МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Макарова Юлия Константиновна

Многотипные ветвящиеся случайные блуждания при отсутствии и наличии иммиграции

Специальность

1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Яровая Елена Борисовна

Москва-2026

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Основная тема диссертации направлена на исследование многотипных ветвящихся случайных блужданий (ВСБ), которые являются одним из интенсивно развивающихся направлений теории случайных процессов. ВСБ сочетает в себе свойства процессов ветвления, связанных с гибелью и размножением частиц, и процессов блуждания частиц по заданным множествам. В качестве множеств могут рассматриваться различные пространства, например, целочисленные решетки $\mathbb{Z}^d$ [13] или непрерывные пространства $\mathbb{R}^d$ [17]. Есть ряд исследований, посвященных ВСБ на периодических структурах [5], [6]. Поведение поля частиц в ВСБ определяется расположением источников ветвления, в которых частицы могут производить потомков или умирать. Например, на целочисленных решетках можно рассматривать один источник ветвления [14], конечное число источников ветвления [15], [16] или счетное число источников, расположенных в каждой точке решетки. При этом, несмотря на всю сложность изучения таких процессов, ВСБ имеют широкое применение в различных областях. В частности, в настоящее время известны приложения ВСБ в популяционной динамике, которая изучает распространение популяций на определенных территориях и вероятности их вырождений, и являются удобным инструментом для описания и исследования эволюционных процессов с рождением, гибелью и миграцией частиц [28]. Такие модели используются в биологии [3] и демографии [23].

Ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц без блуждания впервые, по-видимому, были рассмотрены Б. А. Севастьяновым [7]. Им исследовались ветвящиеся процессы как с дискретным, так и с непрерывным временем. В настоящее время такие процессы продолжают широко изучаться как в неслучайных, так и в случайных средах. Например, в работах [25], [26] авторы исследуют ветвящиеся процессы с дискретным временем в случайной среде, то есть когда производящая функция числа потомков не является постоянной, а зависит от номера поколения. Б. А. Севастьяновым также изучались ветвящиеся процессы с возможной иммиграцией частиц. Им показано, что популяция вырождается в докритических ветвящихся процессах, то есть когда интенсивность гибели частиц превышает их рождение. В этом случае введение иммиграции помогает стабилизировать процесс, то есть прекратить его вымирание.

Особый интерес вызывают ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц, к которым добавляется возможность перемещения частиц по многомерной решетке. Такие ВСБ, в отличие от процессов с одним типом частиц, имеют больше приложений, так как могут описывать не только распространение популяции со временем, но также и процессы взаимодействия типов частиц между собой. Актуальность исследования таких процессов объясняется применениями в теории эпидемий и биологии, когда рассматривается, например, сосуществование нескольких биологических видов в природе и изучается выживаемость видов в зависимости от взаимодействия между типами. Для доказательства предельных теорем о численностях частиц в многотипных ВСБ с непрерывным временем авторами работы [8] предложено использовать мартингальные методы. В модели многотипных ВСБ может быть добавлена возможность притока частиц извне в каждую точку решетки, называемая *иммиграцией* частиц. ВСБ с иммиграцией впервые, по-видимому, было рассмотрено в работе Д. Хан с соавторами в 2017 году [21] для случая, когда каждая из частиц могла произвести лишь одного потомка. С помощью докритического ВСБ с иммиграцией можно продемонстрировать демографическую ситуацию в некоторых странах, где уровень рождаемости ниже уровня смертности, а за счет притока иммигрантов среднее число граждан может стабилизироваться.

Целью работы является исследование предельного поведения моментов численностей частиц популяций (общего числа частиц в каждой точке) и субпопуляций (потомков фиксированной частицы в каждой точке) для многотипных ВСБ по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с наличием или отсутствием иммиграции, с одним источником ветвлением или источниками ветвления в каждой точке при различных начальных распределениях частиц.

Научная новизна. Получены новые результаты для многотипных ВСБ — для них изучено предельное поведение первых моментов численностей частиц субпопуляций при различных предположениях о числе источников на решетке и механизмах блуждания каждого из типов частиц. Для ВСБ с иммиграцией изучена устойчивость процесса по Ляпунову в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции зависят от положения частицы на решетке.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы, связанные с выводом прямых и обратных уравнений Колмогорова, условными математическими ожиданиями, стохастическими дифференциальными уравнениями, представлениями Фейнмана-Каца, теорией дифференциальных уравнений, дискретным преобразованием Фурье, преобразованиями Лапласа и спектральной теорией.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы для дальнейшего развития теории многотипных ветвящихся случайных блужданий с наличием или отсутствием иммиграции.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются предельные поведения численностей субпопуляций и популяций частиц ВСБ по целочисленным решеткам $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, поэтому тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 «Теория вероятностей и математическая статистика» по направлениям исследований: предельные теоремы, стохастические процессы, марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели, стационарные случайные процессы и поля.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теорема о явном решении уравнений для первых моментов численностей субпопу-

ляций частиц в ВСБ с двумя типами частиц при совпадающих механизмах блужданий и источниками ветвления в каждой точке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

2. Теоремы о предельном поведении первых моментов численностей субпопуляций частиц в ВСБ с двумя типами частиц в случае, когда генератор случайного блуждания частиц первого типа имеет конечную дисперсию скачков, генератор второго типа — бесконечную, при двух различных предположениях: источники ветвления находятся в каждой точке $\mathbb{Z}^d$; на $\mathbb{Z}^d$ есть один источник ветвления.

3. Теорема о предельном поведении второго момента численностей частиц для докритического ВСБ с одним типом частиц, постоянными интенсивностями ветвления и иммиграции в каждой точке решетки, источниками ветвления в каждой точке $\mathbb{Z}^d$ и с бесконечным числом частиц в начальный момент времени.

4. Теоремы об асимптотическом поведении первого и второго момента численностей частиц для докритического ВСБ с одним типом частиц и иммиграцией в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции зависят от положения частиц на решетке, источниками ветвления в каждой точке $\mathbb{Z}^d$ и с бесконечным числом частиц в начальный момент времени.

5. Теоремы об асимптотическом поведении первого и второго момента численностей частиц в ВСБ с двумя типами частиц с возможным изменением типа частиц в случае, когда блуждания частиц обоих типов имеют конечную дисперсию скачков, и источниками ветвления в каждой точке $\mathbb{Z}^d$ с одной начальной частицей.

Апробация. Результаты диссертации прошли апробацию и докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (ACMPT-2017), Москва, Россия, 23–28 октября 2017;

- IX Московская международная конференция по Исследованию Операций (ORM2018 - Germeyer100), Москва, Россия, 22–27 октября 2018;

- Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 24–26 декабря 2018;

- Аспирантский коллоквиум кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, 13 марта 2019;

- Международная научная конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019», Москва, Россия, 8–12 апреля 2019;

- Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 16–18 декабря 2019;

- Международная научная конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, Россия, 10–27 ноября 2020;
- The 5th International Conference on Stochastic Methods 2020 (ICSM-5), Москва, Россия, 23-27 ноября 2020;
- 13th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics (CMStatistics 2020), Virtual, 19–21 декабря 2020;
- The 5th International workshop on branching processes and their applications, Virtual, Badajoz, Испания, 6–22 апреля 2021;
- 63rd ISI World Statistics Congress, Virtual, Нидерланды, 11–16 июля 2021;
- Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 21–24 декабря 2021;
- Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, руководитель семинара — академик РАН, профессор А. Н. Ширяев, 18 декабря 2024.

Публикации. Автор имеет 10 работ по теме диссертации. Из них 4 статьи опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности и отрасли наук. Одна статья без соавторов опубликована в рецензируемом научном издании из перечня ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация, объемом 115 страниц, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 28 наименований. В работу вошли результаты, выполненные при поддержке грантов фонда РФФИ 17-01-00468 и 20-01-00487, руководитель — профессор Е. Б. Яровая.

В первой главе рассматривается модель ВСБ с двумя типами частиц. Приводятся основные дифференциальные уравнения для производящих функций каждого из типов частиц, а также всех моментов численностей частиц субпопуляций. В случае, когда источники ветвления находятся в каждой точке решетки и генераторы блужданий каждого из типов частиц совпадают, были получены точные решения для первых моментов численностей частиц субпопуляций. Для случая, когда генераторы случайных блужданий не совпадают, были получены асимптотические представления первых моментов численностей частиц при больших временах. Для модели с одним источником ветвления на решетке было получено предельное поведение преобразований Лапласа первых моментов субпопуляций частиц каждого из типов в предположении, что генераторы блужданий различны.

Во второй главе описана модель ВСБ с иммиграцией. Сначала рассматривается случай, когда интенсивность иммиграции в каждую точку решетки $x \in \mathbb{Z}^d$ предполагается постоянной. В этом случае было изучено предельное поведение первого и второго момента численностей частиц в каждой точке решетке при больших временах. Далее проводится анализ процесса в предположении, что интенсивности иммиграции зависят от точки решетки $x \in \mathbb{Z}^d$. Для данного процесса изучена устойчивость процесса по Ляпунову. Кроме того, в этой же главе представлен сравнительный анализ нескольких моделей ВСБ, в котором будет показано, что в некоторых случаях можно достигнуть дуальности моделей, то есть случая, когда разные процессы будут описываться абсолютно одинаковыми уравнениями. При этом добавление в данные процессы, уже рассмотренного выше, процесса иммиграции нарушает дуальность.

В третьей главе рассматривается частный случай для ВСБ с двумя типами частиц. В первой главе было предположение о том, что частицы не могут менять тип за малое время. В данной главе будем предполагать, что частицы могут менять тип за малое время. Такие модели могут описывать распространение вирусов, когда один тип частиц — зараженные частицы, а второй — частицы, выработавшие иммунитет. Изучаются первый и второй момент численностей частиц каждого типа при больших временах.

Благодарность. Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Елене Борисовне Яровой за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Многотипные ветвящиеся случайные блуждания по многомерной решетке

Глава посвящена многотипным ВСБ по целочисленной многомерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$ с различным числом источником ветвления. В разделе 1.1.1 описана модель ВСБ и основные объекты исследований — субпопляции и популяции частиц каждого из типов. Рассматривается модель, когда источники ветвления находятся в каждой точке решетки. Для данной модели в разделе 1.1.2 вводятся производящие функции для каждого из типов частиц, а также выводятся их дифференциальные уравнения. В разделе 1.1.3 выводятся дифференциальные уравнения для первых моментов субпопуляций частиц, а также получаются их точные решения в случае, когда генераторы блужданий совпадают, и асимптотические представления при больших временах для случая, когда генераторы блужданий каждого из типов частиц различны. В разделе 1.1.4 приведены дифференциальные уравнения для вторых моментов численностей частиц субпопуляций. В разделе 1.1.5 представлены дифференциальные уравнения для факториальных моментов старших порядков. В разделе 1.2 вводится модель ВСБ с двумя типами частиц и одним источником ветвления. В разделах 1.2.1–1.2.3 для данной модели рассматривается асимптотическое поведение преобразований Лапласа первых моментов субпопуляций частиц.

1.1 Ветвящиейся случайные блуждания с источниками ветвления в каждой точке многомерной решетки

Рассмотрим популяционную модель с двумя типами частиц на целочисленной решетке. Предположим, что источники ветвления сначала расположены в каждой точке решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, то есть частицы могут производить потомков и погибать в каждой точке решетки.

1.1.1 Описание модели

Пусть $N_i(t,y)$ — число частиц типа i $(i=1,2)$ в момент времени $t\geqslant 0$ в точке $y\in\mathbb{Z}^d$, $d\geqslant 1$. Тогда общую численность частиц в точке $y\in\mathbb{Z}^d$ в момент времени $t\geqslant 0$ можно представить в виде вектора на пространстве $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$

$$N(t,y)=[N_1(t,y),N_2(t,y)]^T.$$

В начальный момент времени $t=0$ положим, что $N_i(0,x)=l_i>0$, $i=1,2$ для всех точек $x\in\mathbb{Z}^d$.

Эволюция поля частиц каждого типа включает в себя несколько свойств. Каждая частица, находящаяся в точке $x\in\mathbb{Z}^d$ в момент времени $t>0$, остается в этой точке некоторое время τ до первого изменения. Таким образом, в момент времени $t+\tau+0$ с частицей могут произойти следующие изменения:

1. частица типа $i=1,2$ может умереть с интенсивностью $\mu_i\geqslant 0$, то есть за малое время dt частица типа i умирает с вероятностью $\mu_i dt$, $i=1,2$;

2. каждая частица типа $i=1,2$ может произвести потомков обоих типов. Обозначим $\beta_i(k,l)$, $k+l\geqslant 2$, как интенсивность частицы типа i произвести k частиц первого типа и l частиц второго типа.

   Таким образом, соответствующая производящая функция для числа потомков имеет вид
   $$F_i(z_1,z_2)=\sum_{k+l\geqslant 2} z_1^k z_2^l \beta_i(k,l).$$

   Замечание 1.1.1. В введенных выше обозначениях,
   $$\mu_i=\beta_i(0,0),\quad i=1,2.$$

   Случай, когда частица типа $i=1,2$ может превратиться в частицу типа $j=1,2$ при $j\neq i$ не рассматривается, то есть
   $$\beta_1(0,1)=\beta_2(1,0)=0.$$

   Также предполагается, что
   $$\mu_1+\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_1(k,l)=-\beta_1(1,0)>0;\quad \mu_2+\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_2(k,l)=-\beta_2(0,1)>0,$$

   здесь $\beta_1(1,0)$ и $\beta_2(0,1)$ описывают случаи, когда с частицами не происходит никаких изменений.

3. частицы могут перемещаться по решетке. Введем соответствуюшие процессы блуждания для частиц каждого из типов. Предположим, что вероятность прыжка из точки x в точку $x+z$ за малое время dt для частицы типа $i=1,2$ равна $\varkappa_i a_i(x,x+z)dt$. Здесь $\varkappa_i>0$ — коэффициент диффузии. Для рассматриваемой модели предположим также, что блуждание

- *симметрично* — $a_i(x,y) = a_i(y,x)$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}^d$;
- *однородно по пространству* — $a_i(x, x+z) = a_i(z)$ для всех $x, z \in \mathbb{Z}^d$;
- *неприводимо* — все точки решетки достижимы, то есть $\operatorname{span}\{z : a_i(z) > 0\} = \mathbb{Z}^d$.

Также будем считать, что

$$a_i(0) = -1 \qquad \sum_z a_i(z) = 0.$$

Тогда генератор случайного блуждания для каждого типа частиц $i = 1, 2$ имеет вид

$$\mathcal{L}_i \psi(x) = \varkappa_i \sum_v \big[\psi(x+v) - \psi(x)\big] a_i(v). \tag{1.1}$$

Основными объектами исследований являются субпопуляции частиц каждого из типов. Введем обозначения для субпопуляций, которые можно представить в виде соответствующих векторов

$$n_1(t,x,y) = [n_{11}(t,x,y), n_{12}(t,x,y)]^T, \quad n_2(t,x,y) = [n_{21}(t,x,y), n_{22}(t,x,y)]^T.$$

Здесь $n_i(t,x,y)$ — вектор частиц в точке y, порожденных одной частицей типа $i = 1, 2$, которая в начальный момент времени $t = 0$ была в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Компоненты этих векторов $n_{ij}(t,x,y)$ — число частиц в точке y типа j, порожденные одной частицей типа i в точке x в начальный момент времени $t = 0$. Таким образом,

$$n_{ij}(0,x,y) = \delta_i(j)\delta_x(y).$$

Следовательно, общую численность частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ можно представить в виде

$$N(t,y) = \Big[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \sum_{s\in\{1,\dots,l_1\}} n_{1,s}(t,x,y) + \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \sum_{m\in\{1,\dots,l_2\}} n_{2,m}(t,x,y)\Big],$$

где $n_{i,l}(t,x,y)$ — субпопуляция, порожденная l-ой частицей в точке x в момент времени $t = 0$. Его компоненты $N_i(t,x)$, $i = 1, 2$ имеют вид

$$N_i(t,y) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \sum_{s\in\{1,\dots,l_1\}} n_{1i,s}(t,x,y) + \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \sum_{m\in\{1,\dots,l_2\}} n_{2i,m}(t,x,y).$$

1.1.2 Производящие функции

Для исследования процесса с двумя типами частиц будет удобно ввести производящую функцию для ВСБ. Пусть $z = (z_1, z_2)$. Определим производящую функцию для каждого типа частиц $i = 1, 2$ как

$$\Phi_i(t,x,y;z) = \mathsf{E} z_1^{n_{i1}(t,x,y)} z_2^{n_{i2}(t,x,y)}.$$

Данная производящая функция показывает эволюцию одной частицы типа $i = 1, 2$ в момент времени t в точке y. С учетом эволюций, которые могут произойти с частицей каждого типа за малое время на решетке и, используя обратные уравнения Колмогорова, можно получить дифференциальное уравнение для производящей функции каждого из типов частиц.

Лемма 1.1.1. *Для $i = 1, 2$ дифференциальное уравнение производящей функции имеет вид*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial t} & = \mathcal{L}_i \Phi_i(t,x,y;z) + \mu_i(1 - \Phi_i(t,x,y;z)) + F_i(\Phi_1, \Phi_2) \\ & \quad - \sum\limits_{k+l \geqslant 2} \beta_i(k,l) \Phi_1(t,x,y;z); \\ \Phi_i(0,x,y;z) & = \begin{cases} 1, x \neq y; \\ z_i, x = y, \end{cases} \end{cases} \tag{1.2}$$

где $F_i(x,y)$ - производящия функция для числа потомков частиц каждого из типов $i = 1, 2$ равная

$$F_i(x,y) = \sum_{k+l \geqslant 2} x^k y^l \beta_i(k,l).$$

Доказательство. Рассмотрим $\Phi_1(\cdot, x, y; z)$ в момент времени $t + dt$. Используем стандартный метод обратных уравнений Колмогорова для вывода дифференциального уравнения (см., например [1]):

$$\Phi_1(t+dt,x,y;z) = \mathsf{E} z_1^{n_{11}(t+dt,x)} z_2^{n_{12}(t+dt,x)} = \mathsf{E}\Big[\prod_v z_1^{n_{11}(dt,x,x+v) n_{11}(t,x+v,y)}$$
$$\prod_v z_1^{n_{12}(dt,x,x+v) n_{21}(t,x+v,y)} \prod_u z_2^{n_{11}(dt,x,x+v) n_{12}(t,x+v,y)} \prod_u z_2^{n_{12}(dt,x,x+v) n_{22}(t,x+v,y)}\Big].$$

Отдельно выделем множители для $v = 0$ и $u = 0$. Тогда

$$\Phi_1(t+dt,x,y;z) = \mathsf{E}\Big[z_1^{n_{11}(dt,x,x) n_{11}(t,x,y)} \prod_{v \neq 0} z_1^{n_{11}(dt,x,x+v) n_{11}(t,x+v,y)} z_1^{n_{12}(dt,x,x) n_{21}(t,x,y)}$$
$$\prod_{v \neq 0} z_1^{n_{12}(dt,x,x+v) n_{21}(t,x+v,y)} z_2^{n_{11}(dt,x,x) n_{11}(t,x,y)} \prod_{u \neq 0} z_2^{n_{11}(dt,x,x+v) n_{11}(t,x+v,y)}$$
$$\times z_2^{n_{12}(dt,x,x) n_{22}(t,x,y)} \prod_{u \neq 0} z_2^{n_{12}(dt,x,x+v) n_{22}(t,x+v,y)}\Big]$$

Объединив некоторые множители, получаем

$$\Phi_1(t+dt,x,y;z) = \mathsf{E}\Big[\Big[z_1^{n_{11}(t,x,y)} z_2^{n_{12}(t,x,y)}\Big]^{n_{11}(dt,x,x)} \Big[z_1^{n_{21}(t,x,y)} z_2^{n_{22}(t,x,y)}\Big]^{n_{12}(dt,x,x)}$$
$$\prod_{v \neq 0} \Big[z_1^{n11(t,x+v,y)} z_2^{n_{12}(t,x+v,y)}\Big]^{n_{11}(dt,x,x+v)} \prod_{u \neq 0} \Big[z_1^{n21(t,x+v,y)} z_2^{n_{22}(t,x+v,y)}\Big]^{n_{12}(dt,x,x)}\Big].$$

Для сокращения вычислений введем обозначение

$$G(t+dt,x,y;z) = \left[z_1^{n_{11}(t,x,y)} z_2^{n_{12}(t,x,y)}\right]^{n_{11}(dt,x,x)} \left[z_1^{n_{21}(t,x,y)} z_2^{n_{22}(t,x,y)}\right]^{n_{12}(dt,x,x)}$$
$$\prod_{v\neq 0}\left[z_1^{n11(t,x+v,y)} z_2^{n_{12}(t,x+v,y)}\right]^{n_{11}(dt,x,x+v)} \prod_{u\neq 0}\left[z_1^{n21(t,x+v,y)} z_2^{n_{22}(t,x+v,y)}\right]^{n_{12}(dt,x,x)}.$$

Так как приращение dt рассматривается на интервале $(t;t+dt)$, то величины $n_{ij}(dt,x,y;z)$, $i,j=1,2$ и сигма-алгебра $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ независимы, где $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ — сигма-алгебра событий, произошедших до момента времени t и включая его. Воспользуемся свойствами условного математического ожидания, а также рассмотрим все эволюции, которые могут произойти за малое время dt:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}G(t+dt,x,y;z) &= \mathsf{E}[\mathsf{E}[G(t+dt,x,y;z)|\mathcal{F}_{\leqslant t}]] \\ &= \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_1(k,l)\Phi_1^k(t,x,y;z)\Phi_2^l(t,x,y;z)+\mu_1 dt \\ &\quad + \varkappa_1\sum_{v\neq 0} a_1(v)\Phi_1(t,x+v,y;z)+\Phi_1(t,x,y;z) \\ &\quad \times\Big(1-\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_1(k,l)dt-\mu_1 dt-\varkappa_1 dt\Big).\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}\Phi_1(t+dt,x,\cdot;\cdot) &= (1-\varkappa_1 dt-\mu_1 dt-\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_1(k,l)dt)\Phi_1(t,x,\cdot;\cdot) \\ &\quad + \varkappa_1 dt\sum_{v}\Phi_1(t,x+v,\cdot;\cdot)a_1(v)+\mu_1 dt \\ &\quad + \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_1(k,l)dt\Phi_1^k(t,x,\cdot;\cdot)\Phi_2^l(t,x,\cdot;\cdot).\end{aligned}$$

При $dt\to 0$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_1(t,x,y;z)}{\partial t} &= \mathcal{L}_1\Phi_1(t,x,y;z)+\mu_1(1-\Phi_1(t,x,y;z)) \\ &\quad + \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_1(k,l)(\Phi_1^k(t,x,y;z)\Phi_2^l(t,x,y;z)-\Phi_1(t,x,y;z)).\end{aligned}$$

Используя введенные выше обозначения, получаем искомый результат

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_1(t,x,y;z)}{\partial t} &= \mathcal{L}_1\Phi_1(t,x,y;z)+\mu_1(1-\Phi_1(t,x,y;z))+F_1(\Phi_1,\Phi_2) \\ &\quad - \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_1(k,l)\Phi_1(t,x,y;z).\end{aligned}$$

Начальное условие примет вид

$$\Phi_1(0,x,y;z) = \begin{cases} 1, x \neq y; \\ z_1, x = y. \end{cases}$$

Аналогично получается дифференциальное уравнение для производящей функции второго типа частиц. ∎

Для исследования поведения моментов численностей частиц, нам понадобится следующее замечание.

Замечание 1.1.2. Предположим, что

$$\beta_i(k,l) \leqslant \frac{c_0^{k+l}}{k!l!}, \quad k+l \geqslant 2, \tag{1.3}$$

для некоторого $c_0 > 0$. Тогда будет выполнено условие Карлемана. Оно гарантирует, что функции $F_i(z_1,z_2)$, $i = 1,2$ — аналитические функции в области $|z_i - 1| < \delta_0$ для некоторого $\delta_0 > 0$.

1.1.3 Предельные теоремы о первых моментах численностей частиц

Дифференциальные уравнения для моментов численностей частиц получаются при дифференцировании уравнений производящих функций (1.2) по переменным z_1 и z_2 в точках $z_1 = 1$ или $z_2 = 1$.

Введем обозначение первого момента численности части для субпопуляций $n_{ij}(t,x,y)$, $i,j = 1,2$. Пусть

$$m_{ij}^{(1)}(t,x,y) = \mathsf{E} n_{ij}(t,x,y).$$

Тогда верна

Лемма 1.1.2. *Пусть для $i = 1,2$ выполнено условие*

$$\beta_i(k,l) \leqslant \frac{c_0^{k+l}}{k!l!}, \quad k+l \geqslant 2.$$

Тогда дифференциальные уравнения для $m_{ij}^{(1)}(t,x,y)$, $i,j = 1,2$ имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_{ij}^{(1)}(t,x,y)}{\partial t} & = \mathcal{L}_i m_{ij}^{(1)}(t,x,y) - \mu_i m_{ij}^{(1)}(t,x,y) - \sum\limits_{k+l\geqslant 2} \beta_i(k,l) m_{ij}^{(1)}(t,x,y) \\ & \quad + \sum\limits_{k+l\geqslant 2} \beta_i(k,l)(k m_{1j}^{(1)}(t,x,y) + l m_{2j}^{(1)}(t,x,y)); \\ m_{ij}^{(1)}(0,x,y) & = \delta_i(j)\delta_x(y). \end{cases}$$

Доказательство. Продифференцировав производящую функцию $\Phi_i(t,x,y;z)$ по z_j, $j=1,2$, получаем

$$\frac{\partial \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j} = \frac{\partial \mathsf{E} z_1^{n_{i1}(t,x,y)} z_2^{n_{i2}(t,x,y)}}{\partial z_j} = \mathsf{E} n_{ij}(t,x,y) z_1^{n_{i1}(t,x,y)-\delta_j(1)} z_2^{n_{i2}(t,x,y)-\delta_j(2)},$$

откуда при $z=(z_1,z_2)=(1,1)$ имеем

$$\frac{\partial \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j}\Big|_{z=(1,1)} = \mathsf{E} n_{ij}(t,x,y) = m_{ij}^{(1)}(t,x,y). \tag{1.4}$$

Для получения дифференциального уравнения для первого момента продифференцируем уравнение производящей фукнции (1.2) из леммы 1.1.1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial t \partial z_j} &= \partial_{z_j}\Big(\mathcal{L}_i \Phi_i(t,x,y;z) + \mu_i(1-\Phi_i(t,x,y;z)) \\
&\quad + \sum_{k+l\geqslant 2} \beta_i(k,l)(\Phi_1^k(t,x,y;z)\Phi_2^l(t,x,y;z) - \Phi_i(t,x,y;z))\Big) \\
&= \mathcal{L}_i\big(\partial_{z_j}\Phi_i(t,x,y;z)\big) - \mu_i\big(\partial_{z_j}\Phi_i(t,x,y;z)\big) \\
&\quad + \sum_{k+l\geqslant 2} \beta_i(k,l)\Big(k\big(\partial_{z_j}\Phi_1(t,x,y;z)\big)\Phi_1^{k-1}(t,x,y;z)\Phi_2^l(t,x,y;z) \\
&\quad + l\Phi_1^k(t,x,y;z)\big(\partial_{z_j}\Phi_2(t,x,y;z)\big)\Phi_2^{l-1}(t,x,y;z) - \big(\partial_{z_j}\Phi_i(t,x,y;z)\big)\Big).
\end{aligned}$$

В предыдущем равенстве при $z=(z_1,z_2)=(1,1)$ с помощью соотношения (1.4) получаем, что левая часть равенства примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial t \partial z_j}\Big|_{z=(1,1)} = \frac{\partial m_{ij}^{(1)}(t,x,y)}{\partial t}; \tag{1.5}$$

правая часть того же уравнения будет равна

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathcal{L}_i\big(\partial_{z_j}\Phi_i(t,x,y;z)\big) - \mu_i\big(\partial_{z_j}\Phi_i(t,x,y;z)\big) + \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)\Big(k\big(\partial_{z_j}\Phi_1(t,x,y;z)\big) \\
&\quad \times \Phi_1^{k-1}(t,x,y;z)\Phi_2^l(t,x,y;z) + l\Phi_1^k(t,x,y;z)\big(\partial_{z_j}\Phi_2(t,x,y;z)\big) \\
&\quad \times \Phi_2^{l-1}(t,x,y;z) - \big(\partial_{z_j}\Phi_i(t,x,y;z)\big)\Big)\Big)\Big|_{z=(1,1)} = \mathcal{L}_i m_{ij}^{(1)}(t,x,y) \\
&\quad - \mu_i m_{ij}^{(1)}(t,x,y) + \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)\big(k-1\big)m_{1j}^{(1)}(t,x,y) + l m_{2j}^{(1)}(t,x,y).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Объединив равенства (1.5) и (1.6) получаем, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_{ij}^{(1)}(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_i m_{ij}^{(1)}(t,x,y) - \mu_i m_{ij}^{(1)}(t,x,y) - \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l) m_{ij}^{(1)}(t,x,y) \\
&\quad + \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)(k m_{1j}^{(1)}(t,x,y) + l m_{2j}^{(1)}(t,x,y)).
\end{aligned}$$

Начальное условие получаем из определения первого момента

$$m_{ij}^{(1)}(0,x,y)=\mathsf{E}n_{ij}(0,x,y)=\mathsf{E}\delta_i(j)\delta_x(y)=\delta_i(j)\delta_x(y).$$

■

Из доказанной леммы вытекают дифференциальные уравнения для первых моментов $m_i^{(1)}(t,x,y)=\mathsf{E}n_i(t,x,y)$, $i=1,2$:

$$\frac{\partial m_1^{(1)}(t,x,y)}{\partial t}=\mathcal{L}_1 m_1^{(1)}(t,x,y)+V_1\Big[m_1^{(1)}(t,x,y),m_2^{(1)}(t,x,y)\Big]^T, \tag{1.7}$$

где V_1 — матрица следующего вида:

$$V_1=\begin{pmatrix}-\mu_1+\sum\limits_{k+l\geqslant 2}(k-1)\beta_1(k,l) & 0\\ 0 & \sum\limits_{k+l\geqslant 2}l\beta_1(k,l)\end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial m_2^{(1)}(t,x,y)}{\partial t}=\mathcal{L}_2 m_2^{(1)}(t,x,y)+V_2\Big[m_1^{(1)}(t,x,y),m_2^{(1)}(t,x,y)\Big]^T, \tag{1.8}$$

где V_2 — матрица:

$$V_2=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k+l\geqslant 2}k\beta_2(k,l) & 0\\ 0 & -\mu_2+\sum\limits_{k+l\geqslant 2}(l-1)\beta_2(k,l)\end{pmatrix}.$$

Объединив вышеприведенные результаты, получаем для

$$n(t,x,y)=[n_1(t,x,y),n_2(t,x,y)]^T,$$

что первый момент $m^{(1)}(t,x,y)=\mathsf{E}n(t,x,y)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial m^{(1)}(t,x,y)}{\partial t}=\begin{pmatrix}\mathcal{L}_1 m_1^{(1)}(t,x,y)\\ \mathcal{L}_2 m_2^{(1)}(t,x,y)\end{pmatrix}+V\begin{pmatrix}m_1^{(1)}\\ m_2^{(1)}\end{pmatrix},$$

где V — это матрица:

$$V=\begin{pmatrix}-\mu_1+\sum_{k+l>\geqslant 2}(k-1)\beta_1(k,l) & \sum_{k+l>\geqslant 2}l\beta_1(k,l)\\ \sum_{k+l>\geqslant 2}k\beta_2(k,l) & -\mu_2+\sum_{k+l>\geqslant 2}(l-1)\beta_2(k,l)\end{pmatrix}.$$

Теперь можно вывести дифференциальные уравнения для всей популяции $y\in\mathbb{Z}^d$. Напомним, что

$$N_1(t,y)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s\in\{1,\ldots,l_1\}}n_{11,s}(t,x,y)+\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{m\in\{1,\ldots,l_2\}}n_{21,m}(t,x,y);$$

$$N_2(t,y)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s\in\{1,\ldots,l_1\}}n_{12,s}(t,x,y)+\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{m\in\{1,\ldots,l_2\}}n_{22,m}(t,x,y).$$

Тогда получаем

$$m_1^{(1)}(t,y)=\mathsf{E}N_1(t,y)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s\in\{1,\dots,l_1\}}m_{11,s}^{(1)}(t,x,y)+\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{m\in\{1,\dots,l_2\}}m_{21,m}^{(1)}(t,x,y);$$
$$m_2^{(1)}(t,y)=\mathsf{E}N_2(t,y)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s\in\{1,\dots,l_1\}}m_{12,s}^{(1)}(t,x,y)+\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{m\in\{1,\dots,l_2\}}m_{22,m}^{(1)}(t,x,y).$$

Подставив полученные результаты в лемме 1.1.2, получаем, что

$$m^{(1)}(t,y)=\left[m_1^{(1)}(t,y),m_2^{(1)}(t,y)\right]^T,$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial m^{(1)}(t,y)}{\partial t}=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s\in\{1,\dots,l_1\}}\frac{\partial m_{1,s}^{(1)}(t,x,y)}{\partial t}+\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{m\in\{1,\dots,l_2\}}\frac{\partial m_{2,m}^{(1)}(t,x,y)}{\partial t}$$

Найдем решение, полученных в лемме 1.1.2, дифференциальных уравнений первых моментов субпопуляций частиц. Для этого нам понадобится метод дискретного преобразования Фурье. Напомним, что данное преобразование имеет вид (см., например [12]):

$$\widehat{f}(\theta)=\sum_{u\in\mathbb{Z}^d}e^{\imath(\theta,u)}f(u),\qquad \theta\in[-\pi,\pi]^d. \tag{1.9}$$

Также нам понадобится обратное преобразование Фурье, которое задается формулой (см., например [12]):

$$f(u)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d\int\limits_{[-\pi,\pi]^d}\widehat{f}(\theta)e^{-\imath(\theta,u)}d\theta \tag{1.10}$$

Применим дискретное преобразование Фурье к дифференциальным уравнениям первых моментов $m_1^{(1)}(t,x,y)$ и $m_2^{(1)}(t,x,y)$. Тогда уравнения (1.7), (1.8) примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y)}{\partial t}&=\varkappa_1\widehat{a}_1(\theta)\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y)+\Big(\sum_{k+l\geqslant2}(k-1)\beta_1(k,l)-\mu_1\Big)\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y)\\&+\sum_{k+l\geqslant2}l\beta_1(k,l)\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y);\\\frac{\partial\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y)}{\partial t}&=\varkappa_2\widehat{a}_2(\theta)\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y)+\Big(\sum_{k+l\geqslant2}(l-1)\beta_2(k,l)-\mu_2\Big)\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y)\\&+\sum_{k+l\geqslant2}k\beta_2(k,l)\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y).\end{aligned}$$

Положим

$$a(\theta) = \varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta) + \Big(\sum_{k+l\geqslant 2} (k-1)\beta_1(k,l) - \mu_1\Big); \qquad b = \sum_{k+l\geqslant 2} l\beta_1(k,l) \geqslant 0;$$

$$d(\theta) = \varkappa_2 \widehat{a}_2(\theta) + \Big(\sum_{k+l\geqslant 2} (l-1)\beta_2(k,l) - \mu_2\Big); \qquad c = \sum_{k+l\geqslant 2} k\beta_2(k,l) \geqslant 0.$$

Тогда уравнения примут вид:

$$\frac{\partial \widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y)}{\partial t} = a(\theta)\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y) + b\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y); \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial \widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y)}{\partial t} = c(\theta)\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta) + d\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y). \tag{1.12}$$

Замечание 1.1.3. Напомним, что каждое из уравнений (1.7), (1.8) представляет собой систему уравнений для векторов. Однако уравнения имеют одинаковый вид для каждой из компонент, различаются только начальные условия, что не влияет на общий вид решений дифференциальных уравнений.

Замечание 1.1.4. Рассмотрим более общую систему дифференциальных уравнений, которая решается в данной задаче (см., например, [10]):

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = au(t) + bv(t), \qquad u(0) = u_0 \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} = cu(t) + dv(t), \qquad v(0) = v_0. \tag{1.14}$$

Продифференцируем первое уравнение еще раз по t. Тогда

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} - (a+d)\frac{\partial u(t)}{\partial t} + (ad-bc)u(t) = 0$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0 \tag{1.15}$$

Рассмотрим дискриминант:

$$D = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc.$$

Так как в наших обозначениях параметры $b, c \geqslant 0$, то $D \geqslant 0$.

Если $D = 0$, уравнение имеет два одинаковых корня $\lambda_{1,2} = a = d$, следовательно,

$$u(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}.$$

Решение для $v(t)$ находится аналогично.

Если $D \neq 0$, то уравнение имеет два различных корня $\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$, следовательно,

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{1.16}$$

Заметим, что $D \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$$a \neq d \quad \text{или} \quad b \neq 0 \text{ и } c \neq 0.$$

Выпишем точные решения $u(t)$ и $v(t)$ уравнений (1.13), (1.14), которые будем использовать в дальнейшем. Рассмотрим следующие случаи параметров b, c

$$b = 0, c \geqslant 0 \quad \text{или} \quad b \geqslant 0, c = 0 \quad \text{или} \quad b > 0, c > 0,$$

которые полностью исчерпывают все комбинации параметров при условии $b, c \geqslant 0$. Первые два условия пересекаются при $b = c = 0$, что не влияет на дальнейшие исследования.

