

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

Руденко Юлия Константиновна

**Распространение тепла в поверхностном слое жидкости и  
диагностика неизотермических течений на основе  
измерений полей температуры**

1.3.17. Химическая физика, горение и взрыв,  
физика экстремальных состояний вещества

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф-м. н., профессор Уваров А.В.

Москва 2025

# Оглавление

Введение	5
<b>1 Тепловыделение как причина течения и источник информации. Экспериментальные методы и ассимиляция данных (литературный обзор)</b>	<b>16</b>
<b>2 Термогравитационный и термокапиллярный механизмы горизонтальной конвекции при нагреве жидкости линейным источником тепла и их зависимость от свойств межфазной поверхности</b>	<b>24</b>
2.1 Постановка задачи, система уравнений и граничные условия	24
2.2 Численная схема	26
2.3 Обезразмеривание и приближение погранслоя	27
2.4 Автомодельное решение при отсутствии механизма Марангони	28
2.4.1 Стационарное автомодельное решение в отсутствие механизма Марангони	30
2.4.2 Скорости распространения тепла и гидродинамического течения	36
2.4.3 Числа Нуссельта	37
2.5 Автомодельное решение для термокапиллярного течения	39
2.5.1 Стационарное автомодельное решение для термокапиллярной конвекции	40
2.5.2 Скорости распространения тепла и гидродинамического течения при наличии термокапиллярной конвекции и в ее отсутствие	46
2.5.3 Числа Нуссельта	48
2.5.4 Сравнение эффективности теплоотвода для разных механизмов конвекции	49
2.6 Экспериментальное исследование механизмов горизонтальной конвекции в жидкостях с различной структурой поверхности	51
2.6.1 Метод цифровой трассерной визуализации для измерения поля скорости	51

2.6.2	Инфракрасная термография для исследования поля температур на поверхности жидкости . . . . .	53
2.6.3	Измерение рельефа поверхности жидкости с помощью методики moop-glade BOS . . . . .	54
2.7	Численное моделирование и сравнительный анализ . . . . .	55
2.7.1	Поля скорости, температуры и профиль поверхности для случая горизонтальной конвекции в жидкости при наличии пленки . . . . .	55
2.7.2	Поля скорости, температуры и профиль поверхности для случая горизонтальной конвекции при наличии термокапиллярной конвекции . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Исследование свойств межфазных поверхностей с помощью локального ИК-нагрева</b>	<b>70</b>
3.1	Постановка задачи, система уравнений и схема эксперимента . . . . .	70
3.2	Автомодельное решение для нестационарной конвекции в цилиндрическом случае	72
3.2.1	Автомодельное решение для термокапиллярной конвекции . . . . .	72
3.2.2	Автомодельное решение для горизонтальной конвекции . . . . .	74
3.2.3	Сравнительный анализ распространения тепла для двух механизмов конвекции . . . . .	75
3.3	Экспериментальная установка . . . . .	78
3.4	Сравнение экспериментальных данных с численным моделированием . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Восстановление характеристик турбулентного течения с помощью ассимиляции температурных полей</b>	<b>90</b>
4.1	Экспериментальная установка ТФМ . . . . .	91
4.2	Методика восстановления с прямой подстановкой экспериментальных данных в уравнения . . . . .	94
4.3	Методика восстановления с помощью физически-информированной нейросети (PINN) . . . . .	97
4.4	Численное моделирование . . . . .	106
4.5	Сравнение восстановленных величин с полученными из численного моделирования с применением разных моделей турбулентности . . . . .	107

4.5.1	Результаты восстановления при прямой подстановке экспериментальных данных в уравнения . . . . .	107
4.5.2	Результаты восстановления с помощью PINN . . . . .	110
	<b>Заключение</b>	<b>122</b>
	<b>Благодарности</b>	<b>124</b>
	<b>Список публикаций по теме диссертации</b>	<b>124</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>130</b>

# Введение

## Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Конвективные процессы, возникающие при тепловыделении, являются предметом интенсивных исследований в течение десятков лет в силу своей большой практической важности для многих задач химической физики, теплофизики и геофизики. В то же время, в последние годы развитие экспериментальных методов и численного моделирования, методов ассимиляции данных с применением нейросетей позволило существенно продвинуться в исследованиях конвективных процессов. Такие экспериментальные методы, как теневой фоновый метод (ТФМ, Background Oriented Schlieren, BOS), цифровая трассерная визуализация (Particle Image Velocimetry, PIV) позволяют получать соответственно поля температуры и скорости с достаточно хорошим пространственным разрешением. В конвективных процессах эти поля связаны между собой и с другими характеристиками течения, что позволяет по измеренной одной величине восстанавливать остальные. В связи с этим активно развиваются различные методы ассимиляции данных. В применении к задачам гидродинамики становятся популярны нейросети, обучающиеся не на большом количестве размеченных данных, которых может быть недостаточно для обучения классической нейросети, но удовлетворяющие уравнениям и экспериментальным данным, так называемые физически-информированные нейросети (Physics-Informed Neural Networks, PINN). При этом, по сравнению с традиционным численным моделированием, нейросеть не так чувствительна к шуму экспериментальных данных и позволяет включать различные данные, в том числе разреженные или измеренные в отдельных точках.

Для исследования течения конвективных процессов очень удобным оказывается использование в качестве экспериментальных данных поля температуры. Температурное поле может быть не только источником движения, например, для термогравитационной и термокапиллярной конвекции, но, одновременно, и источником информации о течении. Экспериментально в приповерхностных течениях поле температур на поверхности можно получить с помощью ИК-термографии высокого разрешения, а в объеме – с помощью рефракционных методов. Следует

отметить, что в последнем случае поле температур усредняется по одной из координат и, как правило, с помощью этих методов точные результаты могут быть получены только для двумерных и осесимметричных течений. Однако методы решения обратных задач позволяют получить из усредненного поля температур коэффициенты турбулентной теплопроводности и турбулентной вязкости. Такой способ ассимиляции данных, как будет показано в работе, является альтернативой методам многомерной цифровой трассерной визуализации и легче реализуется на практике.

В приповерхностных течениях тепловое воздействие (с помощью нагревателя или при поглощении лазерного излучения) позволяет инициировать гидродинамический перенос и исследовать свойства межфазных поверхностей (в работе рассматривается граница раздела «жидкость-газ»). В настоящее время хорошо известно, что даже при отсутствии значительных загрязнений различные жидкости очень существенно отличаются по свойствам межфазных поверхностей. В воде, например, пленка естественных примесей блокирует температурную конвекцию Марангони (за исключением деионизированной воды), но температурные градиенты создают силы, которые могут нарушить целостность пленки. Если пленка не рвется, основным механизмом переноса тепла оказывается рэлеевская конвекция. Но, в отличие от стандартной термогравитационной конвекции, связанной с силой Архимеда, в данном случае причиной оказывается горизонтальное перераспределение давлений. При наличии неравномерной плотности в горизонтальной плоскости (перпендикулярной силе тяжести) возникновение конвекции неизбежно, независимо от числа Рэлея, которое в этом случае характеризует только интенсивность процесса. Именно горизонтальная конвекция конкурирует с термокапиллярной в приповерхностных слоях, в зависимости от свойств межфазной поверхности. Приповерхностные течения наиболее трудны для изучения из-за сложности граничных условий, но современные экспериментальные методы позволяют подробно исследовать поля температур, скоростей и даже давлений (на основе анализа профиля поверхности). Во многих жидкостях с низким коэффициентом поверхностного натяжения (КПН) пленка отсутствует (силиконовое масло, спирты и др.), и в этом случае процесс распространения тепла существенно ускоряется, а господствующим механизмом оказывается термокапиллярная конвекция. Роль этой конвекции в реальности сильно недооценивается, но это очень мощный механизм отвода тепла в ближней зоне от нагревателя с одним условием – это должна быть жидкость с отсутствием пленки.

Автомодельные решения, построенные в работе, позволяют получить оценки для скоро-

сти приповерхностного распространения тепла и толщины пограничного слоя в зависимости от наличия поверхностной пленки, блокирующей термокапиллярную конвекцию, для задач с линейным и цилиндрическим источниками нагрева. Сравнение двух механизмов конвекции с помощью автомодельных решений приводит к выводу об их эффективности в теплоотводе. Рассмотренные ранее в других работах автомодельные решения, в отличие от предложенных, как правило, не учитывали сопряженность задачи, а полученные зависимости для скорости распространения теплового фронта и толщины погранслоя были выведены исходя из численных расчетов.

## **Цели и задачи**

Цель работы состояла в изучении неизотермических течений на основе анализа температурного поля, полученного в результате тепловыделения, как источника конвективного движения и, одновременно, как способа визуализации течения. Для этого были поставлены следующие задачи:

1. Получение автомодельных и численных решений для нестационарных конвективных течений, генерируемых приповерхностными линейными источниками тепла, и сравнение с экспериментальными результатами.
2. Получение автомодельных и численных решений и сравнение с экспериментом для задач лазерного зондирования поверхности.
3. Восстановление коэффициента турбулентной теплопроводности, турбулентной вязкости, полей скорости и давления для течения осесимметричной турбулентной квазистационарной струи по экспериментально измеренным с помощью теневого фонового метода полям температуры.

## **Научная новизна работы**

Предложены новые автомодельные решения для нестационарных конвективных течений, возникающих при наличии линейного источника тепла, расположенного вблизи поверхности жидкости, и при ИК-зондировании свободной поверхности жидкости. Полученные в работе автомодельные решения, в отличие от ранее предложенных, описывают сопряженную задачу тепломассобмена и учитывают влияние температурного поля на гидродинамическое течение. При их выводе впервые также учтены различные граничные условия на поверхности. Для жидкостей, в которых на поверхности присутствует пленка, показано, что условие прилипания правильно описывает течение и приводит к совпадению численных расчетов, экспериментальных данных и автомодельных решений. Для жидкостей, демонстрирующих термокапиллярную конвекцию Марангони, в качестве граничного условия подходит условие Пирсона. Таким образом, продемонстрирована необходимость выбора различных граничных условий в зависимости от наличия или отсутствия поверхностной пленки, блокирующей термокапиллярный механизм течения.

Полученные автомодельные решения позволяют вывести универсальные количественные зависимости для скорости распространения теплового фронта и для толщины пограничного слоя. Оценки

характеристик пограничного слоя в других работах со сходной постановкой задачи были получены численно. Полученные зависимости могут быть использованы для сравнения интенсивности процессов теплопереноса для жидкостей с наличием пленки примесей на поверхности и при ее отсутствии. В работе показано, что объемная конвекция эффективнее, чем поверхностная. Но вблизи источника тепла остается область, где гидродинамические потоки за счет поверхностных сил намного эффективнее, чем за счет сил всплытия. Автомодельные решения для любого числа Прандтля позволяют определить длину, на которой преобладает конвекция Марангони по сравнению с горизонтальной конвекцией за счет градиента давления.

Также предложены новые методики ассимиляции данных для турбулентных течений, позволяющие определить распределения турбулентной вязкости, турбулентной теплопроводности, давления и скорости по экспериментально полученным с помощью ТФМ полям температуры и измеренным с помощью термоанемометра значениям скорости в выбранных точках. В первом способе численно решается система уравнений гидродинамики с подставленным полем температуры. Во втором способе ассимиляции данных для течения осесимметричной квазистационарной струи применяется физически-информированная нейросеть, для обучения которой используются экспериментальные поля температуры и точечные измерения скорости. Предложенные методики ассимиляции данных позволяют без применения какой-либо конкретной модели турбулентности восстанавливать поля скорости, давления, турбулентных вязкости и теплопроводности. В отличие от других работ, предложенный метод не подразумевает использование засева и измерение параметров турбулентного течения с помощью PIV. Трудоемкость предложенного метода восстановления коэффициентов турбулентной теплопроводности и вязкости намного меньше, чем использование трехмерных PIV-измерений.

### **Теоретическая значимость работы**

Теоретическая значимость работы состоит в проведенном систематическом исследовании конвективных течений, возникающих при наличии линейного приповерхностного источника тепла и при локальном нагреве поверхности жидкостей с помощью ИК-лазера, что позволяет вывести автомодельные решения для количественного описания характеристик погранслоя для жидкостей с различной структурой поверхности, уточнить граничные условия при наличии или отсутствии поверхностной пленки. Эти решения универсальны и позволяют, в отличие от численных расчетов, существенно расширить возможности общего анализа. Также для течения турбулентной осесимметричной струи показано, что измеренные экспериментально поля

температуры и точечные измерения скорости можно использовать для ассимиляции данных с последующим восстановлением параметров течения без использования конкретной модели турбулентности. Усредненные поля температур, получаемые рефракционными методами, оказываются источником дополнительной информации, поскольку определяются влиянием коэффициентов турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности. При использовании физически информированной нейросети эта информация может быть получена.

### **Практическая значимость работы**

Практическая значимость работы состоит в том, что ее результаты помогают без численного моделирования процесса конвективного течения от линейного источника тепла и при лазерном ИК-зондировании жидкости оценить параметры пограничного слоя и интенсивность горизонтальной конвекции. Обе задачи имеют важное практическое значение – для исследования теплоотвода от линейных источников нагрева и прогнозирования результатов термозондирования и лазерной очистки поверхности. Методика восстановления полей скорости и турбулентных вязкости и теплопроводности разработана без использования засева в воздухе и без применения высокоскоростных камер для реализации PIV для течения турбулентной осесимметричной свободной струи или импактной струи при ее взаимодействии с препятствием. Это позволяет существенно упростить очень необходимую для практики валидацию полуэмпирических моделей турбулентности и анализ их применимости для турбулентного числа Прандтля. Такие процедуры важны в настоящее время из-за существенных расхождений результатов при использовании различных моделей турбулентности. Данная методика предполагает наличие измеренного экспериментально поля температуры и измерений скорости в некоторых точках. Важным моментом является возможность расширения методики на зоны экзотермической химической реакции, когда добавляется усредненное поле концентраций и коэффициент турбулентной диффузии.

### **Методология и методы исследования**

При проведении исследований в данной работе использовались следующие методы:

1. Теневой фоновый метод и его модификация для измерения осесимметричного среднего поля температур (с применением преобразования Абеля) с целью восстановления распределений турбулентной вязкости и теплопроводности с высокой степенью турбулидации.
2. ИК-термография поверхности для получения поля температур на границе раздела

«жидкость-газ».

3. Цифровая трассерная визуализация – для измерения поля скорости в определенном сечении потока.
4. Moon-glade BOS – для измерения рельефа поверхности жидкости.
5. Численное решение уравнений гидродинамики.
6. Использование искусственных нейросетей для восстановления полей скорости, давления, турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности по результатам измерения усредненного поля температур и поля скоростей на входе и в некоторых точках.

### **На защиту выносятся следующие результаты и положения**

1. Предложенные новые автомодельные решения для нестационарного конвективного течения, генерируемого линейным источником тепла, расположенным вблизи поверхности жидкости, позволяют получить оценки для скорости распространения тепла в пограничном слое и рассчитать числа Нуссельта для оценки эффективности теплоотвода для различных граничных условий на межфазной поверхности.
2. Проведенные измерения полей скорости, температуры поверхности и рельефа поверхности и численное моделирование подтверждают корректность выведенных автомодельных решений для нестационарного конвективного течения, генерируемого линейным источником тепла.
3. Горизонтальная конвекция у поверхности за счет градиента давления менее эффективна с точки зрения охлаждения линейного источника тепла по сравнению с вертикальной конвекцией. Но при наличии термокапиллярной конвекции на некоторой длине вблизи источника нагрева гидродинамический перенос за счет поверхностных сил намного эффективнее и горизонтальной, и вертикальной конвекции.
4. ИК-термография и измерения рельефа поверхности с помощью теневого фонового метода (moon-glade BOS) для задачи локального ИК-нагрева поверхности CO<sub>2</sub>-лазером позволяют сделать вывод об эффективности такого типа зондирования для определения свойств поверхности жидкости.

5. Автомодельные решения для нестационарного конвективного течения, возникающего при локальном ИК-нагреве поверхности жидкости, полученные для различных граничных условий на межфазной поверхности, позволяют рассчитать скорости распространения тепла для горизонтальной и термокапиллярной конвекции.
6. Новые методики ассимиляции данных для турбулентных квазистационарных течений позволяют восстановить поля скорости, давления, турбулентной вязкости и теплопроводности по экспериментально измеренным полям температуры и значениям скорости в некоторых точках.
7. Применение PINN (физически-информированных нейросетей) для ассимиляции температурных полей позволяет резко повысить точность определения локальных параметров на основе ограниченного набора экспериментальных данных, в том числе полученных с помощью рефракционных методов.

**Степень достоверности и апробация результатов** Все результаты, полученные в диссертации, содержат два уровня анализа – численное моделирование и эксперимент. Во всех случаях проводится их сопоставление друг с другом, а также сравнение в предельных случаях с имеющимися литературными данными. Для конвекции к этим методикам добавляется нахождение и анализ автомодельных решений – как нестационарных, так и, в предельных случаях, стационарных. Это и определяет достоверность сделанных выводов. Основные положения диссертации были представлены на следующих конференциях:

1. Ломоносовские чтения (Москва, Россия, 2018, 2019, 2024, 2025).
2. Международная научная конференция-школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» (Москва, Россия, 2017, 2020, 2023).
3. Российская национальная конференция по теплообмену (Москва, Россия, 2018, 2022).
4. Школа-семинар молодых ученых и специалистов под руководством академика А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках» (Москва, Россия, 2021, 2023).
5. Минский международный форум по тепло- и массообмену. Minsk International Heat and Mass Transfer Forum. (Минск, Беларусь, 2022, 2024).

6. International conference on fluid control, measurements, and visualization (FLUCOME) (Beijing, China, 2023).
7. International conference on the methods of aerophysical research (ICMAR) (Новосибирск, Россия, 2024).
8. Всероссийская конференция, посвященная памяти академика А.М. Обухова «Турбулентность, динамика атмосферы и климата» (Москва, Россия, 2024).
9. Международная конференция «Современные проблемы теплофизики и энергетики» (Москва, Россия, 2024).
10. XXIV Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, Россия, 2025).

### **Публикации**

По материалам диссертации опубликовано 25 печатных работ, в том числе 7 статей в рецензируемых научных изданиях, из них 6 статей индексируются в базе данных Web of Science.

### **Личный вклад автора**

Автором совместно с научным руководителем были сформулированы цели и задачи исследования. Изложенные в работе результаты получены автором лично или при его непосредственном участии. Все эксперименты, связанные с ИК-термографией, теневым фоновым методом и цифровой трассерной визуализацией, проведены автором совместно с н.с. кафедры молекулярных процессов и экстремальных состояний вещества, к. ф.-м. н. Пуштаевым А.В. и доцентом, к. ф.-м. н. Плаксиной Ю.Ю. Двумерное численное моделирование для глав 2, 3 было выполнено доцентом, к. ф.-м. н. Винниченко Н.А.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 141 страницах, включает 60 рисунков. Общее число ссылок составляет 131. В конце диссертации сформулированы основные результаты, полученные в ней.

### **Краткое содержание работы**

В **первой главе** дан краткий обзор гидродинамических течений, возникающих при наличии источника тепловыделения. Основное внимание уделено приповерхностной конвекции, где

основными механизмами переноса тепла оказываются горизонтальная и термокапиллярная конвекция, а также осесимметричным течениям с нагревом струи. Такие процессы играют важную роль в задачах химической физики, теплофизики и геофизики. На примерах других работ показано, что тепловыделение может быть источником информации о других параметрах течения. Такой подход позволяет получить новую информацию о течении с тепловыделением и восстановить параметры течения при наличии ограниченного набора экспериментальных данных. В главе приведен краткий литературный обзор экспериментальных методов измерений полей температуры в гидродинамических течениях разных сред, а также методов ассимиляции данных.

**Вторая глава** посвящена описанию двух механизмов горизонтальной конвекции, вызванной нагревом поверхностного слоя жидкости линейным нагревателем. Особую роль в этом случае играет межфазная поверхность. При блокировке термокапиллярной конвекции за счет поверхностной пленки основным механизмом переноса оказывается рэлеевский механизм. В данной главе приведены результаты экспериментальных измерений: поля скорости, измеренные при помощи PIV, поля температуры, полученные с помощью ИК-термографии и рельеф поверхности, измеренный методом  $\mu\text{on-g}l\text{ade BOS}$ . Проведен сравнительный анализ экспериментальных данных по распространению тепла от линейного источника нагрева с численным моделированием, что позволяет обосновать правильный выбор граничных условий для жидкостей с разной структурой поверхности. Построены автомодельные решения, позволяющие получить аналитически универсальные характеристики пограничного слоя (скорость распространения, толщина) и сравнить их для двух разных механизмов горизонтальной конвекции.

В **третьей главе** приведены результаты анализа течений, возникающих при воздействии лазерного излучения на поверхность жидкости. Такая задача важна как для анализа свойств межфазной поверхности с помощью лазерного зондирования, так и для очистки поверхности или модификации ее свойств. Процесс распространения тепла очень сильно зависит от условий возникновения конвекции и свойств межфазной поверхности. Проведены экспериментальные измерения полей температуры и рельефа поверхности для течения, возникающего при локальном нагреве свободной поверхности жидкости ИК-лазером. Проведен сравнительный анализ с численным моделированием и предложены автомодельные решения для нестационарной конвекции в цилиндрической геометрии течения. Продемонстрированы отличия теплопереноса как для жидкостей при наличии пленки примесей, блокирующей конвекцию Марангони, так и при ее отсутствии.

В **четвертой главе** рассмотрена задача распространения осесимметричной нагретой струи, играющая важную роль в физике горения. Предложена новая методика восстановления параметров турбулентного течения осесимметричной струи с использованием полей температуры и точечных измерений скорости. В данной работе используются экспериментальные данные температуры, полученные теневым фоновым методом. Предложены два способа ассимиляции данных: с численным решением уравнений гидродинамики с подставленным сглаженным экспериментальным полем температуры и с применением физически-информированных нейросетей, не требующих предварительной фильтрации экспериментальных полей. Предложена архитектура PINN, которая позволяет восстановить поля турбулентной теплопроводности, турбулентной вязкости, давления и скорости, получить поле турбулентного числа Прандтля по экспериментальным данным температуры и скорости без использования конкретной модели турбулентности. Указанным способом проведено восстановление параметров течения для двух разных конфигураций течения: осесимметричной свободной вертикальной струи и импактной вертикальной струи горячего воздуха.

# 1 Тепловыделение как причина течения и источник информации. Экспериментальные методы и ассимиляция данных (литературный обзор)

Тепловыделение является причиной возникновения гидродинамических течений, которые сопровождают многие процессы, связанные с тепло- и массопереносом, и представляют интерес для геофизических и теплофизических приложений. При наличии источника нагрева в жидкости или газе возникает конвекция, которая может играть положительную роль, когда требуется увеличить скорость перемешивания вещества для более равномерного нагрева или охлаждения. В других условиях возникновение конвекции может быть нежелательным, например, в стекольном производстве, в процессах полимеризации и при создании пленок в ваннах Ленгмюра-Блоджетт. Поэтому требуется либо оптимизировать перемешивание, разместив нагреватели и рассчитав их мощность, либо, напротив, уменьшить перемешивание и сделать конвекцию более контролируемой.

При наличии линейного источника тепла анализ конвективного течения важен с точки зрения изучения задач охлаждения нагреваемых проводов и труб. Наибольший практический интерес в технических приложениях, связанных с задачами охлаждения, представляет отдельный анализ движения гидродинамической струи и теплообмена [1, 2]. По этой причине именно гидродинамическим струям и их взаимодействию с поверхностью и уделялось основное внимание с точки зрения исследования формирования приповерхностных пограничных слоев. В то же время, во многих задачах теплофизики и геофизики нагрев является источником движения, причем это движение возникает по двум причинам – за счет кинетической энергии струи и за счет неоднородного поля температур. Очевидно, что при приближении источника нагрева к поверхности и изменении знака стандартного числа Рэлея процесс конвекции начинает определяться только горизонтальной неоднородностью поля температуры. Числа Рэлея становятся отрицательными, но конвекция все равно имеет место.

Аналогичная ситуация возникает при локальном нагреве жидкости сверху, так как часто поглощение происходит в тонком слое на границе раздела. При такой постановке задачи вместе с изучением механизмов конвекции возможно определение свойств поверхности, например, с целями экологического контроля, или для ее обработки или очистки. Для локального нагрева удобно использовать воздействие ИК-излучением лазера. Контроль расплывающегося теплового пятна на поверхности удобно проводить с помощью тепловизора, а скорость расплывания может сильно зависеть от свойств поверхности.

Таким образом, тепловыделение в жидкости вблизи поверхности становится причиной возникновения гидродинамического течения, а фиксируемое температурное поле является источником информации об интенсивности процесса и свойствах поверхности жидкости. Контролируя тепловыделение и наблюдая за полем температуры, можно управлять конвекцией и получать информацию о других параметрах течения, таких как скорость, турбулентные величины, свойства поверхности. Эта же идея лежит в основе методов ассимиляции данных.

При рассмотрении конвективных течений следует различать классическую вертикальную конвекцию, которая возникает в объеме жидкости при наличии теплой массы жидкости, всплывающей под действием сил Архимеда, от горизонтальной конвекции. Последний механизм описывает горизонтальный перенос тепла, но базовым параметром оказывается аспектное соотношение. Если аспектное соотношение мало, то при неравномерном нагреве происходит процесс выравнивания температуры [3, 4], в придонной области возникает горизонтальное течение. В большинстве работ используется неравномерный нагрев нижней границы [5, 19, 7, 8, 9], который становится причиной неустойчивой вертикальной стратификации и горизонтального течения, сопровождаемого вертикальной конвекцией, управляемой силой Архимеда. Экспериментальные исследования, включающие измерения температурных профилей с помощью термисторов, визуализации потока с помощью шпирен-метода и красителя, были проведены в работах [5, 7]. В то же время на практике реализуется и другая ситуация, когда нагрев свободной поверхности жидкости или верхней стенки сосуда с жидкостью осуществляется сверху и локальные числа Рэлея отрицательны во всем объеме [10, 11, 12, 13]. В такой постановке задачи, как и при неравномерном охлаждении снизу [14], вертикальная стратификация устойчива и движение жидкости возможно благодаря горизонтальному градиенту давления или за счет термокапиллярного механизма конвекции вблизи свободной поверхности жидкости. Горизонтальный градиент давления возникает из-за неоднородности температуры, что приводит к неоднородному полю плотности.

Вблизи области нагрева жидкость будет подниматься снизу, чтобы скомпенсировать давление по сравнению с остальной ненагретой частью.

В более ранних исследованиях [15, 16, 17] приведены численные расчеты для горизонтальной конвекции при больших числах Прандтля, что характерно для процессов стекольного производства. В моделировании на свободной границе фиксируется неравномерный профиль температуры, в качестве граничного условия используется условие прилипания. Однако в работе [18] было показано, что число Нуссельта для случая горизонтальной конвекции в приближении бесконечного числа Прандтля для моделирования со свободной поверхностью отличается на 60% от числа Нуссельта для расчетов с граничным условием прилипания. Обе конфигурации течения с неравномерным нагревом верхней и нижней твердых стенок были реализованы экспериментально в работе [19].

Другой механизм горизонтальной конвекции — термокапиллярная конвекция Марангони на границе раздела сред. При неравномерном тепловыделении возникают термокапиллярные силы из-за зависимости показателя поверхностного натяжения от температуры. Во многих жидкостях (вода, кроме деионизированной, глицерин, некоторые спирты и др.) этот механизм горизонтальной конвекции заблокирован поверхностной пленкой [12, 21, 22]. Исследование конвекции в воде показало, что структура конвективного течения сильно зависит от степени очистки воды, причем наличие примесей в дистиллированной воде по сравнению с деионизированной оказывается достаточным, чтобы изменить структуру поверхностного слоя [23]. Аналогичная ситуация с поверхностной пленкой возникает и в жидких металлах из-за наличия окисной пленки. Но в ряде жидкостей (например, силиконовом масле или во многих спиртах), такие пленки не образуются, и в таких жидкостях, как правило, исследуется термокапиллярная конвекция Марангони (см., например, [10]). В работе [24] описаны экспериментальные исследования для нескольких сред: индий, галлий и силиконовое масло различной вязкости для исследований в широком диапазоне чисел Прандтля. При отсутствии пленки (спирты, ацетон, силиконовое масло, растворы спиртов в воде) термокапиллярный механизм оказывается очень эффективен. Численные расчеты указывают на существенное влияние эффекта Марангони на поле температур и числа Нуссельта как при создании дополнительных горизонтальных градиентов температуры [25], так и в случае, когда преобладает вертикальный перенос тепла [26]. Улучшение теплопереноса за счет термокапиллярного эффекта рассматривалось и для процесса плавления в условиях микрогравитации [27].

Достаточно часто в работах по горизонтальной конвекции в теплофизических и геофизических задачах эффект Марангони не рассматривается. В классической задаче с нагревом нижней границы слоя результаты сравнения хорошо известны. Оба механизма имеют место, но с ростом толщины слоя число Рэлея растет существенно быстрее и тип конвекции меняется [28]. Для горизонтальной конвекции данный вывод сохраняет актуальность, но его смысл меняется – вблизи источника влияние термокапиллярного механизма преобладает, и только вдали от источника нагрева основную роль начинает играть сила Архимеда. Для тонких слоев и в условиях микрогравитации термокапиллярная конвекция определяет все течение [29].

Начиная с работы [30], проблеме расчета термокапиллярных течений и погранслоев Марангони в литературе уделяется большое внимание [31, 32, 33, 34, 35, 36]. Возможность разделения гидродинамических и тепловых уравнений, которые оказываются связанными только через граничные условия, существенно упрощает задачу анализа. Если поле температур на поверхности задано, то, используя стандартные приближения для погранслоя [37], можно получить аналитическое и автомодельное решения задачи. Однако очевидно, что заданные условия на поверхности требуют в реальных задачах введения дополнительных потоков массы и тепла, позволяющих поддерживать заданные на поверхности профили температуры и концентрации [38]. В работе [96] предложено точное решение для течения при наличии точечного источника в бесконечной области течения. Данное решение было модернизировано для случая источника на поверхности жидкости в полубесконечном объеме [91, 92], но в уравнениях не учтены все вязкостные члены и давление, из-за этого замыкающее течение не соответствует действительности, так как подсос массы должен происходить из бесконечности, что не реализуется на практике. В работе Глауэрта [39] предпринята попытка усовершенствовать стандартное решение для погранслоя таким образом, чтобы горизонтальная скорость обращалась в ноль за пределами погранслоя, однако в этом случае течение обеспечивается за счет вертикального потока вдоль всего слоя. Кроме того, несмотря на то, что градиент давления играет существенную роль в развитии течения за пределами погранслоя, он не учитывался в решении Глауэрта. Из-за разных граничных условий решение Глауэрта отличается от классического решения погранслоя [37]. В работе [40] были проведены расчеты отражения гидродинамической струи от поверхности жидкости без учета вязкости, основанные на сохранении завихренности. В работах [41, 42] рассматриваются конвективные течения от источника нагрева в отсутствие поверхности, так называемые «тепловые факелы». Для такого течения были построены автомодельные решения

в предположении постоянства давления по всей рассматриваемой области. Данное приближение оказывается справедливым для свободной вертикальной струи воздуха, но при наличии поверхности условие перестает выполняться. В работе [43] тепловые факелы для воды рассматриваются только на начальных этапах развития струи, а стационарные течения анализируются в воздухе, где также отсутствует градиент давления в рассматриваемой области течения.

Выделение параметров подобия с последующим анализом также может использоваться для описания течения, как, например, сделано в работе [44]. Более универсальным способом анализа течения являются автомодельные решения. Подбор подходящих автомодельных координат позволяет значительно упростить систему уравнений до системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которую затем можно решить численно с меньшими затратами вычислительных ресурсов и получить универсальные зависимости для течения для конкретного числа Прандтля. Основное отличие предложенных в данной работе автомодельных решений состоит в отсутствии каких-либо предположений о температурном профиле при выводе автомодельных решений, так как решается сопряженная задача. Решение сопряженной задачи позволяет учитывать взаимное влияние температурного поля и поля скорости, что важно для рассматриваемых работе течений.

Важную роль в физико-химических приложениях играет концентрационный эффект Марангони. Несмотря на аналогию тепло- и массообмена, следует отметить, что в реальных условиях такие задачи, как правило, нестационарны и более сложны для анализа с помощью автомодельных решений. Процессы адсорбции и десорбции начинают играть большую роль, и концентрационная конвекция оказывается отличной от температурной [45, 46]. Кроме того, возникают поверхностные пленки, которые значительно усложняют анализ [47, 48]. Варианты расчетов с одновременным рассмотрением тепло- и массообмена, как правило, также связаны с заданием полей температуры и концентрации [38]. Численные двумерные расчеты делаются уже давно [32, 49, 45, 46] и в настоящее время выполняются с учетом трехмерной гидродинамики как для термокапиллярной, так и для концентрационно-капиллярной конвекции [50, 51]. Однако численные расчеты не позволяют вывести общие закономерности течения и показать сходства различных типов горизонтальной конвекции, в отличие от автомодельных решений. В работе используются численные расчеты для сравнения с автомодельными решениями и экспериментом, а также для сравнения термокапиллярного и термогравитационного механизмов конвекции. Скорость распространения тепла при поверхностном нагреве для горизонтальной

конвекции также рассматривалась в [52, 53].

Определение поверхностных свойств, например, в целях экологического контроля или для обработки и очистки поверхности [54] удобно проводить при воздействии лазерного источника нагрева на поверхность жидкости. Инфракрасный CO<sub>2</sub>-лазер с длиной волны 10.6 мкм и глубиной поглощения излучения в воде порядка нескольких десятков микрон оказывается удобным способом локального поверхностного нагрева, а контроль расплывающегося теплового пятна удобно проводить, измеряя поле температур на поверхности с помощью тепловизора. Иногда подобное зондирование используется для создания «тепловых маркеров» с целью диагностики движения жидкости на поверхности в натуральных геофизических экспериментах и в каналах [53, 55]. Кроме того, в работе [56] применение локального нагрева предлагается как вариант «бесконтактного пинцета» для перемещения частиц по поверхности. В зависимости от свойств поверхности скорость распространения тепла может отличаться очень существенно вследствие разных механизмов горизонтальной конвекции. В работе [57] показано, что термокапиллярная конвекция может блокироваться пленкой из ПАВ, и дано объяснение возникновения пленки через теорию малых возмущений. Однако в случае отсутствия поверхностной пленки термокапиллярная конвекция является главным механизмом теплопереноса, что особенно важно при рассмотрении конвекции в тонких пленках [58]. В данной работе были проведены эксперименты с разными жидкостями при наличии и в отсутствие пленки, рассмотрены численные решения и предложены автомодельные решения как для стационарного, так и для нестационарного режимов распространения теплового маркера, инициированного лазерным ИК-зондированием свободной поверхности.

Температурное поле может быть источником информации не только при рассмотрении процессов тепловыделения в жидкостях. Различные методы ассимиляции данных позволяют по измеренной одной величине в эксперименте восстанавливать остальные параметры, описывающие течение. Могут использоваться различные методики: прямая подстановка экспериментальных данных в уравнения [59, 60], фильтр Калмана [61], наблюдатель состояния [62, 63], вариационные методы [62, 65] или методы машинного обучения [66]. Исходными полями в методах ассимиляции данных часто бывают результаты измерений скорости методом PIV [67, 68, 69] или с помощью лагранжева слежения за отдельными частицами (Lagrangian Particle Tracking, LPT) [70, 71]. Реже используются экспериментальные поля температуры. Поля скоростей и давления в ламинарных течениях при наличии естественной конвекции могут быть восстановлены на

основе распределений температуры, полученных ТФМ [60] или измеренных ИК-термографией [59].

В процессах, аналогичных горению, поля температуры и концентрации реагентов и продуктов связаны с гидродинамическими параметрами течения. Такие течения описываются системой уравнений Навье-Стокса с уравнениями, описывающими перенос компонентов (реагентов и продуктов), энергии и кинетику химических реакций. При этом часто в расчетах предполагается подобие полей температуры, скорости и концентрации, которые связаны через постоянные безразмерные параметры, такие как числа Прандтля и Шмидта. Для струи горячего воздуха над пламенем после того, как химические реакции прошли и концентрация компонент остается неизменной, поле температуры может являться исходными данными для восстановления гидродинамических параметров течения.

Для изучения турбулентных потоков при наличии тепловыделения задача усложняется тем, что помимо давления и скорости необходимо восстанавливать распределения турбулентной теплопроводности и вязкости. Эти две величины связаны через турбулентное число Прандтля. В моделировании RANS изначально основное внимание уделялось моделям турбулентной вязкости, а в задачах с учетом процессов теплообмена турбулентная теплопроводность рассчитывалась, как правило, из вязкости через турбулентное число Прандтля. При этом турбулентное число Прандтля часто предполагается постоянным, из чего следует подобие полей температуры и скорости. Такой алгоритм расчета используется во многих вычислительных пакетах (ANSYS, Comsol, Star CCM+). Подобные модели турбулентных течений являются эмпирическими, а для каждой конфигурации течения есть свои особенности их применения. В работе [72] было перечислено более 30 моделей определения турбулентных чисел Прандтля и Шмидта, эти модели были разбиты на 7 групп. В более новом обзоре [73] приводится уже дополненная классификация, а в работе [74], которая является продолжением обзора [73] применительно к физике атмосферы, изменения в классификации уже более существенны. Быстрое развитие численных методов, в том числе тех, которые не используют модели RANS (например, DNS и LES [75]), позволяет получить турбулентное число Прандтля напрямую. В то же время, традиционные инженерные методики, существенно упрощающие поиск решения, продолжают активно развиваться как в инженерной теплофизике [76], так и в геофизике [74].

Непостоянство турбулентного числа Прандтля в конечном итоге приводит к более сложному характеру зависимости турбулентной теплопроводности от вязкости. В работе [77] с помощью

методов ассимиляции данных и экспериментальных измерений поля скорости методом PIV и температуры с помощью термопары были проведены оценки турбулентного числа Прандтля и показано, что оно зависит от параметров проводимых экспериментов. Даже в предположении постоянного турбулентного числа Прандтля необходимость определения турбулентной вязкости остается. Она может быть рассчитана из измерений скорости PIV. Однако в работе [78] сравнение экспериментальных и численных результатов с применением  $k$ - $\varepsilon$ -модели показало расхождение для полей турбулентных величин в 60%. Численное моделирование с применением различных моделей турбулентности показывает, что не только количественные результаты, но и пространственное распределение турбулентной вязкости различается в зависимости от выбора модели турбулентности [79].

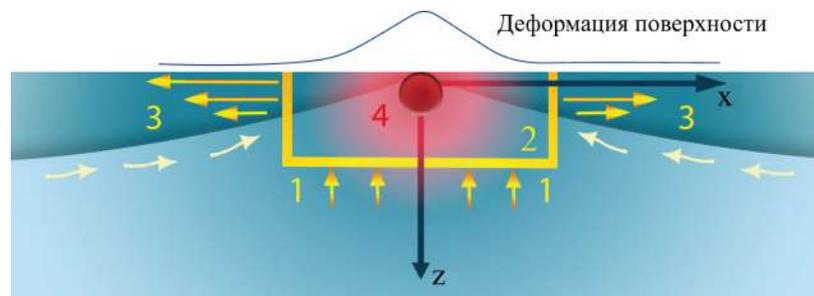
В данной работе предложены два способа ассимиляции данных. В одном используется прямая подстановка предобработанных экспериментальных данных температуры, полученных ТФМ, в уравнения гидродинамики с последующим численным решением. Результаты восстановления были получены для течения свободной осесимметричной квазистационарной турбулентной струи. Во втором способе используется физически-информированную нейросеть (Physics-Informed Neural Network, PINN), которая позволяет восстанавливать течения свободной или импактной осесимметричной квазистационарной турбулентной струи с использованием экспериментальных данных температуры, полученных ТФМ, и точечных измерений скорости с помощью термоанемометра. PINN были впервые предложены в работе [80] и могут использоваться для решения обратных задач [81, 82, 83] или для численного моделирования [66, 84, 85, 86, 87, 88].

Таким образом, следует отметить, что тепловыделение сопровождает многие процессы в теплофизике и геофизике. Оно является источником движения, а измеренные разными способами и для разных конфигураций течения температурные поля служат основой для описания свойств межфазной границы и восстановления параметров течения в процессах, аналогичных горению.

## 2 Термогравитационный и термокапиллярный механизмы горизонтальной конвекции при нагреве жидкости линейным источником тепла и их зависимость от свойств межфазной поверхности

### 2.1 Постановка задачи, система уравнений и граничные условия

Линейный источник нагрева является типичной конфигурацией, описывающей конвективное течение на большом удалении от нагретых труб или кабелей. В работе рассматривается слой жидкости с источником нагрева, расположенным у поверхности. Используется система координат  $Ozx$  с началом в точке нагрева, вертикальная ось  $z$  направлена вниз. Течение вблизи поверхности можно разделить на три области, представленные на Рис. 2.1: 1 – область замыкающего течения, 2 – область вблизи источника нагрева и 3 – течение в пограничном слое.



**Рис. 2.1.** Схема течения для линейного источника тепла у поверхности жидкости.

Система уравнений гидродинамики в приближении малых чисел Маха имеет стандартный вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_i)}{\partial X_i} &= 0, \\
\rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial X_j} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial X_i} \left( \eta \frac{\partial V_j}{\partial X_j} \right) + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \eta \left( \frac{\partial V_i}{\partial X_j} + \frac{\partial V_j}{\partial X_i} \right) \right] + \rho g_i, \\
\rho c_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + V_i \frac{\partial \theta}{\partial X_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial X_i} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial X_i} \right) + \left[ -\frac{2}{3} \eta \frac{\partial V_k}{\partial X_k} \delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial V_i}{\partial X_j} + \frac{\partial V_j}{\partial X_i} \right) \right] \frac{\partial V_i}{\partial X_j} + Q,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $X_{1,2}$  – пространственные координаты  $x$  и  $z$ ,  $\tilde{t}$  – время,  $V_{1,2}$  – вертикальная и горизонтальная компоненты скорости,  $\theta$  – температура,  $Q$  – тепловыделение,  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $g$  – ускорение свободного падения. При численных расчетах использовались эмпирические зависимости от температуры для  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$ ,  $\eta$ , такие же, как и в работе [12].

Стенки аквариума и дно предполагаются адиабатическими. Тепловыделение задается в моделировании как постоянный поток тепла сверху в области  $|X| \leq 0.7$  мм, как и в работе [12]. Такая ширина области нагрева выбрана по сравнению результатов моделирования с измерениями температуры поверхности ИК-термографией. Следует отметить, что от ширины области нагрева зависит только максимальная температура, но не скорость распространения тепла вдоль поверхности.

При иницировании тепловыделения возможны два механизма возникновения конвекции. Как уже отмечалось, в жидкости (дистиллированная вода, глицерин), в которой присутствует пленка на поверхности, конвекция будет возникать из-за перераспределения давления в объеме. При отсутствии пленки (например, в этиловом спирте, силиконовых маслах) будет иметь место термокапиллярный механизм – температурная конвекция Марангони. В работе проводятся эксперименты с дистиллированной водой и с этиловым спиртом. Различие данных механизмов с точки зрения системы уравнений в численном моделировании выражается в граничных условиях на свободной поверхности жидкости [89]. Для дистиллированной воды задается условие прилипания:  $V_x = 0$ . Термокапиллярная конвекция Марангони описывается условием Пирсона [106]:  $\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ , где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. При наличии неравномерной концентрации поверхностно-активных веществ (ПАВ) возможен термоконцентрационный механизм конвекции Марангони. Тогда в общем виде условие Пирсона имеет вид:  $\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\eta} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \right)$ , где  $c$  – концентрация ПАВ. Термокапиллярная и термоконцентрационная конвекции Марангони – это два противоположно направленных эффекта [47]. В данной работе рассматривается только температурная конвекция Марангони.

Изменение рельефа поверхности описывается уравнением:

$$p_0 - p + \rho gh - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2\eta \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (2.2)$$

где  $p_0$  – атмосферное давление. Уравнение (2.2) решается относительно изменения уровня поверхности  $h$ . Граничное условие  $h=0$  фиксируется на обоих концах поверхности, так как экспериментальный метод moon-glade BOS позволяет измерить угол наклона, но не абсолютную величину изменения уровня.

Вертикальное смещение поверхности играет важную роль при формировании поля давления, но в рассматриваемых условиях это смещение не влияет существенно на изменение вертикальной скорости, что учтено в моделировании [89].

