МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛОСОФСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Григорьев Олег Михайлович

Логики систем обобщенных истинностных значений

5.7.5. Логика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора философских наук

Москва – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Изучение систем обобщенных истинностных значений и их логик оформилось в самостоятельное направление исследований относительно недавно. Термин «обобщенное истинностное значение» в техническом смысле был использован впервые в работе М. Данна, Т. Такенаки и Я. Шрамко [83] в качестве обозначения для семантического объекта, который возникает в результате обобщения функции оценки выражений формализованного языка. В свою очередь идея обобщения функции оценки была предложена – намного раньше – М. Данном [31] в качестве инструмента, служащего для определения отношения релевантного следования, а к первым системам обобщенных истинностных значений можно отнести логическую и аппроксимационную четырехэлементные решетки, введенные в исследовательский обиход Н. Белнапом [11, 12].

Таким образом, указанное направление исследований обладает как широким контекстом, охватывающим необозримое поле научных работ, так или иначе связанных с семантикой системы релевантного следования **FDE**, так и более узким, определяемым исследовательскими проектами, продолжающими линию работ [84, 85, 95, 70, 71, 91].

Некоторые значимые области исследований, лежащие на стыке философской и символической логики, а также теоретической информатики, генетически также восходят к изучению систем обобщенных истинностных значений. В особенности это относится к многочисленным работам, посвященным разработке теории и приложений так называемых бирешеток – структур, нашедших свое применение в анализе широкого спектра проблем и задач – от философской теории истины до семантики языков логического программирования [44, 45, 38, 39, 40, 9, 41].

Процедуры порождения множеств обобщенных истинностных значений и возможность определять на этих множествах разнообразные отношения и операции дают весьма гибкий и тонкий инструмент для анализа широкого круга познавательных задач, значимых в философском отношении. В частности, это моделирование и анализ рассуждений в условиях противоречивой или неполной информации, моделирование эпистемических состояний рационального субъекта, логический анализ подходящего для этих целей логического инструментария, включая расширение арсенала операторов и пропозициональных связок формализованных языков.

Обобщенные истинностные значения представляют собой наиболее яркий пример эволюции идей в контексте исследовательского поля философской логики: от содержательных допущений онтологического характера – например о комплексной структуре истинностного значения – до реализации этих идей в виде конкретных семантических структур и формализации определяемых ими логических теорий.

В связи с этим сам характер исследовательских задач, возникающих в данной предметной области, может быть совершенно различным, иметь в большей степени философский, или же формально-логический оттенок. С одной стороны, можно разрабатывать теорию истины на основе определенного подхода к построению множества обобщенных истинностных значений, с другой – исследовать метатеоретические вопросы, связанные с построением логических исчислений, формализующих логические теории, порождаемые тем же самым множеством, как семантической структурой.

Степень разработанности проблемы. Как отмечалось ранее, проблематика, связанная с изучением обобщенных истинностных значений имеет давнюю историю и восходит к работам М. Данна и Н. Белнапа 70-х годов XX века (см. ставшие классическими работы [11, 12, 31], а также более современные [33, 35]). Идеи Данна и Белнапа сыграли ключевую роль в зарождении и развитии релевантной логики, одного их важнейших разделов современной неклассической логики. Однако в контексте данного исследования определенную роль играет лишь система **FDE**, наиболее фундаментальная из систем релевантной логики.

Семантические конструкции, которые явным образом относятся (прежде всего самими авторами) к системам обобщенных истинностных значений появились уже в работах первого десятилетия XXI века, начиная с упоминавшейся ранее статьи [83] и тематически связанных с ней [84, 85]. С выходом этих работ стало понятно, что обобщенные истинностные значения представляют собой удобное средство для описания семантическими средствами широкого круга содержательных философских идей (связанных, тем или иным образом, с различным пониманием истинности). Достигается это за счет усложнения структуры самих истинностных значений, а также в силу того, что появляется возможность различными способами определять отношение логического следования. Кроме того, стало ясно, что некоторые, давно и хорошо известные семантические конструкции, фактически являются примерами систем обобщенных истинностных значений. В первую очередь это относится к семантическим построениям, основанным на множестве истинностных значений Данна и Белнапа[1],

[1]Поэтому, в частности, важнейшие для развития направления исследований статьи [83,

к которым относятся описанные еще в работах Белнапа [11, 12] четырехэлементные решетки с различными отношениями порядка (см. также 19), бирешетки, начало изучению которых положил М. Гинзберг [44, 45] и ряд других конструкций[2].

Логические теории, индуцируемые разнообразными семантическими конструкциями, построенными на основе множества истинностных значений Данна и Белнапа, изучались на протяжении длительного времени. Литература, относящаяся к данной проблематике, практически необозрима. Собственно для изучения систем обобщенных истинностных значений и их логик основополагающими являются работы [83, 84, 85]. Техническим задачам, связанным с формализациями логических теорий разнообразных систем обобщенных истинностных значений (генетически восходящим к истинностным значениям Данна и Белнапа) и изучением их метатеоретических свойств посвящены работы [9, 87, 88, 71, 70, 72, 91] и многие другие.

Обобщенные истинностные значения строятся не только как обобщения истинностных значений классической логики. В работе [95] в качестве базисного множества использовалось множество значений трехзначной логики. Онтоэпистемические истинностные значения были представлены в докладе [47] и в последовавших статьях [4, 96], развивающих данную тематику. Аксиоматизация отношения следования, определяемого через сохранение порядка в решетке онтоэпистемических истинностных значений появилась впервые в статье [94], однако в данном диссертационном исследовании предложена иная формализация того же самого отношения следования. Вариант онтоэпистемических истинностных значений с компонентом неопределенности был предложен в работе [51]. Там же была предложена формализация отношения следования.

Реляционная семантика, которая использовалась в данном исследовании для развития идеи двухкомпонентной истины, была описана (довольно кратко) в статье [7] для совершенно других целей. Этой же семантике посвящен небольшой фрагмент книги [16], где также дано аксиоматизирующее соответствующую логику исчисление секвенций, но без связки типа отрицания в языке.

Семантические конструкции с циклической операцией, мотивированные логикой квантовых вычислений были предложены в работах [58] и [10], в которых были построены исчисления для формализации отношений логического следования и изуче-

---

84, 85, 95] начинаются с описания множества истинностных значений Данна-Белнапа и семантики релевантной системы превоуровневого следования.

[2]Например, фактор-семантика из статьи А. С. Карпенко [66], в которой истинностные значения представляют собой последовательности классических истинностных значений.

ны отношения некоторых из полученных исчислений с исчислением для классической логики высказываний. Родственные логические системы с циклическим отрицанием (но отличные от систем из [58, 10]), изучались в работах [79, 63] и [74], исходя из совершенно других мотиваций. Идеи, предложенные в [58] и [10] получили дальнейшее развитие в статье [73].

Изучение абстрактных n-решеток началось сравнительно недавно, хотя уже в работах [84, 85] даются определения n-решеток (мультирешеток, в терминологии авторов), а в [82] предложено секвенциальное исчисление, формализующее пропозициональную логику n-решеток, являющееся обобщением исчисления, построенного в [9] для случая бирешеток. Детальные доказательства теорем об адекватности исчисления семантике в [82] однако не приводятся. В ряде последующих работ [64, 65] также сформулированы исчисления секвенций, формализующие пропозициональные логики n-решеток, однако оценка формул определяется в иных семантических структурах (предположительно детерминирующих ту же самую логику, что и классы n-решеток), а доказательства их непротиворечивости и полноты проводятся через погружающие функции.