Случай $b = 0, c \geqslant 0$. Функция $u(t)$ может быть сразу получения из уравнения (1.13):

$$u(t) = e^{at} u_0.$$

Для нахождения значения $v(t)$ подставим значение $u(t)$ в уравнение (1.14) и получим решение неоднородного линейного уравения

$$v(t) = e^{dt} v_0 + \int\limits_0^t e^{d(t-s)} c e^{as} u_0 \, ds.$$

Значение интеграла в правой части равенства засивит от выполнения условия $a = d$. Таким образом,

$$v(t) = \begin{cases} \left(v_0 - \frac{cu_0}{a-d}\right) e^{dt} + \frac{cu_0}{a-d} e^{at}, & a \neq d \\ (v_0 + cu_0 t) e^{dt}, & a = d. \end{cases}$$

Случай $b \geqslant 0, c = 0$. Данный случай рассматривается аналогично предыдущему. Решения уравнений (1.13), (1.14) примут вид

$$u(t) = \begin{cases} \left(u_0 - \frac{bv_0}{d-a}\right) e^{at} + \frac{bv_0}{d-a} e^{dt}, & a \neq d \\ (u_0 + bv_0 t) e^{at}, & a = d, \end{cases}$$
$$v(t) = e^{dt} v_0.$$

Случай $b > 0, c > 0$. В данном случае оба корня $\lambda_{1,2}$ уравнения (1.15) различные, более того $\lambda_1 > \lambda_2$. Для того, чтобы найти решения $u(t)$ и $v(t)$ уравнений (1.13), (1.14) положим $t = 0$ в (1.16). Тогда получаем уравнение для начального условия $u(0)$:

$$C_1 + C_2 = u(0) = u_0. \tag{1.17}$$

Далее, найдем $bv(t)$ из уравнения (1.13):

$$bv(t) = u'(t) - au(t) = C_1(\lambda_1 - a)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - a)e^{\lambda_2 t}.$$

Тогда получаем значение для $bv(0)$:

$$C_1(\lambda_1 - a) + C_2(\lambda_2 - a) = bv(0) = bv_0. \tag{1.18}$$

Из уравнениеи (1.17)–(1.18) получаем

$$C_1 = \frac{bv_0 + u_0(a - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad C_2 = \frac{u_0(\lambda_1 - a) - bv_0}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{bv_0 + u_0(a - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{u_0(\lambda_1 - a) - bv_0}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_2 t}, \\ v(t) &= \frac{(\lambda_1 - a)}{b}\frac{bv_0 + u_0(a - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2 - a)}{b}\frac{u_0(\lambda_1 - a) - bv_0}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение можно упростить, так как

$$\frac{(\lambda_2 - a)(\lambda_1 - a)}{b} = -c, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{D}.$$

Таким образом, получаем решения уравнений

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\sqrt{D}}\Big(\big(bv_0 + u_0(a - \lambda_2)\big)e^{\lambda_1 t} + \big(u_0(\lambda_1 - a) - bv_0\big)e^{\lambda_2 t}\Big), \\ v(t) &= \frac{1}{\sqrt{D}}\Big(\big(v_0(\lambda_1 - a) + cu_0\big)e^{\lambda_1 t} - \big(cu_0 - (\lambda_2 - a)v_0\big)e^{\lambda_2 t}\Big). \end{aligned}$$

С помощью приведенного выше замечания получим решения дифференциальных уравнений для первого момента (1.11), (1.12). Заметим, что в замечании 1.1.3 был рассмотрен случай, когда функции $u(t)$ и $v(t)$ скалярные, однако это предположение нигде не использовалось и можно предположить, что функции $u(t)$, $v(t)$ могут быть векторными, например, функциями $\widehat{m}_i^{(1)}(t, \theta, y)$ из уравнений (1.11), (1.12).

Также обратим внимание, что у функций из уравнений (1.11), (1.12), в отличии от функций (1.13), (1.14), параметры a и d не константы, а функции, зависящие от параметра θ, то есть $a = a(\theta)$ и $d = d(\theta)$. Тогда корни уравнения λ_1, λ_2 и D также являются функциями параметра θ, то есть

$$\lambda_1(\theta) = \frac{a(\theta) + d(\theta) + \sqrt{D(\theta)}}{2}, \quad \lambda_2(\theta) = \frac{a(\theta) + d(\theta) - \sqrt{D(\theta)}}{2}, \tag{1.19}$$

и

$$D(\theta) = (a(\theta) - d(\theta))^2 + 4bc.$$

Следовательно, с помощью замечания 1.1.3 можно получить решения дифференциальных уравнений для $\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y)$ и $\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y)$ уравнений (1.11), (1.12), используя соответсвующие начальные условия.

Случай $b = 0, c \geqslant 0$. Здесь

$$\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y) = e^{a(\theta)t}\widehat{m}_1^{(1)}(0,\theta,y),$$

$$\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y) = \begin{cases} \left(\widehat{m}_2^{(1)}(0,\theta,y) - \frac{c}{a(\theta)-d(\theta)}\widehat{m}_1^{(1)}(0,\theta,y)\right)e^{d(\theta)t} + \\ \quad + \frac{c}{a(\theta)-d(\theta)}\widehat{m}_1^{(1)}(0,\theta,y)e^{a(\theta)t}, & \text{если } \theta : a(\theta) \neq d(\theta), \\ (\widehat{m}_2^{(1)}(0,\theta,y) + c\widehat{m}_1^{(1)}(0,\theta,y)t)e^{dt}, & \text{если } \theta : a(\theta) = d(\theta). \end{cases}$$

Случай $b \geqslant 0, c = 0$. Здесь

$$\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y) = \begin{cases} \left(\widehat{m}_1^{(1)}(0,\theta,y) - \frac{b}{d(\theta)-a(\theta)}\widehat{m}_2^{(1)}(0,\theta,y)\right)e^{a(\theta)t} + \\ \quad + \frac{b}{d(\theta)-a(\theta)}\widehat{m}_2^{(1)}(0,\theta,y)e^{d(\theta)t}, & \text{если } \theta : a(\theta) \neq d(\theta), \\ (\widehat{m}_1^{(1)}(0,\theta,y) + b\widehat{m}_2^{(1)}(0,\theta,y)t)e^{a(\theta)t}, & \text{если } \theta : a(\theta) = d(\theta), \end{cases}$$

$$\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y) = e^{d(\theta)t}\widehat{m}_2^{(1)}(0,\theta,y).$$

Случай $b > 0, c > 0$. Здесь

$$\begin{aligned} \widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y) = {} & \frac{1}{\sqrt{D(\theta)}}\left((a(\theta) - \lambda_2(\theta))\widehat{m}_1^{(1)}(0,\theta,y) + b\widehat{m}_2^{(1)}(0,\theta,y)\right)e^{\lambda_1(\theta)t} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{D(\theta)}}\left((\lambda_1(\theta) - a(\theta))\widehat{m}_1^{(1)}(0,\theta,y) - b\widehat{m}_2^{(1)}(0,\theta,y)\right)e^{\lambda_2(\theta)t} \\ \widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y) = {} & \frac{1}{\sqrt{D(\theta)}}\left(c\widehat{m}_1^{(1)}(0,\theta,y) + (\lambda_1(\theta) - a(\theta))\widehat{m}_2^{(1)}(0,\theta,y)\right)e^{\lambda_1(\theta)t} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{D(\theta)}}\left(-c\widehat{m}_1^{(1)}(0,\theta,y) + (\lambda_2(\theta) - a(\theta))\widehat{m}_2^{(1)}(0,\theta,y)\right)e^{\lambda_2(\theta)t}. \end{aligned}$$

Остается заметить, что каждая из функций $\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y)$, $\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y)$ является вектор-функцией с двумя компонентами. Таким образом, рассмотрев компоненты $\widehat{m}_1^{(1)}(t,\theta,y)$ и $\widehat{m}_2^{(1)}(t,\theta,y)$ для всех трех случаев, можно получить решение уравнений для $\widehat{m}_{11}^{(1)}(t,\theta,y)$, $\widehat{m}_{12}^{(1)}(t,\theta,y)$, $\widehat{m}_{21}^{(1)}(t,\theta,y)$ и $\widehat{m}_{22}^{(1)}(t,\theta,y)$ во всех трех случаях:

Случай $b = 0, c \geqslant 0$**.** Здесь

$$\left.\begin{aligned}
&\widehat{m}_{11}^{(1)}(t,\theta,y) = e^{i(\theta,y)}e^{a(\theta)t};\\
&\widehat{m}_{21}^{(1)}(t,\theta,y) = \begin{cases} \frac{c}{a(\theta)-d(\theta)}e^{i(\theta,y)}\big(e^{a(\theta)t} - e^{d(\theta)t}\big), & \text{если } \theta : a(\theta) \neq d(\theta),\\ cte^{i(\theta,y)}e^{a(\theta)t}, & \text{если } \theta : a(\theta) = d(\theta); \end{cases}\\
&\widehat{m}_{12}^{(1)}(t,\theta,y) = 0;\\
&\widehat{m}_{22}^{(1)}(t,\theta,y) = e^{i(\theta,y)}e^{d(\theta)t}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

Случай $b \geqslant 0, c = 0$**.** Здесь

$$\left.\begin{aligned}
&\widehat{m}_{11}^{(1)}(t,\theta,y) = e^{i(\theta,y)}e^{a(\theta)t};\\
&\widehat{m}_{21}^{(1)}(t,\theta,y) = 0;\\
&\widehat{m}_{12}^{(1)}(t,\theta,y) = \begin{cases} \frac{b}{a(\theta)-d(\theta)}e^{i(\theta,y)}\big(e^{a(\theta)t} - e^{d(\theta)t}\big), & \text{если } \theta : a(\theta) \neq d(\theta),\\ bte^{i(\theta,y)}e^{d(\theta)t}, & \text{если } \theta : a(\theta) = d(\theta); \end{cases}\\
&\widehat{m}_{22}^{(1)}(t,\theta,y) = e^{i(\theta,y)}e^{d(\theta)t}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

Случай $b > 0, c > 0$**.** Здесь

$$\left.\begin{aligned}
&\widehat{m}_{11}^{(1)}(t,\theta,y) = \frac{1}{\sqrt{D(\theta)}}e^{i(\theta,y)}\Big(\big(a(\theta)-\lambda_2(\theta)\big)e^{\lambda_1(\theta)t} + \big(\lambda_1(\theta)-a(\theta)\big)e^{\lambda_2(\theta)t}\Big);\\
&\widehat{m}_{21}^{(1)}(t,\theta,y) = \frac{c}{\sqrt{D(\theta)}}e^{i(\theta,y)}\big(e^{\lambda_1(\theta)t} - e^{\lambda_2(\theta)t}\big);\\
&\widehat{m}_{12}^{(1)}(t,\theta,y) = \frac{b}{\sqrt{D(\theta)}}e^{i(\theta,y)}\big(e^{\lambda_1(\theta)t} - e^{\lambda_2(\theta)t}\big);\\
&\widehat{m}_{22}^{(1)}(t,\theta,y) = \frac{1}{\sqrt{D(\theta)}}e^{i(\theta,y)}\Big(\big(\lambda_1(\theta)-a(\theta)\big)e^{\lambda_1(\theta)t} + \big(\lambda_2(\theta)-a(\theta)\big)e^{\lambda_2(\theta)t}\Big).
\end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

Замечание 1.1.5. Случаи $b = 0$, $c > 0$ и $b > 0$, $c = 0$ описывают модели, в которых частицы одного из типов не производят потомком обоих типов.

Предположение о равенстве блужданий

Полученные решения дифференциальных уравнений моментов (1.20), (1.21) и (1.22) для дискретного преобразований Фурье первых моментов субпопуляций частиц позволяют находить их асимптотическое поведение в частных случаях.

Рассмотрим случай, когда операторы блужданий $\mathcal{L}_i$, $i = 1, 2$ совпадают, то есть $a_1(z) = a_2(z)$ для всех $z \in \mathbb{Z}^d$, $\varkappa_1 = \varkappa_2$. Для сокращения записей вместо операторов $\mathcal{L}_i$, $i = 1, 2$, которые применяются к функциям $a_i(z)$, $i = 1, 2$, будем рассматривать оператор $\mathcal{L}$, который применяется к функции $a(z)$. Для получения асимптотического поведения первых моментов численностей частиц субпопуляций применим обратное преобразование Фурье (1.10) к уравнениям (1.20), (1.21) и (1.22). Заметим, что в случае, когда операторы блужданий совпадают, собственные значения λ_1, λ_2 характеристического уравнения (1.15) примут вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} = \varkappa \widehat{a}(\theta) + C_1 \pm C_2,$$

где

$$C_1 = \frac{a(\theta) + d(\theta)}{2} - \varkappa \widehat{a}(\theta), \quad C_2 = \frac{((a(\theta) - d(\theta))^2 + 4bc)^{1/2}}{2}. \tag{1.23}$$

Заменив $a(\theta), b, c$ и $d(\theta)$ в (1.23) их значениями, получим представление для C_1 и C_2:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{k+l \geqslant 2} \Big[(k-1)\beta_1(k,l) + (l-1)\beta_2(k,l) \Big] - (\mu_1 + \mu_2); \\ C_2 &= \frac{1}{2} \Bigg[\Big(\sum_{k+l \geqslant 2} [(k-1)\beta_1(k,l) - (l-1)\beta_2(k,l)] - (\mu_1 - \mu_2) \Big)^2 \\ &\quad + 4 \Big(\sum_{k+l \geqslant 2} l \beta_1(k,l) \Big) \Big(\sum_{k+l \geqslant 2} k \beta_2(k,l) \Big) \Bigg]^{1/2}. \end{aligned}$$

Положим

$$r_1 = \sum_{k+l \geqslant 2} (k-1)\beta_1(k,l) - \mu_1, \quad r_2 = \sum_{k+l \geqslant 2} (l-1)\beta_2(k,l) - \mu_2.$$

Тогда в случае $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$, $b = 0$, $c > 0$ (или $b > 0$, $c = 0$) верно следующее соотношение

$$a(\theta) - d(\theta) = r_1 - r_2 \quad \text{для всех } \theta, \tag{1.24}$$

то есть разность $a(\theta) - d(\theta)$ не зависит от θ. Это означает, что $a(\theta) - d(\theta) = 0$ для всех θ или $a(\theta) - d(\theta) \neq 0$ также для всех θ. Более того,

$$a(\theta) - d(\theta) = 0 \text{ для всех } \theta \quad \Longleftrightarrow \quad r_1 - r_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C_2 = 0.$$

Следовательно, при $r_1 = r_2$ не только $a_1(v) = a_2(v)$ для всех $v \in \mathbb{Z}^d$, но также $\widehat{a}_1(\theta) = \widehat{a}_2(\theta)$ для всех $\theta \in [-\pi, \pi]^d$.

Тогда верна теорема.

Теорема 1.1.1. *Пусть функция $p(t,x,y)$ является решением задачи Коши*

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \varkappa \mathcal{L} p(t,x,y), \quad p(0,x,y) = \delta_x(y). \tag{1.25}$$

Тогда для $m_{ij}^{(1)}(t,x,y) = \mathsf{E} n_{ij}(t,x,y)$ $i,j = 1,2$ верны следующие равенства

Случай $b = 0, c = 0$. *Имеем*

$$\begin{aligned}
m_{11}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_1 t} p(t,x,y);\\
m_{21}^{(1)}(t,x,y) &= 0;\\
m_{12}^{(1)}(t,x,y) &= 0;\\
m_{22}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_2 t} p(t,x,y).
\end{aligned}$$

Случай $b = 0, c > 0$. *Имеем*

$$\begin{aligned}
m_{11}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_1 t} p(t,x,y);\\
m_{21}^{(1)}(t,x,y) &= \begin{cases} c e^{r_1 t} p(t,x,y), & \text{\textit{если} } C_2 = 0,\\ \frac{c}{r_1 - r_2}\big(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\big) p(t,x,y), & \text{\textit{если} } C_2 \neq 0; \end{cases}\\
m_{12}^{(1)}(t,x,y) &= 0;\\
m_{22}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_2 t} p(t,x,y).
\end{aligned}$$

Случай $b > 0, c = 0$. *Имеем*

$$\begin{aligned}
m_{11}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_1 t} p(t,x,y);\\
m_{21}^{(1)}(t,x,y) &= 0;\\
m_{12}^{(1)}(t,x,y) &= \begin{cases} b e^{r_2 t} p(t,x,y), & \text{\textit{если} } C_2 = 0,\\ \frac{b}{r_1 - r_2}\big(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\big) p(t,x,y), & \text{\textit{если} } C_2 \neq 0; \end{cases}\\
m_{22}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_2 t} p(t,x,y).
\end{aligned}$$

Случай $b > 0, c > 0$. *Имеем*

$$\begin{aligned}
m_{11}^{(1)}(t,x,y) &= \frac{e^{C_1 t}}{2C_2}\Big(\big(r_1 - C_1 + C_2\big)e^{C_2 t} + \big(C_1 + C_2 - r_1\big)e^{-C_2 t}\Big) p(t,x,y);\\
m_{21}^{(1)}(t,x,y) &= \frac{c e^{C_1 t}}{2C_2}\Big(e^{C_2 t} - e^{-C_2 t}\Big) p(t,x,y);\\
m_{12}^{(1)}(t,x,y) &= \frac{b e^{C_1 t}}{2C_2}\Big(e^{C_2 t} - e^{-C_2 t}\Big) p(t,x,y);\\
m_{22}^{(1)}(t,x,y) &= \frac{e^{C_1 t}}{2C_2}\Big(C_1 + C_2 - r_1\big)e^{C_2 t} + \big(C_1 - C_2 - r_1\big)e^{-C_2 t}\Big) p(t,x,y).
\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно каждый из случаев.

Случай $b = c = 0$. Здесь уравнения (1.20), (1.21) и (1.22) примут вид

$$\widehat{m}_{11}^{(1)}(t,\theta,y) = e^{i(\theta,y)}e^{a(\theta)t};$$
$$\widehat{m}_{22}^{(1)}(t,\theta,y) = e^{i(\theta,y)}e^{d(\theta)t};$$
$$\widehat{m}_{ij}^{(1)}(t,\theta,y) = 0, \quad i \neq j.$$

Тогда, применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$m_{11}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_1 t}p(t,x,y);$$
$$m_{22}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_2 t}p(t,x,y);$$
$$m_{ij}^{(1)}(t,x,y) = 0, \quad i \neq j,$$

где $p(t,x,y)$, $i = 1,2$ — решение задачи Коши (1.25) с генератором $\mathcal{L}$ из (1.1).

Случай $b = 0$**,** $c > 0$. Аналогично с помощью обратного преобразования Фурье получаем, что

$$m_{11}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_1 t}p(t,x,y);$$
$$m_{22}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_2 t}p(t,x,y);$$
$$m_{12}^{(1)}(t,x,y) = 0.$$

Далее рассмотрим поведение обратного преобразования Фурье для функции $\widehat{m}_{21}(t,\theta,y)$ при t, стремящемся к бесконечности. Функция $\widehat{m}_{21}(t,\theta,y)$ имеет вид:

$$\widehat{m}_{21}^{(1)}(t,\theta,y) = \begin{cases} \frac{ce^{\imath(\theta,y)}e^{a(\theta)t}}{a(\theta)-d(\theta)}\Big(1 - e^{(d(\theta)-a(\theta))t}\Big), & \theta : a(\theta) \neq d(\theta), \\ cte^{\imath(\theta,y)}e^{a(\theta)t}, & \theta : a(\theta) = d(\theta). \end{cases}$$

Так как верно соотношение (1.24), то уравнение для $\widehat{m}_{21}^{(1)}(t,\theta,y)$ примет вид

$$\widehat{m}_{21}^{(1)}(t,\theta,y) = \begin{cases} \frac{ce^{\imath(\theta,y)}e^{\varkappa\widehat{a}(\theta)}}{r_1-r_2}\Big(e_{r_1 t} - e^{r_2 t}\Big), & \text{если } C_2 \neq 0, \\ cte^{\imath(\theta,y)}e^{\varkappa\widehat{a}(\theta)}e^{r_1 t}, & \text{если } C_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда с помощью обратного преобразовани Фурье, получаем

$$m_{21}^{(1)}(t,x,y) = \begin{cases} \frac{1}{r_1-r_2}\Big(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\Big)p(t,x,y), & \text{если } C_2 \neq 0, \\ cte^{r_1 t}p(t,x,y), & \text{если } C_2 = 0. \end{cases}$$

Случай $b > 0$**,** $c = 0$ аналогичен предыдущему случаю.

Случай $b>0$, $c>0$. Рассмотрим функцию $\widehat{m}_{11}^{(1)}(t,\theta,y)$. Остальные функции рассматриваются аналогично. Тогда

$$\widehat{m}_{11}^{(1)}(t,\theta,y)=\frac{e^{\imath(\theta,y)}}{\sqrt{D(\theta)}}\Big((a(\theta)-\lambda_2(\theta))e^{\lambda_1(\theta)t}+(\lambda_1(\theta)-d(\theta))e^{\lambda_2(\theta)t}\Big).$$

Так как $\sqrt{D(\theta)}=2C_2$, то для $\widehat{m}_{11}^{(1)}(t,\theta,y)$ получаем следующее представление:

$$\begin{aligned}\widehat{m}_{11}^{(1)}(t,\theta,y)&=\frac{e^{\imath(\theta,y)}}{\sqrt{D(\theta)}}\Big((a(\theta)-\lambda_2(\theta))e^{\lambda_1(\theta)t}+(\lambda_1(\theta)-d(\theta))e^{\lambda_2(\theta)t}\Big)\\&=\frac{e^{\imath(\theta,y)}}{2C_2}\Big((r_1-C_1+C_2)e^{(C_1+C_2)t+\varkappa\widehat{a}(\theta)t}+(C_1+C_2-r_2)e^{(C_1-C_2)t+\varkappa\widehat{a}(\theta)t}\Big).\end{aligned}$$

Как и для случая $b=0$, $c>0$, применив обратное преобразование Фурье, получаем

$$m_{11}^{(1)}(t,x,y)=\frac{1}{2C_2}\Big((r_1-C_1+C_2)e^{(C_1+C_2)t}+(C_1+C_2-r_2)e^{(C_1-C_2)t}\Big)p(t,x,y).$$

Для функций $m_{12}^{(1)}(t,x,y)$, $m_{21}^{(1)}(t,x,y)$ и $m_{22}^{(1)}(t,x,y)$ асимптотические представления получаются аналогично. ∎

Таким образом, в случае, когда блуждания для каждого из типов частиц совпадают, получаются точные решения уравнений первых моментов численностей частиц. Далее рассмотрим случай, когда блуждания отличаются для каждого из типов частиц.

Предположение о конечной и бесконечной дисперсии скачков случайных блужданий

Рассмотрим случай, когда случайные блуждания имеют разные генераторы, то есть $\mathcal{L}_1\neq\mathcal{L}_2$. Также будем предполагать, что интенсивности прыжков $a_i(x)$, $i=1,2$, $x\in\mathbb{Z}^d$, удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\sum_v a_1(v)|v|^2<\infty;\quad a_2(u)\sim\frac{H(u/|u|)}{|u|^{d+\alpha}},\quad \alpha\in(0,2), \tag{1.26}$$

где $H(\cdot)$ — положительная, непрерывная и симметричная функция на $\{u\in\mathbb{R}^d:|u|=1\}$. Тогда

$$\sum_u a_2(u)|u|^2=\infty.$$

При выполнении условий (1.26) будем говорить, что случайное блуждание для частиц первого типа имеет *конечную дисперсию скачков*, а для частиц второго типа — *бесконечную дисперсию скачков*.

Для задачи Коши (1.25) в случае, когда случайное блуждание имеет бесконечную дисперсию скачков, в [24] было доказано, что при $t\to\infty$ справедливо асимтотическое равенство

$$p(t,x,y)\sim\frac{\gamma_{d,\alpha}}{t^{d/\alpha}},$$

где $\gamma_{d,\alpha}$ - константа, зависящая от размерности решетки и параметра $\alpha \in (0,2)$.

Напомним введенные выше обозначения

$$r_1 = \sum_{k+l\geqslant 2}(k-1)\beta_1(k,l) - \mu_1; \qquad r_2 = \sum_{k+l\geqslant 2}(l-1)\beta_2(k,l) - \mu_2;$$
$$a(\theta) = \varkappa_1\widehat{a}_1(\theta) + \Big(\sum_{k+l\geqslant 2}(k-1)\beta_1(k,l) - \mu_1\Big); \qquad b = \sum_{k+l\geqslant 2} l\beta_1(k,l) \geqslant 0;$$
$$d(\theta) = \varkappa_2\widehat{a}_2(\theta) + \Big(\sum_{k+l\geqslant 2}(l-1)\beta_2(k,l) - \mu_2\Big); \qquad c = \sum_{k+l\geqslant 2} k\beta_2(k,l) \geqslant 0;$$
$$\lambda_{1,2}(\theta) = \frac{a(\theta)+d(\theta) \pm \sqrt{D(\theta)}}{2}, \qquad D(\theta) = (a(\theta)-d(\theta))^2 + 4bc.$$

Таким образом, получаем теорему.

Теорема 1.1.2. *Пусть для ВСБ с двумя типами частиц интенсивности прыжков удовлетворяют следующим свойствам:*

$$\sum_v a_1(v)|v|^2 < \infty; \quad a_2(u) \sim \frac{H(u/|u|)}{|u|^{d+\alpha}}, \quad \alpha \in (0,2),$$

где $H(\cdot)$ - положительная, непрерывная и симметричная функция на $\{u \in \mathbb{R}^d : |u| = 1\}$.

Тогда для $m_{ij}^{(1)}(t,x,y) = \mathsf{E}n_{ij}(t,x,y)$, $i,j = 1,2$ и $\forall x$, $y \in \mathbb{Z}^d$ верны следующие асимптотические представления при $t \to \infty$ и/или равенства.

Случай $b = 0$, $c = 0$. *Имеем*

$$m_{11}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_1 t}p_1(t,x,y); \quad m_{12}^{(1)}(t,x,y) = 0;$$
$$m_{22}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_2 t}p_2(t,x,y); \quad m_{21}^{(1)}(t,x,y) = 0.$$

Случай $b = 0$, $c \geqslant 0$. *Имеем*

$$m_{11}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_1 t}p_1(t,x,y);$$
$$m_{12}^{(1)}(t,x,y) = 0;$$
$$m_{22}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_2 t}p_2(t,x,y);$$
$$m_{21}^{(1)}(t,x,y) \sim \frac{c\tilde{c}}{(t2\pi)^{d/2}}e^{r_1 t}\begin{cases}\frac{e^{(d(0)-a(0))t}-1}{d(0)-a(0)}, & \text{если } a(0) \neq d(0),\\ t, & \text{если } a(0) = d(0),\end{cases}$$

где $\tilde{c}$ — неотрицательная константа.

Случай $b \geqslant 0$, $c = 0$. *Имеем*

$$\begin{aligned}
m_{11}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_1 t} p_1(t,x,y);\\
m_{12}^{(1)}(t,\theta,y) &\sim \frac{b\tilde{c}}{(t2\pi)^{d/2}} e^{r_1 t} \begin{cases} \frac{e^{(d(0)-a(0))t}-1}{d(0)-a(0)}, & \text{если } a(0) \neq d(0),\\ t, & \text{если } a(0) = d(0);\end{cases}\\
m_{22}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_2 t} p_2(t,x,y);\\
m_{21}^{(1)}(t,x,y) &= 0,
\end{aligned}$$

где $\tilde{c}$ *— неотрицательная константа.*

Случай $b > 0$, $c > 0$. *Имеем*

$$\begin{aligned}
m_{11}^{(1)}(t,x,y) &\sim \frac{\tilde{c} e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}(t2\pi)^{d/2}} \Big((a(0) - \lambda_2(0)) e^{(d(0)+\sqrt{D(0)})t/2}\\
&\quad + (\lambda_1(0) - a(0)) e^{(d(0)-\sqrt{D(0)})t/2} \Big);\\
m_{21}^{(1)}(t,x,y) &\sim \frac{c\tilde{c} e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}(t2\pi)^{d/2}} \Big(e^{(d(0)+\sqrt{D(0)})t/2} - e^{(d(0)-\sqrt{D(0)})t/2} \Big);\\
m_{12}^{(1)}(t,\theta,y) &\sim \frac{b\tilde{c} e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}(t2\pi)^{d/2}} \Big(e^{(d(0)+\sqrt{D(0)})t/2} - e^{(d(0)-\sqrt{D(0)})t/2} \Big);\\
m_{22}^{(1)}(t,\theta,y) &\sim \frac{\tilde{c} e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}(t2\pi)^{d/2}} \Big((\lambda_1(0) - a(0)) e^{(d(0)+\sqrt{D(0)})t/2}\\
&\quad + (a(0) - \lambda_2(0)) e^{(d(0)-\sqrt{D(0)})t/2} \Big),
\end{aligned}$$

где $\tilde{c}$ *— неотрицательная константа.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно каждый из случаев.

Случай $b = c = 0$. Здесь уравнения (1.20), (1.21) и (1.22) примут вид

$$\begin{aligned}
\widehat{m}_{11}^{(1)}(t,\theta,y) &= e^{i(\theta,y)} e^{a(\theta)t};\\
\widehat{m}_{22}^{(1)}(t,\theta,y) &= e^{i(\theta,y)} e^{d(\theta)t};\\
\widehat{m}_{ij}^{(1)}(t,\theta,y) &= 0, \quad i \neq j.
\end{aligned}$$

Тогда, применяя обратное преобразование Фурье (1.10), получим

$$\begin{aligned}
m_{11}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_1 t} p_1(t,x,y);\\
m_{22}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_2 t} p_2(t,x,y);\\
m_{ij}^{(1)}(t,x,y) &= 0, \quad i \neq j,
\end{aligned}$$

где $p_i(t,x,y)$, $i = 1,2$ — решение задачи Коши (1.25) с генератором $\mathcal{L}_i$ из (1.1).

Случай $b = 0$, $c > 0$. Аналогично с помощью обратного преобразования Фурье получаем, что

$$m_{11}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_1 t} p_1(t,x,y);$$
$$m_{22}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_2 t} p_2(t,x,y);$$
$$m_{12}^{(1)}(t,x,y) = 0.$$

Далее рассмотрим поведение обратного преобразования Фурье для функции $\widehat{m}_{21}(t,\theta,y)$ при t, стремящемся к бесконечности. Функция $\widehat{m}_{21}(t,\theta,y)$ имеет вид:

$$\widehat{m}_{21}^{(1)}(t,\theta,y) = \begin{cases} \frac{ce^{\imath(\theta,y)}e^{a(\theta)t}}{a(\theta)-d(\theta)}\Big(1 - e^{(d(\theta)-a(\theta))t}\Big), & \theta : a(\theta) \neq d(\theta), \\ cte^{\imath(\theta,y)}e^{a(\theta)t}, & \theta : a(\theta) = d(\theta), \end{cases}$$

Заметим, что в случае, когда $b = 0$, интенсивности $\beta_1(0,l)$ равны 0 для любого $l > 0$. Тогда

$$r_1 = \sum_{k+l\geqslant 2}(k-1)\beta_1(k,l) - \mu_1 = \sum_{k\geqslant 2}(k-1)\beta_1(k,0) - \mu_1.$$

Разложим функцию $\widehat{m}_{21}(t,\theta,y)$ в степенной ряд

$$\widehat{m}_{21}^{(1)}(t,\theta,y) = ce^{\imath(\theta,y)}e^{a(\theta)t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Big(d(\theta)-a(\theta)\Big)^{k-1}$$
$$= ce^{\imath(\theta,y)}e^{r_1 t}e^{\widehat{a}_1(\theta)t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Big(d(\theta)-a(\theta)\Big)^{k-1}.$$

В работе [12] (лемма 2.1.2) было показано, что функция $\widehat{a}_1(\theta)$ имеет единственный максимум в точке $\theta = 0$. Тогда, применяя обратное преобразование Фурье получаем

$$m_{21}^{(1)}(t,x,y) = \frac{ce^{r_1 t}}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{\imath(\theta,y-x)}e^{\widehat{a}_1(\theta)t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Big(d(\theta)-a(\theta)\Big)^{k-1}d\theta$$
$$= \frac{ce^{r_1 t}}{(2\pi)^d}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\int\limits_{[\pi,\pi]^d} e^{\imath(\theta,y-x)}e^{\widehat{a}_1(\theta)t}\Big(d(\theta)-a(\theta)\Big)^{k-1}d\theta.$$

Каждый интеграл выше является интегралом Лапласа (см., например, теорема 2.1.1, [12]). Тогда

$$m_{21}^{(1)}(t,x,y) \sim \frac{ce^{r_1 t}}{(2\pi)^d}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{d/2}\tilde{c}\Big(d(0)-a(0)\Big)^{k-1}$$
$$= \frac{c\tilde{c}}{(2\pi)^d}e^{r_1 t}\Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{d/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Big(d(0)-a(0)\Big)^{k-1}$$
$$= \frac{c\tilde{c}}{(2\pi t)^{d/2}}e^{r_1 t}\begin{cases} \frac{e^{(d(0)-a(0))t}-1}{(d(0)-a(0))}, & \theta : a(0) \neq d(0), \\ t, & \theta : a(0) = d(0), \end{cases}$$

где $\tilde{c}$ — константа.

Случай $b > 0$**,** $c = 0$ аналогичен предыдущему случаю.

Случай $b > 0$**,** $c > 0$**.** Рассмотрим функцию $\widehat{m}^{(1)}_{11}(t, \theta, y)$. Остальные функции рассматриваются аналогично. Тогда

$$\widehat{m}^{(1)}_{11}(t, \theta, y) = \frac{e^{\imath(\theta,y)}}{\sqrt{D(\theta)}}\Big((a(\theta) - \lambda_2(\theta))e^{\lambda_1(\theta)t} + (\lambda_1(\theta) - d(\theta))e^{\lambda_2(\theta)t}\Big).$$

Отсюда для $\widehat{m}^{(1)}_{11}(t, \theta, y)$ получаем следующее представление:

$$\widehat{m}^{(1)}_{11}(t, \theta, y) = \frac{e^{\imath(\theta,y)}}{\sqrt{D(\theta)}} e^{\frac{(a(\theta)+d(\theta))}{2} - \frac{t\sqrt{D(\theta)}}{2}} \left(a(\theta)\Big(e^{t\sqrt{D(\theta)}} - 1\Big)\right)$$
$$+ \lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)e^{t\sqrt{D(\theta)}}.$$

Как и для случая $b = 0$, $c > 0$, применив обратное преобразование Фурье, получаем

$$m^{(1)}_{11}(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{\imath(\theta,y-x)} e^{a(\theta)t/2}\bigg((a(\theta) - \lambda_2(\theta))e^{\left(d(\theta)+\sqrt{D(\theta)}\right)t/2}$$
$$+ (\lambda_1(\theta) - a(\theta))e^{\left(d(\theta)-\sqrt{D(\theta)}\right)t/2}\bigg)\frac{d\theta}{\sqrt{D(\theta)}}.$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора

$$m^{(1)}_{11}(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{\imath(\theta,y-x)} e^{a(\theta)t/2}\bigg[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Big[(d(\theta) + \sqrt{D(\theta)})t\Big]^k}{2^k k!}\Big(a(\theta) - \lambda_2(\theta)\Big)$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Big[(d(\theta) - \sqrt{D(\theta)})t\Big]^k}{2^k k!}\Big(\lambda_1(\theta) - a(\theta)\Big)\bigg]\frac{d\theta}{\sqrt{D(\theta)}}.$$

Таким образом,

$$m^{(1)}_{11}(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2^k k!} \int\limits_{[\pi,\pi]^d} e^{\imath(\theta,y-x)} e^{a(\theta)t/2}\bigg(\Big(a(\theta) - \lambda_2(\theta)\Big)\Big(d(\theta) + \sqrt{D(\theta)}\Big)^k$$
$$+ \Big(\lambda_1(\theta) - a(\theta)\Big)\Big(d(\theta) - \sqrt{D(\theta)}\Big)^k\bigg)\frac{d\theta}{\sqrt{D(\theta)}}.$$

Следовательно, при $t \to \infty$ получаем

$$
\begin{aligned}
m_{11}^{(1)}(t,x,y) \sim \frac{\tilde{c}e^{r_1 t/2}}{(2\pi t)^{d/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg(\Big(a(0) - \lambda_2(0) \Big) \Big(d(0) + \sqrt{D(0)} \Big)^k \\
+ \Big(\lambda_1(0) - a(0) \Big) \Big(d(0) - \sqrt{D(0)} \Big)^k \Bigg) \frac{1}{\sqrt{D(0)}} \\
= \frac{\tilde{c}e^{r_1 t/2}}{(2\pi t)^{d/2}\sqrt{D(0)}} \Bigg(\Big(a(0) - \lambda_2(0) \Big) e^{\left(d(0)+\sqrt{D(0)}\right)/2} \\
+ \Big(\lambda_1(0) - a(0) \Big) e^{\left(d(0)-\sqrt{D(0)}\right)/2} \Bigg),
\end{aligned}
$$

где $\tilde{c}$ — константа. Для функций $m_{12}^{(1)}(t,x,y)$, $m_{21}^{(1)}(t,x,y)$ и $m_{22}^{(1)}(t,x,y)$ асимптотические представления получаются аналогично. ■

1.1.4 Вторые моменты численностей частиц

Определим второй момент для субпопуляции $n_{ij}(t,x,y)$ как

$$
m_{ij}^{(2)}(t,x,y) = \mathsf{E} n_{ij}^2(t,x,y)
$$

и пусть выполнена оценка (1.3).

