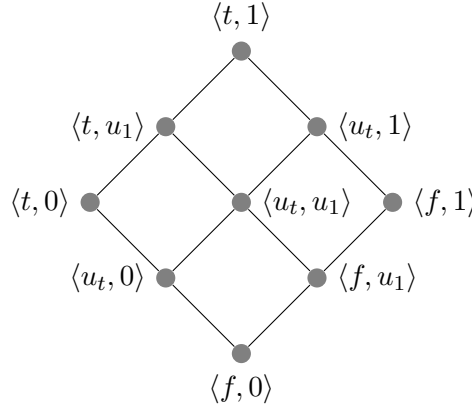


Рисунок 3. Решетка $\mathcal{L}9^u$ онтоэпистемических истинностных значений.

Четвертый параграф – «Система $\mathbf{FDE}_{oe}^u$ » содержит описание логической системы, которая получается за счет модификации решетки $\mathcal{L}4^{oe}$. Суть этой модификации состоит в добавлении в качестве элементов пар множества 4^{oe} онтологической (u_t) или эпистемической (u_1) неопределенности. С технической точки зрения базисные множества становятся трехэлементными: $\{t, u_t, f\}$ и $\{1, u_1, 0\}$, а отношения порядка $\leq_t$ и $\leq_1$ в этих новых базисах отвечает неравенствам $f \leq_t u_t \leq_t t$ и $0 \leq_1 u_1 \leq_1 1$. Унарные операции в новых базисных множествах определяются следующей таблицей:

Таблица 2

a	$\neg_t a$	a	$\neg_1 a$
t	f	1	0
u_t	u_t	u_1	u_1
f	t	0	1

Декартово произведение базисных множеств дает девятиэлементное множество 9^u , на котором задается отношение порядка, определяемое следующим образом: $\langle s, u \rangle \leq \langle v, w \rangle \iff s \leq_t v \ \& \ u \leq_1 w$ для всяких $\langle s, u \rangle$ и $\langle v, w \rangle$ из множества 9^u . В результате получается решетка $\mathcal{L}9^u$, изображенная на диаграмме 3.

Операции $\sim_t$ и $\sim_1$ получают новые определения посредством таблицы 3. В качестве языка логической теории по-прежнему используется язык $\mathcal{L}^{oe}$. Отношение семантического следования $\models_{oe}^u$ определяется по-прежнему через решеточный порядок: $A \models_{oe}^u B \iff v(A) \leq v(B)$ для всякой функции оценки $v: \mathbf{For}_{oe} \rightarrow 9^u$.

В четвертом параграфе – «Аксиоматизация системы $\mathbf{FDE}_{oe}^u$ » – решается задача формализации отношения следования $\models_{oe}^u$. Система бинарного следования $\mathbf{FDE}_{oe}^u$ описывается набором дедуктивных постулатов, представленных в таблице 4. В этом же параграфе даны доказательства теорем о непротиворечивости и полноте системы $\mathbf{FDE}_{oe}^u$ относительно семантики.

В пятом параграфе – «Реляционная семантика для языка $\mathcal{L}^{oe}$ » – предлагается вариант реляционной семантики для языка $\mathcal{L}^{oe}$, основанный на идеях из статьи Дж. Ол-

Таблица 3. Определения операций $\sim_t$ and $\sim_1$ в решетке $\mathcal{L}9^u$

a	$\sim_t a$	$\sim_1 a$	a	$\sim_t a$	$\sim_1 a$
$\langle t, 1 \rangle$	$\langle f, 1 \rangle$	$\langle t, 0 \rangle$	$\langle t, u_1 \rangle$	$\langle f, u_1 \rangle$	$\langle t, u_1 \rangle$
$\langle t, 0 \rangle$	$\langle f, 0 \rangle$	$\langle t, 1 \rangle$	$\langle u_t, 1 \rangle$	$\langle u_t, 1 \rangle$	$\langle u_t, 0 \rangle$
$\langle u_t, u_1 \rangle$	$\langle u_t, u_1 \rangle$	$\langle u_t, u_1 \rangle$	$\langle u_t, 0 \rangle$	$\langle u_t, 0 \rangle$	$\langle u_t, 1 \rangle$
$\langle f, 1 \rangle$	$\langle t, 1 \rangle$	$\langle f, 0 \rangle$	$\langle f, u_1 \rangle$	$\langle t, u_1 \rangle$	$\langle f, u_1 \rangle$
$\langle f, 0 \rangle$	$\langle t, 0 \rangle$	$\langle f, 1 \rangle$			

вейна и М. Данна³⁵, в которой описывается семантика одной из разновидностей линейной логики.

Вводится понятие четырехупорядоченной структуры, которая представляет собой кортеж $(X, \triangleleft_1, \triangleleft_2, \blacktriangleleft_1, \blacktriangleleft_2)$, в которой X есть непустое множество (носитель шкалы), а каждое $\triangleleft_i$ и $\blacktriangleleft_i$ ($i \in \{1, 2\}$) есть отношение частичного порядка на множестве X . Отношения $\triangleleft_1, \triangleleft_2, \blacktriangleleft_1$ и $\blacktriangleleft_2$ на множестве X индуцируют пары функций: (r_1, l_1) и (r_2, l_2) типа $\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, определяемые следующими равенствами:

$$(1) \quad l_i(Y) = \{x \in X \mid \forall y \in X (x \triangleleft_i y \implies y \notin Y)\},$$

$$(2) \quad r_i(Y) = \{x \in X \mid \forall y \in X (x \blacktriangleleft_i y \implies y \notin Y)\},$$

где $i \in \{1, 2\}$.