Добавление к алфавиту пропозиционального языка модальных операторов также можно отнести к стандартным процедурам, расширяющим сферу исследований логических систем, при учете многообразия содержательных интерпретаций модальностей. В работе [65] и следующих в этом же русле [53, 54, 55, 56] предпринята попытка построить формализации модальных логик n-мерных решеток. Модальности при этом интерпретируются как операции в самих n-решетках, а именно решеточные операции взятия внутренности и замыкания. Авторы работы [65] отталкивались от исследований [20, 21], в которых решетки вместе с операциями взятия внутренности и замыкания служат в качестве математического аппарата для неточных множеств (rough sets). При этом сами операции взятия внутренности и замыкания могут обладать различными свойствами, сближающими их с модальностями некоторых известных систем модальной логики.

В статьях [53, 54, 55] продолжается линия исследований, задаваемая работами [64, 65].

Объектом исследования являются пропозициональные системы неклассической логики, семантика которых предполагает использование конструкций, основанных на множествах таких истинностных значений, которые можно отнести к категории обобщенных истинностных значений в силу их структурных особенностей или способа их порождения.

Предметом исследования выступают множества обобщенных истинностных значений, логические теории, определяемые семантическими структурами (решетками, логическими матрицами, реляционными структурами), построенными на множествах обобщенных истинностных значений, отношения между теориями. Особое внимание уделяется вопросу о формализации таких логических теорий в виде систем бинарного следования, исчислений секвенций и аксиоматическх исчислений гильбертовского типа. Исследуются метатеоретические свойства полученных формализаций, в первую очередь их семантические непротиворечивость и полнота.

Цели и задачи исследования. Цели диссертационной работы:

- Построение и исследование свойств систем обобщенных истинностных значений, реализующих идею различения онтологического и эпистемического компонента истины и лжи (как значений высказываний или выражений формализованного языка), а также систем обобщенных истинностных значений, структура которых обусловлена циклической природой операций, схожих по своим свойствам с отрицанием.

- Исследование метатеоретических свойств формализующих указанные системы логических исчислений.

- Построение формализаций семантических структур, получаемых в результате абстрагирования от конкретных характеристик обобщенных истинностных значений, их внутренней структуры и способа их образования. Доказательство утверждений об их метатеоретических свойствах.

Для достижения поставленных целей были поставлены и решены следующие задачи:

- Определение семантических структур на основе множества онтоэпистемических истинностных значений, задание правил означивания выражений формализованного языка (с двумя разновидностями отрицания), в таких структурах, определение различных отношений логического следования.

- Исследование формальных свойств семантических структур, построенных на множествах онтоэпистемических истинностных значений.

- Построение формализации логических теорий, определяемых семантическими структурами, построенными на множестве онтоэпистемических истинностных значений, как с компонентом онтологической и эпистемической неопределенности (множество $\mathbf{9}^u$), так и без него (множество $\mathbf{4}^{oe}$).

- Доказательство метатеорем об адекватности полученных исчислений.

- Построение реляционной семантики с двумя видами (онтологическим и эпистемическим) означивания формул, определение отношений логического следования, изучение формальных свойств построенных семантических структур.

- Построение формализации одного из отношений логического следования, определяемого в реляционной семантике. Доказательство метатеорем об адекватности полученной формализации.

- Определение семантических структур (логических матриц), построенных на основе множества истинностных значений, мотивированных преобразованиями информации в квантовых вычислениях. Задание правил означивания выражений формализованного языка (с циклическим отрицанием), определение отношений логического следования.

- Построение исчислений различных типов, формализующих логические теории, определяемые построенными логическими матрицами. Доказательство метатеорем об адекватности полученных исчислений.

- Разработка доказательств алгебраических непротиворечивости и полноты пропозициональных исчислений, формализующих логики многомерных решеток с заданными на них семействами унарных операций.

Научная новизна исследования. В ходе проведения данного диссертационного исследования был получен ряд результатов, расширяющих как известные типы обобщенных истинностных значений, так и спектр построенных на их основе семантических структур, а также семейства определяемых семантическими структурами логических теорий. Научная новизна полученных научных результатов описывается следующими пунктами.

- Определены системы онтоэпистемических истинностных значений, образующие вместе с отношением порядка дистрибутивные решетки с четырех- или девятиэлементным множеством-носителем, допускающие различные определения отношения логического следования. Дана интерпретация пропозиционального языка $\mathscr{L}^{oe}$, содержащего среди логических символов две нестандартные логические связки $\neg_t$ и $\neg_1$, соответствующими унарным операциям на множестве онтоэпистемических истинностных значений.

- Предложены формализации отношений логического следования, определяемого на множествах онтоэпистемических истинностных значений, в виде систем бинарного следования.

- Построена реляционная семантика для языка $\mathscr{L}^{oe}$ с двумя типами означивания формул на множестве-носителе шкалы, соответствующими онтологической и эпистемической трактовке истины.

- Предложены особые разновидности обобщенных истинностных значений с циклической унарной операцией, которой в языке логических теорий соответствует так называемое циклическое отрицание. Поскольку множества истинностных значений допускают различные варианты упорядочения, были получены разные по структуре логические матрицы, порождающие семейство отношений логического следования. Результирующие логические теории получили формализации различных типов (системы бинарного следования, исчисления секвенций, аксиоматизации гильбертовского типа) с доказательствами их адекватности построенной семантике.

- Исследован вопрос об алгебраической полноте секвенциальных формализаций пропозициональных логик n-мерных решеток – наиболее абстрактных структур, обобщающих системы истинностных значений, изучаемых в данной диссертационной работе. При этом рассматривались n-мерные решетки с различными унарными операциями. Некоторые из них по своим свойствам родственны отрицанию, другие – модальным операторам из ряда известных систем модальной логики.

Положения, выносимые на защиту.

- Построена система бинарного следования, представляющая собой адекватную формализацию логической теории $\mathbf{FDE}_{oe}$, определяемой решеткой онтоэпистемических истинностных значений $\mathscr{L}\mathbf{4}^{oe}$.

- Построена система бинарного следования, представляющая собой адекватную формализацию логической теории $\mathbf{FDE}_u$, определяемой решеткой онтоэпистемических истинностных значений $\mathscr{L}\mathbf{9}^u$.

- Сформулирована реляционная семантика для языка с онтологическим и эпистемическим отрицаниями, построена формализация одного из отношений следования, определяемого через сохранность онтологической истинности и обратную сохранность онтологической ложности. Доказаны теоремы о семантической непротиворечивости и полноте полученного исчисления.

- Построены непротиворечивые и полные исчисления, формализующие логические теории циклического отрицания, определяемые двумя видами матричных семантических структур, образованных над множествами обобщенных истинностных значений с унарной циклической операцией на множестве-носителе.

- Построены исчисления, формализующие логики n-решеток с инверсиями и с унарными операциями взятия замыкания и внутренности со свойствами, аналогичными свойствам модальности системы **S4**. Доказаны алгебраическая непротиворечивость и полнота полученных исчислений.

Теоретическое и практическое значение исследования. Результаты, полученные в ходе написания диссертационной работы, существенно расширяют саму предметную область исследования систем обобщенных истинностных значений. Были предложены новые типы таких объектов, способы их конструирования, семантические структуры, определения отношений логического следования. Были разработаны необходимые модификации методов доказательств теорем об адекватности семантике исчислений, формализующих логические теории, определяемые новыми типами семантических структур.

Изученные в диссертационной работе проблемы далеко не исчерпывают весь спектр возможных направлений исследований. Остается открытым ряд технических проблем, а, кроме того, появляется обширное пространство для дальнейшего развития предложенных идей и методов.