Продифференцируем поизводящую функцию $\Phi_i(t,x,y;z)$, $i = 1,2$ для получения второго момента

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j^2} &= \frac{\partial^2 \mathsf{E} z_1^{n_{i1}(t,x,y;z)} z_2^{n_{i2}(t,x,y)}}{\partial z_j^2} \\
&= \mathsf{E} n_{ij}(t,x,y)(n_{ij}(t,x,y)-1) z_1^{n_{i1}(t,x,y)-2\delta_j(1)} z_2^{n_{i2}(t,x,y)-2\delta_j(2)}
\end{aligned}
$$

Подставив $z = (z_1, z_2) = (1,1)$, получаем

$$
\frac{\partial^2 \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j^2}\Big|_{z=(1,1)} = \mathsf{E} n_{ij}(t,x,y)(n_{ij}(t,x,y)-1) = m_{ij}^{(2)}(t,x,y) - m_{ij}^{(1)}(t,x,y).
$$

Определим факториальный момент второго порядка $m_{ij}^{(2!)}(t,x,y)$ как

$$
m_{ij}^{(2!)}(t,x,y) = m_{ij}^{(2)}(t,x,y) - m_{ij}^{(1)}(t,x,y).
$$

Тогда дифференциальное уравнение для $m_{ij}^{(2!)}(t,x,y)$ можно получить из леммы 1.1.1, продифференцировав уравнение дважды по z_j. Левая часть уравнения имеет вид

$$
\frac{\partial^3 \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j^2 \partial t}\Big|_{z=(1,1)} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j^2}\Big|_{z=(1,1)} = \frac{\partial m_{ij}^{(2!)}(t,x,y)}{\partial t}. \tag{1.27}
$$

Правая часть уравнения принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\partial_{z_j z_j}\Big(\mathcal{L}_i\Phi_i(t,x,y;z)+\mu_i(1-\Phi_i(t,x,y;z))\\
&\quad+\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)(\Phi_1^k(t,x,y;z)\Phi_2^l(t,x,y;z)-\Phi_i(t,x,y;z))\Big)\Big|_{z=(1,1)}\\
&=\Big(\mathcal{L}_i\big(\partial_{z_jz_j}\Phi_i(t,x,y;z)\big)-\mu_i\big(\partial_{z_jz_j}\Phi_i(t,x,y;z)\big)+\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)\\
&\quad\times\Big(k(k-1)\big(\partial_{z_j}\Phi_1(t,x,y;z)\big)^2\Phi_1^{k-2}(t,x,y;z)\Phi_2^l(t,x,y;z)+k\big(\partial_{z_jz_j}\Phi_1(t,x,y;z)\big)\\
&\quad\times\Phi_1^{k-1}(t,x,y;z)\Phi_2^l(t,x,y;z)+2kl\big(\partial_{z_j}\Phi_1(t,x,y;z)\big)\big(\partial_{z_j}\Phi_2(t,x,y;z)\big)\Phi_1^{k-1}(t,x,y;z)\\
&\quad\times\Phi_2^{l-1}(t,x,y;z)+l(l-1)\big(\partial_{z_j}\Phi_2(t,x,y;z)\big)^2\Phi_1^k(t,x,y;z)\Phi_2^{l-2}(t,x,y;z)\\
&\quad+l\big(\partial_{z_jz_j}\Phi_2(t,x,y;z)\big)\Phi_1^k(t,x,y;z)\Phi_2^{l-1}(t,x,y;z)-(\partial_{z_jz_j}\Phi_i(t,x,y;z))\Big)\Big)\Big|_{z=(1,1)}\\
&=\mathcal{L}_i m_{ij}^{(2!)}(t,x,y)-\mu_i m_{ij}^{(2!)}(t,x,y)+\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)\Big(k(k-1)\big(m_{1j}^{(1)}(t,x,y)\big)^2\\
&\quad+km_{1j}^{(2!)}(t,x,y)+2klm_{1j}^{(1)}(t,x,y)m_{2j}^{(1)}(t,x,y)+l(l-1)\big(m_{2j}^{(1)}(t,x,y)\big)^2\\
&\quad+lm_{2j}^{(2!)}(t,x,y)-m_{ij}^{(2!)}(t,x,y)\Big).
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Из равенств (1.27) и (1.28) получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial m_{ij}^{(2!)}(t,x,y)}{\partial t}&=\mathcal{L}_i m_{ij}^{(2!)}(t,x,y)-\mu_i m_{ij}^{(2!)}(t,x,y)+\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)\Big(km_{ij}^{(2)}(t,x,y)\\
&\quad+k(k-1)[m_{1j}^{(1)}(t,x,y)]^2+lm_{2j}^{(2)}(t,x,y)+l(l-1)[m_{2j}^{(1)}(t,x,y)]^2\\
&\quad+2klm_{1j}^{(1)}(t,x,y)m_{2j}^{(1)}(t,x,y)-km_{1j}^{(1)}(t,x,y)-lm_{2j}^{(1)}(t,x,y)\Big)\\
&\quad-\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)m_{ij}^{(2!)}(t,x,y);
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

$$
m_{ij}^{(2!)}(0,x,y)\equiv 0.
$$

Для получения дифференциального уравнения для второго момента численностей частиц к обеим частям уравнения (1.29) добавим слагаемое $\partial_t m_{ij}^{(1)}(t,x,y)$. В правой части равенства заменим $\partial_t m_{ij}^{(1)}(t,x,y)$ на выражением, полученное в лемме 1.1.2. Тогда

$$\begin{aligned}
&\big(\mathcal{L}_i m_{ij}^{(2!)}(t,\cdot,y)\big)(t,x,y) - \mu_i m_{ij}^{(2!)}(t,x,y) \\
&\quad + \sum_{k+l\geqslant 2} \beta_i(k,l)\Big(k(k-1)\big(m_{1j}^{(1)}(t,x,y)\big)^2 + k m_{1j}^{(2!)}(t,x,y) + 2kl m_{1j}^{(1)}(t,x,y) m_{2j}^{(1)}(t,x,y) \\
&\quad + l(l-1)\big(m_{2j}^{(1)}(t,x,y)\big)^2 + l m_{2j}^{(2!)}(t,x,y) - m_{ij}^{(2!)}(t,x,y)\Big) + \big(\mathcal{L}_i m_{ij}^{(1)}(t,\cdot,y)\big)(t,x,y) \\
&\quad - \mu_i m_{ij}^{(1)}(t,x,y) + \sum_{k+l\geqslant 2} \beta_i(k,l)(k m_{1j}^{(1)}(t,x,y) + l m_{2j}^{(1)}(t,x,y) - m_{ij}^{(1)}(t,x,y)) \\
&= \mathcal{L}_i m_{ij}^{(2)}(t,x,y) - \mu_i m_{ij}^{(2)}(t,x,y) + \sum_{k+l\geqslant 2} \beta_i(k,l)\Big(k m_{1j}^{(2)}(t,x,y) + l m_{2j}^{(2)}(t,x,y) \\
&\quad + k m_{1j}^{(2!)}(t,x,y) + 2kl m_{1j}^{(1)}(t,x,y) m_{2j}^{(1)}(t,x,y) + l(l-1)\big(m_{2j}^{(1)}(t,x,y)\big)^2 - m_{ij}^{(2)}(t,x,y)\Big).
\end{aligned}$$

Таким образом, была доказана лемма.

Лемма 1.1.3. *Пусть для $i = 1,2$ выполнены условия*

$$\beta_(k,l) \leqslant \frac{c_0^{k+l}}{k!l!}, \quad k+l \geqslant 2.$$

Тогда дифференциальные уравнения для $m_{ij}^{(2)}(t,x,y)$, $i,j = 1,2$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_{ij}^{(2)}(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_i m_{ij}^{(2)}(t,x,y) - \mu_i m_{ij}^{(2)}(t,x,y) + \sum_{k+l\geqslant 2} \beta_i(k,l)\Big(k m_{1j}^{(2)}(t,x,y) \\
&\quad + k(k-1)[m_{1j}^{(1)}(t,x,y)]^2 + l m_{2j}^{(2)}(t,x,y) + l(l-1)[m_{2j}^{(1)}(t,x,y)]^2 \\
&\quad + 2kl m_{1j}^{(1)}(t,x,y) m_{2j}^{(1)}(t,x,y)\Big) - \sum_{k+l\geqslant 2} \beta_i(k,l) m_{ij}^{(2)}(t,x,y),
\end{aligned} \tag{1.30}$$

с начальным условием

$$m_{ij}^{(2)}(0,x,y) = \delta_i(j)\delta_x(y). \tag{1.31}$$

Отсюда получаем уравнение для второго момента субпопуляции частиц $m_i^{(2)}(t,x,y)$ равного

$$m_i^{(2)}(t,x,y) = \mathsf{E} n_i^2(t,x,y), \quad i = 1,2.$$

Для начала введем следующие обозначения: пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ и $v_i = (v_i^1, \ldots, v_i^n)^T$, $i = 1,2$, тогда положим $v_1 \cdot v_2$ равным

$$v_1 \cdot v_2 = (v_1^1 \times v_2^1, \ldots, v_1^n \times v_2^n)$$

Выпишем уравнение для $m_i^{(2)}(t,x,y)$, $i=1,2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_1^{(2)}(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_1 m_1^{(2)}(t,x,y) + V_1\big[m_1^{(2)}(t,x,y), m_2^{(2)}(t,x,y)\big]^T \\ &+ \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_1(k,l)\Big[\big(km_1^{(1)}(t,x,y)+lm_2^{(1)}(t,x,y)\big) \\ &\cdot\big(km_1^{(1)}(t,x,y)+lm_2^{(1)}(t,x,y)\big)-\big(km_1^{(1)}(t,x,y) \\ &\cdot m_1^{(1)}(t,x,y)+lm_2^{(1)}(t,x,y)\cdot m_2^{(1)}(t,x,y)\big)\Big],\end{aligned} \tag{1.32}$$

где V_1 — матрица следующего вида:

$$V_1=\begin{pmatrix}-\mu_1+\sum\limits_{k+l\geqslant 2}(k-1)\beta_1(k,l) & 0\\ 0 & \sum\limits_{k+l\geqslant 2} l\beta_1(k,l)\end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_2^{(2)}(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_2 m_2^{(2)}(t,x,y) + V_2\big[m_1^{(2)}(t,x,y), m_2^{(2)}(t,x,y)\big]^T \\ &+ \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_2(k,l)\Big[\big(km_1^{(1)}(t,x,y)+lm_2^{(1)}(t,x,y)\big) \\ &\cdot\big(km_1^{(1)}(t,x,y)+lm_2^{(1)}(t,x,y)\big)-\big(km_1^{(1)}(t,x,y) \\ &\cdot m_1^{(1)}(t,x,y)+lm_2^{(1)}(t,x,y)\cdot m_2^{(1)}(t,x,y)\big)\Big],\end{aligned} \tag{1.33}$$

где V_2 — матрица:

$$V_2=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k+l\geqslant 2} k\beta_2(k,l) & 0\\ 0 & -\mu_2+\sum\limits_{k+l\geqslant 2}(l-1)\beta_2(k,l)\end{pmatrix}.$$

Перейдем к получению решения для дифференциальных уравнений вторых моментов. Применим преобразование Фурье к дифференциальным уравнениям пары функций (1.7), (1.8)

$$\big(m_{1j}^{(2)}(t,x,y), m_{2j}^{(2)}(t,x,y)\big),\quad j=1,2.$$

Будем использовать обозначения из предыдущего раздела для параметров $a(\theta)$, b, c, $d(\theta)$:

$$a(\theta)=\varkappa_1\widehat{a}_1(\theta)+\Big(\sum_{k+l\geqslant 2}(k-1)\beta_1(k,l)-\mu_1\Big);\qquad b=\sum_{k+l\geqslant 2} l\beta_1(k,l)\geqslant 0;$$
$$d(\theta)=\varkappa_2\widehat{a}_2(\theta)+\Big(\sum_{k+l\geqslant 2}(l-1)\beta_2(k,l)-\mu_2\Big);\qquad c=\sum_{k+l\geqslant 2} k\beta_2(k,l)\geqslant 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial \widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y)}{\partial t} = a(\theta)\widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y) + b\widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y) + f_1^{(j)}(t,\theta,y); \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial \widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y)}{\partial t} = c\widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y) + d(\theta)\widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y) + f_2^{(j)}(t,\theta,y), \tag{1.35}$$

где функции $f_i^{(j)}(t,\theta,y)$ при $i,j=1,2$ имеют вид

$$f_i^{(j)}(t,\theta,y) = \sum_{k+l\geqslant 2} \beta_i(k,l)\Big[k(k-1)\Big(\widehat{m}_{1j}^{(1)} * \widehat{m}_{1j}^{(1)}\Big)(t,\theta,y)$$
$$+ 2kl\Big(\widehat{m}_{1j}^{(1)} * \widehat{m}_{2j}^{(1)}\Big)(t,\theta,y) + l(l-1)\Big(\widehat{m}_{2j}^{(1)} * \widehat{m}_{2j}^{(1)}\Big)(t,\theta,y)\Big]. \tag{1.36}$$

Здесь $(f*g)(x)$ — свертка двух функций $f(x)$ и $g(x)$, которая определяется по формуле

$$\big(f*g\big)(t,\theta,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} f(t,\theta-v,y)g(t,v,y)dv.$$

Найдем решения дифференциальных уравнений преобразований Фурье вторых моментов численностей частиц (1.32), (1.33) в зависимости от разных значений b, c, как было рассмотрено для первого момента

$$b=0,\ c=0 \quad \text{или} \quad b=0,\ c>0 \quad \text{или} \quad b>0,\ c=0 \quad \text{или} \quad b>0,\ c>0.$$

Случай $b=0$, $c=0$. Уравнения (1.34)–(1.35) примут вид

$$\frac{\partial \widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y)}{\partial t} = a(\theta)\widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y); \quad \frac{\partial \widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y)}{\partial t} = d(\theta)\widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y).$$

Тогда решением уравнения будут функции

$$\widehat{m}_{11}^{(2)}(t,\theta,y) = e^{i(\theta,y)}e^{a(\theta)t};$$
$$\widehat{m}_{21}^{(2)}(t,\theta,y) = 0;$$
$$\widehat{m}_{12}^{(2)}(t,\theta,y) = 0;$$
$$\widehat{m}_{22}^{(2)}(t,\theta,y) = e^{i(\theta,y)}e^{d(\theta)t}.$$

Случай $b=0$, $c>0$. Уравнения (1.34)–(1.35) примут вид

$$\frac{\partial \widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y)}{\partial t} = a(\theta)\widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y);$$
$$\frac{\partial \widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y)}{\partial t} = c\widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y) + d(\theta)\widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y) + f_2^{(j)}(t,\theta,y).$$

Заметим, что для всех θ

$$f_1^{(j)}(t,\theta,y) \equiv 0,\ j=1,2,$$

так как $b=0$ равносильно соотношению

$$\beta_1(k,l) \equiv 0 \text{ для всех } k+l \geqslant 2.$$

Тогда решение уравнения для функции $\widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y)$ имеет вид

$$\widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y) = \widehat{m}_{1j}^{(2)}(0,\theta,y)e^{a(\theta)t} = \delta_1(j)e^{i(\theta,y)}e^{a(\theta)t},$$

где второе неравенство следует из уравнения (1.31) для начального условия. Отсюда получаем

$$\widehat{m}_{11}^{(2)}(t,\theta,y) = e^{i(\theta,y)}e^{a(\theta)t}, \quad \widehat{m}_{12}^{(2)}(t,\theta,y) = 0.$$

Решение второго уравнения можно получить с помощью метода вариации постоянного

$$\widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y) = e^{d(\theta)t}\left(\widehat{m}_{2j}^{(2)}(0,\theta,y) + \int_0^t \left(c\widehat{m}_{1j}^{(2)}(s,\theta,y) + f_2^{(j)}(s,\theta,y)\right)e^{-d(\theta)s}ds\right).$$

Подставив начальное условие из уравнения (1.31), получаем

$$\widehat{m}_{21}^{(2)}(t,\theta,y) = e^{d(\theta)t}\left(\int_0^t e^{-d(\theta)s}\left(ce^{i(\theta,y)}e^{a(\theta)s} + f_2^{(1)}(s,\theta,y)\right)ds\right);$$

$$\widehat{m}_{22}^{(2)}(t,\theta,y) = e^{d(\theta)t}\left(\int_0^t e^{-d(\theta)s}f_2^{(2)}(s,\theta,y)ds + e^{i(\theta,y)}\right).$$

Случай $b>0$, $c=0$. Аналогично предыдущему случаю, находятся решения дифференциальных уравнений $\widehat{m}_{ij}(t,\theta,y)$. Так как $c=0$, то

$$f_2^{(j)}(t,\theta,y) \equiv 0, \text{ для } j=1,2.$$

Тогда уравнения (1.34) примут вид

$$\frac{\partial \widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y)}{\partial t} = a(\theta)\widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y) + b\widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y) + f_1^{(j)}(t,\theta,y);$$

$$\frac{\partial \widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y)}{\partial t} = d(\theta)\widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y).$$

Решение дифференциального уравнения для $\widehat{m}_{2j}(t,\theta,y)$, с учетом начального условия (1.31), примет вид

$$\widehat{m}_{2j}^{(2)}(t,\theta,y) = \widehat{m}_{2j}^{(2)}(0,\theta,y)e^{d(\theta)t} = \delta_2(j)e^{i(\theta,y)}e^{d(\theta)t}.$$

Отсюда получаем

$$\widehat{m}_{22}^{(2)}(t,\theta,y) = e^{i(\theta,y)}e^{(\theta)t}, \quad \widehat{m}_{21}^{(2)}(t,\theta,y) = 0.$$

Тогда решение уравнения для $\widehat{m}_{1j}(t,\theta,y)$ можно найти с помощью метода вариации постоянного

$$\widehat{m}_{1j}^{(2)}(t,\theta,y) = e^{a(\theta)t}\Bigg(\widehat{m}_{1j}^{(2)}(0,\theta,y) + \int_0^t \Big(b\widehat{m}_{2j}^{(2)}(s,\theta,y) + f_1^{(j)}(s,\theta,y)\Big)e^{-a(\theta)s}ds\Bigg).$$

Подставив начальное условие из уравнения (1.31), получаем

$$\widehat{m}_{11}^{(2)}(t,\theta,y) = e^{a(\theta)t}\Bigg(\int_0^t e^{-a(\theta)s}\Big(f_1^{(j)}(t,\theta,y)\Big)ds + e^{i(\theta,y)}\Bigg);$$
$$\widehat{m}_{12}^{(2)}(t,\theta,y) = e^{a(\theta)t}\Bigg(\int_0^t e^{-a(\theta)s}\Big(be^{i(\theta,y)}e^{d(\theta)s} + f_1^{(j)}(t,\theta,y)\Big)ds\Bigg).$$

Случай $b>0$, $c>0$. Для исследования дифференциальных уравнения второго момента численностей частиц нам понадобится следующее замечание о линейной системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), \tag{1.37}$$

где A — матрица (в нашем случае A это матрица 2×2) с постоянными (не зависящими от времени) коэффициентами и $f(t)$ — вектор-функция.

Решение уравнения (1.37) может быть получено с помощью *метода вариации постоянного*, см., например, [10]:

$$x(t) = U(t)x(0) + \int_0^t U(t-s)f(s)\,ds,$$

где матрица $U(t)$ — это так называемое «фундаментальное решение» уравнения (1.37). Тогда известно (см., например, [10]), что $U(t)$ можно представить в виде $U(t) = \exp\{At\}$. Но для нашей задачи удобнее другое представление $U(t)$:

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{pmatrix},$$

где вектор-функции

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} u_{11}(t) \\ u_{21}(t) \end{pmatrix}, \quad u_2(t) = \begin{pmatrix} u_{12}(t) \\ u_{22}(t) \end{pmatrix}$$

являются решением однородной системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t),$$

удовлетворяющей начальному условию

$$u_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Компоненты $u_{ij}(t)$ решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ могут быть посчитаны с помощью методов, описанных в замечании 1.1.3 (для случая $b > 0, c > 0$). Проделав все вычисления, получаем

$$\begin{aligned}
u_{11}(t) &= \frac{1}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\Big((a(\theta) - \lambda_2(\theta))e^{\lambda_1(\theta)t} + (\lambda_1(\theta) - a(\theta))e^{\lambda_2(\theta)t}\Big)\\
u_{21}(t) &= \frac{c}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\Big(e^{\lambda_1(\theta)t} - e^{\lambda_2(\theta)t}\Big)\\
u_{12}(t) &= \frac{b}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\Big(e^{\lambda_1(\theta)t} - e^{\lambda_2(\theta)t}\Big)\\
u_{22}(t) &= \frac{1}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\Big((\lambda_1(\theta) - a(\theta))e^{\lambda_1(\theta)t} + (\lambda_2(\theta) - a(\theta))e^{\lambda_2(\theta)t}\Big),
\end{aligned}$$

где $\lambda_{1,2}(\theta)$ определены в уравнении (1.19).

Таким образом, получаются следующие решения уравнения (1.34), (1.35):

$$\begin{aligned}
\widehat{m}_{11}^{(2)}(t,\theta,y) = {}& \frac{1}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\int_0^t \Big((a(\theta) - \lambda_2(\theta))f_1^{(1)}(s,\theta,y) + bf_2^{(1)}(s,\theta,y)\Big)e^{\lambda_1(\theta)(t-s)}ds\\
&+ \frac{1}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\int_0^t \Big((\lambda_1(\theta) - a(\theta))f_1^{(1)}(s,\theta,y) - bf_2^{(1)}(s,\theta,y)\Big)e^{\lambda_2(\theta)(t-s)}ds\\
&+ \frac{1}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\Big((a(\theta) - \lambda_2(\theta))e^{\lambda_1(\theta)t} + (\lambda_1(\theta) - a(\theta))e^{\lambda_2(\theta)t}\Big)e^{i(\theta,y)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{m}_{21}^{(2)}(t,\theta,y) = {}& \frac{1}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\int_0^t \Big(cf_1^{(1)}(s,\theta,y) + (\lambda_1(\theta) - a(\theta))f_2^{(1)}(s,\theta,y)\Big)e^{\lambda_1(\theta)(t-s)}ds\\
&+ \frac{1}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\int_0^t \Big(-cf_1^{(1)}(s,\theta,y) + (\lambda_2(\theta) - a(\theta))f_2^{(1)}(s,\theta,y)\Big)e^{\lambda_2(\theta)(t-s)}ds\\
&+ \frac{c}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\Big(e^{\lambda_1(\theta)t} - e^{\lambda_2(\theta)t}\Big)e^{i(\theta,y)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{m}_{12}^{(2)}(t,\theta,y) = {}& \frac{1}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\int_0^t \Big((a(\theta) - \lambda_2(\theta))f_1^{(2)}(s,\theta,y) + bf_2^{(2)}(s,\theta,y)\Big)e^{\lambda_1(\theta)(t-s)}ds\\
&+ \frac{1}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\int_0^t \Big((\lambda_1(\theta) - a(\theta))f_1^{(2)}(s,\theta,y) - bf_2^{(1)}(s,\theta,y)\Big)e^{\lambda_2(\theta)(t-s)}ds\\
&+ \frac{b}{\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)}\Big(e^{\lambda_1(\theta)t} - e^{\lambda_2(\theta)t}\Big)e^{i(\theta,y)},
\end{aligned}$$

$$\widehat{m}_{22}^{(2)}(t,\theta,y) = \frac{1}{\lambda_1(\theta)-\lambda_2(\theta)}\int_0^t \Big(cf_1^{(2)}(s,\theta,y) + (\lambda_2(\theta)-a(\theta))f_2^{(2)}(s,\theta,y)\Big)e^{\lambda_1(\theta)(t-s)}ds$$
$$+ \frac{1}{\lambda_1(\theta)-\lambda_2(\theta)}\int_0^t \Big(-cf_1^{(1)}(s,\theta,y) + (\lambda_2(\theta)-a(\theta))f_2^{(1)}(s,\theta,y)\Big)e^{\lambda_2(\theta)(t-s)}ds$$
$$+ \frac{1}{\lambda_1(\theta)-\lambda_2(\theta)}\Big((\lambda_1(\theta)-a(\theta))e^{\lambda_1(\theta)t} + (\lambda_2(\theta)-a(\theta))e^{\lambda_2(\theta)t}\Big)e^{i(\theta,y)},$$

где функции $f_i^{(j)}(s,\theta,y)$ были определены в (1.36).

1.1.5 Факториальные моменты численностей частиц старших порядков

С помощью дифференцирования производящих функций $\Phi_i(t,x,y;z)$, $i=1,2$ можно получить уравнения для всех факториальных моментов, определяемых равенством

$$m_{ij}^{r!}(t,x,y) = \mathsf{E}n_{ij}(t,x,y)(n_{ij}(t,x,y)-1)\dots(n_{ij}(t,x,y)-r+1), \quad r \geqslant 2.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^r \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j^r} = \frac{\partial^r \mathsf{E} z_1^{n_{i1}(t,x,y)} z_2^{n_{i2}(t,x,y)}}{\partial z_j^r}$$
$$= \mathsf{E}\Big[n_{ij}(t,x,y)\big(n_ij(t,x,y)-1\big)\dots\big(n_{ij}(t,x,y)-r+1\big)$$
$$\times z_1^{n_{i1}(t,x,y)-r\delta_j^1} z_2^{n_{i2}(t,x,y)-r\delta_j^2}\Big]$$

Тогда, подставив, $z=(z_1,z_2)=(1,1)$, получаем

$$\frac{\partial^r \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j^r}\Big|_{z=(1,1)} = m_{ij}^{r!}(t,x,y).$$

Выпишем эти уравнения в общем случае для всех пар (i,j), $i,j=1,2$, продифференцировав уравнение производящей функции:

$$\frac{\partial^{r+1}\Phi_i(t,x,y;z)}{\partial t\partial z_j^r} = \mathcal{L}_i\frac{\partial^r \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j^r} + \Big(\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)-\mu_i\Big)\frac{\partial^r \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j^r}$$
$$+ \Big[\sum_{k+m\geqslant 2}\beta_i(k,m)\Phi_1^k(t,x,y;z)\Phi_2^m(t,x,y;z)\Big]^{(r)}.$$

Левая часть уравнения равна

$$\frac{\partial^{r+1}\Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j^r\partial t}\Big|_{z=(1,1)} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^r \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial z_j^r}\Big|_{z=(1,1)} = \frac{\partial m_{ij}^{(r)}(t,x,y)}{\partial t}.$$

Правая часть равенства примет вид

$$\partial_{z_j^r}\Big(\mathcal{L}_i\Phi_i(t,x,y;z)+\mu_i(1-\Phi_i(t,x,y;z))+\sum_{k+l\ge 2}\beta_i(k,l)\big(\Phi_1^k(t,x,y;z)$$
$$\times\,\Phi_2^l(t,x,y;z)-\Phi_i(t,x,y;z)\big)\Big)\Big|_{z=(1,1)}=\Big(\mathcal{L}_i\big(\partial_{z_j^r}\Phi_i(t,x,y;z)\big)$$
$$-\,\mu_i\big(\partial_{z_j^r}\Phi_i(t,x,y;z)\big)-\sum_{k+l\ge 2}\beta_i(k,l)\big(\partial_{z_j^r}\Phi_i(t,x,y;z)\big)+\sum_{k+l\ge 2}\beta_i(k,l)$$
$$\times\,\big(\partial_{z_j^r}(\Phi_1^k(t,x,y;z)\Phi_2^l(t,x,y;z))\big)\Big)\Big|_{z=(1,1)}.$$

Для дифференцирования последнего слагаемого уравнения воспользуемся формулой Лейбница

$$\partial_{t^n}\big(f(t)g(t)\big)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\partial_{t^k}\big(f(t)\big)\partial_{t^{n-k}}\big(g(t)\big).$$

Тогда получаем

$$\Big(\mathcal{L}_i\big(\partial_{z_j^r}\Phi_i(t,x,y;z)\big)-\mu_i\big(\partial_{z_j^r}\Phi_i(t,x,y;z)\big)-\sum_{k+l\ge 2}\beta_i(k,l)\big(\partial_{z_j^r}\Phi_i(t,x,y;z)\big)$$
$$+\sum_{k+l\ge 2}\beta_i(k,l)\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\big(\partial_{z_j^s}\Phi_1^k(t,x,y;z)\big)\big(\partial_{z_j^{r-s}}\Phi_2^l(t,x,y;z)\big)\Big)\Big|_{z=(1,1)}.$$

Для дифференцирования каждого из слагаемых применим формулу Фаа-ди-Бруно (см. [9])

$$\big(f(g(t))\big)^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\big(f(g(t))\big)^{(k)}B_{n,k}\Big(g'(t),\dots,g^{(n-k+1)}(t)\Big),$$

где $B_{n,k}(x_1,\dots,x_{n-k+1})$ — полином Белла, который определяется формулой

$$B_{n,k}(x_1,\dots,x_{n-k+1})=\sum\frac{n!}{j_1!\dots j_{n-k+1}!}\Big(\frac{x_1}{1!}\Big)^{j}_{1}\dots\Big(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\Big)^{j_{n-k+1}}.$$

Сумма берется по всем наборам

$$\{j_1,\dots,j_{n-k+1}\}:j_1+\dots j_{n-k+1}=k\text{ и }j_1+2j_2+\dots(n-k+1)j_{n-k+1}=n.$$

Правая часть равенства примет вид

$$\Big(\mathcal{L}_i\big(\partial_{z_j^r}\Phi_i(t,x,y;z)\big) - \Big(\sum_{k+l\geq 2}\beta_i(k,l)+\mu_i\Big)\big(\partial_{z_j^r}\Phi_i(t,x,y;z)\big)$$

$$+\sum_{k+l\geq 2}\beta_i(k,l)\Big[\big(\partial_{z_j^r}\Phi_1^k(t,x,y;z)\big)\Phi_2^l(t,x,y;z)+\Phi_1^k(t,x,y;z)\big(\partial_{z_j^r}\Phi_2^l(t,x,y;z)\big)\Big]$$

$$+\sum_{k+l\geq 2}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{r}{s}\beta_i(k,l)\times\Big[\sum_{q=1}^{\min(r-s,k)}k(k-1)\dots(k-q+1)\Phi_1^{k-q}(t,x,y;z)$$

$$\times B_{r-s,q}\big(\Phi_1'(t,x,y;z),\dots,\Phi_1^{(r-s-q+1)(t,x,y;z)}\big)\Big]\times\Big[\sum_{p=1}^{\min(l,s)}l(l-1)\dots(l-p+1)$$

$$\times B_{s,p}\big(\Phi_2'(t,x,y;z),\dots,\Phi_2^{(s-l+1)}(t,x,y;z)\big)\Big]\Big)\Big|_{z=(1,1)}.$$

Введем для удобства следующее обозначение:

$$\bar{x}=\begin{cases}1, & x=2,\\ 2, & x=1.\end{cases}$$

Подставим в правую часть введенное обозначение и получим уравнения для факториальных моментов:

$$\frac{\partial m_{ij}^{(r)}(t,x,y)}{\partial t}=\mathcal{L}_i m_{ij}^{(r)}(t,x,y)+\Big(\sum_{k+l\geq 2}(k-1)\beta_i(k,l)-\mu_i\Big)m_{ij}^{(r)}(t,x,y)$$

$$+\sum_{k+l\geq 2}l m_{\bar{i}j}^{(r)}(t,x,y)+\sum_{k+l\geq 2}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{r}{s}\beta_i(k,l)$$

$$\times\Big[\sum_{q=1}^{\min(r-s,k)}k(k-1)\dots(k-q+1)$$

$$\times B_{r-s,q}(m_{ij}^{(1)}(t,x,y),\dots,m_{ij}^{(r-s-q+1)}(t,x,y))\Big]$$

$$\times\Big[\sum_{p=1}^{\min(l,s)}l(l-1)\dots(l-p+1)$$

$$\times B_{s,p}(m_{\bar{i}j}^{(1)}(t,x,y),\dots,m_{\bar{i}j}^{(s-l+1)}(t,x,y))\Big]$$

с начальным условием

$$\begin{aligned}m_{ij}^{(r)}(0,x,y)&=\mathsf{E}\Big[n_{ij}(0,x,y)\big(n_ij(0,x,y)-1\big)\dots\big(n_{ij}(0,x,y)-r+1\big)\Big]\\&=\mathsf{E}\Big[\delta_i^j\delta_x(y)\big(\delta_i^j\delta_x(y)-1\big)\dots\big(\delta_i^j\delta_x(y)-r+1\big)\Big]\\&=\delta_1^r\delta_i^j\delta_x(y).\end{aligned}$$

1.2 Ветвящиеся случайные блуждания с одним источником ветвления

Везде выше предполагалось, что источники ветвления расположены в каждом узле целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$. В этом разделе будем предполагать, что на решетке есть только один источник ветвления, в котором частицы могут гибнуть и размножаться. Без ограничения общности можно считать, что источник находится в точке $0 \in \mathbb{Z}^d$. Тогда, аналогично уравнению для производящей функции для случая бесконечного числа источников, можно получить дифференциальное уравнение для производящей функции в случае, когда на решетке есть один источник ветвления:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_i(t,x,y;z)}{\partial t} &= \mathcal{L}_i\Phi_i(t,x,y;z) + \delta_0(x)\Big(\mu_i(1-\Phi_i(t,x,y;z))\\ &\quad + F_i(\Phi_1(t,x,y;z),\Phi_2(t,x,y;z)) - \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)\Phi_i(t,x,y;z)\Big);\\ \Phi_i(0,x,y;z) &= \begin{cases}1, & x\neq y;\\ z_i, & x=y.\end{cases}\end{aligned}$$

Тогда при $\beta_i(k,l) \leqslant c_0^{k+l}/k!l!$ для всех $k+l\geqslant 2$ уравнения для первого момента имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_{ij}(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_i m_{ij}(t,x,y) + \delta_0(x)\Big(-\mu_i m_{ij}(t,x,y) - \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)m_{ij}(t,x,y)\\ &\quad + \sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)(km_{1j}(t,x,y)+lm_{2j}(t,x,y))\Big);\\ m_{ij}(0,x,y) &= \delta_i(j)\delta_x(y).\end{aligned} \tag{1.38}$$

Для получения решений уравнений для первого момента $m_{ij}^{(1)}(t,x,y) = \mathsf{E}n_{ij}(t,x,y)$, $i,j=1,2$ воспользуемся методом преобразования Лапласа, которое имеет вид

$$Lf(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt, \quad \lambda\geqslant 0.$$

Определим функцию Грина для переходных вероятностей $p_i(t,x,y)$, $i=1,2$, как преобразование Лапласа

$$G_{\lambda,i}(x,y) := Lp_i(\lambda,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}p_i(t,x,y)dt,$$

где $p_i(t,x,y)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial p_i(t,x,y)}{\partial t} = \mathcal{L}_i p_i(t,x,y), \quad p_i(0,x,y)=\delta_x(y).$$

В [12] было получено представление функции Грина с помощью обратного преобразования Фурье

$$G_\lambda(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{\imath(\theta,y-x)}}{\lambda - \varkappa\widehat{a}(\theta)} d\theta. \tag{1.39}$$

Далее будем предполагать, что

$$\mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \beta_1(1,1) = \beta_2(1,1) = \beta.$$

Перепишем дифференциальное уравнение (1.38) для первого момента субпопуляции частиц $m_{ij}^{(1)}(t,x,y) = \mathsf{E}n_{ij}(t,x,y)$, $i,j = 1,2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{ij}(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_i m_{ij}(t,x,y) - \delta_0(x)\beta m_{ij}(t,x,y) \\ &+ \beta(m_{1j}(t,x,y) + m_{2j}(t,x,y)); \\ m_{ij}(0,x,y) &= \delta_i(j)\delta_x(y). \end{aligned}$$

Тогда, применив преобразования Лапласа к уравнениям (1.38), получаем две системы дифференциальных уравнений для пар

$$\big(m_{11}(t,x,y), m_{21}(t,x,y)\big); \quad \big(m_{12}(t,x,y), m_{22}(t,x,y)\big).$$

Уравнения примут вид

$$\begin{cases} -\delta_y(x) + \lambda Lm_{11}(t,x,y) &= \mathcal{L}_1(Lm_{11})(t,x,y) + \delta_0(x)Lm_{21}(t,x,y); \\ \lambda Lm_{21}(t,x,y) &= \mathcal{L}_2(Lm_{21})(t,x,y) + \delta_0(x)Lm_{11}(t,x,y); \end{cases} \tag{1.40}$$

$$\begin{cases} \lambda Lm_{12}(t,x,y) &= \mathcal{L}_1(Lm_{12})(t,x,y) + \delta_0(x)Lm_{22}(t,x,y); \\ -\delta_y(x) + \lambda Lm_{22}(t,x,y) &= \mathcal{L}_2(Lm_{22})(t,x,y) + \delta_0(x)Lm_{12}(t,x,y). \end{cases}$$

Применим дискретное преобразование Фурье к уравнениям (1.40). Тогда

$$\begin{cases} -e^{\imath(\theta,y)} + (\lambda - \varkappa_1\widehat{a_1}(\theta))\widehat{Lm_{11}}(t,\theta,y) &= \beta Lm_{21}(t,0,y) \\ (\lambda - \varkappa_2\widehat{a_2}(\theta))\widehat{Lm_{21}}(t,\theta,y) &= \beta Lm_{11}(t,0,y) \end{cases}$$

Отсюда получаем при $\lambda \neq \varkappa_i\widehat{a_i}(\theta)$, $i = 1,2$,

$$\begin{cases} \widehat{Lm_{11}}(t,\theta,y) = \frac{\beta Lm_{21}(t,0,y) + e^{\imath(\theta,y)}}{\lambda - \varkappa_1\widehat{a_1}(\theta)}; \\ \widehat{Lm_{21}}(t,\theta,y) = \frac{\beta Lm_{11}(t,0,y)}{\lambda - \varkappa_2\widehat{a_2}(\theta)}. \end{cases}$$

Воспользуемся обратным преобразованием Фурье

$$\begin{aligned}
Lm_{11}(t,x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{-\imath(\theta,x)}\big(\beta Lm_{21}(t,0,y)\big)}{\lambda - \varkappa\widehat{a}(\theta)} d\theta \\
&= \frac{\beta Lm_{21}(t,0,y)}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{\imath(\theta,0-x)}}{\lambda - \varkappa\widehat{a}(\theta)} d\theta + \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{\imath(\theta,y-x)}}{\lambda - \varkappa\widehat{a}(\theta)} d\theta.
\end{aligned}$$

Используя представление функции Грина, с помощью обратного преобразования Лапласа (1.39), получаем

$$Lm_{11}(t,x,y) = \beta Lm_{21}(t,0,y) G_{\lambda,1}(x,0) + G_{\lambda,1}(x,y).$$

Аналогично для функции $Lm_{21}(t,x,y)$ имеем

$$L_{21}(t,x,y) = \beta Lm_{11}(t,0,y) G_{\lambda,2}(x,0).$$

Подставим $x = 0$ в оба уравнения

$$\begin{aligned}
Lm_{11}(t,0,y) &= \beta Lm_{21}(t,0,y) G_{\lambda,1}(0,0) + G_{\lambda,1}(0,y); \\
Lm_{21}(t,0,y) &= \beta Lm_{11}(t,0,y) G_{\lambda,2}(0,0).
\end{aligned}$$

Пусть $\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0) \neq 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
Lm_{11}(t,0,y) &= \frac{G_{\lambda,1}(0,y)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}; \\
Lm_{21}(t,0,y) &= \frac{\beta G_{\lambda,1}(0,y) G_{\lambda,2}(0,0)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned}
Lm_{11}(t,x,y) &= \frac{\beta^2 G_{\lambda,1}(x,0) G_{\lambda,1}(0,y) G_{\lambda,2}(0,0)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}; \\
Lm_{21}(t,x,y) &= \frac{\beta G_{\lambda,2}(x,0) G_{\lambda,1}(0,y)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}.
\end{aligned}$$

Аналогично можно найти значения для $Lm_{12}(t,x,y)$ и $Lm_{22}(t,x,y)$. Тогда для $Lm_{ij}(t,x,y)$, $i,j = 1,2$ и $i \neq j$ будет верно

$$Lm_{ii}(t,x,y) = \frac{\beta^2 G_{\lambda,i}(x,0) G_{\lambda,i}(0,y) G_{\lambda,j}(0,0)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}; \tag{1.41}$$

$$Lm_{ij}(t,x,y) = \frac{\beta G_{\lambda,i}(x,0) G_{\lambda,j}(0,y)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}. \tag{1.42}$$

Далее будем предполагать, что случайное блуждание для частиц первого типа имеет конечную дисперсию скачков, а случайное блуждание для частиц второго типа — бесконечную. В [12] и в [27] были получены асимптотики функций Грина $G_{\lambda,i}(x,y)$, $i = 1,2$, при $\lambda \to 0$. Напомним формулировки теорем для получения асимптотических представлений преобразований Лапласа.