На множестве X задаются также унарные операции, обобщенные «звезды» Раутли-Мейера из семантики для систем релевантной логики. В результате получается структура, которая называется **NDst**_{oe}-шкалой. Формально **NDst**_{oe}-шкала есть кортеж $\mathcal{F} = (X, \triangleleft_1, \triangleleft_2, \blacktriangleleft_1, \blacktriangleleft_2, N_t, N_1)$, где $(X, \triangleleft_1, \triangleleft_2, \blacktriangleleft_1, \blacktriangleleft_2)$ есть четырехупорядоченная реляционная структура, а N_t и N_1 есть унарные операции на множестве X , удовлетворяющие следующим соотношениям (для всяких $x, y \in X, i \in \{1, 2\}$):

$$(1) \quad N_t(N_t(x)) = x, \quad (4) \quad x \triangleleft_1 y \iff N_t(x) \blacktriangleleft_1 N_t(y),$$

$$(2) \quad N_1(N_1(x)) = x, \quad (5) \quad x \triangleleft_2 y \iff N_1(x) \blacktriangleleft_2 N_1(y).$$

$$(3) \quad N_t(N_1(x)) = N_1(N_t(x)),$$

NDst_{oe}-шкалы используются для построения моделей языка $\mathcal{L}^{oe}$. Сначала задается оценка пропозициональных переменных посредством двух отображений $v_t: \mathbf{Var} \times X \longrightarrow \{t, u_t, f\}$ и $v_1: \mathbf{Var} \longrightarrow \{1, u_1, 0\}$, для которых выполняется требование, связности областей истинности и ложности переменных связаны посредством функций r_i и l_i ($i \in \{1, 2\}$). Например, если P_t^p есть область истинности для p при отображении v_t , а P_f^p ее область ложности, то $r_1(P_t^p) = P_f^p$ и $l_1(P_f^p) = P_t^p$. Далее определяются отношения $\models_i$, где $i \in \{t, f, u_t, 1, 0, u_1\}$, между точками шкалы и формулами языка $\mathcal{L}^{oe}$. Например, для $x \models_{-f} p \iff v_t(x, p) = t$. Некоторые случаи для сложных формул (где $x \models_{-f} A$ означает $x \models_t A$ или $x \models_{u_t} A$):

$$(1) \quad x \models_f A \vee B \iff x \models_f A \ \& \ x \models_f B,$$

³⁵Allwein G., Dunn J. M. Kripke models for linear logic // Journal of Symbolic Logic. 1993. Vol. 58. № 2. P. 514–545.

Таблица 4. Дедуктивные постулаты системы $\mathbf{FDE}_{oe}^u$.

(1) $A \wedge B \vdash A$,	(12) $\neg_t A \wedge \neg_t B \vdash \neg_t(A \wedge B)$,
(2) $A \wedge B \vdash B$,	(13) $\neg_1 A \wedge \neg_1 B \vdash \neg_1(A \wedge B)$,
(3) $A \vdash A \vee B$,	(14) $\neg_t(A \wedge B) \vdash \neg_t A \vee \neg_t B$,
(4) $B \vdash A \vee B$,	(15) $\neg_1(A \wedge B) \vdash \neg_1 A \vee \neg_1 B$,
(5) $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$,	(16) $\neg_t(A \vee B) \vdash \neg_t A \vee \neg_t B$,
(6) $\neg_1 \neg_1 A \dashv\vdash A$,	(17) $\neg_1(A \vee B) \vdash \neg_1 A \vee \neg_1 B$,
(7) $A \dashv\vdash \neg_t \neg_t A$,	(18) $(\neg_t(A \vee B) \wedge \neg_t(A \wedge B)) \vdash \neg_t B$
(8) $\neg_t A \wedge \neg_t B \vdash \neg_t(A \vee B)$,	(19) $(\neg_1(A \vee B) \wedge \neg_1(A \wedge B)) \vdash \neg_1 B$
(9) $\neg_1 A \wedge \neg_1 B \vdash \neg_1(A \vee B)$,	(20) $A \vdash \neg_t A \vee \neg_1 A$,
(10) $\neg_t A \wedge B \vdash \neg_t(A \wedge B)$,	(21) $\neg_t A \wedge \neg_1 A \vdash A$,
(11) $\neg_1 A \wedge B \vdash \neg_1(A \wedge B)$,	(22) $\neg_t A \wedge \neg_1 B \vdash A \vee B$,
(R1) $A \vdash B, A \vdash C / A \vdash B \wedge C$	(R4) $\neg_t A \vdash \neg_1 B / \neg_t B \vdash \neg_1 A$
(R2) $A \vdash C, B \vdash C / A \vee B \vdash C$	(R5) $\neg_1 A \vdash \neg_t B / \neg_1 B \vdash \neg_t A$
(R3) $A \vdash B, B \vdash C / A \vdash C$	

- (2) $x \models_t A \vee B \iff \forall y(x \triangleleft_1 y \implies (y \models_{-f} A \dot{\vee} y \models_{-f} B))$,
- (3) $x \models_t \neg_t A \iff N_t(x) \models_f A$,
- (4) $x \models_f \neg_t A \iff \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies N_t(y) \models_{-f} A)$,
- (5) $x \models_t \neg_1 A \iff x \models_t A$,
- (6) $x \models_f \neg_1 A \iff x \models_f A$,
- (7) $x \models_{u_t} A \iff x \models_{-t} A \ \& \ x \models_{-f} A$,

Теперь можно задать семейство отношений логического следования:

- (1) $A \models_{oe}^t B$, если для всякой $\mathbf{NDst}_{oe}$ -шкалы и всякого элемента x ее носителя $x \models_t A \implies x \models_t B$, $x \models_f B \implies x \models_f A$,
- (2) $A \models_{oe}^1 B$, если для всякой $\mathbf{NDst}_{oe}$ -шкалы и всякого элемента x ее носителя $x \models_1 A \implies x \models_t B$, $x \models_0 B \implies x \models_f A$,
- (3) $A \models_{oe}^{ndst} B$, если для всякой $\mathbf{NDst}_{oe}$ -шкалы и всякого элемента x ее носителя $x \models_t A \implies x \models_t B$, $x \models_1 A \implies x \models_1 B$,
 $x \models_f B \implies x \models_f A$, $x \models_0 B \implies x \models_0 A$.

Шестой параграф второй главы называется «Система $\mathbf{NDst}_{oe}^t$ ». В нем предлагается аксиоматизация отношения следования $\models_{oe}^t$, доказываются теоремы об адекватности полученного исчисления. Система аксиом содержит стандартные решеточные постулаты для связок $\wedge$ и $\vee$ за исключением дистрибутивности этих связок относительно друг друга. Доказываются теоремы об адекватности исчисления построенной семантике.

Третья глава называется «Четырехзначные системы циклических отрицаний». В этой главе описываются логические системы, содержащие в языке особые унарные про-

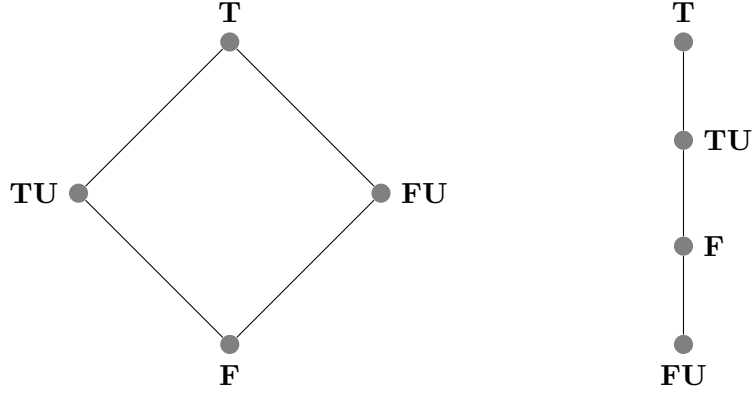


Рисунок 4. Решетки $4\mathcal{Q}$ и $4\mathcal{LQ}$.