Практическая значимость результатов исследования выражается в возможности разработки на их основе различных специальных курсов по современной неклассической логике, предназначенных как для студентов, специализирующихся на логической проблематике, так и для изучающих курсы по выбору. Гибкость в подборе материала обусловлена в данном случае спецификой самой проблематики, тесно связанной с философскими основаниями логики и познавательной деятельности в целом, но имеющей, в то же время, достаточно сложную техническую реализацию.

Методологическая основа исследования. В данном диссертационном исследовании использовались методы современной символической логики, среди которых можно выделить различные методы построения логических исчислений, применяемые при формализации логических теорий. В широком смысле это аксиоматический метод, имеющий конкретные реализации в форме исчислений гильбертовского типа, исчисления секвенций, систем бинарного следования. Для доказательства метатеорем широко применялся метод математической индукции в различных его формах (например, доказательства индукцией по построению формулы, по длине доказательства и т. п), а также стандартные логические методы доказательств, такие, как рассуждение по случаям, рассуждение сведением к абсурду.

Степень достоверности и апробация результатов исследования. Результаты проведенной работы опубликованы в ведущих международных периодических изданиях, а также подкреплены ссылками на авторитетные научные исследования в соответствующей тематике работы сфере современной неклассической логики.

Всего по теме диссертации соискателем опубликовано **16** научных работ общим объемом 19,4 п.л., из них **15** статей – в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по научной специальности 5.7.5. Логика (индексируемых в ядре Российского индекса научного цитирования «eLibrary Science Index»).

Публикации в рецензируемых изданиях, отвечающих требованиям п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова (публикации в рецензируемых изданиях, индексируемых в базе ядра Российского индекса научного цитирования "eLibrary Science Index"):

1. Bolotov A., Basukoski A., Grigoriev O., Shangin V. Natural deduction calculus for linear-time temporal logic // Lecture Notes in Computer Science. 2006. Vol. 4160. Springer Berlin Heidelberg. P. 56–68. Импакт-фактор – 0,352 (SJR). 0,8 п. л. (авторский вклад: 30%).

2. Grigoriev O., Zaitsev D. Relevant generalization starts here (and here = 2) // Logic

and Logical Philosophy. 2010. Vol. 19. № 4. P. 329–340. Импакт-фактор – 0,87 (JCI). 0,7 п. л. (авторский вклад: 50 %).

3. Григорьев О. М., Зайцев Д. В. Две истины – одна логика // Логические исследования. 2011. Т. 17. С. 121–139. Импакт-фактор – 0,154 (SJR). 1 п. л. (авторский вклад: 50%).

4. Grigoriev O. Two formalisms for a logic of generalized truth values // Bulletin of Symbolic Logic. 2015. Vol. 21, № 1. P. 71–72. Импакт-фактор – 0,62 (JCI). 0,1 п. л.

5. Grigoriev O. Generalized truth values: From logic to the applications in cognitive sciences // Lecture Notes in Computer Science. 2016. Vol. 9719. P. 712–719. Импакт-фактор – 0,352 (SJR). 0,5 п. л.

6. Grigoriev O. M. Logic of bipartite truth with uncertainty dimension // Journal of Applied Logics – IfCoLoG Journal of Logics and their Applications. 2019. Vol. 6. № 2. P. 291–319. Импакт-фактор – 0,61 (JCI). 1,7 п. л.

7. Grigoriev O., Petrukhin Y. On a multilattice analogue of a hypersequent S5 calculus // Logic and Logical Philosophy. 2019. Vol. 28, № 4. P. 683–730. Импакт-фактор – 0,87 (JCI). 2 п. л. (авторский вклад: 50%).

8. Grigoriev O., Petrukhin Y. Two proofs of the algebraic completeness theorem for multilattice logic // Journal of Applied Non-classical logics. 2019. Vol. 29. № 4. P. 358–381. Импакт-фактор – 0,61 (JCI). 1,5 п. л. (авторский вклад: 50%).

9. Grigoriev O., Petrukhin Y. Modal multilattice logics with Tarski, Kuratowski and Halmos operators // Logic and Logical Philosophy. 2021. Vol. 30, № 3. P. 385–415. Импакт-фактор – 0,87 (JCI). 2 п. л. (авторский вклад: 50%).

10. Григорьев О. М. Системы временной логики I: моменты, истории, деревья // Логические исследования. 2021. Т. 27, № 2. С. 153–184. Импакт-фактор – 0,154 (SJR). 2 п. л.

11. Grigoriev O., Zaitsev D. Basic four-valued systems of cyclic negations // Bulletin of the section of logic. 2022. Vol. 51, № 4. P. 507–533. Импакт-фактор – 0,349 (SJR). 1,5 п. л. (авторский вклад: 50%).

12. Grigoriev O., Petrukhin Y. Basic modal congruent and monotonic multilattice logics // Journal of Logic and Computation. 2023. Vol. 33, № 6. P. 1379–1398. Импакт-фактор – 0,63 (JCI). 1,8 п. л. (авторский вклад: 50%).

13. Grigoriev O., Nasieniewski M., Mruczek-Nasieniewska K., et al. Axiomatizing a minimal discussive logic // Studia Logica. 2023. Vol. 111, № . 5. P. 855–895. Импакт-фактор – 0,95 (JCI). 1,8 п. л. (авторский вклад: 30%).

14. Григорьев О. М., Беликов А. А. О проблеме симуляции паранепротиворечивых и параполных отрицаний // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 2024. Т. 48, № 4. С. 56–73. Импакт-фактор – 0,287 (РИНЦ). 1 п. л. (авторский вклад: 50%).

15. Беликов А. А., Григорьев О. М., Маркин В. И. Основные направления и результаты исследований по философской логике в Московском университете // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 2024. Т. 48, № 6. С. 71–98. Импакт-фактор – 0,287 (РИНЦ). 1 п. л. (авторский вклад: 35%).

2. Иные публикации

16. Grigoriev O., Petrukhin Y. Non-deterministic logic of generalized classical truth values // Many-valued Semantics and Modal Logics: Essays in Honour of Yuriy Vasilievich Ivlev. Synthese Library. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG. 2024. P. 93–109. Импакт-фактор отсутствует. 1 п. л. (авторский вклад 50%).

Работа прошла обсуждение на заседании кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова и была рекомендована к защите.

Основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, и возможности их теоретического применения в различных предметных областях были представлены на всероссийских и международных конференциях:

1. Grigoriev O. M. Bipartite truth and semi-negations // Седьмые Смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции. 22-24 июня 2011 года. Современные тетради, Москва: 2011. P. 54–55.

2. Grigoriev O. M. A tableau calculus for a logic of two-component truth // Восьмые Смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции. 19-21 июня 2013 года. Современные тетради. Москва. 2013. P. 46–48.

3. Grigoriev O. M. Two Formalisms for a Logic of Generalized Truth Values. Logic Colloquium-2014, July 19–24, Austria, Vienna, 2014.

4. Grigoriev O. M. Semantic analysis of classical seminegations // Материалы международной научной конференции «Девятые Смирновские чтения по логике». Москва, 17–19 июня 2015 года. Современные тетради. Москва. 2015. P. 58–59.

5. Grigoriev O. M. Generalized Truth Values: From Logic to the Applications in Cognitive Sciences. 13 International Symposium on Neural Networks, ISNN 2016. St. Petersburg, Russia, July 6–8, 2016.

6. Grigoriev O. M. Generalized truth values and quantum logic // Материалы Международной научной конференции «Десятые Смирновские чтения по логике». Москва, 15–17 июня 2017 года. Современные тетради. Москва. 2017. P. 70–71.