Теорема 1.2.1 (Яровая [12]). *Пусть случайное блуждание имеет конечную дисперсию скачков и* $G_0 = G_0(0,0)$. *Тогда при* $\lambda \to 0$ *верны асимптотические представления*

$$
\begin{aligned}
&G_\lambda(0,0) \sim \frac{\gamma_1\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\lambda)}} \text{ при } d=1;\\
&G_\lambda(0,0) \sim -\gamma_2 \ln\lambda \text{ при } d=2;\\
&G_\lambda(0,0) - G_0 \sim -\gamma_3\sqrt{\pi\lambda} \text{ при } d=3;\\
&G_\lambda(0,0) - G_0 \sim \gamma_4\lambda\ln\lambda \text{ или } d=4;\\
&G_\lambda(0,0) - G_\lambda \sim -\gamma_d\lambda \text{ при } d\geqslant 5,
\end{aligned}
$$

где λ_d *положительная константа, зависящая от размерности* d *решетки* $\mathbb{Z}^d$.

Теорема 1.2.2 (Яровая [27], т. 1). *Пусть случайное блуждание имеет бесконечную дисперсию скачков с* $\alpha \in (0,2)$ *и* $G_0 = G_0(0,0)$. *Тогда при* $\lambda \to 0$ *верны асимптотические представления*

$$
\begin{aligned}
&G_\lambda(0,0) \sim \gamma_{d,\alpha}\lambda^{(1-\alpha)/\alpha} \text{ при } \alpha\in(1,2);\\
&G_\lambda(0,0) \sim -\gamma_{d,\alpha}\ln\lambda \text{ при } d=1,\ \alpha=1;\\
&G_\lambda(0,0) - G_0 \sim -\gamma_{d,\alpha}\lambda^{(d-\alpha)/\alpha} \text{ при } d=1,\ \alpha\in(1/2,2),\ \text{или } d=2,\ \alpha\in(1,2),\\
&\qquad \text{или } d=3,\ \alpha\in(3/2,2);\\
&G_\lambda(0,0) - G_0 \sim \gamma_{d,\alpha}\lambda\ln\lambda \text{ при } d=1,\ \alpha=1/2,\ \text{или } d=2,\ \alpha=1,\\
&\qquad \text{или } d=3,\ \alpha=3/2;\\
&G_\lambda(0,0) - G_0 \sim -\gamma_{d,\alpha}\lambda \text{ при } d=1,\ \alpha\in(0,1/2),\ \text{или } d=2,\ \alpha\in(0,1),\\
&\qquad \text{или } d=3,\ \alpha\in(0,3/2),\ \text{или } d\geqslant 4,\ \alpha\in(0,2),
\end{aligned}
$$

где $\lambda_{d,\alpha}$ *положительная константа, зависящая от размерности* d *решетки* $\mathbb{Z}^d$.

Замечание 1.2.1. При $\lambda \to 0$ из теоремы 1.2.1 вытекает асимптотическое равенство

$$G_\lambda(0,0) \sim G_0 \text{ при } d \geqslant 3.$$

При $\lambda \to 0$ из теоремы 1.2.2 вытекает асимптотическое равенство

$$
\begin{aligned}
&G_\lambda(0,0) \sim -\gamma_{1,\alpha}\lambda^{(1-\alpha)/\alpha} \text{ при } d=1,\ \alpha\in(1/2,1);\\
&G_\lambda(0,0) \sim G_0 \text{ при } d=1,\ \alpha\in(0,1/2],\ \text{или } d\geqslant 2.
\end{aligned}
$$

Получим при $\lambda \to 0$ асимптотики преобразований Лапласа первых моментов $Lm_{ij}(t,x,y)$, $i,j=1,2$. Из замечания 1.2.1 следует, что все случаи подразделяются на пять:

1. $d=1, \alpha\in(1,2)$, для которого

$$G_{\lambda,1}(0,0) \sim \gamma_1\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}, \quad G_{\lambda,2}(0,0) \sim \gamma_{1,\alpha}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}};$$

2. $d=1, \alpha=1$, для которого

$$G_{\lambda,1}(0,0) \sim \gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}, \quad G_{\lambda,2}(0,0) \sim -\gamma_{1,1} \ln \lambda;$$

3. $d=1, \alpha \in (0,1)$, для которого

$$G_{\lambda,1}(0,0) \sim \gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}, \quad G_{\lambda,2}(0,0) \sim G_{0,2};$$

4. $d=2, \alpha \in (0,2)$, для которого

$$G_{\lambda,1}(0,0) \sim -\gamma_2 \ln \lambda, \quad G_{\lambda,2}(0,0) \sim G_{0,2};$$

5. $d \geqslant 3, \alpha \in (0,2)$, для которого

$$G_{\lambda,1}(0,0) \sim G_{0,1}, \quad G_{\lambda,2}(0,0) \sim G_{0,2}.$$

В следующих разделах рассмотрим отдельно случаи одномерной решетки $\mathbb{Z}^1$, двумерной решетки $\mathbb{Z}^2$ и решеток старших размерностей $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 3$.

1.2.1 Ветвящиеся случайные блуждания по одномерной решетке

Случай $d=1, \alpha \in (1,2)$. При $\lambda \to 0$ функции Грина $G_{\lambda,i}$, $i=1,2$ имеют асимптотики

$$G_{\lambda,1}(0,0) \sim \gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}, \quad G_{\lambda,2}(0,0) \sim \gamma_{1,\alpha} \lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Выпишем асимптотические представления преобразований Лапласа всех моментов субпопуляций частиц, подставив значения функций Грина в уравнения (1.41), (1.42)

$$Lm_{11}(t,0,0) = \frac{\beta^2 G_{\lambda,1}^2(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}{1-\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0} \sim \frac{\beta^2 \gamma_1^2 (\pi/\lambda) \gamma_{1,\alpha} \lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1-\beta^2 \gamma_1 \gamma_{1,\alpha} \sqrt{\pi/\lambda} \lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}.$$

Домножим числитель и знаменатель на λ^2. В этом случае получаем

$$Lm_{11}(t,0,0) \sim \frac{\beta^2 \gamma_1^2 (\pi/\lambda) \gamma_{1,\alpha} \lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1-\beta^2 \gamma_1 \gamma_{1,\alpha} \sqrt{\pi/\lambda} \lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \frac{\lambda^2}{\lambda^2} = \frac{\beta^2 \gamma_1^2 \pi \gamma_{1,\alpha} \lambda^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\lambda^2 - \beta^2 \gamma_1 \gamma_{1,\alpha} \sqrt{\pi \lambda} \lambda^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}}}.$$

Все показатели степеней λ больше 0. Поэтому при $\lambda \to 0$ верно

$$Lm_{11}(t,0,0) \sim \frac{\beta^2 \gamma_1^2 \pi \gamma_{1,\alpha} \lambda^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\lambda^2 - \beta^2 \gamma_1 \gamma_{1,\alpha} \sqrt{\pi \lambda} \lambda^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}}} \sim -\frac{\beta^2 \gamma_1^2 \pi \gamma_{1,\alpha} \lambda^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\beta^2 \gamma_1 \gamma_{1,\alpha} \sqrt{\pi \lambda} \lambda^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}}} = -\gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Аналогично найдем при $\lambda \to 0$ асимптотики $Lm_{ij}(t,0,0)$, $i,j=1,2$ и $i \neq j$:

$$Lm_{ij}(t,0,0) = \frac{\beta G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}{1-\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)} \sim \frac{\beta\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi/\lambda}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1-\beta^2\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi/\lambda}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}.$$

Домножив числитель и знаменатель на $\lambda\sqrt{\lambda}$, получаем

$$Lm_{ij}(t,0,0) \sim \frac{\beta\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi/\lambda}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1-\beta^2\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi/\alpha}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{\lambda\sqrt{\lambda}} = \frac{\beta\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}{\lambda\sqrt{\lambda}-\beta^2\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Тогда для $\lambda \to 0$ верно

$$Lm_{ij}(t,0,0) \sim \frac{\beta\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}{\lambda\sqrt{\lambda}-\beta^2\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} \sim -\frac{\beta\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta^2\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} = -\frac{1}{\beta}.$$

Рассмотрим асимптотику $Lm_{22}(t,0,0)$:

$$Lm_{22}(t,0,0) = \frac{\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G,2_{\lambda,2}(0,0)}{1-\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0} \sim \frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}\gamma_{1,\alpha}^2\lambda^{\frac{2-2\alpha}{\alpha}}}{1-\beta^2\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi/\lambda}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}.$$

Домножив числитель и знаменатель на $\lambda^2\sqrt{\lambda}$, получаем

$$Lm_{22}(t,0,0) \sim \frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}\gamma_{1,\alpha}^2\lambda^{\frac{2-2\alpha}{\alpha}}}{1-\beta^2\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi/\lambda}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \frac{\lambda^2\sqrt{\lambda}}{\lambda^2\sqrt{\lambda}} = \frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}\gamma_{1,\alpha}^2\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}{\lambda^2\sqrt{\lambda}-\beta^2\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{\alpha}+1}}.$$

Тогда для $\lambda \to 0$ верно

$$Lm_{22}(t,0,0) \sim \frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}\gamma_{1,\alpha}^2\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}{\lambda^2\sqrt{\lambda}-\beta^2\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{\alpha}+1}} \sim -\frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}\gamma_{1,\alpha}^2\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}{\beta^2\gamma_1\gamma_{1,\alpha}\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{\alpha}+1}} = -\gamma_{1,\alpha}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Таким образом, для $d=1, \alpha \in (1,2)$ и $\lambda \to 0$ верно

$$\begin{cases} Lm_{11}(t,0,0) & \sim -\gamma_1\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}; \\ Lm_{12}(t,0,0) & \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}; \\ Lm_{22}(t,0,0) & \sim -\gamma_{1,\alpha}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \end{cases}$$

Случай $d=1, \alpha=1$. Функции Грина $G_{\lambda,i}$, $i=1,2$ имеют асимптотики при $\lambda \to 0$

$$G_{\lambda,1}(0,0) \sim \gamma_1\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}, \quad G_{\lambda,2}(0,0) \sim -\gamma_{1,1}\ln\lambda.$$

Тогда, подставив значения функций Грина в уравнения (1.41), (1.42), получаем

$$Lm_{11}(t,0,0) = \frac{\beta^2 G_{\lambda,1}^2(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}{1-\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0} \sim \frac{-\beta^2\gamma_1^2(\pi/\lambda)\gamma_{1,1}\ln\lambda}{1+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi/\lambda}\ln\lambda}.$$

Домножим числитель и знаменатель на λ. Тогда

$$Lm_{11}(t,0,0) \sim \frac{-\beta^2\gamma_1^2(\pi/\lambda)\gamma_{1,1}\ln\lambda}{1+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi/\lambda}\ln\lambda}\frac{\lambda}{\lambda} \sim \frac{-\beta^2\gamma_1^2\pi\gamma_{1,1}\ln\lambda}{\lambda+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi\lambda}\ln\lambda}.$$

При $\lambda \to 0$ верно

$$Lm_{11}(t,0,0) \sim \frac{-\beta^2\gamma_1^2\pi\gamma_{1,1}\ln\lambda}{\lambda+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi\lambda}\ln\lambda} \sim \frac{-\beta^2\gamma_1^2\pi\gamma_{1,1}\ln\lambda}{\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi\lambda}\ln\lambda} = -\gamma_1\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Аналогично найдем асимптотики $Lm_{ij}(t,0,0)$, $i,j=1,2$ и $i \neq j$ при $\lambda \to 0$:

$$Lm_{ij}(t,0,0) = \frac{\beta G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0)}{1-\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0)} \sim \frac{-\beta\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi/\lambda}\ln\lambda}{1+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi/\lambda}\ln\lambda}.$$

Домножив числитель и знаменатель на $\sqrt{\lambda}$, получаем

$$Lm_{ij}(t,0,0) \sim \frac{-\beta\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi/\lambda}\ln\lambda}{1+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi/\lambda}\ln\lambda}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{-\beta\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi}\ln\lambda}{\sqrt{\lambda}+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi}\ln\lambda}.$$

Тогда для $\lambda \to 0$ верно

$$Lm_{ij}(t,0,0) \sim \frac{-\beta\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi}\ln\lambda}{\sqrt{\lambda}+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi}\ln\lambda} \sim \frac{-\beta\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi}\ln\lambda}{\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi}\ln\lambda} = -\frac{1}{\beta}.$$

Рассмотрим асимптотику $Lm_{22}(t,0,0)$:

$$Lm_{22}(t,0,0) = \frac{\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0)G,2_{\lambda,2}(0,0)}{1-\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0} \sim \frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}\gamma_{1,1}^2\ln^2\lambda}{1+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi/\lambda}\ln\lambda}.$$

Домножив числитель и знаменатель на $\sqrt{\lambda}$, получаем

$$Lm_{22}(t,0,0) \sim \frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}\gamma_{1,1}^2\ln^2\lambda}{1+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi/\lambda}\ln\lambda}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}\gamma_{1,1}^2\ln^2\lambda}{\sqrt{\lambda}+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi}\ln\lambda}.$$

Тогда для $\lambda \to 0$ верно

$$Lm_{22}(t,0,0) \sim \frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}\gamma_{1,1}^2\ln^2\lambda}{\sqrt{\lambda}+\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi}\ln\lambda} \sim \frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}\gamma_{1,1}^2\ln^2\lambda}{\beta^2\gamma_1\gamma_{1,1}\sqrt{\pi}\ln\lambda} = \gamma_{1,1}\ln\lambda.$$

Таким образом, для $d=1, \alpha=1$ и $\lambda \to 0$ верно

$$\begin{cases} Lm_{11}(t,0,0) & \sim -\gamma_1\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}; \\ Lm_{12}(t,0,0) & \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}; \\ Lm_{22}(t,0,0) & \sim \gamma_{1,1}\ln\lambda. \end{cases}$$

Случай $d=1, \alpha\in(0,1)$. Функции Грина $G_{\lambda,i}$, $i=1,2$ имеют асимптотики при $\lambda\to 0$

$$G_{\lambda,1}(0,0)\sim\gamma_1\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}},\quad G_{\lambda,2}(0,0)\sim G_{0,2}.$$

Тогда, подставив значения функций Грина в уравнения (1.41), (1.42), получаем

$$Lm_{11}(t,0,0)=\frac{\beta^2G^2_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0)}{1-\beta^2G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0}\sim\frac{\beta^2\gamma_1^2(\pi/\lambda)G_{0,2}}{1-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}G_{0,2}}.$$

Домножим числитель и знаменатель на λ. Тогда

$$Lm_{11}(t,0,0)\sim\frac{\beta^2\gamma_1^2(\pi/\lambda)G_{0,2}}{1-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}G_{0,2}}\frac{\lambda}{\lambda}\sim\frac{\beta^2\gamma_1^2\pi G_{0,2}}{\lambda-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi\lambda}G_{0,2}}.$$

При $\lambda\to 0$ верно

$$Lm_{11}(t,0,0)\sim\frac{\beta^2\gamma_1^2\pi G_{0,2}}{\lambda-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi\lambda}G_{0,2}}\sim-\frac{\beta^2\gamma_1^2\pi G_{0,2}}{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi\lambda}G_{0,2}}=-\gamma_1\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Аналогично найдем асимптотики $Lm_{ij}(t,0,0)$, $i,j=1,2$ и $i\neq j$ при $\lambda\to 0$:

$$Lm_{ij}(t,0,0)=\frac{\beta G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0)}{1-\beta^2G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0)}\sim\frac{\beta\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}G_{0,2}}{1-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}G_{0,2}}.$$

Домножив числитель и знаменатель на $\sqrt{\lambda}$, получаем

$$Lm_{ij}(t,0,0)\sim\frac{\beta\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}G_{0,2}}{1-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}G_{0,2}}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}=\frac{\beta\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}}{\sqrt{\lambda}-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}}.$$

Тогда для $\lambda\to 0$ верно

$$Lm_{ij}(t,0,0)\sim\frac{\beta\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}}{\sqrt{\lambda}-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}}\sim-\frac{\beta\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}}{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}}=-\frac{1}{\beta}.$$

Рассмотрим асимптотику $Lm_{22}(t,0,0)$:

$$Lm_{22}(t,0,0)=\frac{\beta^2G_{\lambda,1}(0,0)G,2_{\lambda,2}(0,0)}{1-\beta^2G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0}\sim\frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}G^2_{0,2}}{1-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}G_{0,2}}.$$

Домножив числитель и знаменатель на $\sqrt{\lambda}$, получаем

$$Lm_{22}(t,0,0)\sim\frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}G^2_{0,2}}{1-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}G_{0,2}}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}=\frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}G^2_{0,2}}{\sqrt{\lambda}-\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}}.$$

Тогда для $\lambda \to 0$ верно

$$Lm_{22}(t,0,0) \sim \frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}^2}{\sqrt{\lambda} - \beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}} \sim -\frac{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}^2}{\beta^2\gamma_1\sqrt{\pi}G_{0,2}} = -G_{0,2}.$$

Таким образом, для $d = 1, \alpha \in (0,1)$ и $\lambda \to 0$ имеем

$$\begin{cases} Lm_{11}(t,0,0) & \sim -\gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}; \\ Lm_{12}(t,0,0) & \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}; \\ Lm_{22}(t,0,0) & \sim -G_{0,2}. \end{cases}$$

1.2.2 Ветвящиеся случайные блуждания по двумерной решетке

В случае $d = 2, \alpha \in (0,2)$ функции Грина $G_{\lambda,i}$, $i = 1,2$ при $\lambda \to 0$ имеют асимптотики (см. раздел 1.2)

$$G_{\lambda,1}(0,0) \sim -\gamma_2 \ln\lambda, \quad G_{\lambda,2}(0,0) \sim G_{0,2}.$$

Тогда, подставив значения функций Грина в уравнения (1.41),(1.42), получаем

$$Lm_{11}(t,0,0) = \frac{\beta^2 G_{\lambda,1}^2(0,0)G_{\lambda,2}(0,0)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0} \sim \frac{\beta^2\gamma_1^2\ln^2\lambda G_{0,2}}{1 + \beta^2\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}}.$$

При $\lambda \to 0$ имеем

$$Lm_{11}(t,0,0) \sim \frac{\beta^2\gamma_1^2\ln^2\lambda G_{0,2}}{1 + \beta^2\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}} \sim \frac{\beta^2\gamma_1^2\ln^2\lambda G_{0,2}}{\beta^2\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}} = \gamma_2\ln\lambda.$$

Аналогично при $\lambda \to 0$ найдем асимптотики $Lm_{ij}(t,0,0)$, $i,j = 1,2$ и $i \neq j$:

$$Lm_{ij}(t,0,0) = \frac{\beta G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0)} \sim \frac{-\beta\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}}{1 + \beta^2\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}}.$$

Тогда для $\lambda \to 0$ верно

$$Lm_{ij}(t,0,0) \sim \frac{-\beta\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}}{1 + \beta^2\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}} \sim \frac{-\beta\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}}{\beta^2\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}} = -\frac{1}{\beta}.$$

Рассмотрим асимптотику $Lm_{22}(t,0,0)$:

$$Lm_{22}(t,0,0) = \frac{\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0)G,2_{\lambda,2}(0,0)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0)G_{\lambda,2}(0,0} \sim \frac{-\beta^2\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}^2}{1 + \beta^2\gamma_1\ln\lambda G_{0,2}}.$$

Тогда для $\lambda \to 0$ верно

$$Lm_{22}(t,0,0) \sim \frac{-\beta^2\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}^2}{1 + \beta^2\gamma_1\ln\lambda G_{0,2}} \sim -\frac{\beta^2\gamma_2\ln\lambda G_{0,2}^2}{\beta^2\gamma_1\ln\lambda G_{0,2}} = -G_{0,2}.$$

Таким образом, для $d = 2, \alpha \in (0,2)$ и $\lambda \to 0$ верно

$$\begin{cases} Lm_{11}(t,0,0) & \sim -\gamma_2\ln\lambda; \\ Lm_{12}(t,0,0) & \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}; \\ Lm_{22}(t,0,0) & \sim -G_{0,2}. \end{cases}$$

1.2.3 Ветвящиеся случайные блуждания по решеткам старших размерностей

В случае $d \geqslant 3, \alpha \in (0,2)$ функции Грина $G_{\lambda,i}$, $i = 1,2$ имеют асимптотики при $\lambda \to 0$ (см. раздел 1.2)

$$G_{\lambda,1}(0,0) \sim G_{0,1}, \quad G_{\lambda,2}(0,0) \sim G_{0,2}.$$

Тогда, подставив значения функций Грина в уравнения (1.41)–(1.42), получаем

$$Lm_{11}(t,0,0) = \frac{\beta^2 G^2_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0} \sim \frac{\beta^2 G^2_{0,1} G_{0,2}}{1 - \beta^2 G_{0,1} G_{0,2}}.$$

Аналогично при $\lambda \to 0$ найдем асимптотики $Lm_{ij}(t,0,0)$, $i,j = 1,2$ и $i \neq j$:

$$Lm_{ij}(t,0,0) = \frac{\beta G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0)} \sim \frac{\beta G_{0,1} G_{0,2}}{1 - \beta^2 G_{0,1} G_{0,2}}.$$

Рассмотрим асимптотику $Lm_{22}(t,0,0)$:

$$Lm_{22}(t,0,0) = \frac{\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G,2_{\lambda,2}(0,0)}{1 - \beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0} \sim \frac{\beta^2 G_{0,1} G^2_{0,2}}{1 - \beta^2 G_{0,1} G_{0,2}}.$$

Таким образом, для $d \geqslant 3, \alpha \in (0,2)$ и $\lambda \to 0$ верно

$$\begin{cases} Lm_{11}(t,0,0) & \sim \frac{\beta^2 G^2_{0,1} G_{0,2}}{1-\beta^2 G_{0,1} G_{0,2}}; \\ Lm_{12}(t,0,0) & \sim \frac{\beta G_{0,1} G_{0,2}}{1-\beta^2 G_{0,1} G_{0,2}}; \\ Lm_{22}(t,0,0) & \sim \frac{\beta^2 G_{0,1} G^2_{0,2}}{1-\beta^2 G_{0,1} G_{0,2}}. \end{cases}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.3. *Пусть $\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0) \neq 1$ и для ВСБ с двумя типами частиц интенсивности прыжков удовлетворяют следующим условиям*

$$\sum_v a_1(v)|v|^2 < \infty; \quad a_2(u) \sim \frac{H(u/|u|)}{|u|^{d+\alpha}}, \quad \alpha \in (0,2),$$

где $H(\cdot)$ — положительная, непрерывная и симметричная функция на $\{u \in \mathbb{R}^d : |u| = 1\}$. Положим $\beta^2 G_{\lambda,1} G_{\lambda,2}(0,0) \neq 1$

Если на решетке есть один источник ветвления в точке $0 \in \mathbb{Z}^d$, то для преобразований Лапласа функций $Lm^{(1)}_{ij}(t,x,y)$, $i,j = 1,2$ и для всех x, $y \in \mathbb{Z}^d$

$$Lm^{(1)}_{ij}(t,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} m^{(1)}_{ij}(t,x,y) dt, \quad \lambda \geqslant 0$$

верны следующие асимптотические представления при $\lambda \to 0$.

Случай $d = 1, \alpha \in (1,2)$. *Имеем*

$$\begin{cases} Lm_{11}(t,0,0) & \sim -\gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}; \\ Lm_{12}(t,0,0) & \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}; \\ Lm_{22}(t,0,0) & \sim -\gamma_{1,\alpha}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \end{cases}$$

Случай $d = 1, \alpha = 1$. *Имеем*

$$\begin{cases} Lm_{11}(t,0,0) & \sim -\gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}; \\ Lm_{12}(t,0,0) & \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}; \\ Lm_{22}(t,0,0) & \sim \gamma_{1,1} \ln \lambda. \end{cases}$$

Случай $d = 1, \alpha \in (0,1)$. *Имеем*

$$\begin{cases} Lm_{11}(t,0,0) & \sim -\gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}; \\ Lm_{12}(t,0,0) & \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}; \\ Lm_{22}(t,0,0) & \sim -G_{0,2}. \end{cases}$$

Случай $d = 2, \alpha \in (0,2)$. *Имеем*

$$\begin{cases} Lm_{11}(t,0,0) & \sim -\gamma_2 \ln \lambda; \\ Lm_{12}(t,0,0) & \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}; \\ Lm_{22}(t,0,0) & \sim -G_{0,2}. \end{cases}$$

Случай $d \geqslant 3, \alpha \in (0,2)$. *Имеем*

$$\begin{cases} Lm_{11}(t,0,0) & \sim \frac{\beta^2 G_{0,1}^2 G_{0,2}}{1-\beta^2 G_{0,1} G_{0,2}}; \\ Lm_{12}(t,0,0) & \sim \frac{\beta G_{0,1} G_{0,2}}{1-\beta^2 G_{0,1} G_{0,2}}; \\ Lm_{22}(t,0,0) & \sim \frac{\beta^2 G_{0,1} G_{0,2}^2}{1-\beta^2 G_{0,1} G_{0,2}}. \end{cases}$$

Глава 2

Ветвящиеся случайные блуждания с иммиграцией

Глава посвящена многотипным ВСБ по многомерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с наличием иммиграции в точки решетки. Одним из направлений популяционной динамики является вопрос о наличии стационарного состояния процесса. В случае, когда интенсивность гибели больше интенсивности рождаемости, ВСБ является вырождающимся. Введение иммиграции помогает стабилизировать процесс, то есть прекратить его вымирание.

В разделе 2.1 описана модель ВСБ с двумя типами части с иммиграцией. Для модели с двумя типами частиц получены дифференциальные уравнения первых моментов численностей частиц в случае, когда интенсивность иммиграции зависит от положения точки на решетке, а также в каждый момент времени в точке может появиться больше одной частицы извне.

В разделе 2.2 описана модель ВСБ с одним типом частиц и изучено поведение певого и второго момента в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции постоянные. В разделе 2.3 исследуется устойчивость процесса по Ляпунову для первого и второго момента численностей частиц в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции зависят от положения частицы на решетке. В последнем разделе 2.4 главы 2 приводится анализ дуальности моделей ВСБ с иммиграцией при различных предположениях на начальное распределение частиц.

2.1 Ветвящиеся случайные блуждания с двумя типами частиц и иммиграцией

Рассмотрим общую модель ВСБ с двумя типами частиц, описанную в разделе 1.1.1. Помимо процессов ветвления и блуждания, введем процесс иммиграции — приток случайного числа частиц каждого из типов в каждую точку решетки.

2.1.1 Описание модели

Пусть χ_i — целочисленная случайная величина количества частиц, которые появляются за малое время dt в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Таким образом, $k_{i,\chi_i}(x)$, $i = 1, 2$ — интенсивность иммиграции χ_i частиц типа i в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Объектом изучения является поле частиц

$$N(t, x) = \big[N_1(t, x), N_2(t, x)\big]^T,$$

где $N_i(t, x)$ — число частиц типа $i = 1, 2$ в момент времен $t \geqslant 0$ в точке $x \in \mathbb{Z}^d$.

В следующем разделе будут полученые основные уравнения для численностей частиц каждого типа.

2.1.2 Основные уравнения

Обычно для ветвящихся случайных блужданий применяются обратные уравнения Колмогорова, см., например, в случае для модели ВСБ с одним типом частиц [12]. В нашем случае, ввиду наличия иммиграции, используются прямые уравнения Колмогорова (см., например, [1]). Их вывод основан на представлении числа частиц $N_i(t, x)$ в момент времени $t + dt$:

$$N_i(t + dt, x) = N(t, x) + \xi_i(dt, x),$$

где $\xi_i(dt, x)$ $(i = 1, 2)$ — дискретная случайная величина, принимающая счетное число значений. Для $i = 1$

$$\xi_1(dt, x) = \begin{cases} k_1 - 1 & \text{с вероятностью } \sum\limits_{l} \beta_1(k_1, l) N_1(t, x) dt,\ \ k_1 \geqslant 2, \\ k_2 & \text{с вероятностью } \sum\limits_{l \geqslant 1} \beta_2(k_2, l) N_2(t, x) dt,\ \ k_2 \geqslant 1, \\ 1 & \text{с вероятностью } \varkappa_1 \sum\limits_{z \neq 0} a_1(-z) N_1(t, x + z) dt, \\ -1 & \text{с вероятностью } \mu_1 N_1(t, x) dt + \varkappa_1 N_1(t, x) dt \\ & \qquad + \sum\limits_{l \geqslant 2} \beta_1(0, l) N_1(t, x) dt, \\ \chi_1 & \text{с вероятностью } k_{1,\chi_1}(x) dt, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \sum\limits_{k_1 \geqslant 2, l} \beta_1(k_1, l) N_1(t, x) dt \\ & \qquad - \sum\limits_{k_2 \geqslant 1, l \geqslant 1} \beta_2(k_2, l) N_2(t, x) dt - k_{1,\chi_1}(x) dt \\ & \qquad - \varkappa_1 \sum\limits_{z \neq 0} a_1(-z) N_1(t, x + z) dt - \big(\mu_1 + \varkappa_1\big) N_1(t, x) dt. \end{cases}$$

Для $i = 2$

$$\xi_2(dt,x) = \begin{cases} l_1 - 1 & \text{с вероятностью } \sum\limits_{k} \beta_2(k,l_1)N_2(t,x)dt, \ l_1 \geqslant 2, \\ l_2 & \text{с вероятностью } \sum\limits_{k\geqslant 1} \beta_1(k,l_2)N_2(t,x)dt, \ l_2 \geqslant 1, \\ 1 & \text{с вероятностью } \varkappa_2 \sum\limits_{z\neq 0} a_2(-z)N_2(t,x+z)dt, \\ -1 & \text{с вероятностью } \mu_2 N_2(t,x)dt + \varkappa_2 N_2(t,x)dt \\ & \qquad + \sum\limits_{k\geqslant 2} \beta_2(k,0)N_2(t,x)dt, \\ \chi_2 & \text{с вероятностью } k_{2,\chi_2}(x)dt, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \sum\limits_{k,l_1\geqslant 2} \beta_2(k,l_1)N_2(t,x)dt \\ & \qquad - \sum\limits_{k\geqslant 1, l_2\geqslant 1} \beta_1(k,l_2)N_1(t,x)dt - k_{2,\chi_2}(x)dt \\ & \qquad -\varkappa_2 \sum\limits_{z\neq 0} a_2(-z)N_2(t,x+z)dt - \big(\mu_2 + \varkappa_2\big)N_2(t,x)dt. \end{cases}$$

В данном разделе целью исследования является изучение первых моментов численностей частиц. Для этого нам понадобятся методы изучения условных математических ожиданий (подробнее см. [11, гл. 2]).

Заметим, что случайные величины $\xi_i(dt,x)$, $i = 1,2$ и сигма-алгебра $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ независимы, где $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ — сигма-алгебра событий, произошедших до момента времени t, включая его.

Таким образом, из свойств математического ожидания получаем, что

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\xi_1(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}] = {} & \sum_{k_1\geqslant 3, l} (k_1-1)\beta_1(k_1,l)N_1(t,x)dt + \sum_{k_2\geqslant 1, l\geqslant 1} k_2\beta_2(k_2,l)N_2(t,x)dt \\ & + \varkappa_1 \sum_{z\neq 0} a_1(-z)N_1(t,x+z)dt - \big(\mu_1 + \varkappa_1\big)N_1(t,x)dt \\ & - \sum_{l\geqslant 2} \beta_1(0,l)N_1(t,x)dt + \chi_1 k_{1,\chi_1}dt; \\ \mathsf{E}[\xi_2(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}] = {} & \sum_{k, l_1\geqslant 3} (l_1-1)\beta_2(k,l_1)N_2(t,x)dt + \sum_{k\geqslant 1, l_2\geqslant 1} l_2\beta_1(k,l_2)N_2(t,x)dt \\ & + \varkappa_2 \sum_{z\neq 0} a_2(-z)N_2(t,x+z)dt - \big(\mu_2 + \varkappa_2\big)N_2(t,x)dt \\ & - \sum_{k\geqslant 2} \beta_2(k,0)N_2(t,x)dt + \chi_2 k_{2,\chi_2}dt. \end{aligned}$$

2.1.3 Первые моменты численностей частиц

Рассмотрим первые моменты случайных величин $N_i(t,x)$, $i = 1,2$. Пусть $M_i(t,x) = \mathsf{E}N_i(t,x)$. Воспользовавшись свойствами условного математического ожидания, получаем для каждого $i = 1, 2$

$$M_i(t+dt,x) = \mathsf{E}N_i(t+dt,x) = \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[N_i(t+dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big] = \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[N_i(t,x)+\xi_i(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big]$$
$$= \mathsf{E}N_i(t,x) + \mathsf{E}\big[\xi_i(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big] = M_i(t,x) + \mathsf{E}\big[\xi_i(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big].$$

Отсюда для $i = 1$ имеем

$$\begin{aligned} M_1(t+dt,x) &= M_1(t,x) + \mathsf{E}\big[\xi_1(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big] = M_1(t,x) + \mathsf{E}\Big[\sum_{k_1\geqslant 3,l}(k_1-1)\beta_1(k_1,l)N_1(t,x)dt \\ &\quad + \sum_{k_2\geqslant 1,l\geqslant 1} k_2\beta_2(k_2,l)N_2(t,x)dt + \varkappa_1\sum_{z\neq 0} a_1(-z)N_1(t,x+z)dt \\ &\quad - \big(\mu_1+\varkappa_1\big)N_1(t,x)dt + \chi_1 k_{1,\chi_1}dt - \sum_{l\geqslant 2}\beta_1(0,l)N_1(t,x)dt\Big] \\ &= M_1(t,x) + \sum_{k_1\geqslant 3,l}(k_1-1)\beta_1(k_1,l)M_1(t,x)dt + \sum_{k_2\geqslant 1,l\geqslant 1}k_2\beta_2(k_2,l)M_2(t,x)dt \\ &\quad + \varkappa_1\sum_{z\neq 0}a_1(-z)M_1(t,x+z)dt - \big(\mu_1+\varkappa_1\big)M_1(t,x)dt + \chi_1 k_{1,\chi_1}dt \\ &\quad - \sum_{l\geqslant 2}\beta_1(0,l)M_1(t,x)dt. \end{aligned}$$

Перенесем $M_1(t,x)$ в левую часть равенства и разделим обе части на dt

$$\begin{aligned} \frac{M_1(t+dt,x)-M_1(t,x)}{dt} &= \sum_{k_1\geqslant 3,l}(k_1-1)\beta_1(k_1,l)M_1(t,x) + \sum_{k_2\geqslant 1,l\geqslant 1}k_2\beta_2(k_2,l)M_2(t,x) \\ &\quad + \varkappa_1\mathcal{L}_1 M_1(t,x) - \mu_1 M_1(t,x) + \chi_1 k_{1,\chi_1} - \sum_{l\geqslant 2}\beta_1(0,l)M_1(t,x). \end{aligned}$$

Тогда при $dt \to 0$ для первого момента численности частиц $N_1(t,x)$ получаем дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1(t,x)}{\partial t} &= \sum_{k_1\geqslant 3,l}(k_1-1)\beta_1(k_1,l)M_1(t,x) + \sum_{k_2\geqslant 1,l\geqslant 1}k_2\beta_2(k_2,l)M_2(t,x) \\ &\quad + \varkappa_1\mathcal{L}_1 M_1(t,x) - \mu_1 M_1(t,x) + \chi_1 k_{1,\chi_1}dt - \sum_{l\geqslant 2}\beta_1(0,l)M_1(t,x). \end{aligned}$$

Аналогично получается дифференциальное уравнение первого момента численности частиц $N_2(t,x)$:

$$\begin{aligned}
M_2(t+dt,x) &= M_2(t,x) + \mathsf{E}\big[\xi_2(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big] = M_2(t,x) + \mathsf{E}\Big[\sum_{k,l_1\geqslant 3}(l_1-1)\beta_2(k,l_1)N_2(t,x)dt \\
&\quad + \sum_{k\geqslant 1,l_2\geqslant 1} l_2\beta_1(k,l_2)N_1(t,x)dt + \varkappa_2\sum_{z\neq 0} a_2(-z)N_2(t,x+z)dt \\
&\quad - \big(\mu_2+\varkappa_2\big)N_2(t,x)dt + \chi_2 k_{2,\chi_2}dt - \sum_{k\geqslant 2}\beta_2(k,0)N_2(t,x)dt\Big] \\
&= M_2(t,x) + \sum_{k,l_1\geqslant 3}(l_1-1)\beta_2(k,l_1)M_2(t,x)dt + \sum_{k\geqslant 1,l_2\geqslant 1} l_2\beta_1(k,l_2)M_1(t,x)dt \\
&\quad + \varkappa_2\sum_{z\neq 0} a_2(-z)M_2(t,x+z)dt - \big(\mu_2+\varkappa_2\big)M_2(t,x)dt + \chi_2 k_{2,\chi_2}dt \\
&\quad - \sum_{k\geqslant 2}\beta_2(k,0)M_2(t,x)dt.
\end{aligned}$$

Перенесем $M_2(t,x)$ в левую часть равенства и, разделив обе части на dt, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{M_2(t+dt,x)-M_2(t,x)}{dt} &= \sum_{k,l_1\geqslant 3}(l_1-1)\beta_2(k,l_1)M_2(t,x) + \sum_{k\geqslant 1,l_2\geqslant 1} l_2\beta_1(k,l_2)M_1(t,x) \\
&\quad + \varkappa_2\mathcal{L}_2 M_2(t,x) - \mu_2 M_2(t,x) + \chi_2 k_{2,\chi_2} - \sum_{k\geqslant 2}\beta_2(k,0)M_2(t,x).
\end{aligned}$$

Тогда при $dt\to 0$ для первого момента $M_2(t,x)$ численности частиц $N_2(t,x)$ получается дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_2(t,x)}{\partial t} &= \sum_{k,l_1\geqslant 3}(l_1-1)\beta_2(k,l_1)M_2(t,x) + \sum_{k\geqslant 1,l_2\geqslant 1} l_2\beta_1(k,l_2)M_1(t,x) \\
&\quad + \varkappa_2\mathcal{L}_2 M_2(t,x) - \mu_2 M_2(t,x) + \chi_2 k_{2,\chi_2} - \sum_{k\geqslant 2}\beta_2(k,0)M_2(t,x).
\end{aligned}$$

Полученные дифференциальные уравнения первых моментов численностей частиц каждого типа для ВСБ с двумя типами частиц с добавлением процесса иммиграции достаточно сложны для исследования в общем виде.