## 2.2 Численная схема

Численно решается система уравнений (2.1) с переменными коэффициентами вязкости, теплопроводности и известной зависимостью плотности от температуры. Для постановки корректного граничного условия для температуры необходимо оценить числа Био ( $Bi$ ) в проведенных экспериментах. Теплоотвод с поверхности жидкости определяется тремя составляющими — контактным потоком тепла, скрытым и балансом радиации, причем в рассматриваемых условиях основной вклад вносит скрытый поток [90]. Из балк-формул для суммарного потока следует, что величина числа Био составляет порядка  $10^{-3}$ , что позволяет использовать в численных расчетах граничное условие для температуры:  $dT/dz=0$  и применять автомодельную теорию на значительной горизонтальной длине. На стенках объема с жидкостью задается условие прилипания. Условие непроницаемости  $V_z=0$  задано на горизонтальной границе, которая совпадает с недеформированной поверхностью жидкости. Так как деформация поверхности очень мала по сравнению с глубиной слоя жидкости, можно не учитывать влияние деформации поверхности на поле скорости. В дистиллированной воде на поверхности было выбрано условие неподвижной пленки:  $V_x=0$ .

Второе и третье уравнения системы (2.1) интегрируются с использованием полунеявной схемы второго порядка с применением метода Рунге-Кутты третьего порядка для конвективных слагаемых и метода Кранка-Николсона для диффузионных слагаемых. Метод дробного шага используется для нахождения поправок к скорости и давлению, чтобы удовлетворить уравнению непрерывности (2.1). В пространственной дискретизации применяются центральные разности

для аппроксимации диффузионных слагаемых и 4-точечные противопоточные разности для аппроксимации конвективных. Использовался оригинальный код, написанный Н.А. Винниченко, как и в работе [89], в которой проводилось моделирование конвективной струи, возникающей в жидкости при нагреве линейного источника тепла (проволочки). Использовалась нерегулярная сетка с увеличивающимся вертикальным шагом вблизи дна. Верификация кода [12] проводилась для похожей задачи — конвекции жидкости при числе Прандтля  $Pr=1000$  в прямоугольной полости с твердыми стенками, на которых ставилось условие прилипания, и с заданным синусоидальным профилем температуры на свободной поверхности, как в работе [16]. В соответствии с исследованиями сеточной сходимости, которые включали вычисления на трех разных сетках размерами  $100 \times 100$  с минимальными шагами 49, 37 и 25 мкм, был выбран шаг 25 мкм. Максимальное отличие от [16] по числу Нуссельта составило 7.5%, тогда как указанная в работе [16] погрешность зависимости числа Нуссельта от числа Рэлея равнялась 15%. Для выяснения влияния ширины аквариума на структуры течения были проведены дополнительные эксперименты, результаты которых описаны в [21].

## 2.3 Обезразмеривание и приближение погранслоя

В безразмерном виде система (2.1) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial v_x}{\partial x}, \\
\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \\
\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - RaT, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где пространственные координаты, время, компоненты скорости, давление и изменение температуры приведены к безразмерному виду с помощью:  $l$ ,  $\frac{l^2}{\chi}$ ,  $\frac{\chi}{l}$ ,  $\frac{\eta\chi}{l^2}$ ,  $\frac{q}{\lambda}$ , соответственно. Здесь  $q$  — мощность нагрева на единицу длины,  $l$  — характеристическая длина, которая будет определена ниже.  $Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}$  — число Прандтля,  $Ra = \frac{\rho g \beta q l^3}{\eta \chi \lambda}$  — число Рэлея,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения. При выводе автомодельных решений свойства жидкости, за исключением плотности, предполагаются постоянными.

Применяя стандартное преобразование уравнений движений, исключаящее давление, т. е. продифференцировав второе уравнение системы (2.3) по  $z$ , а третье — по  $x$ , и приравнявая вторые производные, можно получить следующее соотношение:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial^3 v_x}{\partial z^3} = Ra \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Уравнение движения по вертикальной оси в приближении погранслоя в безразмерной виде принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -Ra T(x, z). \quad (2.5)$$

Таким образом, стандартные приближения для нестационарного погранслоя должны быть дополнены измененным условием для вертикального градиента давления. Это приближение является обобщением известного приближения Прандтля для погранслоя, в котором не рассматривается вертикальное изменение импульса, а в уравнении энергии учитывается теплопроводность только вдоль вертикальной оси.

В приближении погранслоя уравнение энергии преобразуется к виду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (2.6)$$

Далее из нестационарных уравнений (2.5) и (2.6) и соответствующих граничных условий для задач при наличии поверхностной пленки, блокирующей конвекцию Марангони, и в ее отсутствие, когда термокапиллярная конвекция является определяющим механизмом течения, можно получить разные автомодельные решения, которые будут рассмотрены в следующих разделах.

## 2.4 Автомодельное решение при отсутствии механизма Марангони

В рассматриваемых условиях в задаче отсутствует параметр длины и поэтому удобно использовать длину  $l$ , при которой  $Ra = 1$ , то есть:

$$l = \sqrt[3]{\frac{\eta \chi \lambda}{\rho g \beta q}}. \quad (2.7)$$

Для поиска автомодельного решения необходимо провести стандартный переход к функции тока  $\psi(x, z)$ :

$$v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.8)$$

Аutomодельное решение представляется в следующем виде:

$$\psi(x, z, t) = x^a f\left(z^b x^c, \frac{x}{t^e}\right), \quad T(x, z, t) = x^d g\left(z^b x^c, \frac{x}{t^e}\right). \quad (2.9)$$

Это решение, помимо того, что должно приводить к переходу к зависимости только от двух переменных, должно также удовлетворять условию независимости потока тепла от координаты  $x$  в погранслое при установлении стационарного течения и всем граничным условиям. В итоге коэффициенты однозначно определяются:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 1, \quad c = -\frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{2}, \quad e = 1. \quad (2.10)$$

То есть:

$$\psi(x, z, t) = x^{\frac{1}{2}} f(\xi, \hat{v}), \quad T(x, z, t) = \frac{g(\xi, \hat{v})}{\sqrt{x}}, \quad (2.11)$$

где

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{x}}, \quad \hat{v} = \frac{x}{t}. \quad (2.12)$$

Для вертикальной и горизонтальной скоростей получается:

$$v_z = \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi} \xi - f - 2\hat{v} \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}}{2\sqrt{x}}, \quad v_x = \frac{\partial f}{\partial \xi}. \quad (2.13)$$

Система уравнений (2.3) относительно двух переменных приобретает вид:

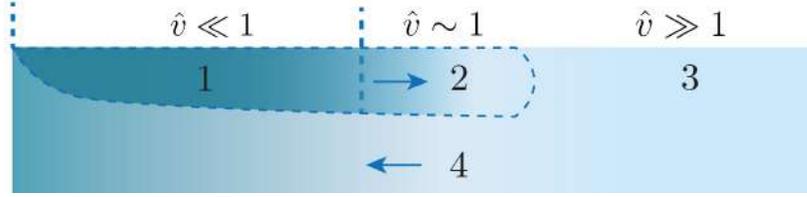
$$\begin{aligned} & -\hat{v}^2 \frac{\partial g}{\partial \hat{v}} - \frac{1}{2} \frac{\partial(fg)}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \frac{\partial g}{\partial \xi} \hat{v} + \frac{\partial g}{\partial \hat{v}} \frac{\partial f}{\partial \xi} \hat{v} - \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} = 0, \\ & \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( f \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right) + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4} - g - \xi \frac{\partial g}{\partial \xi} + 2\hat{v} \frac{\partial g}{\partial \hat{v}} + \frac{2}{\text{Pr}} \left[ -\hat{v} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2 \partial \hat{v}} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2 \partial \hat{v}} \hat{v}^2 + \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \hat{v} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Граничные и начальные условия для функций  $f$  и  $g$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} f(0, \hat{v}) &= 0, \quad \frac{\partial f(0, \hat{v})}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial g(0, \hat{v})}{\partial \xi} = 0, \\ f(\xi, \infty) &= 0, \quad \frac{\partial f(\xi, \infty)}{\partial \xi} = 0, \quad g(\xi, \infty) = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из того, что все слагаемые с производными по автомодельной координате  $\hat{v}$  содержат умножение на эту величину, можно заключить, что течение делится на разные зоны по величине  $\hat{v}$ , которые изображены схематически на Рис. 2.2, а сама переменная имеет физический смысл и описывает скорость распространения теплового фронта.

Первая зона погранслоя определяется условием:  $\hat{v} \ll 1$ , и описывает стационарное течение, так как все слагаемые с  $\hat{v}$  в ней малы. Нестационарное течение происходит в зоне 2, где  $\hat{v}$  порядка 1, а в зоне 3 течение отсутствует и поля величин соответствуют начальным условиям.



**Рис. 2.2.** Структура нестационарного течения. 1 – ближняя зона, 2 – зона фронта распространения тепла, 3 – дальняя зона, до которой не дошло течение, 4 – зона возвратного течения.

Ниже пограслоя возникает возвратное течение (зона 4), которое сопряжено с нагретой областью и определяет баланс переноса массы.

Очевидно, что скорость распространения тепла описывается условием:  $\tilde{v} \sim 1$ , что в размерных переменных приводит к соотношению:

$$v_f = \sqrt[3]{\frac{\rho g \beta \chi^2}{\eta \lambda} q} \sim q^{1/3}. \quad (2.16)$$

Следует отметить, что эта величина представляет наибольший практический интерес, так как связана со скоростью распространения тепла от линейного источника. В ближней зоне устанавливается стационарное распределение, анализ которого упрощается за счет уменьшения числа переменных. В то же время, этот анализ позволяет понять структуру всего течения.

## 2.4.1 Стационарное автомодельное решение в отсутствие механизма Марангони

В ближней зоне, то есть, где зависимость от  $\hat{v}$  исчезает, автомодельная система уравнений сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [21]:

$$\begin{aligned} 2g'' &= -(fg)', \\ \frac{(ff'')'}{Pr} + 2f^{iv} - g - g'\xi &= 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где все параметры зависят только от первой автомодельной переменной  $\xi$ . Интегрирование уравнений (2.17) приводит к системе:

$$\begin{aligned} g' &= -\frac{fg}{2}, \\ f''' &= \frac{g\xi}{2} - \frac{ff''}{2Pr} + C. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Если сопоставить второе уравнение с уравнением движения в проекции на ось  $X$  системы (2.3), то получится, что константа  $C$  определяет изменение давления в пограслое, а именно:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{g\xi}{2x} - \frac{C}{x}. \quad (2.19)$$

Погранслоем рассматривается от точки  $\xi=0$  до точки  $\xi=\xi_{max}$ , где горизонтальная скорость становится равной нулю. Граничные условия на поверхности жидкости, соответствующие  $\xi=0$ , в автомодельных переменных:  $f(0)=0$ ,  $f'(0)=0$ ,  $f''(0)$  и  $g(0)$  – произвольны. Таким образом, в качестве неизвестных параметров остаются два граничных условия и константа  $C$  из уравнения. Неизвестное условие для  $g(0)$  можно найти из выражения для нормировки теплового потока при условии малости числа  $Bi$ .

Процедура нормировки теплового потока была предложена Гебхартом для вертикальной струи [42], который с ее помощью усовершенствовал решение Фудзии [41] и уменьшил количество независимых параметров.

Интеграл части теплового потока, уходящей направо, будет равен симметричной части в левой полуплоскости и равен  $1/2$ :

$$q = \int_0^z v_x T dz = \int_0^{\xi_{max}} f' g d\xi = 1/2. \quad (2.20)$$

Очевидно, что автомодельное решение будет существовать до тех пор, пока

$$2Bi \cdot g(0) \sqrt{x} \ll 1. \quad (2.21)$$

Рассмотрим расчет с начальным условием  $g(0)=1$ . Тогда интеграл (2.20) будет равен некоторой величине  $I/2$  для автомодельных переменных  $f_n$ ,  $g_n$ ,  $\xi_n$ ,  $C_n$ . Если рассмотреть преобразование переменных:

$$f = f_n / I^{1/6}, \quad g = g_n / I^{5/6}, \quad \xi = \xi_n \cdot I^{1/6}, \quad C = C_n / I^{2/3}, \quad (2.22)$$

то система уравнений (2.18) с граничными условиями сохранится, а интеграл в пересчитанных переменных  $f$ ,  $g$ ,  $\xi$ ,  $C$  будет равен 0.5. Поэтому можно рассчитать систему с граничным условием  $g(0)=1$ , затем по формулам (2.22) осуществить пересчет. Таким образом, остается два неизвестных параметра: граничное условие  $f''(0)$  и константа  $C$ . Чтобы получить их значения, необходимо рассмотреть область замыкающего течения (область 1 на Рис. 2.1).

Изменение давления у поверхности за счет погранслоя не зависит от координаты  $x$ . Действительно,

$$\Delta p_1 = \int_0^{z_{max}} T dz = \int_0^{\xi_{max}} g d\xi = const, \quad (2.23)$$

и поэтому горизонтальный градиент давлений определяется замыкающим течением. В отличие от классической теории, замыкающее течение должно содержать вертикальную компоненту,

которая и формирует тепловой поток. Область нагретой жидкости (1 на Рис. 2.2), в которой поток тепла за счет теплопроводности компенсируется гидродинамическим потоком, «управляет» данным конвективным течением. Температура в этой области практически не зависит от горизонтальной координаты. Все константы для погранслоя определяются численно, но оценки характеристик замыкающего течения позволяют достаточно точно рассчитать связи между неизвестными параметрами автомодельного решения.

Изменение давления за счет замыкающего течения можно рассчитать из (2.5), которое с учетом нормировки приобретает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -T(x, z). \quad (2.24)$$

Температура в замыкающем течении постоянна вдоль координаты  $x$  и совпадает с температурой на границе погранслоя:

$$T(z) = \frac{g(\xi_{max})}{\sqrt{x}} = \frac{g(\xi_{max})}{z} \xi_{max}. \quad (2.25)$$

Горизонтальный градиент давления на поверхности за счет сопряженного течения будет определяться как:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{z=0} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{z_{max}}^{z_{max}(x+\Delta x)} T(z) dz}{\Delta x} = -T(z_{max}) \frac{\partial z_{max}}{\partial x} = -\frac{g(\xi_{max}) \xi_{max}}{z} \frac{\xi_{max}}{2\sqrt{x}} = -\frac{g(\xi_{max}) \xi_{max}}{2x}. \quad (2.26)$$

Сравнение с (2.19) при  $z=0$  ( $\xi=0$ ) дает величину константы  $C$ :

$$C = \frac{\xi_{max} g(\xi_{max})}{2}. \quad (2.27)$$

Второе условие находится из равенства потоков в областях сопряженного течения (область 1 на Рис. 2.1) и погранслоя (область 3 на Рис. 2.1), то есть:

$$\begin{aligned} \int_0^{z_0} v_x dz &= - \int_0^{x_0} v_z dx, \quad \xi_{max} = \frac{z_0}{\sqrt{x_0}}, \\ \int_0^{z_0} v_x dz &= \sqrt{x} \int_0^{\xi_{max}} f' d\xi = \sqrt{x} f(\xi_{max}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Из уравнения, справедливого в сопряженном слое:

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (2.29)$$

с помощью (2.25) находим выражение для вертикальной скорости в замыкающем течении в дальней зоне:

$$v_z = -\frac{2}{z}. \quad (2.30)$$

Поэтому:

$$\int_0^{x_0} v_z dx = - \int_0^{x_0} \frac{2}{z_0} dx = - \frac{2\sqrt{x_0}}{\xi_{max}} \quad (2.31)$$

Сравнение(2.28) и (2.31) приводит ко второму условию:

$$f(\xi_{max}) = \frac{2}{\xi_{max}}. \quad (2.32)$$

Расчеты показывают, что соотношения (2.27) и (2.32), замыкающие алгоритм, дают оценку величин только при достаточно больших числах Прандтля ( $Pr > 1$ ). В противном случае в области источника нагрева нельзя пренебречь горизонтальной производной температуры. Замыкающее течение и зона вблизи источника не автомодельны. Автомодельность самого погранслоя сохраняется и при малых числах Прандтля, но расчет параметров нужно делать в этом случае с помощью численного решения для заданного числа Прандтля. В данной работе методом Рунге-Кутты 4-ого порядка и итерационной процедурой подбора параметров, удалось найти универсальное решение задачи, которое зависит только от числа Прандтля. Были получены автомодельные решения для чисел Прандтля  $Pr=0.7, 7.16, 70$ . Значение  $Pr=7.16$  соответствует воде при температуре  $20^\circ\text{C}$ . Параметры решения для разных чисел Прандтля приведены в Табл. (2.1).

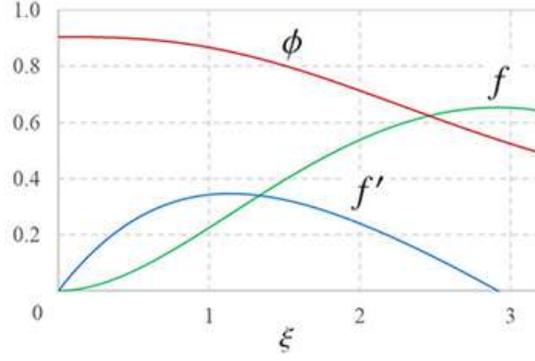
**Таблица 2.1.** Параметры автомодельного решения для разных чисел  $Pr$ .  $\xi_0$  – координата, при которой достигается максимум безразмерной горизонтальной скорости  $f'_{max}$ .

$Pr$	$C$	$f''(0)$	$\phi(0)$	$\xi_{max}$	$f'_{max}$	$\xi_0$
0.1	-1.3200	0.950	1.050	2.2934	0.3590	0.7928
0.7	-1.0900	0.820	1.030	2.2885	0.3555	0.9529
7.16	-0.8657	0.701	0.905	2.9152	0.3463	1.1389
70	-0.8850	0.701	0.920	2.7441	0.3365	1.0989

Сравнение двух последних чисел указывает на то, что при больших числах Прандтля влияние нелинейного члена во втором уравнении (2.18) становится малым и решение выходит на асимптотическое значение. Очевидно, что процедура может быть выполнена для любого числа Прандтля.

На Рис. 2.3 представлены профили автомодельных функций для  $Pr=7.16$ .

Из автомодельного решения можно получить зависимости от мощности нагрева  $q$  (Вт/м) для размерных  $v_{x_{max}}^{\dim}(q)$  и автомодельной переменной  $\xi_{x_{max}}^{\dim}(q)$ , по которой определяется граница



**Рис. 2.3.** Зависимость функций  $f$ ,  $f'$ ,  $g$  от автомодельной переменной  $\xi$  для числа  $Pr=7.16$ .

погранслоя  $z_{max} = \xi_{max} \sqrt{x}$ . Так как  $V_{Xmax} = f'_{max}$  и скорость нормировалась на величину  $\chi/l$ ,  $l = \sqrt[3]{\frac{\eta\chi\lambda}{\rho g\beta q}}$ , то в размерных координатах:

$$v_{x\ max}^{dim}(q) = f'_{max} * \sqrt[3]{\frac{\rho\chi^2 g\beta}{\eta\lambda} q} \sim q^{1/3}, \quad (2.33)$$

где  $f'_{max} = 0.35901, 0.3555, 0.3463, 0.3365$  для  $Pr = 0.1, 0.7, 7.16, 70$ , соответственно. Таким образом, максимальная скорость зависит от свойств жидкости и корня третьей степени от мощности нагрева на единицу длины источника. Аналогично величина  $\xi_{max}^{dim}(q)$  в размерном виде рассчитывается:

$$\begin{aligned} \xi_{max}^{dim}(q) &= \xi_{max} * \sqrt[6]{\frac{\eta\chi\lambda}{\rho g\beta q}} \sim q^{-1/6}, \\ z_{max}^{dim} &= \xi_{max}^{dim} \sqrt{x^{dim}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

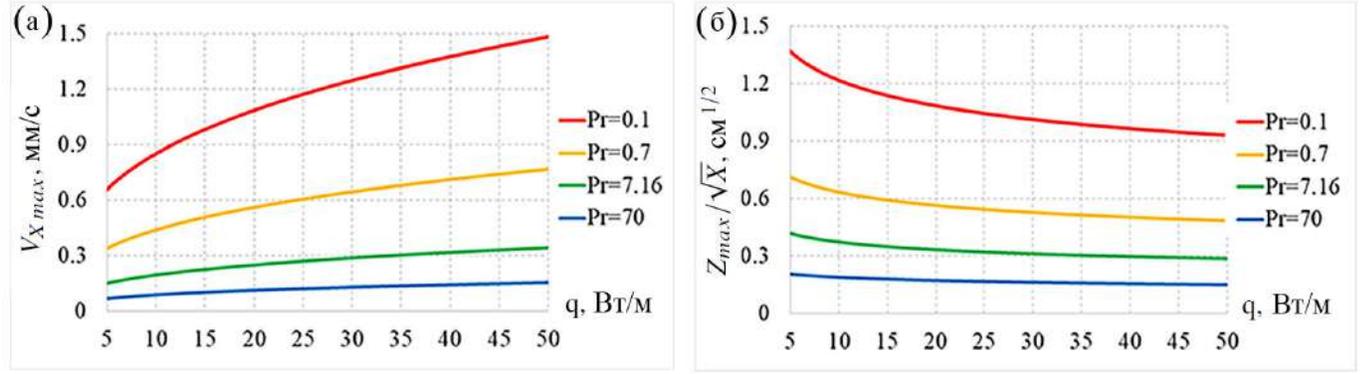
где  $z^{dim}$ ,  $x^{dim}$  – размерные величины в метрах,  $\xi_{max} = 2.2934, 2.2885, 2.9138, 2.7441$  для  $Pr = 0.1, 0.7, 7.16, 70$ , соответственно. На Рис. 2.4 представлены зависимости  $v_{x\ max}^{dim}(q)$ ,  $\xi_{max}^{dim}(q)$  для  $Pr=0.1, 0.7, 7.16, 70$ .

Интересно отметить, что именно такие зависимости от мощности источника (толщина слоя  $\sim q^{-1/6}$ , скорость  $\sim q^{1/3}$ ) были получены и в работе [5] (см. также [7]), где эти оценки получались при численном счете и в эксперименте для достаточно больших чисел Рэлея при нагреве части дна.

Для сравнения результатов необходимо ввести локальное «горизонтальное» число Рэлея, которое определяется как:

$$Ra_X = \frac{\rho g\beta q X^3}{\eta\chi\lambda}, \quad (2.35)$$

где  $X$  – расстояние от источника нагрева. Заданное таким образом число Рэлея является аналогом величины  $Ra_F$ , используемой в литературе для расчетов с локальным нагревом дна. В



**Рис. 2.4.** Зависимость а)  $v_{x,max}^{dim}(q)$ ; б)  $\xi_{max}^{dim}(q)$  для  $Pr=0.1, 0.7, 7.16, 70$ .

работе [5] за величину  $X$  принимается ширина бассейна  $L$ . В проведенных экспериментах основанные на таком расчете числа Рэлея достигали величин:  $Ra_L = 2.2 \times 10^9$  для  $q=31$  Вт/м и  $3.8 \times 10^9$  для  $q=62$  Вт/м, соответственно.

Необходимо отметить, что в рассматриваемом случае полученная зависимость универсальна, но для конечной длины и определения горизонтального числа Рэлея необходимо ограничить рассматриваемую длину погранслоя. При его толщине  $b$  на длине  $x=L$  величина  $\xi_{max}$  равняется:

$$\xi_{max} = b/\sqrt{L}. \quad (2.36)$$

В литературе [5] было показано, что:

$$\begin{aligned} \frac{b}{L} &= 2.649 Ra_F^{-1/6}, \\ \frac{V_x L}{\chi} &= 0.45525 Ra_F^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

В данной работе из соотношений (2.33), (2.36) следует:

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sqrt{L}} &= \xi_{max} \sqrt[6]{\frac{\eta \chi \lambda}{\rho g \beta q}}, & \frac{b}{L} &= \xi_{max} Ra_L^{-1/6}, \\ V_{x,max}^{dim}(q) &= f'_{max} * \sqrt[3]{\frac{\chi^2 g \beta q}{\nu \lambda}}, & \frac{V_x L}{\chi} &= f'_{max} Ra_L^{1/3}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где  $\xi_{max}$ ,  $f'_{max}$  при различных  $Pr$  указаны в Табл. (2.1).

Выражения (2.37) и (2.38) согласуются, хотя (2.37) получены из аппроксимационных соотношений для численного счета и эксперимента в задаче с локальным нагревом дна, а (2.38) – из автомодельного решения для погранслоя с с линейным источником тепла у поверхности. Такое сходство демонстрирует универсальность законов горизонтальной конвекции и сохранение возможности двумерного описания задачи до достаточно больших чисел Рэлея.

Полученное решение полностью описывает течение как в погранслое, так и в сопряженном течении. Именно сопряженное течение с нагретой областью формирует профиль давления на поверхности и определяет скорость. Дальнейший анализ решений будет проведен в разделе 2.7 на основе сравнения с численным решением и экспериментальными данными.

## 2.4.2 Скорости распространения тепла и гидродинамического течения

Скорость распространения теплового фронта является важнейшей характеристикой задачи. Автомодельные решения позволяют оценить время  $\tau_L$ , за которое тепловой фронт достигнет длины  $L$ , и сравнить полученные соотношения с известными в литературе. Число Рэлея на длине  $L$  определяется равенством (2.35):

$$Ra_L = \frac{\rho g \beta q L^3}{\eta \chi \lambda}. \quad (2.39)$$

Тогда согласно (2.16), время  $\tau_L$  будет определяться уравнением:

$$\frac{L}{\tau_L} = \sqrt[3]{\frac{\rho g \beta \chi^2}{\eta \lambda} q}, \quad (2.40)$$

откуда следует:

$$\tau_L = \frac{L^2}{\chi} Ra_L^{-1/3}, \quad (2.41)$$

что совпадает со временем  $\tau_{bl}$ , полученным в работе [7] для распространения тепла при неравномерном нагреве поверхности. Пересчет на разность температур для числа Рэлея позволяет перейти к результату работы [14] (см. [7]). Стоит отметить, что (2.16) — это достаточно грубая оценка. В реальности расчет с помощью автомодельного решения в установившейся части потока дает величину порядка 0.5 от величины (2.16). Рассмотренная оценка может быть уточнена с помощью нестационарного автомодельного решения.

Интегрирование (2.14) по переменной  $\xi$  в приближении  $Pr \gg 1$  приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} -\hat{v}^2 \frac{\partial \theta}{\partial \hat{v}} - v \frac{\partial}{\partial v} \int f \frac{\partial g}{\partial \xi} d\xi &= -\hat{v}^2 \frac{\partial \theta}{\partial \hat{v}} + \hat{v} \frac{\partial g}{\partial \hat{v}} = 0, \\ -2 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=0} - \theta - \int \xi \frac{\partial g}{\partial \xi} + 2\hat{v} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{v}} &= -2 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=0} + 2\hat{v} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{v}} = 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где

$$\theta = \int_0^{\infty} g d\xi. \quad (2.43)$$

Подстановка выражения для интегральной температуры из второго уравнения в первое (2.42) приводит к соотношению:

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{v}} = -\hat{v} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{v}} = \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=0}. \quad (2.44)$$

С учетом (2.20) и нормировки потока при  $\hat{v}=0$  в итоге получается:

$$q = \frac{1}{2} + C_q \hat{v}. \quad (2.45)$$

Следует отметить, что выражение (2.20) было выведено в стационарном случае, поэтому зависимость от  $\hat{v}$  отсутствовала. Величина  $C_q \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=0}$  отрицательна и поток линейно спадает. Это выражение и определяет длину зоны. В точке, где величина потока обращается в ноль, выполняется соотношение:

$$\hat{v} = -\frac{1}{2C_q}. \quad (2.46)$$

Из выведенных автомодельных решений следует, что для больших чисел Прандтля эта величина примерно равняется 0.5. Зависимость (2.46) полностью подтверждается численными расчетами.

Уменьшение потока определяется тем обстоятельством, что часть тепла уходит в зону под погранслоем, что и приводит к образованию поля давлений, движущего поток. Это обстоятельство существенно отличает задачу от случая термокапиллярной конвекции.

В точке  $\hat{v}_{\max}$  начинается переходный процесс, связанный с гидродинамическим торможением потока в отсутствие тепловой компоненты (гидродинамический предвестник). Он не описывается приближением погранслоя из-за больших горизонтальных производных, но численное решение в этой области в переменных  $\xi - \hat{v}$  оказывается универсальным.

### 2.4.3 Числа Нуссельта

Для количественной оценки эффективности теплоотвода оценим число Нуссельта. В литературе используется несколько подходов для его анализа [5, 129, 130, 131]. В области сопряженного течения (см. Рис. 2.1) суммарный поток тепла равен нулю согласно уравнению (2.29), так как поток за счет теплопроводности компенсируется вертикальным гидродинамическим потоком. Найдем локальное число Нуссельта для погранслоя. На безразмерном расстоянии  $r$  от источника нагрева его можно задать следующим образом:

$$Nu_{loc}(r) = \frac{q/2}{\lambda \Delta \theta} \frac{\pi/2}{\varphi_{max}} = \frac{\pi}{4T \varphi_{max}}, \quad (2.47)$$

где  $\varphi_{max}$  – величина угла в полярных координатах, которая соответствует границе погранслоя:

$$\xi_{max} = \frac{z_{max}}{\sqrt{x}} = \sqrt{r} \frac{\sin \varphi_{max}}{\sqrt{\cos \varphi_{max}}}. \quad (2.48)$$

При больших  $r$  угол мал,

$$\varphi_{max} = \frac{\xi_{max}}{\sqrt{r}} \quad (2.49)$$

и  $x \approx r$ . Подставляя в выражение (2.47) решение для температуры в автомодельных координатах (2.11), можно получить:

$$Nu_{loc}(r) = \frac{\pi r}{4g(0)\xi_{max}}. \quad (2.50)$$

На длине  $X$  пограничного слоя:

$$Nu_{loc} = \frac{\pi X}{4g(0)\xi_{max}l} = \frac{\pi X}{4g(0)\xi_{max}} \sqrt[3]{\frac{\rho g \beta q}{\eta \chi \lambda}} = \frac{\pi}{4g(0)\xi_{max}} Ra_X^{1/3} \approx 0.3 Ra_X^{1/3}. \quad (2.51)$$

Также локальное число Нуссельта может быть определено через отношение конвективного потока через плоскость, расположенную на безразмерном расстоянии  $r$  от источника нагрева, к потоку тепла в неподвижной жидкости [131]. Следует отметить, что в работе [131] был задан профиль температуры на поверхности, в отличие от описываемой задачи, в которой задается постоянная мощность источника нагрева. Поэтому поток тепла в неподвижной жидкости определяется только для погранслоя и для реального распределения температуры, заданного автомодельным решением (2.11):

$$Nu_{loc}(r) = \frac{q/2}{\lambda \int_0^{\varphi_{max}} (\partial\theta/\partial r)r \, d\varphi} = \frac{1}{2 \int_0^{\varphi_{max}} (\partial T/\partial r)r \, d\varphi}. \quad (2.52)$$

Подставляя выражения в автомодельных переменных:

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{g\xi}{\sqrt{r \cos \varphi}} \right) = \frac{g'(\xi(r, \varphi))r \sin \varphi - g(\xi(r, \varphi))\sqrt{r} \cos \varphi}{2r(\cos \varphi)^{3/2}} \approx \frac{g'(\xi)\varphi}{2} - \frac{g(\xi)}{2\sqrt{r}}, \quad (2.53)$$

в результате численного интегрирования получим:

$$Nu_{loc} = A_1 Ra_X^{1/3}, \quad (2.54)$$

где константа  $A_1=0.3312, 0.3165, 0.3167, 0.2894$  для  $Pr=0.1, 0.7, 7.16, 70$ , соответственно. В работе [130] для конвективного течения в сосуде шириной  $L$  с заданным профилем температуры на поверхности жидкости было получено:

$$Nu_{loc} < 0.0525 Ra_L^{1/3}. \quad (2.55)$$

Эта зависимость, не считая константы, совпадает с полученными соотношениями (2.51) и (2.54).

Полное число Нуссельта может быть определено, как в работе [5], через отношение полного конвективного теплового потока к потоку за счет теплопроводности при таком же распределении температуры:

$$Nu_{tot} = \frac{\rho c_p V_X b \Delta \theta}{\lambda \Delta \theta} = \frac{V_X b}{\chi}. \quad (2.56)$$

Подставляя (2.33), (2.34):

$$Nu_{tot} = f'_{max} \xi_{max} \sqrt{\frac{L}{l}} = A_2 Ra_L^{1/6}, \quad (2.57)$$

где константа  $A_2$  равна 0.8234, 0.8136, 1.0095, 0.9234 для  $Pr=0.1, 0.7, 7.16, 70$ , соответственно.

Сходное соотношение для воды при температуре 41.5°C ( $Pr=4.34$ ) было получено для конвекции в сосуде с неравномерно нагретым дном:  $Nu_{tot} = 0.81587 Ra_L^{1/6}$  [5]. Можно сделать вывод, что, несмотря на различные конфигурации течения, эффективность теплоотвода определяется общим механизмом горизонтальной конвекции за счет градиента давления.

## 2.5 Автомоделное решение для термокапиллярного течения

Аналогично рассмотренной задаче в отсутствие механизма Марангони, автомоделное решение задается в виде (2.9). Подстановка всех соотношений в уравнения и граничные условия приводит к равенству констант следующим значениям:  $a=1/4, b=1, c=-3/4, d=-1/4, e=2/3$ , и к виду автомоделных координат:

$$\xi = \frac{z}{x^{3/4}}, \quad \hat{v} = \frac{x}{t^{2/3}}.$$

С учетом этого функция тока в автомоделных переменных имеет вид:

$$\psi(x, z, t) = x^{1/4} f\left(\frac{z}{x^{3/4}}, \frac{x}{t^{2/3}}\right). \quad (2.58)$$

Граничное условие на свободной поверхности в случае термокапиллярной конвекции принимает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = -Ma \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.59)$$

где  $Ma = \frac{\sigma_T q l_2}{\eta \chi \lambda}$ ,  $\sigma_T = -\frac{\partial \sigma}{\partial T}$  — тепловой градиент поверхностного натяжения.

В данном случае характерную длину  $l_2$  удобно выбрать исходя из условия  $Ma=1$ , то есть:

$$l_2 = \frac{\eta \chi \lambda}{\sigma_T q}. \quad (2.60)$$

Функции скорости и температуры в автомодельных координатах задаются следующим образом:

$$v_x = \frac{f'(\xi, \hat{v})}{\sqrt{x}}, \quad v_z = \frac{3\xi f'(\xi, \hat{v}) - f(\xi, \hat{v}) - 4f_2 \hat{v}}{4x^{3/4}}, \quad T = \frac{g(\xi, \hat{v})}{x^{1/4}}. \quad (2.61)$$

При наличии термокапиллярной конвекции поле тяжести вносит малый вклад в конвективное движение, поэтому из уравнения движения в проекции на вертикальную ось можно исключить слагаемое  $Ra \cdot T$ . Система уравнений в автомодельных переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + g \frac{\partial f}{\partial \xi} + f \frac{\partial g}{\partial \xi} + 4\hat{v} \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} - 4 \frac{\partial g}{\partial \hat{v}} \left( \hat{v} \frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \hat{v}^{\frac{5}{2}} \right) &= 0, \\ 4 \text{Pr} \frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4} + f \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + 5 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{8}{3} \hat{v}^{5/2} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2 \partial \hat{v}} + 4\hat{v} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} - \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2 \partial \hat{v}} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Граничные условия в автомодельных переменных при  $\xi=0$  для температуры и скорости имеют вид:

$$\left. \frac{\partial g(\xi, \hat{v})}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 f(\xi, \hat{v})}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0} = \frac{g(0, \hat{v})}{4} - \frac{\partial g(0, \hat{v})}{\partial \hat{v}} \hat{v}. \quad (2.63)$$

Следует отметить, что как и для случая горизонтальной конвекции, система (2.62) содержит производные по  $\hat{v}$  только в членах с умножением на  $\hat{v}$  и при малых  $\hat{v}$  возникает нулевое приближение, соответствующее стационарному решению.

## 2.5.1 Стационарное автомодельное решение для термокапиллярной конвекции

В ближней зоне, то есть, где зависимость от  $\hat{v}$  исчезает, автомодельная система уравнений (2.62) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 4g'' + fg' + gf' &= 0, \\ 4 \text{Pr} f^{(iv)} - f'''f + 5f''f' &= 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Аutomодельные функции (2.61) преобразуются к виду:

$$v_x = \frac{f'(\xi)}{\sqrt{x}}, \quad v_z = \frac{3\xi f'(\xi) - f(\xi)}{4x^{3/4}}, \quad T = \frac{g(\xi)}{x^{1/4}}. \quad (2.65)$$

Граничные условия (2.63) в автомодельных переменных при  $\xi=0$ :

$$g'(0) = 0, \quad f''(0) = \frac{g(0)}{4}. \quad (2.66)$$

После интегрирования (2.64) преобразуется в:

$$\begin{aligned} f''' &= C - \frac{ff'' + 2f'^2}{4\text{Pr}}, \\ g' &= -\frac{fg}{4}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

где  $C$  – константа интегрирования.

Погранслой рассматривается от точки  $\xi=0$  до точки  $\xi=\xi_{max}$ , где горизонтальная скорость обращается в ноль. Таким образом, в качестве неизвестных параметров интегрирования остаются  $f'(0)$ ,  $g(0)$  и константа  $C$ .

Константа  $C$  определяет горизонтальный градиент давления. Как уже отмечалось ранее, горизонтальный градиент давления мал по сравнению с поверхностными силами и им в первом приближении можно пренебречь.

Неизвестное условие для  $g(0)$  определяется из нормировки теплового потока при условии малости числа  $Bi$ , как было описано в разделе 2.4.1. При этом выражения для новых автомодельных переменных (2.22) преобразуются в:

$$f = f_n/I^{\frac{1}{4}}, \quad g = g_n/I^{3/4}, \quad \xi = \xi_n I^{\frac{1}{4}}, \quad (2.68)$$

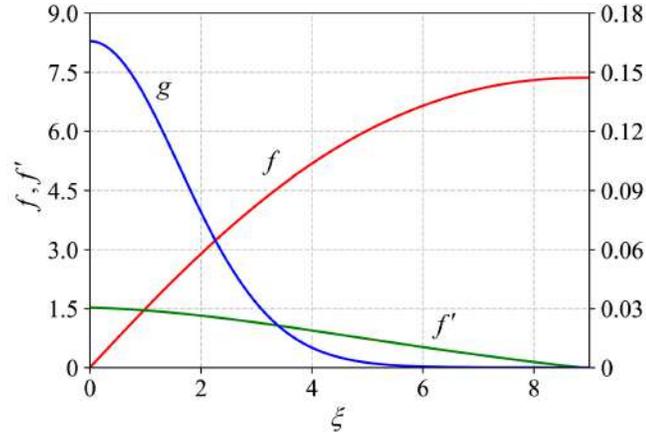
поэтому остается только один неизвестный параметр  $f'(0)$ . При заданном тепловом потоке из численных расчетов можно получить зависимость  $f'(g)$  при  $\xi=0$ , которая будет определять набор возможных значений скорости и температуры. При увеличении скорости в условиях сохранения потока температура уменьшается. Итоговая точка на кривой определяется сопряженным течением, как и в случае горизонтальной конвекции в отсутствие термокапиллярного механизма. Это течение не является автомодельным и поэтому  $f'(0)$  может быть определен из численного моделирования. Методом Рунге-Кутты 4-ого порядка было получено автомодельное решение для разных чисел Прандтля  $Pr=0.2, 1, 10, 17.4$ . Последнее значение соответствует этанолу при температуре  $20^\circ\text{C}$ . Параметры решения для разных чисел Прандтля приведены в Табл. 2.2.

**Таблица 2.2.** Параметры автомодельного решения для разных чисел  $Pr$

$Pr$	$f(0)$	$f'(0)$	$g(0)$	$\xi_{max}$	$C$
0.1	0	0.9160	1.2025	0.8487	0
0.2	0	0.7997	0.9844	1.2098	0
1	0	0.9955	0.3979	2.6016	$1.6 \cdot 10^{-5}$
10	0	1.3844	0.1892	7.0929	$2 \cdot 10^{-7}$
17.4	0	1.5321	0.1727	8.8059	0

На Рис. 2.5 представлены профили автомодельных функций  $f$ ,  $f'$ ,  $g$  для  $Pr = 17.4$ .

Можно сделать аналитическую оценку неизвестного параметра следующим образом. Сопряженное течение при учете сил Марангони возникает из-за разности давлений: действие поверх-



**Рис. 2.5.** Зависимости функций  $f$ ,  $f'$ ,  $g$  от автомодельной переменной  $\xi$ .

ностной переменной силы на верхней границе приводит к разряжению и за счет разности давлений возникает сопряженное течение. При этом анализ баланса давления позволяет замкнуть систему. При достаточной глубине сосуда скорость определяется вертикальным притоком массы. Расчет этой вертикальной скорости может быть проведен из закона сохранения массы:

$$\int_0^{l_x \max} v_z dx = - \int_0^{l_z \max} v_x dz = - \int_0^{\xi_{\max}} \frac{f'(\xi)}{\sqrt{x}} x^{3/4} d\xi = -f_{\max} x^{1/4} = -\frac{f_{\max} z^{1/3}}{\xi_{\max}^{1/3}}, \quad (2.69)$$

здесь  $\xi_{\max} = l_z \max / l_x^{3/4}$ , а  $f_{\max} \equiv f(\xi_{\max})$ . Если считать в сопряженном течении вертикальную скорость примерно одинаковой на рассматриваемой глубине  $z$ , то из (2.69) следует, что:  $v_{zout} = -f_{\max} \xi_{\max} / z = -f_{\max} / x^{3/4}$ . При решении уравнений погранслоя слагаемые в уравнении движения для вертикальной оси (2.3) оказываются существенно меньше, чем в уравнении движения для горизонтальной оси, и поэтому это уравнение в расчете не учитывалось, но для анализа сопряженного течения и вычисления баланса давлений его необходимо рассмотреть. Из-за малой величины вертикальной скорости в погранслое основной вклад вносят две компоненты, а именно:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2},$$

или, после интегрирования по  $z$ :

$$p = \frac{\partial v_z}{\partial z} + C(x) \equiv -\frac{\partial v_x}{\partial x} + C(x),$$

где  $C(x)$  - константа интегрирования, зависящая от длины  $x$ . Однако горизонтальная производная давления полностью соответствует автомодельному решению и хорошо определяется

уравнениями (2.67). Разность давлений между границей погранслоя и поверхностью равна:

$$\Delta p \approx \frac{-3f''\xi + 2f'(0)}{4x^{3/2}}. \quad (2.70)$$

Это выражение соответствует численным расчетам. Со стороны сопряженного течения разность давлений может быть оценена из простых соотношений Бернулли:

$$\Delta p \approx \frac{v_z^2}{2Pr} = \frac{f_{\max}^2}{2Pr x^{3/2}}. \quad (2.71)$$

Равенство разности давлений (2.70) и (2.71) приводит к соотношению между параметрами:

$$\frac{-3f''_{\max}\xi + 2f'(0)}{2} = \frac{f_{\max}^2}{Pr}. \quad (2.72)$$

Это соотношение также соответствует численным расчетам и замыкает систему. Максимальная скорость достигается на поверхности при  $\xi=0$  и уменьшается при удалении от источника нагрева:  $V_{X\max} = f'_{\max}/\sqrt{x} = f'(0)/\sqrt{x}$ . Поэтому для размерных переменных получается:

$$V_{X\max}^{dim} \sqrt{x^{dim}} = \frac{f'(0)\chi}{\sqrt{l}} = A_1 \left( \frac{\sigma_T q \chi}{\eta \lambda} \right)^{1/2}, \quad (2.73)$$

где  $A_1 = f'(0)$  для каждого из чисел Прандтля  $Pr = 0.2, 1, 10, 17.4$  совпадает с соответствующим значением  $f'(0)$  из Табл. 2.2. Граница погранслоя  $\xi_{\max}$  определяется условием равенства нулю горизонтальной скорости. Для  $\xi_{\max}^{dim}(q)$  в размерном виде можно получить:

$$\begin{aligned} \xi_{\max}^{dim}(q) &= A_2 \sqrt[4]{\frac{\eta \chi \lambda}{\sigma_T q}}, \\ z_{\max}^{dim} &= \xi_{\max}^{dim} x^{dim 3/4}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

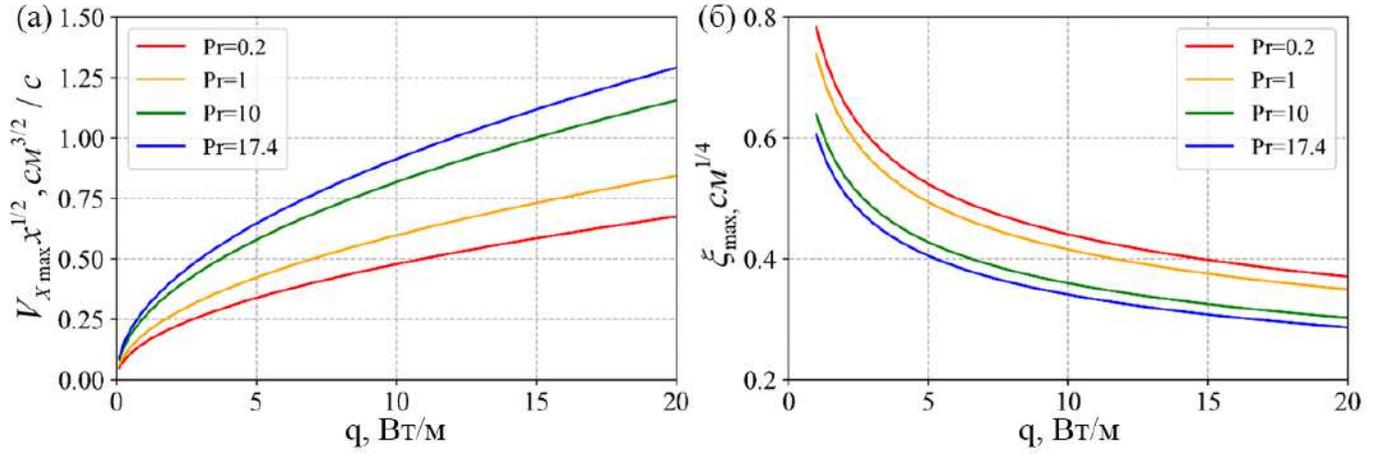
где  $x^{dim}$  – размерная величина в метрах,  $A_2$  для каждого из чисел Прандтля  $Pr = 0.2, 1, 10, 17.4$  совпадает с соответствующим значением  $\xi_{\max}$  из Табл. 2.2. Графики представлены на Рис. 2.6.