позициональные связки, которые называются *циклическими отрицаниями*. Семантика для этих систем строится на основе четырехэлементных множеств обобщенных истинностных значений с подмножеством выделенных значений.

В первом параграфе – «Циклические отрицания и квантовые вычисления» даются общие сведения из области квантовых вычислений. В частности, рассказывается о специфических преобразованиях информации, которые могут получать логические интерпретации. Например, так называемый «корень из отрицания». Его интуитивный смысл в том, что применение этого оператора соответствует как бы половине обычного отрицания, то есть $\sqrt{\text{NOT}}(\sqrt{\text{NOT}}(|\varphi\rangle)) = \text{NOT}(|\varphi\rangle)$. С логической точки зрения корень из отрицания представляют собой оператор, обладающий своеобразной памятью: примененный к объекту *истина* дважды, он возвращает *ложь* и обратно. Эту идею можно реализовать за счет использования истинностных значений с внутренней структурой. Применяя операцию типа корня из отрицания к значению **T**, можно сначала взять в качестве результата истинностное значение **TU**. Следующее применение приведет к значению **F**, далее к **FU** и, наконец, обратно к **T**. В итоге получается множество обобщенных истинностных значений $\{\mathbf{T}, \mathbf{TU}, \mathbf{F}, \mathbf{FU}\}$ и различные возможности для определения отношения порядка на этом множестве.

Второй параграф – «Четырехзначные матрицы с циклическим отрицанием» – посвящен описанию семантических структур (логических матриц), определяемых на множестве $\{\mathbf{T}, \mathbf{TU}, \mathbf{F}, \mathbf{FU}\}$. Существенную роль играет порядок на этом множестве. Два варианта упорядочения изображены на диаграмме 4.

Далее определяются два типа матриц. Матрица $m^{\text{CNL}_4^2}$ есть кортеж вида $\langle \mathcal{U}, \{f_c\}_{c \in \Theta}, \mathcal{D} \rangle$, где операции $f_\wedge$ и $f_\vee$ определяются как пересечение и объединение в решетке $4\mathcal{Q}$, а $f_\sim$ задается следующей таблицей:

Матрица $m^{\text{CNLL}_4^2}$ есть кортеж $\langle \mathcal{U}, \{g_c\}_{c \in \Theta}, \mathcal{D} \rangle$, где операции $g_\wedge$ и $g_\vee$ определяются как пересечение и объединение в решетке $4\mathcal{LQ}$, а $g_\sim$ определяется такой же таблицей, как и в случае $f_\sim$.

Матрицы служат для интерпретации пропозиционального языка $\mathcal{L}_{cnf}$, построенного над множеством связок $\{\wedge, \vee, \sim\}$.

Оценка пропозициональных переменных, обозначаемая как v , представляет собой отображение $\text{Var} \rightarrow \mathcal{U}$. Расширенная (CNL_4^2 - или CNLL_4^2 -) оценка осуществляется за счет

Таблица 5

x	$f_{\sim}(x)$
T	TU
TU	F
F	FU
FU	T

матричных операций, корреляция которых с пропозициональными связками понятна из обозначений. Отношение логического следования определяется через сохранение выделенного значения.

- 1) $A \models_{\mathbf{CNL}_4^2} B \iff (v(A) \in \mathcal{D} \implies v(B) \in \mathcal{D})$, для любой $\mathbf{CNL}_4^2$ -оценки v ,
- 2) $A \models_{\mathbf{CNLL}_4^2} B \iff v(A) \in \mathcal{D} \implies v(B) \in \mathcal{D}$, для любой $\mathbf{CNLL}_4^2$ -оценки v .

Пара формул (A, B) называется $\mathbf{CNL}_4^2$ -общезначимой ($\mathbf{CNLL}_4^2$ -общезначимой) в том случае, если имеет место $A \models_{\mathbf{CNL}_4^2} B$ ($A \models_{\mathbf{CNLL}_4^2} B$).

Основное содержание **третьего** параграфа, имеющего название «**Системы бинарного следования для $\mathbf{CNL}_4^2$ и $\mathbf{CNLL}_4^2$** » состоит в построении формализаций отношения логического следования, определенного ранее. Системы бинарного следования для логик $\mathbf{CNL}_4^2$ и $\mathbf{CNLL}_4^2$ имеют общую часть и некоторые отличительные постулаты.

ОБЩИЕ СХЕМЫ АКСИОМ И ПРАВИЛА ВЫВОДА СИСТЕМ БИНАРНОГО СЛЕДОВАНИЯ $\mathbf{CNL}_4^2$ и $\mathbf{CNLL}_4^2$:

- | | |
|---|--|
| <p>(a1) $A \wedge B \vdash A$,</p> <p>(a2) $A \wedge B \vdash B$,</p> <p>(a3) $B \vdash A \vee B$,</p> <p>(a4) $A \vdash A \vee B$,</p> <p>(a5) $\sim A \wedge \sim B \vdash \sim(A \wedge B)$,</p> <p>(r1) $A \vdash B, B \vdash C / A \vdash C$,</p> <p>(r2) $A \vdash B, A \vdash C / A \vdash B \wedge C$,</p> | <p>(a6) $\sim(A \vee B) \vdash \sim A \vee \sim B$,</p> <p>(a7) $A \wedge \sim^2 A \vdash B$,</p> <p>(a8) $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$</p> <p>(a9) $A \vdash \sim^4 A$,</p> <p>(a10) $\sim^4 A \vdash A$.</p> <p>(r3) $A \vdash C, B \vdash C / A \vee B \vdash C$,</p> <p>(r4) $A \vdash B / \sim^2 B \vdash \sim^2 A$.</p> |
|---|--|

ДОБАВОЧНЫЕ СХЕМЫ АКСИОМ ДЛЯ СИСТЕМЫ $\mathbf{CNL}_4^2$:

- | | |
|---|---|
| (b1) $\sim(A \wedge B) \vdash \sim A \wedge \sim B$, | (b2) $\sim A \vee \sim B \vdash \sim(A \vee B)$. |
|---|---|