В связи с этим, в следующих разделах для более простого случая будут объяснены эффекты от введения процесса иммиграции в модель ВСБ. Рассмотрим ВСБ с одним типом частиц и иммиграцией.

2.2 Ветвящиеся случайные блуждания с постоянной интенсивностью притока частиц

В разделе будет описана модель ВСБ с одним типом частиц. Свойства ветвления и блуждания определяются аналогично процессам с двумя типами частиц.

2.2.1 Описание модели

Для процессов с одним типом частиц будем рассматривать симметричное ВСБ с непрерывным временем по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$. В данном разделе объектом изучения является поле частиц $n(t,x)$, где $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{Z}^d$, то есть $n(t,x)$ есть число частиц в момент времени t в точке решетки $x \in \mathbb{Z}^d$. Предполагается, что в начальный момент времени случайные величины $n(0,x)$ являются независимыми и одинаково распределенными с конечными моментами. Например, можно сказать, что случайные величины $n(0,x) \equiv 1$, для всех $x \in \mathbb{Z}^d$. Далее будет показано, что при $t \to \infty$ вклад начального распределения экспоненциально мал и им можно пренебречь.

Эволюция поля частиц включает в себя несколько свойств. Каждая частица в момент времени $t > 0$, находящаяся в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, остается в этой точке некоторое время τ до первого изменения. Таким образом, в момент времени $t + \tau + 0$ с частицей могут случиться следующие изменения:

1. частица может перепрыгнуть из точки x в точку $x + z$ с интенсивностью $a(z)$. Будем считать, что $a(z) = a(-z)$ — то есть случайное блуждание симметрично и однородно. Интенсивность прыжка обозначим за $\varkappa > 0$. Таким образом, вероятность за время dt частице перепрыгнуть из точки x в точку $x + z$ равна $\varkappa a(z)dt$. Генератор такого случайного блуждания имеет вид:
$$\mathcal{L}\psi(x) = \varkappa \sum_{z \neq 0} \big[\psi(x+z) - \psi(x)\big] a(z).$$
Также будем считать, что
$$\sum_{z \neq 0} a(z) = 1, \quad a(0) = -1.$$
Аналогично, как и для процессов с двумя типами частиц будем считать, что случайное блуждание неприводимо, то есть все точки решетки достижимы. Это условие можно записать в следующем виде — $\mathrm{span}\{z : a(z) > 0\} = \mathbb{Z}^d$.

2. частица может умереть с вероятностью μdt за некоторое время dt, где $\mu > 0$ - интенсивность смерти.

3. каждая частица, независимо от остальных, может производить n новых частиц (или можно сказать, что частица порождает $n - 1$ частицу и остается в точке x). Обозначим $b_n, n \geqslant 0$ - интенсивности преобразования одной частицы в n. Далее будем считать, что все частицы продолжают свою эволюцию независимо друг от друга.

   Положим $\mu + \sum_{n \geqslant 2} b_n = -b_1 > 0$.

   Оператор $\mathcal{L}$ порождает марковскую полугруппу
$$P_t = \exp(t\mathcal{L})$$

с ядром (переходной вероятностью) $p(t,x,y)$. Здесь

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \mathcal{L}_x p(t,x,y) = \mathcal{L}_y p(t,x,y)$$

Каждая частица совершает случайное блуждание с генератором $\mathcal{L}$ до момента первого превращения — часть или делится, или умирает. Запишем соответствующую производящую функцию ветвящегося процесса

$$F(z) = \mu + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \mu - (\mu + \sum_{n\geqslant 2} b_n)z + \sum_{n\geqslant 2} b_n z^n \ .$$

Также предполагается, что $F(z)$ является аналитической функцией в круге $|z| < 1+\delta, \delta > 0$, то есть интенсивности b_n как функции от n экспоненциально убывают.

4. наконец, последним преобразованием поля частиц является иммиграция. В любой точке решетки $x \in \mathbb{Z}^d$ за временной интервал $(t, t+dt)$ с вероятностью kdt может появиться новая частица, где k - интенсивность иммиграции.

Всюду далее, пока не указано иное, будем считать, что все ведущие параметры модели (μ, k, b_n с $n \geqslant 2$) будут постоянными величинами.

2.2.2 Основные уравнения

Для исследования поля частиц будут использоваться прямые уравнения Колмогорова. Их вывод основан на представлении числа частиц в момент времени $t + dt$ и был приведен в разделе 2.1.3. Однако для простоты будем считать, что только одна частица может появиться в точке решетки извне:

$$n(t+dt, x) = n(t,x) + \xi(dt, x),$$

где $\xi(dt,x)$ - дискретная случайная величина, принимающая счетное число значений:

$$\xi(dt,x) = \begin{cases} n-1 & \text{с вероятностью } b_n n(t,x)dt,\ n \geqslant 3, \\ 1 & \text{с вероятностью } b_2 n(t,x)dt + kdt \\ & +\varkappa \sum_{z\neq 0} a(-z) n(t, x+z)dt, \\ -1 & \text{с вероятностью } \mu n(t,x)dt + \varkappa n(t,x)dt, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \sum_{n\geqslant 3} b_n n(t,x)dt \\ & -(\beta_2 + \mu + \varkappa) n(t,x)dt - kdt \\ & -\sum_{z\neq 0} a(-z) n(t,x+z)dt. \end{cases}$$

В работе будет изучаться поведение моментов числа частиц $n(t,x)$. Для этого нам понадобится техника условных математических ожиданий (подробнее см. [11, гл. 2]).

Заметим, что случайная величина $\xi(dt,x)$ и сигма-алгебра $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ независимы, где $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ — сигма-алгебра событий, произошедших до момента времени t и включая его.

В конце раздела приведем некоторые полезные соотношения, которые будут использованы для исследования моментов численностей частиц:

1. математическое ожидание случайной величины $\xi(dt,x)$ есть

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\xi(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}] = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n n(t,x)dt + kdt \\ + \sum_{z\neq 0}\varkappa a(-z)n(t,x+z)dt - (\mu+\varkappa)n(t,x)dt;\end{aligned} \tag{2.1}$$

2. математическое ожидание $\xi^2(dt,x)$ есть

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\xi^2(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}] = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^2 b_n n(t,x)dt \\ + kdt + \sum_{z\neq 0}\varkappa a(-z)n(t,x+z)dt + (\mu+\varkappa)n(t,x)dt;\end{aligned} \tag{2.2}$$

3. корреляция $\xi(dt,x)$ и $\xi(dt,y)$ (полагаем, что $dt^2=0$) равна

$$\mathsf{E}[\xi(dt,x)\xi(dt,y)|\mathcal{F}_{\leqslant t}] = -\varkappa(a(y-x)n(t,x)dt + a(x-y)n(t,y)dt),\ x\neq y; \tag{2.3}$$

4. для трех разных точек x, y, $z\in\mathbb{Z}^d$ при условии $dt^2=0$ получаем

$$\mathsf{E}[\xi(dt,x)\xi(dt,y)\xi(dt,z)|\mathcal{F}_{\leqslant t}] = 0,\ x\neq y,\ x\neq z,\ x\neq z; \tag{2.4}$$

5. для моментов старших порядков рассмотрим случайную величину $\xi^p(dt,x)$, $p\geqslant 2$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\xi(dt,x)^p|\mathcal{F}_{\leqslant t}] = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^p b_n dt + kdt \\ + \varkappa\sum_{z\neq 0}a(z)n(t,x+z)dt + (-1)^p[\mu+\varkappa]n(t,x)dt,\ p>0;\end{aligned} \tag{2.5}$$

6. следующее соотношение также будет использоваться для исследования старших моментов численности частиц

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\xi(dt,x)^p\xi(dt,y)^q|\mathcal{F}_{\leqslant t}] = \varkappa[(-1)^p a(y-x)n(t,x)dt \\ + (-1)^q a(x-y)n(t,y)dt],\ x\neq y,\ p,q>0;\end{aligned} \tag{2.6}$$

7. наконец, приведем равенство, которое понадобится при изучении производящей

функции

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[e^{-z\xi(dt,x)}|\mathcal{F}_{\leqslant t}] = &\sum_{n\geqslant 2} e^{-z(n-1)} b_n n(t,x)dt \\ &+ e^{-z}(kdt + \varkappa \sum_{y\neq 0} a(y)n(t,x+y)dt) + e^{z}(\mu+\varkappa)n(t,x)dt \\ &+ (1 - \sum_{n\geqslant 2} b_n n(t,x)dt - kdt - \varkappa \sum_{y\neq 0} a(y)n(t,x+y)dt \\ &- \mu n(t,x)dt - \varkappa n(t,x)dt),\ z \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Далее будет изучаться поведение моментов случайной величины

$$\prod_{i=1}^{n} n(t,x_i), \quad x_i \in \mathbb{Z}^d, \quad i = 1,\ldots,n.$$

2.2.3 Первый момент численностей частиц

В дальнейшем нам потребуются следующие свойства условного математического ожидания:

$$\text{Если } \xi - \mathcal{G} - \text{измерима, то } \mathsf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) = \xi E(\eta|\mathcal{G}) \tag{2.8}$$

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})) = E\xi \tag{2.9}$$

Рассмотрим первый момент случайной величины $n(t,x)$ равный $m_1(t,x) = En(t,x)$. Выведем для него дифференциальное уравнение для изучения поведения численностей частиц. Для этого рассмотрим численность частиц в момент времени $t+dt$, то есть значение $n(t+dt,x)$.

Используя свойства (2.8) и (2.9) и соотношение (2.1), получаем

$$\begin{aligned}\mathsf{E}n(t+dt,x) &= \mathsf{E}\Big[E\big[n(t+dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big] = \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[n(t,x)+\xi(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big] \\ &= m_1(t,x) + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n m_1(t,x)dt + kdt \\ &\quad + \sum_{z\neq 0} \varkappa a(z)(m_1(t,x+z)dt - m_1(t,x)dt - \mu m_1(t,x)dt \ .\end{aligned}$$

Обозначим

$$\mathcal{L}_a f(t,x) = \sum_{z\neq 0} a(z)\big[f(t,x+z) - f(t,x)\big]$$

Таким образом, получается дифференциальное уравнение для первого момента. Более того, ввиду пространственной однородности, $\mathcal{L}_a m_1(t,x) = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_1(t,x)}{\partial t} &= \Big(\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n - \mu\Big) m_1(t,x) + k \ , \\ m_1(0,x) &= En(0,x) \ . \end{cases} \tag{2.10}$$

Обозначим β — интенсивность рождения, определяемую как

$$\beta = \sum_{n\geqslant 2}(n-1)b_n.$$

Заметим, что аналогичные уравнения получаются в случае, когда $\beta = \beta(x)$, $\mu = \mu(x)$, $k = k(x)$ являются ограниченными функциями на решетке.

В случае постоянных коэффициентов уравнение для первого момента может быть решено как обыкновенное дифференциальное уравнение. Его решение имеет вид:

$$m_1(t,x) = \frac{k}{\beta-\mu}\Big(e^{(\beta-\mu)t} - 1\Big) + e^{(\beta-\mu)t}En(0,x) \ .$$

Рассмотрим поведение первого момента численностей частиц при различных предположениях об интенсивностях β и μ. Если $\beta > \mu$ (в этом случае мы назовем процесс надкритическим), популяция будет расти экспоненциально, несмотря на наличие или отсутствие иммиграции.

Если $\beta = \mu$ (процесс критический) и $k > 0$, тогда популяция будет расти с линейной скоростью.

Последний случай, когда $\beta < \mu$ (докритический процесс), является самым интересным. Здесь, при отсутствии иммиграции, процесс вырождается и популяция гибнет. Однако добавление иммиграции позволяет получить, что при $t \to \infty$

$$m_1(t,x) \to \frac{k}{\mu-\beta}. \tag{2.11}$$

Далее мы будем считать, что $\beta < \mu$ и $k > 0$.

В случае непостоянных коэффициентов, то есть когда интенсивности k, β и μ являются функциями, зависящими от точки на решетке, будет изучена устойчивость процесса по Ляпунову для первого момента. Подробнее это будет рассмотрено в пункте 2.3.

2.2.4 Второй момент численностей частиц

Рассмотрим поведение второго момента численностей частиц. Определим второй момент как

$$m_2(t,x,y) = \mathsf{E}n(t,x)n(t,y).$$

Уравнение для второго момента получаются намного сложнее, так как рассматриваются при различных предпооженияx для x и y: $x = y$ и $x \neq y$.

Для начала выведем дифференциальные уравнения для обоих случаев $x = y$ и $x \neq y$. Далее объединим их в одно дифференциальное уравнение для второго момента, используя свойства рассматриваемого ВСБ и соотношений (2.8), (2.9) и (2.11).

Пусть $x = y$**.** Так же, как и в случае первого момента, для получения дифференциального уравнения рассмотрим второй момент в момент времени $t+dt$. При этом будем использовать (2.8) и (2.9), а также равенства (2.1), (2.2) и (2.3).

Всюду далее для упрощения вычислений введем обозначение

$$\mathcal{L}_{ax} f(t,x,y) = \sum_{z\neq 0} a(z)\big[f(t,x+z,y) - f(t,x,y)\big].$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_2(t+dt,x,x) &= En^2(t+dt,x) = E\Big[E\big[n^2(t+dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big] \\ &= E\Big[E\big[(n(t,x)+\xi(dt,x))^2|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big] \\ &= 2(\beta-\mu)m_2(t,x,x)dt + 2\varkappa\mathcal{L}_{ax}m_2(t,x,x)dt \\ &\quad + 2km_1(t,x)dt + kdt + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^2 b_n m_1(t,x)dt \\ &\quad + \varkappa\mathcal{L}_a m_1(t,x)dt + 2\varkappa m_1(t,x)dt + \mu m_1(t,x)dt\ . \end{aligned}$$

Отсюда и уравнения (2.11) получается дифференциальное уравнение для второго момента в случае 1, когда $x = y$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_2(t,x,x)}{\partial t} & = 2m_2(t,x,x)\big[\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n - \mu\big] + 2\varkappa\mathcal{L}_{ax}m_2(t,x,x) \\ & \quad + \frac{k\left(2k+2\varkappa+2\mu+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)(n-2)b_n\right)}{\mu-\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n} \\ m_2(0,x,x) & = En^2(0,x)\ . \end{cases} \tag{2.12}$$

Пусть $x \neq y$**.** Аналогично предыдущему случаю, рассмотрим второй момент в момент времени $t+dt$. Введем еще одно обозначение

$$\mathcal{L}_{ay} f(t,x,y) = \sum_{z\neq 0} a(z)\big[f(t,x,y+z) - f(t,x,y)\big].$$

Тогда для случая $x \neq y$ верно

$$\begin{aligned} m_2(t+dt,x,y) &= E\Big[E\big[n(t+dt,x)n(t+dt,y)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big] \\ &= E\Big[E\big[(n(t,x)+\xi(dt,x))(n(t,y)+\xi(dt,y))|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big] \\ &= m_2(t,x,y) + m_2(t,x,y)(2\beta-2\mu)dt + \varkappa\mathcal{L}_{ax}m_2(t,x,y) \\ &\quad + \varkappa\mathcal{L}_{ay}m_2(t,x,y) + k\Big(m_1(t,y)+m_1(t,x)\Big)dt \\ &\quad - \varkappa\Big(a(y-x)m_1(t,x) + a(x-y)m_1(t,y)\Big)dt\ . \end{aligned}$$

Следовательно, отсюда можно получить дифференциальное уравнение для случая 2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_2(t,x,y)}{\partial t} & = m_2(t,x,y)(2\beta - 2\mu) + \varkappa\mathcal{L}_{ax} m_2(t,x,y) \\ & \quad + \varkappa\mathcal{L}_{ay} m_2(t,x,y) + k\big(m_1(t,x) + m_1(t,y)\big) \\ & \quad - \varkappa\big(a(y-x)m_1(t,x) + a(y-x)m_1(t,y)\big) \ , \\ m_2(0,x,y) & = \big(En(0,x)\big)^2 \ . \end{cases} \tag{2.13}$$

Вывод дифференциального уравнения второго момента численностей частиц. Объединим полученные выше уравнения для случаев $x = y$ и $x \neq y$ и найдем общее дифференциальное уравнение для второго момента случайной величины $n(t,x)$. Для начала заметим, что для фиксированного момента времени t число частиц $n(t,x)$ пространственно однородно, поэтому можно записать

$$m_2(t,x,y) = m_2(t,x-y) = m_2(t,u).$$

Таким образом, относительно $u = x - y$ получаем дифференциальное уравнение для второго момента

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_2(t,u)}{\partial t} & = 2m_2(t,u)\big(\beta - \mu\big) + 2\varkappa\mathcal{L}_{au} m_2(t,u) + 2\varkappa a(u)\Phi(m_1) \\ & \quad + \delta_0(u)\Psi(m_1) \ , \\ m_2(0,u) & = \big(En(0,u)\big)^2(1 - \delta_0(u)) + \delta_0(u)En^2(0,u) \ , \end{cases}$$

где функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ известны, причем они зависят линейно от первого момента.

Воспользовавшись результатом, полученным для первого момента в 2.2.3 (в уравнении (2.11) подставим асимптотическое поведение первого момента поля частиц), имеем окончательное дифференциальное уравнение для второго момента:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_2(t,u)}{\partial t} & = 2m_2(t,u)\big(\beta - \mu\big) + 2\varkappa\mathcal{L}_{au} m_2(t,u) + \frac{2k^2}{\mu-\beta} - \frac{2\varkappa k a(u)}{\mu-\beta} \\ & \quad + \delta_0(u)\frac{k\left(2\mu + \sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)(n-2)b_n\right)}{\mu-\beta} \ , \\ m_2(0,u) & = \big(En(0,u)\big)^2(1 - \delta_0(u)) + \delta_0(u)En^2(0,u) \ . \end{cases} \tag{2.14}$$

Асимптотическое поведение второго момента численностей частиц. Следующая задача состоит в том, чтобы найти решение уравнения (2.14). Для этого разобьем исходное уравнение на три уравнения и будем искать решение каждого из этих уравнений отдельно. Тогда решением исходного уравнения будет сумма решений этих трех уравнений.

Пусть решением первого уравнения будет функция $m_{2,1}(t,u)$ и уравнение имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_{2,1}(t,u)}{\partial t} & = 2m_{2,1}(t,u)\big(\beta - \mu\big) + 2\varkappa\mathcal{L}_{au} m_{2,1}(t,u) \ , \\ m_{2,1}(0,u) & = \big(En(0,u)\big)^2(1 - \delta_0(u)) + \delta_0(u)En^2(0,u) \ . \end{cases} \tag{2.15}$$

Для второго уравнения решением будет функция $m_{2,2}(t,u)$ и уравнение имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_{2,2}(t,u)}{\partial t} &= 2m_{2,2}(t,u)\big(\beta-\mu\big) + 2\varkappa\mathcal{L}_{au}m_{2,2}(t,u) + \frac{2k^2}{\mu-\beta} \ , \\ m_{2,2}(0,u) &= 0 \ . \end{cases} \tag{2.16}$$

Третье уравнение имеет решение $m_{2,3}(t,u)$ и имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_{2,3}(t,u)}{\partial t} &= 2m_{2,3}(t,u)\big(\beta-\mu\big) + 2\varkappa\mathcal{L}_{au}m_{2,3}(t,u) - \frac{2\varkappa ka(u)}{\mu-\beta} \\ & \quad +\delta_0(u)\frac{k\left(2\mu+\sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)(n-2)b_n\right)}{\mu-\beta} \ , \\ m_{2,3}(0,u) &= 0 \ . \end{cases} \tag{2.17}$$

Тогда верно следующее представление для решения уравнения для второго момента

$$m_2(t,u) = m_{2,1}(t,u) + m_{2,2}(t,u) + m_{2,3}(t,u).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_2(t,u)}{\partial t} &= \frac{\partial m_{2,1}(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial m_{2,2}(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial m_{2,3}(t,u)}{\partial t} \\ &= 2m_{2,1}(t,u)\big(\beta-\mu\big) + 2\varkappa\mathcal{L}_{au}m_{2,1}(t,u) + 2m_{2,2}(t,u)\big(\beta-\mu\big) \\ &\quad + 2\varkappa\mathcal{L}_{au}m_{2,2}(t,u) + \frac{2k^2}{\mu-\beta} + 2m_{2,3}(t,u)\big(\beta-\mu\big) + 2\varkappa\mathcal{L}_{au}m_{2,3}(t,u) \\ &\quad - \frac{2\varkappa ka(u)}{\mu-\beta} + \delta_0(u)\frac{k\big(2\mu+\sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)(n-2)b_n\big)}{\mu-\beta} \\ &= 2\big(\beta-\mu\big)\big(m_{2,1}(t,u) + m_{2,2}(t,u) + m_{2,3}(t,u)\big) \\ &\quad + \mathcal{L}_{au}\big(m_{2,1}(t,u) + m_{2,2}(t,u) + m_{2,3}(t,u)\big) + \frac{2k^2}{\mu-\beta} \\ &\quad - \frac{2\varkappa ka(u)}{\mu-\beta} + \delta_0(u)\frac{k\big(2\mu+\sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)(n-2)b_n\big)}{\mu-\beta} \\ &= 2\big(\beta-\mu\big)m_2(t,u) + \mathcal{L}_{au}m_2(t,u) + \frac{2k^2}{\mu-\beta} - \frac{2\varkappa ka(u)}{\mu-\beta} \\ &\quad + \delta_0(u)\frac{k\big(2\mu+\sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)(n-2)b_n\big)}{\mu-\beta} \end{aligned}$$

Рассмотрим первое уравнение (2.15). Для его решения применим формулу Фейнмана-Каца. Для начала приведем утверждение (см. [4])

Утверждение 2.2.1. Пусть $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$, $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, причем функция q ограничена снизу. Положим

$$v(t,x) = E^x\left[exp\left(\int\limits_0^t q(X_s)ds\right)f(X_t)\right].$$

Тогда
$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad v(0,x) = f(x).$$

Здесь X_t процесс Ито, а A — его производящий оператор.

Тогда решение первого уравнения $m_{2,1}(t,u)$ имеет вид

$$\begin{aligned} m_{2,1}(t,u) &= \mathsf{E}\Big[e^{-\int\limits_0^t -2(\beta-\mu)ds}\Big(\big(En(0,u)\big)^2(1-\delta_0(u)) + \delta_0(u)\mathsf{E}n^2(0,u)\Big)\Big] = \\ &= e^{2(\beta-\mu)t}\mathsf{E}\Big[\big(\mathsf{E}n(0,u)\big)^2(1-\delta_0(u)) + \delta_0(u)\mathsf{E}n^2(0,u)\Big], \end{aligned} \tag{2.18}$$

где $\mathsf{E}n(0,u)$ и $\mathsf{E}n^2(0,u)$ — константы, не зависящие от точки решетки $u \in \mathbb{Z}^d$. Заметим, что в случае когда $\mu > \beta$, решение первого уравнения стремится к нулю при $t \to \infty$.

Теперь найдем решение для второго уравнения (2.16). Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением, поэтому его решение $m_{2,2}(t,u)$ находится как сумма решения однородного уравнения и частного решения. Тогда решение уравнения для $m_{2,2}(t,u)$ имеет вид

$$m_{2,2}(t,u) = \frac{k^2}{(\mu-\beta)^2}\Big(1 - e^{2(\beta-\mu)t}\Big) \ . \tag{2.19}$$

При стремлении t к бесконечности, получаем, что решение стремится к квадрату первого момента:
$$m_{2,2}(t,u) \to \frac{k^2}{(\mu-\beta)^2}, \quad t \to \infty.$$

Наконец, найдем решение третьего уравнения (2.17) для функции $m_{2,3}(t,u)$. Для этого нам понадобится дискретное преобразование Фурье (1.9). Для удобства напомним его формулу

$$\widehat{f}(\theta) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} e^{i(\theta,u)} f(\theta), \qquad \theta \in [-\pi,\pi]^d \ .$$

В уравнении (2.16) встречается следующее слагаемое

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{au} m_{2,3}(t,u) &= \sum_{z \neq 0} a(z)\big(m_{2,3}(t,u+z) - m_{2,3}(t,u)\big) \\ &= \sum_{z \neq 0} a(z) m_{2,3}(t,u-z) - m_{2,3}(t,u) \ . \end{aligned}$$

Данное выражение является сверткой функций $a(z)$ и $m_{2,3}(t,u)$. Таким образом, применив дискретное преобразование Фурье к данному слагаемому, получаем

$$\widehat{\mathcal{L}_{au} m_{2,3}}(t,\theta) = \widehat{a}(\theta)\widehat{m_{2,3}}(t,\theta).$$

Применим дискретное преобразование Фурье (1.9) для дифференциального уравнения (2.16). Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{m}_{2,3}(t,\theta)}{\partial t} & = 2\widehat{m}_{2,3}(t,\theta)[\beta-\mu] + 2\varkappa\widehat{a}(\theta)\widehat{m}_{2,3}(t,\theta) \\ & \quad -\frac{2\varkappa k\widehat{a}(\theta)}{\mu-\beta} + \frac{k\left(2\mu+\sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)(n-2)b_n\right)}{\mu-\beta} \ , \\ \widehat{m_{2,3}}(\theta,0) & = 0 \ . \end{cases}$$

Решаем это уравнение как обыкновенное дифференциальное уравнение и получаем решение:

$$\widehat{m}_{2,3}(t,\theta) = \frac{-\frac{2\varkappa k\widehat{a}(\theta)}{\mu-\beta} + \frac{k\left(2\mu+\sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)(n-2)b_n\right)}{\mu-\beta}}{2(\beta-\mu)+2\varkappa\widehat{a}(\theta)}\left(e^{(2(\beta-\mu)+2\varkappa\widehat{a}(\theta))t}-1\right) \ .$$

Перейдем к пределу при $t\to\infty$. Следовательно,

$$\widehat{m}_{2,3}(t,\theta) \to \widehat{m}_{2,3}(\theta) = -\frac{-\frac{2\varkappa k\widehat{a}(\theta)}{\mu-\beta} + \frac{k\left(2\mu+\sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)(n-2)b_n\right)}{\mu-\beta}}{2(\beta-\mu)+2\varkappa\widehat{a}(\theta)} \ .$$

Таким образом, получаем

$$-\widehat{m}_{2,3}(\theta) = -\frac{C_1\widehat{a}(\theta)+C_2}{C_3-C_4\widehat{a}(\theta)} \ , \tag{2.20}$$

где

$$C_1 = \frac{k\varkappa}{\mu-\beta}; \quad C_2 = \frac{-k\left(\mu+\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{(n-1)(n-2)}{2}b_n\right)}{\mu-\beta}; \quad C_3 = \mu-\beta; \quad C_4 = \varkappa.$$

Из (2.20) получаем

$$-\widehat{m}_{2,3}(\theta) = \frac{C_1}{C_4} + \left(\frac{C_1C_3+C_2C_4}{C_4^2}\right)\frac{1}{\frac{C_3}{C_4}-\widehat{a}(\theta)} \ .$$

Замечание 2.2.1. Имеют место следующие равенства

1. дискретное преобразование Фурье дельта-функции равно

$$\widehat{\delta_0}(\theta) = 1;$$

2. если $\left|\frac{C_4}{C_3}\widehat{a}(\theta)\right| < 1$, то

$$\frac{1}{\frac{C_3}{C_4}-\widehat{a}(\theta)} = \frac{C_4}{C_3}\frac{1}{1-\frac{C_4}{C_3}\widehat{a}(\theta)} = \frac{C_4}{C_3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_4}{C_3}\right)^n[\widehat{a}(\theta)]^n\right).$$

Тогда, используя обратное преобразование Фурье (1.10), получаем
$$-m_{2,3}(u) = -\frac{C_1}{C_4}\delta_0(u) + \left(\frac{C_1}{C_4} + \frac{C_2}{C_3}\right)\left(\delta_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_4}{C_3}\right)^n a^{*(n)}(u)\right) \ .$$
Здесь $a^{*(n)}(u)$ - n-кратная свертка функции $a(z)$, то есть $a^{*(n)}(u) = (\underbrace{a * \ldots * a}_{n})(u)$.

Подставив выражения для коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4, получим, что
$$\begin{aligned} m_{2,3}(u) = \frac{k}{\mu-\beta}\delta_0(u) + \frac{k}{(\mu-\beta)^2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{2}b_n\right) \\ \times\left(\delta_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varkappa}{\mu-\beta}\right)^n a^{*(n)}(u)\right) \ . \end{aligned} \tag{2.21}$$
Объединяя результаты из (2.18), (2.19), (2.21), получаем
$$m_2(t,u) = m_{2,1}(t,u) + m_{2,2}(t,u) + m_{2,3}(t,u) \ .$$
Тогда
$$\begin{aligned} m_2(t,u) \to \frac{k^2}{(\mu-\beta)^2} + \frac{k}{\mu-\beta}\delta_0(u) + \frac{k}{(\mu-\beta)^2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{2}b_n\right) \\ \times\left(\delta_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varkappa}{\mu-\beta}\right)^n a^{*(n)}(u)\right), \quad t\to\infty \ . \end{aligned}$$
Выше мы рассматривали случай, когда $\left|\frac{C_4}{C_3}\widehat{a}(\theta)\right| < 1$. Оказывается, что можно представить данную формулу иначе, убрав ограничения на коэффициенты. Заметим, что
$$\widehat{a}(\theta) = \sum_u a(u)e^{\imath(\theta,u)} = \sum_u a(u)\cos(\theta,u) = \sum_{u\neq 0} a(u)\cos(\theta,u) - 1 = A(\theta) - 1.$$
при этом $|A(\theta)| \leqslant 1$.

Тогда, положив
$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{1}{C},$$
получаем
$$\frac{1}{\frac{1}{C} - \widehat{a}(\theta)} = \frac{C}{1 - C\widehat{a}(\theta)} = \frac{C}{1 - C(A(\theta)-1)} = \frac{C}{(C+1) - CA(\theta)} = \frac{C}{C+1}\frac{1}{1 - \frac{C}{C+1}A(\theta)}.$$
Отсюда $\frac{C}{C+1} < 1$, следовательно, $\left|\frac{C}{C+1}A(\theta)\right| < 1$. Тогда
$$\frac{C}{C+1}\frac{1}{1-\frac{C}{C+1}A(\theta)} = \frac{C}{C+1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{C}{C+1}\Big)^n A^n(\theta)\right).$$

Таким образом, для $m_{2,3}(u)$ получаем выражение:

$$m_{2,3}(u) = \frac{k}{\mu-\beta}\delta_0(u) + \frac{k}{(\varkappa+\mu-\beta)(\mu-\beta)}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{2}b_n\right)$$
$$\times \quad \left(\delta_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\varkappa}{\varkappa+\mu-\beta}\Big)^n (a+\delta_0)(u)^{*(n)}\right).$$

Объединив все результаты получаем, что при $t \to \infty$

$$m_2(t,u) \to \frac{k^2}{(\mu-\beta)^2} + \frac{k}{\mu-\beta}\delta_0(u) + \frac{k}{(\varkappa+\mu-\beta)(\mu-\beta)}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{2}b_n\right)$$
$$\times \quad \left(\delta_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\varkappa}{\varkappa+\mu-\beta}\Big)^n (a+\delta_0)(u)^{*(n)}\right).$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2.2.1. *Пусть для ВСБ с одним типом частиц выполнено условие*

$$\beta = \sum_n (n-1)b_n < \mu, \quad k > 0.$$

Тогда асимптотическое поведение второго момента численностей частиц $m_2(t,x,y)$ при $t \to \infty$ имеет вид

$$m_2(t,x,y) \to \frac{k^2}{(\mu-\beta)^2} + \frac{k}{\mu-\beta}\delta_0(x-y) + \frac{k}{(\varkappa+\mu-\beta)(\mu-\beta)}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{2}b_n\right)$$
$$\times \quad \left(\delta_0(x-y) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\varkappa}{\varkappa+\mu-\beta}\Big)^n (a+\delta_0)(x-y)^{*(n)}\right),$$

где $f^{*(n)}(u) = (\underbrace{f * \ldots * f}_{n})(u)$ — n-кратная свертка функции $f(u)$.

2.2.5 Старшие моменты численностей частиц

Определим корреляционную функцию порядка r:

$$m_r(t, x_1, ..., x_r) = \mathsf{E}\Big[\prod_{i=1}^{r} n(t, x_i)\Big].$$

Обозначим через $\mathbf{1}_A$ — индикатор события A. Получим дифференциальное уравнение для n-ой корреляционной функции. Для этого рассмотрим приращение функции за малое время dt и воспользуемся соотношениями (2.1)–(2.6), (2.8) и (2.9):

$$m_r(t+dt,x_1,...,x_r) = \mathsf{E}\Big[\prod_{i=1}^{r} n(t+dt,x_i)\Big] = \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big[\prod_{i=1}^{r} n(t+dt,x_i)\Big]|\mathcal{F}_{\le t}\Big]$$
$$= \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big[\prod_{i=1}^{r}(n(t,x_i)+\xi(dt,x_i))\Big]|\mathcal{F}_{\le t}\Big].$$

Отсюда получаем, что

$$m_r(t+dt,x_1,...,x_r) = m_r(t,x_1,...,x_r) + \sum_{i=1}^{r}\mathsf{E}\Big[\prod_{j=1,j\neq i}^{r}[n(t,x_j)\mathsf{E}[[\xi(dt,x_i)]|\mathcal{F}_{\le t}]]\Big]$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=2}^{r}\mathsf{E}\Big[\prod_{x_j\neq x_i}[n(t,x_j)\mathsf{E}[[(\xi(dt,x_i))^p]|\mathcal{F}_{\le t}]]\Big]\mathbf{1}_{A(p,x_i)}$$
$$+\sum_{\substack{i,j=1,\\ x_i\neq x_j}}^{r}\sum_{\substack{p,q>0:\\ 2\le p+q\le r}}\mathsf{E}\Big[\prod_{x_k:x_k\neq x_i,x_j}[n(t,x_k)\mathsf{E}[[(\xi(dt,x_i))^p(\xi(dt,x_j))^q]\mathcal{F}_{\le t}]]\Big]\mathbf{1}_{A(p,x_i)}\mathbf{1}_{A(q,x_j)}\ .$$

Подставив равенства (2.1)—(2.6) из раздела 2.2.2, имеем

$$m_r(t+dt,x_1,...,x_r) = m_r(t,x_1,...,x_r) + \sum_{i=1}^{r}\mathsf{E}\Big[\prod_{j=1,j\neq i}^{r}\Big[n(t,x_j)\Big[\sum_{s=2}^{\infty}(s-1)b_s n(t,x_i)dt + kdt$$
$$+\sum_{z\neq 0}a(z)n(t,x_i+z)dt - (\mu+\varkappa)n(t,x_i)dt\Big]\Big]\Big] + \sum_{i=1}^{r}\sum_{p=2}^{r}\mathsf{E}\Big[\prod_{x_j\neq x_i}n(t,x_j)$$
$$\times\Big[\sum_{s=2}^{\infty}(s-1)^p b_s n(t,x_i)dt + kdt + \varkappa\sum_{z\neq 0}a(z)n(t,x_i+z)dt + (-1)^p(\mu+\varkappa)$$
$$\times n(t,x_i)dt\Big]\Big]\mathbf{1}_{A(p,x_i)} + \sum_{\substack{i,j=1,\\ x_i\neq x_j}}^{r}\sum_{\substack{p,q>0:\\ 2\le p+q\le r}}\mathsf{E}\Big[\prod_{x_k:x_k\neq x_i,x_j}n(t,x_k)\Big[(-1)^p\varkappa a(x_j-x_i)n(t,x_i)$$
$$\times dt + (-1)^q\varkappa a(x_i-x_j)n(t,x_j)dt\Big]\Big]\mathbf{1}_{A(p,x_i)}\mathbf{1}_{A(q,x_j)}.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$
\begin{aligned}
m_r(t+dt,x_1,...,x_r) &= m_r(t,x_1,...,x_r) + r[\beta-\mu]m_r(t,x_1,..,x_r)dt \\
&+ k\sum_{i=1}^{r} m_{r-1}(t,x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_r)dt + \varkappa\sum_{i=1}^{r}\mathcal{L}_{ax_i}m_r(t,x_1,...,x_r)dt \\
&+ \sum_{i=1}^{r}\sum_{p=2}^{r}\Big[m_{r-p+1}(t,x_i,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-p})\Big[\sum_{s=2}^{\infty}(s-1)^p b_s + (-1)^p\mu\Big]dt \\
&+ km_{r-p}(t,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-p})dt + \varkappa\mathcal{L}_{ax_i}m_{r-p+1}(t,x_i,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-p})dt \\
&+ (1+(-1)^p)\varkappa m_{r-p+1}(t,x_i,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-p})dt\Big]\mathbf{1}_{A(p,x_i)} \\
&+ \sum_{x_i\neq x_j}\sum_{\substack{p,q>0:\\ 2\le p+q\le r}}\Big[m_{r-(p+q)+1}(t,x_i,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-(p+q)})(-1)^p\varkappa a(x_j-x_i)dt \\
&+ m_{r-(p+q)+1}(t,x_j,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-(p+q)})(-1)^q\varkappa a(x_i-x_j)dt\Big]\mathbf{1}_{A(p,x_i)}\mathbf{1}_{A(q,x_j)},
\end{aligned}
$$

где $A(p,x_i)$ есть следующее событие:

$A(p,x_i) = \{$последовательность $\{x_1,...x_r\}$ содержит ровно p одинаковых элементов $x_i\}$.