7. Grigoriev O. M. Logic of Bipartite Truth with Uncertainty Dimension. ISRALOG'17. The Third Israeli Workshop on Non-Classical Logics and Their Applications. University of Haifa, 15–17 Oct. 2017., University of Haifa, Israel.

8. Беликов А. А., Григорьев О. М., Зайцев Д. В. Две грани циклического отрицания // Материалы Международной научной конференции «Одиннадцатые Смирновские чтения по логике ». Москва, 19–21 июня 2019 года. Современные тетради. Москва. 2019. С. 8–10.

9. Grigoriev O. M., Petrukhin Y. I. On a multilattice version of the relevant logic R. Trends in Logic 19: Current Issues in Philosophical Logic, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики (НИУ ВШЭ), Москва, Россия, 2–4 октября 2019.

10. Grigoriev O. M., Petrukhin Y. I. On a multilattice version of S5 // Материалы Международной научной конференции «Одиннадцатые Смирновские чтения по логике». Москва, 19–21 июня 2019 года. Современные тетради. Москва. 2019. P. 14–16.

11. Grigoriev O. M., Zaitsev D. V. Cyclic Negations and Four-valuedness. 10th International Conference NCL'22: Non-classsical logics. Theory and applications 2022, Łódź, Poland, March, 14–18, 2022.

12. Григорьев О. М., Беликов А. А., Слюсарев И. Ю. О проблеме симуляции отрицаний в паранепротиворечивых и параполных логиках // Тринадцатые Смирновские чтения по логике. Москва. 2023. С. 66–69.

13. Григорьев О. М. Обобщенные истинностные значения: от содержательных интерпретаций к абстрактным структурам. IV когресс РОИФН «Наука, технологии и ценности в неустойчивом мире», Вологда, Россия, 27–29 сентября 2024 г.

Структура диссертации Работа состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы, заключения и списка литературы.

ГЛАВА ПЕРВАЯ. СИСТЕМЫ ОБОБЩЕННЫХ ИСТИННОСТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

§1. Обобщенные истинностные значения и семантика FDE-подобных систем

В статье 1976 года [31] М. Данн предложил обобщение функции приписывания значений формулам стандартного пропозиционального языка $\mathscr{L}$ (содержащего в своем алфавите набор связок $\{\sim, \wedge, \vee\}$) в множестве $\mathbf{2} = \{T, F\}$, привычных истинностных значений классическое логики. *Релевантной*[3] оценкой было предложено считать *отношение* между формулами и элементами множества $\{T, F\}$. Теперь формуле могут быть приписаны оба истинностных значения или же ни одно из них. С помощью такой оценки можно определить новое отношение следования, а именно отношение релевантного следования, которое, в частности, свободно от наиболее известных парадоксов классического логического следования, $A \wedge \sim A \models B$ и $B \models A \vee \sim A$.

То же самое можно получить, если оценку определять как отображение формул в множество подмножеств множества $\{T, F\}$. Но тогда в качестве истинностных значений будут выступать теоретико-множественные объекты $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$ и $\varnothing$. Именно они и являются наиболее известным примером того, что в результате осознания целостности и самостоятельности определенной исследовательской области стали называть *обобщенными истинностными значениями*. Обобщенная функция оценки позволяет дать формальное представление пресыщенности и «недоопределенности» (истинностно-значного провала) оценки – характеристик приписывания значений высказываниям или формулам, играющим важнейшую роль в семантике многих неклассических логик. В то же время обобщенные истинностные значения заключают эти характеристики в самой своей структуре.

Именно по этому пути последовал Н. Белнап [11, 12], принимая элементы множества $\mathbf{4} = \{\{T\}, \{F\}, \{T, F\}, \varnothing\}$ в качестве значений формул. В некотором смысле он «встроил» обобщение оценки Данна в сами истинностные значения, предложив вместе с этим и интуитивно приемлемую эпистемическую ситуацию, в рамках которой использование нестандартных истинностных значений было бы вполне оправданным с содержательной точки зрения. Такая ситуация предполагает наличие рационального субъекта, или попросту компьютера, который получает информацию из различных

[3] Термин, употребляемый в тексте указанной статьи.

внешних источников и присваивает высказываниям истинностные значения в соответствии с тем, что ему *было сообщено*. Если некоторый источник сообщает, что имеет место A, то этому высказыванию будет приписано значение T. В то же время другой источник может сообщить, что A не имеет места и тогда этому высказыванию нужно приписать значение F. В случае такой противоречивой информации субъект припишет высказыванию A особое истинностное значение $\mathbf{B}$ (*both*), считая, что его оценка является *пресыщенной*. Не исключена и обратная ситуация, в которой A не получает никакого значения из множества $\{T, F\}$, поскольку никакой информации относительно его истинностного статуса не поступало. В таком случае имеет место истинностно-значный провал. Тем не менее, свое значение A все же получит: это значение $\mathbf{N}$ (*none*).

Истинностное значение $\mathbf{B}$ можно переписать в виде множества $\{T, F\}$. Тогда, с одной стороны, более наглядно становится идея «пресыщенности» оценки высказывания или формулы, а с другой выявляется теоретико-множественная природа предложенных Белнапом истинностных значений. Естественно полагать, что значению $\mathbf{N}$ соответствует множество $\{\}$ или $\varnothing$, а классическим истинностным значениям – одноэлементные множества $\mathbf{T} = \{T\}$ и $\mathbf{F} = \{F\}$. Таким образом, полученное множество истинностных значений содержит четыре элемента, $\mathbf{4} = \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{F}\}$.

Приписывание значений формулам на этом множестве может осуществляться поразному. Значения пропозициональных связок можно определить обычным табличным способом или же с помощью функции оценки и метаязыковых эквиваленций. Пусть v есть какое-то отображение формул пропозиционального языка $\mathscr{L}$ (содержащего, по-прежнему, набор связок $\{\sim, \wedge, \vee\}$) в множество $\mathbf{4}$. Условия истинности и ложности, к примеру, для связки $\wedge$ можно записать следующим образом:

$$T \in v(A \wedge B) \iff T \in v(A) \ \& \ T \in v(B),$$
$$F \in v(A \wedge B) \iff F \in v(A) \text{ или } F \in v(B).$$

При таком определении удобно говорить про формулу, что она «по крайней мере истинна» или «по крайней мере ложна», подразумевая, что истинностное значение этой формулы содержит в качестве элемента значения из «исходного» множества $\{T, F\}$. Нетрудно также видеть, что множество $\mathbf{4}$ с теоретико-множественной точки зрения есть множество-степень множества $\mathbf{2}$. Таким образом обобщенные истинностные значения порождаются в данном случае операцией взятия множества всех подмножеств некоторого базисного множества истинностных значений.

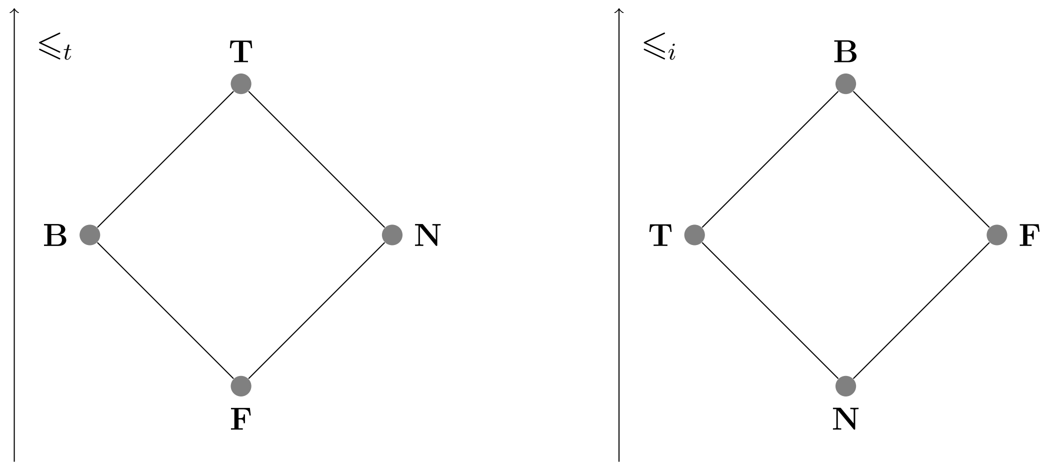

Рисунок 1. Логическая решетка $L4$ и аппроксимационная решетка $A4$.