Полученное автомодельное решение является универсальным, но для сравнения с результатами для определенной горизонтальной длины  $L$  удобно ввести число Марангони для слоя конечной длины:

$$Ma_L = \frac{\sigma_T q_s L}{\eta \chi \lambda} = \frac{L}{l}, \quad (2.75)$$

где  $q_s$  – поток тепла на единицу площади. Именно такой параметр часто используется в литературе. В проведенных экспериментах величина  $Ma_L$  достигала значения  $8.5 \cdot 10^6$ . Из (2.73) следует, что:

$$v_{x\max}^{dim} = A_1 \frac{\chi}{\sqrt{l}} \frac{1}{\sqrt{L}},$$



**Рис. 2.6.** Зависимость а)  $v_{x \max}^{dim} x^{1/2}(q)$ ; б)  $\xi_{\max}^{dim}(q)$  для  $Pr=0.2, 1, 10, 17.4$ .

$$Re = \frac{v_{x \max}^{dim} L}{\nu} = A_1 \frac{\chi}{\nu \sqrt{l}} \frac{L}{\sqrt{L}} = \frac{A_1}{Pr} Ma^{1/2},$$

т.е.

$$Re = \frac{A_1}{Pr} Ma^{1/2}, \quad (2.76)$$

где  $A_1$  для каждого из чисел Прандтля  $Pr=0.2, 1, 10, 17.4$  совпадает с соответствующим значением  $f'(0)$  из Табл. (2.2).

Зависимость (2.76) полностью совпадает с оценками параметров подобия [93] для ламинарного потока, но коэффициенты пропорциональности в цитируемой работе не рассматривались. Для турбулизованного течения при нагреве боковых стенок [93, 94] получаются несколько иные зависимости, но, как отмечалось выше, в задачах с нагревом сверху создание турбулизованного потока затруднено [95].

В работе [99] была предпринята попытка пересчета численных значений числа Рейнольдса от числа Марангони путем простой аппроксимации, без учета параметров подобия. Были получены степенные зависимости, которые не могут быть сопоставлены с какими-либо оценками слагаемых, но может быть проведено простое численное сравнение.

Число Рейнольдса в [97] - [99] определяется через длину слоя  $L$  и среднеквадратичную скорость всего потока, то есть

$$Re_B = \frac{\sqrt{\bar{v}^2} L \rho}{\eta}, \quad (2.77)$$

где

$$\bar{v}^2 = \frac{\int_0^L \int_0^{z_{max}} v_{dim}^2 dz dx}{\int_0^L \int_0^{z_{max}} dx_{dim} dz_{dim}} = \frac{\int_0^{\frac{L}{l}} \int_0^{\xi_{max}} \frac{f'^2 \chi^2 l^2 dx d\xi}{l^2 x^{\frac{1}{4}}}}{\int_0^{\frac{L}{l}} \int_0^{\xi_{max}} l^2 x^{\frac{3}{4}} dx d\xi} = \frac{\frac{4\chi^2 L^{3/4}}{3l^{3/4}} \int_0^{\xi_{max}} f'^2 d\xi}{\frac{4}{7} \left(\frac{L}{l}\right)^{7/4} l^2 \xi_{max}} = \frac{A_3 \chi^2}{lL \xi_{max}},$$

то есть:

$$\bar{v}^2 = \frac{A_3 \chi^2}{lL \xi_{max}}, \quad (2.78)$$

где  $A_3 = \frac{7}{3} \int_0^{\xi_{max}} f'^2 d\xi$ . Из этого следует соотношение:

$$Re_B = \frac{\sqrt{\bar{v}^2} L \rho}{\eta} = \sqrt{\frac{A_3}{\xi_{max}}} \frac{\rho \chi}{\eta} \sqrt{\frac{L}{l}} = \sqrt{\frac{A_3}{\xi_{max}}} \frac{Ma_L^{1/2}}{Pr} = A_4 \frac{Ma_L^{1/2}}{Pr}. \quad (2.79)$$

В Табл. (2.3) приведены значения коэффициентов  $A_3$ ,  $A_4$ , рассчитанных для разных чисел Прандтля  $Pr = 0.1, 0.2, 1, 10$  и  $17.4$  с учетом автомодельности рассматриваемого течения.

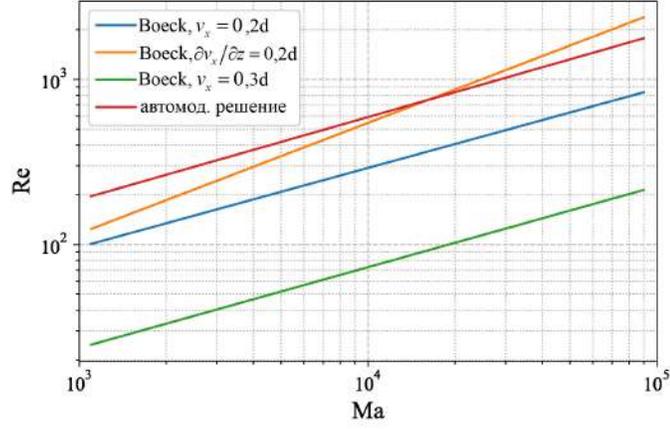
**Таблица 2.3.** Параметры  $A_3$ ,  $A_4$ , рассчитанные для разных чисел Прандтля  $Pr$ .

$Pr$	0.1	0.2	1	10	17.4
$A_3$	0.3215	0.6112	2.3812	12.2661	19.0905
$A_4$	0.5915	0.7052	0.9586	1.3150	1.4683

Несмотря на разницу в постановках задачи, совпадение с результатами [98, 99] не только качественное, но и количественное. Однако в указанных работах этот результат получен аппроксимацией результатов численных двумерных и трехмерных расчетов, а здесь он получается из автомодельного решения. В работе [99] была получена зависимость числа Рейнольдса от Марангони для разных граничных условий при числе  $Pr=0.1$ :

- $Re = 3.5 Ma^{0.48}$  (условие прилипания, 2D)
- $Re = 1.14 Ma^{0.67}$  (условие проскальзывания, 2D)
- $Re = 0.80 Ma^{0.49}$  (условие прилипания, 3D)

Сравнение степенных зависимостей не имеет какого-либо физического смысла, целесообразно оценивать итоговые зависимости, полученные из расчетов [99]. Эти графики и автомодельное решение представлены на Рис. 2.7.



**Рис. 2.7.** Графики зависимостей числа  $Re$  от числа  $Ma$  для  $Pr=0.1$ , полученных в работе [99] для условий прилипания ( $v_x = 0$ ), проскальзывания ( $\partial v_x / \partial z = 0$ ) и из расчета автомодельного решения в настоящей работе.

## 2.5.2 Скорости распространения тепла и гидродинамического течения при наличии термокапиллярной конвекции и в ее отсутствие

Как и в случае горизонтальной конвекции при отсутствии термокапиллярного механизма, скорость расплывания определяется величиной  $\hat{v} \sim 1$ . Для точного определения необходимо рассмотреть интегральные характеристики задачи. Интегрирование первого уравнения (2.62) по  $\xi$  приводит к соотношению:

$$\int \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \frac{\partial g}{\partial \xi} d\xi - \int \frac{\partial g}{\partial \hat{v}} \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{2}{3} \hat{v}^{3/2} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{v}} = 0, \quad (2.80)$$

где  $\theta = \int_0^\infty g d\xi$ . Интегрирование второго уравнения (2.62) при больших числах  $Pr$  приводит к условию:  $\left. \frac{\partial^2 f(\xi, \hat{v})}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0} = 0$ . Если продифференцировать поток по  $\hat{v}$ :

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{v}} = \int \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{v} \partial \xi} g + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \hat{v}} \right) d\xi, \quad (2.81)$$

из (2.80) получается:

$$\int \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \hat{v}} d\xi = \frac{\partial q}{\partial \hat{v}} - \int \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{v} \partial \xi} g d\xi = \frac{\partial q}{\partial \hat{v}} + \int \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \frac{\partial g}{\partial \xi} d\xi. \quad (2.82)$$

И в итоге (2.80) сведется к уравнению:

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{v}} = \frac{2}{3} \theta_2 \hat{v}^{3/2}. \quad (2.83)$$

Интегрирование потока приводит к соотношению:

$$q = \frac{1}{2} - \frac{4}{15}\theta\hat{v}^{5/2}. \quad (2.84)$$

В точке, где величина потока обращается в ноль

$$\hat{v} = \left(\frac{15}{8\theta}\right)^{2/5}. \quad (2.85)$$

Выражения (2.46) и (2.85) позволяют более точно оценить величину  $\hat{v}$ , в которой поток обращается в ноль, в случае горизонтальной конвекции при наличии поверхностной пленки и в ее отсутствие, соответственно. Эти величины можно получить с помощью численных расчетов для  $C_{max}$  и  $\theta$ . Они оказываются порядка единицы, поэтому можно сделать приближенные оценки скоростей расплывания в случае двух разных механизмов горизонтальной конвекции при условии того, что она определяется приближенным условием  $\hat{v} \sim 1$ .

В случае горизонтальной конвекции с поверхностной пленкой характерная длина определяется выражением (2.7)  $l_1 = \sqrt[3]{\eta\chi\lambda/\rho g\beta q}$ , при наличии термокапиллярного течения – выражением (2.60):  $l_2 = \eta\chi\lambda/\sigma_T q$ . Пусть  $x_1$  – безразмерное расстояние, которое пройдет тепловая волна за время  $t$  в случае течения при наличии поверхностной пленки,  $x_2$  – при ее отсутствии. Тогда в соответствующих размерных координатах  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$ ,  $\tilde{t}$ , соответственно, в первом и втором случае:

$$\frac{x_1}{t} = \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{t}} \frac{l_1}{\chi} = 1, \quad \frac{x_2}{t^{2/3}} = \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{t}^{2/3}} \frac{l_2^{1/3}}{\chi^{2/3}} = 1.$$

При одном и том же времени  $\tilde{t}$  получается соотношение:

$$\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} = \tilde{t}^{1/3} \frac{l_2^{1/3}}{l_1} \chi^{1/3} = \frac{\tilde{t}^{1/3}}{t_0^{1/3}},$$

где

$$t_0 = \frac{l_1^3}{\chi l_2} = \frac{\eta\chi\lambda}{\rho g\beta q} \frac{\sigma_T q}{\chi\eta\chi\lambda} = \frac{\sigma_T}{\rho g\beta\chi}.$$

Полученная величина для воды при температуре 20°C:  $t_0 \sim 740$  с, для этанола:  $t_0 \sim 240$  с. Величина  $t_0$  описывает время, по истечении которого тепловые волны в погранслое для двух разных механизмов конвекции пройдут одинаковое расстояние. Из оценок следует вывод, что вначале термокапиллярная конвекция Марангони более эффективна с точки зрения распространения тепла, чем горизонтальная конвекция за счет горизонтального градиента давления.

### 2.5.3 Числа Нуссельта

Полученные автомодельные решения для конвекции при наличии термокапиллярных сил позволяют рассчитать числа Нуссельта для оценки эффективности теплоотвода. Локальное число Нуссельта на безразмерном расстоянии  $r$  от источника тепла определяется выражением (2.47), приведенным в разделе 2.4.3. При этом в (2.47) нужно подставить величину угла в полярных координатах  $\varphi_{max}$ , которая соответствует границе погранслоя:

$$\xi_{max} = \frac{z_{max}}{x^{3/4}} = r^{1/4} \frac{\sin \varphi_{max}}{(\cos \varphi_{max})^{3/4}}. \quad (2.86)$$

При больших  $r$  угол мал,

$$\varphi_{max} = \frac{\xi_{max}}{r^{1/4}} \quad (2.87)$$

и  $x \approx r$ . Подставляя в выражение (2.47) решение для температуры в автомодельных координатах (2.61), можно получить:

$$Nu_{loc}(r) = \frac{\pi\sqrt{r}}{4g(0)\xi_{max}}. \quad (2.88)$$

На длине  $X$  пограничного слоя:

$$Nu_{loc} = \frac{\pi\sqrt{X/l}}{4g(0)\xi_{max}} = \frac{\pi Ma_X^{1/2}}{4g(0)\xi_{max}} = A_5 Ma_X^{1/2}. \quad (2.89)$$

где константа  $A_5$  равна 0.7122, 0.6391, 0.7577, 0.5985, 0.5350 для чисел Прандтля  $Pr=0.1, 0.2, 1, 10, 17.4$ , соответственно.

Полное число Нуссельта определяется выражением (2.56). Подставляя автомодельные зависимости (2.73), (2.74) в (2.56), можно получить:

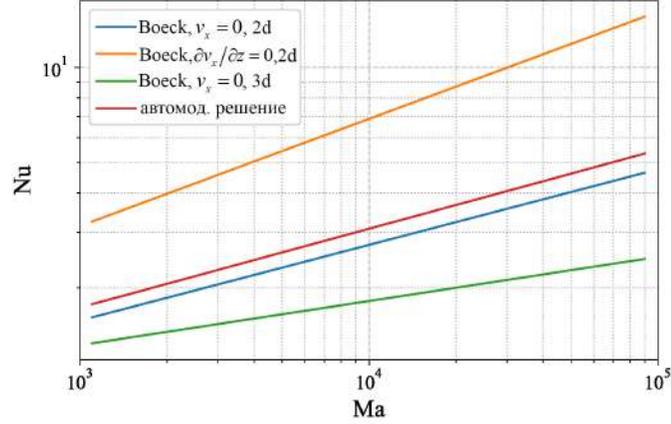
$$Nu_{tot} \approx f'_{mean} \xi_{max} \sqrt[4]{\frac{L}{l}} = f'_{mean} \xi_{max} Ma_L^{1/4} = A_6 Ma_L^{1/4}, \quad (2.90)$$

где  $f'_{mean}$  – средняя величина производной автомодельной функции  $f$  в погранслое. Константа  $A_6$  равняется 0.3079, 0.4905, 1.4079, 5.2817 и 7.3609 для  $Pr=0.1, 0.2, 1, 10$  и 17.4, соответственно. Такая же зависимость была получена в работе [93]. По асимптотике оценка (2.90) совпадает с [99] ( $Nu \sim Ma^{1/4}$ ), но в этой работе рассматриваются только малые числа Прандтля. В работе [99] была получена зависимость числа Нуссельта от числа Марангони для разных граничных условий при  $Pr=0.1$ :

- $Nu = 0.3Ma^{0.24}$  (условие прилипания, 2D)

- $Nu = 0.3Ma^{0.34}$  (условие проскальзывания, 2D)
- $Nu = 0.5Ma^{0.14}$  (условие прилипания, 3D)

Эти графики и автомодельное решение представлены на Рис. 2.8.



**Рис. 2.8.** Графики зависимостей числа  $Nu$  от числа  $Ma$  для  $Pr=0.1$ , полученных в работе [99] для условий прилипания ( $v_x = 0$ ), проскальзывания ( $\partial v_x / \partial z = 0$ ) и из расчета автомодельного решения в настоящей работе.

## 2.5.4 Сравнение эффективности теплоотвода для разных механизмов конвекции

Оценка чисел Нуссельта позволяет сравнить эффективность конвекции для двух задач – при расположении источника тепла в объеме жидкости и вблизи поверхности. Расчеты глобальных чисел Нуссельта для горизонтальной конвекции были выполнены в разделах 2.4.3 и 2.5.3. Было показано, что выражение (2.57), полученное из автомодельных решений для горизонтальной конвекции за счет перераспределения давления, совпадает с оценками из работы [5]:

$$Nu_{tot} = A_2 Ra_L^{1/6}, \quad (2.91)$$

где  $A_2 \sim 0.82$ .

Автомодельное решение для линейного источника тепла в неограниченной жидкости было получено в работе Гибхарта [42], а обзор зависимостей чисел Нуссельта от чисел Рэлея и Прандтля для цилиндрических источников тепла конечного радиуса выполнен в работе [2].

Можно получить оценку чисел Нуссельта исходя из автомодельного решения Гебхарта. В рассматриваемых в данной работе обозначениях автомодельная переменная  $\xi_G = x/z^{2/5}$ , а вертикальная скорость равна:

$$v_{zG} = -z^{1/5} f'_G(\xi_G). \quad (2.92)$$

Тогда:

$$Nu_G = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_{zG} dx}{\chi} = \frac{2}{\chi} \int_0^{\infty} f'_G(\xi_G) L^{1/5} L^{2/5} d\xi_G = \frac{2}{\chi} (f_G(\infty) - f_G(0)) L^{3/5} = A_9 L^{3/5}. \quad (2.93)$$

То есть

$$Nu_{Gtot} \sim L^{3/5} \sim Ra^{1/5}. \quad (2.94)$$

Такая же зависимость получалась и для горизонтальных цилиндров конечного радиуса [2].

Сравнение (2.94) и (2.91) с (2.90) позволяет выявить общую особенность решения – вблизи источника основную роль играет конвекция Марангони, а вдали теплоперенос определяется конвекцией Рэлея. Действительно, найдем расстояние от источника, на котором числа Нуссельта сравниваются. Рассматривая (2.90) и (2.91), получим, что числа Нуссельта для двух механизмов горизонтальной конвекции сравниваются при:

$$L = \left( \frac{A_6}{A_2} \right)^4 \sigma_T \left( \frac{q}{\eta \chi \lambda \rho^2 g^2 \beta^2} \right)^{1/3} \approx 16 \text{ см}. \quad (2.95)$$

Из выражений для чисел Нуссельта для вертикальной конвекции (2.93) (при  $Pr=0.7$ ) и для горизонтальной при наличии термокапиллярных сил (2.90) для  $Pr=1$  можно получить:

$$\begin{aligned} A_9 Ra^{1/5} &= A_6 Ma^{1/4}, \\ L &= \left( \frac{A_6}{A_9} \right)^{20/7} \left( \frac{\sigma_T^5 q}{\eta \chi \lambda \rho^4 g^4 \beta^4} \right)^{1/7} \approx 6 \text{ см}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Сравнение (2.95) и (2.96) позволяет сравнить эффективность вертикальной и горизонтальной конвекции Рэлея с точки зрения тепло- и массопереноса. Очевидно, что горизонтальная конвекция за счет градиента давления дает намного менее эффективное охлаждение по сравнению со случаем источника тепла, расположенного в объеме жидкости. Но в жидкости без поверхностной пленки вблизи линейного нагревателя остается область, где гидродинамический перенос тепла за счет поверхностных сил намного эффективнее, чем за счет градиента давления. Таким образом, для любого числа Прандтля можно определить длину, до которой преобладает конвекция Марангони.

## 2.6 Экспериментальное исследование механизмов горизонтальной конвекции в жидкостях с различной структурой поверхности

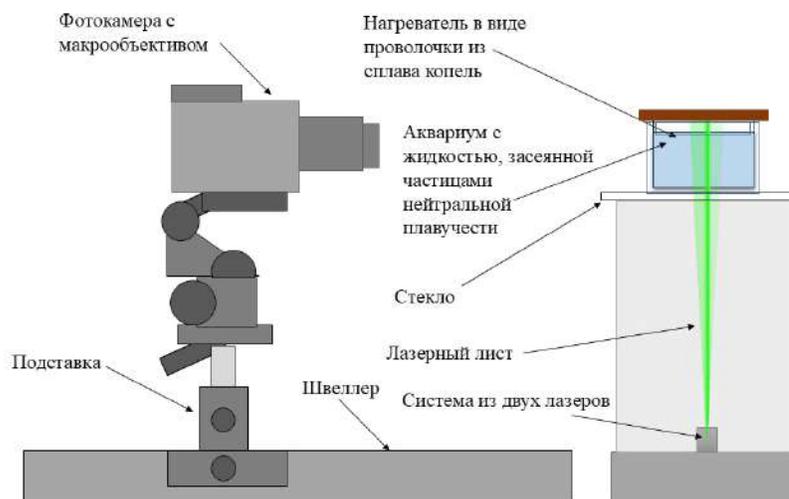
В работе используются три экспериментальные методики, позволяющие получить поле скоростей, температур на поверхности и рельеф поверхности (давление вблизи поверхности).

### 2.6.1 Метод цифровой трассерной визуализации для измерения поля скорости

Для получения поля скорости конвективных течений в объеме жидкости используется метод цифровой трассерной визуализации (PIV), достаточно просто реализуемый для задач конвекции (см., например, [100]). Жидкость засеивается частицами нейтральной плавучести и подсвечивается лазерным листом, далее делаются снимки в плоскости лазерного листа и по смещению изображений частиц в последовательных кадрах находится поле скорости. Для нахождения поля смещений частиц и, следовательно, поля скорости используется кросс-корреляционный метод. Кросс-корреляционный алгоритм позволяет рассчитать наиболее вероятные смещения частиц. Далее по полученным смещениям можно получить поля вертикальной и горизонтальной составляющей скорости. Метод PIV в настоящее время является основным методом исследования гидродинамических течений. Однако он обладает рядом недостатков: отличия в скорости частиц засева и скорости самого течения, проблема трехмерности течения, трудности, связанные с разрешающей способностью видеосъемки. При увеличении скорости течения требуется увеличить не только скорость видеосъемки, но и мощность подсвечивающих лазеров. Даже в рассматриваемой задаче в этаноле со скоростями порядка 10 мм/с некоторые области течения оказываются неразрешимыми для стандартной скорости съемки (60 кадров в секунду), однако в данном исследовании в большинстве случаев таких проблем не возникает. Кросс-корреляционная обработка основывается на статистическом методе, то есть присутствует и погрешность обработки результатов. Трехмерность течения тоже может приводить к ошибке при обработке снимков. В работе [12] суммарная погрешность оценивается в 5%, что составляет 0.03 мм/с и 0.25 мм/с для скорости в воде и этаноле, соответственно.

Схема экспериментальной установки, использованной в задаче, представлена на Рис. 2.9.

На поверхность жидкости (вода или этанол) в прямоугольном стеклянном сосуде размером  $12.3 \times 13.2 \times 6.5$  см<sup>3</sup> помещается источник нагрева – тонкая проволока из сплава копель длиной



**Рис. 2.9.** Схема экспериментальной установки PIV.

11.3 см и диаметром 0.02 см. Жидкость засеивается частицами нейтральной плавучести, или трассерами – посеребренными стеклянными полыми сферами диаметром 10-20 мкм и плотностью 1200 кг/м<sup>3</sup>. С помощью двух цилиндрических линз два лазерных луча (длина волны каждого лазера – 532 нм, мощность – 130 мВт) разворачиваются в два листа в одной плоскости, лазерный свет проникает в жидкость снизу. Двойной лазерный лист используется для создания более равномерного освещения.

Мощность нагрева составляет 4 Вт/м в этаноле и 31 Вт/м в воде. Мощности нагрева были подобраны так, чтобы можно было не учитывать турбулентные явления. Нагрев проволоочки приводит к формированию приповерхностного течения за счет неравномерного нагрева поверхности и перераспределения давления. Формируется пограничный слой с максимальной скоростью на поверхности (если имеет место термокапиллярная конвекция, этанол) или на некоторой глубине (в присутствии поверхностной пленки, вода).

Фотоаппаратом с макрообъективом производится съёмка частиц в процессе их движения в плоскости лазерного листа во время нагрева поверхности. В воде съёмка происходит в фоторежиме с частотой 1 кадр в секунду с разрешением 5184×3456 фотокамерой Canon EOS 700D с объективом Canon EF 100 мм f/2.8, в этаноле – в видеорежиме с частотой 25 кадров в секунду и разрешением 1920×1080. Параметры съёмки: 1/30 с, f/11, ISO 1600. Изображения обрабатываются с помощью многопроходного кросс-корреляционного алгоритма. Для воды обрабатывается вся последовательность изображений, в этаноле используются изображения с интервалом от 2/25 с до 8/25 с в зависимости от исследуемых скоростей течения. Размер области опроса

составляет  $32 \times 32$  в воде и  $16 \times 16$  в этаноле при первом и втором проходе, соответственно. На третьем проходе для улучшения пространственного разрешения используется 50% наложение областей опроса в вертикальном направлении.

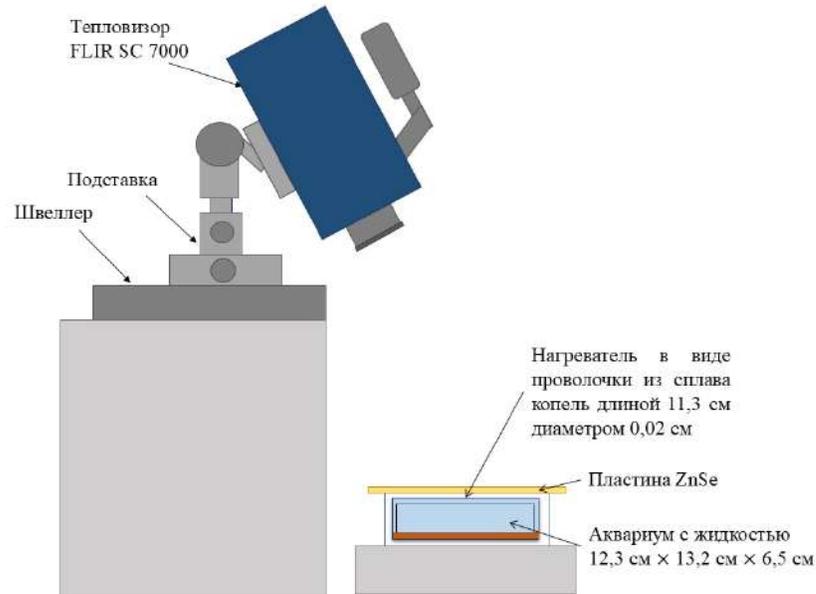
## **2.6.2 Инфракрасная термография для исследования поля температур на поверхности жидкости**

Для измерения поля температуры непосредственно на поверхности жидкости используют метод ИК-термографии. Тепловизор фиксирует интегральное электромагнитное излучение в некотором диапазоне длин волн. Это излучение состоит из трех компонент: излучение самого объекта, излучение среды между объектом и объективом, а также отраженное от объекта излучение окружающих предметов. Температура объекта рассчитывается исходя из параметров для всех трех типов излучения.

Эксперимент проводился с использованием тепловизора FLIR SC7000, регистрирующего излучение в диапазоне 3.7–4.8 мкм. Разрешение изображений составляет  $640 \times 512$ . Случайная погрешность определения температуры, заявленная производителем тепловизора, составляет 0.025 К. Коэффициент излучения поверхности воды и этанола считается равным 0.96. Чтобы исключить отражение камеры в жидкости, тепловизор располагается под углом  $5^\circ$ – $10^\circ$  к вертикали. Но поправка на угловую зависимость не учитывается, так как излучательная способность поверхности жидкости остается почти постоянной для углов до  $20^\circ$ .

Схема установки для исследования нагрева жидкости линейным источником представлена на Рис. 2.10.

Как и в случае эксперимента PIV, исследуемая жидкость в прямоугольном стеклянном аквариуме размерами  $12.3 \times 13.2 \times 6.5$  см<sup>3</sup> нагревается проволочкой из сплава копель длиной 11.3 см и диаметром 0.02 см, натянутой под поверхностью жидкости. Сосуд накрывается пластиной из селенида цинка (ZnSe) толщиной 6 мм, чтобы исключить появление вихрей, вызванных испарением с поверхности жидкости. Коэффициент пропускания пластины составляет приблизительно 0.7 для длин волн 1–15 мкм.

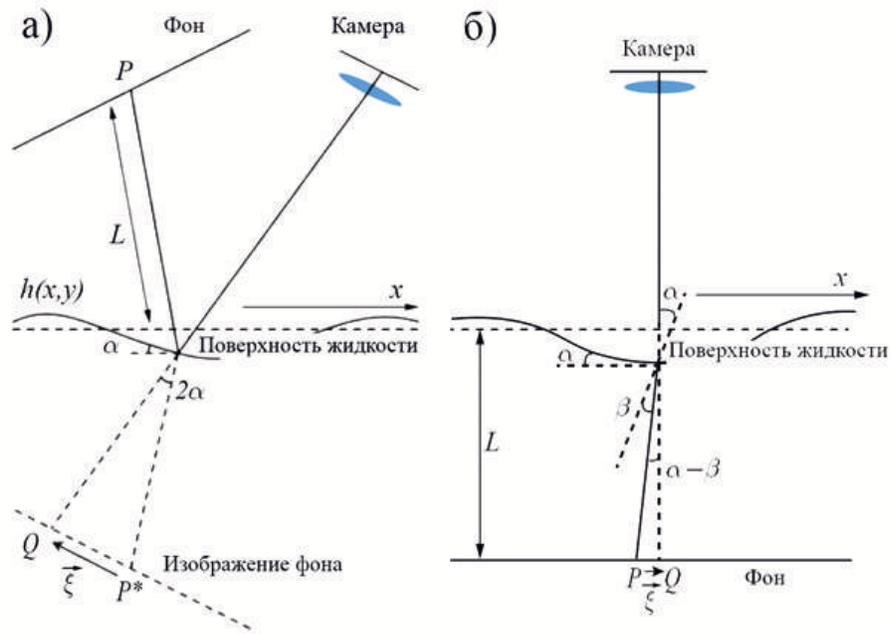


**Рис. 2.10.** Схема экспериментальной установки для метода термографии поверхности при нагреве линейным источником тепла.

### 2.6.3 Измерение рельефа поверхности жидкости с помощью методики moon-glade BOS

Предложенный в работе [101] новый метод позволяет достаточно просто определить рельеф поверхности, и, соответственно, поле давлений вблизи поверхности, которое является определяющим фактором формирования течения в рассматриваемой задаче в случае наличия пленки на поверхности.

Фон, представляющий из себя совокупность черных точек, напечатанных на прозрачной пленке, и источник света – LED-панель – устанавливаются над сосудом с исследуемой жидкостью под некоторым углом к горизонту так, что камера снимает отражение фона в поверхности жидкости. Как и в FS-SS (Free Surface-Synthetic Schlieren) схеме [102], для невозмущенной поверхности делается опорный снимок, который затем сравнивается с изображениями, полученными при наличии возмущений. Деформация поверхности приводит к отклонению преломленных лучей, то есть к смещению точек фона. Световые лучи, отраженные от возмущенной поверхности, отклоняются от своего первоначального пути на угол  $\alpha$ , равный двойному углу наклона поверхности. Решая уравнение Пуассона для горизонтального  $\xi_x$  и вертикального  $\xi_z$  смещений [101], можно получить рельеф поверхности – функцию  $h(x, z)$ . На Рис. 2.11 представлены схемы методов FS-SS и moon-glade BOS.



**Рис. 2.11.** Схема экспериментальной установки для метода определения рельефа поверхности а) moon-glade BOS, б) FS-SS.

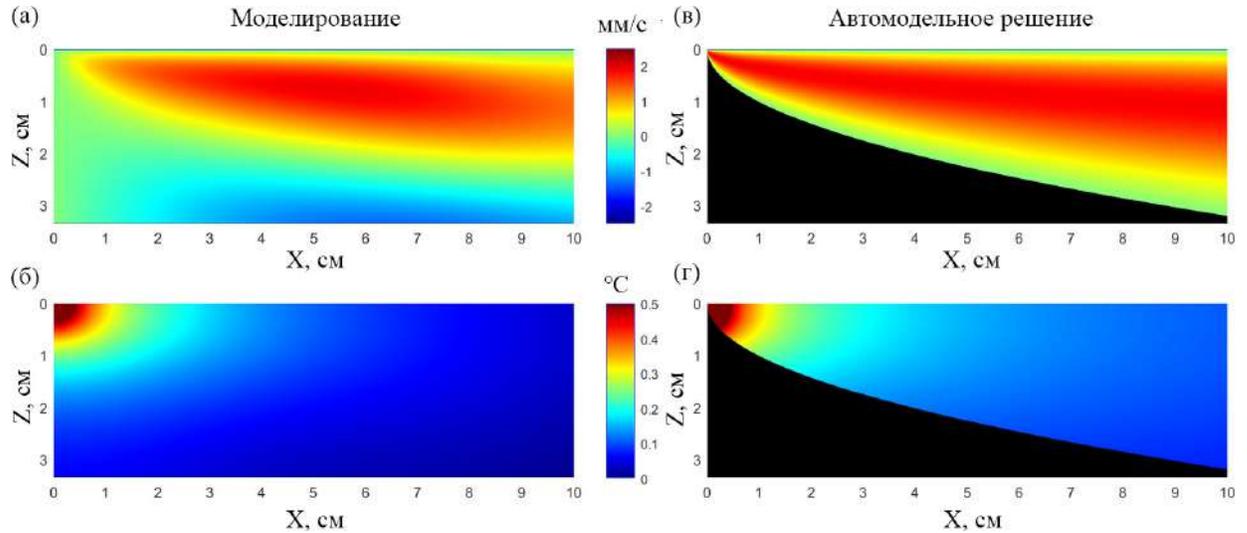
Так как в случае метода, основанного на преломлении, смещения точек фона описываются выражением:  $\xi_x = -L(n - 1)/n \cdot \partial h/\partial x$ , где  $n$  – показатель преломления жидкости, а в методе, использующем отражение:  $\xi_x = 2L \cdot \partial h/\partial x$ , то moon-glade BOS оказывается более чувствительным методом (в 8 раз чувствительнее для воды). В отличие от метода FS-SS, метод moon-glade BOS работает также для непрозрачных жидкостей. В данной задаче (разрешение в плоскости фона – 50 мкм/пикс, погрешность определения смещения кросс-корреляционным методом – 0.2 пикс) метод позволяет регистрировать углы порядка 5 мкрад при расстоянии от фона до жидкости, равном 1 м, что позволяет измерять вертикальные смещения поверхности от 1 мкм.

## 2.7 Численное моделирование и сравнительный анализ

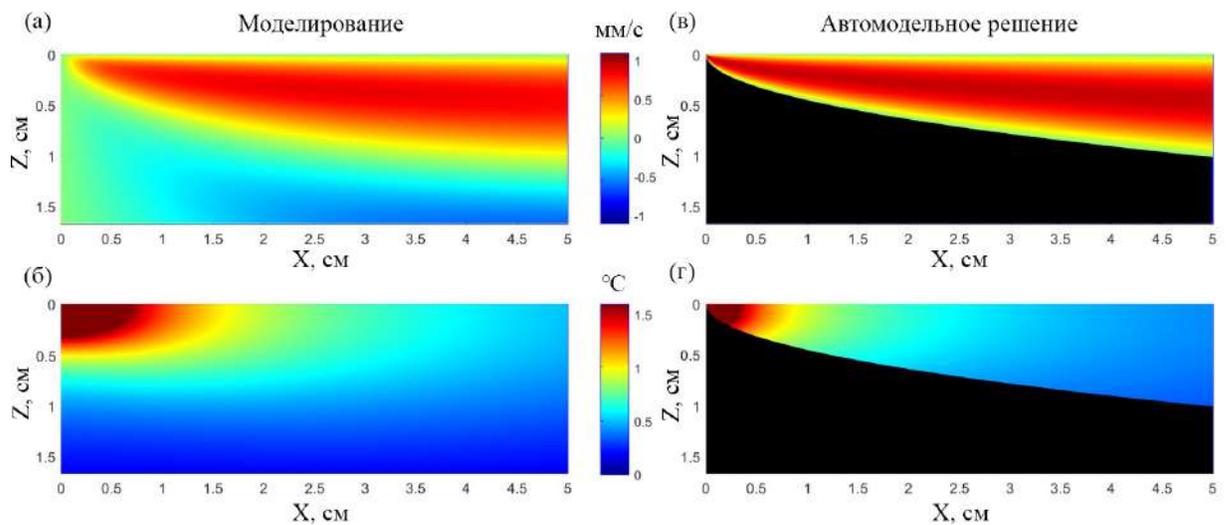
### 2.7.1 Поля скорости, температуры и профиль поверхности для случая горизонтальной конвекции в жидкости при наличии пленки

На Рис. 2.12-2.15 представлено сравнение двумерных полей горизонтальной скорости и температуры, полученных из автомодельного решения и численного моделирования для чисел Прандтля: 0.1, 0.7, 7.16, 70, для случая горизонтальной конвекции в жидкости при наличии пленки. Для

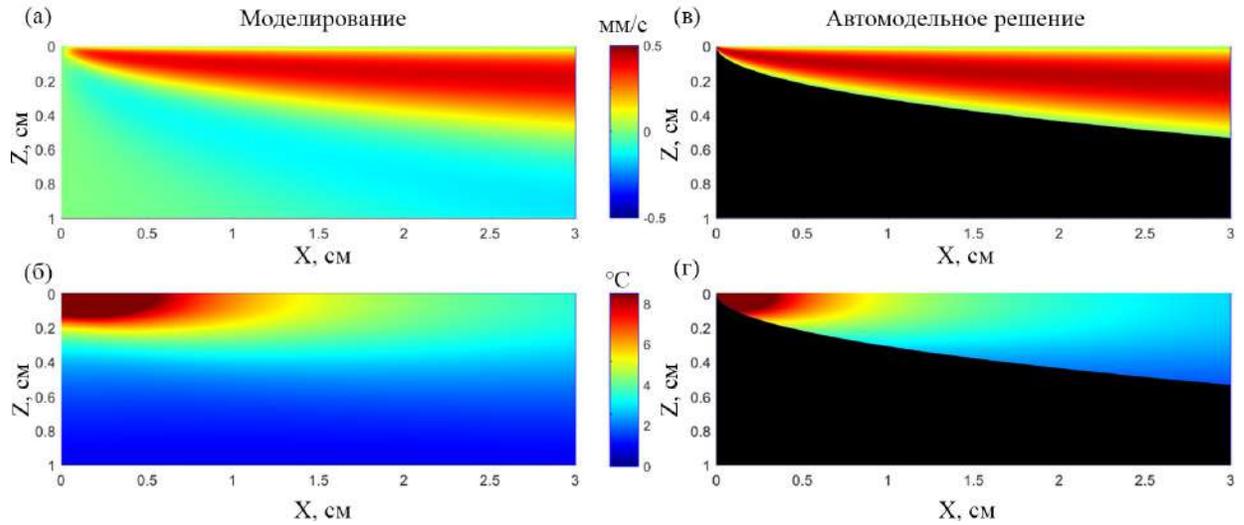
изменения числа Прандтля варьировалась теплопроводность, все остальные свойства жидкости оставались неизменными. Чтобы достичь квазистационарного состояния в области  $|X| \leq 12$  см, численные расчеты проводились до момента времени  $t=4000$  с во всех случаях. Следует отметить, что автомодельное решение справедливо в дальней зоне и не описывает правильно течение вблизи источника. Кроме того, оно не учитывает возвратное течение, поэтому на графиках с полями из автомодельного решения область вне пограничного слоя показана черным цветом. В численном решении возвратное течение возникает в силу уравнения непрерывности.



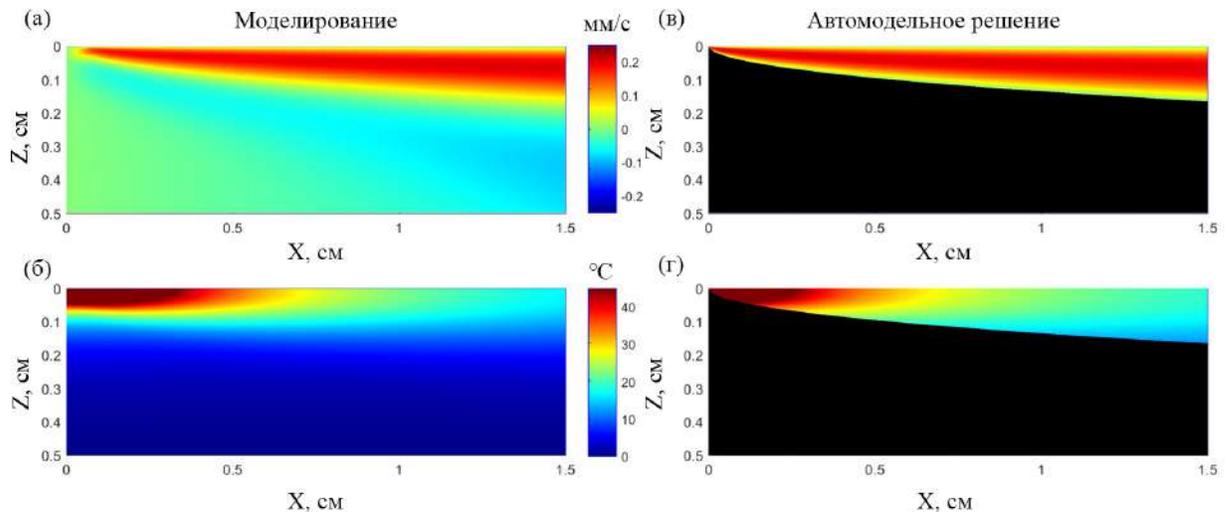
**Рис. 2.12.** Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автомодельного решения (в), (г) для  $Pr=0.1$ .



**Рис. 2.13.** Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автомодельного решения (в), (г) для  $Pr=0.7$ .



**Рис. 2.14.** Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автомодельного решения (в), (г) для  $Pr=7.16$ .



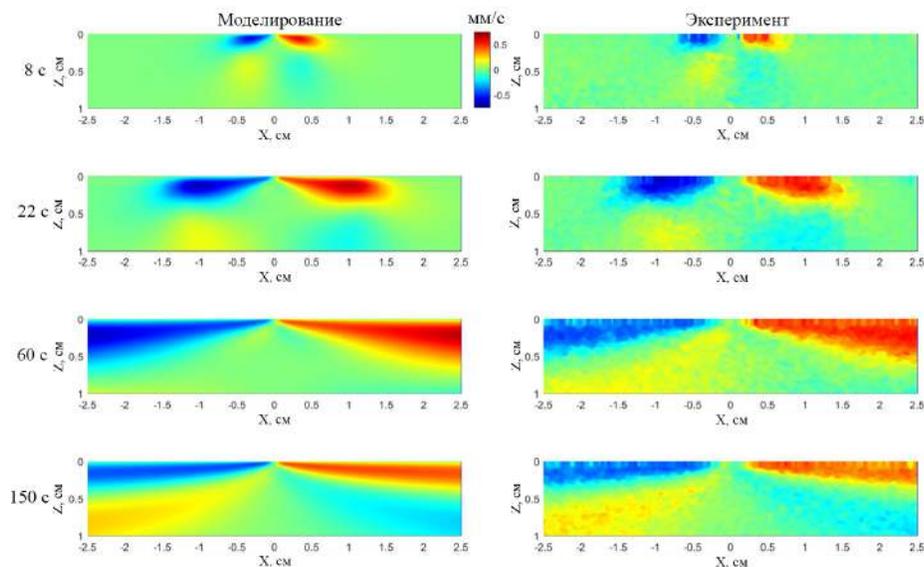
**Рис. 2.15.** Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автомодельного решения (в), (г) для  $Pr=70$ .