ДОБАВОЧНЫЕ СХЕМЫ АКСИОМ ДЛЯ СИСТЕМЫ $\mathbf{CNLL}_4^2$:

- | | |
|---|--|
| (c1) $\sim A \wedge \sim B \vdash \sim(A \vee B)$, | (c4) $A \wedge \sim A \vdash \sim(A \vee B)$, |
| (c2) $\sim(A \wedge B) \vdash \sim A \vee \sim B$, | (c5) $\sim(A \vee B) \vdash \sim A \vee B$, |
| (c3) $\sim A \wedge \sim^2 A \vdash \sim(A \wedge B)$ | (c6) $\sim(A \vee B) \vdash \sim(B \vee A)$, |

$$(c7) \sim(A \wedge B) \vdash \sim(B \wedge A),$$

$$(c8) (\sim(A \vee B) \wedge \sim(A \wedge B)) \vdash \sim A \wedge \sim B.$$

Четвертый параграф – «Непротиворечивость систем $\mathbf{CNL}_4^2$ и $\mathbf{CNLL}_4^2$ » – содержит доказательства следующих утверждений:

- (1) Каждая схема аксиом исчисления $\mathbf{CNL}_4^2$ представляет собой $\mathbf{CNL}_4^2$ -общезначимую пару, а каждое правило вывода исчисления $\mathbf{CNL}_4^2$ сохраняет $\mathbf{CNL}_4^2$ -общезначимость.
- (2) Каждая схема аксиом исчисления $\mathbf{CNLL}_4^2$ представляет собой $\mathbf{CNLL}_4^2$ -общезначимую пару, а каждое правило вывода сохраняет $\mathbf{CNLL}_4^2$ -общезначимость.
- (3) Для любых формул A и B языка $\mathcal{L}_{cnl}$ верно:
 $A \vdash B \text{ } \mathbf{CNL}_4^2\text{-доказуема} \implies A \models_{\mathbf{CNL}_4^2} B.$
- (4) Для любых формул A и B языка $\mathcal{L}_{cnl}$ верно:
 $A \vdash B \text{ } \mathbf{CNLL}_4^2\text{-доказуема} \implies A \models_{\mathbf{CNLL}_4^2} B.$

Пятый параграф «Полнота систем $\mathbf{CNL}_4^2$ и $\mathbf{CNLL}_4^2$ » содержит доказательства ряда метатеоретических утверждений, необходимых для обоснования следующих фактов:

- (1) Для любых формул A и B языка $\mathcal{L}_{cnl}$ верно:
 $A \models_{\mathbf{CNL}_4^2} B \implies A \vdash B \text{ } \mathbf{CNL}_4^2\text{-доказуема}.$
- (2) Для любых формул A и B языка $\mathcal{L}_{cnl}$ верно:
 $A \models_{\mathbf{CNLL}_4^2} B \implies A \vdash B \text{ } \mathbf{CNLL}_4^2\text{-доказуема}.$

Шестой параграф «Системы $\mathbf{CNL}_4^2$ и $\mathbf{CNLL}_4^2$ и классическая логика» посвящен определениям функций переводов между языком классической логики высказываний, построенным над множеством связок $\{\wedge, \vee, \neg\}$, и языком $\mathcal{L}_{cnl}$. Множество формул языка классической логики обозначается как $\mathbf{For}_{cl}$.

Перевод Φ (из языка классической логики в $\mathcal{L}_{cnl}$) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= p, \quad p \in \mathbf{Var}, \\ \Phi(A \circ B) &= \Phi(A) \circ \Phi(B), \quad \circ \in \{\wedge, \vee\}, \\ \Phi(\neg A) &= \sim\sim\Phi(A), \quad A, B \in \mathbf{For}_{cl}. \end{aligned}$$

Доказывается, что для любых формул $A, B \in \mathbf{For}_{cl}$

- (1) $A \models_{\mathbf{Cl}} B \iff \Phi(A) \models_{\mathbf{CNL}_4^2} \Phi(B)$
- (2) $A \models_{\mathbf{Cl}} B \iff \Phi(A) \models_{\mathbf{CNLL}_4^2} \Phi(B).$

Далее определяется обратный перевод Ψ языка $\mathcal{L}_{cnl}$ в язык классической логики высказываний.

$$\begin{aligned} \Psi(p_i) &= p_{2i-1}, \\ \Psi(\sim p_i) &= p_{2i}, \\ \Psi(\sim\sim A) &= \neg\Psi(A), \\ \Psi(A \circ B) &= \Psi(A) \circ \Psi(B), \quad \circ \in \{\wedge, \vee\}, \\ \Psi(\sim(A \circ B)) &= \Psi(\sim A) \circ \Psi(\sim B), \quad \circ \in \{\wedge, \vee\}. \end{aligned}$$

Доказывается, что для всяких формул $A, B \in \text{For}_{cnt}$, $A \models_{\text{CNL}_4^2} B \iff \Psi(A) \models_{\text{Cl}} \Psi(B)$.

Для случая системы CNLL_4^2 перевод Ψ модифицируется для последнего равенства (совпадая в других случаях с Ψ):

$$\begin{aligned}\Psi'(\sim(B \wedge C)) &= (\neg\Psi'(B) \wedge \Psi'(\sim B)) \vee (\neg\Psi'(C) \wedge \Psi'(\sim C)) \vee \\ &\quad \vee (\Psi'(\sim B) \wedge \Psi'(\sim C)), \\ \Psi'(\sim(B \vee C)) &= (\Psi'(B) \wedge \Psi'(\sim B)) \vee (\Psi'(C) \wedge \Psi'(\sim C)) \vee \\ &\quad \vee (\Psi'(\sim B) \wedge \Psi'(\sim C)).\end{aligned}$$

Доказывается справедливость утверждения, что для всяких формул $A, B \in \text{For}_{cnt}$, $A \models_{\text{CNLL}_4^2} B \iff \Psi'(A) \models_{\text{Cl}} \Psi'(B)$.

В седьмом параграфе «Аксиоматическое исчисление $\mathcal{H}\text{CNL}_4^2$ » представлена аксиоматическая формализация гильбертовского типа для системы CNL_4^2 .