Помимо всего вышесказанного, Белнап заметил[4], что теоретико-множественная структура истинностных значений множества **4** естественным образом позволяет упорядочить элементы этого множества по отношению включения. Получается упорядоченное множество, которое представляет собой четырехэлементную *решетку*. Частично-упорядоченные множества, образующие решеточные структуры играют исключительно важную роль в семантике неклассических логик и, в особенности, логик обобщенных истинностных значений. Основные сведения об абстрактных решетках вынесены в отдельный параграф.

Множество белнаповских истинностных значений, упорядоченное по включению, образует так называемую аппроксимационную решетку $A4$. На рисунке 1 диаграмма для $A4$ изображена справа. Отношение порядка направлено, как это принято, снизу вверх, пары элементов, находящихся в отношении $\leqslant_i$, соединены линией, верхний элемент больше нижнего (покрывает, мажорирует, содержит его).

Отношение порядка содержательно трактуется как отношение по приращению информации, приращению знания об истинностном статусе высказывания или формулы (в литературе можно встретить обозначение $\leqslant_k$, где индекс отсылает к знанию). Само «знание» здесь трактуется чисто технически. Наибольшая информация о значении высказывания имеется тогда, когда поступили противоречивые сведения о его истинностном статусе. Продвижение по отношению порядка $\leqslant_i$ в решетке ведет к более полной информации, пусть даже она представляет собой пресыщенную оценку высказывания.

[4]Сам Н. Белнап в статьях [11, 12], отмечает, что конструкции, связанные с упорядоченными множествами, о которых он рассуждает, восходят к более ранним работам Д. Скотта.

Для логических построений более интересным был бы порядок по приближению к знанию о том, что высказывание принимает единственное значение «истина». В таком случае наибольшим элементом решетки должен быть **T**, а наименьшим **F**. Два других элемента оказываются несравнимыми. Диаграмма логической решетки $L4$ показана на рисунке 1 слева. Порядок $\leqslant_t$ называют «истинностным» или по приращению истинности. Интересно, что Белнап приходит к логической решетке $L4$ путем анализа значений сложных высказываний, образованных с помощью пропозициональных связок из множества $\{\sim, \wedge, \vee\}$, при их оценке на множестве **4**. К примеру, $A \wedge B$ *должно* оцениваться так же, как в классической логике, если принимать во внимание только значения **T** и **F**. Значения конъюнктивного высказывания при возможном приписывании конъюнктам значений **B** и **N** вычисляются с учетом обязательной монотонности $\wedge$ (поскольку монотонна операция пересечения $\cap$ в решетке, являющаяся семантическим коррелятом связки $\wedge$). Результирующие таблицы для связок и дают решетку $A4$.

Следующая задача– дать определение отношения логического следования между формулами языка $\mathscr{L}$. Сделать это, с учетом приписывания значений формулам в множестве **4**, можно различными способами. В работе Белнапа следование определяется через отношение порядка в $L4$. Пусть формулы по-прежнему принадлежат пропозициональному языку со связками $\{\sim, \wedge, \vee\}$, а v есть отображение множества формул в $L4$. Тогда

$$A \vDash_{\leqslant_t} B \iff v(A) \leqslant_t v(B).$$

Эквивалентным образом отношение следования можно определить через сохранение истины или через сохранение не-ложности:

$$A \vDash_t B \iff T \in v(A) \implies T \in v(B),$$
$$A \vDash_f B \iff F \in v(B) \implies F \in v(A).$$

То, что оба подхода к определению отношения логического следования эквивалентны, конечно, не очевидно. Доказательство этого факта можно найти в статье М. Данна [33].

Множество пар формул (A, B) языка $\mathscr{L}$, для которых верно $A \vDash_{\leqslant_t} B$ образует логику решетки $L4$, формализация которой дает хорошо известную систему превоуровневого следования **FDE**. Вновь укажем на статью [33] в качестве источника информации о системе **FDE**, ее аксиоматизации в виде системы бинарного следования и доказательствах метатеоретических свойств этого исчисления.

Более сложная картина с отношениями логического следования и их формализациями возникает в том случае, если рассматривать решетку $L4$ как основу для построения *логических матриц*. Теория логических матриц сама по себе является хорошо разработанной и изученной областью знания (см. [93, 43]). Специфика матриц состоит в том, что, помимо множества-носителя $\mathscr{U}$ и множества операций $\{f_i\}_{i\in I}$, заданных на нем, определяется дополнительное множество $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{U}$ выделенных значений. Логическая матрица, таким образом, представляет собой структуру вида $\langle \mathscr{U}, \{f_i\}_{i\in I}, \mathscr{D}\rangle$. Выделенные значения представляют собой аналоги «истины», иными словами, то что при любой оценке формул должно быть значением закона теории или то, что сохраняется отношением логического следования.

В решетке $L4$ по тем или иным соображениям можно выбрать различные множества выделенных значений. Например, такие истинностные значения, которые содержат компонент T, то есть $\mathscr{D} = \{\mathbf{T}, \mathbf{B}\}$. Отношение логического следования тогда задается через сохранность выделенного значения:

$$A \vDash_T B \iff (v(A) \in \mathscr{D} \implies v(B) \in \mathscr{D}).$$

При таком выборе множества выделенных значений формализация множества пар формул (A, B), для которых $A \vDash_T B$ вновь есть система **FDE**. Ситуация меняется, если выбирать $\mathscr{D} = \{\mathbf{T}\}$ или даже $\mathscr{D} = \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}\}$. Результирующие логические системы исследованы в работах [87, 88].

Из вышесказанного происходят по крайней мере две ключевые идеи, лежащие в основе многих исследований, которые можно отнести к общей тематике изучения систем обобщенных истинностных значений. Во-первых, сама генерализация функции оценки не обязательно связана с множеством $\{T, F\}$. В качестве «базисного» множества можно взять например, какое либо трехэлементное множество истинностных значений (как в работе [95]), множество $\{\varnothing, \{F\}, \{T\}, \{T, F\}\}$, уже ранее полученных истинностных значений (как это сделано в статье [84]) и т. д. Во-вторых, обобщенные истинностные значения представляют собой комплексные, то есть имеющие некоторую внутреннюю структуру сущности.

Последнее наблюдение приводит к более широкой трактовке обобщенных истинностных значений, чем принятая, например, в работах [83, 84], где формальная операция, «соответствующая» обобщению, есть взятие множества всех подмножеств некоторого исходного, базисного множества истинностных значений.