Отсюда получаем дифференциальное уравнение $m_r(t,x_1,...,x_r)$ и начальное условие

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial m_r(t,x_1,...,x_r)}{\partial t} = r\big(\beta-\mu\big)m_r(t,x_1,..,x_r) + k\sum\limits_{i=1}^{r} m_{r-1}(t,x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_r) \\
\quad +\varkappa\sum\limits_{i=1}^{r}\mathcal{L}_{ax_i}m_r(t,x_1,...,x_r) + \sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{p=2}^{r}\Big[m_{r-p+1}(t,x_i,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-p}) \\
\quad \times\Big[\sum_{s=2}^{\infty}(s-1)^p b_s + (-1)^p\mu\Big] + km_{r-p}(t,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-p}) \\
\quad +\varkappa\mathcal{L}_{ax_i}m_{r-p+1}(t,x_i,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-p}) + (1+(-1)^p)\varkappa \\
\quad \times m_{r-p+1}(t,x_i,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-p})dt\Big]\mathbf{1}_{A(p,x_i)} \\
\quad + \sum\limits_{x_i\neq x_j}\sum\limits_{\substack{p,q>0:\\ 2\le p+q\le r}}\Big[m_{r-(p+q)+1}(t,x_i,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-(p+q)})(-1)^p\varkappa a(x_j-x_i) \\
\quad +m_{r-(p+q)+1}(t,x_j,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-(p+q)})(-1)^q\varkappa a(x_i-x_j)\Big]\mathbf{1}_{A(p,x_i)}\mathbf{1}_{A(q,x_j)}\ , \\
m_r(0,x_1,...,x_r) = \sum\limits_{\substack{p_1,...,p_r:\\ p_1+...+p_r=r}}\mathsf{E}\Big[\prod\limits_{i=1}^{r} n(0,x_i)^{p_i}\prod\limits_{i=1}^{r}\mathbf{1}_{A(p_i,x_i)}\Big]\ .
\end{cases}
$$

Здесь запись $m_{r-p+1}(t,x_i,\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-p})$ означает, что при суммировании по i нет точек x_i в множестве $\{\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{r-p}\}$.

2.2.6 Замечание о производящей функции

Производящая функция используется для получения моментов случайной величины. Определим производящую функцию следующим образом:

$$\begin{cases} F_\infty(z,t,x) = Ee^{-zn(t,x)} \\ F_\infty(z,0,x) = Ee^{-zn(0,x)} \end{cases}, \quad z \geqslant 0.$$

Приведем вывод дифференциального уравнения для производящей функции, которая упрощает получение моментной последовательности для поля частиц $n(t,x)$ и сравним с ранее полученными результатами для дифференциальных уравнений моментов.

Вычислим величину $F_\infty(z,t+dt,x)$ и получим дифференциальное уравнение для функции $F_\infty(z,t,x)$.

$$\begin{aligned} F_\infty(z,t+dt,x) &= \mathsf{E}e^{-zn(t+dt,x)} = \mathsf{E}e^{-zn(t,x)}e^{-z\xi(dt,x)} = \mathsf{E}\Big(\mathsf{E}(e^{-zn(t,x)}e^{-z\xi(dt,x)}|\mathcal{F}_{\leqslant t})\Big) \\ &= \mathsf{E}\Big(e^{-zn(t,x)}\Big(\mathsf{E}(e^{-z\xi(dt,x)}|\mathcal{F}_{\leqslant t})\Big)\Big) . \end{aligned}$$

Подставим значение из (2.7). Тогда

$$\begin{aligned} F_\infty(z,t+dt,x) = \mathsf{E}\Big(& e^{-zn(t,x)}\Big(\sum_{n\geqslant 2} e^{-z(n-1)}b_n n(t,x)dt + e^{-z}\Big(kdt + \varkappa\sum_{y\neq 0} a(y)n(t,x+y)dt\Big) \\ & + e^{z}(\mu+\varkappa)n(t,x)dt + \Big(1 - \sum_{n\geqslant 2} b_n n(t,x)dt - kdt - \varkappa\sum_{y\neq 0} a(y)n(t,x+y)dt \\ & - \mu n(t,x)dt - \varkappa n(t,x)dt\Big)\Big)\Big). \end{aligned}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} F_\infty(z,t+dt,x) = F_\infty(z,t,x) + dt\mathsf{E}\Big(& e^{-zn(t,x)}\Big(\sum_{n\geqslant 2} b_n n(t,x) + ke^{-z} + \varkappa e^{-z}\sum_{y\neq 0} a(y)n(t,x+y) \\ & + e^{z}(\mu+\varkappa)n(t,x) - \sum_{n\geqslant 2} b_n n(t,x) - k - \varkappa\sum_{y\neq 0} a(y)n(t,x+y) \\ & - \mu n(t,x) - \varkappa n(t,x)\Big)\Big). \end{aligned}$$

Следовательно, разделив обе части на dt, имеем

$$\begin{aligned} \frac{F_\infty(z,t+dt,x) - F_\infty(z,t,x)}{dt} = E\Big(& e^{-zn(t,x)}\Big(\sum_{n\geqslant 2}(e^{-z(n-1)} - 1)b_n n(t,x) + (e^{-z}-1)k \\ & + (e^{z}-1)(\mu+\varkappa)n(t,x) + (e^{-z}-1)\sum_{y\neq 0} a(y)n(t,x+y)\Big)\Big). \end{aligned}$$

Замечание 2.2.2. Заметим, что

1. $\dfrac{F_\infty(z,t+dt,x)-F_\infty(z,t,x)}{dt} \underset{dt\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{\partial F_\infty(z,t,x)}{\partial t}$;

2. $\mathsf{E}\Big(e^{-zn(t,x)}n(t,x)\Big) = -\dfrac{\partial F_\infty(z,t,x)}{\partial z}$.

Получаем дифференциальное уравнение для производящей функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_\infty(z,t,x)}{\partial t} & = \dfrac{\partial F_\infty(z,t,x)}{\partial z}\Big(\sum\limits_{n\geqslant 2}\big(1-e^{-z(n-1)}\big)b_n + \big(1-e^{z}\big)(\mu+\varkappa)\Big) + kF_\infty(z,t,x) \\ & \quad \times\Big(e^{-z}-1\Big) + E\Big(e^{-zn(t,x)}\big(e^{-z}-1\big)\sum\limits_{y\neq 0} a(y)n(t,x+y)\Big)\ , \\ F_\infty(z,0,x) & = Ee^{-zn(0,x)}\ . \end{cases} \tag{2.22}$$

Как упоминалось выше, производящая функция является удобным инструментом для получения моментов случайной величины $n(t,x)$. С помощью нее получим уравнения для первых двух моментов случайной величины

$$m_1(t,x) = -\frac{\partial F_\infty(z,t,x)}{\partial t}\bigg|_{z=0}\ , \quad m_2(t,x,x) = \frac{\partial^2 F_\infty(t,x,y)}{\partial t^2}\bigg|_{z=0}\ .$$

Сравним с полученными результатами из разделов 2.2.3 и 2.2.4. Уравнение для первого момента может быть получено из

$$\frac{\partial^2 F_\infty(z,t,x)}{\partial z \partial t}\bigg|_{z=0} = -\frac{\partial m_1(t,x)}{\partial t}\ .$$

Отсюда и из соотношения (2.22) получим для левой части последнего уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_\infty(z,t,x)}{\partial z}\bigg|_{z=0}\Big(\sum_{n\geqslant 2}(n-1)b_n - \mu - \varkappa\Big) + kF_\infty(0,t,x)(-1) \\ &+ \varkappa\mathsf{E}\sum_{y\neq 0} a(y)n(t,x+y)(-1) = -m_1(t,x)(\beta-\mu) + \varkappa m_1(t,x) \\ &- k - \varkappa\sum_{y\neq 0} a(y)m_1(t,x+y)\ . \end{aligned}$$

Начальное условие примет вид:

$$m_1(0,x) = En(0,x)\ .$$

Тогда получаем задачу Коши для первого момента

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_1(t,x)}{\partial t} & = (\beta-\mu)m_1(t,x) + \varkappa\mathcal{L}_a m_1(t,x) + k\ , \\ m_1(0,x) & = En(0,x)\ . \end{cases}$$

Аналогично для второго момента получаем уравнение

$$\left.\frac{\partial^3 F_\infty(z,t,x)}{\partial z^2 \partial t}\right|_{z=0} = m_2(t,x,x) \ .$$

Тогда в левой части дифференциального уравнения, используя соотношение (2.22), имеем:

$$2\left.\frac{\partial^2 F_\infty(z,t,x)}{\partial z^2}\right|_{z=0}\Big(\sum_{n\geqslant 2}(n-1)b_n-\mu-\varkappa\Big)+\left.\frac{\partial F_\infty(z,t,x)}{\partial z}\right|_{z=0}\Big(-\sum_{n\geqslant 2}(n-1)^2 b_n$$
$$-\mu-\varkappa\Big)+2k\left.\frac{\partial F_\infty(z,t,x)}{\partial z}\right|_{z=0}(-1)+kF_\infty(0,t,x)+\varkappa\mathsf{E}\Big(\sum_{y\neq 0}a(y)n(t,x+y)$$
$$\times\Big(2e^{-zn(t,x)}n(t,x)+e^{-zn(t,x)}\Big)\Big)|_{z=0}=2(\beta-\mu)m_2(t,x,x)-2\varkappa m_2(t,x,x)$$
$$+m_1(t,x)\Big(\sum_{n\geqslant 2}(n-1)^2 b_n+\mu+\varkappa\Big)+2km_1(t,x)+k+2\varkappa\sum_{y\neq 0}a(y)m_2(t,x,x+y)$$
$$+\varkappa\sum_{y\neq 0}a(y)m_1(t,x+y)=2(\beta-\mu)m_2(t,x,x)+2\varkappa\mathcal{L}_{ax}m_2(t,x,x)+k+m_1(t,x)$$
$$\times\Big(\sum_{n\geqslant 2}(n-1)^2 b_n+\mu+2\varkappa+2k\Big)+\varkappa\mathcal{L}_a m_1(t,x) \ .$$

Начальное условие примет вид

$$m_2(t,x,x)=En^2(0,x) \ .$$

Следовательно,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial m_2(t,x,x)}{\partial t} & =2(\beta-\mu)m_2(t,x,x)+2\varkappa\mathcal{L}_{ax}m_2(t,x,x)+k \\ & +m_1(t,x)\Big(\sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)^2 b_n+\mu+2\varkappa+2k\Big)+\varkappa\mathcal{L}_a m_1(t,x) \ , \\ m_2(0,x,x) & =En^2(0,x) \ .\end{cases}$$

Как видно из результатов разделов 2.2.3 и 2.2.4, данные уравнения полностью совпали с полученными в текущем разделе. Таким образом, использование производящей функции упростило получение дифференциальных уравнений. Однако с помощью производящей функции нельзя получить дифференциальные уравнения для моментов выше второго порядка ввиду их определения.

Момент порядка r был введен следующим образом:

$$m_r(t,x_1,\ldots,x_r)=E\Big(\prod_{i=1}^{r}n(t,x_i)\Big).$$

С помощью производящей функции можно получить дифференциальные уравнения только для моментов случайных величин

$$m_r(t,x) = E\big(n^r(t,x)\big).$$

Такие уравнения нельзя решать, так как в правой части дифференциального уравнения будут появляться корреляционные функции, зависящие от других точек решетки $\mathbb{Z}^d$.

2.3 Устойчивость процесса по Ляпунову

В разделах 2.2.3 и 2.2.4 были получены выражения для первых двух моментов в однородном случае, то есть когда интенсивности β, μ, k — постоянные, где $\beta = \sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)b_n$ и $\beta < \mu$, $k > 0$. Также были найдены предельные значения для первых двух моментов при $t \to \infty$. Покажем, что два первых момента являются устойчивыми в отношении небольших возмущений по норме L^∞, то есть рассматриваемая модель является устойчивой в сильном смысле по Ляпунову. В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

Определение 2.3.1. *[2, гл. 3,§ 10] Будем говорить, что дифференциальные уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = g(t,y)$$

***асимптотически эквивалентны**, если между решениями из $x(t)$ и $y(t)$ можно установить взаимно-однозначное соответствие, такое что*

$$\lim_{t\to\infty}[x(t) - y(t)] = 0.$$

Для изучения устойчивости процесса по Ляпунову, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.3.1. *Рассмотрим параболическую задачу*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} & = \mathcal{L}_a u(t,x) - v(x)u(t,x) + f(t,x), \\ u(0,x) & = u_0(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d, \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

Пусть функции $v(x)$, $u_0(x)$, $f(t,x)$ — ограниченные (первые две функции на $\mathbb{Z}^d$, $f(t,x)$ - на $[0,T]\times\mathbb{Z}^d$), $x(t)$ — симметричное случайное блуждание на $\mathbb{Z}^d$ с генератором $\mathcal{L}_a$. Тогда

$$u(t,x) = \mathsf{E}_x e^{-\int_0^t v\left(x(s)\right)ds} u_0(x(t)) + \mathsf{E}_x \int_0^t f\big(t-s, x(s)\big) e^{-\int_0^s v\left(x(\tau)\right)d\tau} ds.$$

Доказательство может быть найдено, например в [19]. Далее будем исследовать устойчивость процесса по Ляпунову для первого и второго моментов численностей частиц.

2.3.1 Первый момент численностей частиц

Для исследования устойчивости процесса по Ляпунову первого момента численностей частиц зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$\mu_0 - \beta_0 = v_0 > 0 \ ; \tag{2.23a}$$

$$k_0 > 0 \ ; \tag{2.23b}$$

$$u_0 > 0 \ ; \tag{2.23c}$$

$$\tilde{u}_0 > 0 \ ; \tag{2.23d}$$

$$v_0 - \varepsilon \leqslant v(x) \leqslant v_0 + \varepsilon \ ; \tag{2.23e}$$

$$k_0 - \varepsilon \leqslant k(x) \leqslant k_0 + \varepsilon \ ; \tag{2.23f}$$

$$u_0 - \varepsilon \leqslant u_0(x) \leqslant u_0 + \varepsilon \ ; \tag{2.23g}$$

$$\tilde{u}_0 - \varepsilon \leqslant u_0(x,y) \leqslant \tilde{u}_0 + \varepsilon \ . \tag{2.23h}$$

Рассмотрим уравнение для первого момента $m_1(t,x) = En(t,x)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_1(t,x)}{\partial t} & = \mathcal{L}_a m_1(t,x) - v(x) m_1(t,x) + k(x) \\ m_1(0,x) & = u_0(x) \end{cases}$$

В этом случае получаем теорему.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\varepsilon \leqslant \frac{\min(k_0,v_0)}{2}$. Тогда при выполнении условий (2.23a)-(2.23h) и для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$C_1^- \varepsilon + C_0^- e^{-(v_0+\varepsilon)t} \leqslant m_1(t,x) - \frac{k_0}{v_0} \leqslant C_1^+ \varepsilon + C_0^+ e^{-(v_0-\varepsilon)t},$$

где константы $C_0^\pm$, $C_1^\pm$ зависят только от k_0, v_0, u_0.

Замечание 2.3.1. Соотношение $\frac{k_0}{v_0} = \frac{k_0}{\mu_0 - \beta_0}$ — есть предельное значение $m_1(t,x)$ при $t \to \infty$ в случае постоянных функций β, μ, k, u_0.

Доказательство. Воспользуемся леммой 2.3.1.

1. Для оценки сверху воспользуемся предположениями (2.23e), (2.23f) and (2.23g):

$$\begin{aligned} m_1(t,x) &\leqslant (u_0+\varepsilon) e^{-(v_0-\varepsilon)t} + \int\limits_0^t (k_0+\varepsilon) e^{-(v_0-\varepsilon)s} ds \\ &= (u_0+\varepsilon) e^{-(v_0-\varepsilon)t} + \frac{k_0+\varepsilon}{v_0-\varepsilon}\Big(1 - e^{-(v_0-\varepsilon)t}\Big) \\ &= \frac{k_0+\varepsilon}{v_0-\varepsilon} + e^{-(v_0-\varepsilon)t}\Big(u_0 - \frac{k_0+\varepsilon}{v_0-\varepsilon}\Big) \\ &= \frac{k_0}{v_0} + O(\varepsilon) + e^{-(v_0-\varepsilon)t}\Big(u_0 - \frac{k_0}{v_0} + O(\varepsilon)\Big) \end{aligned}$$

2. Оценка снизу получается с использованием тех же предположений:

$$
\begin{aligned}
m_1(t,x) &\geqslant (u_0-\varepsilon)e^{-(v_0+\varepsilon)t} + \int_0^t (k_0-\varepsilon)e^{-(v_0+\varepsilon)s}ds \\
&= (u_0-\varepsilon)e^{-(v_0+\varepsilon)t} + \frac{k_0-\varepsilon}{v_0+\varepsilon}\Big(1-e^{-(v_0+\varepsilon)t}\Big) \\
&= \frac{k_0-\varepsilon}{v_0+\varepsilon} + e^{-(v_0+\varepsilon)t}\Big(u_0 - \frac{k_0-\varepsilon}{v_0+\varepsilon}\Big) \\
&= \frac{k_0}{v_0} + O(\varepsilon) + e^{-(v_0+\varepsilon)t}\Big(u_0 - \frac{k_0}{v_0} + O(\varepsilon)\Big)
\end{aligned}
$$

Отсюда следует утверждение теоремы. ■

Следствие 2.3.1. Решение дифференциального уравнения первого момента численностей частиц в случае постоянных интенсивностей рождения, гибели и иммиграции асимптотически эквивалентно решению дифференциального уравнения первого момента численностей частиц в случае непостоянных интенсивностей рождения, гибели и иммиграции.

Доказательство. В разделе 2.2.3 было доказано, что при $t \to \infty$ первый момент численности частиц в случае непостоянных коэффициентов стремится к $k/(\beta-\mu)$. Из теоремы 2.3.1 следует, что при $t \to \infty$ нижняя оценка неравенства

$$C_1^-\varepsilon + C_0^- e^{-(v_0+\varepsilon)t} \to 0$$

для $\varepsilon \to 0$ и $v_0 > 0$. Аналогично получаем оценку для верхней границы. Таким образом, получаем, что

$$m_1(t,x) - \frac{k_0}{v_0} \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

■

2.3.2 Второй момент численностей частиц

В случае для второго момента имеем два оператора $\mathcal{L}_{ax}$, $\mathcal{L}_{ay}$:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial m_2(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_{ax}m_2(t,x,y) + \mathcal{L}_{ay}m_2(t,x,y) - \big(v(x)+v(y)\big)m_2(t,x,y) \\
&\quad + k(x)m_1(t,y) + k(y)m_1(t,x) - \varkappa\big(a(x-y)m_1(t,x) \\
&\quad + a(y-x)m_1(t,y)\big) + \delta_x(y)\Big(m_1(t,x)\Big(2\mu(x) + \sum\limits_{n\geqslant 2}(n-1)(n-2)b_n(x)\Big) \\
&\quad + k(x) + \varkappa\mathcal{L}_a m_1(t,x)\Big) \\
m_2(0,x,y) &= u_0(x,y)
\end{cases}
$$

Положим

$$F(t,x)=m_1(t,x)\Bigg(\mu(x)+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^2 b_n(x)\Bigg)+k(x)+\varkappa\mathcal{L}_a m_1(t,x)\ \ ; \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} f(t,x,y)&=k(x)m_1(t,y)+k(y)m_1(t,x)+\delta_x(y)F(t,x)\\ &\qquad-\varkappa a(x-y)(m_1(t,y)+m_1(t,x))\ \ ; \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$V(x,y)=v(x)+v(y)\ \ . \tag{2.26}$$

Тогда уравнение для второго момента примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_2(t,x,y)}{\partial t} &=(\mathcal{L}_{ax}+\mathcal{L}_{ay})m_2(t,x,y)-V(x,y)m_2(t,x,y)+f(t,x,y)\ \ ,\\ m_2(0,x,y) &=u_0(x,y)\ \ . \end{cases}$$

Для данного уравнения рассмотрим на $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$ пару независимых случайных блужданий $x(t)$ и $y(t)$ с генераторами $\mathcal{L}_{ax}$ и $\mathcal{L}_{ay}$ соответственно, и применим лемму 2.3.1 для этой пары: $\big(x(t),y(t)\big)$. Получается, что

$$\begin{aligned} m_2(t,x,y)=\mathsf{E}_{(x,y)}e^{-\int\limits_0^t V\left(x(s),y(s)\right)ds}u_0\big(x(t),y(t)\big)\\ +\mathsf{E}_{(x,y)}\int_0^t f\big(t-s,x(s),y(s)\big)e^{-\int_0^s V\left(x(\tau),y(\tau)\right)d\tau}ds. \end{aligned}$$

Из (2.23e) и (2.26) следует, что

$$2(v_0-\varepsilon)\leqslant V(x,y)\leqslant 2(v_0+\varepsilon)\ \ .$$

Пусть

$$G(t,x,y):=\mathsf{E}_{(x,y)}e^{-\int\limits_0^t V\left(x(s),y(s)\right)ds}u_0\big(x(t),y(t)\big)\ \ ; \tag{2.27}$$

$$H(t,x,y):=\mathsf{E}_{(x,y)}\int\limits_0^t f\big(t-s,x(s),y(s)\big)e^{-\int\limits_0^s V\left(x(\tau),y(\tau)\right)d\tau}ds\ \ . \tag{2.28}$$

Тогда

$$m_2(t,x,y)=G(t,x,y)+H(t,x,y). \tag{2.29}$$

Получим оценку функции $G(t,x,y)$ из (2.27). Используя предположение (2.23h) получаем оценки снизу и сверху

$$\begin{aligned} G(t,x,y)&\leqslant\mathsf{E}_{(x,y)}e^{-\int_0^t 2(v_0-\varepsilon)ds}(u_0+\varepsilon)=e^{-2(v_0-\varepsilon)t}(\tilde{u}_0+\varepsilon);\\ G(t,x,y)&\geqslant\mathsf{E}_{(x,y)}e^{-\int_0^t 2(v_0+\varepsilon)ds}(u_0-\varepsilon)=e^{-2(v_0+\varepsilon)t}(\tilde{u}_0-\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.30}$$

Далее получим оценки сверху и снизу для функции $H(t,x,y)$ из (2.28). Для этого сначала рассмотрим $f(t,x,y)$, определенную в (2.25). Заметим, что верно соотношение

$$a(x-y) = \begin{cases} -1, & \text{если } x = y \\ \in [0,1], & \text{если } x \neq y \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$-a(x-y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \\ \in [-1,0], & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Тогда получим оценку сверху для функции $f(t,x,y)$. В силу предположений (2.23e) и (2.23f) и результатов, полученных для первого момента, получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &\leqslant (k_0+\varepsilon+\varkappa)\big(m_1(t,x)+m_1(t,y)\big)+\delta_x(y)F(t,x) \\ &= 2(k_0+\varepsilon+\varkappa)\left(\frac{k_0}{v_0}+C_1^+\varepsilon+C_0^+e^{-(v_0-\varepsilon)t}\right)+\delta_x(y)F(t,x). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Используя аналогичные свойства, оценка снизу имеет вид

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &\geqslant (k_0-\varepsilon-\varkappa)\big(m_1(t,x)+m_1(t,y)\big)+\delta_x(y)F(t,x) \\ &= 2(k_0-\varepsilon)\left(\frac{k_0}{v_0}+C_1^-\varepsilon+C_0^-e^{-(v_0+\varepsilon)t}\right) \\ &\quad -2\varkappa\left(\frac{k_0}{v_0}+C_1^+\varepsilon+C_0^+e^{-(v_0-\varepsilon)t}\right)+\delta_x(y)F(t,x). \end{aligned} \tag{2.32}$$

С помощью оценки (2.31) получим оценку сверху для функции $H(t,x,y)$:

$$\begin{aligned} H(t,x,y) \leqslant &\int\limits_0^t \delta_x(y)F(t-s,x)e^{-\int_0^t V\left(x(\tau),y(\tau)\right)d\tau}ds \\ &+2(k_0+\varepsilon+\varkappa)\int\limits_0^t\left(\frac{k_0}{v_0}+C_1^+\varepsilon+C_0^+e^{-(v_0-\varepsilon)(t-s)}\right)e^{-2(v_0-\varepsilon)s}ds \end{aligned}$$

Обозначим

$$L(t,x,y) = \int\limits_0^t \delta_x(y)F(t-s,x)e^{-\int\limits_0^t V\left(x(\tau),y(\tau)\right)d\tau}ds.$$

Подставим функцию $L(t,x,y)$ в оценку для $H(t,x,y)$:

$$
\begin{aligned}
H(t,x,y) \leqslant L(t,x,y) &+ \frac{(k_0+\varepsilon+\varkappa)\Big(\frac{k_0}{v_0}+C_1^+\varepsilon\Big)}{v_0-\varepsilon}\Big(1-e^{-2(v_0-\varepsilon)t}\Big) \\
&+ C_0^+ e^{-(v_0-\varepsilon)t} 2(k_0+\varepsilon+\varkappa)\frac{1}{v_0-\varepsilon}\Big(1-e^{-(v_0-\varepsilon)t}\Big) \\
&= L(t,x,y) + \frac{k_0(k_0+\varkappa)}{v_0^2} + O(\varepsilon) + \frac{2C_0^+(k_0+\varepsilon+\varkappa)}{v_0}e^{-(v_0-\varepsilon)t} \\
&- e^{-2(v_0-\varepsilon)t}\Big(\frac{k_0(k_0+\varkappa)}{v_0^2} + O(\varepsilon) + \frac{2C_0^+(k_0+\varkappa)}{v_0}\Big).
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Для оценки снизу воспользуемся соотношением (2.32)

$$
\begin{aligned}
H(t,x,y) \geqslant L(t,x,y) &+ 2(k_0-\varepsilon)\int_0^t \Big(\frac{k_0}{v_0} + C_1^-\varepsilon + C_0^- e^{-(v_0+\varepsilon)(t-s)}\Big)e^{-2(v_0+\varepsilon)s}ds \\
&- 2\varkappa\int_0^t \Big(\frac{k_0}{v_0} + C_1^+\varepsilon + C_0^+ e^{-(v_0-\varepsilon)(t-s)}\Big)e^{-2(v_0-\varepsilon)s}ds \\
&= L(t,x,y) + \frac{k_0-\varepsilon}{v_0+\varepsilon}\Big(\frac{k_0}{v_0}+C_1^-\varepsilon\Big)\Big(1-e^{-2(v_0+\varepsilon)t}\Big) \\
&+ \frac{2C_0^-(k_0-\varepsilon)}{v_0+\varepsilon}e^{-(v_0+\varepsilon)t}\Big(1-e^{-(v_0+\varepsilon)t}\Big) \\
&- \varkappa\Big(\frac{k_0}{v_0}+C_1^+\varepsilon\Big)\frac{1}{v_0-\varepsilon}\Big(1-e^{-2(v_0-\varepsilon)t}\Big) \\
&- \frac{2\varkappa C_0^+}{v_0-\varepsilon}e^{-(v_0-\varepsilon)t}\Big(1-e^{-(v_0-\varepsilon)t}\Big) \\
&= L(t,x,y) + \frac{k_0^2}{v_0^2} + O(\varepsilon) - e^{-2(v_0+\varepsilon)t}\Big(\frac{k_0^2}{v_0^2}+O(\varepsilon)\Big) \\
&+ \frac{2C_0^-k_0}{v_0}e^{-(v_0+\varepsilon)t} - \Big(\frac{2C_0^-k_0}{v_0}+O(\varepsilon)\Big)e^{-2(v_0+\varepsilon)t} \\
&- \frac{\varkappa k_0}{v_0^2} + \Big(\frac{\varkappa k_0}{v_0^2}+O(\varepsilon)\Big)e^{-2(v_0-\varepsilon)t} - \frac{2\varkappa C_0^+}{v_0}e^{-(v_0-\varepsilon)t} \\
&+ \Big(\frac{2\varkappa C_0^+}{v_0}+O(\varepsilon)\Big)e^{-2(v_0-\varepsilon)t}.
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

С помощью уравнений (2.23h), (2.30), (2.33) и (2.34) получим оценку для второго момента $m_2(t,x,y)$. Оценка сверху примет вид

$$\begin{aligned}
m_2(t,x,y) \leqslant{} & e^{-2(v_0-\varepsilon)t}(u_0+\varepsilon) + L(t,x,y) + \frac{k_0(k_0+\varkappa)}{v_0^2} \\
& + O(\varepsilon) + \frac{2C_0^+(k_0+\varepsilon+\varkappa)}{v_0}e^{-(v_0-\varepsilon)t} \\
& - e^{-2(v_0-\varepsilon)t}\left(\frac{k_0(k_0+\varkappa)}{v_0^2} + O(\varepsilon) + \frac{2C_0^+(k_0+\varkappa)}{v_0}\right) \\
={} & L(t,x,y) + \frac{k_0^2}{v_0^2} + \frac{k_0\varkappa}{v_0^2} + C_2^+ e^{-(v_0-\varepsilon)t} \\
& + \left(u_0 - \frac{k_0+\varkappa}{v_0}\left(2C_0^+ + \frac{k_0}{v_0}\right) + O(\varepsilon)\right)e^{-2(v_0-\varepsilon)t} + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Оценка снизу равна

$$\begin{aligned}
m_2(t,x,y) \geqslant{} & e^{-2(v_0+\varepsilon)t}(u_0-\varepsilon) + L(t,x,y) + \frac{k_0^2}{v_0^2} \\
& + O(\varepsilon) - e^{-2(v_0+\varepsilon)t}\Big(\frac{k_0^2}{v_0^2} + O(\varepsilon)\Big) + \frac{2C_0^-k_0}{v_0}e^{-(v_0+\varepsilon)t} \\
& - \Big(\frac{2C_0^-k_0}{v_0} + O(\varepsilon)\Big)e^{-2(v_0+\varepsilon)t} - \frac{\varkappa k_0}{v_0^2} + \frac{\varkappa k_0}{v_0^2}e^{-2(v_0-\varepsilon)t} \\
& - \frac{2\varkappa C_0^+}{v_0}e^{-(v_0-\varepsilon)t} + \frac{2\varkappa C_0^+}{v_0}e^{-2(v_0-\varepsilon)t}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$A \leqslant m_2(t,x,y) - L(t,x,y) - \frac{k_0^2}{v_0^2} \leqslant B,$$

где

$$\begin{aligned}
A &= C_2^- e^{-(v_0+\varepsilon)t} + C_3^- e^{-2(v_0+\varepsilon)t} + C_4^-\varepsilon - \frac{\varkappa k_0}{v_0^2}\Big(1 - e^{-2(v_0-\varepsilon)t}\Big); \\
B &= C_2^+ e^{-(v_0-\varepsilon)t} + C_3^+ e^{-2(v_0-\varepsilon)t} + C_4^+\varepsilon + \frac{\varkappa k_0}{v_0^2}\Big(1 - e^{-2(v_0-\varepsilon)t}\Big).
\end{aligned}$$

Верна теорема.

Теорема 2.3.2. *При выполнении условий* (2.23a)–(2.23h) *и для всех* $t \geqslant 0$ *верно неравенство*

$$A \leqslant m_2(t,x,y) - \int\limits_0^t \delta_x(y)F(t-s,x)e^{-\int\limits_0^t V\left(x(\tau),y(\tau)\right)d\tau}ds - \frac{k_0^2}{v_0^2} \leqslant B,$$

где

$$A = C_2^- e^{-(v_0+\varepsilon)t} + C_3^- e^{-2(v_0+\varepsilon)t} + C_4^- \varepsilon - \frac{\varkappa k_0}{v_0^2}\Big(1 - e^{-2(v_0-\varepsilon)t}\Big);$$
$$B = C_2^+ e^{-(v_0-\varepsilon)t} + C_3^+ e^{-2(v_0-\varepsilon)t} + C_4^+ \varepsilon + \frac{\varkappa k_0}{v_0^2}\Big(1 - e^{-2(v_0-\varepsilon)t}\Big),$$

$C_j^{\pm}$, $j = 2, 3, 4$ — *константы.*

2.4 Анализ дуальности моделей с разными начальными условиями

В работе [12] была рассмотрена модель ВСБ по целочисленной решетке с одним источником ветвления и одной начальной частицей. Предметом изучения являлись общее число частиц на решетке и локальное число частиц в каждом ее узле. В работе [18] была рассмотрена подобная модель ВСБ в предположение о том, что в начальный момент времени в каждой точке решетки находится по одной частице. Основным результатом стало то, что в этих моделях наблюдалась дуальность, связанная с тем, что дифференциальные уравнения для некоторых случайных величин в точности совпали для первых моментов, что привело к тому, что их решения эквивалентны. Однако ниже будет показано, что для старших моментов дуальность исчезает. Здесь будут рассмотрены дифференциальные уравнения для моментов второго порядка. Также будут рассмотрены те же самые модели, однако в источники будут добавлены процессы иммиграции. В этом случае будет проведено исследование на наличие дуальности в данных моделях.

2.4.1 Ветвящиеся случайные блуждания с одним источником ветвления и различными начальными условиями

Вначале будут рассматриваться две модели ВСБ по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$. В моделях предполагается наличие одного источника ветвления, без ограничения общности можем считать, что источник расположен в точке $x = 0 \in \mathbb{Z}^d$. Механизм ветвления задается инфинитезимальной производящей функцией

$$f(u) = \sum_i b_i u^i, \quad \sum_i b_i = 0, \quad b_i > 0 \quad \forall i \neq 1, \quad b_1 < 0$$

Блуждание задается оператором $\mathcal{A} = (a(x, y))$, который рассматривается в данной работе. Оператор случайного блуждания имеет вид

$$\mathcal{L}\psi(x) = \sum_{z \neq 0} a(z)\big[\psi(x+z) - \psi(x)\big].$$

Отличие моделей состоит не только в разных начальных условиях. В модели, изученной в [12], в начальный момент времени на решетке находится одна частица, которая блуждает по решетке до того момента, пока она не попадет в источник, где начинается процесс ветвления. Во второй модели в начальный момент времени в каждой точке решетки расположено по одной частице, однако ветвление также происходит только в одной точке — источнике. Далее для удобства будем использовать обозначения, предложенные авторами в [18].

Первая модель была полностью исследована в [12]. В этом случае для случайных величин μ_t — общее число частиц на решетке в момент времени t, и $\mu_t(y)$ — локальное число частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ в момент времени t, были получены уравнения для моментов, которые определяются как

$$m_n(t,x) = \mathsf{E}_x\mu_t, \quad m_n(t,x,y) = \mathsf{E}_x\mu_t(y).$$

Для второй модели, рассмотренной в [18], изучаются следующие величины:

1. $\eta_t(y)$ — число частиц в момент времени $t > 0$ в точке $y \in \mathbb{Z}^d$;
2. $\eta_{x,t}$ — субпопуляция частиц, порожденная начальной частице в точке $x \in \mathbb{Z}^d$;
3. $\eta_{x,t}(y)$ — число частиц из субпопуляции $\eta_{x,t}$, находящееся в точке $y \in \mathbb{Z}^d$.

При этом считается, что в начальный момент времени $t = 0$ введенные величины удовлетворяют следующим условиям:

$$\eta_0(y) = 1, \quad \eta_{x,0} = 1, \quad \eta_{x,0}(y) = \delta_x(y),$$

где $\delta_x(\cdot)$ - символ Кронекера:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Как было показано в [18], уравнения для $m_1(t,y)$ и $M_{\infty,1}(t,y) = \mathsf{E}\eta_t(y)$ полностью совпали. Это говорит о том, что для первого момента между моделями существует дуальность, то есть поведение этих процессов одинаково на всей временной прямой.