Дедуктивные постулаты исчисления представляют собой схемы аксиом и единственное правило вывода – *modus ponens*. Список схем аксиом исчисления $\mathcal{H}\text{CNL}_4^2$ имеет следующий вид (где $A, B, C \in \text{For}_{cnt}$):

- (A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,
- (A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$,
- (A3) $(A \wedge B) \rightarrow A$,
- (A4) $(A \wedge B) \rightarrow B$,
- (A5) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$,
- (A6) $A \rightarrow (A \vee B)$,
- (A7) $B \rightarrow (A \vee B)$,
- (A8) $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$,
- (A9) $(\sim A \wedge \sim B) \leftrightarrow \sim(A \wedge B)$,
- (A10) $(\sim A \vee \sim B) \leftrightarrow \sim(A \vee B)$,
- (A11) $(A \wedge \sim\sim B) \rightarrow \sim\sim(A \rightarrow B)$,
- (A12) $(\sim\sim B \rightarrow \sim\sim A) \rightarrow ((\sim\sim B \rightarrow A) \rightarrow B)$,

Доказаны теоремы о полноте и непротиворечивости полученного исчисления.

В восьмом параграфе – «Секвенциальное исчисление $\mathcal{G}\text{CNL}_4^2$ » – формулируется секвенциальное исчисление $\mathcal{G}\text{CNL}_4^2$.

Основные секвенции исчисления $\mathcal{G}\text{CNL}_4^2$ имеют следующий вид (где $p \in \text{Var}$):

$$(Ax) \ p \Rightarrow p \quad (Ax_{\sim}) \ \sim p \Rightarrow \sim p$$

Структурные правила секвенциального исчисления $\mathcal{G}\text{CNL}_4^2$:

$$(W \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}, \quad (\Rightarrow W) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}, \quad (Cut) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Theta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Pi},$$

Правила для пропозициональных связок

$$(\Rightarrow \sim\sim) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim\sim A}$$

$$(\sim\sim \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\sim\sim A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge \Rightarrow) \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$(\vee \Rightarrow) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$(\Rightarrow \rightarrow) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$(\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Theta \Rightarrow \Pi}{A \rightarrow B, \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Pi}$$

$$(\sim\wedge \Rightarrow) \frac{\sim A, \sim B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim(A \wedge B), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \sim\wedge) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(A \wedge B)}$$

$$(\sim\vee \Rightarrow) \frac{\sim A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \sim B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim(A \vee B), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \sim\vee) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim A, \sim B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(A \vee B)}$$

$$(\sim\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \sim B, \Theta \Rightarrow \Pi}{\sim(A \rightarrow B), \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Pi}$$

$$(\Rightarrow \sim\rightarrow) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim(A \rightarrow B)}$$

Доказаны теоремы о непротиворечивости и полноте исчисления $\mathcal{S}\mathbf{CNL}_4^2$, а также теорема об устранимости сечения.

В девятом параграфе – «**Циклические отрицания и коннегация**» обсуждается трактовка циклического отрицания системы $\mathbf{CNL}_4^2$ как особого рода связки, получившей название «коннегации»³⁶. Коннегация сочетает свойства бирешеточных связок отрицания и конфликации, а циклическое отрицание системы $\mathbf{CNL}_4^2$ представляет собой частный случай этой операции в четырехэлементной решетке. Кроме того, имеются различные варианты определения самой коннегации³⁷.

Четвертая глава – «**Логики n -решеток**» – посвящена проблематике формализации логических теорий, определяемых многомерными решетками. Многомерные решетки представляют собой абстракции от конечных систем обобщенных истинностных значений. Основное содержание главы состоит в построении секвенциального исчисления, формализующего логику n -решеток, доказательстве адекватности относительно алгебраической семантики и расширения построенного исчисления за счет добавления совокупности модальных правил.

В первом параграфе – «**Языки, интерпретации, отношение логического следования**» – задаются пропозициональные языки для логик n -решеток. Основу составляет язык над множеством связок $\{\neg_j, \wedge_j, \vee_j, \rightarrow_j, \top_j, \perp_j\}_{1 \leq j \leq n}$, где символы из списка $\top_1, \dots, \top_n, \perp_1, \dots, \perp_n$ – пропозициональные константы, а индекс n обозначает целое поло-

³⁶Belikov A., Grigoriev O., Zaitsev D. On connegation // Relevance Logics and other Tools for Reasoning. Essays in Honor of J. Michael Dunn. Vol. 46 of Tributes. United States: College Publications. 2022. P. 73–88.

³⁷Omori H., Arenhart J. A note on Grigoriev and Zaitsev's system $\mathbf{CNL}_4^2$ // Proceedings Eleventh International Conference on Non-Classical Logics. Theory and Applications (NCL'24), Łódź, Poland, 5–8 September 2024. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. Vol. 415, P. 229–243.

жительное число. Для случая модальных n -решеток алфавит расширяется добавлением множества модальностей $\{\Box_j, \Diamond_j\}_{j \leq n}$. Для интерпретации языка, содержащего весь набор перечисленных связок, в решетке должны быть определены инверсии, операции взятия внутренности и замыкания, а также содержаться наибольшие и наименьшие элементы в каждом из отношений порядка. Пусть $\mathcal{M}_n$ есть n -решетка с множеством носителем $\mathcal{S}$. Оценкой в $\mathcal{M}_n$ называют функцию v из множества пропозициональных переменных $\mathbf{Var}$ в множество $\mathcal{S}$. Расширение оценки на множество формул определяется стандартным образом. В частности, для формул с главными знаками $\wedge_j, \vee_j$ и $\neg_j$ оно задается равенствами

- (1) $v(\neg_j B) = -_j v(B)$,
- (2) $v(B \wedge_j C) = v(B) \cap_j v(C)$,
- (3) $v(B \vee_j C) = v(B) \cup_j v(C)$.

Для определения отношения логического следования используется конструкция, называемая логической n -решеткой, представляющая собой пару $\langle \mathcal{M}_n, \mathcal{U}_n \rangle$, где $\mathcal{U}_n$ есть n -мерный фильтр в n -решетке $\mathcal{M}_n$. Понятие n -мерного фильтра обобщает понятие фильтра в «обычной» решетке, а сама логическая n -решетка является, по-существу, разновидностью логических матриц, где $\mathcal{U}_n$ выполняет роль множества выделенных значений. Вполне ожидаемо, что отношение логического следования будет определяться через сохранность принадлежности значений формул множеству $\mathcal{U}_n$. Пусть Γ и Δ – конечные формулы фиксированного языка, а $\langle \mathcal{M}_n, \mathcal{U}_n \rangle$ – логическая n -решетка, подходящая для интерпретации формул из Γ и Δ . Тогда определим

- (1) $\Gamma \models_{\langle \mathcal{M}_n, \mathcal{U}_n \rangle} \Delta \iff$ для всякой оценки v формул языка $\mathcal{L}$ верно, что если $v(A) \in \mathcal{U}_n$ (для всех $A \in \Gamma$), то $v(B) \in \mathcal{U}_n$ (для некоторой $B \in \Delta$);
- (2) $\Gamma \models \Delta \iff \Gamma \models_{\langle \mathcal{M}_n, \mathcal{U}_n \rangle} \Delta$ для всякой пары $\langle \mathcal{M}_n, \mathcal{U}_n \rangle$.