В статье [4] О. М. Григорьева и Д. В. Зайцева была предложена идея рассмотреть истинностные значения, содержащие так называемую бикомпонентную истину. Суть предлагаемой конструкции состоит в следующем. Истина, понимаемая именно как истинностное значение, может иметь комплексную природу и содержать какие-то части, компоненты. С философской точки зрения представляется естественным взять в качестве таких компонентов онтологическую и эпистемическую составляющие. То же самое относится и к лжи. Таким образом, формально такое истинностное значение можно представить как пару, первая координата которой содержит онтологический компонент (онтологическую истину или ложь), а вторая – эпистемический (эпистемическую истину или ложь). Пусть $\{t, f\}$ есть множество онтологических истинностных значений, а $\{1, 0\}$ – множество эпистемических. С теоретико-множественной точки зрения переход к новому семейству *онтоэпистемических* истинностных значений осуществляется через взятие декартова произведения этих двух множеств, которое дает множество пар $\{\langle t, 1\rangle, \langle t, 0\rangle, \langle f, 0\rangle, \langle f, 1\rangle\}$. Таким образом, в работе [4] инструментарий порождения обобщенных истинностных значений расширяется за счет применения еще одной операции над множествами.

Наличие внутренней структуры у истинностных значений позволяет связывать с ними информацию самого разного характера. В исследованиях по квантовым вычислениям существует специфическое абстрактное устройство, осуществляющее преобразование информации, известное как «квадратный корень из отрицания» [24, 25]. Выделяют такие состояния квантовой системы, описаниям которых некоторым образом соответствуют значениям *истина* и *ложь* классической логики. Квадратный корень из отрицания производит преобразование описания, соответствующего истине, в описание, соответствующее лжи (и обратно), но посредством двойной итерации. После первого применения корня система, пребывающая в состоянии соответствующем истине, характеризуется неким промежуточным описанием и только после применения корня к промежуточному описанию переходит в состояние, соответствующее лжи. В самом направлении, которое в литературе называют «логикой квантовых вычислений» (и отличают от квантовой логики – совершенно другой сферы исследований), имеются определенные формальные построения, схожие с общепринятыми логическими теориями (см., в частности, [24, 25]). Аппарат обобщенных истинностных значений позволяет относительно легко реализовать описанную идею, посредством добавления к стандартным истинностным значениям двух промежуточных, обладающих внутренней «памятью» для случая, когда они приписываются отрицанию какого-либо высказывания (тогда можно указать на значения высказывания без отрицания). Результатом такого моделирования оказались системы с так называемым циклическим отрицанием [58, 10]. Неожиданным и независимым образом изучение таких систем совпало по времени с появлением ряда других работ, посвященных изучения схожих логических теорий [63, 74]. В данном диссертационном исследовании представлены различные варианты семантических конструкций с циклическим отрицанием и их формализации.

Описанные выше системы онтоэпистемических значений представляют собой довольно простые по своему устройству конечные множества. Обобщение подобных структур до произвольных решеточно упорядоченных множеств предполагает, как правило, упрощение структуры самих истинностных значений (как, например, рассмотрение абстрактных решеток Де Моргана вместо четырехэлементной структуры истинностных значений Данна-Белнапа в случае с системой **FDE**). Можно также абстрагировать свойства унарных операций и задать операции с такими свойствами на абстрактных множествах.

В работах [84, 85, 82] конечные структуры – бирешетки, трирешетки – содержащие комплексные истинностные значения, обобщаются до абстрактных алгебраических структур, n-мерных решеток (мультирешеток). Такое обобщение представляется весьма естественным шагом и дальнейшее изучение систем обобщенных истинностных значений должно быть связано с анализом таких структур и их логических теорий. Помимо формальных соображений, естественность подобного обобщения связана и с содержательными предпосылками. В бирешетках выделяют порядок по «приращению» истинности и порядок по увеличению информации (знания). В трирешетках из [84] к ним добавляется порядок по «приращению» конструктивности. Однако список всевозможных квалификаций, а значит и размерность решеток можно расширять и далее.

Некоторый парадокс заключается в том, что при переходе к более абстрактным семантическим конструкциям теряются главные особенности обобщенных истинностных значений: их происхождение от более «простых» базисных множеств истинностных значений и их комплексная структура. Тем не менее, в целой серии работ ([53, 54, 55, 65, 64, 62, 63]) именно многомерные решетки и формализация их логических теорий становятся объектами исследований.

Таким образом, конечные системы обобщенных истинностных значений характеризуются с формальной точки зрения комплексной структурой самих истинностных значений, ясной процедурой их порождения, а также наличием семейства отношений частичного порядка, определяемых через структурные компоненты самих истинностных значений. Кроме того, на множествах обобщенных истинностных значений можно определять различные операции, имеющие те или иные содержательные трактовки, а также синтаксические аналоги в формализованных языках (полуотрицания, циклические отрицания, модальности и т. п.). В то же время переход к более абстрактным объектам, таким, как многомерные решетки, может стоить специфики истинностных значений, порождая взамен классы абстрактных семантических структур, интересных как с логической, так и с чисто математической точек зрения.

§2. Обобщенные истинностные значения и возможные миры

Семантические конструкции, описанные в общих чертах в предыдущем параграфе, свидетельствуют о том, что вопрос о том, что́ именно считать значением высказывания не имеет однозначного решения. Введенные Г. Фреге особые абстрактные сущности, *истина* и *ложь*, дают один из возможных, хотя и наиболее распространенных, вариантов ответа. Другой вариант, обсуждаемый в литературе, предполагает, что значением высказывания является ситуация или даже множество возможных положений дел в универсуме, которое в некотором смысле подтверждает высказывание. Однако, тут же возникает и другое множество ситуаций, которые это же высказывание опровергают. Таким образом высказыванию можно приписать специфическое обобщенное истинностное значение, представляющее собой пару множеств (X, Y), выделенных из некоторого универсума возможных положений вещей (возможных миров, описаний состояний), где множество X репрезентирует позитивную часть оценки высказывания, а множество Y – негативную.

Идея такого истинностного значения впервые, по-видимому, была явным образом изложена в диссертации М. Данна [30] и затем воспроизводилась в ряде его работ, например, [31, 33, 35]. Саму пару (X, Y) Данн называл *полярностью*, что отсылает к специальной конструкции в области абстрактных решеток. Полярности – математические объекты, но они могут иметь и различные содержательные интерпретации. Одна из них предполагает, что X и Y представляют собой так называемые *топики*, множества сущностей, выделенных из некоторого «универсума рассуждения» U, о которых высказывание дает позитивную или негативную информацию. Интерпретация сложных высказываний, построенных с использованием связок из множества $\{\sim, \wedge, \vee\}$ дается в следующих равенствах, где при $I(A) = (X, Y)$ положим, что

$I^+(A) = X$, $I^-(A) = Y$:

$$\begin{aligned} I(\sim A) &= (I^-(A), I^+(A)), \\ I(A \wedge B) &= (I^+(A) \cup I^+(B), I^-(A) \cap I^-(B)), \\ I(A \vee B) &= (I^+(A) \cap I^+(B), I^-(A) \cup I^-(B)). \end{aligned}$$

Отношение релевантного первоуровневого следования при такой интерпретации определяется так:

$$A \vDash_{rel} B \iff I^+(B) \leqslant I^+(A) \;\;\&\;\; I^-(A) \leqslant I^-(B).$$

При другой, очень похожей интерпретации X и Y есть множества ситуаций (*возможных миров*), в которых высказывание истинно или ложно, соответственно. Равенства, задающие интерпретацию $A \wedge B$ и $A \vee B$ имеют несколько иной, «более естественный» вид:

$$\begin{aligned} I(A \wedge B) &= (I^+(A) \cap I^+(B), I^-(A) \cup I^-(B)), \\ I(A \vee B) &= (I^+(A) \cup I^+(B), I^-(A) \cap I^-(B)). \end{aligned}$$

Важно отметить, что множества X и Y могут пересекаться и могут не исчерпывать множество U.