Перейдем к рассмотрению второго момента. Заметим, что в отличие от первой модели, вывод дифференциальных уравнений для моментов для случая бесконечного начального поля частиц основан на прямых уравнениях Колмогорова, а не на обратных. Также он основан на представлении

$$\eta_{t+dt}(y) = \eta_t(y) + \xi_{dt}(y),$$

где $\xi_{dt}(y)$ — дискретная случайная величина, принимающая счетное число значений. Если $y = 0$, то есть рассматривается источник, то

$$\xi_{dt}(y) = \begin{cases} n-1, & \text{с вероятностью } b_n\eta_t(y)dt,\ n \geqslant 3, \\ 1, & \text{с вероятностью } b_2\eta_t(y)dt + \sum\limits_{z\neq 0} a(z)\eta_t(y+z)dt, \\ -1, & \text{с вероятностью } b_0\eta_t(y)dt - a(0)\eta_t(y)dt, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \Big(\sum\limits_{n\neq 1} b_n\eta_t(y) + \sum\limits_{z\neq 0} a(z)\eta_t(y+z) - a(0)\eta_t(y)\Big)dt. \end{cases}$$

Иначе

$$\xi_{dt}(y)=\begin{cases}1, & \text{с вероятностью } \sum\limits_{z\neq 0} a(z)\eta_t(y+z)dt,\\ -1, & \text{с вероятностью } -a(0)\eta_t(y)dt,\\ 0, & \text{с вероятностью } 1-\Big(\sum\limits_{z\neq 0} a(z)\eta_t(y+z)-a(0)\eta_t(y)\Big)dt.\end{cases}$$

Тогда можно получить дифференциальное уравнение для второго момента $M_{\infty,2}(t,y)=\mathsf{E}\eta_t^2(y)$, рассмотрев $M_{\infty,2}(t+dt,y)$:

$$\begin{aligned}M_{\infty,2}(t+dt,y)&=\mathsf{E}\eta_{t+dt}^2(y)=\mathsf{E}\big(\eta_t^2(y)+\xi_{dt}(y)\big)^2=\mathsf{E}\big(\eta_t^2(y)+2\eta_t(y)\xi_{dt}(y)+\xi_{dt}^2(y)\big)\\&=\mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big[\big(\eta_t^2(y)+2\eta_t(y)\xi_{dt}(y)+\xi_{dt}^2(y)\big)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\Big]\Big].\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}M_{\infty,2}(t+dt,y)&=M_{\infty,2}(t,y)+2\mathsf{E}\Big[\eta_t(y)\mathsf{E}\Big[\xi_{dt}(y)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\Big]\Big]+\mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big[\xi_{dt}^2(y)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\Big]\Big]\\&=M_{\infty,2}(t,y)+2\mathsf{E}\Big[\eta_t(y)\Big(\delta_0(y)\sum_{n\neq 1}(n-1)b_n\eta_t(y)+\sum_u a(u)\eta_t(y+u)\Big)\Big]\\&\quad+\mathsf{E}\Big[\delta_0(y)\sum_{n\neq 1}(n-1)^2b_n\eta_t(y)+\sum_{u\neq 0}a(u)\eta_t(y+u)-a(0)\eta_t(y)\Big]\end{aligned}$$

Отсюда, при стремлении $dt\to 0$, получается дифференциальное уравнение для второго момента

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M_{\infty,2}(t,y)}{\partial t} &=\big(2\beta_1M_{\infty,2}(t,y)+(\beta_2-\beta_1)M_{\infty,1}\big)\delta_0(y)+2\sum\limits_u a(u)\mathsf{E}\big(\eta_t(y)\eta_t(y+u)\big)\\ &\quad+\sum\limits_u a(u)M_{\infty,1}(t,y+u)-2a(0)M_{\infty,1}(t,y)\ ,\\ M_{\infty,2}(0,y) &=1\ ,\end{cases} \tag{2.35}$$

где $\beta_i=f^{(i)}(1)$. Для получения решения для второго момента нужно рассмотреть корреляционную функцию второго порядка для $\eta_t(y)$: $M_{\infty,2}(t,x,y)=\mathsf{E}\big[\eta_t(y)\eta_t(x)\big]$. В случае, когда $x\neq y$ имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M_{\infty,2}(t,x,y)}{\partial t} &=\beta_1\big(\delta_0(x)+\delta_0(y)\big)M_{\infty,2}(t,x,y)+\sum\limits_u a(u)\mathsf{E}\big(\eta_t(x)\eta_t(y+u)\big)\\ &\quad+\sum\limits_u a(u)\mathsf{E}\big(\eta_t(y)\eta_t(x+u)\big)-a(x-y)\big(M_{\infty,1}(t,y)+M_{\infty,1}(t,x)\big)\ ,\\ M_{\infty,2}(0,x,y) &=1\ .\end{cases} \tag{2.36}$$

Объединив результаты из (2.35) и (2.36) получаем дифференциальное уравнение для второй корреляционной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_{\infty,2}(t,x,y)}{\partial t} & = \beta_1\big(\delta_0(x)+\delta_0(y)\big)M_{\infty,2}(t,x,y) + \sum\limits_u a(u)\mathsf{E}\big(\eta_t(x)\eta_t(y+u)\big) \\ & \quad + \sum\limits_u a(u)\mathsf{E}\big(\eta_t(y)\eta_t(x+u)\big) - a(x-y)\big(M_{\infty,1}(t,y)+M_{\infty,1}(t,x)\big) \\ & \quad + \big((\beta_2-\beta_1)M_{\infty,1}(t,x) + \sum\limits_u a(u)M_{\infty,1}(t,x+u)\big)\delta_0(x)\delta_x(y) \ , \\ M_{\infty,2}(0,x,y) & = 1. \end{cases}$$

Уравнения для всех моментов можно получить с помощью производящей функции, которую можно определить как $F_\infty(z;t,y) = \mathsf{E}e^{-z\eta_t(y)}$ с начальным условием $F_\infty(z;0,y) = e^{-z}$.

Аналогично, рассматривая приращение производящей функции за малое время dt, можно получить дифференциальное уравнение для производящей функции, которое имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_\infty(z;t,y)}{\partial t} & = \delta_0(y)\sum\limits_{n\neq 1}\Big(e^{-z(n-1)}-1\Big)b_n\mathsf{E}\Big(e^{z\eta_t(y)}\eta_t(y)\Big) \\ & \quad + \Big(e^{-z}-1\Big)\sum\limits_{u\neq 0} a(u)\mathsf{E}\Big(e^{-z\eta_t(y)}\eta_t(y+u)\Big) \\ & \quad + \Big(e^{-z}-1\Big)a(0)\mathsf{E}\Big(e^{-z(\eta_t(y)-1)}\eta_t(y)\Big) \ , \\ F_\infty(z;0,y) & = e^{-z} \ . \end{cases}$$

С помощью производящей функции получим уравнения для всех моментов $\{M_{\infty,n}(t,y)\}_n$с использованием представления

$$M_{\infty,n}(t,y) = (-1)^n \frac{\partial^n F_\infty(z;t,y)}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_{\infty,n}}{\partial t}(t,y) & = (-1)^n \dfrac{\partial^{n+1}F_\infty(z;t,y)}{\partial t\partial z^n}\bigg|_{z=0} \ , \\ M_{\infty,n}(0,y) & = 1 \ . \end{cases}$$

Воспользовавшись тем, что для производной порядка n для произведения функций верна формула Лейбница

$$\Big(A(z)B(z)\Big)^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}\Big(A(z)\Big)^{(j)}\Big(B(z)\Big)^{(n-j)}$$

получаем, что момент порядка n удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_{\infty,n}(t,y)}{\partial t} & = \delta_0(y)\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\left(\sum_{m\neq 1}(m-1)^j b_m\right)M_{\infty,n-j+1}(t,y)\right) \\ & \quad + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j}\sum_{u\neq 0}a(u)\mathsf{E}[\eta_t^{n-j}(y)\eta_t(y+u)]\right) \\ & \quad + a(0)\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j}\sum_{r=0}^{n-j}\binom{n-j}{r}(-1)^{n-j-r}M_{\infty,r+1}(t,y)\right) \ , \\ M_{\infty,n}(0,y) & = 1 \ . \end{cases}$$

Сравнивая полученные дифференциальные уравнения для второго момента с результатами из [12], видно, что уравнения различны. Следовательно, дальнейшей дуальности между моделями не наблюдается.

2.4.2 Ветвящиеся случайные блуждания с одним источником ветвления и иммиграцией

Теперь рассмотрим те же модели, добавив в них процесс иммиграции. Положим, что теперь в источник могут приходить частицы извне с интенсивностью k, то есть за малое время dt вероятность того, что в источнике появится одна новая частица, равна kdt. Остальные предположения предыдущего раздела остаются теми же. Однако для удобства, чтобы приблизить обозначения к тем, что были в предыдущем разделе, который касался ВСБ с иммиграцией, введем коэффициент диффузии $\varkappa > 0$ и будем считать, что $a(0) = -1$, $\sum_z a(z) = 0$. Тогда в этом случае вероятность прыжка из точки x в точку $x+z$ за малое время dt будет равна $\varkappa a(z)dt$.

Рассмотрим каждую из моделей по отдельности, и получим дифференциальные уравнения для среднего числа частиц в каждом случае. Для начала рассмотрим модель с одним источником ветвления и бесконечным числом частиц в начальный момент времени. Пусть $n_\infty(t,x)$ число частиц в момент времени t в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Нас будет интересовать величина $m_{1,\infty}(t,x) = \mathsf{E}n(t,x)$.

Для получения дифференциального уравнения воспользуемся прямыми уравнения Колмогорова, основанными на следующем представлении:

$$n_\infty(t+dt,x) = n_\infty(t,x) + \xi(dt,x),$$

где $\xi(dt,x)$ дискретная случайная величина.

Если $x=0$, то есть рассматривается источник, то

$$\xi_\infty(dt,x) = \begin{cases} n-1, & \text{с вероятностью } b_n n_\infty(t,x)dt,\ n \geqslant 3, \\ 1, & \text{с вероятностью } b_2 n_\infty(t,x)dt + \varkappa\sum\limits_{z\neq 0} a(z)n_\infty(t,x+z)dt + kdt, \\ -1, & \text{с вероятностью } b_0 n_\infty(t,x)dt + \varkappa n_\infty(t,x)dt, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \Big(\sum\limits_{n\neq 1} b_n n_\infty(t,x) + \varkappa\sum\limits_{z\neq 0} a(z)n_\infty(t,x+z) \\ & \quad + \varkappa n_\infty(t,x)\Big)dt. \end{cases}$$

Иначе

$$\xi_\infty(dt,x)=\begin{cases}1, & \text{с вероятностью } \varkappa\sum\limits_{z\neq 0}a(z)n_\infty(t,x+z)dt,\\ -1, & \text{с вероятностью } \varkappa n_\infty(t,x)dt,\\ 0, & \text{с вероятностью } 1-\Big(\varkappa\sum\limits_{z\neq 0}a(z)n_\infty(t,x+z)+\varkappa n_\infty(t,x)\Big)dt.\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}m_{1,\infty}(t+dt,x)&=\mathsf{E}n_\infty(t+dt,x)=\mathsf{E}\big[_\infty(t,x)+\xi(dt,x)\big]\\ &=m_{1,\infty}(t,x)+\mathsf{E}\big[\mathsf{E}[\xi(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}]\big]\\ &=m_{1,\infty}(t,x)+\delta_0(x)\sum_{n\neq 1}(n-1)b_n m_{1,\infty}(t,x)\\ &\quad+\varkappa\sum_z a(z)m_{1,\infty}(t,x+z)dt+\delta_0(x)kdt.\end{aligned}$$

Отсюда дифференциальное уравнения для первого момента имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_{1,\infty}(t,x)}{\partial t}&=\delta_0(x)\Big(\sum_{n\neq 1}(n-1)b_n m_{1,\infty}(t,x)+k\Big)+\varkappa\mathcal{L}m_{1,\infty}(t,x)\\ m_{1,\infty}(0,x)&=1.\end{aligned}$$

Здесь мы видим, что отличие от уравнения для модели без иммиграции лишь в добавлении слагаемого, отвечающего за приток частиц извне.

Теперь перейдем к рассмотрению модели с одним источником ветвления и одной начальной частицей. В этом случае нас будет интересовать общее число частиц на решетке в момент времен t в точке x, которое мы будем обозначать $N(t)$. Локальное число частиц обозначим $n(t,x)$. Мы рассмотрим первый момент общего числа частиц: $M_1(t)=\mathsf{E}N(t)$.

Аналогично первому случаю, уравнение для локальной численности частиц имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_{1,\infty}(t,x)}{\partial t}&=\delta_0(x)\Big(\sum_{n\neq 1}(n-1)b_n m_{1,\infty}(t,x)+k\Big)+\varkappa\mathcal{L}m_{1,\infty}(t,x)\\ m_{1,\infty}(0,x)&=\delta_0(x).\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим общую численность частиц.

$$N(t+dt)=N(t)+\Xi(dt),$$

где

$$\Xi(dt)=\begin{cases}n-1, & \text{с вероятностью } b_n n(t,0)dt,\ n\geqslant 3,\\ 1, & \text{с вероятностью } kdt+b_2 n(t,0)dt,\\ -1, & \text{с вероятностью } b_0 n(t,0)dt,\\ 0, & \text{с вероятностью } 1-\Big(\sum\limits_{n\neq 1}b_n n(t,0)dt+kdt\Big)\end{cases}$$

Отсюда для первого момента верно

$$\begin{aligned} M_1(t+dt) &= \mathsf{E}N(t+dt) = M_1(t) + \mathsf{E}\big[\mathsf{E}\Xi(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big] \\ &= M_1(t) + \sum_{n\neq 1} b_n(n-1)\mathsf{E}n(t,0)dt + kdt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1(t)}{\partial t} &= \sum_{n\neq 1} b_n(n-1)\mathsf{E}n(t,0) + k \\ M_1(0) &= 1. \end{aligned}$$

Перепишем в более удобной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1(t)}{\partial t} &= \delta_0(x)\sum_{n\neq 1} b_n(n-1)M_1(t) + k \\ M_1(0) &= 1. \end{aligned}$$

Ввиду пространственной однородности, $\mathcal{L}M_1(t) = 0$, уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1(t)}{\partial t} &= \delta_0(x)\sum_{n\neq 1} b_n(n-1)M_1(t) + k + \varkappa\mathcal{L}M_1(t) \\ M_1(0) &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что добавление нового процесса иммиграции нарушает дуальность, так как полученные уравнения получились различными.

Глава 3

Ветвящиеся случайные блуждания с возможным изменением типа частицы

Одним из предположений главы 1 для модели ВСБ с двумя типами частиц было то, что частицы не могут менять тип за малое время dt. Рассмотрим частный случай модели с двумя типами частиц и разрешим одному из типов менять его на противоположный. В данной главе рассмотрим пример, в котором частицы первого типа могут стать частицами второго типа. Такие модели могут описывать распространение вирусов. В разделе 3.1 описана модель ВСБ и введены основные объекты изучения — численности частиц каждого из типов. В разделе 3.2 получены первые моменты численностей частиц каждого из типов и их асимптотические представления при больших временах. В разделе 3.3 получено асимптотическое представление второго момента численностей частиц первого типа. В разделе 3.4 получено асимптотическое представление второго момента численностей частиц второго типа .

3.1 Описание модели

Рассмотрим модель ВСБ с двумя типами частиц, описанную в разделе 1.1.1. Также как и для модели ВСБ с иммиграцией, будем изучать поведение численностей частиц $N_i(t,x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ при $t \to \infty$. Будем называть частицы первого типа зараженными частицами, а второго типа — частицами, которые выработали иммунитет. Пусть r — интенсивность выработать иммунитет для зараженной частицы за малое время dt, то есть в терминах модели ВСБ частица первого типа станет частицей второго типа с вероятностью $rdt + o(dt)$. В начальный момент времени предположим, что на решетке была одна зараженная частица в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Без ограничения общности можно считать, что в начальный момент времени частица находилась в узле $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$. Таким образом, начальное условие процесса имеет вид

$$N_1(0,x) = \delta_0(x),\ N_2(0,x) \equiv 0,\ \text{для всех } x \in \mathbb{Z}^d.$$

Положим b_n, $n \geqslant 2$ — интенсивность заразить $n-1$ новую частицу. Будем предполагать, что в любой точке решетке достаточно здоровых частиц без выработанного иммунитета, которые можно заразить. В обозначениях модели ВСБ с двумя типами частиц имеем

$$b_k = \beta_1(k,0),\ \beta_2(k,l) \equiv 0,\ \text{для всех } k+l \geqslant 2.$$

Для данной модели будем исследовать поведение моментов случайных величин $N_i(t,x)$, $i = 1,2$. Для получения дифференциальных уравнений для первых моментов воспользуемся методом прямых уравнений Колмогорова, основанном на следующем представлении:

$$\begin{gathered} N_1(t+dt,x) = N_1(t,x) + \xi(dt,x); \\ N_2(t+dt,x) = N_2(t,x) + \psi(dt,x), \end{gathered}$$

где $\xi(dt,x)$ и $\psi(dt,x)$ — дискретные случайные величины, имеющие следующие распределения:

$$\xi(dt,x) = \begin{cases} n-1 & \text{с вероятностью } b_n N_1(t,x)dt,\ n \geqslant 3, \\ 1 & \text{с вероятностью } b_2 N_1(t,x)dt + \varkappa_1 \sum\limits_{z\neq 0} a_1(-z) N_1(t,x+z)dt, \\ -1 & \text{с вероятностью } \mu_1 N_1(t,x)dt + \varkappa_1 N_1(t,x)dt + rN_1(t,x)dt, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \sum\limits_{n\geqslant 3} b_n N_1(t,x)dt \\ & -(\beta_2 + \mu_1 + \varkappa_1)N_1(t,x)dt - rN_1(t,x)dt \\ & - \sum_{z\neq 0} a_1(-z)N_1(t,x+z)dt; \end{cases}$$

$$\psi(dt,x) = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } \varkappa_2 \sum\limits_{z\neq 0} a_2(-z) N_2(t,x+z)dt + rN_1(t,x)dt, \\ -1 & \text{с вероятностью } \mu_2 N_2(t,x)dt + \varkappa_2 N_2(t,x)dt, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - (\mu_2 + \varkappa_2 N_2(t,x)dt - rN_1(t,x)dt \\ & - \sum\limits_{z\neq 0} a_2(-z)N_2(t,x+z)dt. \end{cases}$$

Далее будем изучать поведение первого и второго момента случайных величин $N_i(t,x)$, $i = 1,2$.

3.2 Первые моменты численностей частиц

Определим первые моменты для случайных величин $N_i(t,x)$, $i = 1,2$ как $M_i(t,x) = \mathsf{E}N_i(t,x)$. Для получения дифференциальных уравнений для первых моментов рассмотрим приращение за малое время dt:

$$M_1(t+dt,x) = \mathsf{E}N_1(t+dt,x) = \mathsf{E}\Big[N_1(t,x)+\xi(dt,x)\Big] = M_1(t,x)+\mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[\xi(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big]$$
$$= M_1(t,x)+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n M_1(t,x)dt-\mu_1 M_1(t,x)dt$$
$$+\mathcal{L}_1 M_1(t,x)dt - rM_1(t,x)dt.$$

Пусть $\beta = \sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n$. Тогда дифференциальное уравнение для $M_1(t,x)$ примет вид при $dt\to 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_1(t,x)}{\partial t} & = (\beta-\mu_1-r)M_1(t,x)+\mathcal{L}_1 M_1(t,x) \\ M_1(0,x) & = \delta_0(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Аналогично можно получить дифференциальное уравнение для $M_2(t,x)$:

$$M_2(t+dt,x) = \mathsf{E}N_2(t+dt,x) = \mathsf{E}\Big[N_2(t,x)+\psi(dt,x)\Big]$$
$$= M_1(t,x)+\mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[\psi(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}\big]\Big]$$
$$= M_2(t,x)+\mathcal{L}_2 M_2(t,x)dt-\mu_2 M_2(t,x)dt+rM_1(t,x)dt.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение при $dt\to 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_2(t,x)}{\partial t} & = \mathcal{L}_2 M_2(t,x)-\mu_2 M_2(t,x)+rM_1(t,x) \\ M_2(0,x) & = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Сначала получим решение уравнения (3.1). Воспользуемся дискретным преобразованием Фурье (1.9). Тогда уравнение (3.1) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{M_1}(t,\theta)}{\partial t} & = (\beta-\mu_1-r)\widehat{M_1}(t,\theta)+\varkappa_1\widehat{a}_1(\theta)\widehat{M_1}(t,\theta) \\ \widehat{M_1}(0,\theta) & = 1. \end{cases}$$

Воспользовавшись методом вариации постоянной, получаем решение уравнения

$$\widehat{M_1}(t,\theta) = e^{(\beta-\mu_1-r)t}e^{\varkappa_1\widehat{a}_1(\theta)t}.$$

Замечание 3.2.1. Для удобства изложения для обратного преобразования Фурье, определенного в (1.10), введем обозначение $\widetilde{\widehat{f}(\theta)}(x)$.

Таким образом,

$$M_1(t,x) = e^{(\beta-\mu_1-r)t}\widetilde{e^{\varkappa_1\widehat{a}_1(\theta)t}}(x). \tag{3.3}$$

Замечание 3.2.2. Пусть $p_1(t,x)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial p_1(t,x)}{\partial t} = \varkappa\mathcal{L}_1 p_1(t,x), \quad p_1(0,x) = \delta_0(x),$$

тогда верно, что

$$p_1(t,x) = \widetilde{e^{\varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta) t}}(x).$$

Отсюда получаем, что в случае, когда функция $p_1(t,x)$ при $t \to \infty$ убывает медленнее, чем экспоненциальная, вырождение популяции зависит от коэффициентов β, μ, r. Если ветвящийся процесс докритический, то есть $\beta < \mu$, или критический, то есть $\beta = \mu$, первый момент $M_1(t,x)$ стремится к нулю и популяция частиц первого типа вырождается.

Найдем решение уравнения первого момента численностей частиц второго типа (3.2), подставив решение для $M_1(t,x)$, полученное в (3.3):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_2(t,x)}{\partial t} & = \mathcal{L}_2 M_2(t,x) - \mu_2 M_2(t,x) + re^{(\beta-\mu_1-r)t}\widetilde{e^{\varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta)t}} \\ M_2(0,x) & = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Применим дискретное преобразование Фурье (1.9) в уравнении (3.4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{M}_2(t,\theta)}{\partial t} & = \varkappa_2 \widehat{a}_2(\theta)\widehat{M}_2(t,\theta) - \mu_2 \widehat{M}_2(t,\theta) + re^{(\beta-\mu_1-r)t}e^{\varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta)t} \\ \widehat{M}_2(0,\theta) & = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Получим решение дифференциального уравнения, рассмотрев два случая

$$\beta - \mu_1 - r = -\mu_2, \quad \beta - \mu_1 - r \neq -\mu_2.$$

Случай $\beta - \mu_1 - r = -\mu_2$. Решение дифференциального уравнения зависит от равенства генераторов блуждания. В случае, когда генераторы блужданий частиц каждого типа совпадают, $\varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta) = \varkappa_2 \widehat{a}_2(\theta)$, так как $a_1(x) = a_2(x)$ для всех $x \in \mathbb{Z}^d$.

Если $\varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta) = \varkappa_2 \widehat{a}_2(\theta)$, то, воспользовавшись методом вариации постоянного, получаем решение уравнения (3.5)

$$\widehat{M}_2(t,\theta) = rte^{(\varkappa_2 \widehat{a}_2(\theta) - \mu_2)t}.$$

Следовательно, с помощью обратного преобразования Фурье получаем, что

$$M_2(t,x) = rte^{-\mu_2 t}\widetilde{e^{\varkappa_2 \widehat{a}_2(\theta)t}}(x).$$

Если блуждания частиц первого и второго типа не совпадают, то есть $\varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta) - \varkappa_2 \widehat{a}_2(\theta) = d(\theta) \neq 0$, то решение уравнения (3.5) примет вид

$$\widehat{M}_2(t,\theta) = \frac{r}{d(\theta)}\Big(e^{d(\theta)t} - 1\Big)e^{-\mu_2 t}e^{\varkappa_2 \widehat{a}_2(\theta)t}.$$

Отсюда получаем решение для $M_2(t,x)$:

$$M_2(t,x) = re^{(\beta-\mu_1-r)t}\left(\frac{\widetilde{e^{\varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta)t}}}{d(\theta)}\right)(x) - re^{-\mu_2 t}\left(\frac{\widetilde{e^{\varkappa_2 \widehat{a}_2(\theta)t}}}{d(\theta)}\right)(x).$$

Случай $\beta-\mu_1-r\neq-\mu_2$. Аналогично получаются решения дифференциального уравнения (3.5) с помощью метода вариации постоянной.

Если $\varkappa_1\widehat{a}_1(\theta)+\beta-\mu_1-r=\varkappa_2\widehat{a}_2(\theta)-\mu_2$ для всех θ, то

$$\widehat{M_2}(t,\theta)=rte^{-\mu_2 t}e^{\varkappa_2\widehat{a}_2(\theta)t}.$$

Если

$$\varkappa_1\widehat{a}_1(\theta)+\beta-\mu_1-r-\varkappa_2\widehat{a}_2(\theta)+\mu_2=d(\theta)\neq 0,$$

тогда

$$\widehat{M_2}(t,\theta)=\frac{r}{d(\theta)}\Big(e^{d(\theta)t}-1\Big)e^{-\mu_2 t}e^{\varkappa_2\widehat{a}_2(\theta)t}.$$

Случай совпадения генераторов блужданий. Если генераторы случайных блужданий для частиц первого и второго типа совпадают, то есть $a_1(x)=a_2(x)$ для всех $x\in\mathbb{Z}^d$, рассмотрим полученные решения уравнений первого и второго момента численностей частиц

$$M_1(t,x)=e^{(\beta-\mu_1-r)t}\widetilde{e^{\varkappa_1\widehat{a}_1(\theta)t}}(x)$$
$$M_2(t,x)=\begin{cases} rte^{-\mu_2 t}\widetilde{e^{\varkappa_2\widehat{a}_2(\theta)t}}(x), & \text{если } \beta-\mu_1-r=-\mu_2,\\ \frac{r}{d}\Big(e^{dt}-1\Big)e^{-\mu_2 t}\widetilde{e^{\varkappa_2\widehat{a}_2(\theta)t}}(x), & \text{если } \beta-\mu_1-r\neq-\mu_2,\end{cases}$$

где

$$d=\beta-\mu_1-r+\mu_2.$$

Таким образом, верна теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть $p(t,x)$ решение задачи Коши*

$$\frac{\partial p_1(t,x)}{\partial t}=\varkappa\mathcal{L}_1 p_1(t,x),\quad p_1(0,x)=\delta_0(x).$$

Тогда первые моменты численностей частиц $M_i(t,x)=\mathsf{E}N_i(t,x)$, $i=1,2$ удовлетворяют равенствам

$$M_1(t,x)=e^{(\beta-\mu_1-r)t}p(t,x)$$
$$M_2(t,x)=\begin{cases} rte^{-\mu_2 t}p(t,x), & \textit{если } \beta-\mu_1-r=-\mu_2,\\ \frac{r}{\beta-\mu_1-r+\mu_2}\Big(e^{(\beta-\mu_1-r)t}-e^{-\mu_2 t}\Big)p(t,x), & \textit{если } \beta-\mu_1-r\neq-\mu_2.\end{cases}$$

В случае, когда генератор блуждания имеет конечную дисперсию скачков, то есть

$$\sum_{z\neq\bar{0}}a_i(z)|z|^2<\infty,\quad i=1,2,$$

в [12] было получено, что при $t\to\infty$ верно следующее представление

$$p(t,x)\sim\frac{\gamma_d}{t^{d/2}},\quad \gamma_d=\Big((2\pi)^d|det(\widehat{a}''(0))|\Big)^{-1/2}. \tag{3.6}$$

Таким образом, из теоремы 3.2.1 получается следствие.

Следствие 3.2.1. В случае, когда случайное блуждание частиц первого и второго типа имеет конечную дисперсию скачков, первые моменты численностей частиц при $t \to \infty$ имеют асимптотические представления

$$M_1(t,x) \sim e^{(\beta-\mu_1-r)t}\frac{\gamma_d}{t^{d/2}}$$
$$M_2(t,x) \sim \begin{cases} rte^{-\mu_2 t}\frac{\gamma_d}{t^{d/2}}, & \text{если } \beta-\mu_1-r=-\mu_2,\\ \frac{r}{\beta-\mu_1-r+\mu_2}\Big(e^{(\beta-\mu_1-r)t}-e^{-\mu_2 t}\Big)\frac{\gamma_d}{t^{d/2}}, & \text{если } \beta-\mu_1-r\neq-\mu_2, \end{cases}$$

3.3 Второй момент численности частиц первого типа

Для получения уравнения для второго момента случайной величины $N_1(t,x)$ рассмотрим более общую задачу. Пусть $N_1(t,x,y)$ — число частиц в момент времени t в точке $y \in \mathbb{Z}^d$, порожденных частицей, которая в момент времени $t=0$ находилась в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Начальное условие для этой задачи $N_1(0,x,y)=\delta_x(y)$. В обозначениях исходной задачи имеем $N_1(t,x)=N_1(t,0,x)$. Здесь для простоты будет применяться метод обратных уравнений Колмогорова. Введем производящую функцию случайной величины $N_1(t,x,y)$

$$F(t,x,y;z)=\mathsf{E}e^{-zN_1(t,x,y)}. \tag{3.7}$$

где $z \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$. Тогда верна лемма.

Лемма 3.3.1. *Производящая функция $F(t,x,y;z)$, определенная в уравнении* (3.7)*, удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t,x,y;z)}{\partial t} &= \mathcal{L}_{1,x}F(t,x,y;z)+f(F(t,x,y;z))+r(1-F(t,x,y;z)); \\ F(0,x,y;z) &= e^{-z\delta_x(y)}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $f(s)$ функция, равная

$$f(s)=\mu_1+s\Big(-\mu_1-\sum_{n\geqslant 2}b_n\Big)+\sum_{n\geqslant 2}b_n s^n$$

Доказательство. Рассмотрим производящую функцию (3.7) в момент времени $t+dt$:

$$\begin{aligned} F(t+dt,x,y;z) &= \mathsf{E}e^{-zN_1(t+dt,x,y)} = \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big[e^{-zN_1(dt,x,x)N_1(t,x,y)}\prod_{u\neq 0}e^{-zN_1(dt,x,x+u)N_1(t,x+u,y)}|\mathcal{F}_{\leqslant t}\Big]\Big] \\ &= \mathsf{E}e^{-zN_1(t,x,y)}\Big[\sum_{n\geqslant 2}e^{-z(n-1)N_1(t,x,y)}b_n dt+e^{zN_1(t,x,y)}(\mu_1+r)dt \\ &\quad+\sum_{u\neq 0}e^{-zN_1(t,x+u,y)}\varkappa_1 a_1(u)dt+1-(\sum_{n\geqslant 2}b_n+r+\mu_1+\varkappa_1)dt\Big] \\ &= F(t,x,y;z)+\mathcal{L}_{1,x}F(t,x,y;z)+f(F(t,x,y;z))dt+r(1-F(t,x,y;z)), \end{aligned}$$

где $f(s) = \mu_1 + s\Big(-\mu_1 - \sum\limits_{n\geqslant 2} b_n\Big) + \sum\limits_{n\geqslant 2} b_n s^n$ и

$$\big(\mathcal{L}_{i,x} g(t,\cdot,y)\big)(x) = \varkappa_i \sum_{z\neq 0} a_i(z)\big[g(t,x+z,y) - g(t,x,y)\big].$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} F(t+dt,x,y;z) - F(t,x,y;z) = \mathcal{L}_{1,x} F(t,x,y;z)dt + f\big(F(t,x,y;z)\big)dt \\ + r\big(1 - F(t,x,y;z)\big)dt. \end{aligned}$$

Таким образом, при $dt \to 0$

$$\frac{\partial F(t,x,y;z)}{\partial t} = \mathcal{L}_{1,x} F(t,x,y;z) + f\big(F(t,x,y;z)\big) + r(1 - F(t,x,y;z)).$$

Начальное условие получается из определения (3.7)

$$F(0,x,y;z) = \mathsf{E} e^{-zN_1(0,x,y)} = \mathsf{E} e^{-z\delta_x(y)} = e^{-z\delta_x(y)}.$$

■

Далее также понадобится обозначение

$$\big(\mathcal{L}_{i,y} g(t,\cdot,y)\big)(x) = \varkappa_i \sum_{z\neq 0} a_i(z)\big[g(t,x,y+z) - g(t,x,y)\big].$$

Пусть $M_1(t,x,y) = \mathsf{E} N_1(t,x,y)$ — первый момент $N_1(t,x,y)$. Из (3.8) получаем

$$\frac{\partial M_1(t,x,y)}{\partial t} = -\left.\frac{\partial^2 F(t,x,y;z)}{\partial t \partial z}\right|_{z=0}.$$

Следовательно, из (3.8) можно получить дифференциальное уравнение для первого момента, взяв частную производную обеих частей уравнения (3.8). Опустив вычисления, получаем

$$\frac{\partial M_1(t,x,y)}{\partial t} = \mathcal{L}_{1,x} M_1(t,x,y) + (\beta - \mu_1 - r) M_1(t,x,y), \quad M_1(0,x,y) = \delta_x(y).$$

Используя дискретное преобразование Фурье (1.9), получаем решение дифференциального уравнения

$$\widehat{M_1}(t,\theta,y) = e^{\imath(\theta,y)} e^{(\beta-\mu_1-r)t} e^{\varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta) t}.$$

Применим обратное преобразование Фурье (1.10). Тогда

$$M_1(t,x,y) = e^{(\beta-\mu_1-r)t} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{\varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta) t} e^{\imath(\theta, y-x)} d\theta.$$

Замечание 3.3.1. Заметим, что из полученного представления первого момента $M_1(t,x,y)$, следует, что первый момент $M_1(t,x,y)$ как функция зависит от разности точек на решетке, то есть

$$M_1(t,x,y) = M_1(t,0,y-x).$$

Из уравнения (3.8), взяв частную производную по переменной z два раза и подставив $z = 0$, получаем дифференциальное уравнение для второго момента, определяемого формулой $M_1^{(2)}(t,x,y) = \mathsf{E}N_1^2(t,x,y)$:

$$\frac{\partial M_1^{(2)}(t,x,y)}{\partial t} = \left.\frac{\partial^3 F(t,x,y;z)}{\partial t \partial z^2}\right|_{z=0}.$$

Следовательно, опустив вычисления

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1^{(2)}(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_{1,x} M_1^{(2)}(t,x,y) + (\beta - \mu_1 - r) M_1^{(2)}(t,x,y) + \beta^{(2)} M_1^2(t,x,y); \\ M_1^{(2)}(0,x,y) &= \delta_x(y), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\beta^{(2)} = \sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)b_n$.

Рассмотрим асимптотическое поведение первого момента в случае, когда случайное блуждение частиц первого типа имеет конечную дисперсию скачков, то есть

$$\sum_{z\neq\bar{0}} a_1(z)|z|^2 < \infty.$$

Рассмотрим уравнение (3.9). Решение этого уравнения есть сумма частного решения уравнения (3.9) и решения однородного уравнения

$$\frac{\partial M_1^{(2)}(t,x,y)}{\partial t} = \mathcal{L}_{1,x} M_1^{(2)}(t,x,y) + (\beta - \mu_1 - r) M_1^{(2)}(t,x,y).$$

Пусть $M_1^{(2),h}(t,x,y)$ решение однородного уравнения и $M_1^{(2),p}(t,x,y)$ — частное решение. Тогда

$$M_1^{(2)}(t,x,y) = M_1^{(2),h}(t,x,y) + M_1^{(2),p}(t,x,y).$$

Аналогично, как и для уравнения (3.1) получаем, что решение однородного уравнения при $t\to\infty$ имеет вид

$$M_1^{(2),h}(t,x,y) \sim e^{(\beta-\mu_1-r)t}\frac{\gamma_d}{t^{d/2}}.$$

Далее рассмотрим поведение частного решения при $t\to\infty$.

Случай $d = 1$. Из следствия 3.2.1 следует, что при $d = 1$ первый момент $M_1(t, x, y) \sim \gamma_1/\sqrt{t}$ при $t \to \infty$. Положим, что при $t \to \infty$

$$f(t) = \beta^{(2)}\gamma_1^2\left(\ln t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big((\mu_1 + r - \beta)t\big)^n}{n \cdot n!}\right)e^{(\beta-\mu_1-r)t}.$$

Подставив функцию $f(t)$ в уравнение (3.9), получаем в левой части уравнения

$$\begin{aligned}
(\beta - \mu_1 - r)f(t) &+ \frac{\beta^{(2)}\gamma_1}{t}e^{(\beta-\mu_1-r)t} + \beta^{(2)}\gamma_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_1 + r - \beta)^n t^{n-1}}{n!}e^{(\beta-\mu_1-r)t} \\
&= (\beta - \mu_1 - r)f(t) + \frac{\beta^{(2)}\gamma_1}{t}e^{(\beta-\mu_1-r)t}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_1 + r - \beta)^n t^n}{n!}\right) \\
&= (\beta - \mu_1 - r)f(t) + \frac{\beta^{(2)}\gamma_1}{t}e^{(\beta-\mu_1-r)t}e^{-(\beta-\mu_1-r)t} \\
&= (\beta - \mu_1 - r)f(t) + \frac{\beta^{(2)}\gamma_1}{t}.
\end{aligned}$$

В правой части уравнения (3.9) получаем

$$(\beta - \mu_1 - r)f(t) + \frac{\beta^{(2)}\gamma_1}{t}.$$

То есть $f(t)$ — частное решение уравнения (3.9).