При малых числах Прандтля толщина погранслоя больше, вследствие чего максимальное значение горизонтальной скорости возрастает. Из полученных автомодельных выражений для максимальной скорости (2.33) и толщины (2.34) погранслоя можно оценить зависимость этих характеристик от числа Прандтля. Так как характерная длина  $l \sim \lambda^{2/3} \sim Pr^{-2/3}$ , скорость  $\chi/l \sim \lambda^{1/3} \sim Pr^{-1/3}$ , а величины  $f'_{\max}$  и  $\xi_{\max}$  изменяются приблизительно на 7% и 27% соответственно в диапазоне чисел Прандтля от 0.1 до 70, можно сделать вывод, что максимальная

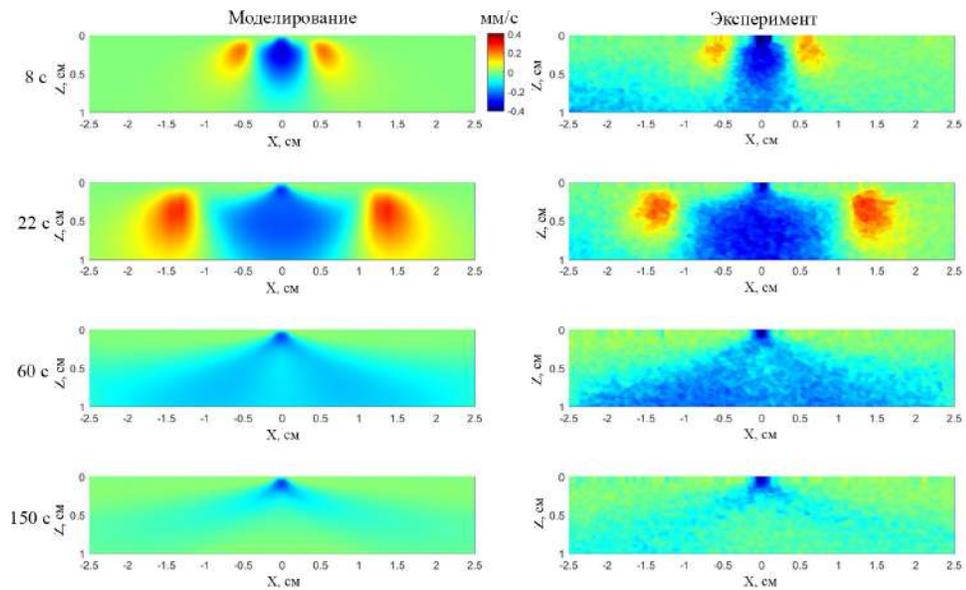
скорость погранслоя  $\sim Pr^{-1/3}$ , а его толщина  $\sim Pr^{-2/3}$ .

Сравнение с численным моделированием показывает, что автомодельность сохраняется только в области погранслоя, где справедливы все предположения, исходя из которых были получены автомодельные решения. Тем не менее, абсолютные значения максимальной скорости совпадают и можно применять автомодельные решения, как более простой, универсальный и менее трудоемкий с точки зрения вычисления способ в широком диапазоне чисел Прандтля.

На Рис. 2.16, 2.17 представлено сравнение мгновенных двумерных полей горизонтальной и вертикальной скорости, полученных численно и экспериментально с помощью метода PIV для различных моментов времени в дистиллированной воде при  $Pr=7.16$ . В численном моделировании в данном случае на поверхности ставилось граничное условие прилипания. Показано качественное и количественное совпадение данных при сравнении усредненных профилей скорости (Рис. 2.18). Несовпадение профилей скорости вблизи  $z=0$  связано с недостатком разрешения метода PIV в приповерхностном слое из-за образования мениска.

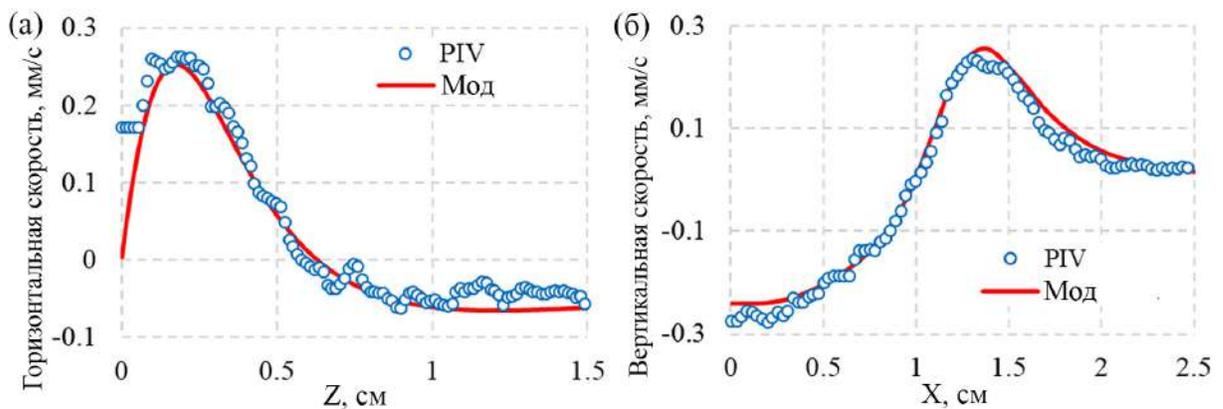


**Рис. 2.16.** Двумерные поля горизонтальной скорости, полученные из численного моделирования (слева) и экспериментально (справа) в разные моменты времени после начала нагрева.



**Рис. 2.17.** Двумерные поля вертикальной скорости, полученные численного моделирования (слева) и экспериментально (справа) в разные моменты времени после начала нагрева.

На Рис. 2.18 показано сравнение вертикальных профилей горизонтальной скорости (а) и горизонтальных профилей вертикальной скорости (б) в дистиллированной воде спустя 20 с после начала нагрева (мощность нагрева  $q=31$  Вт/м), полученных из численного моделирования и методом PIV.

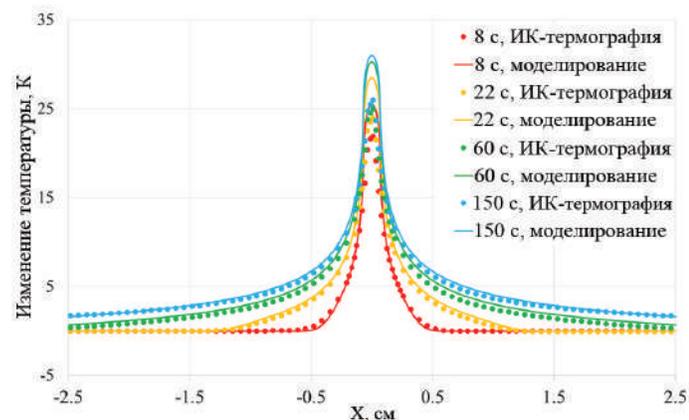


**Рис. 2.18.** Сравнение а) вертикальных профилей горизонтальной скорости, усредненных вдоль  $1.3 \text{ см} < x < 1.7 \text{ см}$ , б) горизонтальных профилей вертикальной скорости, усредненных вдоль  $0.4 \text{ см} < z < 0.6 \text{ см}$ , полученных экспериментально и из численного моделирования в воде спустя 22 сек после начала нагрева.

В работе [21] проводились различные численные расчеты для исследования влияния боковых

стенок на величину максимальной горизонтальной скорости в погранслое. Было показано, что наличие боковых стенок слабо влияет на течение на расстоянии более 1 см от боковых стенок. Поэтому соотношения, выведенные из автомодельного решения в бесконечной области, справедливы и для течения в замкнутом объеме жидкости, как это реализовано в эксперименте и численных расчетах.

На Рис. 2.19 представлены горизонтальные профили температуры на поверхности, полученные численно и экспериментально с помощью метода ИК-термографии. В моделировании источник нагрева задавался как постоянный тепловой поток на некоторой эффективной длине. Максимальное значение температуры, полученное из моделирования, зависит от указанной длины, которая подбиралась исходя из сравнения с экспериментальными данными по ИК-термографии. В случае дистиллированной воды она равнялась 1.4 мм. Совпадение численных и экспериментальных профилей температуры подтверждает справедливость граничного условия прилипания и указывает на то, что перенос тепла при наличии пленки на поверхности правильно описывается данным граничным условием.

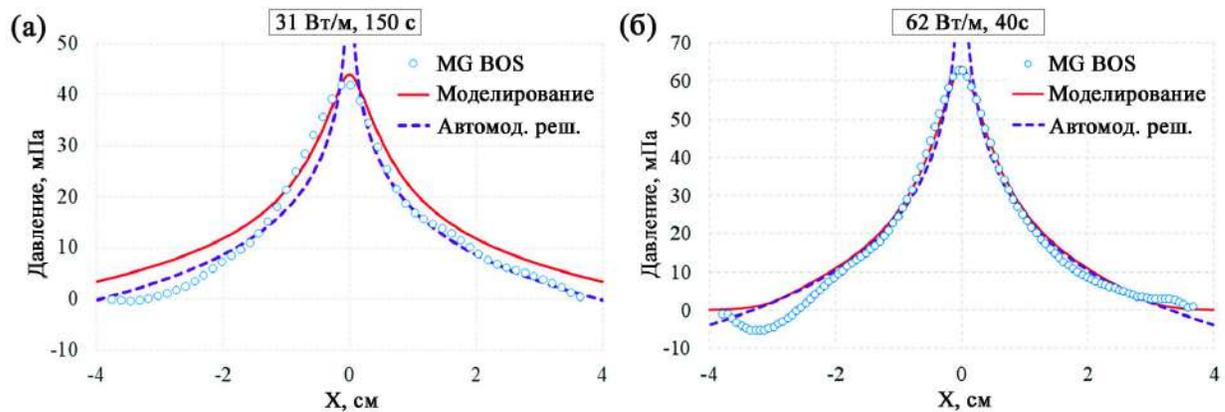


**Рис. 2.19.** Горизонтальные профили температуры, полученные экспериментально и из численного моделирования спустя 8, 22, 60, 150 с после начала нагрева.

Следует отметить, что основным отличием горизонтальной конвекции является перераспределение давления за счет поля температур у поверхности. Горизонтальный градиент давления у поверхности может быть получен из экспериментальных данных по рельефу поверхности и сопоставлен с численным расчетом и автомодельным решением (в дальней зоне).

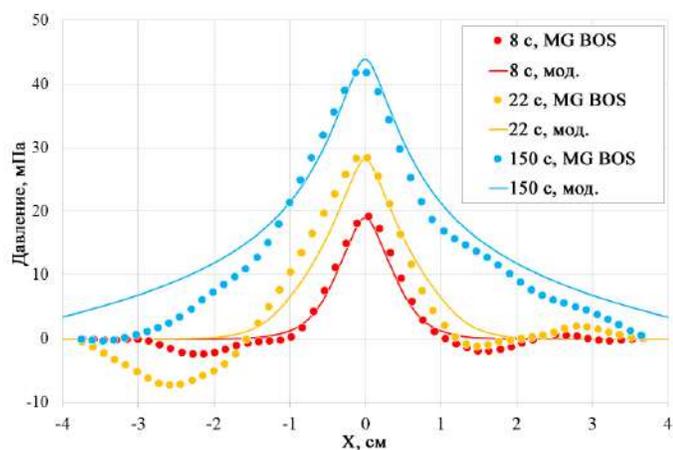
На Рис. 2.20 приведены профили давления на поверхности, полученные из эксперимента, автомодельного решения и численного моделирования при двух разных величинах теплового

потока: 31 Вт/м и 62 Вт/м. Видно хорошее совпадение данных, несмотря на то, что автомоделльное решение было выведено в предположении отсутствия боковых границ. Вблизи источника нагрева автомоделльное решение не описывает течение, так как в этой области несправедливы приближения погранслоя. Кроме того, как видно из выражения (2.19) при  $x=0$ , величина давления на поверхности, полученная из автомоделльного решения и связанная с константой  $C$ , расходится.

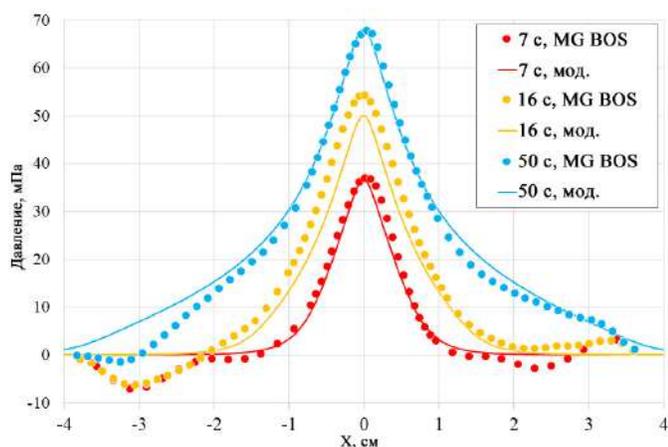


**Рис. 2.20.** Профиль давления на поверхности, полученный из эксперимента, автомоделльного решения и численного моделирования, при а)  $q=31$  Вт/м,  $t=60$  с, б)  $q=62$  Вт/м,  $t=40$  с.

На Рис. 2.21, 2.22 представлено сравнение мгновенных профилей давления, полученных из численного расчета и экспериментально с помощью метода moon-glade BOS в различные моменты времени. На Рис. 2.21 мощность нагрева источника равнялась  $q=31$  Вт/м, на Рис. 2.22 –  $q=62$  Вт/м. Максимум высоты в профиле рельефа поверхности, образующийся вблизи источника нагрева, со временем увеличивается и расплывается, но не значительно. Затем, спустя некоторое время, достигается квазистационарное состояние, которое изображено на Рис. 2.22. Небольшие отличия экспериментальных профилей связаны с паразитными волнами с амплитудой около 1 мкм. Наблюдаемое изменение рельефа поверхности связано с присутствием поверхностной пленки, которая блокирует термокапиллярную конвекцию, и влияет на механизм теплопереноса под поверхностью жидкости. В данном случае образуется один максимум, который растет с течением времени, в отличие от случая термокапиллярной конвекции с образованием двух волн, симметричных относительно источника нагрева, которые со временем переносят жидкость из области нагрева.



**Рис. 2.21.** Мгновенные профили давления на поверхности, полученные экспериментально методом moon-glade BOS и из численного моделирования через 7, 16 и 50 с после начала нагрева, мощность нагрева  $q=31$  Вт/м.

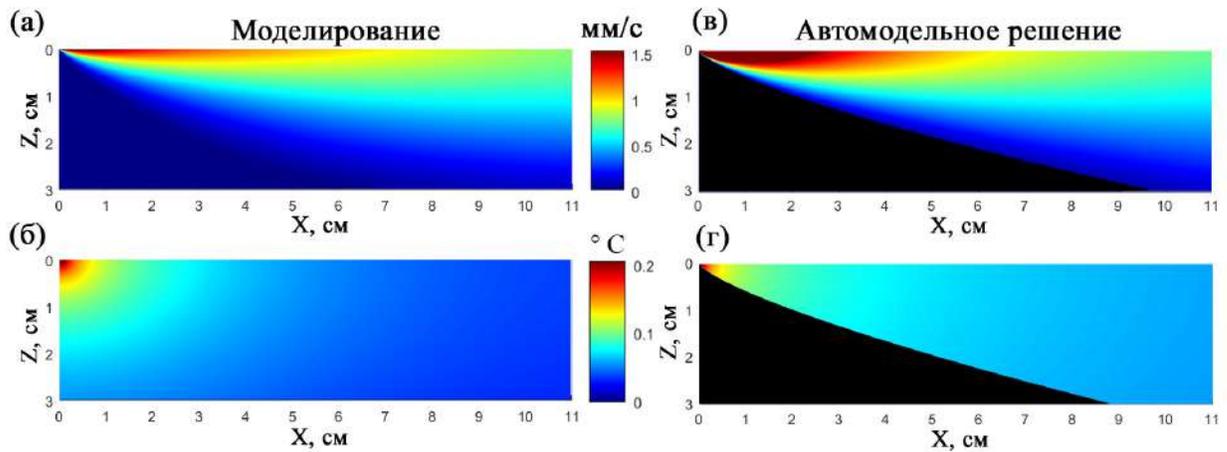


**Рис. 2.22.** Мгновенные профили давления на поверхности, полученные экспериментально методом moon-glade BOS и из численного моделирования через 8, 22 и 150 с после начала нагрева, мощность нагрева  $q=62$  Вт/м.

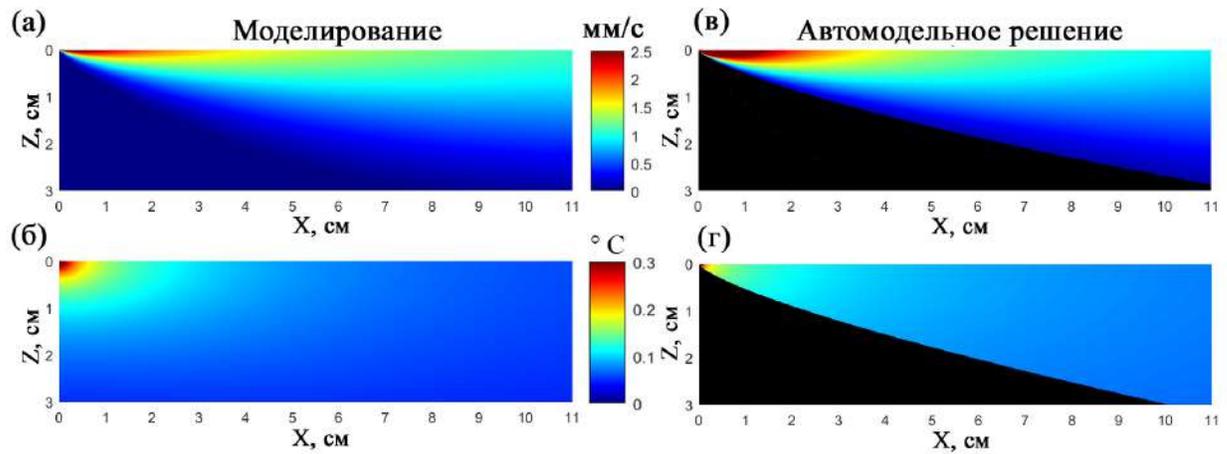
## 2.7.2 Поля скорости, температуры и профиль поверхности для случая горизонтальной конвекции при наличии термокапиллярной конвекции

На Рис. 2.23 – 2.27 показаны сравнения двумерных полей горизонтальной скорости и температуры, полученных из автомодельного решения и численного моделирования для разных чисел

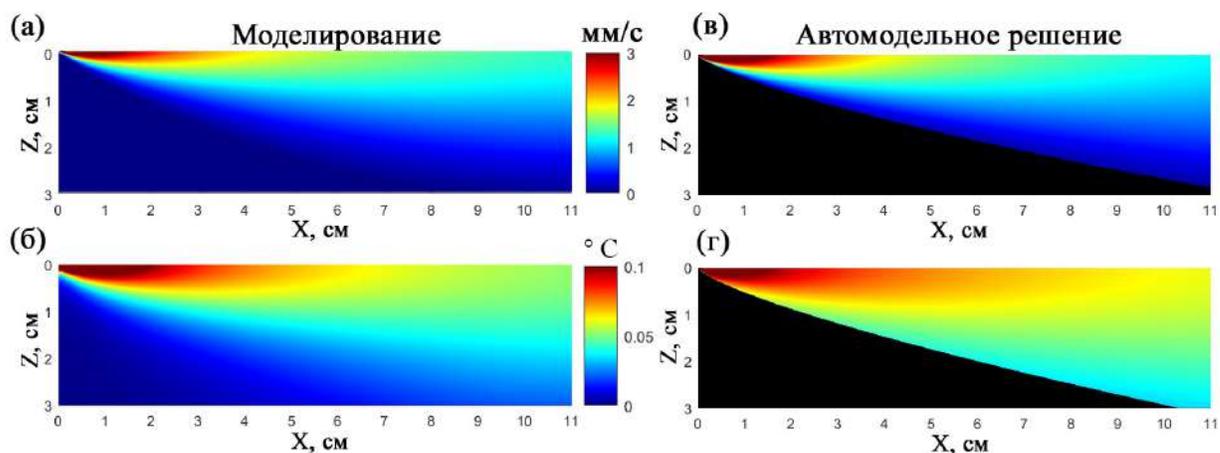
$Pr = 0.1, 0.2, 1, 10, 17.4$  в жидкости при наличии термокапиллярной конвекции.



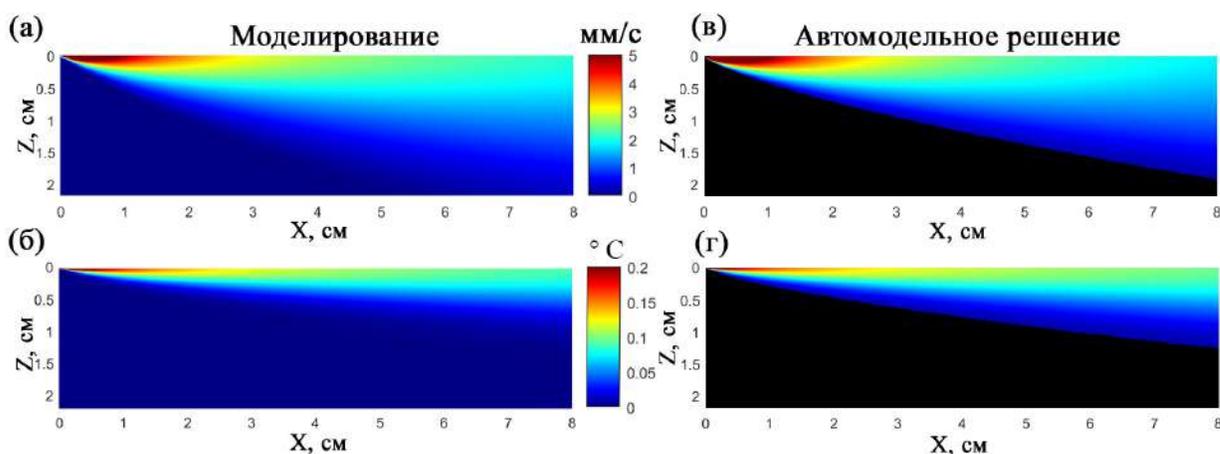
**Рис. 2.23.** Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автомодельного решения (в), (г) для  $Pr=0.1$ .



**Рис. 2.24.** Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автомодельного решения (в), (г) для  $Pr=0.2$ .

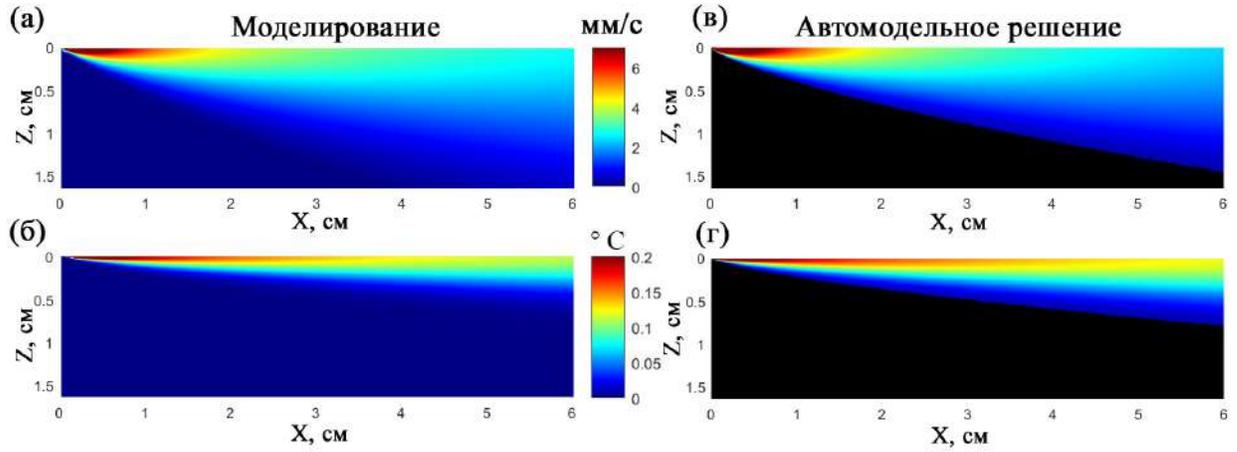


**Рис. 2.25.** Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автомодельного решения (в), (г) для  $Pr=1$ .



**Рис. 2.26.** Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автомодельного решения (в), (г) для  $Pr=10$ .

Из приведенных графиков видно, что горизонтальная скорость и температура совпадают в области погранслоя, где выполняется автомодельность. Автомодельное решение не описывает область возвратного течения под погранслоем, поэтому на графиках с автомодельными полями скорости и температуры эта область выделена черным цветом. По сравнению с жидкостями с наличием поверхностной пленки (см. Рис. 2.12–2.15), которая блокирует конвекцию Маранго-ни, в данном случае толщина пограничного слоя меньше, максимальная скорость достигается на поверхности жидкости и по величине на порядок больше. Отличие обусловлено разными механизмами конвекции.

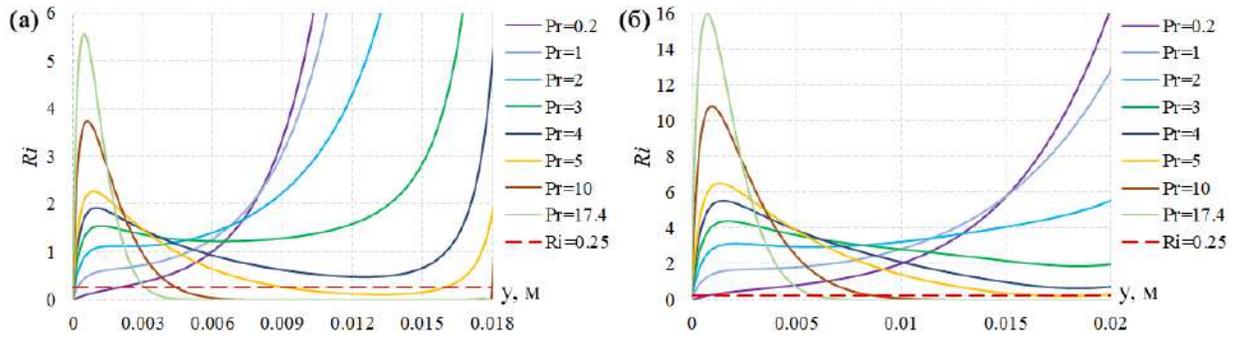


**Рис. 2.27.** Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автомодельного решения (в), (г) для  $Pr=17.4$ .

Следует отметить, что в численном моделировании и в эксперименте возникает неустойчивость, характерная для сдвигового течения и соответствующая неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. С уменьшением числа Прандтля в численном расчете эта неустойчивость исчезает. Чтобы привести количественные оценки, необходимо рассмотреть число Ричардсона  $Ri$ , характеризующее данный тип неустойчивости:

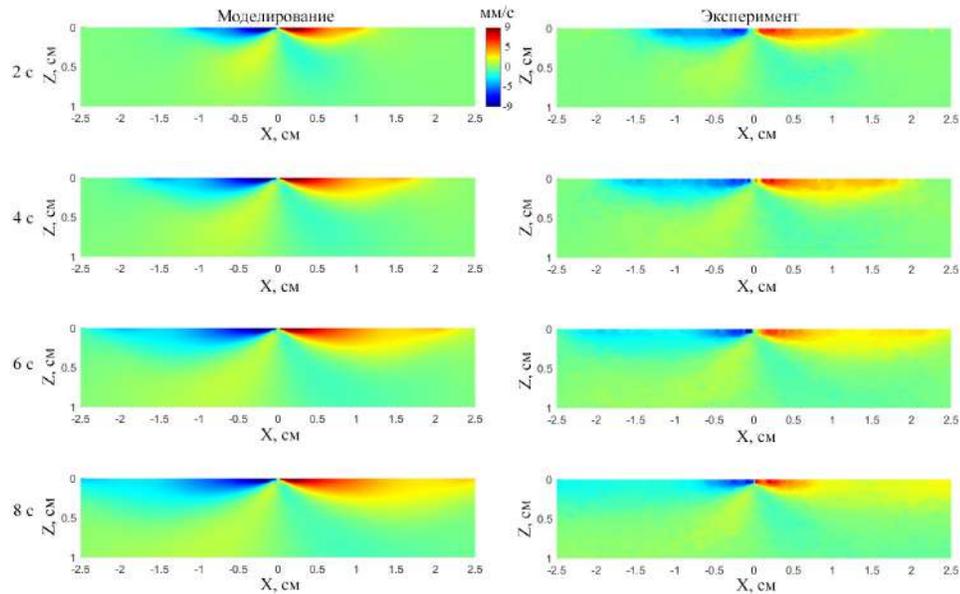
$$Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2} = \frac{g \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho_0 \left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2} = -\frac{g \beta \frac{\partial T}{\partial z}}{\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2}. \quad (2.97)$$

Здесь  $N$  — частота Брента-Вайсяля [104],  $N^2 \equiv -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}$ . Число Ричардсона усредняется по рассматриваемой переходной области. На Рис. 2.28 представлены вертикальные профили чисел Ричардсона: (а) при  $x=2$  см, (б) при  $x=4$  см, для разных чисел Прандтля, полученных из численных расчетов. С точки зрения теории, критическими оказываются малые числа Ричардсона (меньше или порядка 0.25 ([103, 104])). Из профилей видно, что при увеличении числа Прандтля поле чисел Ричардсона целиком перестраивается. Если при малых числах  $Pr$  малые числа  $Ri$  соответствуют границе раздела жидкость-газ и в этой области могут появляться волны, но условия неустойчивости совсем другие [105], то при больших числах Прандтля неустойчивость образуется в области между погранслоем и сопряженным течением. Следует отметить, что автомодельное решение не описывает появление неустойчивости.

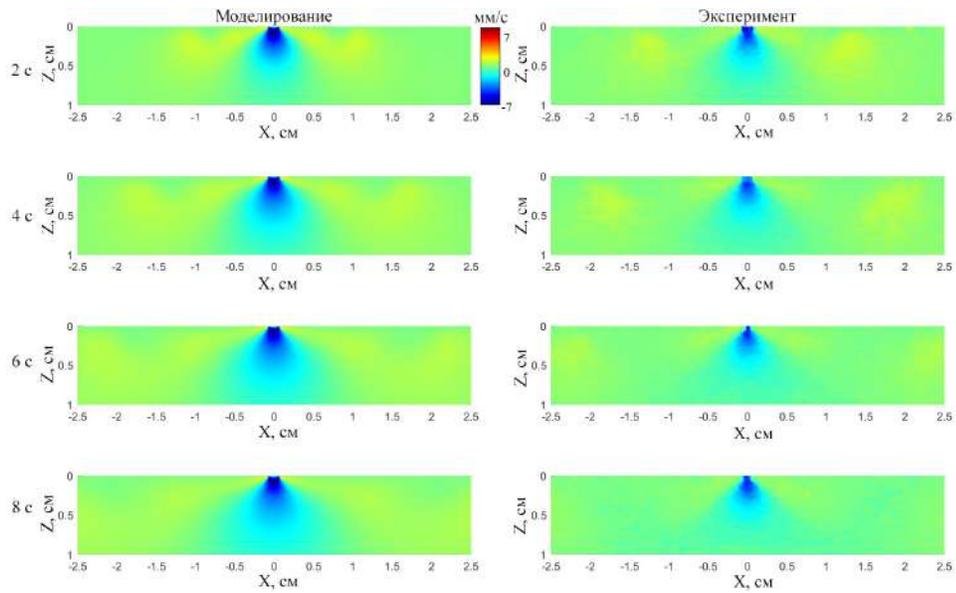


**Рис. 2.28.** Вертикальные профили числа Ричардсона  $Ri$  при разных числах Прандтля при а)  $x = 0.02$  м, б)  $x = 0.04$  м.

На Рис. 2.29, 2.30 представлены мгновенные двумерные поля горизонтальной и вертикальной скорости, полученные из численного моделирования и эксперимента PIV спустя 2, 4, 6 и 8 с после начала нагрева. Максимальная скорость в эксперименте оказывается меньше, чем в моделировании, из-за наличия мениска и плохого разрешения верхнего слоя методом PIV.

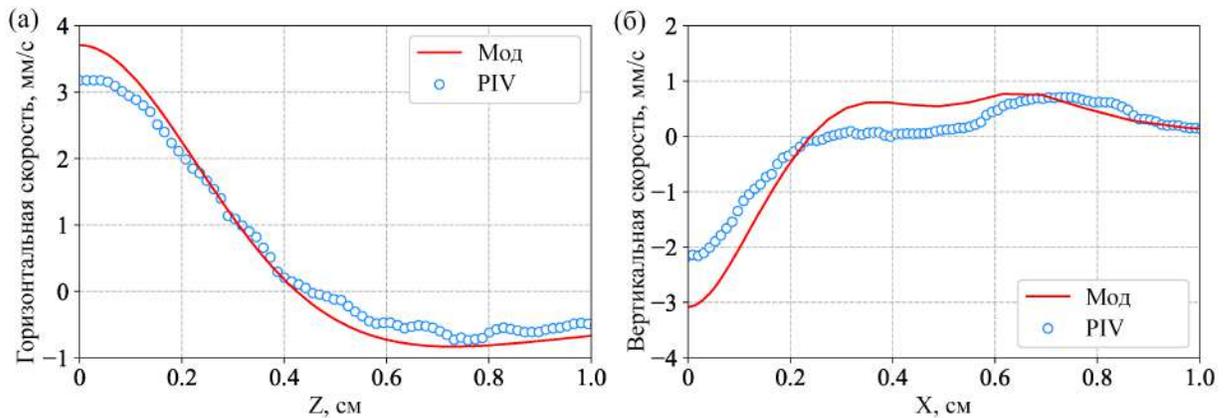


**Рис. 2.29.** Двумерные поля горизонтальной скорости (мм/с), полученные численно и экспериментально с помощью PIV спустя 2, 4, 6 и 8 с после начала нагрева.



**Рис. 2.30.** Двумерные поля вертикальной скорости (мм/с), полученные численно и экспериментально с помощью PIV спустя 2, 4, 6 и 8 с после начала нагрева.

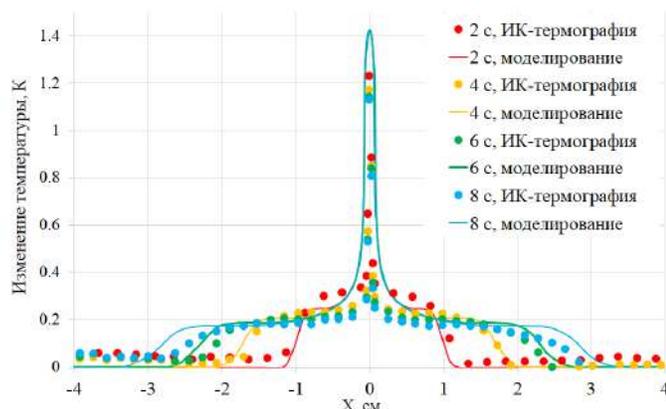
На Рис. 2.31 показаны вертикальные профили скорости и горизонтальные профили вертикальной скорости, полученные в этаноле спустя 4 с после начала нагрева (мощность нагрева  $q=4$  Вт/м) численно и экспериментально с помощью метода PIV. Видно хорошее количественное совпадение данных, что указывает на то, что условие Пирсона правильно описывает течение в этаноле при наличии термокапиллярной конвекции Марангони.



**Рис. 2.31.** (а) Вертикальные профили горизонтальной скорости, усредненные в области  $0.8 \leq x \leq 1.2$  см; (б) горизонтальные профили вертикальной скорости, усредненные в области  $0.4 \leq z \leq 0.8$  см спустя 4 с после начала нагрева.

На Рис. 2.32 приведены горизонтальные профили возмущения температуры, полученные

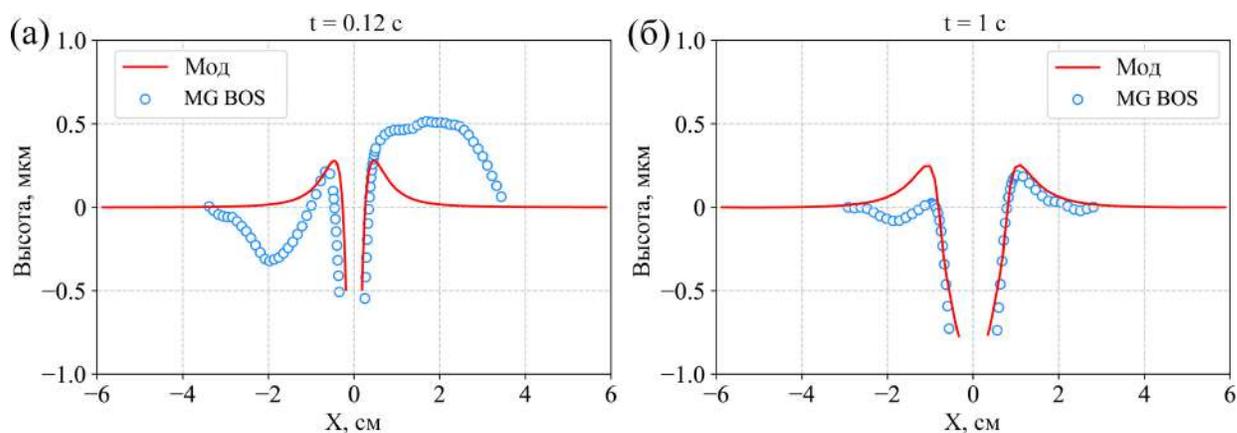
численно и экспериментально с помощью метода ИК-термографии.



**Рис. 2.32.** Горизонтальные профили возмущения температуры на поверхности, полученные экспериментально и из численного моделирования в этаноле спустя 2, 4, 6 и 8 с после начала нагрева.

В отличие от жидкости с пленкой на поверхности, в данном случае максимальное значение температуры увеличивается только на начальном этапе, а не растет постоянно, так как силы поверхностного натяжения более интенсивно переносят теплую жидкость из области источника нагрева. Профиль температуры расплывается быстрее с течением времени, чем в дистиллированной воде, несмотря на меньшую мощность нагрева.

Величина профиля вблизи поверхности определяется с помощью метода moon-glade BOS. Его анализ позволяет сделать выводы о корректности моделирования и различии двух механизмов конвекции. Сравнение экспериментальных результатов и численных расчетов приведено на Рис. 2.33. Как видно из графиков, вначале присутствуют нестационарные процессы, но затем картина стабилизируется. В окрестности источника тепла моделирование не описывает профиль, так как источник нагрева задавался как тепловыделение на поверхности на некоторой длине, как и в случае с дистиллированной водой, но далее совпадение очень хорошее, что указывает на соответствие теории и эксперимента.



**Рис. 2.33.** Профили поверхности, полученные экспериментально с помощью метода moon–glade BOS и численно спустя а) 0.12 с, б) 1 с после начала нагрева в этаноле.

Таким образом, отличие двух разных механизмов конвекции – за счет горизонтального градиента давления и термокапиллярных сил – наглядно демонстрируется Рис. 2.33 и Рис. 2.21–2.22. При наличии температурной конвекции Марангони в окрестности источника нагрева образуются волны, которые распространяются от источника нагрева и переносят теплую жидкость вдоль поверхности, что оказывается более эффективным механизмом переноса тепла в некоторой области вблизи источника нагрева по сравнению с конвекцией в жидкостях при наличии пленки, блокирующей термокапиллярный механизм.

## 3 Исследование свойств межфазных поверхностей с помощью локального ИК-нагрева

### 3.1 Постановка задачи, система уравнений и схема эксперимента

Для изучения свойств поверхности различных жидкостей с помощью метода ИК-термографии удобно использовать локальный нагрев поверхности CO<sub>2</sub>-лазером. Излучение лазера фокусируется на поверхности исследуемой жидкости. В данной работе эксперименты проводятся в жидкостях, имеющих различную структуру поверхности: с наличием пленки на поверхности, блокирующей термокапиллярную конвекцию Марангони, а также при ее отсутствии. Для изучения процессов распространения тепла в жидкостях с поверхностной пленкой были выбраны дистиллированная вода и глицерин. Для сравнения в качестве жидкостей с термокапиллярной конвекцией использовались этанол и силиконовое масло различной вязкости (PDMS). Выбор жидкостей обусловлен сходными и различающимися параметрами вязкости, которая, вообще говоря, не связана с наличием или отсутствием пленки.

В результате лазерного излучения происходит нагрев приповерхностной области и развивается конвективное течение, приводящее к расплыванию теплового пятна. В зависимости от граничных условий на поверхности механизм конвекции определяется или преимущественно термокапиллярным эффектом, или взаимодействием термокапиллярного и термоконцентрационного эффектов, что приводит к замедлению движения поверхности и ее полной блокировке. В этом случае перераспределение давления у поверхности при нагреве приводит к появлению горизонтальной конвекции, как и в случае задачи с линейным источником нагрева.

Двумерная система уравнений в цилиндрических координатах  $(\tilde{r}, \tilde{z})$  в приближении Бусси-

неска имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{r}V_r)}{\partial\tilde{r}} + \frac{\partial V_z}{\partial\tilde{z}} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t} V_r + V_r \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} V_r + V_z \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} V_r &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} p + \nu \Delta V_r - \nu \frac{V_r}{\tilde{r}^2}, \\
\frac{\partial}{\partial t} V_z + V_r \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} V_z + V_z \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} V_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} p + \nu \Delta V_z + g, \\
\frac{\partial\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial\theta}{\partial\tilde{r}} + V_z \frac{\partial\theta}{\partial\tilde{z}} &= \chi \Delta\theta + \frac{q}{\rho C_p},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где лапласиан в цилиндрических координатах выражается:

$$\Delta f = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial f}{\partial\tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial\tilde{z}^2}. \tag{3.2}$$

Здесь  $V_r$ ,  $V_z$  – радиальная и осевая компоненты скорости,  $p$  – давление,  $\theta$  – температура,  $q(r, z)$  – мощность нагрева,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\chi$  – температуропроводность.

Граничные условия на свободной поверхности в простейшем случае определяются условиями Пирсона [106]:

$$\mu \frac{\partial V_r}{\partial\tilde{z}} = -\frac{\partial\sigma}{\partial\tilde{r}} = -\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\tilde{r}}. \tag{3.3}$$

При наличии примесей на поверхности добавляется зависимость от поверхностной концентрации  $\Gamma$  и действие концентрационного эффекта противоположно температурному:

$$\mu \frac{\partial V_r}{\partial\tilde{z}} = -\frac{\partial\sigma}{\partial\tilde{r}} = -\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial\tilde{r}} - \frac{\partial\sigma}{\partial\Gamma} \frac{\partial\Gamma}{\partial\tilde{r}}. \tag{3.4}$$

Наблюдаемая деформация поверхности жидкости мала по сравнению с глубиной слоя жидкости  $H$ , и ее влиянием на вертикальную скорость вблизи поверхности можно пренебречь [107]:  $V_z=0$ , вследствие большой величины числа Галилея  $Ga = gH^3\rho/(\eta\chi)$  и малого значения числа  $Cr = \eta\chi/(\sigma H)$  (crispation number).

При наличии пленки поверхность блокируется и условие (3.3) переходит в условие прилипания:

$$V_r = 0. \tag{3.5}$$

Система (3.1) с граничными и начальными условиями численно решается в пакете Comsol 6.2 и анализируется с помощью автоматического решения, которое наглядно демонстрирует основные свойства конвективного течения и рассматривается в первую очередь.

## 3.2 Автомоделное решение для нестационарной конвекции в цилиндрическом случае

Для анализа задачи нестационарной конвекции в цилиндрическом случае рассматривается нагрев поверхности раздела жидкость–газ за счет локального тепловыделения. При выводе автомоделного решения предполагается, что в начале координат задан точечный источник тепла (описываемый дельта-функцией от координат), постоянный во времени, начиная с момента включения. Такое решение начинает соответствовать реальной задаче, когда диаметр теплового пятна существенно превышает диаметр лазерного луча.

Для построения автомоделного решения вводится функция тока:

$$V_r = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}}, \quad V_z = -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{r}}, \quad (3.6)$$

и используется приближение погранслоя, позволяющее упростить систему (3.1). В этом случае в лапласиане (3.2) остается только производная по  $\tilde{z}$ , а в уравнении для  $z$ -компоненты скорости – изменение давления и температуры. Также в уравнении движения для  $V_r$  остается вязкостной член, связанный со второй производной по  $\tilde{z}$ . Система (3.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} V_r + V_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} V_r &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} p + \nu \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} V_r, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} p &= g, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial \tilde{r}} + V_z \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} &= \chi \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \theta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Система (3.7) не отличается от записанной в декартовых координатах. Разница присутствует в условиях на поток вследствие отличия вида функции тока.

Далее рассматриваются два приближения с точки зрения граничных условий: условие Пирсона (3.3) и условие прилипания (3.5). Автомоделные переменные и приближения при этом сильно различаются.