Как это нередко бывает в смежных областях знания, истинностные значения, состоящие из множеств возможных миров, были заново предложены в работе М. Гинзберга [45], как один из способов ввести в обиход *бирешетки*. Пусть W есть множество возможных миров, $U, V \subseteq W$, множества истинности и ложности для некоторого высказывания p, причем, как и в построениях М. Данна, эти множества могут пересекаться и не исчерпывать множество W. Пара вида (U, V) есть истинностное значение p. На множестве истинностных значений можно задать различные отношения порядка, порядок $\leqslant_t$ по приращению истинности и порядок $\leqslant_k$ – по приращению знания или информации:

(1) $$(U, V) \leqslant_t (U', V') \iff U \subseteq U' \;\;\&\;\; V' \subseteq V,$$

(2) $$(U, V) \leqslant_k (U', V') \iff U \subseteq U' \;\;\&\;\; V \subseteq V'.$$

Можно также задать белнаповские истинностные значения как специальные случаи

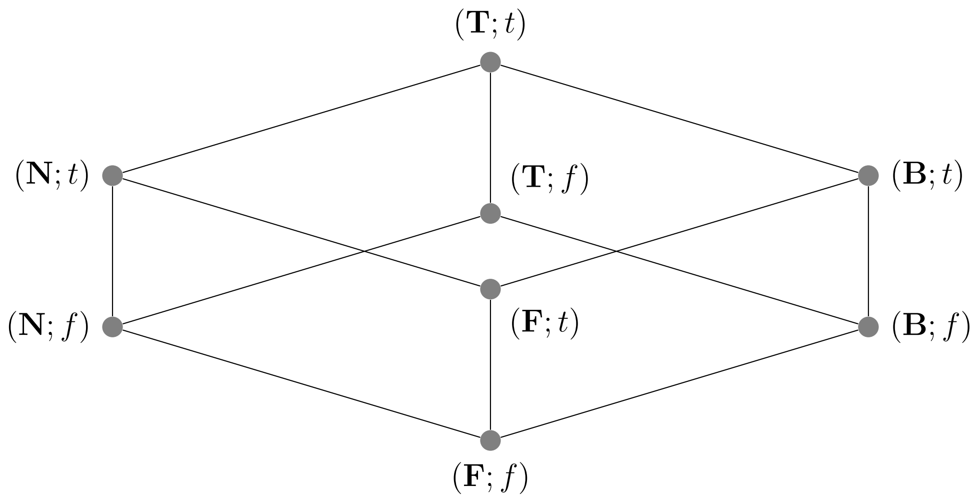

Рисунок 2. Восьмиэлементная решетка онтоэпистемических истинностных значений.

только что описанных: $\mathbf{T} = (W, \varnothing)$, $\mathbf{F} = (\varnothing, W)$, $\mathbf{B} = (W, W)$ и $\mathbf{N} = (\varnothing, \varnothing)$.

§3. Онтоэпистемические истинностные значения

В основополагающей статье [12] Н. Белнап, в частности, замечает, что введенные им истинностные значения, образующих множество $\mathbf{4}$, являются всецело эпистемическими, выражающими семантическую информацию о знании рационального субъекта, которое тот получает из различных источников и не имеет иных средств его верификации. Однако фрегевские истинностные значения, в свою очередь, являются представителями более фундаментальной истины, онтологического характера, которая не зависит от знаний и убеждений субъекта. Белнап предлагает рассмотреть комплексные истинностные значения, которые представляют собой пары (x, y), где $x \in \mathbf{4}$, а $y \in \mathbf{2}$. Всего получается восемь новых истинностных значений, в которых присутствуют эпистемические и онтологические значения для истины и лжи. Назовем подобные истинностные значения *онтоэпистемическими*. Вполне ожидаемо они образуют восьмиэлементную решетку, изображенную на рисунке 2.

Однако, решетка таких истинностных значений не дает ничего нового в отношении форм правильных умозаключений по сравнению с решеткой $\mathbf{4}$ – при той интерпретации пропозициональных связок, которую принимает Белнап. Другими словами, логика этой решетки – все та же система первоуровневого следования **FDE**.

Исследования логик истинностных значений, содержащих двухкомпонентную истину, состоящую из онтологической и эпистемической частей, получили дальнейшее развитие в работах [47, 4, 48, 96, 51]. Основная идея состоит в том, что сама истина, как референт высказывания, представляет собой комплексную структуру, в которой могут быть выделены различные части, например онтологическая и эпистемическая, но не обязательно только они. При этом на множестве истинностных значений определяются особые унарные операции, подобные отрицанию, но воздействующие только на ассоциированный с каждой из них компонент истинностного значения. Именно наличие таких унарных операций отличает полученные семантические структуры и их логики от той общей картины, которую получил Н. Белнап в случае с восьмиэлементной решеткой онтоэпистемических истинностных значений.

Другая идея состоит в том, чтобы представить онтоэпистемические истинностные значения в качестве разновидности обобщенных истинностных значений. Для этого можно использовать стандартную процедуру порождения обобщенных истинностных значений из исходного множества. В качестве исходного множества берется $\{t, 1\}$, где t есть онтологический, 1 – эпистемический компоненты истины. Множество всех подмножеств исходного множества образует множество $\{\{t, 1\}, \{t\}, \{1\}, \varnothing\}$. Ложность трактуется в таком случае как отсутствие истины. Например, если высказыванию p приписано значение $\{t\}$, то оно истинно онтологически, но ложно эпистемически. На множестве таким образом построенных истинностных значений естественно определяется отношение порядка по включению.

Иной вариант построения множества онтоэпистемических истинностных значений предполагает декартово произведение двух исходных множеств: $\{t, f\}$ и $\{1, 0\}$, онтологических и эпистемических истинностных значений, содержащих и соответствующую ложность. В результате получается множество $\mathbf{4}^{oe} = \{\langle t, 1\rangle, \langle t, 0\rangle, \langle f, 0\rangle, \langle f, 1\rangle\}$, которое хотя и не вполне соответствует пониманию обобщенных истинностных значений, принятому в [83], но вполне может быть отнесено к семейству таковых в силу того, что оно образовано из исходных множеств применением стандартной теоретико-множественной операции, в отличие от некоторых систем истинностных значений для немонотонных рассуждений, образованных *ad hoc*. На множестве $\mathbf{4}^{oe}$ также можно задать отношение порядка и получить решеточную структуру. Для этого можно использовать элементарные упорядочения по истинности на исходных множествах: $f \leqslant_t t$ и $0 \leqslant_1 1$. Далее для пар $\langle s, u\rangle$ и $\langle v, w\rangle$ из множества $\mathbf{4}^{oe}$ введем отношение порядка $\leqslant_{oe}$ следующим образом:

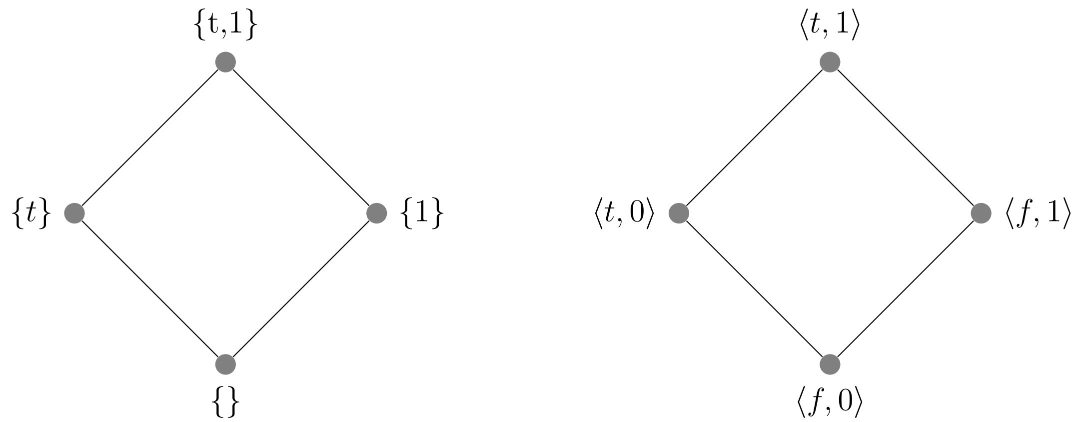

Рисунок 3. Варианты решетки $\mathscr{L}\mathbf{4}^{oe}$ онтоэпистемических истинностных значений.