Второй параграф – «Исчисление $\mathcal{GML}_n$ » содержит формулировку исчисления $\mathcal{GML}_n$. Язык этого исчисления – стандартный пропозициональный язык $\mathcal{L}$, в алфавите которого каждая связка из множества $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \top, \perp\}$ имеется в n экземплярах. Таким образом, исчисление $\mathcal{GML}_n$ формализует логику ограниченных n -решеток, в которых определены инверсии для каждого из отношений порядка, а также семейство операций $\{\supset_j\}_{1 \leq j \leq n}$, служащих для интерпретации связок $\{\rightarrow_j\}_{1 \leq j \leq n}$.

В **третьем** параграфе, который называется «**Алгебраическая непротиворечивость исчисления $\mathcal{GML}_n$** » наряду с необходимыми вспомогательными леммами доказывается следующее утверждение. Для всякой секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенной из формул языка $\mathcal{L}$ верно, что если $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении $\mathcal{GML}_n$, то она общезначима в классе всех ограниченных n -решеток, подходящих для означивания формул, содержащихся в множестве $\Gamma \cup \Delta$.

В **четвертом** параграфе – «**Алгебраическая полнота $\mathcal{GML}_n$** » наряду с необходимыми вспомогательными леммами доказывается следующее утверждение. Для всякой секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенной из формул языка $\mathcal{L}$ верно, что если $\Gamma \Rightarrow \Delta$ общезначима в классе всех ограниченных n -решеток, подходящих для означивания формул, содержащихся в множестве $\Gamma \cup \Delta$, то она доказуема в исчислении $\mathcal{GML}_n$.

Существенную роль в доказательстве этого утверждения играет конструкция, известная как алгебра Линденбаума-Тарского.

Пятый параграф – «Исчисление $\mathcal{GML}_n^{S4}$ » – посвящен построению исчисления $\mathcal{GML}_n^{S4}$, формализующего логику класса n -решеток с операторами замыкания и взятия внутреннейности Куратовского в виде секвенциального исчисления. Алфавит языка $\mathcal{L}_{\Box}^n$ исчисления $\mathcal{GML}_n^{S4}$ содержит семейство модальностей $\{\Box_j, \Diamond_j\}_{j \leq n}$ в дополнение к языку исчисления $\mathcal{GML}_n$. Правила исчисления $\mathcal{GML}_n$ составляют основу исчисления $\mathcal{GML}_n^{S4}$, к ним добавляется совокупность правил введения модальных операторов.

В **шестом** параграфе – «Алгебраическая непротиворечивость $\mathcal{GML}_n^{S4}$ » – приводятся доказательства вспомогательных фактов и основного утверждения: для всякой секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенной из формул языка $\mathcal{L}_{\Box}^n$ верно, что если $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении $\mathcal{GML}_n^{S4}$, то она общезначима в классе всех ограниченных n -решеток с операторами Куратовского, подходящих для означивания формул, содержащихся в множестве $\Gamma \cup \Delta$.

В **седьмом** параграфе – «Алгебраическая полнота $\mathcal{GML}_n^{S4}$ » – даются доказательства метатеоретических утверждений, используемых для обоснования основной теоремы параграфа: для всякой секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенной из формул языка $\mathcal{L}_{\Box}^n$ верно, что если секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ общезначима в классе всех ограниченных n -решеток с операторами Куратовского, то $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении $\mathcal{GML}_n^{S4}$.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщенные истинностные значения представляют собой удобный инструмент для представления формальными семантическими средствами широкого круга философских идей, связанных с различным пониманием истины, выделением тех или иных ее аспектов, моделированием познавательных ситуаций. Системы обобщенных истинностных значений могут формировать частично упорядоченные множества, обладающие определенными свойствами (например, решетки), логические матрицы, алгебры, реляционные структуры. В то же время обобщение истинностных значений может идти как в сторону усложнения их внутреннего устройства, так и в сторону усложнения самих структур, которые они образуют.

В силу своего устройства, системы обобщенных истинностных значений позволяют получить целый спектр отношений логического следования, формализация которых может представлять собой весьма нетривиальную задачу. Это хорошо видно уже на примере трирешеток, обобщающих множество белнаповских истинностных значений. Отсюда порождается проблематика изучения отношений между различными логическими теориями, а также между исчислениями, формализующими различные отношения логического следования, определенные в рамках одной и той же системы истинностных значений. Встает вопрос и об отношениях между вновь получаемыми логическими теориями и исчислениями и уже известными логиками. Кроме того, актуальным является изучение стандартных метатеоретических свойств получаемых исчислений.

Все вышесказанное в полной мере относится к системам онтоэпистемических истинностных значений. Множество онтоэпистемических истинностных значений вместе с отношением частичного порядка образует семантическую структуру (четырёхэлементную решетку), подходящую для означивания формул пропозиционального языка, алфавит которого, помимо стандартных связок $\wedge$ и $\vee$, соответствующих решеточным операциям, содержит связки $\neg_t$ и $\neg_1$. Однако логику, определяемую такой семантической структурой, можно понимать и задавать разными способами. Например, можно определять логические матрицы с различными множествами выделенных значений. С другой стороны, можно следовать образцу, известному по построению базисной системы релевантной логики первоуровневого следования **FDE** и отталкиваться от определения бинарного отношения логического следования, а саму логику определять как бинарную систему выводимостей, то есть как множество пар формул. В случае системы онтоэпистемических истинностных значений наиболее естественный, хотя и не единственный, вариант определения отношения следования – это «следование через решеточный порядок». Именно такой вариант определения отношения следования используется в работах О. М. Григорьева и Д. В. Зайцева³⁸, посвященных изучению описанной системы онтоэпистемических истинностных значений, а также в данном диссертационном исследовании.

Аксиоматизация бинарного отношения логического следования, заданного на системе онтоэпистемических истинностных значений, оказалась не самой простой задачей, и в самых первых работах по данной тематике какие-либо формализации логики (как множества пар формул, образующих бинарное отношение следования), представлены не были.