### 3.2.1 Автомоделное решение для термокапиллярной конвекции

Рассматривается решение задачи при учете только термокапиллярных сил. Это приближение выполнено в диапазоне расстояний и времен, оценка которых будет приведена ниже. При этом особенностью решения является тот факт, что с течением времени вблизи источника течение становится стационарным. Это позволяет найти параметры подобия.

Чтобы привести систему (3.7) к безразмерному виду, используются следующие параметры. Пространственные координаты, время, компоненты скорости, давление и разность температуры обезразмериваются делением на:  $l$ ,  $l^2/\chi$ ,  $\chi/l$ ,  $\eta\chi/l^2$ ,  $Q/(\lambda l)$ , соответственно.  $Q$  – мощность тепловыделения (Вт),  $l$  – характерный параметр длины, который будет определен ниже.

Для течения Марангони можно пренебречь полем давлений, как в и случае с линейным источником нагрева, тогда система (3.7) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} v_r + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_r \right) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_r, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} T. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Граничное условие сводится к выражению:

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = Ma \frac{\partial}{\partial r} T, \quad (3.9)$$

где  $Ma = \frac{\sigma_T Q}{\eta \chi \lambda}$  – число Марангони,  $\sigma_T = -\frac{\partial \sigma}{\partial T}$  – тепловой градиент поверхностного натяжения. Стоит отметить, что число Марангони не зависит от параметра длины, так как размерность тепловыделения – Вт. Как и для случая линейного источника нагрева, характерную длину  $l$  удобно выбрать исходя из условия  $Ma=1$ , то есть:  $l = \frac{\eta \chi \lambda}{\sigma_T Q}$ . Для функции тока (3.6) и всех гидродинамических параметров задачи нестационарное автомодельное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi(r, z, t) &= r f(\xi, r_1), \\ v_r(r, z, t) &= \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \xi}, \\ v_z(r, z, t) &= \frac{1}{r} \left( -f(\xi, r_1) + \frac{\partial f}{\partial \xi} \xi - 2 \frac{\partial f}{\partial r_1} r_1 \right), \\ T(r, z, t) &= g(\xi, r_1) / r, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где автомодельные переменные:  $\xi = \frac{z}{r}$ ,  $r_1 = \frac{r^2}{t}$ . Следует отметить, что вид функций в автомодельных переменных (3.10) совпадает с функциями, определенными в работе [96] для стационарного течения от точечного источника.

В этих переменных система двух уравнений для двух функций  $f(\xi, r_1)$ ,  $g(\xi, r_1)$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \left( -r_1^2 + 2r_1 \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial g}{\partial r_1} - \frac{\partial f}{\partial \xi} g + \frac{\partial g}{\partial \xi} \left( -2r_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} - f \right) &= \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}, \\ \left( -r_1^2 + 2r_1 \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial r_1 \partial \xi} - \left( f + 2r_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \text{Pr} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} - \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Граничное условие (3.3) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = Ma \left( -\frac{\partial g}{\partial \xi} \xi + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial r_1^2} r_1 - g \right). \quad (3.12)$$

Для малых  $r_1$  система (3.11) переходит в стационарную:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi} g + f \frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} &= 0, \\ f \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \text{Pr} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^2 &= 0,\end{aligned}\tag{3.13}$$

и граничное условие принимает вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \text{Ma} \left( -\frac{\partial g}{\partial \xi} \xi - g \right).\tag{3.14}$$

### 3.2.2 Автомоделное решение для горизонтальной конвекции

При рассмотрении автомоделного решения для горизонтальной конвекции в отсутствие поверхностной пленки отличие системы уравнений состоит в учете силы тяжести в уравнении для скорости  $V_z$ . Также в данном случае поле давления является определяющим механизмом горизонтальной конвекции для жидкостей с поверхностной пленкой, поэтому слагаемые с давлением нельзя исключить из системы. Итоговая система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} V_r + V_r \frac{\partial}{\partial r} V_r + V_z \frac{\partial}{\partial z} V_r &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} p + \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_r, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p &= -g \beta \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial \theta}{\partial r} + V_z \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \chi \frac{\partial^2}{\partial z^2} \theta.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Пространственные координаты, время, компоненты скорости, давление и разность температуры приводятся к безразмерному виду при помощи тех же констант, как и в случае с термокапиллярной конвекцией. Исключение давления выполняется по стандартной процедуре, что в итоге приводит к соотношению в безразмерном виде:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial t} v_r + v_r \frac{\partial}{\partial r} v_r + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_r \right) - \frac{\partial^3 v_r}{\partial z^3} = \text{Ra} \frac{\partial}{\partial r} T,\tag{3.16}$$

где число Рэлея определяется как:  $\text{Ra} = \frac{\rho g \beta Q l^2}{\eta \chi \lambda}$ . Остаются три уравнения: непрерывности, которое учитывается с помощью функции тока, энергии и уравнение (3.16). Параметр длины удобно выбрать таким образом, чтобы  $\text{Ra} = 1$ , то есть:

$$l = \sqrt{\frac{\eta \chi \lambda}{\rho g \beta Q}}.\tag{3.17}$$

Итоговая система уравнений в безразмерном виде принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial t} v_r + v_r \frac{\partial}{\partial r} v_r + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_r \right) - \frac{\partial^3 v_r}{\partial z^3} &= \frac{\partial}{\partial r} T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} T.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Решение этой нестационарной задачи ищем в виде:

$$\begin{aligned}
\psi(r, z, t) &= r^{4/3} f(\xi, r_2), \\
v_r(r, z, t) &= \frac{1}{r^{1/3}} \frac{\partial f}{\partial \xi}, \\
v_z(r, z, t) &= -\frac{1}{3r^{2/3}} \left( 4f(\xi, r_2) - 2\frac{\partial f}{\partial \xi} \xi + 4\frac{\partial f}{\partial r_2} r_2 \right), \\
T(r, z, t) &= \frac{g(\xi, r_2)}{r^{4/3}},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

где автомодельные переменные имеют вид:  $\xi = \frac{z}{r^{2/3}}$ ,  $r_2 = \frac{r^{4/3}}{t}$ . Итоговая система уравнений для функций  $f$  и  $g$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{3g''}{4} + \frac{\partial(fg)}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial r_2} r_2 + \left( -r_2 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{3}{4} r_2^2 \right) \frac{\partial g}{\partial r_2} &= 0, \\
Pr \left( 3f^{iv} - 4g - 2\frac{\partial g}{\partial \xi} \xi + 4r_2 \frac{\partial g}{\partial r_2} \right) + 6\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} + 4\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} f - 4r_2 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2 \partial r_2} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \\
+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2 \partial r_2} r_2^2 + 4\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \frac{\partial f}{\partial r_2} r_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

При малых  $r_2$  система переходит в «стационарную»:

$$\begin{aligned}
\frac{3g''}{4} + (fg)' &= 0, \\
3Pr f^{iv} - 4Pr g - 2Pr g' \xi + 6f'' f' + 4f''' f &= 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Таким образом, для случая горизонтальной конвекции в отсутствие поверхностной пленки система уравнений принимает вид (3.20) для нестационарного случая и переходит в систему (3.21) в стационарном случае. С помощью полученных автомодельных переменных можно провести оценки для скорости распространения тепла.

### 3.2.3 Сравнительный анализ распространения тепла для двух механизмов конвекции

В отличие от плоского случая, в задаче с локальным ИК-нагревом в цилиндрической геометрии скорость падает по мере удаления от центра. Это можно объяснить исходя из параметра  $r^n/t$ , где  $n=4/3$  в случае горизонтальной конвекции при наличии поверхностной пленки,  $n=2$  для термокапиллярной конвекции. Если  $r$  увеличить в  $m$  раз, то время необходимо увеличить в  $m^n$  раз, чтобы параметр сохранился. В размерных переменных:

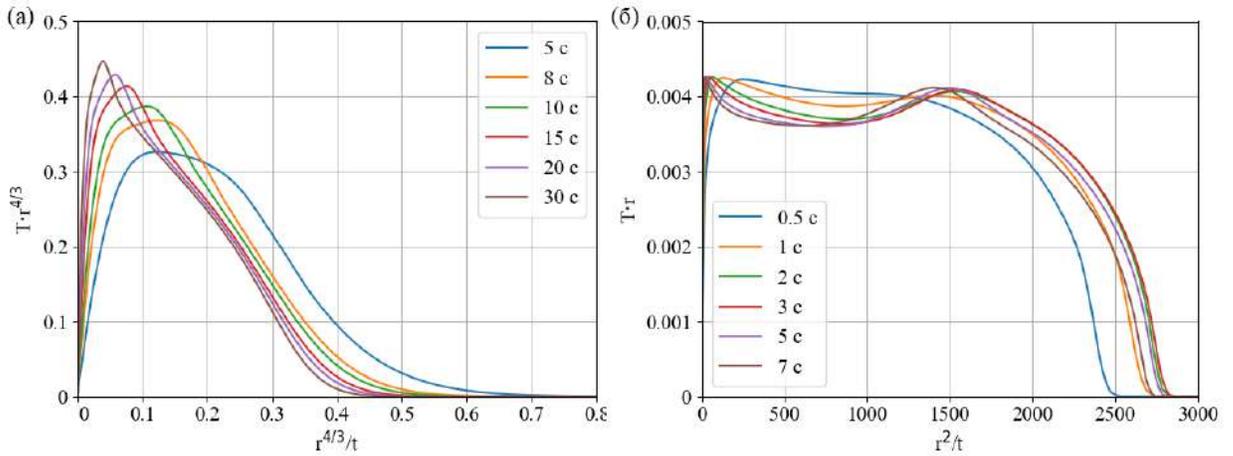
$$\frac{r^n}{t} = \frac{\tilde{r}^n/l^n}{\tilde{t}\chi/l^2} = \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{t}\chi l^{n-2}},$$

где с тильдами указаны размерные переменные. Получившееся соотношение не обязано быть равным единице, так как описывает зависимость распространения теплового пятна по радиусу

от времени. Если брать два радиуса, до которых дошло возмущение в два разных момента времени, то

$$\frac{r_1^n}{t_1} = \frac{r_2^n}{t_2} = C, \quad (3.22)$$

где  $C$  – константа, которую можно получить численно. Она показывает, до какой точки распространилась тепловая волна в автомоделном решении. На Рис. 3.1 приведены графики автомоделной функции температуры  $g$  на поверхности для случаев термокапиллярной конвекции и горизонтальной конвекции при наличии пленки на поверхности жидкости, полученные из численного решения для этанола ( $Q=0.30$  Вт) и для воды ( $Q=0.22$  Вт), соответственно. Из рисунка видно, что после того, как тепловое возмущение распространилось на расстояние много больше, чем радиус источника нагрева, в данном случае – радиус теплового пятна от ИК-лазера, которое имеет размер порядка 5 мм, график  $g$  перестает изменяться, выходя на автомоделное решение.



**Рис. 3.1.** Зависимость функции  $g$ , полученной из численного моделирования при  $\xi=0$ , от автомоделной переменной а)  $r_2 = r^{4/3}/t$  для горизонтальной конвекции при наличии поверхностной пленки в дистиллированной воде, б)  $r_1 = r^2/t$  в случае термокапиллярной конвекции в этаноле.

Из приведенных графиков можно оценить константы  $C$  из выражения (3.22) для двух разных механизмов конвекции. Обозначим указанные константы  $C_m$  и  $C_h$  для случаев термокапиллярного механизма и конвекции при наличии поверхностной пленки, соответственно. Тогда  $C_m = r^2/t$ , что составляет порядка 2700 (Рис. 3.1б).  $C_h = r^{4/3}/t$  и приблизительно равна 0.5 (Рис. 3.1а). Чтобы провести сравнительный анализ скорости распространения тепла в цилиндрическом случае, удобно составить Табл. 3.1.

**Таблица 3.1.** Параметры автомодельного решения для разных механизмов конвекции.

Тип конвекции	Безразмерная переменная, зависящая от времени $(r_1, r_2)$	Размерная переменная	$l$ , параметр длины
Термокапиллярная конвекция	$\frac{r^2}{t}$	$\frac{\tilde{r}^2}{\chi \tilde{t}}$	$l_m = \frac{\eta \chi \lambda}{\sigma_T Q}$
При наличии поверхностной пленки	$\frac{r^{4/3}}{t}$	$\frac{\tilde{r}^{4/3} l^{2/3}}{\tilde{t} \chi}$	$l_h = \sqrt{\frac{\eta \chi \lambda}{\rho g \beta Q}}$

Пусть  $R$  – радиус распространения теплового возмущения,  $\tilde{t}_m$  – время распространения в случае термокапиллярной конвекции,  $\tilde{t}_h$  – в случае горизонтальной конвекции при наличии поверхностной пленки. Тогда:

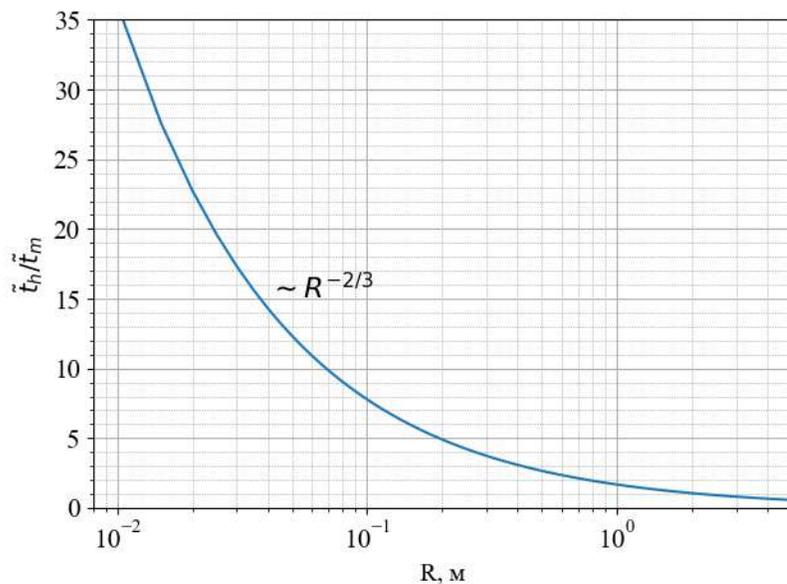
$$\frac{\tilde{t}_h}{\tilde{t}_m} = \frac{l_h^{2/3} \chi_m C_m}{R^{2/3} \chi_h C_h} = \frac{1}{R^{2/3}} \frac{C_m}{C_h} \left( \frac{\eta_h \chi_h^3}{g \rho_h \chi_h^2 \beta_h Q_h} \right)^{1/3}. \quad (3.23)$$

Свойства вещества, указанные с индексом  $m$ , рассчитываются для этанола при температуре 24°C, индекс  $h$  указывает на дистиллированную воду. Мощность нагрева  $Q_m$  в этаноле составляет 0.3 Вт, в дистиллированной воде —  $Q_h=0.22$  Вт. Подстановка величин приводит к зависимости:

$$\frac{\tilde{t}_h}{\tilde{t}_m} = \left( \frac{2.18 \text{ м}}{R} \right)^{2/3}. \quad (3.24)$$

Эта зависимость показана на Рис. 3.2. Видно, что на достаточно большом расстоянии от источника нагрева (порядка 2 м) начинает преобладать механизм горизонтальной конвекции за счет перераспределения давления. На расстоянии около 1 см, как в эксперименте, термокапиллярный механизм оказывается более эффективным с точки зрения скорости теплопереноса.

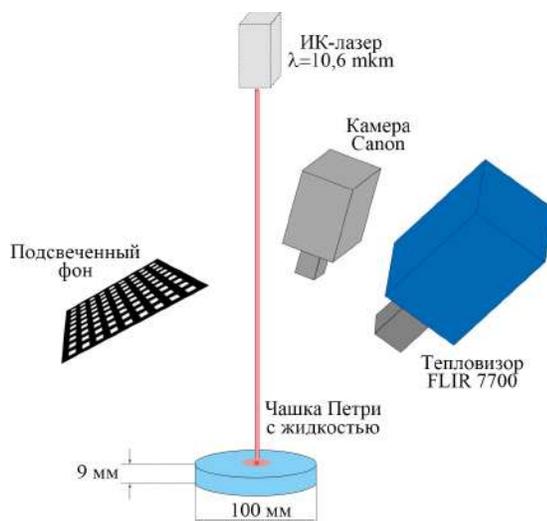
Таким образом, нестационарная задача сводится к автомодельной как в случае горизонтальной конвекции при наличии поверхностной пленки, так и при ее отсутствии, когда имеет место термокапиллярный механизм конвекции. Полученные автомодельные переменные позволяют оценить скорости распространения пятна для двух механизмов конвекции. Из приведенных оценок видно, что, как и в случае с линейным нагревателем, в области вблизи нагрева скорость переноса тепла за счет термокапиллярных сил выше, чем за счет перераспределения давления, и теплоотвод происходит эффективнее.



**Рис. 3.2.** Зависимость отношения времени распространения теплового возмущения при горизонтальной конвекции в дистиллированной воде,  $\tilde{t}_h$ , ко времени распространения при наличии термокапиллярной конвекции,  $\tilde{t}_m$ , от расстояния  $R$ , до которого дошло возмущение, полученная из численных расчетов.

### 3.3 Экспериментальная установка

В данной задаче одновременно проводятся эксперименты с ИК-термографией и методом *shooglade BOS* для измерения рельефа поверхности. Сколлимированный пучок лазера с длиной волны излучения  $\lambda = 10.6$  мкм и мощностью излучения от 0.1 до 1 Вт фокусируется на поверхности исследуемой жидкости, находящейся в чашке Петри диаметром 100 мм. Высота жидкости составляет 9 мм. Для уменьшения мощности лазера до 0.1 Вт использовался стеклянный фильтр  $\text{CaF}_2$ , частично прозрачный на длине волны излучения лазера. Схема эксперимента изображена на Рис. 3.3.



**Рис. 3.3.** Схема эксперимента с ИК-термографией поверхности и методом moon-glade BOS для измерения рельефа поверхности при локальном нагреве сверху ИК-лазером.

Интегральная мощность излучения лазерного пучка, попадающего на поверхность жидкости, предварительно измерялась в дополнительном эксперименте с маленькой зачерненной латунной пластинкой размерами 5 мм×5 мм, полностью теплоизолированной, кроме верхней части, куда попадает лазерное пятно. Коэффициент излучения пластины приблизительно равен 0.95. Значения теплового потока рассчитываются исходя из разницы температуры, измеренной термопарой после включения лазера. Время излучения лазера варьируется в разных экспериментах от 1 с до 10 с, мощность во время эксперимента можно считать постоянной, как показали эксперименты с измерением мощности с латунной пластинкой. Радиальное распределение мощности предварительно было получено с помощью ИК-термографии поверхности стеклянного бруска, на который воздействовал ИК-лазер. Полученное поле цифрового сигнала тепловизора усредняется по углу и нормируется на максимальное значение в центре, рассчитывается радиальный усредненный по углу профиль  $f_h(r)$ . Для моделирования тепловой поток на поверхности (для экспериментов с водой, глицерином и силиконовым маслом) или объемный источник тепла (для экспериментов с этанолом) задаются так, чтобы интегральная мощность совпадала с мощностью, полученной в эксперименте с латунной пластинкой. Измерения проводятся при комнатной температуре 20°C-24°C и относительной влажностью примерно 40%. Температура поверхности измеряется тем же тепловизором FLIR SC7700 M, который используется для экспериментов с линейным источником тепла. Параметры тепловизора описаны в разделе 2.6.2. Рельеф поверхности определяется методом moon-glade BOS, схема которого представ-

лена на Рис. 2.11. Проводится видеосъемка с частотой 60 к/сек фотоаппаратом Canon EOS 700D с объективом Canon EF 100 мм f/2.8. Расстояние от фона до поверхности жидкости, которое определяет чувствительность метода, в экспериментах с различными жидкостями варьируется от 4 см до 11 см. Угол наклона фотоаппарата не превышает  $20^\circ$ . Коррекция трапецевидной дисторсии проводится с использованием калибровочного снимка прямоугольника, углы которого определяют коэффициенты преобразования. В зависимости от структуры поверхности нагрев поверхности жидкости приводит к формированию одного увеличивающегося пика высотой до 10 мкм, либо к расходящейся от центра волне, максимальная глубина которой составляет 21 мкм, согласно экспериментам и численному моделированию.

С помощью moon-glade BOS были получены мгновенные поля рельефа поверхности. Так как течение практически осесимметричное, из двумерных полей были получены усредненные по углу радиальные профили рельефа поверхности и проведено сравнение с моделированием.

### 3.4 Сравнение экспериментальных данных с численным моделированием

Система уравнений (3.1) численно решается в пакете Comsol 6.2. Используется неравномерная сетка размерами  $200 \times 170$ , сгущающаяся в вертикальном направлении к поверхности жидкости и в радиальном направлении к оси симметрии, с минимальным шагом, равным 2 мкм. В начальный момент времени жидкость находится в невозмущенном состоянии при комнатной температуре. Температурные зависимости свойств воды и этанола  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$ ,  $\eta$  используются такие же, как и в работе [12]. Зависимость плотности и поверхностного натяжения PDMS-1000 от температуры были взяты из работы [108], зависимость вязкости и теплопроводности – из справочных данных [109]. Для PDMS-6.1 использовались такие же зависимости вязкости, плотности и поверхностного натяжения от температуры, как и в работе [58]. Дно и боковые стенки принимаются адиабатическими. В экспериментах с водой, глицерином и силиконовым маслом тепловой поток на поверхности задается как  $\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = A f_h(r)$ , где  $f_h(r)$  – радиальный профиль распределения мощности излучения лазерного пятна, полученный из эксперимента со стеклянным бруском,  $A$  – постоянный коэффициент ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ), рассчитанный из условия равенства интегральной мощности полной мощности, измеренной в эксперименте с латунной пластинкой. В данных жидкостях толщина поглощения в ИК-диапазоне меньше, чем характерные масштабы

течения [12], что позволяет моделировать тепловой поток как поверхностный. Моделирование объемного тепловыделения потребовало бы достаточно долгих вычислений, так как в данном случае минимальный пространственный размер сетки составил бы 0.1 мкм. Так как в этаноле мощность ИК-лазера поглощается в большем слое, тепловыделение в данном случае задается как объемное:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = A f_h(r) a \exp(-az), \quad (3.25)$$

где  $a$  – коэффициент поглощения в этаноле ИК-излучения с длиной волны 10.6 мкм, равный 3727 1/м. Интегральная мощность излучения в воде, этаноле и масле составила 0.2-0.3 Вт, в глицерине – 0.1 Вт.

На боковых стенках и дне задаются условия прилипания и непротекания:  $v_r=0$ ,  $v_z=0$ , соответственно.

Для учета рельефа поверхности в моделировании используется интерфейс с движущейся сеткой. Для расчета деформации поверхности решается уравнение на поверхности:

$$p_{air} - p + \rho g h - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

При наличии термокапиллярной конвекции Марангони условие на тангенциальную составляющую переходит в:

$$\mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = - \frac{\partial \sigma}{\partial r} = - \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Далее приведено сравнение результатов численного моделирования и экспериментальных данных, полученных в дистиллированной воде, 90% растворе глицерина с дистиллированной водой, этаноле, силиконовых маслах PDMS-6.1 и PDMS-1000. В воде средняя глубина поглощения излучения в спектральном диапазоне тепловизора составляет порядка 50 мкм. Поэтому можно считать, что тепловизор регистрирует температуру поверхности. Для остальных жидкостей двумерное поле температуры жидкости, полученное в моделировании, было проинтегрировано и пересчитано в сигнал тепловизора по формуле:

$$DL = (1 - \varepsilon) f_{DL}(T_0) + \varepsilon \int_0^H \alpha f_{DL}(T - T_0) \cdot e^{-\alpha z} dz,$$

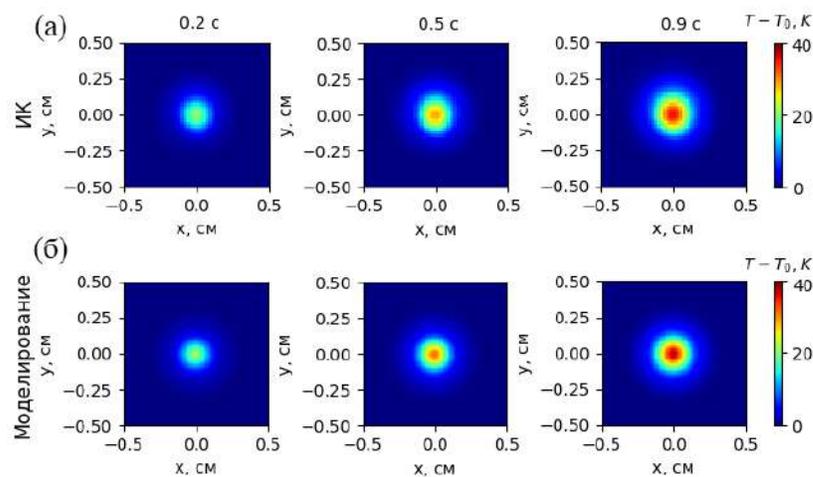
где  $\varepsilon$  – коэффициент излучения (в данной работе равнялся 0.96),  $\alpha$  – средний коэффициент поглощения жидкости в диапазоне частот, регистрируемых тепловизором,  $f_{DL}(T)$  – функция пересчета температуры  $T$  в сигнал тепловизора  $DL$ :

$$f_{DL}(T) = \frac{R_f}{e^{B_f/T} - F_f},$$

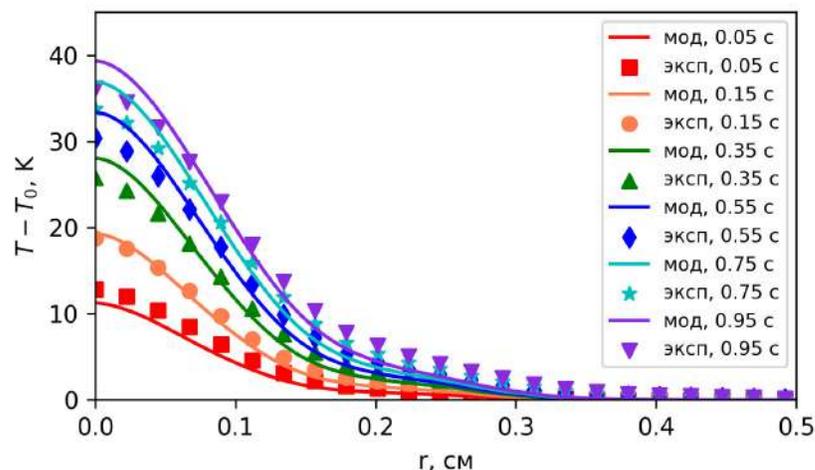
где  $R_f$ ,  $B_f$ ,  $F_f$  – поправочные коэффициенты тепловизора. Для раствора глицерина с водой коэффициент  $\alpha$  равнялся 10000 1/м, PDMS-1000 – 2900 1/м, PDMS-6.1 – 1500 1/м, этанола – 7271 1/м.

Следует отметить, что в дистиллированной воде не удалось измерить рельеф поверхности, так как паразитные волны, возникающие из-за внешних источников вибрации, которые не удастся исключить из эксперимента, сравнимы с пиком, возникающим при нагреве. Данные моделирования показали, что максимальная высота составляет десятые доли мкм, что сравнимо и даже меньше паразитных волн, возникающих в дистиллированной воде. В силу большей вязкости раствора глицерина с водой, в нем удалось провести измерения рельефа поверхности. Некоторые расхождения результатов ИК-термографии и moon-glade BOS с результатами моделирования могут быть связаны с неточностью допущения о постоянной мощности лазера и с асимметрией распределения лазерного пучка. Также при усреднении из-за ограничения пространственного разрешения в экспериментальных данных может быть занижена максимальная величина пика, что особенно заметно для жидкостей с присутствием конвекции Марангони.

На Рис. 3.4 представлены результаты сравнения двумерных полей отклонения температуры, полученных в дистиллированной воде экспериментально с помощью тепловизора и рассчитанных в численном моделировании, спустя 0.2, 0.5 и 0.9 с после начала нагрева. На Рис. 3.5 приведены одномерные графики усредненных по углу радиальных профилей отклонений температуры в разные моменты времени после начала нагрева.



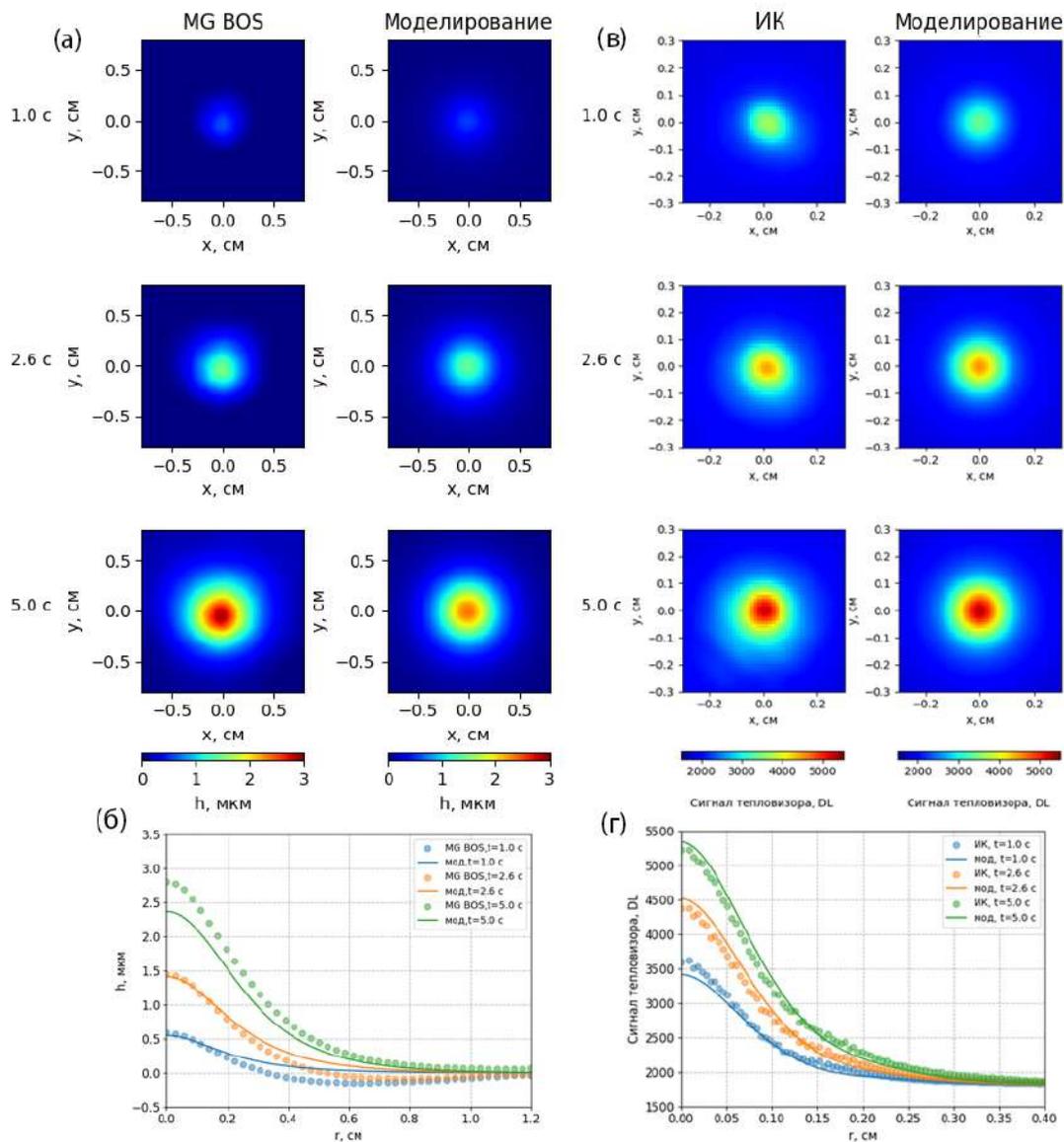
**Рис. 3.4.** Двумерные поля отклонения температуры, полученные в дистиллированной воде а) ИК-термографией, б) из моделирования, спустя 0.2, 0.5 и 0.9 с после начала нагрева.



**Рис. 3.5.** Сравнение одномерных усредненных по углу радиальных профилей отклонений температуры, полученных в дистиллированной воде ИК-термографией и из моделирования в разные моменты времени после начала нагрева.

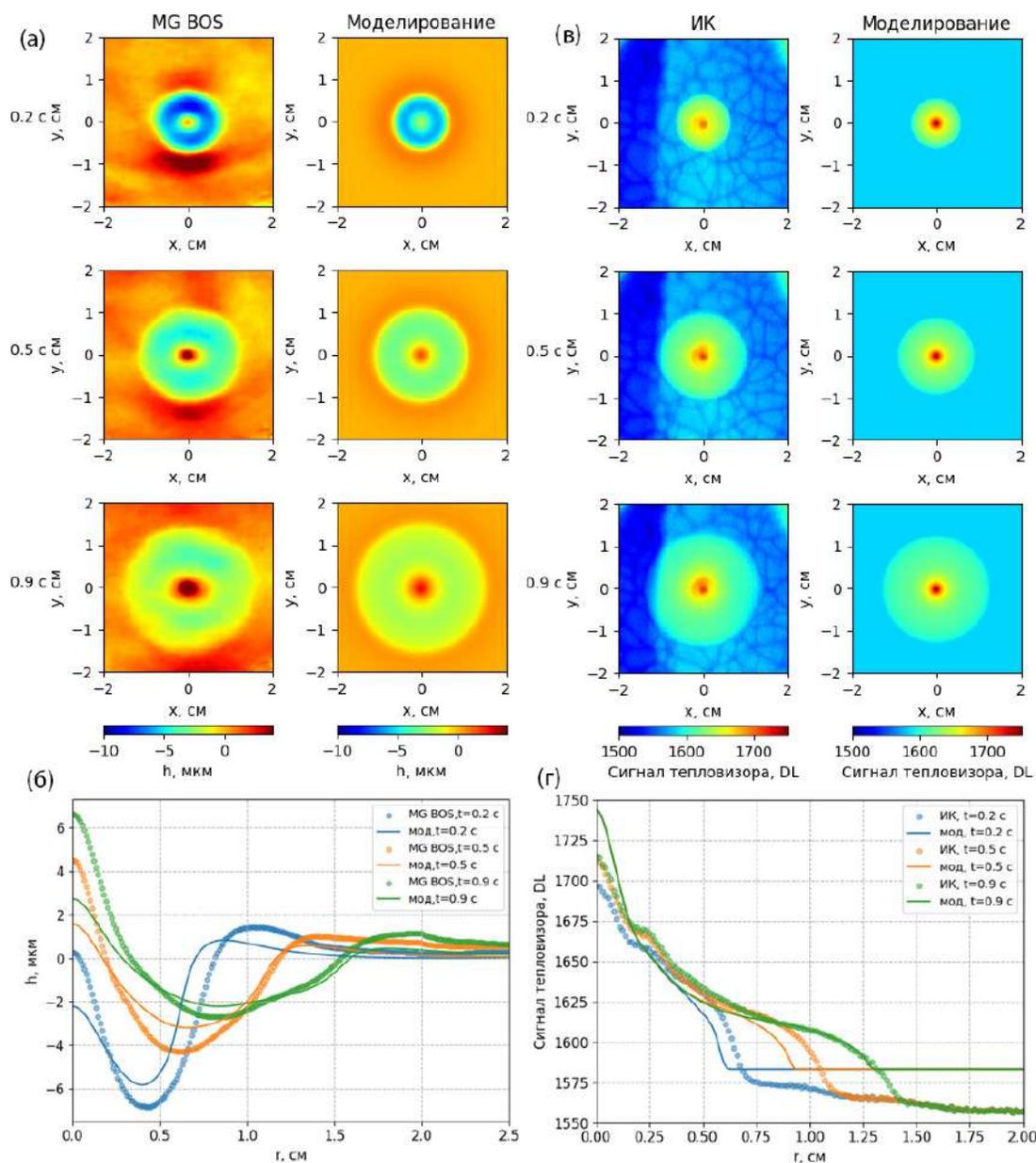
На Рис. 3.6 представлено сравнение термограмм и карт рельефа поверхности, полученных в 90%-ом растворе глицерина с водой экспериментально и рассчитанных в численном моделировании, спустя 1, 2.6 и 5 с после начала нагрева. Приведены графики усредненных по углу радиальных профилей сигнала тепловизора и высоты поверхности для разных моментов времени после начала нагрева.

В дистиллированной воде и в растворе глицерина с водой на поверхности образуется пленка, блокирующая термокапиллярный механизм конвекции. Из термограмм в разные моменты времени видно, что максимум сигнала тепловизора с течением времени растет, радиус теплового пятна медленно увеличивается. Пик сигнала тепловизора соответствует максимуму высоты поверхности. Из-за наличия пленки поверхность практически не обновляется, процесс распространения тепла происходит медленно по сравнению с термокапиллярным механизмом конвекции.



**Рис. 3.6.** Результаты для 90% раствора глицерина с водой: а) карты рельефа поверхности, полученные экспериментально с помощью метода moon-glade BOS и из численного моделирования, б) сравнение усредненных радиальных профилей рельефа поверхности, в) термограммы, полученные экспериментально с помощью ИК-термографии и из численного моделирования, г) сравнение усредненных радиальных профилей сигнала тепловизора спустя 1 с, 2.6 с и 5 с после начала нагрева.

На Рис. 3.7 представлено сравнение термограмм и карт рельефа поверхности, полученных для этанола экспериментально и рассчитанных в численном моделировании, спустя 0.2, 0.5 и 0.9 с после начала нагрева. Приведены графики усредненных по углу радиальных профилей сигнала тепловизора и высоты поверхности в разные моменты времени после начала нагрева.



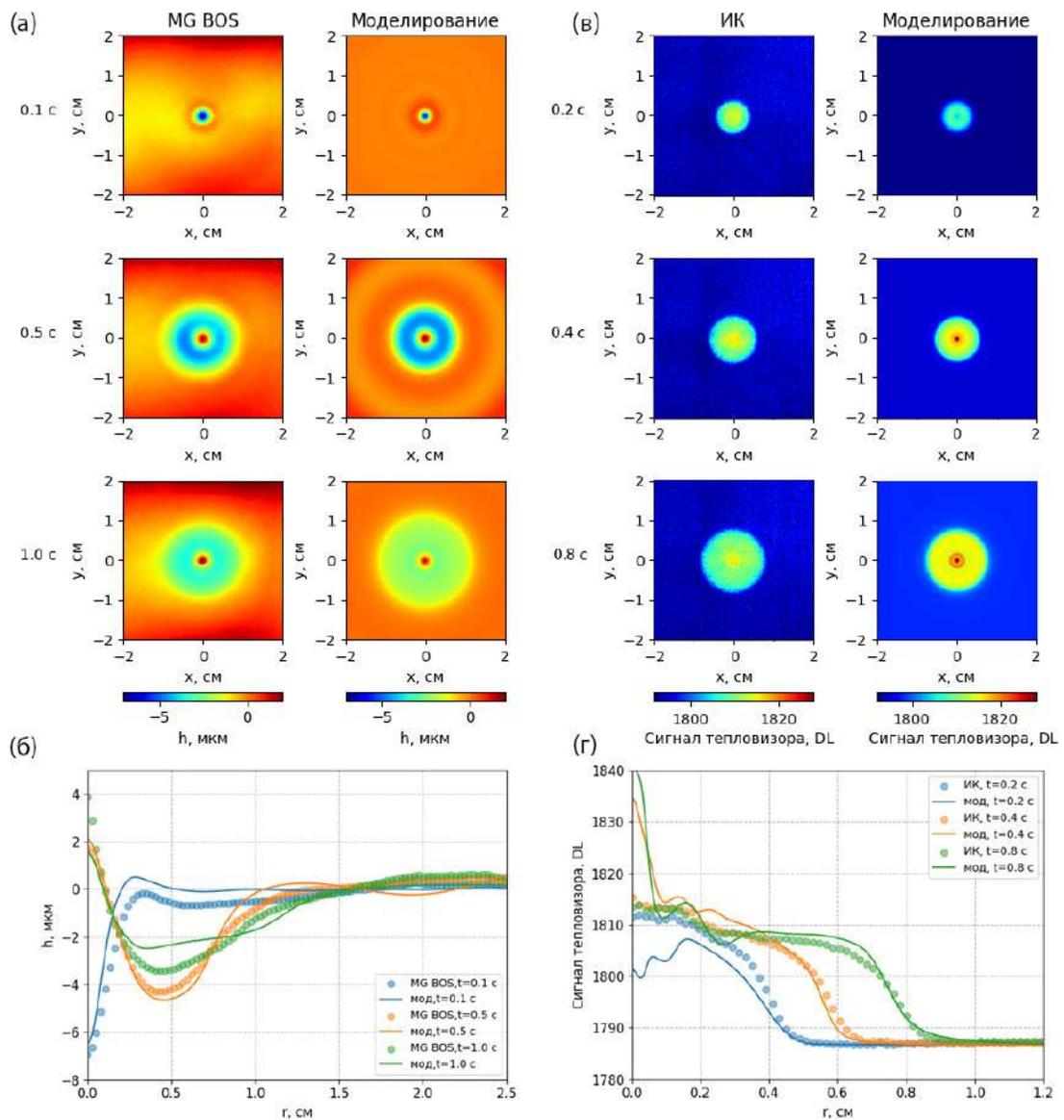
**Рис. 3.7.** Результаты для этанола: а) карты рельефа поверхности, полученные экспериментально с помощью метода moon-glade BOS и из численного моделирования, б) сравнение усредненных радиальных профилей рельефа поверхности, в) термограммы, полученные экспериментально с помощью ИК-термографии и из численного моделирования, г) сравнение усредненных радиальных профилей сигнала тепловизора спустя 0.2, 0.5 и 0.9 с после начала нагрева.

В экспериментальных данных по термографии в этаноле видны конвективные ячейки вне области теплового пятна. Это связано с испарением с поверхности жидкости, которое не учитывалось в моделировании, поэтому в экспериментальных данных усредненные профили сигнала

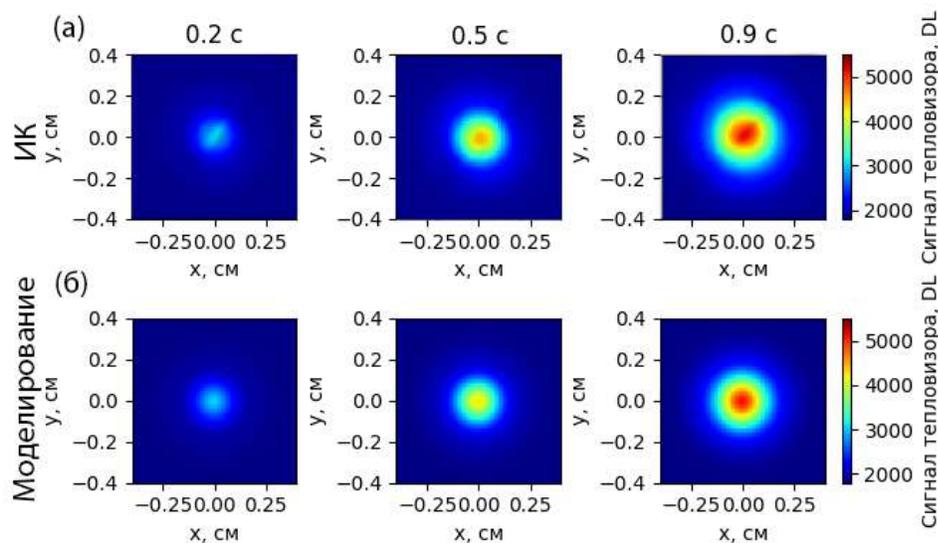
тепловизора вне теплового пятна лежат ниже данных моделирования. Несовпадение данных по рельефу поверхности связано с наличием паразитных волн и не полной симметричностью теплового пятна. Видно различие в форме профилей поверхности в случае жидкости при наличии пленки (Рис. 3.6) и в ее отсутствие (Рис. 3.7). За счет термокапиллярного механизма тепловое пятно расплывается быстрее, от области нагрева распространяется волна, и в первый момент времени в центре пятна образуется впадина. При наличии пленки ситуация иная: жидкость нагревается и не уносится термокапиллярными силами, и чтобы компенсировать давление по сравнению с ненагретой окрестной областью, теплая жидкость под пятном от лазера поднимается и образуется пик. Аналогичная ситуация наблюдается в силиконовых маслах PDMS-6.1 и PDMS-1000, результаты измерений для которых представлены далее. На Рис. 3.8 представлено сравнение термограмм и карт рельефа поверхности, полученных для силиконового масла PDMS-6.1 экспериментально и рассчитанных в численном моделировании в различные моменты времени после начала нагрева. Приведены графики усредненных по углу радиальных профилей сигнала тепловизора и высоты поверхности в разные моменты времени после начала нагрева.