Таким образом, для $d = 1$ при $t \to \infty$

$$M_1^{(2)}(t, x, y) \sim \frac{\gamma_1}{\sqrt{t}}e^{(\beta-\mu_1-r)t} + \beta^{(2)}\gamma_1^2\left(\ln t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big((\mu_1 + r - \beta)t\big)^n}{n \cdot n!}\right)e^{(\beta-\mu_1-r)t}.$$

В частном случае $\beta - \mu_1 - r = 0$ получаем

$$M_1^{(2)}(t, x, y) \sim \beta^{(2)}\gamma_1^2 \ln t.$$

Случай $d \geqslant 2$. Из замечания 3.2.1 следует, что при $d \geqslant 2$ и $t \to \infty$ первый момент $M_1(t, x, y) \sim \gamma_d/t^{d/2}$. Положим, что при $t \to \infty$

$$f(t) = e^{(\beta-\mu_1-r)t} \int \frac{\beta^{(2)}\gamma_d^2}{t^d}e^{(\mu_1+r-\beta)t}dt.$$

Тогда, подставив функцию $f(t)$ в уравнение (3.9), получаем в левой части уравнения

$$(\beta - \mu_1 - r)f(t) + e^{(\beta-\mu_1-r)t}\frac{\beta^{(2)}\gamma_d^2}{t^d}e^{(\mu_1+r-\beta)t} = (\beta - \mu_1 - r)f(t) + \frac{\beta^{(2)}\gamma_d^2}{t^d}.$$

В правой части уравнения (3.9) получаем

$$(\beta-\mu_1-r)e^{(\beta-\mu_1-r)t}f(t)+\frac{\beta^{(2)}\gamma_d^2}{t^d}.$$

То есть $f(t)$ — частное решение уравнения (3.9)

Таким образом, при $t\to\infty$

$$M_1^{(2)}(t,x,y)\sim\frac{\gamma_d}{t^{d/2}}e^{(\beta-\mu_1-r)t}+e^{(\beta-\mu_1-r)t}\int\frac{\beta^{(2)}\gamma_d^2}{t^d}e^{(\mu_1+r-\beta)t}dt.$$

В случае $\beta-\mu_1-r=0$ получаем при $t\to\infty$

$$M_1^{(2)}(t,x,y)\sim\frac{\gamma_d}{t^{d/2}}+\int\frac{\beta^{(2)}\gamma_d^2}{t^d}dt=\frac{\gamma_d}{t^{d/2}}-\frac{\beta^{(2)}\gamma_d^2}{(d-1)t^{d-1}}.$$

Отдельно рассмотрим случаи $d=2$ и $d\geqslant 3$:

$$M_1^{(2)}(t,x,y)\sim\begin{cases}\left(\gamma_2-\beta^{(2)}\gamma_2^2\right)/t, & \text{если } d=2\\ \gamma_d/t^{d/2}, & \text{если } d\geqslant 3\end{cases}$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 3.3.1. *Пусть случайное блуждание частиц первого типа имеет конечную дисперсию скачков, то есть*

$$\sum_{z\neq\bar{0}}a_1(z)|z|^2<\infty.$$

Тогда для второго момента численности частиц первого типа $M_1^{(2)}(t,x,y)=\mathsf{E}N_1^2(t,x,y)$ *верны следующие асимптотические представления при* $t\to\infty$

Случай $d=1$. *Имеем*

$$M_1^{(2)}(t,x,y)\sim\frac{\gamma_1}{\sqrt{t}}e^{(\beta-\mu_1-r)t}+\beta^{(2)}\gamma_1^2\left(\ln t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((\mu_1+r-\beta)t\right)^n}{n\cdot n!}\right)e^{(\beta-\mu_1-r)t}.$$

В частном случае $\beta-\mu_1-r=0$ *получаем*

$$M_1^{(2)}(t,x,y)\sim\beta^{(2)}\gamma_1^2\ln t.$$

Случай $d\geqslant 2$. *Имеем*

$$M_1^{(2)}(t,x,y)\sim\frac{\gamma_d}{t^{d/2}}e^{(\beta-\mu_1-r)t}+e^{(\beta-\mu_1-r)t}\int\frac{\beta^{(2)}\gamma_d^2}{t^d}e^{(\mu_1+r-\beta)t}dt.$$

В частном случае $\beta-\mu_1-r=0$ *получаем при* $t\to\infty$

$$M_1^{(2)}(t,x,y)\sim\begin{cases}\left(\gamma_2-\beta^{(2)}\gamma_2^2\right)/t, & \textit{если } d=2\\ \gamma_d/t^{d/2}, & \textit{если } d\geqslant 3.\end{cases}$$

Введем определение перемежаемости (см., например [20]).

Определение 3.3.1. *Поле* $\Lambda(t,x)$ *называется перемежаемым при* $t \to \infty$, *если*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}\Lambda^2(t,x)}{\big(\mathsf{E}\Lambda(t,x)\big)^2} = \infty,$$

где $x \in \Omega(t)$ *и* $\Omega(t)$ *не убывающее семейство множеств.*

Отсюда следует, что при $t \to \infty$ для $\beta - \mu_1 - r = 0$ и $d = 1$

$$\frac{M_1^{(2)}(t,x,y)}{M_1(t,x)} \sim \frac{\beta^{(2)}\gamma_1^2 \ln t}{\gamma_1^2/t} = \beta^{(2)} t \ln t \to \infty.$$

Для $d \geqslant 2$ и $\beta - \mu_1 - r = 0$ при $t \to \infty$

$$\frac{M_1^{(2)}(t,x,y)}{M_1(t,x)} \sim \frac{C/t^{d/2}}{\gamma_d^2/t^d} = \frac{C}{\gamma_d^2} t^{d/2} \to \infty,$$

где C — константа

$$C = \begin{cases} \gamma_2 - \beta^{(2)}\gamma_2^2, & \text{если } d = 2; \\ \gamma_d, & \text{если } d \geqslant 3. \end{cases}$$

Таким образом, в случае, когда $\beta - \mu_1 - r = 0$ поле частиц первого типа перемежаемо при $t \to \infty$ для любой решетки $\mathbb{Z}^d$.

3.4 Второй момент численности частиц второго типа

В данном разделе рассмотрим поведение второго момента численностей частиц второго типа $N_2(t,x)$ в частных случаях. Положим

$$M_{22}(t,x,y) = \mathsf{E}\big[N_2(t,x)N_2(t,y)\big].$$

Для получения дифференциального уравнения для функции $M_2^{(2)}(t,x,y)$ воспользуемся методом прямых уравнений Колмогорова и рассмотрим поведение случайно величины в момент времени $t + dt$. В отличие от исследования дифференциальных уравнений первого момента численности частиц первого типа, для частиц второго типа отдельно рассмотрим случаи $x = y$ и $x \neq y$.

Сначала рассмотрим случай $x = y$. Тогда $M_2^{(2)}(t+dt, x, x)$:

$$\begin{aligned}M_{22}(t+dt,x,x) &= \mathsf{E}N_2^2(t+dt,x) = \mathsf{E}N_2^2(t,x) + 2\mathsf{E}N_2(t,x)\Big[\mathsf{E}[\psi(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}]\Big] \\ &+ \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}[\psi^2(dt,x)|\mathcal{F}_{\leqslant t}]\Big] = M_{22}(t,x,x) + 2\mathsf{E}N_2(t,x) \\ &\times \Big[\varkappa_2 \sum_{z\neq 0} a_2(z)N_2(t,x+z,x)dt + rN_1(t,x)dt - \mu_2 N_2(t,x)dt \\ &- \varkappa_2 N_2(t,x)dt + o(dt)\Big] + \mathsf{E}\Big[\varkappa_2 \sum_{z\neq 0} a_2(z)N_2(t,x+z,x)dt + rN_1(t,x)dt \\ &+ \mu_2 N_2(t,x)dt + \varkappa_2 N_2(t,x)dt + o(dt)\Big] = M_{22}(t,x,x) + 2\mathcal{L}_{2,x}M_{22}(t,x,x)dt \\ &+ 2rM_{12}(t,x,x)dt + \mathcal{L}_2 M_2(t,x)dt - 2\mu_2 M_{22}(t,x,x)dt + 2rM_1(t,x)dt \\ &+ \mu_2 M_2(t,x)dt + 2\varkappa_2 M_2(t,x)dt + o(dt),\end{aligned}$$

где $M_{12}(t,x,y) = \mathsf{E}[N_1(t,x)N_2(t,y)]$. Тогда при $dt \to 0$ получаем дифференциальное уравнение $M_{22}(t,x,x)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{22}(t,x,x)}{\partial t} &= 2\mathcal{L}_{2,x}M_{22}(t,x,x) - 2\mu_2 M_{22}(t,x,x) + 2rM_{12}(t,x,x) \\ &+ \mathcal{L}_2 M_2(t,x) + rM_1(t,x) + \mu_2 M_2(t,x) + 2\varkappa_2 M_2(t,x); \\ M_{22}(0,x,x) &= 0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Теперь рассмотрим случай $x \neq y$. Тогда

$$\begin{aligned}M_{22}(t,x,y) &= \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}[(N_2(t,x)+\psi(dt,x))(N_2(t,y)+\psi(dt,y))|\mathcal{F}_{\leqslant t}]\Big] = M_{22}(t,x,y) \\ &+ \mathsf{E}N_2(t,x)\Big[\varkappa_2 \sum_{z\neq 0} a_2(z)N_2(t,y+z)dtrN_1(t,y)dt - \mu_2 N_2(t,y)dt \\ &- \varkappa_2 N_2(t,y)dt + o(dt)\Big] + \mathsf{E}N_2(t,y)\Big[\varkappa_2 \sum_{z\neq 0} a_2(z)N_2(t,x+z)dtrN_1(t,x)dt \\ &- \mu_2 N_2(t,x)dt - \varkappa_2 N_2(t,x)dt + o(dt)\Big] - \mathsf{E}[\varkappa_2 a_2(x-y)N_2(t,x)dt \\ &+ \varkappa_2 a_2(y-x)N_2(t,y)dt + o(dt)] = M_{22}(t,x,y) + \mathcal{L}_{2,x}M_{22}(t,x,y)dt \\ &+ \mathcal{L}_{2,y}M_{22}(t,x,y)dt - 2\mu_2 M_{22}(t,x,y)dt + rdt\big(M_{12}(t,x,y) \\ &+ M_{12}(t,y,x)\big) - \varkappa_2 a_2(x-y)\big(M_2(t,x) + M_2(t,y)\big)dt + o(dt).\end{aligned}$$

Таким образом, при $dt \to 0$ получаем диффернциальное уравнения $M_{22}(t,x,y)$ при $x \neq y$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{22}(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_{2,x}M_{22}(t,x,y) + \mathcal{L}_{2,y}M_{22}(t,x,y) - 2\mu_2 M_{22}(t,x,x) \\ &- \varkappa_2 a_2(x-y)\big(M_2(t,x) + M_2(t,y)\big) + r\big(M_{12}(t,x,y) + M_{12}(t,y,x)\big); \\ M_{22}(0,x,y) &= 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

В обоих уравнениях появляется неизвестная функция $M_{12}(t,x,y) = \mathsf{E}N_1(t,x)N_2(t,y)$. Тогда для изучения функции $M_{22}(t,x,y)$, необходимо получить дифференциальное уравнение для функции $M_{12}(t,x,y)$. Воспользовавшись методом прямых уравнений Колмогорова, получаем

$$\begin{aligned}
M_{12}(t+dt,x,y) &= \mathsf{E}[\mathsf{E}[(N_1(t,x)+\xi(dt,x))(N_2(t,y)+\psi(dt,y))|\mathcal{F}_{\leqslant t}]] \\
&= M_{12}(t,x,y) + (\beta-\mu_1-r-\mu_2)M_{12}(t,x,y)dt + r\mathsf{E}[N_1(t,x)N_1(t,y)]dt \\
&\quad - \delta_x(y)rM_1(t,x)dt + \big(\mathcal{L}_{1,x}M_{12}(t,x,y) + \mathcal{L}_{2,y}M_{12}(t,x,y)\big)dt + o(dt).
\end{aligned}$$

При $dt \to 0$ дифференциальное уравнение для $M_{12}(t,x,y)$ примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{12}(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_{1,x}M_{12}(t,x,y) + \mathcal{L}_{2,y}M_{12}(t,x,y) + (\beta-\mu_1-r-\mu_2)M_{12}(t,x,y) \\
&\quad + r\mathsf{E}[N_1(t,x)N_1(t,y)] - \delta_x(y)rM_1(t,x); \\
M_{12}(0,x,y) &= 0. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Пусть $M_{11}(t,x,y) = \mathsf{E}[N_1(t,x)N_1(t,y)]$. Получим дифференциальное уравнение для функции $M_{11}(t+dt,x,y)$, которое понадобится далее

$$\begin{aligned}
M_{11}(t+dt,x,y) &= M_{11}(t,x,y) + 2(\beta-\mu_1-r)M_{11}(t,x,y)dt + \big(\mathcal{L}_{1,x}M_{11}(t,x,y) \\
&\quad + \mathcal{L}_{1,y}M_{11}(t,x,y)\big)dt + \delta_x(y)\big((\sum_{n\geqslant 2}(n-1)^2 b_n + \mu_1 + r + 2\varkappa_1)M_1(t,x) \\
&\quad + \mathcal{L}_1 M_1(t,x)\big)dt - \varkappa_1 a_1(x-y)\big(M_1(t,x)+M_1(t,y)\big)dt + o(dt).
\end{aligned}$$

Если $dt \to 0$, то получаем дифференциальное уравнения $M_{11}(t,x,y)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{11}(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_{1,x}M_{11}(t,x,y) + \mathcal{L}_{1,y}M_{11}(t,x,y) + 2(\beta-\mu_1-r)M_{11}(t,x,y) \\
&\quad + \delta_x(y)\big((\beta+\mu_1+r)M_1(t,x) - \mathcal{L}_1 M_1(t,x)\big) \\
&\quad - \varkappa_1 a_1(x-y)\big(M_1(t,x)+M_1(t,y)\big); \\
M_{11}(0,x,y) &= \delta_0(x)\delta_0(y). \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится лемма.

Лемма 3.4.1. *Пусть $G(t,x,y) := M_1(t,x)M_2(t,y)$ и $K(t,x,y) = M_1(t,x)M_1(t,y)$. Тогда функции $G(t,x,y)$ и $K(t,x,y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_{1,x}G(t,x,y) + \mathcal{L}_{2,y}G(t,x,y) + (\beta-\mu_1-r-\mu_2)G(t,x,y) \\
&\quad + rK(t,x,y); \\
G(0,x,y) &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K(t,x,y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_{1,x}K(t,x,y) + \mathcal{L}_{1,y}K(t,x,y) + 2(\beta-\mu_1-r)K(t,x,y); \\
K(0,x,y) &= \delta_0(x)\delta_0(y).
\end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{\partial G(t,x,y)}{\partial t} = M_2(t,y)\frac{\partial M_1(t,x)}{\partial t} + M_1(t,x)\frac{\partial M_2(t,y)}{\partial t}.$$

Тогда из уравнений (3.1), (3.2) получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(t,x,y)}{\partial t} &= M_2(t,y)\frac{\partial M_1(t,x)}{\partial t} + M_1(t,x)\frac{\partial M_2(t,y)}{\partial t} = M_2(t,y)\big((\beta-\mu_1-r)M_1(t,x)\\ &\quad + \mathcal{L}_1 M_1(t,x)\big) + M_1(t,x)\big(\mathcal{L}_2 M_2(t,y) - \mu_2 M_2(t,y) + rM_1(t,y)\big)\\ &= \mathcal{L}_{1,x}G(t,x,y) + \mathcal{L}_{2,y}G(t,x,y) + (\beta-\mu_1-r-\mu_2)G(t,x,y) + rK(t,x,y).\end{aligned}$$

Аналогично получаем дифференциальное уравнение для $K(t,x,y)$. Заметим, что

$$\frac{K(t,x,y)}{\partial t} = M_1(t,y)\frac{\partial M_1(t,x)}{\partial t} + M_1(t,x)\frac{\partial M_1(t,y)}{\partial t}.$$

Следовательно, воспользовавшись уравнением (3.1) получаем

$$\begin{aligned}\frac{K(t,x,y)}{\partial t} &= M_1(t,y)\frac{\partial M_1(t,x)}{\partial t} + M_1(t,x)\frac{\partial M_1(t,y)}{\partial t} = M_1(t,y)\big((\beta-\mu_1-r)M_1(t,x)\\ &\quad + \mathcal{L}_1 M_1(t,x)\big) + M_1(t,x)\big((\beta-\mu_1-r)M_1(t,y) + \mathcal{L}_1 M_1(t,y)\big)\\ &= \mathcal{L}_{1,x}K(t,x,y) + \mathcal{L}_{1,y}K(t,x,y) + 2(\beta-\mu_1-r)K(t,x,y).\end{aligned}$$

Начальное условие имеет вид

$$G(0,x,y) = M_1(0,x)M_2(0,y) = 0, \quad K(0,x,y) = M_1(0,x)M_1(0,y) = \delta_0(x)\delta_0(y).$$

■

Рассмотрим асимптотическое поведение функции $M_{22}(t,x,y)$ в частном случае на $\mathbb{Z}^d$. Пусть генераторы случайных блужданий обоих типов совпадают, то есть $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$ и $\beta-\mu_1-r = -\mu_2 = 0$. Пусть случайное блуждание с генератором $\mathcal{L}$ имеет конечную дисперсию скачков. В разделе 3.2 были получены асимптотические представления первых моментов численностей частиц при $t\to\infty$

$$M_1(t,x) \sim \frac{\gamma_d}{t^{d/2}}, \quad M_2(t,x) \sim \frac{r\gamma_d}{t^{d/2-1}}. \tag{3.14}$$

Заметим, что из леммы 3.4.1 и уравнения (3.13) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial(K(t,x,y)-M_{11}(t,x,y))}{\partial t} &= \mathcal{L}_{1,x}(K(t,x,y)-M_{11}(t,x,y)) + \mathcal{L}_{1,y}(K(t,x,y)-M_{11}(t,x,y))\\ &\quad + 2(\beta-\mu_1-r)(K(t,x,y)-M_{11}(t,x,y)) + F(M_1(t,x))\\ &= \mathcal{L}_{1,x}(K(t,x,y)-M_{11}(t,x,y)) + \mathcal{L}_{1,y}(K(t,x,y)-M_{11}(t,x,y))\\ &\quad + F(M_1(t,x)),\end{aligned}$$

где $F\big(M_1(t,x)\big)$ — функция, линейно зависящая от $M_1(t,x)$. Тогда из представления $M_1(t,x)$ при $t \to \infty$ получаем

$$F\big(M_1(t,x)\big) \sim C(y-x)\frac{1}{t^{d/2}},$$

где $C(\cdot)$ функция, которая следует из уравнения (3.13). Тогда при $t \to \infty$

$$K(t,x,y) - M_{11}(t,x,y) \sim \begin{cases} C_1\sqrt{t}, & \text{если } d=1,\\ C_2 \ln t, & \text{если } d=2,\\ C_3/t^{d/2-1}, & \text{если } d \geqslant 3, \end{cases} \tag{3.15}$$

где C_j, $j=1,2,3$ некоторые константы.

Таким же образом получаем,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (G(t,x,y) - M_{12}(t,x,y))}{\partial t} &= \mathcal{L}_{1,x}(G(t,x,y) - M_{12}(t,x,y)) + \mathcal{L}_{1,y}(G(t,x,y) - M_{12}(t,x,y)) \\ &\quad + (\beta - \mu_1 - r - \mu_2)(G(t,x,y) - M_{12}(t,x,y)) \\ &\quad + r(K(t,x,y) - M_{11}(t,x,y)) + \delta_x(y) r M_1(t,x) \\ &= \mathcal{L}_{1,x}(G(t,x,y) - M_{12}(t,x,y)) + \mathcal{L}_{1,y}(G(t,x,y) - M_{12}(t,x,y)) \\ &\quad + r(K(t,x,y) - M_{11}(t,x,y)) + \delta_x(y) r M_1(t,x). \end{aligned}$$

Следовательно, из уравнения (3.15) получаем, что

$$G(t,x,y) - M_{12}(t,x,y) \sim \begin{cases} C_1 t^{3/2}, & \text{если } d=1,\\ C_2 t\ln t, & \text{если } d=2,\\ C_3\sqrt{t}, & \text{если } d=3,\\ C_4 \ln t, & \text{если } d=4,\\ C_5/t^{d/2-2}, & \text{если } d \geqslant 5, \end{cases} \tag{3.16}$$

где C_j, $j=1,2,3,4,5$ некоторые константы. Так как $G(t,x,y) \sim 1/t^{d-1}$, то при $t \to \infty$ для $M_{12}(t,x,y)$ верны те же асимптотики, что и для $G(t,x,y) - M_{12}(t,x,y)$.

Ввиду однородности пространства верно, что

$$M_{22}(t,x,y) = M_{22}(t,0,y-x) = M_{22}(t,u),$$

где $u = y - x$.

Перепишем уравнения для второй корреляционной функции, используя уравнения (3.10) и (3.11), асимптотические представления (3.14) и соотношения (3.16). Для вывода асимптотических представлений при $t \to \infty$ воспользуемся методами из раздела 3.3.

Случай $d = 1$**.** Получаем

$$\frac{\partial M_{22}(t,u)}{\partial t} = 2\mathcal{L}M_{22}(t,u) + 2rC_1 t^{3/2} + \delta_0(u)\frac{r\gamma_1}{t^{1/2}} - \varkappa_2 a_2(u) 2r\gamma_1\sqrt{t};$$
$$M_{22}(0,u) = 0.$$

Получаем, что при $t \to \infty$ слагаемое $2rC_1 t^{3/2}$ определяет асимптотическое поведение $M_{22}(t,u)$. Таким образом, частное решение уравнения

$$\frac{\partial M_{22}(t,u)}{\partial t} = 2\mathcal{L}M_{22}(t,u) + 2rC_1 t^{3/2};$$
$$M_{22}(0,u) = 0$$

при $t \to \infty$ асимптотически стремится к $C' t^{5/2}$.

Случай $d = 2$**.** Аналогично предыдущему случаю получаем дифференциальное уравнени для $M_{22}(t,u)$

$$\frac{\partial M_{22}(t,u)}{\partial t} = 2\mathcal{L}M_{22}(t,u) + 2rC_2 t\ln t + \delta_0(u)\frac{r\gamma_2}{t} - \varkappa_2 a_2(u) 2r\gamma_2;$$
$$M_{22}(0,u) = 0.$$

Аналогично предыдущему случаю получаем, что для нахождения асимптотического поведения $M_{22}(t,u)$ достаточно найти асимптотику частного решения уравнения

$$\frac{\partial M_{22}(t,u)}{\partial t} = 2\mathcal{L}M_{22}(t,u) + 2rC_2 t\ln t;$$
$$M_{22}(0,u) = 0.$$

Отсюда при $t \to \infty$ получаем, $M_{22}(t,u) \sim t^2 \ln t$.

Случай $d = 3$**.** Уравнения для функции $M_{22}(t,u)$ примет вид

$$\frac{\partial M_{22}(t,u)}{\partial t} = 2\mathcal{L}M_{22}(t,u) + 2rC_3\sqrt{t} + \delta_0(u)\frac{r\gamma_3}{t^{3/2}} - \varkappa_2 a_2(u)\frac{2r\gamma_3}{\sqrt{t}};$$
$$M_{22}(0,u) = 0.$$

Асимптотическое поведение $M_{22}(t,x,y)$ при $t \to \infty$ можно найти из решения уравнения

$$\frac{\partial M_{22}(t,u)}{\partial t} = 2\mathcal{L}M_{22}(t,u) + 2rC_3\sqrt{t};$$
$$M_{22}(0,u) = 0.$$

Отсюда следует, что $M_{22}(t,x,y) \sim t^{3/2}$.

Случай $d = 4$**.** Уравнения для функции $M_{22}(t,u)$ примет вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial M_{22}(t,u)}{\partial t} = 2\mathcal{L}M_{22}(t,u) + 2rC_4\ln t + \delta_0(u)\frac{r\gamma_4}{t^2} - \varkappa_2 a_2(u)\frac{2r\gamma_2}{t};\\ &M_{22}(0,u) = 0.\end{aligned}$$

Асимптотическое поведение $M_{22}(t,x,y)$ при $t\to\infty$ можно найти из решения уравнения

$$\begin{aligned}&\frac{\partial M_{22}(t,u)}{\partial t} = 2\mathcal{L}M_{22}(t,u) + 2rC_4\ln t;\\ &M_{22}(0,u) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $M_{22}(t,x,y)\sim t\ln t$.

Случай $d \geqslant 5$**.** Аналогично предыдущему случаю получаем дифференциальное уравнени для $M_{22}(t,u)$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial M_{22}(t,u)}{\partial t} = 2\mathcal{L}M_{22}(t,u) + \frac{2rC_5}{t^{d/2-2}} + \delta_0(u)\frac{r\gamma_d}{t^{d/2}} - \varkappa_2 a_2(u)\frac{2r\gamma_d}{t^{d/2-1}};\\ &M_{22}(0,u) = 0.\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему случаю получаем, что для нахождения асимптотического поведения $M_{22}(t,u)$ достаточно найти асимптотику частного решения уравнения

$$\begin{aligned}&\frac{\partial M_{22}(t,u)}{\partial t} = 2\mathcal{L}M_{22}(t,u) + \frac{2rC_5}{t^{d/2-2}};\\ &M_{22}(0,u) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда при $t\to\infty$ получаем, $M_{22}(t,u)\sim 1/t^{d/2-1}$.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 3.4.1. *Пусть случайное блуждание частиц второго типа имеет конечную дисперсию скачков, то есть*

$$\sum_{z\neq\bar{0}} a_1(z)|z|^2 < \infty.$$

Тогда для второго момента численности частиц второго типа

$$M_{22}(t,x,y) = \mathsf{E}N_2(t,x)N_2(t,y)$$

верны следующие асимптотические представления при $t\to\infty$*.*

$$M_{22}(t,x,y)\sim\begin{cases} C_1 t^{5/2}, & \text{если } d=1\\ C_2 t^2\ln t, & \text{если } d=2\\ C_3 t^{3/2}, & \text{если } d=3\\ C_4 t\ln t, & \text{если } d=4\\ C_d\frac{1}{t^{d/2-1}}, & \text{если } d\geqslant 5,\end{cases}$$

где C_d*,* $d\in\mathbb{N}$ *— некоторые константы.*

Заключение

В диссертации изучались многотипные ВСБ. Для этого случая исследованы первые и вторые моменты численностей частиц субпопуляций. Получены точные решения или асимптотические поведения при различных предположения на число источников ветвления на решетке и генераторы случайных блужданий каждого из типов частиц. Изучены ВСБ с несколькими типами частиц и иммиграцией. Для процессов с одним типом частиц исследована устойчивость процесса по Ляпунову первого и второго момента численностей частиц в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции являются функциями, зависящими от положения частицы на решетке. Для модели ВСБ с двумя типами частиц с возможным изменением типа частиц были получены предельные поведения первого и второго момента численностей частиц каждого из типов.

Основные результаты:

- доказана теорема о поведении первых моментов численностей частиц субпопуляций для ветвящихся случайных блужданий с двумя типами частиц и источниками ветвления в каждой точке многомерной решетки при совпадающих механизмах блужданий;

- доказана теорема о предельном поведении первых моментов численностей частиц субпопуляций для ветвящихся случайных блужданий с двумя типами частиц и источниками ветвления в каждой точке многомерной решетки в случае, когда генератор случайного блуждания первого типа частиц имеет конечную дисперсию скачков, генератор второго типа — бесконечную;

- доказана теорема о предельном поведении первых моментов численностей частиц субпопуляций для ветвящихся случайных блужданий с двумя типами частиц и одним источником ветвления в случае, когда генератор случайного блуждания первого типа частиц имеет конечную дисперсию скачков, генератор второго типа — бесконечную;

- доказана теорема о предельном поведении второго момента численностей частиц для докритического ветвящегося случайного блуждания с одним типом частиц и иммиграцией;

- доказана теорема об асимптотическом поведении первого момента численностей частиц для докритического ветвящегося случайного блуждания с одним типом частиц и иммиграцией в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции зависят от положения частиц на решетке;

- доказана теорема об асимптотическом поведении второго момента численностей частиц для докритического ветвящегося случайного блуждания с одним типом частиц и иммиграцией в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции зависят от положения частиц на решетке;

- доказана теорема об асимптотическом поведении первого момента численностей частиц для ветвящегося случайного блуждания с двумя типами частиц с возможным изменением типа частиц;

- доказана теорема об асимптотическом поведении второго момента численностей частиц первого типа для ветвящегося случайного блуждания с двумя типами частиц с возможным изменением типа частиц;

- доказана теорема об асимптотическом поведении второго момента численностей частиц второго типа для ветвящегося случайного блуждания с двумя типами частиц с возможным изменением типа частиц.

Перспективы дальнейших исследований могут быть посвящены изучению предельного поведения моментов старших порядков численностей субпопуляций и популяций частиц для получения асимптотического поведения численностей частиц при больших временах. Другим направлением является обобщение результатов для ВСБ с двумя типами частиц при отсутствии и наличии иммиграции для ВСБ с конечным числом типов частиц.

Список литературы

[1] Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. II // Издательство Наука, Москва. – 1973. – 640с.

[2] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости // Главная редакция физико-математической литературы, издательство Наука, Москва. – 1967. – 472с.

[3] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической задаче // Бюл. МГУ, Серия А, Математика и механика. – 1937. – (1(6)) – С. 1–25.

[4] Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения // Издательство АСТ. – 2003. – 408с.

[5] Платонова М. В., Рядовкин К. С. Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке $\mathbb{Z}^d$ с периодическими источниками ветвления // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2017. – Т. 466. – С. 234–256.

[6] Платонова М. В., Рядовкин К. С. О среднем числе частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке с периодическими источниками ветвления // Докл. РАН. – 2018. – Т. 479, № 3. – С. 250–253.

[7] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы // Главная редакция физико-математической литературы, изда-во Наука, Москва. – 1971. – 436с.

[8] Смородина Н. В., Яровая Е. Б. Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий с конечным числом типов частиц // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2023. – Т. 526. – С. 172–192.

[9] Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов // Издательство Мир, Москва. – 1971. – 264с.

[10] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям // Интеграл-Пресс, Москва. – 1998. – 207с.

[11] Ширяев А. Н. Вероятность // Издательство Наука, Москва. – 1980. – 575с.

[12] Е.Б.Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде // Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, Москва. – 2007. – 104с. – ISBN 978-5-211-05431-8.

[13] Яровая Е. Б. Пространственная структура ветвящихся случайных блужданий // Издательство МЦНМО, Москва. – 2024. – 303с. – ISBN 978-5-4439-1868-6.

[14] Albeverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B. Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Śerie I. Mathématique 326. – 1998 – No. 8 – P. 975—980 (english).

[15] Bulinskaya E. Vl. Complete classification of catalytic branching random walks // Theory of probability and its applications. – 2015. – Vol. 59, No. 4 – P. 545–566.

[16] Bulinskaya E. Vl. Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice // Stochastic Processes and their Applications. – 2015. – Vol. 128, No. 7 – P. 2325–2340.

[17] Cranston M., Koralov L., Molchanov S., Vainberg B. Continuous model for homopolymers // Journal of Functional Analysis. – 2009. – Vol. 256, No. 8 – P. 2656–2696.

[18] Ermakova E., Mahmutova P., Yarovaya E. Branching random walks and their applications for epidemic modelling // Stochastic Models. – 2019. – Vol. 35, No. 3. – P. 300-317.

[19] Gärtner J., Molshanov S. Parabolic problems for the Anderson model // Commun. Math. Phys. 132. – 1990. – P. 613–655.

[20] Getan A., Molchanov S., Vainberg B. Intermittency for branching walks with heavy tails // Stochastics and Dynamics. – 2016. – 17(6), 1750044 – 14p.

[21] Han D., Molchanov S., Whitmeyer J. Population processes with immigration // Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics. MPSAS 2016. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, Cham, Panov, V. (eds). – 2017. – Vol. 208. – P. 411-434.

[22] Kondratiev Y., Kutoviy O., Pirogov S. Correlation functions and invariant measures in continuous contact model // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2008. – 11(2). – P. 231–258.

[23] Molchanov S., Whitmeyer J. Spatial models of population processes // Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics. MPSAS 2016. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, Cham, Panov, V. (eds). – 2017. – Vol. 208. – P. 435-454.

[24] Rytova A., Yarovaya E. Survival analysis of particle populations in branching random walks // Communications in Statistics Part B: Simulation and Computation. – 2021. – 50(10). – P. 3031-3045.

[25] Vatutin V., Wachtel V. Multi-type Subcritical Branching Processes in Random Environment // Adv. in Appl. Probab., 50:A. – 2018. – P. 281–289.

[26] Vatutin V., Dyakonova E. The Survival Probability for a Class of Multitype Subcritical Branching Processes in Random Environment // Math. Notes 107. – 2020. – P. 189–200.

[27] Yarovaya E. B. Spectral Asymptotics of a Supercritical Branching Random Walk // Theory Probab. Appl.62(3) – 2017. – P. 413–431.

[28] Zeldovich Ya. B., Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D. Intermittency in random field // Physics-Uspekhi – 1987. – Vol. 30, No. 5. – P. 353-369.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности и отрасли наук

1. Han D., Makarova Yu., Molchanov S., Yarovaya E. Branching random walks with immigration // Rykov, V., Singpurwalla, N., Zubkov, A. (eds) Analytical and Computational Methods in Probability Theory, Lecture Notes in Computer Science. – 2017. – Vol. 10684. – P. 401–408.
DOI: 10.1007/978-3-319-71504-9_33 / Импакт-фактор 0.295 (SJR).
Вклад соискателя 0.317 п.л. / Общий объем 0.46 п.л.
Идея написания работы и постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Одна из постановок задач предложена Д. Хан для более простой модели. Все результаты получены Ю. К. Макаровой самостоятельно.

2. Makarova Yu., Han D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching Random Walks with Immigration. Lyapunov Stability // Markov Processes and Related Fields. – 2019. – Vol. 25. – № 4. – P. 683–708.
EDN: JJSKMW / Импакт-фактор 0.204 (SJR).
Вклад соискателя 1.237 п.л. / Общий объем 1.50 п.л.
Идея написания работы и постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Одна из постановок задач предложена Д. Хан для более простой модели. Все результаты получены Ю. К. Макаровой самостоятельно.

3. Makarova Yu., Kutsenko V., Yarovaya E. On Two-Type Branching Random Walks and Their Applications for Genetic Modelling // Recent Developments in Stochastic Methods and Application, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – 2021. – Vol. 371. – P. 255–268.
DOI: 10.1007/978-3-030-83266-7_19 / Импакт-фактор 0.204 (SJR).

Вклад соискателя 0.46 п.л. / Общий объем 0.80 п.л.

Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой. Введение модели и описание приложений (разделы 1-2) принадлежит В. А. Куценко. Все результаты получены Ю. К. Макаровой самостоятельно (разделы 3-5).

4. Makarova Iu., Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching Random Walks with Two Types of Particles on Multidimensional Lattices // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, No. 6. – P. 1–46.
   DOI: 10.3390/math10060867 / Импакт-фактор 0.446 (SJR).
   Вклад соискателя 1.727 п.л. / Общий объем 2.647 п.л.
   Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Д. М. Балашовой принадлежат результаты разделов 5 и 7. Ю. К. Макаровой принадлежат результаты разделов об описании модели, исследованиях первого и второго момента численностей частиц (разделы 2-4) и раздела 6 о поведении численностей частиц в случае, когда частицы могут изменить тип.

Иные публикации

5. Макарова Ю. К. Ветвящиеся случайные блуждания с двумя типами частиц и разными дисперсиями скачков // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института имени В. А. Стеклова РАН. – 2023. – Т. 526. – С. 130–139.
   EDN: YYXETQ / Общий объем 0.576 п.л.

6. Han D., Makarova Yu., Molchanov S., Yarovaya E. Branching random walks with immigration // Proceedings of the International Conference Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications, РУДН, Москва. – 2017. – С. 281–285.
   Идея написания работы и постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Одна из постановок задач предложена Д. Хан для более простой модели. Все результаты получены Ю. К. Макаровой самостоятельно.

7. Balashova D., Makarova Yu., Molchanov S., Yarovaya E. Clustering conditions in branching random walks // Proceedings of the international scientific conference, The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5), РУДН, Москва. – 2020. – P. 24–28.
   Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Д. М. Балашовой принадлежат результаты о кластеризации. Ю. К. Макаровой принадлежат описание модели, исследованиях первого и второго момента численностей частиц и раздела о поведении численностей частиц в случае, когда частицы могут изменить тип.

8. Makarova Yu., Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching Random Walks with Two Types of Particles // Proceedings of the international scientific conference, The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5), РУДН, Москва.

– 2020. – P. 97–101.

Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Д. М. Балашовой принадлежат результаты о кластеризации. Ю. К. Макаровой принадлежат описание модели, исследованиях первого и второго момента численностей частиц и раздела о поведении численностей частиц в случае, когда частицы могут изменить тип.

9. Kutsenko V., Makarova Yu., Yarovaya E. Model of the effect of gene recombination on lethal mutations. An approach using branching random walks // Proceedings of the international scientific conference, The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5), РУДН, Москва. – 2020. – P. 329–333.

   Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой. Описание приложений принадлежит В.А. Куценко. Все результаты получены Ю. К. Макаровой самостоятельно.

10. Makarova Iu. Two-type Branching Random Walks with Different Configurations of Branching Sources // Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress – 2021. – P. 1230–1235.

Тезисы докладов в материалах научных конференций

11. Han D., Makarova Yu., Molchanov S., Yarovaya E. Moment Asymptotics for Branching Random Walks with Immigration // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018). – 2018. – P. 369–370.

12. Макарова Ю. Устойчивость по Ляпунову в ветвящихся случайных блужданиях с иммиграцией // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2019». – 2019.

13. Макарова Ю. Ветвящиеся случайные блуждания с двумя типами частиц // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2020». – 2020.

14. Makarova Yu., Balashova D., Yarovaya E. Multi-type branching random walks on multidimensional lattices // Programme and Abstracts. 14th International Conference on Computational and Financial Econometrics (Virtual CFE 2020) and 13th International Conference of the ERCIM Working Group on Computational and Methodological Statistics (Virtual CMStatistics 2020). – 2020. – P. 149–149.

15. Kutsenko V., Makarova Yu., Yarovaya E. Modeling of metabolic mutation evolutionary processes using branching random walks // Programme and Abstracts 14th International Conference on Computational and Financial Econometrics (Virtual CFE 2020) and 13th International Conference of the ERCIM Working Group on Computational and Methodological Statistics (Virtual CMStatistics 2020). – 2020. – P. 859–859.

16. Makarova Yu., Yarovaya E. Two-Type branching random walks in homogeneous and non homogeneous environments // Book of Abstracts, the 5th International Workshop on Branching Processes and their Applications, April 2021. – 2021.