³⁸Григорьев О. М., Зайцев Д. В. Две истины – одна логика // Логические исследования. 2011. Т. 17. С. 121–139; Grigoriev O. Bipartite truth and semi-negations // Материалы международной научной конференции «Седьмые Смирновские чтения по логике». Москва, 22–24 июня 2011 г. Современные тетради. Москва. 2011. С. 54–55; Zaitsev D., Shramko Y. Bi-facial truth: a case for generalized truth values // Studia Logica. 2013. Vol. 101. № 6. P. 1299–1318.

Первая из известных формализаций появилась в работе Д. В. Зайцева³⁹, но доказательство полноты предложенной аксиоматизации опирается на довольно сильные допущения о наличии свойств теорий (аналогов максимальных насыщенных множеств в стандартных доказательствах семантической полноты для аксиоматических систем). В данном диссертационном исследовании предложен иной подход к аксиоматизации логик онтоэпистемических истинностных значений, при котором доказательство семантической полноты не предполагает использования каких-либо особых свойств теорий.

Один из возможных путей модификации систем онтоэпистемических значений состоит в добавлении новых типов элементов в исходные системы истинностных значений. В частности, естественным представляется добавление истинностного значения, содержательно интерпретируемого как неопределенность (отнологического и эпистемического характера), что приводит к исходным множествам $\{t, u_t, f\}$ и $\{1, u_1, 0\}$. Декартово произведение этих множеств дает девятиэлементное множество новых истинностных значений, которые теперь могут содержать компонент неопределенности. Полученное множество также образует решеточно упорядоченную структуру, подходящую для означивания формул пропозиционального языка. На этом множестве помимо стандартных решеточных операций вновь определяются две унарные операции $\sim_t$ и $\sim_1$, которым в пропозициональном языке логической теории по-прежнему соответствуют «полуотрицания» $\neg_t$ и $\neg_1$. В настоящем исследовании предложена аксиоматизация отношения логического следования, которое, как и ранее, определяется через отношение частичного порядка на множестве истинностных значений. Заметим, что и здесь, при доказательстве семантической полноты предложенной аксиоматизации, никакие специальные свойства теорий не использовались.

Обобщение конечнозначных систем онтоэпистемических истинностных значений естественным образом ведет к абстрактным решеткам, содержащим унарные операции, подобные (по характеристическим свойствам) тем, что были в конечном случае. Такие абстрактные решетки нередко становятся самостоятельными объектами изучения (см., например, исследования, посвященные решеткам с отрицаниями⁴⁰).

Однако в данном исследовании был выбран другой путь, инспирированный работой М. Данна и Д. Олвейна⁴¹, где, в числе прочего, авторы описывают реляционную семантику для одной из разновидностей линейной логики с трехзначной оценкой формул в точках реляционной структуры. Эта реляционная семантика, в свою очередь, является в некотором смысле производной от конструкции, предложенной А. Урквартом⁴² для доказательства теоремы о представлении для недистрибутивных решеток. В рамках настоящего исследования весь этот аппарат был адаптирован для построения реляционной семантики для логики с эпистемическим и отнологическим «полуотрицаниями». Истинностные значения формул в каждой точке такой структуры – это по-прежнему онтологические и эпистемические истина, ложь и неопределенность, как это было в случае девятиэлемент-

³⁹Zaitsev D. Logics of generalized classical truth values // Arazim P., Peliš M. (eds) The Logica Yearbook 2014. College Publications London. 2015. P. 331–341.

⁴⁰Almeida A. Canonical Extensions and Relational Representations of Lattices with Negation // Studia Logica. 2009. Vol. 91, P. 171–199; Dzik W., Orlowska E., Alten van C. Relational Representation Theorems for General Lattices with Negations // Schmidt R. A. (eds) Relations and Kleene Algebra in Computer Science. ReMiCS 2006. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 4136. P. 162–176. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 2006.

⁴¹Allwein G., Dunn J. M. Kripke models for linear logic // Journal of Symbolic Logic. 1993. Vol. 58. № 2. P. 514–545.

⁴²Urquhart A. A topological representation theory for lattices // Algebra Universalis, vol. 8. 1978. P. 45–58.

ной решетки $\mathcal{L}9''$.

Отношение следования в реляционной семантике может быть определено по-разному – с сохранением только одного из истинностных компонентов (при обратном сохранении соответствующей ложности) или с сохранением обоих компонентов. Результирующие отношения следования не совпадают и порождают различные логические теории. В данной работе предложена аксиоматизация одного из отношений следования, с прямым сохранением онтологической истины и обратным сохранением онтологической ложности. Одна из наиболее интересных открытых задач – аксиоматизация отношения следования с прямым сохранением обоих видов истинности и обратным сохранением обоих видов ложности.

Разумеется остаются нерешенные задачи и в рамках того материала, который представлен в данной работе. Прежде всего это касается системы $\mathbf{NDst}_{oe}$. Остается задача построения формализации отношения логического следования, определяемого через прямое сохранение онтологической и эпистемической истинности и обратное сохранение онтологической и эпистемической ложности. Из примеров видно, что это отношение не является пустым, и не является тривиальным. Если исчисление удастся получить, то интересно исследовать его метатеоретические свойства, в первую очередь разрешимость, а также отношения с другими исчислениями, формализующими теории бикомпонентной истины.

Матрицы, построенные на обобщенных истинностных значениях с циклической одной-местной операцией (служащей для интерпретации циклического отрицания) допускают различные определения отношения логического следования за счет варьирования множества выделенных значений. В данной работе изучен лишь один вариант определения следования, хотя, вероятно, наиболее естественный с точки зрения выбора множества выделенных значений.

Унарная операция, получившая название «коннегации», изучена лишь в контексте довольно простых четырехэлементных систем истинностных значений. Интересно было бы рассмотреть более абстрактные алгебраические структуры с обобщенной коннегацией.

Многомерные решетки представляют собой абстракции от систем обобщенных истинностных значений (бирешеток, трирешеток и т. д.) и с точки зрения своих формальных свойств изучены к настоящему моменту довольно мало. Важные для построения логических теорий конструкции в многомерных решетках, аналоги фильтров и идеалов в стандартных решетках, также практически не исследованы, что сильно затрудняет их применение в доказательствах метатеоретических свойств логических теорий и исчислений. Тем не менее, абстрактные n -мерные решетки являются вполне естественными обобщениями конечных решеточных структур с семействами отношений порядка и без сомнения требуют своего дальнейшего изучения.