На Рис. 3.9 представлено сравнение двумерных полей отклонения температуры, полученных для силиконового масла PDMS-1000 экспериментально и рассчитанных в численном моделировании спустя различные моменты времени после начала нагрева. Графики усредненных по углу радиальных профилей отклонений температуры приведены на Рис. 3.10.

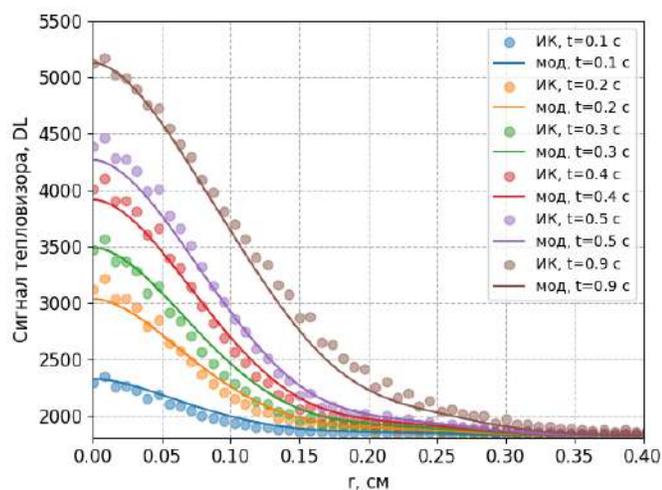
Из измерений рельефа поверхности для PDMS-6.1 видно, что вначале сразу после включения нагрева образуется «впадина», что говорит о наличии термокапиллярных сил, которые переносят жидкость из зоны нагрева. Затем образуется волна, уходящая от места нагрева, а на дне минимума образуется пик. Такое же поведение характерно для этанола. В результатах ИК-термографии видно некоторое отличие максимума сигнала тепловизора по сравнению с моделированием. Это может быть связано с неточным заданием коэффициента поглощения при пересчете температуры поверхности в сигнал тепловизора. Также видно, что ширина пика составляет порядка 1 мм в моделировании. Данные тепловизора усредняются по углу и течение не полностью осесимметричное из-за зависимости распределения мощности лазера от угла, поэтому в экспериментальных данных пиковая температура может быть занижена. Тем не менее, скорость расплывания теплового пятна описывается правильно. Это справедливо и для данных, полученных для масла PDMS-1000 с более высокой вязкостью.



**Рис. 3.8.** Результаты для силиконового масла PDMS-6.1: а) карты рельефа поверхности, полученные экспериментально с помощью метода moon-glade BOS и из численного моделирования, спустя 0.1 с, 0.5 с и 1.0 с после начала нагрева б) сравнение усредненных радиальных профилей рельефа поверхности, в) термограммы, полученные экспериментально с помощью ИК-термографии и из численного моделирования, спустя 0.2, 0.4 и 0.8 с после начала нагрева, г) сравнение усредненных радиальных профилей сигнала тепловизора.



**Рис. 3.9.** Термограммы, полученные в силиконовом масле PDMS-1000 а) ИК-термографией, б) из моделирования, спустя 0.2, 0.5 и 0.9 с после начала нагрева.



**Рис. 3.10.** Сравнение усредненных по углу радиальных профилей сигнала тепловизора, полученных в силиконовом масле PDMS-1000 ИК-термографией и из моделирования в разные моменты времени после начала нагрева.

Таким образом, от свойств межфазных поверхностей зависит скорость расплывания теплового пятна на поверхности жидкости и ее деформация, что демонстрируют ИК-снимки и поля рельефа поверхности, полученные методом moon-glade BOS, для жидкостей при наличии поверхностной пленки, блокирующей конвекцию Марангони, и в ее отсутствие. За счет выбора жидкости без пленки интенсифицируется перенос тепла вблизи поверхности. Для таких жид-

костей возможна очистка поверхности с помощью термокапиллярного потока. Анализ свойств межфазных поверхностей с помощью ИК-термографии может применяться в задачах мониторинга состояния поверхности.

## 4 Восстановление характеристик турбулентного течения с помощью ассимиляции температурных полей

В работе предложены две новые методики ассимиляции данных для турбулентных квазистационарных течений, которые позволяют восстанавливать поля скорости, давления, турбулентных вязкости и теплопроводности по экспериментально измеренным полям температуры и значениям скорости в некоторых точках. Первый способ подразумевает прямую подстановку экспериментальных данных температуры, предварительно сглаженных с применением различных фильтров, в уравнения гидродинамики с последующим численным решением системы уравнений. Во втором способе используется физически-информированная нейросеть (PINN), которая обучается восстанавливать характеристики течения по исходным экспериментальным данным температуры и скорости без предварительной фильтрации. В работе поля температуры регистрируются с помощью теневого фонового метода (ТФМ), профили скорости измеряются термоанемометром. Методы ассимиляции данных применяются для двух разных конфигураций осесимметричных квазистационарных турбулентных течений: свободной и импактной струй горячего воздуха. Оба подхода позволяют из измеренного поля температуры восстановить турбулентные характеристики течения без использования конкретных моделей турбулентности, которые, как было получено в других работах [78], могут давать значительные расхождения в полях турбулентных величин (около 60%). При восстановлении с помощью PINN рассматриваются разные варианты ассимиляции данных: в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля, из которого следует подобие полей турбулентной вязкости и теплопроводности, и при независимом восстановлении данных величин. В численных расчетах турбулентное число Прандтля часто задается как постоянная величина, что выполняется в некотором приближении [75].

В разделе 4.1 приведены параметры экспериментальной установки. Метод восстановления с прямой подстановкой экспериментальных данных в систему уравнений гидродинамики с после-

дующим численным расчетом описывается в разделе 4.2, метод ассимиляции данных при помощи нейросети – в разделе 4.3. Подробности численного моделирования приведены в разделе 4.4. В разделе 4.5 полученные из ассимиляции данные сравниваются с численным моделированием с использованием различных моделей турбулентности.

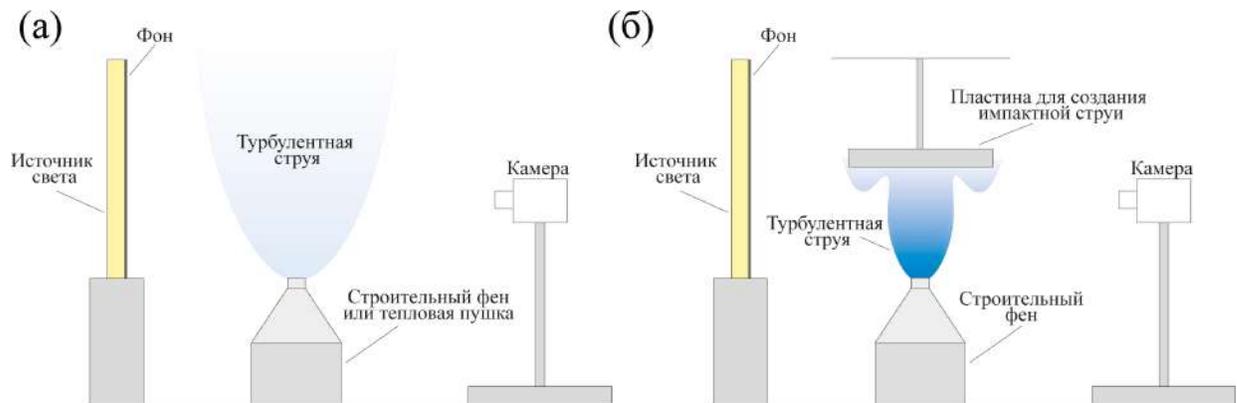
## 4.1 Экспериментальная установка ТФМ

Поля температуры для струи горячего воздуха измеряются с помощью теневого фонового метода (ТФМ) [117, 127], который становится все более популярным, так как не требует дорогостоящего оборудования и является более простым в реализации по сравнению с другими рефракционными методами.

Одноракурсный ТФМ подразумевает использование одной камеры и подходит для количественной визуализации двумерных и осесимметричных течений, а также для качественной визуализации трехмерных потоков без применения дорогостоящих линз или зеркал. Метод основан на цифровом сравнении двух снимков одного и того же фона, сделанных при отсутствии шлирен-объекта (опорное изображение) и при его наличии (рабочее изображение). Из-за преломления световых лучей при прохождении через шлирен-объект рисунок фона искажается. Смещения элементов фона пропорциональны усредненному вдоль луча градиенту показателя преломления. Поле смещений определяется с помощью компьютерной обработки изображений, затем из полей своих первых пространственных производных восстанавливается поле показателя преломления, по которому рассчитываются связанные величины, такие как плотность, температура и концентрация раствора. В различных задачах могут использоваться разные варианты фонов и методики обработки в зависимости от пространственного градиента смещений [128]. В большинстве случаев используется фон из хаотически расположенных черно-белых пятен с последующей кросс-корреляционной обработкой подобно методу PIV. Но такой алгоритм ограничивает пространственное разрешение и обычно недооценивает значения смещений в областях с большими градиентами смещений, что приводит к неправильному восстановлению поля показателя преломления [118]. В работе [119] было показано, что пространственное разрешение и устойчивость к большому градиенту смещений можно значительно улучшить, используя периодический синусоидальный фон или фон из бинарных полос с последующей обработкой с помощью фурье-профилометрии (алгоритм FTP), который был впервые предложен в [120] для применения в интерферометрии и трехмерной профилометрии поверхности. В данной работе

используется фон из бинарных полос и ФТР-обработка изображений.

Экспериментальная установка ТФМ для вертикальной свободной струи представлена на Рис. 4.1а, для импактной струи на Рис. 4.1б.



**Рис. 4.1.** Схема установки ТФМ для измерения полей температуры для течений а) осесимметричной свободной струи горячего воздуха, б) импактной струи горячего воздуха.

Вертикальная осесимметричная струя горячего воздуха создается с помощью двух разных установок: строительного фена и тепловой пушки. Их отличие состоит в конфигурации нагревательного элемента. Строительный фен имеет кольцеобразный нагреватель, поэтому максимум температуры наблюдается по краям сопла. В тепловой пушке нагреватель плоский и имеет прямоугольную форму, сверху установлена сетка, которая обеспечивает более равномерную турбулизацию потока. Для создания импактной струи использовался строительный фен с насадкой в виде конуса для дополнительного перемешивания, улучшающего симметрию течения. Чтобы исключить естественную конвекцию вблизи внешней поверхности сопла, сопло было обернуто в стеклянную тепловату.

Радиус сопла строительного фена равен 11 мм, максимальная скорость на выходе сопла составляет около 9 м/с. Эксперименты проводились при разных температурах струи на входе: 160°C, 320°C и 400°C. Скорость измеряется термоанемометром при температуре воздуха 28°C. Измерения расхода воздуха в различных режимах фена показали, что расход можно считать постоянным. При моделировании экспериментов с различными температурными режимами учитывается поправка на скорость, которая рассчитывается из условия постоянного расхода воздуха.

Число Рейнольдса, основанное на диаметре сопла, для разных экспериментов со свободной струей воздуха лежит в диапазоне от 13000 до 18000. Радиус сопла для тепловой пушки

равняется 12 мм, максимальная скорость и температура составляют приблизительно 6 м/с и 175°C, соответственно. Число Рейнольдса для данной конфигурации установки меняется от 9160 до 15000.

Для создания импактных струй латунный диск радиусом 6 см помещается на высоте 3.3 см, 4.7 см и 14.7 см от выхода сопла. Вблизи пластины становятся заметными эффекты, связанные с асимметричностью струи. Поэтому для данной конфигурации фен помещается во вращающийся держатель, ось которого совпадает с осью сопла фена. Среднее поле температуры получается в результате обработки 10 серий, каждая из которых состоит из 40 кадров и снимается для определенного углового положения фена с шагом 18°. Температура струи на входе в разных экспериментах составляет: 160°C, 320°C и 400°C. Радиус насадки для строительного фена составляет 18 мм. Число Рейнольдса для данной конфигурации установки лежит в пределах от 20000 до 30000. Температура воздуха в комнате во всех экспериментах равнялась 22°C.

В ТФМ используется фон из регулярно расположенных квадратных пятен с периодом 8.5 пикс. Фон, напечатанный на прозрачной пленке, прикрепляется к стеклянной пластине и подсвечивается сзади светодиодной панелью. Расстояние между фоном и соплом составляет 108 см и 111 см для экспериментов со строительным феном и с тепловой пушкой, соответственно. Камера Canon EOS 700D с зумобъективом Canon EF-S 18–55 мм f/3.5–5.6 в положении 55 мм, находящаяся в 113 см от сопла, производит фотосъемку с частотой 1 кадр/с. Параметры экспозиции задаются равными: ISO 400, 1/100 с, f/22. Для получения среднего поля усредняются 400 мгновенных полей смещения. Для экспериментов со строительным феном максимальные смещения составляют около 3-5 пикс в радиальном и 0.2-0.4 пикс в осевом направлении, соответственно. В экспериментах с тепловой пушкой максимальные смещения в радиальном направлении имеют такую же величину, смещения в осевом направлении немного больше и составляют 0.5 пикс. После нахождения среднего поля смещения с помощью обратного преобразования Абеля определяются пространственные производные показателя преломления, и в результате решения уравнения Пуассона в цилиндрических координатах находится распределение показателя преломления  $n(r, z)$ . Поле плотности получается из соотношения Гладстона-Дейла:

$$\frac{n - 1}{\rho} = G, \quad (4.1)$$

где  $G = 2.26 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг}$  — постоянная Гладстона-Дейла для воздуха. Поле температуры рассчитывается из уравнения состояния с постоянным давлением.

С помощью термоанемометра PCE-423 измеряются профили скорости вдоль оси и поперек

струи в нескольких сечениях по  $z$ , в том числе на выходе сопла. Эти данные используются для подбора параметров моделей турбулентности в RANS-моделировании, задания граничного условия на выходе сопла, в качестве дополнительных данных для нейросети и для сравнения с результатами проведенной ассимиляции данных. Погрешность измерения скорости, указанная производителем термоанемометра, составляет 5%, но не менее 0.1 м/с.

## 4.2 Методика восстановления с прямой подстановкой экспериментальных данных в уравнения

Квазистационарное состояние вертикальной осесимметричной струи горячего воздуха из круглого сопла описывается RANS-уравнениями для слабосжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r} + \frac{\rho V_r}{r} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} &= 0, \\
\rho \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left( \Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial r} \left( -\frac{2}{3} \nabla \vec{V} + 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \right), \\
\rho \left( V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta V_z + \frac{\partial \eta}{\partial r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \left( -\frac{2}{3} \nabla \vec{V} + 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) - (\rho - \rho_0)g, \\
C_p \rho \left( V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \lambda \Delta T + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z}, \\
\rho &= \frac{p_0 \mu}{RT},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где операторы:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  и  $\nabla \vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ . Ось  $z$  направлена вдоль струи, начало координат соответствует центру сопла.  $\rho$ ,  $T$  и  $\vec{V}$  – плотность жидкости, температура и скорость,  $p$  – отклонение давления от атмосферного  $p_0$ .  $c_p$  – удельная теплоемкость,  $\mu$  – молярная масса воздуха,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $g$  – ускорение свободного падения.  $\eta$ ,  $\lambda$  – полные коэффициенты вязкости и теплопроводности, то есть:

$$\eta = \eta_0 + \eta_t, \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_t, \tag{4.3}$$

где  $\eta_0$ ,  $\eta_t$  – молекулярная и турбулентная вязкости,  $\lambda_0$  – молекулярная теплопроводность и

$$\lambda_t = \eta_t c_p / Pr_t \tag{4.4}$$

турбулентная теплопроводность. В данном способе ассимиляции данных предполагается, что турбулентное число Прандтля постоянно.

Если поле температуры известно, то уравнение энергии системы (4.2) можно рассматривать относительно неизвестной эффективной теплопроводности, а плотность определять через уравнение состояния. В таком случае система уравнений (4.2) замкнута относительно радиальной и

осевой скоростей, давления, турбулентных вязкости и теплопроводности. Численно решая данную систему с соответствующими граничными условиями, можно получить полное описание турбулентного течения без использования дополнительной модели турбулентности. Можно сказать, что поле турбулентной вязкости определяется по влиянию эффективной теплопроводности на квазистационарное поле температуры.

Таким образом, вне струи возмущения температуры малы, производные температуры близки к нулю, поэтому уравнение энергии вырождается. Для получения устойчивого решения в таких областях необходима регуляризация. С этой целью в уравнение энергии добавляется член, пропорциональный лапласиану эффективной теплопроводности  $\Delta\lambda$ , и оно принимает вид:

$$C_p\rho\left(V_r\frac{\partial T}{\partial r}+V_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+k\Delta\lambda=\lambda\Delta T+\frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z}. \quad (4.5)$$

Расчеты, проведенные для свободной струи горячего воздуха, показывают, что устойчивое решение получается при отрицательных значениях параметра  $k$ . Параметр регуляризации определяется через локальное значение температуры:

$$k(r,z)=\frac{1}{2}\left((k_{jet}+k_0)+(k_{jet}-k_0)\operatorname{th}\left(\frac{T(r,z)-T_0}{\delta_k}\right)\right). \quad (4.6)$$

где  $k_0=-100$  К,  $k_{jet}=-0.05$  К,  $\delta_k=1$  К. Данная функция позволяет применить сильную регуляризацию в области вне струи, где производные температуры близки к нулю, и более слабую регуляризацию в самой струе.

Коэффициенты уравнения (4.5) относительно теплопроводности содержат первые и вторые производные температуры. Так как производные от экспериментальных данных температуры получаются некорректными из-за шума, необходима предобработка исходных данных. Для сглаживания зашумленных данных и определения производных реализуется три разных подхода.

Первый подход подразумевает аппроксимацию поля температуры гауссовой функцией:

$$T_G(r,z)-T_0=\frac{A\exp\left(-\alpha\left(\frac{r}{z+z_0}\right)^2\right)}{z+z_1}, \quad (4.7)$$

где  $\alpha$ ,  $A$ ,  $z_0$ ,  $z_1$  – коэффициенты аппроксимации,  $T_0$  – невозмущенная температура. После этого производные температуры можно рассчитывать аналитически. Во втором подходе для получения сглаженного распределения температуры  $T_{Helm}(r,z)$  решается модифицированное уравнение Гельмгольца:

$$-c\Delta T_{Helm}+T_{Helm}=T_{BOS}, \quad (4.8)$$

где  $T_{BOS}$  – поле температуры, полученное в эксперименте. Далее производные от сглаженного поля  $T_{Helm}(r, z)$  находятся численно с помощью центральных разностей. В третьем подходе используется фильтр Савицкого-Голея, который аппроксимирует фрагменты экспериментальных данных полиномом низкой степени и определяет как сглаженное поле температуры, так и его пространственные производные.

Полученные после обработки одним из трех способов поле температур и его производные подставляются в уравнения системы (4.2), которые решаются численно в пакете Comsol 6.2. Схема восстановления представлена на Рис. 4.2.



**Рис. 4.2.** Схема восстановления течения с подстановкой экспериментальных данных температуры в уравнения гидродинамики и последующим численным расчетом.

Профили скорости вдоль оси струи, на срезе сопла и поперек струи на разных высотах измеряются термоанемометром PCE-423. Эти измерения используются для определения граничного условия для скорости на срезе сопла (4.13), для подбора параметров моделей турбулентности в RANS-моделировании и для сравнения с результатами проведенной ассимиляции данных.

С помощью предложенного способа были восстановлены поля скорости, вязкости и теплопроводности для течения осесимметричной вертикальной струи горячего воздуха, создаваемой двумя разными источниками: тепловой пушкой и строительным феном.

Такой подход с прямой подстановкой данных в уравнения обладает рядом недостатков. Экспериментальные измерения характеризуются наличием шума вследствие не строгой симметричности струи и погрешностью метода измерений. Поэтому для полей температуры и его производных требуется предварительная обработка, а уравнения необходимо модифицировать для повышения устойчивости. При изменении конфигурации течения необходимость подбора оптимальных параметров для аппроксимации и вида регуляризирующего слагаемого приводит к уменьшению универсальности предложенного метода. Поэтому в следующем разделе предложен альтернативный метод восстановления с помощью нейросети, которая используется как инструмент для подбора наиболее подходящих полей, описывающих течение.

### **4.3 Методика восстановления с помощью физически-информированной нейросети (PINN)**

В данной работе с помощью физически-информированной нейросети (PINN) было проведено восстановление течения осесимметричной турбулентной струи воздуха из полей температуры и радиальных профилей осевой скорости, измеренных соответственно с помощью теневого фонового метода (ТФМ) и термоанемометра. Следует отметить, что PINN позволяет восстановить течение для конкретного эксперимента, обучение проходит с использованием одного поля температуры, полученного из этого эксперимента. Была проведена реконструкция в предположении постоянного турбулентного числа Прандтля, в таком случае турбулентная теплопроводность и турбулентная вязкость связаны однозначно через соотношение (4.4), и система (4.2) оказывается замкнутой. В другом варианте восстановления предположение о постоянстве турбулентного числа Прандтля опускалось и количество неизвестных ( $V_r$ ,  $V_z$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\lambda$ ,  $\eta$ ) оказывалось больше, чем уравнений. Поэтому дополнительно, помимо температурных данных, также использовались результаты измерений скорости в некоторых точках.

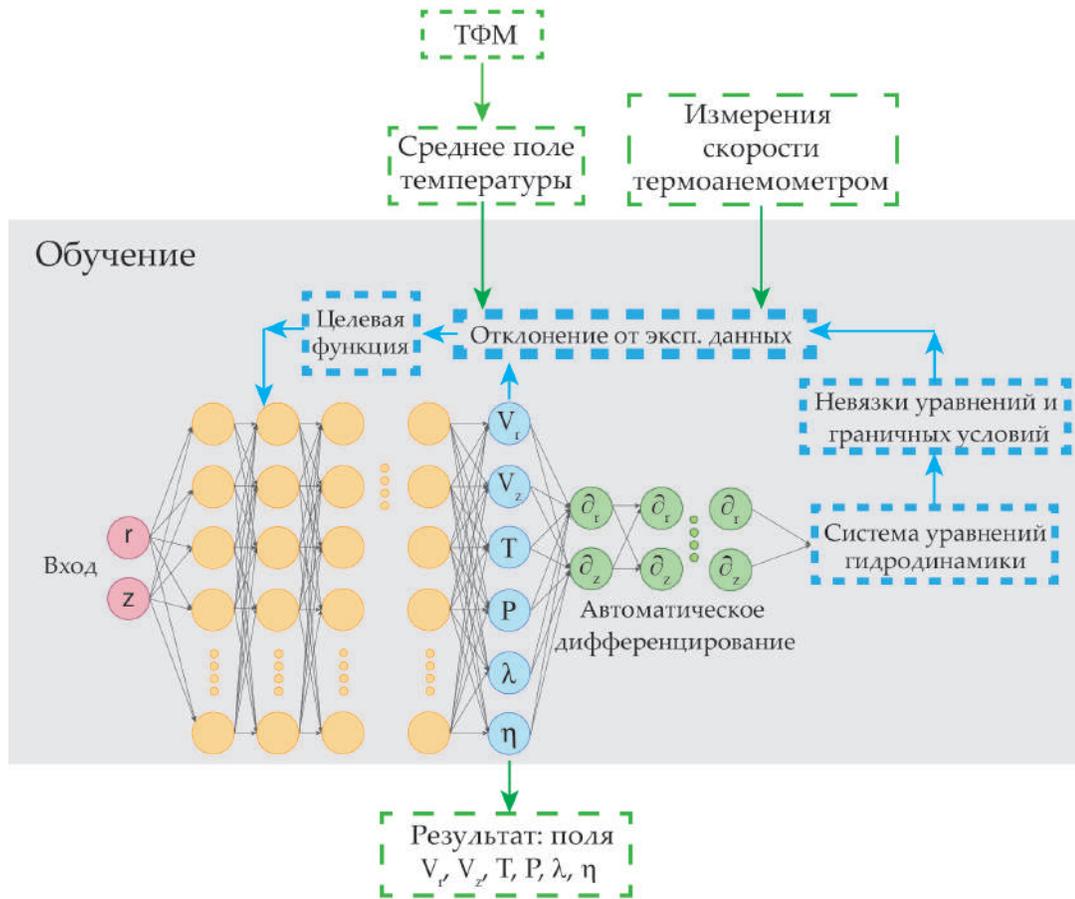
При обычном применении нейронных сетей производится предварительное обучение сети на большом количестве решенных задач (размеченных данных). Затем обученная сеть используется для быстрого решения похожих задач. В экспериментальной гидродинамике создать массив размеченных данных на основе экспериментальных измерений практически невозможно – для этого требуется измерить поля всех гидродинамических величин, включая давление и турбулентную вязкость. Можно обучить сеть на основе данных моделирования, но при этом встает

вопрос о соответствии распределений величин в моделировании и реальном эксперименте. Для турбулентных течений существенные отличия между моделированием и экспериментом могут возникать из-за ограниченной точности используемой в моделировании полуэмпирической модели турбулентности. Ассимиляция данных с помощью физически-информированной нейросети (PINN) не требует предварительного обучения на размеченных данных. Вместо этого на основе ограниченных данных, полученных в одном эксперименте (например, поля скорости и температуры), производится подбор полей всех величин, которые обеспечивали бы, с одной стороны, минимальное отклонение от результатов измерений, с другой стороны – минимальные невязки уравнений гидродинамики и граничных условий. Фактически PINN решает задачу аппроксимации с очень большим числом неизвестных параметров. Роль ограничений играют имеющиеся экспериментальные данные, уравнения, описывающие течение, и известные граничные условия. При этом используется тот же аппарат, что и при стандартном применении нейронных сетей. Сеть состоит из нескольких слоев нейронов (Рис. 4.3), которые описываются линейными функциями, и нелинейных функций активации между слоями. То есть используется многослойная полносвязная нейросеть. В ходе обучения производится поиск минимума целевой функции  $\mathcal{L}_{PINN}$ , состоящей из нескольких слагаемых:

$$\mathcal{L}_{PINN} = \mathcal{L}_{data} + \mathcal{L}_{PDE} + \mathcal{L}_{BC}. \quad (4.9)$$

Слагаемое  $\mathcal{L}_{data}$  связано с отклонением предсказанных нейросетью данных от экспериментальных. В данной работе это значения температуры во всей области измерения и значения осевой скорости в определенных точках. Слагаемое  $\mathcal{L}_{PDE}$  описывает невязки уравнений гидродинамики, а  $\mathcal{L}_{BC}$  связано с отклонением от граничных условий.

Автоматическое дифференцирование [110], которое в стандартных нейросетях применяется для определения производных целевой функции по весам модели в ходе оптимизации, здесь также позволяет найти пространственные производные гидродинамических величин, входящие в уравнения. Одно из преимуществ использования такого подхода состоит в том, что автоматическое дифференцирование позволяет избежать проблем, возникающих при взятии численных производных от шумных данных, как было показано в работе [79].



**Рис. 4.3.** Архитектура PINN и процесс обучения.

В настоящее время существует несколько разных библиотек для создания и обучения нейросетей, а также использования автоматического дифференцирования. В данной работе использовался язык программирования Python и библиотека PyTorch.

Для подбора оптимальных параметров нейросети были проведены эксперименты на синтетических данных, рассчитанных из RANS-моделирования с включенной  $k$ - $\varepsilon$  моделью турбулентности, аналогично [112]. Под параметрами подразумеваются: архитектура нейросети (количество скрытых слоев, количество нейронов в каждом скрытом слое), веса разных частей целевой функции, шаг оптимизатора. Затем с подобранными параметрами нейросеть обучалась на экспериментальных данных температуры и скорости. В результате обучения восстанавливаются поля скорости, давления, полных вязкости и теплопроводности, а также сглаженное поле температуры. Полученные с помощью ассимиляции данных поля сравниваются с рассчитанными из RANS-моделирования с использованием модифицированной модели турбулентности Спаларта–Аллмараса и модели  $k$ - $\varepsilon$ . Для вертикальной свободной струи было показано, что

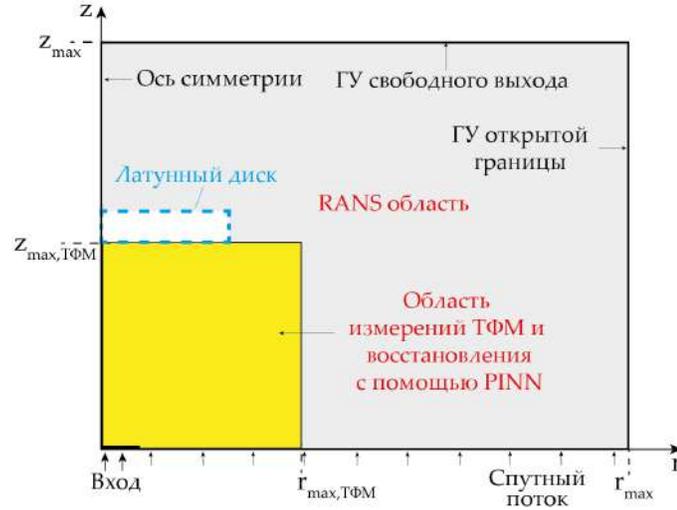
модель Спаларта–Аллмараса дает завышенный угол расширения струи, поэтому течение импактной струи моделировалось только с применением  $k$ - $\varepsilon$  модели.

Квазистационарное состояние струи горячего воздуха описывается уравнениями (4.2). Турбулентная вязкость и турбулентная теплопроводность связаны соотношением (4.4). Чаще всего турбулентное число Прандтля  $Pr_t$  предполагается постоянным и равным 0.9. В работе [112] было проведено восстановление течения свободной осесимметричной струи для постоянного турбулентного числа Прандтля. Стоит отметить, это предположение не совсем верно, как следует из расчетов LES [75] и из экспериментальных данных [115, 116], в которых было показано, что турбулентное число Прандтля различно в разных точках струи. Поэтому в данной работе восстановление течения проведено как в предположении постоянного  $Pr_t$ , так и для случая, когда турбулентная вязкость и теплопроводность восстанавливаются независимо, а турбулентное число Прандтля можно получить, исходя из соотношения (4.4).

Все величины в уравнениях (4.2) нормируются так, чтобы выходы нейросети по абсолютному значению не превосходили единицы. Масштабирование параметров увеличивает скорость обучения и улучшает качество предсказанных данных. Пространственные координаты  $r$  и  $z$ , компоненты скорости, давление и отклонение температуры приводятся к безразмерным величинам путем деления на  $l$ ,  $V_0$ ,  $\rho_0 V_0^2$  и  $T_{\max}$ , соответственно. Указанные нормировочные параметры подбирались исходя из максимальных величин из экспериментальных данных.

Выходной слой нейросети состоит из 6 компонент:  $(a, V_z, T, p, \lambda, \eta)$ . Здесь  $a = V_r/r$ . Такая замена позволяет избежать роста величины невязок уравнений вблизи оси из-за слагаемых, пропорциональных  $1/r$ . Чтобы привести выходы  $(a, V_z, p)$  нейросети к диапазону  $[-1, 1]$ , а вход  $(r, z)$  и оставшиеся выходы  $(T, \lambda, \eta)$  к диапазону  $[0, 1]$ , параметр  $a$ , координаты  $r$  и  $z$ ,  $p$ ,  $\lambda$ ,  $\eta$  дополнительно нормируются на безразмерные максимальные значения  $a_{\max}$ ,  $z_0$ ,  $p_{\max}$ ,  $\lambda_{\max}$ ,  $\eta_{\max}$ , соответственно, полученные из численного моделирования.

Функция потерь (4.9) задается в точках расчетной области, исключая ее границы. Она совпадает с областью измерений ТФМ. Для постановки корректных граничных условий в моделировании использовалась более широкая расчетная область. Границы расчетных областей в моделировании, ТФМ и выбранных для восстановления с PINN показаны на Рис. 4.4.



**Рис. 4.4.** Схема расчётных областей для измерений BOS, реконструкции методом PINN и моделирования RANS.

Размеры области восстановления в PINN,  $r_{\max, \text{ТФМ}} \times z_{\max, \text{ТФМ}}$ , составляют:  $13 \times 3.3 \text{ см}^2$ ,  $15 \times 4.7 \text{ см}^2$ ,  $18 \times 14.7 \text{ см}^2$  - для экспериментов с импактной струей с расстояниями между соплом и пластиной: 3.3 см, 4.7 см, 14.7 см, соответственно. Для свободной струи размеры области задавались равными  $10 \times 20 \text{ см}^2$ .

Слагаемое  $\mathcal{L}_{PDE}$  функции потерь (4.9) представляет сумму взвешенных невязок уравнений (4.2). Невязки уравнений непрерывности, движения в осевом и радиальном направлениях и энергии выражаются соответственно через:  $\mathcal{L}_c$ ,  $\mathcal{L}_r$ ,  $\mathcal{L}_z$ ,  $\mathcal{L}_e$ . Для каждого уравнения рассчитывается сумма среднеквадратичных отклонений (MSE) во всех узлах расчетной сетки, состоящей из  $100 \times 50 = 5000$  узлов. Для экспериментов со свободной струей использовалась равномерная сетка, для импактной струи с целью разрешения горизонтального погранслоя была выбрана неравномерная прямоугольная сетка, сгущающаяся ближе к поверхности пластины с минимальным шагом 0.4 мм и в радиальном направлении ближе к оси с минимальным шагом 0.9 мм.

Если предполагается, что турбулентное число Прандтля не фиксировано, то условие (4.4) включается в целевую функцию со следующим коэффициентом:

$$w_{Pr_t} = \begin{cases} 1000 \cdot (1 - n_{iter}/600), & n_{iter} \leq 600, \\ 0, & n_{iter} > 600, \end{cases} \quad (4.10)$$

где  $n_{iter}$  обозначает номер итерации во время обучения. Такой вид коэффициента позволяет постепенно исключать условие (4.4) из целевой функции. Данный подход аналогичен процессу оптимизации для переменного  $Pr_t$  с начальным приближением, полученным при постоянном

турбулентном числе Прандтля, что повышает устойчивость обучения нейронной сети на начальных итерациях.

Слагаемое  $\mathcal{L}_{data}$  состоит из средней суммы квадратов отклонений (MSE) между предсказанными значениями температуры  $T$  и экспериментальными данными  $T_{exp}$ , полученными ТФМ, и MSE между предсказанными значениями осевой скорости  $V_z$  и значениями, измеренными термоанемометром  $V_{z,exp}$ , с соответствующими весовыми коэффициентами  $w_{d,T}$  и  $w_{d,V_z}$ :

$$\mathcal{L}_{data} = \frac{w_{d,T}}{N} \sum_{i=1}^N (T(r_i, z_i) - T_{exp}(r_i, z_i))^2 + \frac{w_{d,V_z}}{M} \sum_{j=1}^M (V_z(r_j, z_j) - V_{z,exp}(r_j, z_j))^2. \quad (4.11)$$

Отклонения экспериментальных данных по температуре рассчитываются на равномерной сетке, состоящей из 8100 узлов, отклонения для радиальных профилей скорости задаются в тех же точках, в которых скорость измеряется термоанемометром (порядка 20 точек).

Слагаемое  $\mathcal{L}_{BC}$  представляет взвешенную сумму среднеквадратичных отклонений от граничных условий на входе,  $\mathcal{L}_{in}$ ; на правой свободной границе,  $\mathcal{L}_{free}$ ; на оси,  $\mathcal{L}_{axis}$  и для импактных струй на поверхности диска,  $\mathcal{L}_{plate}$ .

$$\mathcal{L}_{BC} = w_{in}\mathcal{L}_{in} + w_{axis}\mathcal{L}_{axis} + w_{free}\mathcal{L}_{free} + w_{plate}\mathcal{L}_{plate}. \quad (4.12)$$

Общее количество точек, в которых рассчитываются отклонения от граничных условий, равняется 500. Были заданы следующие граничные условия.

- На срезе сопла ( $z=0$ ) осевая скорость аппроксимировалась степенной зависимостью с учетом поправки на температуру:

$$V_z(r, z = 0) = V_0 \left(1 - \frac{r}{r_{jet}}\right)^\alpha \cdot \frac{T_{exp,in}(r)}{T_0}, \quad r \leq r_{jet}, \quad (4.13)$$

с гладким переходом на спутный внешний поток величиной  $0.02V_0$  при  $r > r_{jet}$ , где  $r_{jet}$  – радиус сопла. Включение внешнего потока улучшает сходимость RANS-вычислений. Показатель степени  $\alpha$  задан равным  $6/13$  для конфигурации свободной струи и  $10/13$  для импактных струй. Радиальная скорость на входе равняется нулю, что соответствует условию  $a(r, z = 0) = 0$ . Отношение полной вязкости к молекулярной  $\eta/\eta_0$  равняется 80 (для импактной струи) и 10 (для свободной струи) при  $r \leq r_{jet}$  с гладким переходом на 3 при  $r > r_{jet}$ . Отношение полной теплопроводности к молекулярной  $\lambda/\lambda_0$  определяется из соотношения (4.4) через турбулентное число  $Pr_t=0.9$ . Разность входных профилей скорости и вязкости для свободной и импактной струй связана с наличием насадки в последней конфигурации.

- На оси ( $r=0$ ) условие для параметра  $a$  выводится из уравнения непрерывности при  $r=0$ , которое в итоге имеет вид:  $2\rho a + \partial(\rho V_z)/\partial z = 0$ . Для осевой скорости, полной вязкости и теплопроводности задаются условия симметрии:  $\partial V_z/\partial r = \partial \eta/\partial r = \partial \lambda/\partial r = 0$ .
- На правой границе ( $r = r_{max,exp}$ ) задаются условия для возмущения давления:  $p=0$  и для турбулентного числа Прандтля  $Pr_t=0.9$  для свободной струи. Для импактной струи справедливы те же условия, исключая область с горизонтальным погранслоем вблизи пластины.
- На поверхности диска ( $r \leq r_{plate}, z = z_{max,exp}$ ) для импактной струи задается условие прилипания:  $a=0$  и  $V_z=0$ . Значения турбулентных вязкости и теплопроводности устанавливаются равными нулю.

Алгоритм методики восстановления схематично показан на Рис. 4.5.

Выбор весовых коэффициентов связан с количеством слагаемых, которые необходимо минимизировать, и зависит от уровня шума в экспериментальных данных. Самый простой способ – использование постоянных значений коэффициентов, которые подбираются так, чтобы получить минимальное значение целевой функции при разумном времени обучения нейросети. В первую очередь нейросеть будет пытаться минимизировать части с большими весовыми коэффициентами, поэтому обычно перед слагаемым  $\mathcal{L}_{data}$  указывается наибольший коэффициент. Это приводит к тому, что в начале обучения правильно восстанавливаются те величины, которые входят в расчет отклонений от экспериментальных данных, а затем минимизируются остальные слагаемые, связанные с невязками уравнений и граничных условий. При слишком большом коэффициенте нейросеть может выучить особенности измеренного поля температуры, которые в силу погрешностей экспериментальной установки и метода являются некорректными. Если весовой коэффициент перед экспериментальными данными меньше, чем коэффициент перед слагаемым, связанным с невязками от уравнений, то нейросеть может предсказывать нулевые или постоянные значения величин, что соответствует тривиальному решению уравнений. Если данные эксперимента достаточно шумные, имеет смысл уменьшить связанный с ними коэффициент, так как нейросеть может выучить шум и предсказывать недостоверные поля других величин, которые соответствуют уравнениям, но не являются верными.



**Рис. 4.5.** Схема восстановления течения с помощью PINN с использованием температурного поля, полученного ТФМ.

В данной работе используется функция потерь с постоянными коэффициентами. В связи с наличием случайного шума в поле температуры и систематической погрешности, связанной с асимметрией струи, были подобраны такие коэффициенты, чтобы нейросеть не полностью копировала экспериментальные данные, а приближалась бы к ним при одновременной минимизации невязок уравнений. Значения коэффициентов для различных вариантов восстановления представлены в Табл. 4.1.

**Таблица 4.1.** Весовые коэффициенты для целевой функции.

		$w_{d,T}$	$w_{d,V_z}$	$w_{in}$	$w_{plate}$	$w_{axis}$	$w_{free}$	$w_{Pr_t}$	$w_{Pr_t,free}$
Свободная струя	$Pr_t = 0.9$	500	0	100	-	10	100	100	100
	$Pr_t = 0.9,$ $c V_{z,exp}$	500	10	100	-	10	100	100	100
	$Pr_t \neq const,$ $c V_{z,exp}$	500	10	100	-	10	100	см.(4.10)	100
Импактная струя	$Pr_t = 0.9$	100	0	1	1	0.01	1	100	100
	$Pr_t = 0.9,$ $c V_{z,exp}$	100	100	1	1	0.01	1	100	100
	$Pr_t \neq const,$ $c V_{z,exp}$	100	100	1	1	0.01	1	см.(4.10)	100

Недостаток выбора постоянных значений коэффициентов связан с произвольностью и большими затратами на время обучения нейросети. Существуют и другие способы задания коэффициентов [68, 111]. Смысл этих методик состоит в адаптивном подборе весов и их обновлении либо на каждой итерации, либо через несколько шагов.

Для подбора оптимальной архитектуры нейросети (количество скрытых слоев, количество нейронов в каждом слое, функции активации, оптимизатор и его скорость обучения, критерий остановки обучения), тесты по восстановлению проводились на синтетических данных, полученных из моделирования для свободной струи. За метрику качества восстановления выбрано нормализованное среднеквадратичное отклонение результатов, предсказанных нейросетью, от рассчитанных из моделирования с применением  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности. В результате тестов на синтетических данных была выбрана архитектура нейросети с 7 скрытыми слоями и 180 нейронами на каждом слое (то есть по 30 нейронов на каждый выход). Дальнейшее увеличение числа слоев и нейронов не дает значительного улучшения результатов восстановления и увеличивает время обучения. Оптимизация проводится с использованием модифицированного алгоритма Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно с ограниченным использованием памяти (L-BFGS) [113], где начальная величина шага была установлена равной 0.1. Процесс обучения прекращается, когда на интервале, равном 1000 итерациям, скользящее среднее функции потерь изменяется в пределах 0.5%, аналогично критерию остановки в работе [114]. Под итерацией

здесь подразумевается вычисление функции потерь во всей расчетной области и обратный проход для расчета градиента и обновления параметров модели. В начале обучения веса и сдвиги нейросети инициализируются случайными величинами с нормальным распределением. Расчеты проводятся на видеокарте NVIDIA Tesla T4. Обучение нейросети на экспериментальных данных занимает порядка 6 ч.

## 4.4 Численное моделирование

RANS-моделирование с применением моделей турбулентности Спаларта-Аллмараса и  $k$ - $\varepsilon$  модели проводится в пакете Comsol 6.2. Как известно, оригинальная модель Спаларта-Аллмараса завывает угол расхождения круглой турбулентной струи [121], поэтому используется модифицированная модель Спаларта-Аллмараса [122].

Для расчетов со свободной струей на основании тестов сеточной сходимости была выбрана неравномерная сетка в цилиндрических координатах размером  $190 \times 200$  узлов с минимальным шагом 0.12 мм. Для задачи с импактными струями расчетная область состоит из нескольких частей: течение струи от входного сопла до соударения с пластиной и область выше нее. Такой способ задания области связан с постановкой свободных граничных условий вдали от основного течения струи, то есть на верхней и правой границах. В области основного течения струи задается неравномерная сетка размерами  $180 \times 150$  узлов с минимальным шагом 0.01 мм. Неравномерная сетка размерами  $180 \times 150$  узлов с таким же минимальным шагом 0.01 мм определяется в остальной части. Диск считается полностью теплоизолированным, поэтому в моделировании не рассматривается, на его поверхности ставятся адиабатические граничные условия для температуры и условия прилипания для скорости. Для экспериментов с импактной струей размеры расчетной области в моделировании  $r_{max} \times z_{max}$  (см. Рис. 4.4) составляли:  $0.25 \times 0.15$  м<sup>2</sup>,  $0.25 \times 0.2$  м<sup>2</sup>,  $0.25 \times 0.3$  м<sup>2</sup> – для экспериментов с расстояниями между соплом и пластиной: 0.033 м, 0.047 м, 0.147 м, соответственно. При сравнении с PINN и экспериментальными данными выбирается область, размеры которой по вертикали совпадают с расстоянием от сопла до диска, в радиальном направлении – с радиусом диска. Для эксперимента со свободной струей размеры расчетной области равняются  $0.2 \times 0.4$  м<sup>2</sup>.

Граничные условия в RANS-моделировании совпадают с заданными для PINN. Тот же профиль осевой скорости (4.13) задается на входе сопла, радиальная скорость равняется нулю. Полная вязкость на входе устанавливается равной  $80\eta_0$  для  $k$ - $\varepsilon$ -модели и  $10\eta_0$  в модели Спаларта-

Аллмараса. Данные значения были подобраны исходя из наилучшего совпадения с экспериментальными профилями скорости. Профиль отклонения температуры аппроксимировался функцией Гаусса:

$$T(r, z = 0) - T_0 = A \exp(-\beta r^2), \quad (4.14)$$

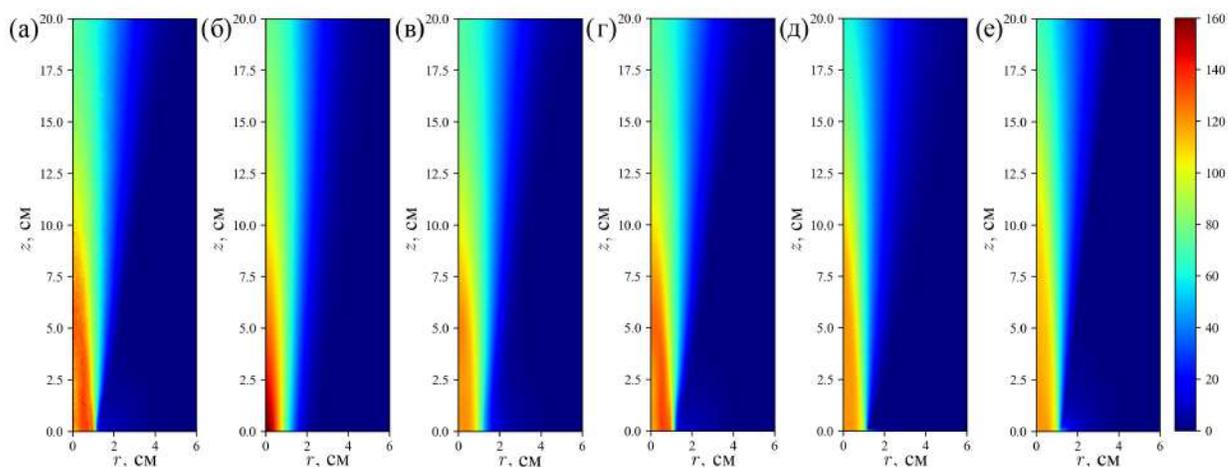
где  $A$  и  $\beta$  - параметры аппроксимации. Также на оси задаются условия симметрии:  $\partial T / \partial r = \partial V_z / \partial r = \partial \eta / \partial r = \partial \lambda / \partial r = 0$ . Вместо условия для параметра  $a$  на оси определяется радиальная скорость, равная нулю. Мягкие граничные условия задаются на правой и верхней границе области. Для импактной струи на границе диска ставятся условия прилипания для скорости, граница считается адиабатической.

## 4.5 Сравнение восстановленных величин с полученными из численного моделирования с применением разных моделей турбулентности

### 4.5.1 Результаты восстановления при прямой подстановке экспериментальных данных в уравнения

На Рис. 4.6 представлены исходные поля температуры, измеренные ТФМ, результаты их сглаживания с помощью различных подходов и сравнение с RANS-моделированием. Параметр  $c$  в модифицированном уравнении Гельмгольца задается равным  $10^{-5} \text{ м}^2$ . Размер фильтра Савицкого-Голея составляет  $51 \times 351$ , задается третья степень полинома. Из-за кольцеобразной формы нагревателя строительного фена в эксперименте (Рис. 4.6а) максимальная температура наблюдается вблизи края сопла. Гауссова аппроксимация не учитывает эту особенность, поэтому при ее использовании температура на оси оказывается завышенной по сравнению с экспериментом (Рис. 4.6б).

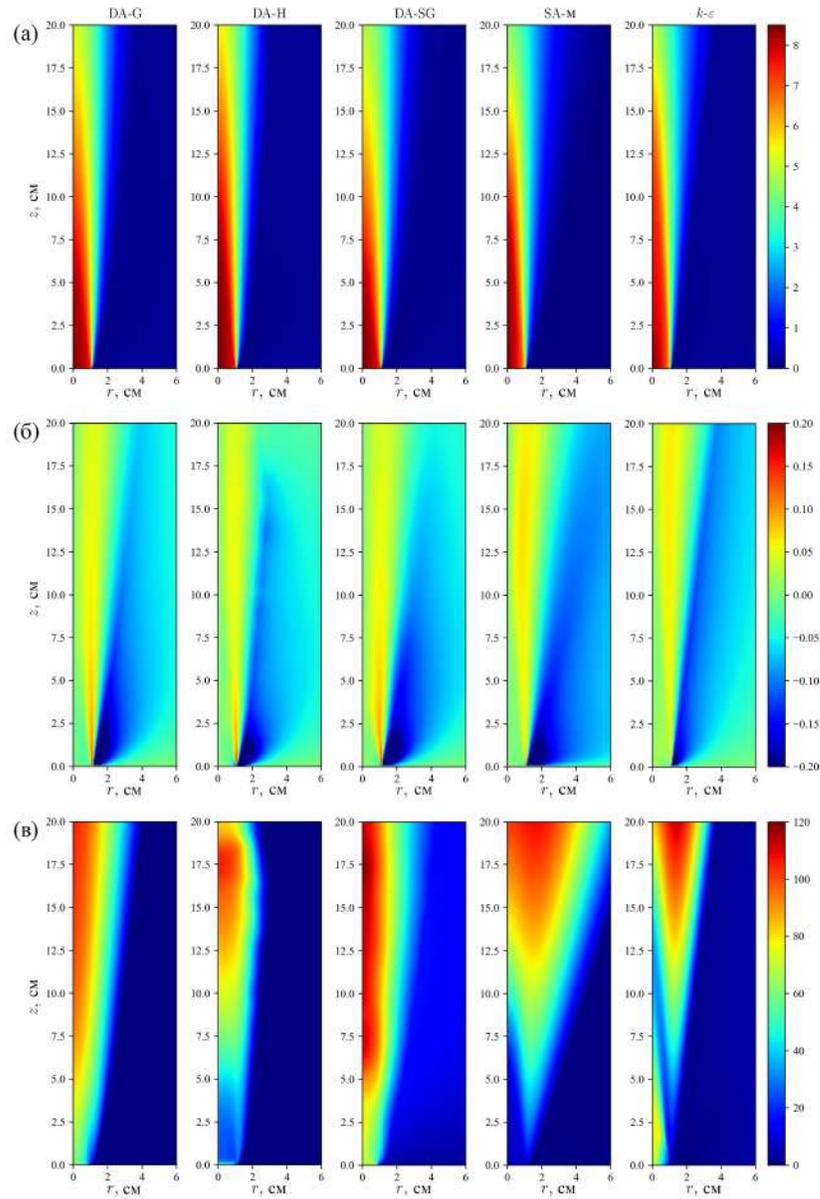
Несмотря на то, что после сглаживания разными способами поля температуры незначительно различаются, результаты ассимиляции данных для компонент скорости, представленные на Рис. 4.7аб, похожи друг на друга и хорошо согласуются с результатами RANS-моделирования. Для данного течения радиальная скорость приблизительно в 50 раз меньше осевой скорости, поэтому в эксперименте радиальную скорость сложно измерить. Распределения турбулентной вязкости, представленные на Рис. 4.7в, несколько отличаются друг от друга, но имеют близкие максимальные значения. Ассимиляция поля температуры, измеренного ТФМ, позволяет пра-



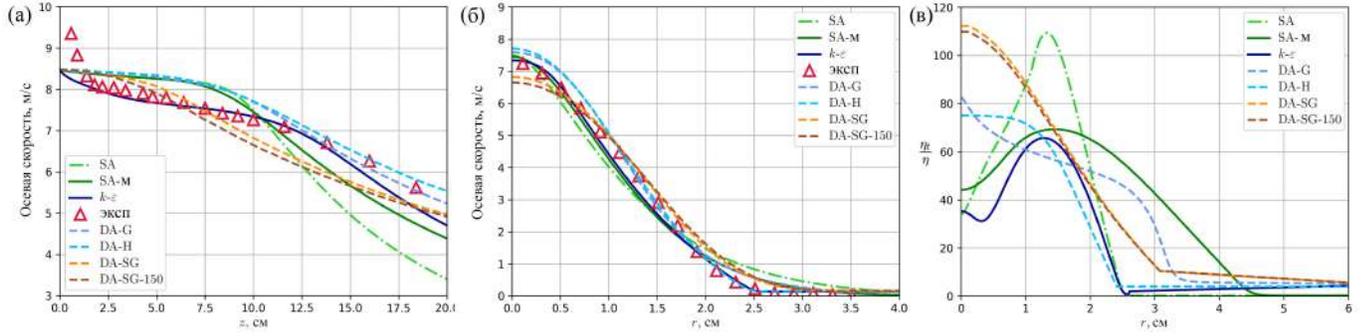
**Рис. 4.6.** Поля температуры ( $T - T_0$ ) (К): (а) результат измерения ТФМ, (б) гауссова функция (4.7), (в) решение модифицированного уравнения Гельмгольца (4.8), (г) результат сглаживания фильтром Савицкого–Голея, (д) моделирование с модифицированной моделью Спаларта–Алмараса, (е) моделирование с моделью  $k$ - $\varepsilon$ .

вильно восстановить структуру течения без использования засева и скоростных камер. Разница между результатами ассимиляции данных и RANS-моделирования сравнима с разницей между результатами RANS-моделирования с использованием различных моделей турбулентности. Полученные поля давления не показаны, поскольку изменения давления в рассматриваемом течении очень малы.

Количественное сравнение результатов, полученных с помощью ассимиляции данных и RANS-моделирования, выполнено на Рис. 4.8. Значения скорости, найденные путем ассимиляции данных, лежат в пределах  $\pm 1$  м/с от результатов измерений термоанемометром. Профили турбулентной вязкости сильно отличаются друг от друга, в том числе и те результаты, которые были получены в моделировании с применением различных моделей турбулентности. Как показывает сравнение кривых DA-SG и DA-SG-150, результаты ассимиляции данных не чувствительны к значению турбулентной вязкости на входе. Экспериментально данное граничное условие нельзя измерить, оно подбирается исходя из наилучшего совпадения с другими экспериментальными данными, как в RANS-моделировании.



**Рис. 4.7.** Поля (а) осевой скорости (м/с), (б) радиальной скорости (м/с), (в) отношения полной вязкости к молекулярной. Результаты ассимиляции данных: DA-G – с аппроксимацией гауссовой функцией (4.7), DA-H – с решением модифицированного уравнения Гельмгольца (4.8), DA-SG – с использованием фильтра Савицкого–Голея. RANS-моделирование: SA-m – с модифицированной моделью Спаларта–Аллмараса,  $k-\varepsilon$  – с  $k-\varepsilon$  моделью.



**Рис. 4.8.** (а) Профиль осевой скорости вдоль оси струи, (б) радиальный профиль осевой скорости при  $z = 10$  см, (с) радиальный профиль отношения турбулентной вязкости к молекулярной при  $z = 10$  см. SA – моделирование с оригинальной моделью Спаларта–Аллмараса, эксп – измерения скорости с помощью термоанемометра, DA-SG-150 – ассимиляция данных с фильтром Савицкого–Голея и  $\eta_t/\eta=150$ , а не 70 на входе. Остальные обозначения как на Рис. 4.7.

## 4.5.2 Результаты восстановления с помощью PINN

Для оценки отличия восстановленных PINN величин по сравнению с результатами из численного моделирования была выбрана  $L_2$ -норма, определенная следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\|F_{PINN} - F\|_2}{\|F\|_2}, \quad (4.15)$$

где поле, восстановленное при помощи PINN, обозначается  $F_{PINN}$ , а поле, с которым сравнивается, через  $F$  (полученное из моделирования или эксперимента). Все поля интерполированы на общую равномерную сетку для корректного сравнения. Для расчета отклонения (4.15) используется область с заметным возмущением температуры, то есть удовлетворяющая условию:  $(T - T_0) \geq 1$  К.

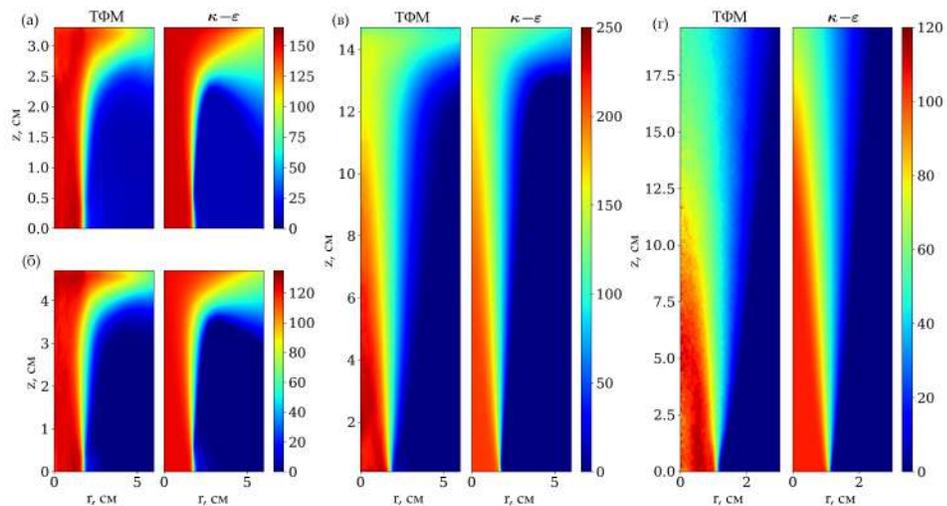
Восстановление течения производится в предположении постоянного или переменного турбулентного числа Прандтля, с использованием различных экспериментальных данных по скорости. Эти отличия учитываются в виде целевой функции, в которую входят отклонения от экспериментальных данных и степень нарушения условия постоянства турбулентного числа Прандтля. Далее на графиках с полученными результатами восстановления используются следующие обозначения для различных подходов:

- PINN-1: постоянное турбулентное число Прандтля ( $Pr_t = 0.9$ ), без дополнительного про-

филя скорости;

- PINN-2: постоянное турбулентное число Прандтля ( $Pr_t = 0.9$ ), с дополнительным профилем скорости;
- PINN-3: переменное турбулентное число Прандтля ( $Pr_t \neq 0.9$ ) с дополнительным профилем скорости.

Экспериментальные поля температуры, полученные ТФМ, и соответствующие поля из RANS-моделирования представлены на Рис. 4.9. В эксперименте с импактной струей при высоте расположения пластины 3.3 см наблюдается небольшое повышение температуры окружающей среды по сравнению с другими случаями (Рис. 4.9а), вероятно, обусловленное остаточным нагревом вблизи сопла после серии экспериментов.



**Рис. 4.9.** Поля температуры ( $T - T_0$ ), (К), измеренные ТФМ и полученные с помощью RANS-моделирования с  $k-\varepsilon$  моделью турбулентности, для экспериментов с импактными струями для разных расстояний между соплом и пластиной: (а) 3.3 см, (б) 4.7 см, (в) 14.7 см и для (г) свободной струи.

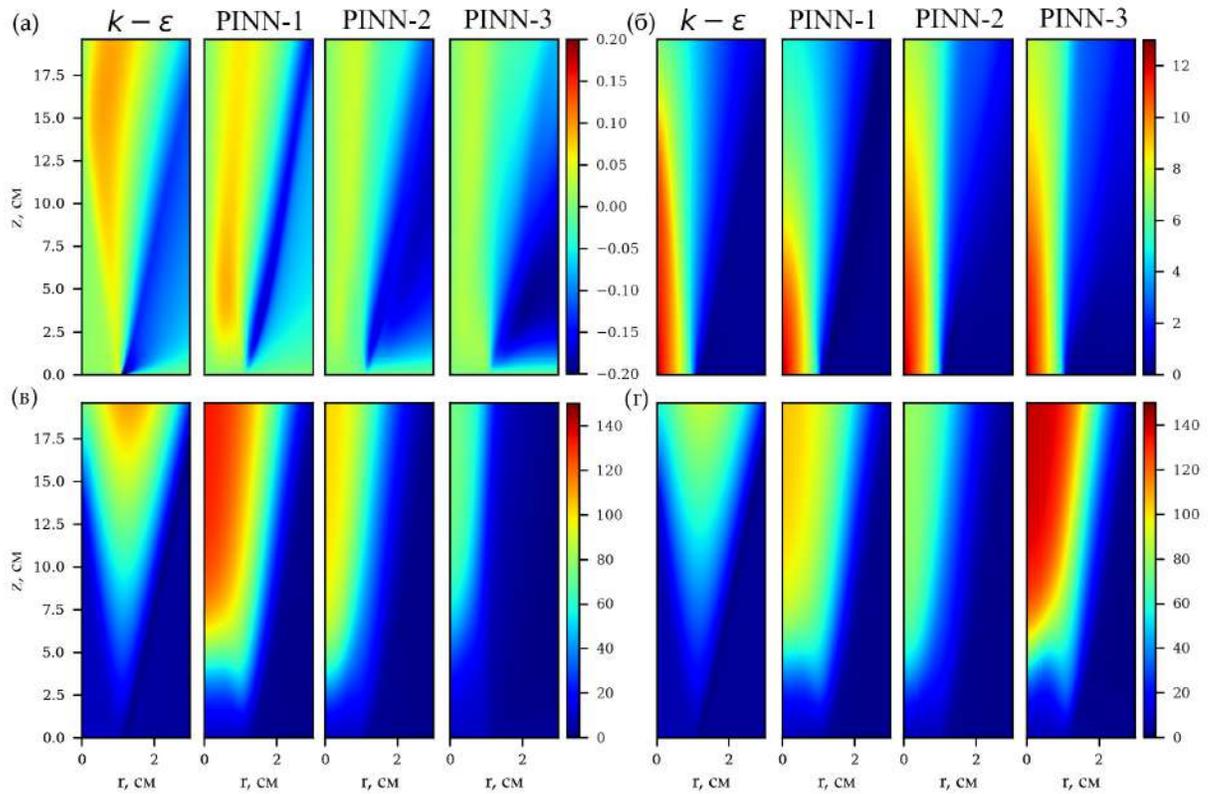
Для импактных струй наблюдается хорошее соответствие между рассчитанными в моделировании и полученными ТФМ распределениями температуры в основной области течения. Совпадают углы расширения струй, однако расхождения возникают вблизи пластины и входного сечения сопла. Согласно численным расчетам, горизонтальный пограничный слой, прилегающий к пластине, шире при меньших расстояниях между соплом и пластиной и тоньше при большей высоте (Рис. 4.9). Вероятно, эти отличия связаны с асимметрией экспериментальной струи, так как предварительные эксперименты без вращения фена и регистрацией снимков только

при одном положении фена показали еще большие расхождения с численным моделированием. Усреднение полей смещений, рассчитанных по серии изображений, снятых с разным угловым положением фена, способствовало уменьшению ошибок, связанных с асимметричностью струи.

В свободной струе температура быстрее уменьшается вдоль струи в эксперименте по сравнению с данными моделирования. Расхождения связаны с различными граничными условиями на входе для температуры, скорости, турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности. В моделировании профиль скорости и температуры на входе аппроксимируется на основе экспериментальных данных, измеренных термоанемометром и ТФМ, соответственно, а граничные условия для турбулентных вязкости и теплопроводности подбираются исходя из наилучшего согласования полученных при заданных условиях радиальных профилей скорости на разных высотах и профиля на оси. Однако радиальные профили скорости, измеренные для различных углов вращения фена, оказываются неодинаковыми, что объясняется асимметрией струи. Более точные данные по скорости потребовали бы сложных измерений PIV для нагретой струи. Кроме того, неопределенность в положении оси симметрии и применение обратного преобразования Абеля могут вносить погрешности в экспериментально измеряемое поле температуры вблизи оси. Восстановленные при помощи PINN поля температуры не приводятся, так как при обучении нейросети экспериментальные температурные данные с хорошим пространственным разрешением включаются в целевую функцию и нейросеть восстанавливает эти данные с точностью не хуже  $\varepsilon=0.03$ .

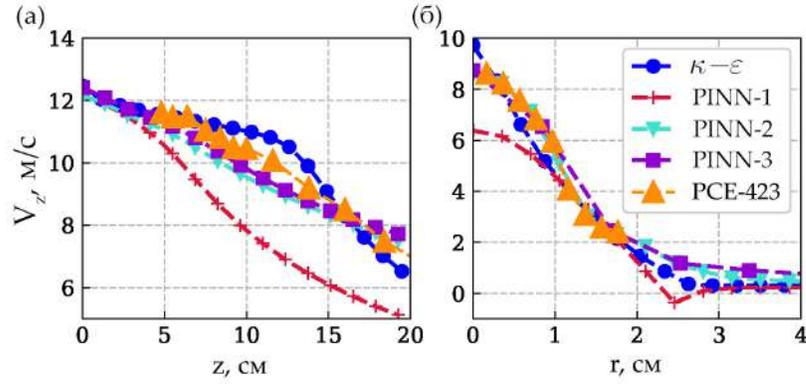
На Рис. 4.10 представлены восстановленные поля радиальной скорости, осевой скорости, отношения эффективной вязкости к молекулярной и отношения теплопроводности к молекулярной.

При восстановлении полей с использованием PINN-1 (без учета экспериментального профиля скорости на фиксированной высоте и при постоянном турбулентном числе Прандтля  $Pr_t=0.9$ ) резкое снижение осевой скорости происходит на меньшей высоте по сравнению с моделированием. Как следствие, значения вязкости оказываются, наоборот, завышенными на меньших высотах. Различия в постановке задачи для моделирования и восстановления с помощью PINN-1 с точки зрения системы уравнений заключается в том, что в моделировании решаются уравнения модели турбулентности  $k-\varepsilon$ , и не подставляется экспериментальное поле температуры. При восстановлении PINN нет предположений о дополнительной модели турбулентности, а поле температуры более приближенно к экспериментальным данным. Поэтому отличия связаны с



**Рис. 4.10.** Поля (а) радиальной скорости (м/с), (б) осевой скорости (м/с), (в) отношения полной вязкости к молекулярной, (г) отношения полной теплопроводности к молекулярной, полученные методом RANS-моделирования с  $k-\varepsilon$  моделью турбулентности и восстановленные с использованием PINN-1, PINN-2, PINN-3 для эксперимента со свободной струей.

различной постановкой задач и погрешностями экспериментальных данных. Следует отметить, что предсказанные с помощью PINN-1 данные по скорости не согласуются с экспериментальными данными, измеренными термоанемометром. Включение экспериментальных данных скорости снижает погрешность предсказаний, что подтверждается осевыми профилями вертикальной скорости (Рис. 4.11а). При восстановлении с PINN-2 и PINN-3 в целевую функцию включались экспериментальные данные осевой скорости на высоте 14 см, что помогло уменьшить расхождение с результатами моделирования (Рис. 4.11б).



**Рис. 4.11.** Профили вертикальной скорости для эксперимента со свободной струей: (а) осевые профили, (б) радиальные профили на высоте 14 см, полученные из RANS-моделирования с  $k$ - $\varepsilon$  моделью турбулентности, восстановленные с использованием PINN и измеренные термоанемометром.

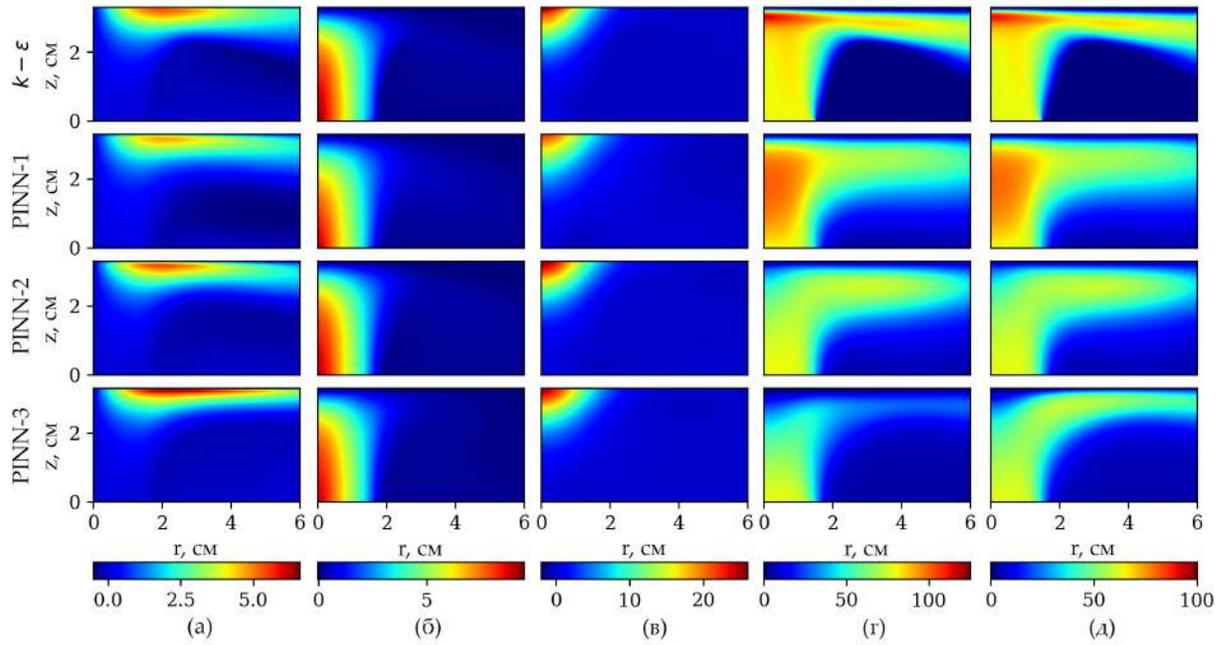
Несмотря на то, что восстановленные PINN-2 и PINN-3 поля компонент скорости похожи, различия наблюдаются в распределениях вязкости и теплопроводности (Рис. 4.10) в, г). В случае переменного турбулентного числа Прандтля (PINN-3) максимальное значение вязкости наблюдается вблизи оси и распределение характеризуется меньшим углом расширения, тогда как значения теплопроводности превышают полученные PINN-2. Максимальные величины турбулентных характеристик, восстановленных PINN-2, согласуются с результатами моделирования, ошибка (4.15) в данном случае наименьшая. Это связано с тем, что в данном случае постановки задачи наиболее близки с точки зрения систем уравнений. Расхождения между полями осевой скорости, восстановленными PINN-2/PINN-3, и результатами моделирования сопоставимы и находятся в пределах  $\varepsilon=0.1$ , для PINN-1 оно больше и составляет 0.16. Данные результаты согласуются с приведенными в других работах, в которых также используется методика восстановления при помощи PINN, но с использованием данных скорости [123] и/или плотности [124]. Так, в работе [123] по данным осевой и радиальной компонент скорости, измеренных PIV для течения турбулентной закрученной струи, ошибка восстановления азимутальной компоненты составила 0.21. Для течения жидкости в объеме после извлечения перегородки, разделяющей секции с жидкостями различных плотностей, в работе [124] были проведены эксперименты по восстановлению PINN на различных наборах синтетических данных плотности и скорости, которые экспериментально можно получить соответственно методами ослабления светового излучения (Light Attenuation Technique, LAT) и PIV. Оценка погрешности восстановления разных компонент скорости на синтетических незашумленных данных лежит в диапазоне от 0.03 до 0.17.

В отличие от работы [112], использовалась другая архитектура PINN с шестью выходами и отличной целевой функцией. Турбулентные теплопроводность и вязкость связаны через условие, которое включено в целевую функцию. Также в работах [79, 112] рассматривалось течение только свободной струи. В данной работе метод восстановления при помощи PINN также применен для течения импактной струи.

На Рис. 4.12, 4.13 и 4.14 представлены результаты ассимиляции полей компонент скорости, давления, и турбулентных вязкости и теплопроводности по полям температуры и профилям осевой скорости для разных расстояний пластины от сопла: 3.3 см, 4.7 см и 14.7 см, соответственно. На Рис. 4.15 показаны радиальные профили для этих экспериментов.

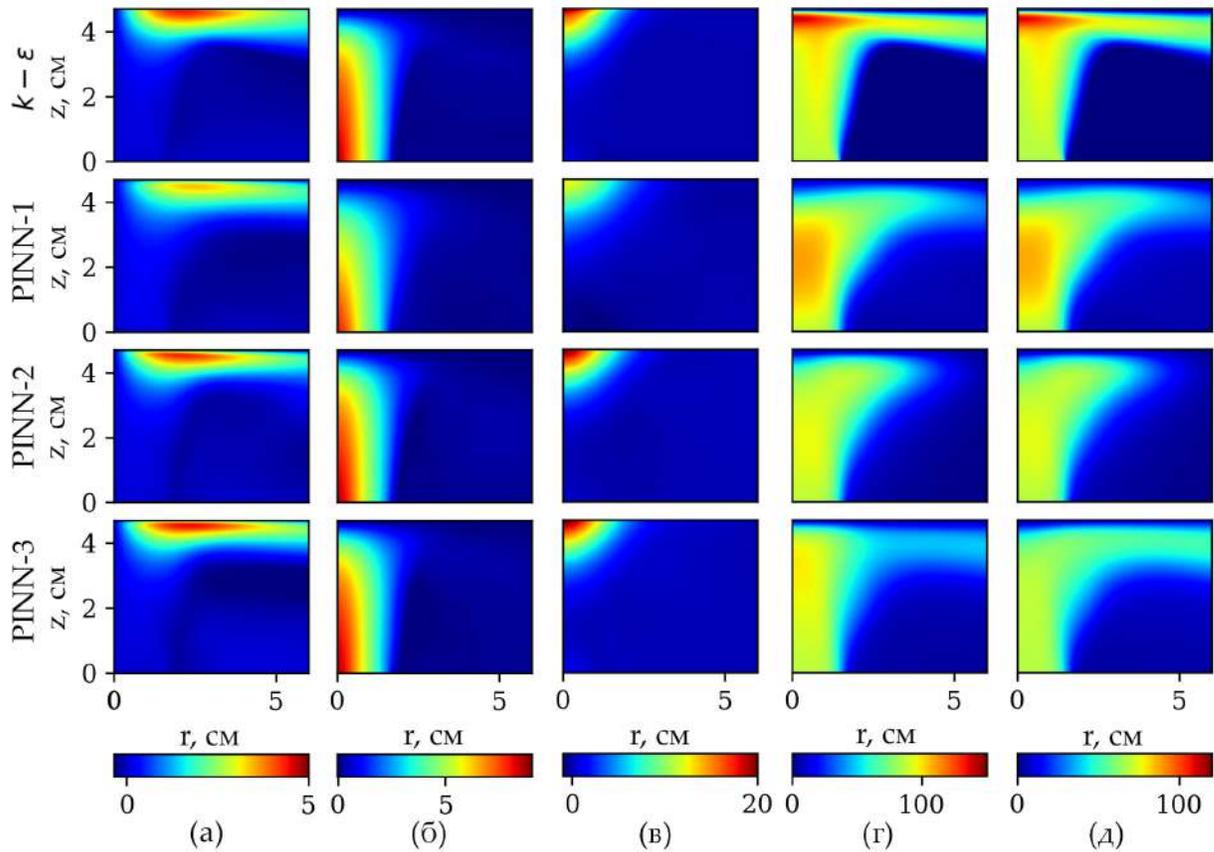
Также, как и для течения свободной струи, ошибка восстановления для всех полей уменьшается с включением радиального экспериментального профиля скорости (PINN-2/PINN-3) по сравнению с восстановлением без него (PINN-1).

Для всех экспериментов вблизи пластины достаточно хорошо восстанавливается величина максимального давления, распределение которого сложно измерить в эксперименте. Ошибка восстановления всего поля не превышает 0.1 для PINN-2/PINN-3, величина ошибки восстановленных полей давления в работе [124] с различными исходными данными составляет от 0.03 до 0.12. Для эксперимента с большим расстоянием от сопла до пластины (14.7 см) ошибка восстановления для всех полей достаточно большая. Такое расхождение связано с тем, что вблизи пластины поле температуры определяется с наибольшей погрешностью. Поэтому ситуация становится более схожей с задачей со свободной струей: скорость быстрее уменьшается, вязкость и теплопроводность нарабатываются на меньшей высоте, градиент давления меньше по сравнению с данными моделирования. Включение экспериментальных данных скорости на некоторой высоте улучшает качество восстановления. Так как PINN при обучении подбирает поля так, чтобы максимально удовлетворить экспериментальным данным и уравнениям, то, чем больше корректных экспериментальных данных будет включено в целевую функцию, тем более приближенные к моделированию поля скорости, давления и температуры получатся. Турбулентные характеристики могут отклоняться больше, так как в моделировании могут применяться различные модели турбулентности, которые показывают существенные расхождения при сравнении друг с другом [79].



**Рис. 4.12.** Поля: (а) радиальной скорости (м/с), (б) осевой скорости (м/с), (в) возмущения давления (Па), (г) отношения полной вязкости к молекулярной, (д) отношения полной теплопроводности к молекулярной, полученные из RANS-моделирования с  $k-\epsilon$  моделью турбулентности и восстановленные PINN-1, PINN-2, PINN-3 для эксперимента с импактной струей при высоте расположения пластины 3.3 см.

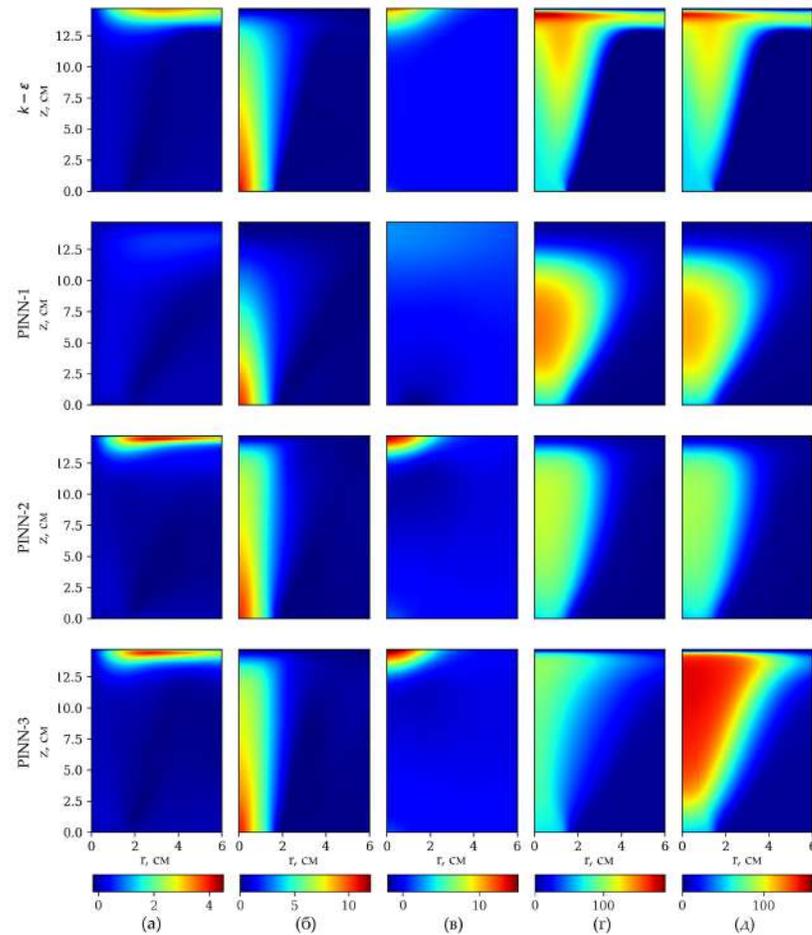
Вблизи пластины турбулентные вязкость и теплопроводность в горизонтальном пограничном слое сильно отличаются от результатов численного моделирования ( $\epsilon$  не превышает 0.75). Данная область характеризуется большими градиентами радиальной скорости и температуры, поэтому требуется достаточно мелкая сетка для их разрешения. В другом подходе с применением модели с тензором турбулентной вязкости (t-EV) [125] расхождения при восстановлении по синтетическим данным скорости для различных компонент тензора напряжения Рейнольдса в поперечном потоке лежат в диапазоне от 0.1 до 0.7. Без применения подхода t-EV погрешность достигает 3.8. Несмотря на расхождения турбулентных характеристик вблизи пластины, поля компонент скорости и давления меньше отличаются от моделирования.



**Рис. 4.13.** Поля: (а) радиальной скорости (м/с), (б) осевой скорости (м/с), (в) возмущения давления (Па), (г) отношения полной вязкости к молекулярной, (д) отношения полной теплопроводности к молекулярной, полученные из RANS-моделирования с  $k-\varepsilon$  моделью турбулентности и восстановленные PINN-1, PINN-2, PINN-3 для эксперимента с импактной струей при высоте расположения пластины 4.7 см.

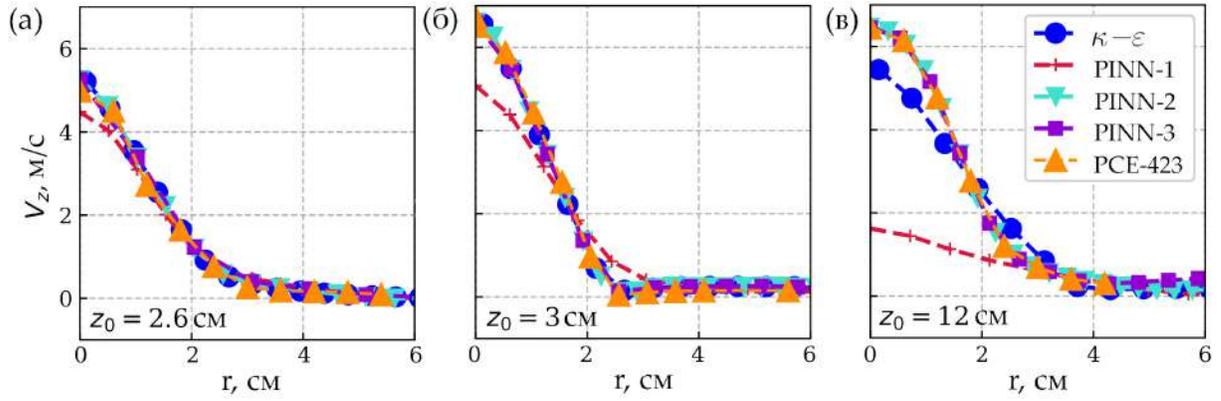
Восстановление с применением PINN-3 позволяет получить поле турбулентного числа Прандтля из соотношения найденных значений турбулентной теплопроводности и вязкости. На Рис. 4.16 показаны полученные поля турбулентного числа Прандтля для свободной струи и импактных струй с различными расстояниями от сопла до пластины. Области на графиках, показанные черным цветом, описываются одним из следующих условий: 1) возмущения температуры  $T - T_0$  составляют менее 20 К; 2) турбулентная вязкость  $\eta_t < 15\eta_0$ , 3) турбулентная теплопроводность  $\lambda_t < 15\lambda_0$ . Ниже данных пороговых значений значения турбулентного числа Прандтля могут определяться некорректно из-за малых значений турбулентных величин. Для всех экспериментов величина  $Pr_t$  находится в пределах от 0.1 до 1.5, но не является постоянной, равной 0.9, как часто задается при моделировании течений. В работе [75] LES-вычисления

показали, что турбулентное число Прандтля варьируется в пределах от 0.65 до 0.7 в основном течении струи, уменьшаясь ближе к краям. Такая же особенность наблюдается в результатах, полученных при восстановлении с помощью PINN-3.



**Рис. 4.14.** Поля: (а) радиальной скорости (м/с), (б) осевой скорости (м/с), (в) возмущения давления (Па), (г) отношения полной вязкости к молекулярной, (д) отношения полной теплопроводности к молекулярной, полученные из RANS-моделирования с  $k-\epsilon$  моделью турбулентности и восстановленные PINN-1, PINN-2, PINN-3 для эксперимента с импактной струей при высоте расположения пластины 14.7 см.

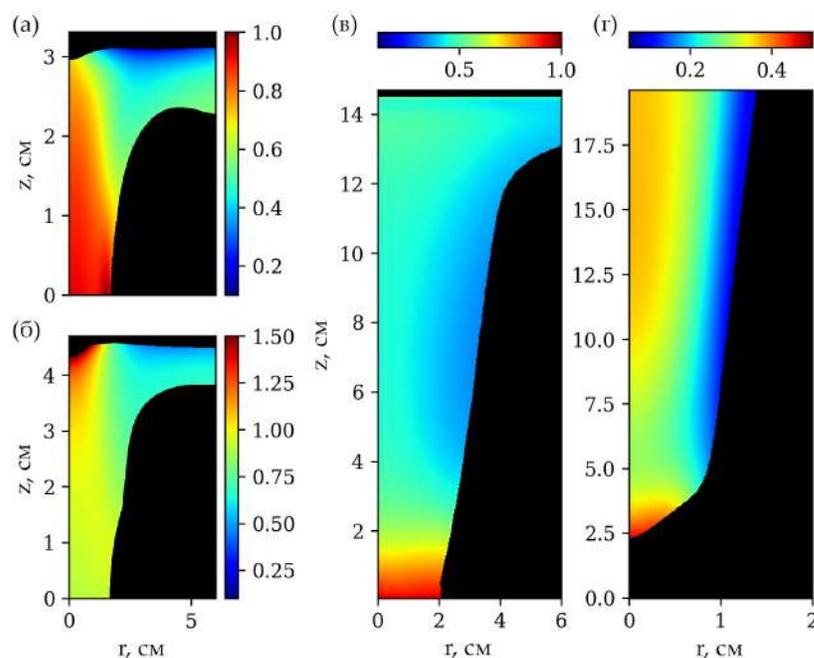
Из одновременных экспериментальных измерений температуры и двумерных полей скорости в нагретой свободной турбулентной струе в работе [115] были получены распределения турбулентного числа Прандтля. Для  $z/d=24$   $Pr_t$  изменяется от 0.1 до 0.5. В данной работе для эксперимента со свободной струей  $Pr_t$  уменьшается по течению при  $z > 5$  см и при  $z/d=8$  равняется 0.4. Для расстояния между соплом и пластиной 14.7 см турбулентное число Прандтля



**Рис. 4.15.** Радиальные профили осевой скорости для экспериментов с импактными струями при различных высотах расположения пластины: (а) 3,3 см, (б) 4,7 см, (в) 14,7 см, полученные из RANS-моделирования с  $k-\varepsilon$  моделью турбулентности, восстановленные PINN-1, PINN-2, PINN-3 и измеренные термоанемометром.

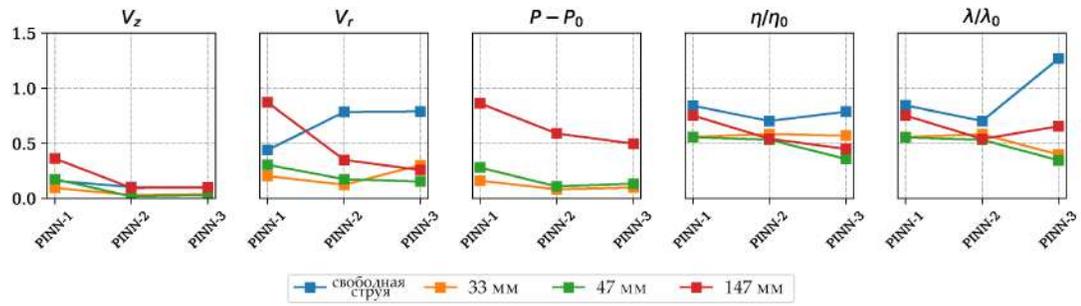
равняется приблизительно 0.5. При меньших высотах пластины (33 мм, 47 мм) оно достигает значений 0.9 в основном течении струи, и приблизительно 0.3 в горизонтальном погранслое. Примерно в таком же диапазоне (от 0.1 до 0.4) изменяется турбулентное число Прандтля, полученное в работе [77] для эксперимента с системой кондиционирования на основе PIV измерений и точечных измерений температуры термопарой. Также в этой работе было показано, что распределение турбулентного числа Прандтля изменяется в зависимости от скорости входного потока, то есть числа Рейнольдса. Результаты LES-моделирования для импактных струй [126] показали немонотонное поведение турбулентного числа Прандтля (0.6-1.2) вблизи области соударения. В наших экспериментах  $Pr_t \approx 1.0$  (33 мм) и  $Pr_t \approx 1.4$  (47 мм) вблизи области соударения. Уменьшение турбулентного числа Прандтля до 0.3-0.5 наблюдается с увеличением радиальной координаты.

Интересно, что восстановление с постоянным турбулентным числом Прандтля (PINN-1, PINN-2) и переменным (PINN-3) значительно расходятся в предсказанных распределениях турбулентной вязкости и теплопроводности. Во всех случаях с импактными струями формируется горизонтальный погранслой, PINN-3 показывает большие значения для величины турбулентной теплопроводности и вязкости по сравнению с моделированием. Такой особенности не наблюдается при восстановлении на синтетических данных из моделирования и  $Pr_t$  восстанавливается близким к 0.9 во всей области течения. Поэтому можно сделать вывод, что такая особенность связана с восстановлением на экспериментальных данных.