Одна из проблем, имеющих в работах Н. Камиде, Я. В. Шрамко и ряде других публикаций, продолжающих линию исследований этих авторов⁴³, состоит в том, что теоремы о полноте для секвенциальных исчислений, формализующих те или иные логики n -решеток, доказываются через погружения в другие секвенциальные исчисления, в то время, как доказательство алгебраической полноты не дается. Семантика для языка, в котором исчисления сформулированы, также обычно не алгебраическая, а лишь предположительно определяющая ту же логику, что и классы n -решеток.

В данном исследовании этот пробел отчасти восполнен, однако результирующие системы несколько отличаются от тех, которые предложены в вышеперечисленных работах. Разработка доказательств алгебраической непротиворечивости и полноты для предложенных исчислений показала, в первую очередь, насколько более сложно устроенными структурами являются абстрактные n -мерные решетки по сравнению с достаточно хорошо изученными «одномерными» решетками и даже бирешетками. Нельзя каждый раз путем прямого обобщения получать те же самые объекты и утверждения о них, которые известны из общей теории решеток.

Продолжая линию исследований заключительной главы данной работы, можно построить секвенциальные исчисления, формализующие классы n -решеток с операторами замыкания и взятия внутренности Тарского и Халмоша в таком же духе, как это сделано для случая n -мерных решеток с операторами Куратовского.

⁴³Kamide N. Trilattice logic: an embedding-based approach // Journal of Logic and Computation. 2015. Vol. 25. P. 581–611.; Kamide N., Shramko Y. Modal Multilattice Logic // Logica Universalis. 2017. Vol. 11. № 3. P. 317–343.; Shramko, Y., Truth, falsehood, information and beyond: the American plan generalized // Bimbo K. (ed) J. Michael Dunn on Information Based Logics, Outstanding Contributions to Logic. Springer, Dordrecht. 2016. P. 191–212

IV. СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Основные публикации

Публикации в рецензируемых изданиях, отвечающих требованиям п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова (публикации в рецензируемых изданиях, индексируемых в базе ядра Российского индекса научного цитирования “eLibrary Science Index”):

1. Bolotov A., Basukoski A., Grigoriev O., Shangin V. Natural deduction calculus for linear-time temporal logic // Lecture Notes in Computer Science. 2006. Vol. 4160. Springer Berlin Heidelberg. P. 56–68. Импакт-фактор – 0,352 (SJР). 0,8 п. л. (авторский вклад: 30%).
2. Grigoriev O., Zaitsev D. Relevant generalization starts here (and here = 2) // Logic and Logical Philosophy. 2010. Vol. 19. № 4. P. 329–340. Импакт-фактор – 0,87 (JCI). 0,7 п. л. (авторский вклад: 50 %).
3. Григорьев О. М., Зайцев Д. В. Две истины – одна логика // Логические исследования. 2011. Т. 17. С. 121–139. Импакт-фактор – 0,154 (SJР). 1 п. л. (авторский вклад: 50%).
4. Grigoriev O. Two formalisms for a logic of generalized truth values // Bulletin of Symbolic Logic. 2015. Vol. 21, № 1. P. 71–72. Импакт-фактор – 0,62 (JCI). 0,1 п. л.
5. Grigoriev O. Generalized truth values: From logic to the applications in cognitive sciences // Lecture Notes in Computer Science. 2016. Vol. 9719. P. 712–719. Импакт-фактор – 0,352 (SJР). 0,5 п. л.
6. Grigoriev O. M. Logic of bipartite truth with uncertainty dimension // Journal of Applied Logics – IfCoLoG Journal of Logics and their Applications. 2019. Vol. 6. № 2. P. 291–319. Импакт-фактор – 0,61 (JCI). 1,7 п. л.
7. Grigoriev O., Petrukhin Y. On a multilattice analogue of a hypersequent S5 calculus // Logic and Logical Philosophy. 2019. Vol. 28, № 4. P. 683–730. Импакт-фактор – 0,87 (JCI). 2 п. л. (авторский вклад: 50%).
8. Grigoriev O., Petrukhin Y. Two proofs of the algebraic completeness theorem for multilattice logic // Journal of Applied Non-classical logics. 2019. Vol. 29. № 4. P. 358–381. Импакт-фактор – 0,61 (JCI). 1,5 п. л. (авторский вклад: 50%).
9. Grigoriev O., Petrukhin Y. Modal multilattice logics with Tarski, Kuratowski and Halmos operators // Logic and Logical Philosophy. 2021. Vol. 30, № 3. P. 385–415. Импакт-фактор – 0,87 (JCI). 2 п. л. (авторский вклад: 50%).
10. Григорьев О. М. Системы временной логики I: моменты, истории, деревья // Логические исследования. 2021. Т. 27, № 2. С. 153–184. Импакт-фактор – 0,154 (SJР). 2 п. л.

11. Grigoriev O., Zaitsev D. Basic four-valued systems of cyclic negations // Bulletin of the section of logic. 2022. Vol. 51, № 4. P. 507–533. Импакт-фактор – 0,349 (SJR). 1,5 п. л. (авторский вклад: 50%).
12. Grigoriev O., Petrukhin Y. Basic modal congruent and monotonic multilattice logics // Journal of Logic and Computation. 2023. Vol. 33, № 6. P. 1379–1398. Импакт-фактор – 0,63 (JCI). 1,8 п. л. (авторский вклад: 50%).
13. Grigoriev O., Nasieniewski M., Mruczek-Nasieniewska K., et al. Axiomatizing a minimal discussive logic // Studia Logica. 2023. Vol. 111, № . 5. P. 855–895. Импакт-фактор – 0,95 (JCI). 1,8 п. л. (авторский вклад: 30%).
14. Григорьев О. М., Беликов А. А. О проблеме симуляции паранепротиворечивых и парapolных отрицаний // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 2024. Т. 48, № 4. С. 56–73. Импакт-фактор – 0,287 (РИНЦ). 1 п. л. (авторский вклад: 50%).
15. Беликов А. А., Григорьев О. М., Маркин В. И. Основные направления и результаты исследований по философской логике в Московском университете // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 2024. Т. 48, № 6. С. 71–98. Импакт-фактор – 0,287 (РИНЦ). 1 п. л. (авторский вклад: 35%).

2. Иные публикации

16. Grigoriev O., Petrukhin Y. Non-deterministic logic of generalized classical truth values // Many-valued Semantics and Modal Logics: Essays in Honour of Yuriy Vasilievich Ivlev. Synthese Library. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG. 2024. P. 93–109. Импакт-фактор отсутствует. 1 п. л. (авторский вклад 50%).