**Рис. 4.16.** Поля турбулентного числа Прандтля для экспериментов с импактными струями при различных высотах расположения пластины: (а) 3.3 см, (б) 4.7 см, (в) 14.7 см и для (г) свободной струи.

Графики с ошибками (4.15) при восстановлении при помощи PINN-1, PINN-2 и PINN-3 для разных полей показаны на Рис. 4.17. Результаты восстановления с PINN-2 и PINN-3 характеризуются сопоставимыми ошибками, но PINN-3 позволяет получить распределение турбулентного числа Прандтля напрямую из экспериментального поля температуры. Дополнительные данные по скорости могут в дальнейшем улучшить качество восстановления полей турбулентной вязкости и других величин. Тем не менее, такой подход (PINN-3) позволяет восстановить турбулентное число Прандтля по температурным данным и измеренным с помощью термоанемометра профилям скорости.



**Рис. 4.17.** Относительные погрешности ( $L_2$ -норма) для восстановленных полей (осевой и радиальной компонент скорости, возмущения давления, отношений полных вязкости и теплопроводности к молекулярным) с применением PINN-1, PINN-2 и PINN-3 в экспериментах со свободной и импактными струями при различных высотах расположения пластины (33 мм, 47 мм и 147 мм).

## Заключение

1. Впервые получены автомодельные решения для задачи конвекции при нагреве поверхности жидкости линейным источником тепла в жидкостях с различными свойствами межфазной границы. Эти решения хорошо согласуются с результатами проведенных экспериментов (ИК-термография поверхности, методом цифровой трассерной визуализации (PIV) и теневым фоновым методом (moon-glade BOS) для определения рельефа) и численного моделирования, что свидетельствует о правильном описании граничных условий на поверхности жидкости и механизмов конвекции. В зависимости от граничных условий на поверхности конвекция обусловлена или преимущественно термокапиллярным эффектом, или взаимодействием термокапиллярного и концентрационного эффектов, что приводит к замедлению движения поверхности и ее полной блокировке.
2. С помощью расчетов гидродинамических течений, возникающих при нагреве поверхности жидкости линейным источником тепла, впервые проведен сравнительный анализ эффективности теплоотвода от нагреваемого линейного источника в зависимости от свойств поверхности. Показано, что при наличии поверхностной пленки горизонтальная конвекция за счет градиента давления дает намного менее эффективное охлаждение по сравнению со случаем источника тепла, расположенного в объеме жидкости. Для горизонтальной конвекции за счет градиента давления получена зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея  $Nu \sim Ra^{1/6}$ , а для вертикальной конвекции  $Nu \sim Ra^{1/5}$ . Но, если поверхностная пленка отсутствует, отвод тепла за счет термокапиллярного механизма очень эффективен в ближней зоне с максимальными тепловыми нагрузками (число Нуссельта зависит от числа Марангони как  $Nu \sim Ma^{1/4}$ ).
3. Впервые полученные автомодельные решения для нестационарной задачи конвекции при локальном ИК-нагреве поверхности позволяют рассчитать скорость распространения тепла для двух механизмов горизонтальной конвекции. Полученные результаты хорошо со-

- гласуются с выполненными численными расчетами и экспериментами (ИК-термография поверхности и теневого фонового метода (moon-glade BOS) для определения рельефа).
4. Показано существенное влияние свойств межфазной границы на параметры конвекции. При отсутствии поверхностной пленки, когда основной является термокапиллярная конвекция, эффективность теплоотвода существенно возрастает. В несколько раз при тех же условиях возрастают числа Нуссельта и скорость распространения тепла.
  5. Показано, что регистрируемое с помощью ИК-термографии поле температуры поверхности жидкости при локальном зондировании поверхности лазерным излучением резко меняется при наличии поверхностной пленки примесей. Блокировка движения поверхности пленкой примесей (например, в воде, кроме деионизированной) приводит при тех же параметрах зондирующего импульса к резкому увеличению температуры в центре и отсутствию существенного расплывания теплового пятна. Наблюдаемые отличия позволяют использовать зондирование лазерным излучением в сочетании с тепловизионными наблюдениями для исследования свойств поверхности жидкости.
  6. Впервые проведенное экспериментальное исследование рельефа поверхности и поля давлений с помощью теневого фонового метода (moon-glade BOS) привело к выводу о существенном влиянии на эти поля свойств межфазной поверхности — как в задаче с нагревом линейным источником тепла, так и в задаче локального зондирования. Это обусловлено различием механизма конвекции. Если для термокапиллярной конвекции основным фактором являются поверхностные силы, то при наличии пленки конвекция определяется перераспределением давления вблизи поверхности, приводящим к искривлению поверхности. Результаты экспериментов хорошо согласуются с численным расчетом, выполненным с учетом деформации поверхности жидкости.
  7. Предложенный новый метод ассимиляции данных для турбулентных квазистационарных течений с помощью подстановки в уравнения гидродинамики экспериментальных полей температуры позволяет восстановить поля скорости, турбулентной вязкости и теплопроводности по экспериментально измеренным усредненным полям температуры для квазистационарной свободной осесимметричной струи горячего воздуха.
  8. Впервые примененная для ассимиляции температурных полей и данных скорости

физически-информированная нейросеть (PINN) позволяет восстановить поля скорости, давления, турбулентной вязкости и теплопроводности, а также получить распределение турбулентного числа Прандтля для квазистационарной свободной и импактной осесимметричной струи горячего воздуха. Новый метод обладает перспективой развития как для более подробного анализа неизотермических течений, так и для химически-реагирующей среды при учете изменения концентраций веществ.

Работа выполнена с использованием оборудования, приобретённого за счёт средств Программы развития Московского университета.

## **Благодарности**

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору Уварову Александру Викторовичу, а также доценту Винниченко Николаю Аркадьевичу, доценту Плаксиной Юлии Юрьевне и научному сотруднику Пуштаеву Алексею Владимировичу за профессиональную организацию научной работы, помощь в проведении экспериментальных исследований, обсуждение полученных результатов, выполнение численного моделирования, подготовку научных публикаций, организацию выступлений на конференциях, значительную помощь в написании данной работы, нахождение источников дополнительного финансирования, и в целом за моральную поддержку.

## **Список публикаций по теме диссертации**

Статьи в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.3.17. Химическая физика, горение и взрыв, физика экстремальных состояний вещества:

[A1] Rudenko Yu.K. Horizontal convection driven by nonuniform radiative heating in liquids with different surface behavior / Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Yu.Yu., Rudenko Yu.K., Uvarov A.V. // International Journal of Heat and Mass Transfer – 2018. – Vol. 126, Part B. – P. 400-410. Импакт-фактор 5.8 (JIF), 1,3 печ. л., вклад автора 0,3.

[A2] Rudenko Yu.K. Horizontal convective flow from a line heat source located at the liquid-gas interface in presence of surface film / Rudenko Yu.K., Vinnichenko N.A., Plaksina Yu.Yu., Pushtaev

A.V., Uvarov A.V. // Journal of Fluid Mechanics – 2022. – Vol. 944. – A35. Импакт-фактор 3.9 (JIF), 2,7 печ. л., вклад автора 0,5.

[A3] Rudenko Yu.K. Color-encoded M-array Background Oriented Schlieren for measurements of strongly refracting objects / Vinnichenko N.A., Andrianova A.V., Pushtaev A.V., Rudenko Yu.K., Plaksina Yu.Yu., Uvarov A.V. // International Journal of Thermofluids – 2023. – Vol. 18. – P. 100364. Импакт-фактор 1.43 (SJR), 0,6 печ. л., вклад автора 0,3.

[A4] Rudenko Y.K. Reconstruction of turbulent flow from temperature field measured using Background Oriented Schlieren / Rudenko Y.K., Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Y.Yu., Uvarov A.V. // International Journal of Thermofluids – 2024. – Vol. 23. – P. 100744. Импакт-фактор 1.43 (SJR), 0,6 печ. л., вклад автора 0,6.

[A5] Rudenko Y. Complete characterization of axisymmetric turbulent jet using background oriented schlieren and physics-informed neural network / Rudenko Y., Vinnichenko N., Plaksina Y., Uvarova I., Ganichev A., Uvarov A. // Heat Transfer Research – 2025. – Vol. 56, No. 5. – P. 17-35. Импакт-фактор 1.6 (JIF), 2,2 печ. л., вклад автора 0,6.

[A6] Rudenko Yu.K. Background-oriented schlieren with image processing based on phase-shifting profilometry / Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Rudenko Yu.K., Plaksina Yu.Yu., Uvarov A.V. // Experiments in Fluids – 2025. – Vol.66, No. 3. – P. 47. Импакт-фактор 2.5 (JIF), 2,1 печ. л., вклад автора 0,3.

Иные публикации в рецензируемых научных журналах:

[A7] Руденко Ю.К. Возникновение конвекции в приповерхностном слое жидкости / Плаксина Ю.Ю., Руденко Ю.К., Пуштаев А.В., Винниченко Н.А., Уваров А.В. // Процессы в геосредах. – 2017. – №3. – С.619-626. Импакт-фактор 0.129 (РИНЦ), 0,8 печ. л., вклад автора 0,3.

Материалы конференций:

1. Руденко Ю. К., Плаксина Ю. Ю., Пуштаев А. В., Винниченко Н. А., Уваров А. В. Возникновение горизонтальной конвекции в приповерхностном слое жидкости. // Материалы Третьей международной научной школы молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах». С. 174–177. Институт проблем механики РАН Москва, 2017.
2. Руденко Ю.К. Механизмы возникновения горизонтальной конвекции в приповерхностном слое жидкости. // Сборник XXV Международная конференция студентов, аспирантов и

- молодых учёных по фундаментальным наукам «Ломоносов-2018». С. 424–425. Физический факультет МГУ. 2018.
3. Руденко Ю. К., Винниченко Н. А., Пуштаев А. В., Плаксина Ю. Ю., Уваров А. В. Горизонтальная конвекция при неравномерном нагреве свободной поверхности жидкости. //Труды Седьмой Российской национальной конференции по теплообмену: в 3 томах (22–26 октября 2018 г., Москва). Т. 3. С. 443–446, Издательский дом МЭИ Москва, 2018.
  4. Руденко Ю.К. Горизонтальная конвекция при нагреве линейного источника тепла под поверхностью жидкости. // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2019» Издательство ООО "МАКС Пресс"(Москва). 2019.
  5. Руденко Ю. К., Плаксина Ю. Ю., Винниченко Н. А., Пуштаев А. В., Уваров А. В. Особенности взаимодействия всплывающей конвективной струи с поверхностью жидкости. //Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах: Шестая международная научная конференция-школа молодых ученых, С. 135–137, ООО ПРИНТ ПРО Москва, 2020.
  6. Руденко Ю.К., Плаксина Ю.Ю., Винниченко Н.А., Пуштаев А.В., Уваров А.В. Сравнительный анализ механизмов конвекции в различных жидкостях в зависимости от расположения источника нагрева. // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Тезисы докладов XXIII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева (24-28 мая 2021 г., г. Екатеринбург), С. 20–21, Издательский дом МЭИ Москва, 2021.
  7. Vinnichenko N. A., Rudenko Y. K., Plaksina Y. Y., Pushtaev A. V., Uvarov A. V. Analysis of convection mechanisms in a liquid layer heated by a hot wire. //Proceedings of the 15th international conference on heat transfer, fluid mechanics and thermodynamics (HEFAT), P. 267–272, Amsterdam, 2021.
  8. Руденко Ю.К., Пуштаев А.В. Свободная конвекция от линейного источника тепла на поверхности жидкости. // Труды восьмой российской национальной конференции по теплообмену. Т. 2. С. 348–349, Издательский дом МЭИ Москва, 2022.
  9. Плаксина Ю. Ю., Пуштаев А. В., Захаров К. Н., Руденко Ю. К., Винниченко Н. А., Уваров А. В. Применение ИК-термографии и импульсного нагрева CO<sub>2</sub> лазером поверхности

- раздела жидкость-газ для определения её свойств. // Всероссийская конференция, посвященная памяти академика А.М. Обухова Турбулентность, динамика атмосферы и климата, С. 171–171, Физматкнига Москва, 2022.
10. Винниченко Н.А., Пуштаев А.В., Руденко Ю.К., Плаксина Ю.Ю., Уваров А.В. Определение полей скорости и давления в течении по экспериментально измеренным полям температуры с помощью неполного численного моделирования. // XVI Минский международный форум по тепло- и массообмену. XVI Minsk International Heat and Mass Transfer Forum. 16–19 мая 2022 г. Тезисы докладов и сообщений, С. 66–68, Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова НАН Беларуси Минск, Беларусь, 2022.
  11. Винниченко Н.А., Пуштаев А.В., Плаксина Ю.Ю., Руденко Ю.К., Уваров А.В. Сравнение точности и пространственного разрешения вариантов теневого фонового метода с использованием различных фонов и методов определения смещения. // Материалы V Отраслевой конференции по измерительной технике и метрологии для исследований летательных аппаратов, С. 95–109, Жуковский, 2023. Изд. отдел ЦАГИ.
  12. Захаров К.Н., Плаксина Ю.Ю., Пуштаев А.В., Руденко Ю.К., Винниченко Н.А., Уваров А.В. Распространение тепла в различных жидкостях при импульсном нагреве поверхности. // Девятая международная научная конференция-школа молодых ученых физическое и математическое моделирование процессов в геосредах, 18–20 октября 2023, С. 158–160, ИПМех РАН Москва, 2023.
  13. Rudenko Y.K., Vinnichenko N.A., Plaksina Y.Y., Pushtaev A.V., Uvarov A.V. Transient horizontal convective flow from a line heat source located at the liquid-gas interface with different conditions at the surface. In The 16th international conference on fluid control, measurements, and visualization (FLUCOME-2023), P. 16, Beihang University Beijing, 2023.
  14. Vinnichenko N.A., Rudenko Y.K., Pushtaev, A.V., Plaksina Y.Y., Uvarov A.V. Determination of turbulent viscosity, velocity and pressure distributions in a turbulent hot air jet from temperature fields measured using background oriented schlieren technique. // The 16th international conference on fluid control, measurements, and visualization (FLUCOME-2023), P. 18, Beihang University Beijing, 2023.
  15. Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Rudenko Yu.K., Plaksina Yu.Yu., Uvarov A.V. Background

- oriented schlieren with image processing based on Fourier Transform Profilometry and Phase Shifting Profilometry. // The 16th international conference on fluid control, measurements, and visualization (FLUCOME-2023), P. 19, Beihang University Beijing, 2023.
16. Rudenko Yu.K., Pushtaev A.V., Plaksina Yu.Yu., Vinnichenko N.A., Uvarov A.V. Aspects of heat propagation induced by heating of a free liquid surface with IR-laser. 22-nd International conference on the methods of aerophysical research (ICMAR 2024), v. 2, p. 150–151, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Новосибирск, 2024.
  17. Руденко Ю.К., Винниченко Н.А., Пуштаев А.В., Плаксина Ю.Ю., Уваров А.В. Стационарная горизонтальная конвекция в жидкостях с различной структурой поверхности. XVII Минский международный форум по тепломассообмену, Минск, 20–24 мая 2024. Сборник Материалы XVII Минского международного форума по тепло- и массообмену, место издания Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси Минск, тезисы, с. 133–135.
  18. Винниченко Н.А., Руденко Ю.К., Пуштаев А.В., Плаксина Ю.Ю., Уваров А.В. Бесконтактное определение полей скорости, давления и турбулентной вязкости в турбулентной струе с помощью ассимиляции температурных данных. XVII Минский международный форум по тепломассообмену, Минск, 20–24 мая 2024. Сборник Материалы XVII Минского международного форума по тепло- и массообмену, место издания Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси Минск, тезисы, с. 909–911.
  19. N.A. Vinnichenko, A.V. Pushtaev, Yu.K. Rudenko, Yu.Yu. Plaksina, A.V. Uvarov. Background oriented schlieren with different background patterns and image processing techniques. 22-nd International conference on the methods of aerophysical research (ICMAR 2024), v. 2, p. 190–192, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Новосибирск, 2024.
  20. Ю.К. Руденко, Н.А. Винниченко, А.В. Пуштаев, Ю.Ю. Плаксина, А.В. Уваров. Восстановление полей скорости, давления и турбулентной вязкости в осесимметричной турбулентной струе по экспериментальным полям температуры. Сборник тезисов докладов научной конференции Ломоносовские чтения 2024, Подсекция Газодинамика, термодинамика и ударные волны, с. 232–234, Москва, 2024. Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.

21. К.Н. Захаров, Ю.Ю. Плаксина, А.В. Пуштаев, Ю.К. Руденко, Н.А. Винниченко, А.В. Уваров. Распространение тепла в различных жидкостях при импульсном нагреве поверхности. Девятая международная научная конференция-школа молодых ученых физическое и математическое моделирование процессов в геосредах москва, 18-20 октября, 2023, с. 158–160, ИПМех РАН Москва.
22. Плаксина Ю.Ю., Родыгин В.И., Пуштаев А.В., Руденко Ю.К., Винниченко Н.А., Уваров А.В. Влияние плёнки естественных примесей на теплообмен вблизи границы раздела «вода-воздух». Всероссийская конференция, посвященная памяти академика Александра Михайловича Обухова «Турбулентность, динамика атмосферы и климата». 19–22 ноября 2024 г. Сборник тезисов, место издания: Физматкнига Москва, тезисы, с. 192–192.
23. Руденко Ю.К., Пуштаев А.В., Плаксина Ю.Ю., Винниченко Н.А., Уваров А.В. Особенности распространения тепла при лазерном ИК-нагреве поверхности жидкости. Материалы IV Международной конференции «Современные проблемы теплофизики и энергетики» (СПТЭ). Москва, 21–25 октября 2024 г, место издания Издательство МЭИ Москва, с. 64–65.
24. Руденко Ю.К., Винниченко Н.А., Пуштаев А.В., Плаксина Ю.Ю., Уваров А.В. Восстановление турбулентного числа Прандтля с помощью физически-информированной нейросети. XXIV Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 24–28 февраля 2025 г. Сборник тезисов, место издания ПФИЦ УрО РАН Пермь, тезисы, с. 241–241.
25. Руденко Ю.К., Винниченко Н.А., Плаксина Ю.Ю., Уваров А.В. Применение физически-информированной нейросети для анализа турбулентной осесимметричной струи на основе измерений поля температуры. Сборник тезисов докладов научной конференции Ломоносовские чтения 2025, Подсекция Газодинамика, термодинамика и ударные волны, с. 180–181, Москва, Март-апрель 2025. Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.

## Литература

- [1] Çengel Y. A. Heat transfer: a practical approach // Yunus A. Cengel. 2nd ed. Boston: McGraw-Hill, 2003.
- [2] Boetcher S.K.S. Natural convection heat transfer from horizontal cylinders // Springer. 2014, P. 3–22.
- [3] Rossby H.T. On thermal convection driven by non-uniform heating from below: an experimental study // Deep-Sea Res. 1965, Vol. 12, No.1, P. 9–16.
- [4] Hughes G.O., Griffiths R.W. Horizontal convection // Annu. Rev. Fluid Mech. 2008, Vol. 40, P. 185–208.
- [5] Mullarney J.C., Griffiths R.W., Hughes G.O. Convection driven by differential heating at a horizontal boundary // J. Fluid Mech. 2004, Vol. 516, P. 181–209.
- [6] Wang W., Huang R.X. An experimental study on thermal circulation driven by horizontal differential heating // J. Fluid. Mech. 2005, Vol. 540, P. 49–73.
- [7] Sanmiguel Vila C., Discetti S., Carlomagno G.M., Astarita T., Ianiro A. On the onset of horizontal convection // Int. J. Therm. Sci. 2016, Vol. 110, P. 96–108.
- [8] Shishkina O. Mean flow structure in horizontal convection // J. Fluid Mech. 2017, Vol. 812, P. 525–540.
- [9] Yan B., Shishkina O., He X. Thermal boundary-layer structure in laminar horizontal convection // J. Fluid Mech. 2021, Vol. 915, R5.
- [10] Kurosaki Y., Satoh I., Horiuchi T., Kashiwagi T. Effect of Marangoni convection on the temperature profiles of a free surface subject to nonuniform radiative heating // Exp. Therm. Fluid Sci. 1989, Vol. 2, P. 365–373.

- [11] Wählin A.K., Johansson A. M., Aas E., Broström G., Weber J.E.H., Grue J. Horizontal convection in water heated by infrared radiation and cooled by evaporation: scaling analysis and experimental results // *Tellus A* 2016, Vol. 62A, P. 154–169.
- [12] Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Yu.Yu., Rudenko Yu.K., Uvarov A.V. Horizontal convection driven by nonuniform radiative heating in liquids with different surface behavior // *Int. J. Heat Mass Transfer* 2018, Vol. 126, P. 400–410.
- [13] Noto D., Terada T., Yanagisawa T., Miyagoshi T., Tasaka Y. Developing horizontal convection against stable temperature stratification in a rectangular container // *Phys. Rev. Fluids* 2021, Vol. 6, 083501.
- [14] Mori A., Niino H. Time evolution of nonlinear horizontal convection: Its flow regimes and self-similar solutions // *J. Atmos. Sci.* 2002, Vol. 59, No. 11, P. 1841–1856.
- [15] Sarris I.E., Lekakis I., Vlachos N.S. Natural convection in a 2D enclosure with sinusoidal upper wall temperature // *Numer. Heat Transfer A* 2002, Vol. 42, P. 513–530.
- [16] Pigeonneau F., Flesselles J.M. Practical laws for natural convection of viscous fluids heated from above in a shallow cavity // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2012, Vol. 55, P. 436–442.
- [17] Uguz K.E., Labrosse G., Narayanan R., Pigeonneau F. From steady to unsteady horizontal gradient-driven convection at high Prandtl number // *Int. J. Heat Mass Transfer* 2014, Vol. 71, P. 469–474.
- [18] Chiu-Webster S., Hinch E. J., Lister J. R. Very viscous horizontal convection // *J. Fluid Mech.* 2008, Vol. 611, P. 395–426.
- [19] Wang W., Huang R.X. An experimental study on thermal circulation driven by horizontal differential heating // *J. Fluid. Mech.* 2005, Vol. 540, P. 49–73.
- [20] Vinnichenko N. A., Plaksina Yu.Yu., Baranova K. M., Pushtaev A. V., Uvarov A.V. Mobility of free surface in different liquids and its influence on water striders locomotion // *Environ. Fluid Mech.* 2018, Vol. 18, P. 1045–1056.
- [21] Rudenko Yu.K., Vinnichenko N.A., Plaksina Yu.Yu., Pushtaev A.V., Uvarov A.V. Horizontal convective flow from a line heat source located at the liquid–gas interface in presence of surface film // *J. Fluid Mech.* 2022, Vol. 944, A35.

- [22] Плаксина Ю. Ю., Руденко Ю. К., Пуштаев А. В., Винниченко Н. А., Уваров А. В. Возникновение конвекции в приповерхностном слое жидкости. // Процессы в геосредах. 2017. № 3. С. 619–626.
- [23] Saylor J.R., Smith G.B., Flack K.A. An experimental investigation of the surface temperature field during evaporative convection // Phys. Fluids 2001, Vol. 13, P. 428–439.
- [24] Arafune K., Hirata A. Thermal and solutal Marangoni convection in In–Ga–Sb system // J. Cryst. Growth 1999, Vol. 197, P. 811–817.
- [25] Liu W., Chen P.G., O. J., Liu Q. Thermocapillary flow transition in an evaporating liquid layer in a heated cylindrical cell // Int. J. Heat Mass Transfer 2020, Vol. 153, P. 119587.
- [26] Kozhevnikov D.A., Sheremet M.A. Natural convection with evaporation in a vertical cylindrical cavity under the effect of temperature-dependent surface tension // Contin. Mech. Thermodyn. 2018, Vol. 30, P. 83–94.
- [27] Sánchez P.S., Ezquerro J.M., Fernández J., Rodríguez J. Thermocapillary effects during the melting of phase change materials in microgravity: Heat transport enhancement // Int. J. Heat Mass Transfer 2020, Vol. 163.
- [28] Nield D.A. Surface tension and buoyancy effects in cellular convection // J. Fluid Mech. 1964, Vol. 19, P. 341–352.
- [29] Jiang Y., Zhou X. Analysis of flow and heat transfer characteristics of nanofluids surface tension driven convection in a rectangular cavity // Int. J. Mech. Sci. 2019, Vol. 153–154, P. 154–163.
- [30] Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1966, Vol. 7, P. 43–44.
- [31] Napolitano L.G., Golia C. Coupled marangoni boundary layers // Acta Astronaut. 1981, Vol. 8, P. 417–434.
- [32] Golia C., Viviani A. Non isobaric boundary layers related to Marangoni flows // Meccanica 1986, Vol. 21, P. 200–204.
- [33] Slavtchev S.G., Miladinova S.P. Thermocapillary flow in a liquid layer at minimum in surface tension // Acta Mech. 1998, Vol. 127, P. 209–224.

- [34] Christopher D.M., Wang B. Prandtl number effects for Marangoni convection over a flat surface // *Int. J. Therm. Sci.* 2001, Vol. 40, P. 564–570.
- [35] Nepomnyashchy A.A., Velarde M.G., P. Colinet. *Interfacial Phenomena and Convection* // 1st ed. Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [36] Zheng L., Zhang X., Gao Y. Analytical solution for Marangoni convection over a liquid–vapor surface due to an imposed temperature gradient // *Math. Comput. Model.* 2008, Vol. 48, P. 1787–1795.
- [37] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем./ Под ред. Л.Г. Лойцянского — М.: Наука, 1969. —742 с.
- [38] Magyari E., Chamkha A.J. Exact analytical solutions for thermosolutal Marangoni convection in the presence of heat and mass generation or consumption // *Heat Mass Transfer.* 2007, Vol. 43, P. 965–974.
- [39] Glauert M.B. The wall jet // *J. Fluid Mech.* 1956, Vol. 1, P. 625–643.
- [40] Phares D.J., Smedley G.T., Flagan R.C. The inviscid impingement of a jet with arbitrary velocity profile // *Phys. Fluids* 2000, Vol. 12, P. 2046-2055.
- [41] Fujii T. Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line heat source and a point heat source // *Int. J. Heat Mass Transfer* 1963, Vol. 6, P. 597–606.
- [42] Gebhart B., Pera L., Schorr A.W. Steady laminar natural convection plumes above a horizontal line heat source // *Int. J. Heat Mass Transfer* 1970, Vol. 13, P. 161–171.
- [43] Duluc M.C., Xin S., Lusseyran F., Quéré P.L. Numerical and experimental investigation of laminar free convection around a thin wire: Long time scalings and assessment of numerical approach // *Int. J. Heat Fluid Flow* 2008, Vol. 29, P. 1125–1138.
- [44] Okano Y., Itoh M., Hirata A. Natural and Marangoni convections in a two-dimensional rectangular open boat // *J. Chem. Eng. Japan* 1989, Vol. 22, P. 275–281.
- [45] Piñan Basualdo F., Terrazas Mallea R., Scheid B., Bolopion A., Gauthier M., Lambert P. Effect of insoluble surfactants on a thermocapillary flow // *Phys. Fluids* 2021, Vol. 33, No. 7, P. 072106.

- [46] Peaudecerf F.J., Landel J.R, Goldstein R.E., Luzzatto-Fegiz P. Traces of surfactants can severely limit the drag reduction of superhydrophobic surfaces // PNAS 2017, Vol. 114, No. 28, P. 7254–7259.
- [47] Shmyrov A., Mizev A., Demin V., Petukhov M., Bratsun D. On the extent of surface stagnation produced jointly by insoluble surfactant and thermocapillary flow // Adv. Colloid Interface Sci. 2018, Vol. 255, P. 10-17.
- [48] Vinnichenko N., Pushtaev A., Plaksina Yu., Uvarov A. Infrared thermography applied to the surface pressure measurements in insoluble surfactant monolayers // QIRT. 2023, Vol. 20, P. 1-13.
- [49] Pop I., A Postelnicu, Grosan T. Thermosolutal Marangoni Forced Convection Boundary Layers // Meccanica. 2001, Vol. 36, P. 555-571.
- [50] Zhang J.G., O. Y., Dost S. Numerical simulation of Marangoni convection in a shallow rectangular cavity with a linear solutal boundary condition // Int. J. Heat Mass Transfer 2021, Vol. 178, P. 121578.
- [51] Chen E., Xu F. Transient thermocapillary convection flows in a rectangular cavity with an evenly heated lateral wall // Phys. Fluids 2021, Vol. 33, P. 013602.
- [52] Kou J., Judd K.P., Saylor J.R. The temperature statistics of a surfactant-covered air/water interface during mixed convection heat transfer and evaporation // Int. J. Heat Mass Transfer 2011, Vol. 54, P. 3394–3405.
- [53] Veron F., Melville W. K., Lenain L. The effects of small-scale turbulence on air–sea heat flux // J. Phys. Oceanogr. 2011, Vol. 41, P. 205–220.
- [54] Ivanova N.A., Starov V.M., Trybala A., Flyagin V.M. Removal of micrometer size particles from surfaces using laser-induced thermocapillary flow: Experimental results // J. Colloid Interface Sci. 2016, Vol. 473, P. 120–125.
- [55] Veron F., Melville W.K. Experiments on the stability and transition of wind-driven water surfaces // J. Fluid Mech. 2001, Vol. 446, P. 25–65.

- [56] Mallea R.T., Bolopion A., Beugnot J.C., Lambert P., Gauthier M. Laser-induced thermocapillary convective flows: A new approach for noncontact actuation at microscale at the fluid/gas interface // IEEE ASME Trans Mechatron. 2017, Vol. 22, No. 2, P. 693-704.
- [57] Bickel T. Blockage of thermocapillary flows by surface-active impurities // Phys. Rev. Fluids. 2024, Vol. 9, No. 10, P. 104001.
- [58] Klyuev D.S., Fliagin V.M., Semenov S.V., Ivanova N.A. Thermocapillary deformation induced by laser heating of thin liquid layers: Physical and numerical experiments // Int. J. Heat Mass Transfer 2021, Vol. 172, P. 121020.
- [59] Tesch K., Ryms M., Lewandowski W.M. Method of reconstructing two-dimensional velocity fields on the basis of temperature field values measured with a thermal imaging camera // Int. J. Heat Mass Transfer 2022, Vol. 184, P. 122264.
- [60] Vinnichenko N.A., Plaksina Yu. Yu., Pushtaev A.V., Uvarov A.V. Obtaining velocity and pressure distributions in natural convection flows using experimental temperature fields // Appl. Therm. Eng. 2022, Vol. 215, P. 118962.
- [61] Ben Ali M.Y., Léon O., Donjat D., Bézard H., Laroche E., Mons V., Champagnat F. Data assimilation for aerothermal mean flow reconstruction using aero-optical observations: a synthetic investigation. 56th 3AF Int. Conf. on Applied Aerodynamics, Toulouse, France, 2022.
- [62] Nisugi K., Hayase T., Shirai A. Fundamental study of hybrid wind tunnel integrating numerical simulation and experiment in analysis of flow field // JSME Int. J. B 2004, Vol. 47, P. 593-604.
- [63] Saredi E., Ramesh N.T., Sciacchitano A., Scarano F. State observer data assimilation for RANS with time-averaged 3D-PIV data // Comput. Fluids 2021, Vol. 218, P. 104827.
- [64] Brenner O., Piroozmand P., Jenny P. Efficient assimilation of sparse data into RANS-based turbulent flow simulations using a discrete adjoint method // J. Comput. Phys. 2022, Vol. 471, P. 111667.
- [65] Cai Z., Liu Y., Chen T., Liu T. Variational method for determining pressure from velocity in two dimensions // Exp. Fluids 2020, Vol. 61, No. 5, P. 118.

- [66] Cai S., Mao Z., Wang Z., Yin M., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: a review // *Acta. Mech. Sin.* 2021, Vol. 37, No. 12, P. 1727-1738.
- [67] Fan D., Xu Y., Wang H., Wang J. Comparative assessment for pressure field reconstruction based on physics-informed neural network // *Phys. Fluids* 2023, Vol. 35, P. 077116.
- [68] Soto Á.M., Güemes A., Discetti S. Complete flow characterization from snapshot PIV, fast probes and physics-informed neural networks // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2024, Vol. 419, P. 116652.
- [69] Steinfurth B., Weiss J. Assimilating experimental data of a mean three-dimensional separated flow using physics-informed neural networks // *Phys. Fluids* 2024, Vol. 36, P. 015131.
- [70] Bobrov M., Hrebtov M., Ivashchenko V., Mullyadzhyanov R., Seredkin A., Tokarev M., Zaripov D., Dulin V., Markovich D. Pressure evaluation from Lagrangian particle tracking data using a grid-free least-squares method // *Meas. Sci. Technol.* 2021, Vol. 32, P. 084014.
- [71] Zhou K., Grauer S.J., Flow reconstruction and particle characterization from inertial lagrangian tracks. 2023. URL: <http://arxiv.org/abs/2311.09076>.
- [72] Reynolds A.J. The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers // *Int. J. Heat Mass Transfer* 1975, Vol. 18, P. 1055-1069.
- [73] Kays M.W. Turbulent Prandtl number. Where are we? // *ASME J. Heat Transfer* 1994, Vol. 116, No. 2, P. 284-295.
- [74] Li D. Turbulent Prandtl number in the atmospheric boundary layer – where are we now? // *Atmos. Res.* 2019, Vol. 216, P. 86-105.
- [75] DeBonis J.R. Prediction of turbulent temperature fluctuations in hot jets // *AIAA J.* 2018, Vol. 56, No. 8, P. 3097–3111.
- [76] Кириллов П.Л. Теплообмен в турбулентном потоке. Ч. 1. Турбулентное число Прандтля. 2017. *Атомная энергия*, 122(3), pp.133-144.
- [77] Liu J., Shimoyama K. Determination of turbulent Prandtl number for thermal fluid dynamics simulation of HVAC unit by data assimilation // *J. Therm. Sci. Eng. Appl.* 2024, Vol. 16, No. 11.

- [78] Lai C.C, Socolofsky S.A Budgets of turbulent kinetic energy, Reynolds stresses, and dissipation in a turbulent round jet discharged into a stagnant ambient // Environ. Fluid Mech. 2019, Vol. 19, P. 349-377.
- [79] Rudenko Y.K., Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Y.Y., Uvarov A.V. Reconstruction of turbulent flow from temperature field measured using Background Oriented Schlieren // Int. J. Thermofluids 2024, Vol. 23, P. 100744.
- [80] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // J. Comput. Phys. 2019, Vol. 378, P. 686-707.
- [81] Clark Di Leoni P., Agarwal K., Zaki T.A., Meneveau C., Katz J. Reconstructing turbulent velocity and pressure fields from under-resolved noisy particle tracks using physics-informed neural networks // Exp. Fluids 2023, Vol. 64, P. 95.
- [82] Clark Di Leoni P., Agasthya L., Buzzicotti M., Biferale L. Reconstructing Rayleigh-Bénard flows out of temperature-only measurements using Physics-Informed Neural Networks // Eur. Phys. J. E 2023, Vol. 46, No. 3, P. 16.
- [83] Wang X., Chan Y., Wong K., Grishchenko D. and Kudinov P. Flow reconstruction of single-phase planar jet from sparse temperature measurements. Saudi Int. Conf. Nucl. Power Eng., Dhahran, Saudi Arabia, 2023.
- [84] Eivazi H., Tahani M., Schlatter P., Vinuesa R. Physics-informed neural networks for solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations // Phys. Fluids 2022, Vol. 34, No. 7, P. 075117.
- [85] Pioch F., Harmening J.H., Müller A.M., Peitzmann F., Schramm D., el Moctar O. Turbulence modeling for physics-informed neural networks: comparison of different RANS models for the backward-facing step flow // Fluids 2023, Vol. 8, No. 2, P. 43.
- [86] Raghu S., Nayek R., Chalamalla V. Physics informed neural networks for free shear flows. ArXiv Preprint arXiv:2404.03542, 2024.
- [87] Jagtap A.D., Mao Z., Adams N., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for inverse problems in supersonic flows // J. Comput. Phys. 2022, Vol. 466, P. 111402.

- [88] Mao Z., Jagtap A.D., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for high-speed flows // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2020, Vol. 360, P. 112789.
- [89] Vinnichenko N.A., Uvarov A.V., Plaksina Y.Y. Combined study of heat exchange near the liquid–gas interface by means of Background Oriented Schlieren and Infrared Thermal Imaging // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2014, Vol. 59, P. 238–245.
- [90] Plaksina Y.Y., Pushtaev A.V., Vinnichenko N.A., Uvarov A.V. The effects of small contaminants on the formation of structures during Rayleigh–Bènard–Marangoni convection in a planar liquid layer // *Moscow Univ. Phys. Bull.* 2018, Vol. 73, No. 5, P. 513-519.
- [91] Bratukhin I.K., Maurin L.N. Thermocapillary convection in a fluid filling a half-space // *Appl. Math. Mech.* 1967, Vol. 31, No. 3, P. 605-608.
- [92] Wu Z. Thermo- and soluto-capillary convection and instability near the air-liquid interface // *Phys. Fluids.* 2024, Vol. 36, No. 12, P. 122103.
- [93] Pumir A., Blumenfeld L. Heat transport in a liquid layer locally heated on its free surface // *Phys. Rev. E.* 1996, Vol. 54, P. R4528–R4531.
- [94] Zebib A., Homsy G.M., Meiburg E. High Marangoni number convection in a square cavity // *Phys. Fluids* 1985, Vol. 28, No. 12, P. 3467-3476.
- [95] Paparella F., Young W.R. Horizontal convection is non-turbulent // *J. Fluid Mech.* 2002, Vol. 466, P. 205-214.
- [96] Слезкин, Н. А. (1955). Динамика вязкой несжимаемой жидкости.
- [97] Boeck T., Thess A. Turbulent Bènard-Marangoni convection: results of two-dimensional simulations // *Phys. Rev. Lett.* 1998, Vol. 80, No. 6, P. 1216-1219.
- [98] Boeck T., Thess A. Bènard–Marangoni convection at low Prandtl number // *J. Fluid Mech.* 1999, Vol. 399, P. 251-275.
- [99] Boeck T. Bènard-Marangoni convection at large Marangoni numbers: Results of numerical simulations // *Adv. Space Res.* 2005, Vol. 36, No. 1, P. 4-10.
- [100] Bukhari S.J., Siddiqui K. The structure of thermal field underneath an evaporative water surface // *Int. J. Therm. Sci.* 2011, Vol. 50, No. 6, P. 930-934.

- [101] Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Y.Y., Uvarov A.V. Measurements of liquid surface relief with Moon-Glade Background Oriented Schlieren technique // *Exp. Thermal Fluid Sci.* 2020, Vol. 114, P. 110051.
- [102] Moisy F., Rabaud M., Salsac K. A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface // *Exp. Fluids.* 2009, Vol. 46, No. 6, P. 1021-1036.
- [103] Miles J. Richardson's criterion for the stability of stratified shear flow // *Phys. Fluids.* 1986, Vol. 29, No. 10, P. 3470-3471.
- [104] Gramer L. Kelvin-Helmholtz instabilities/GFD-II. National Oceanic and Atmospheric Association Report. 2007.
- [105] Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flows // *J. Fluid Mech.* 1957, Vol. 3, No. 2, P. 185-204.
- [106] Pearson J.R.A. On convection cells induced by surface tension // *J. Fluid Mech.* 1958, Vol. 4, No. 5, P. 489-500.
- [107] Pushtaev A.V., Vinnichenko N.A., Plaksina Y.Yu, Uvarov A.V. The onset of convection in liquid with the free surface cooled from above: influence of the surface behavior on the size and formation time of critical perturbations // *Phys. Fluids.* 2021, Vol. 33, No. 11, P. 114105.
- [108] Duan L., Kang Q., Hu W. Characters of surface deformation and surface wave in thermal capillary convection // *Sci. China, Ser. E.* 2006, Vol. 49, No. 5, P. 601-610.
- [109] DC 200 silicone FLUIDS, 1950, *Industrial Lubrication and Tribology*, Vol. 2 No. 5, P. 19-22. <https://doi.org/10.1108/eb052052>
- [110] Baydin A.G., Pearlmutter B.A, Radul A.A., Siskind J.M. Automatic differentiation in machine learning: a survey // *J. Mach. Learn. Res.* 2018, Vol. 18, P. 153.
- [111] Wang S., Teng Y., Perdikaris P. Understanding and mitigating gradient pathologies in physics-informed neural networks. *ArXiv Preprint. arXiv:2001.04536*, 2020.
- [112] Rudenko Y., Vinnichenko N., Plaksina Y., Uvarova I., Ganichev A., Uvarov A. Complete characterization of axisymmetric turbulent jet using background oriented schlieren and physics-informed neural network // *Heat Transfer Res.* 2025, Vol. 56, No. 5, P. 17-35.

- [113] Liu D.C, Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization // Math. Program. 1989, Vol. 45, P. 503-528.
- [114] Molnar J.P, Venkatakrishnan L., Schmidt B.E, Sipkens T.A, Grauer S.J Estimating density, velocity, and pressure fields in supersonic flows using physics-informed BOS // Exp. Fluids 2023, Vol. 64, P. 14.
- [115] Lemoine F., Antoine Y., Wolff M., Lebouche M. Simultaneous temperature and 2D velocity measurements in a turbulent heated jet using combined laser-induced fluorescence and LDA // Exp. Fluids 1999, Vol. 26, P. 315-323.
- [116] Aouissi M., Bounif A., Bensayah K. Scalar turbulence model investigation with variable turbulent Prandtl number in heated jets and diffusion flames // Heat Mass Transfer. 2008, Vol. 44, No. 9, P. 1065-1077.
- [117] Raffel M. Background-oriented schlieren (BOS) techniques // Exp. Fluids 2015, Vol. 56, P. 60.
- [118] Vinnichenko N.A., Uvarov A.V., Plaksina Y.Yu. Accuracy of Background Oriented Schlieren for different background patterns and means of refraction index reconstruction, in Proc. 15th Int. Symp. Flow Visualization, Minsk, Belarus, p. 86, 2012.
- [119] Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Y.Y., Uvarov A.V. Performance of Background Oriented Schlieren with different background patterns and image processing techniques // Exp. Therm. Fluid Sci. 2023, Vol. 147, P. 110934.
- [120] Takeda M., Ina H., Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry // J. Opt. Soc. Am. 1982, Vol. 72, P. 156-160.
- [121] Miltner M., Jordan C., Harasek M. CFD simulation of straight and slightly swirling turbulent free jets using different RANS-turbulence models // Appl. Therm. Eng. 2015, Vol. 89, P. 1117-1126.
- [122] Spalart P.R, Garbaruk A.V. A new " $\lambda_2$ " term for the Spalart-Allmaras turbulence model, active in axisymmetric flows // Flow Turbul. Combust. 2021, Vol. 107, P. 245-256.
- [123] von Saldern J.G.R., Reumschüssel J.M., Kaiser T.L., Sieber M., Oberleithner K. Mean flow data assimilation based on physics-informed neural networks // Phys. Fluids 2022, Vol. 34, No. 11, P. 115129.

- [124] Delcey M., Cheny Y., Kiesgen de Richter S. Physics-informed neural networks for gravity currents reconstruction from limited data // *Phys. Fluids* 2023, Vol. 35, No. 2, P. 027124.
- [125] Huang W., Zhang X., Zhou W., Liu Y. Learning time-averaged turbulent flow field of jet in crossflow from limited observations using physics-informed neural networks // *Phys. Fluids* 2023, Vol. 35, No. 2, P. 025131.
- [126] Uddin N., Neumann S.O, Weigand B., Younis B.A Large-eddy simulations and heat-flux modeling in a turbulent impinging jet // *Numer. Heat Transf., Part A* 2009, Vol. 55, No. 10, P. 906-930.
- [127] Vinnichenko N.A, Andrianova A.V, Pushtaev A.V, Rudenko Yu.K, Plaksina Yu.Yu, Uvarov A.V Color-encoded M-array Background Oriented Schlieren for measurements of strongly refracting objects // *Int. J. Thermofluids* 2023, Vol. 18, P. 100364.
- [128] Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Rudenko Yu.K., Plaksina Yu.Yu., Uvarov A.V. Background-oriented schlieren with image processing based on phase-shifting profilometry // *Exp. Fluids* 2025, Vol. 66, No. 3, P. 47.
- [129] Siggers J.H., Kerswell R.R., Balmforth N.J. Bounds on horizontal convection // *J. Fluid. Mech.* 2004, Vol. 517, P. 55–70.
- [130] Rocha C.B., Bossy T., Llewellyn Smith S.G. Improved bounds on horizontal convection // *J. Fluid. Mech.* 2020, Vol. 883, P. 41.
- [131] Rocha C.B., Constantinou N.C., Llewellyn Smith S.G. The Nusselt numbers of horizontal convection // *J. Fluid. Mech.* 2020, Vol. 894, A24.