Определение 1. Для всяких $\langle s, u\rangle$ и $\langle v, w\rangle$ из множества $\mathbf{4}^{oe}$:

$$\langle s, u\rangle \leqslant_{oe} \langle v, w\rangle \iff s \leqslant_t v \ \ \& \ \ u \leqslant_1 w.$$

◁

Решетки отнтоэпистемических истинностных значений, полученные применением взятия подмножеств и декартовым произведением, изображены на диаграмме 3.

Определенный выше порядок на множестве $\mathbf{4}^{oe}$ и представляющая его диаграмма позволяют легко получить решеточные операции пересечения и объединения элементов. Будем обозначать эти операции как $\cap$ и $\cup$, соответственно. Так, например, $\langle t, 0\rangle \cap \langle f, 1\rangle = \langle f, 0\rangle$, а $\langle t, 0\rangle \cup \langle f, 1\rangle = \langle f, 0\rangle$. С другой стороны, можно определить $\cap$ и $\cup$ на множестве 4^{oe} используя бинарные операции на базисных множествах $\{t, f\}$ и $\{1, 0\}$, которые вполне очевидны: $\cap_t$ возвращает наименьший, а $\cup_t$ – наибольший из двух аргументов по отношению $\leqslant_t$ на $\{t, f\}$. Попутно заметим, что $-_t(t) = f$, $-_t(f) = t$. Аналогично обстоит дело для операций на $\{1, 0\}$.

Определение 2. Для всяких $\langle s, u\rangle$ и $\langle v, w\rangle$ из множества $\mathbf{4}^{oe}$:

$$\langle s, u\rangle \cap \langle v, w\rangle = \langle s \cap_t v, u \cap_1 w\rangle,$$
$$\langle s, u\rangle \cup \langle v, w\rangle = \langle s \cup_t v, u \cup_1 w\rangle.$$

◁

Однако наибольший интерес представляют *унарные* операции на множестве 4^{oe}. Прежде всего это семантические аналоги отрицаний, которые обозначаются как $\sim_t$

и $\sim_1$. Они определяются через унарные операции $-_t$ и $-_1$ на базисных множествах следующим образом:

Определение 3. Для всякого элемента $\langle s, u\rangle$ множества $\mathbf{4}^{oe}$:

$$\sim_t\langle s, u\rangle = \langle -_t s, u\rangle,$$
$$\sim_1\langle s, u\rangle = \langle s, -_1 u\rangle.$$

$\triangleleft$

Укажем на некоторые наиболее фундаментальные свойства операций $\sim_t$ и $\sim_1$, следующие из их определения (здесь $a, b \in \mathbf{4}^{oe}$):

(1) $\sim_t\sim_t a = \sim_1\sim_1 a = a$,

(2) $\sim_t\sim_1 a = \sim_1\sim_t a$,

(3) $\sim_t a \leqslant \sim_1 b \iff \sim_1 a \leqslant \sim_t b$,

(4) $\sim_1 a \leqslant \sim_t b \iff \sim_t a \leqslant \sim_1 b$,

(5) $a \leqslant b \iff \sim_t\sim_1 b \leqslant \sim_t\sim_1 a$,

(6) $\sim_t\sim_1\sim_t\sim_1 a = a$,

(7) $\sim_t\sim_1(a \cap b) = \sim_t\sim_1 a \cup \sim_t\sim_1 b$,

(8) $\sim_t\sim_1(a \cup b) = \sim_t\sim_1 a \cap \sim_t\sim_1 b$

(9) $a \cap \sim_t\sim_1 a \leqslant b$,

(10) $b \leqslant a \cup \sim_t\sim_1 a$.

Свойства (5)–(10) свидетельствуют о том, что комбинация $\sim_t$ и $\sim_1$ ведет себя как операция булева отрицания в решетке. В силу этого обстоятельства, в работе [96] операции $\sim_t$ и $\sim_1$ получили название *полу-булевы дополнения*, а соответствующие им пропозициональные связки $\neg_t$ и $\neg_1$ – *полу-классические отрицания*.

§4. Абстрактные решетки

Данный параграф носит справочный характер, в нем приводятся основные факты, характеризующие частично-упорядоченные множества и, главным образом, их специфические разновидности, *решетки*, играющие в построении семантик для логик обобщенных истинностных значений (и не только) исключительно важную роль. Решетки можно задавать альтернативным способом – как особого типа алгебраические структуры.

Определение 4. Частично-упорядоченным множеством называется пара $(A, \leqslant)$, где A есть непустое множество, а $\leqslant$ есть бинарное отношение на A, удовлетворяющее условиям

(1) $\forall x \in A \ (x \leqslant x)$ (рефлксивность)

(2) $\forall x, y, z \in A \ ((x \leqslant y \ \& \ y \leqslant z) \implies x \leqslant z)$ (транзитивность)

(3) $\forall x, y \in A \ ((x \leqslant y \ \& \ y \leqslant x) \implies x = y)$ (антисимметричность)

$\triangleleft$

Для того, чтобы задать решетки как особым образом упорядоченные множества, необходимо предварительно ввести понятия точной нижней (infimum) и точной верхней (supremum) граней.

Определение 5. Пусть имеется частично-упорядоченное множество $\mathscr{A} = (A, \leqslant)$ и $B \subseteq A$. Элемент a множества A называется нижней границей (верхней границей) множества B в $\mathscr{A}$, если $\forall x \in A \ (a \leqslant x)$ $(\forall x \in A \ (x \leqslant a))$. *Точной нижней гранью* множества B в $\mathscr{A}$ называется наибольший элемент c в множестве C его нижних границ, то есть такой $c \in C$, для которого $\forall x \in C \ (x \leqslant c)$. *Точной верхней гранью* множества B в $\mathscr{A}$ называется наименьший элемент d в множестве D его верхних границ, то есть такой $d \in D$, для которого $\forall x \in D \ (d \leqslant x)$. $\triangleleft$

Теперь можно дать определение решетки, как разновидности частично-упорядоченных множеств.

Определение 6. Частично упорядоченное множество $(A, \leqslant)$ называется *решеткой*, если для всяких $x, y \in A$ существуют точная нижняя и точная верхняя грани. $\triangleleft$

В случае, когда множество A решетки $L = (A, \leqslant)$ является конечным, решетка L также называется *конечной*.

Точную нижнюю грань для элементов a и b обозначим как $a \cap b$, а точную верхнюю грань для них же как $a \cup b$. С алгебраической точки зрения $a \cap b$ и $a \cup b$ есть элементы, которые дают бинарные операции $\cap$ и $\cup$, примененные к a и b. Сами эти операции обычно называют пересечением и объединением, соответственно. Таким образом, решетку можно задать как алгебру вида $(A, \cap, \cup)$, операции которой удовлетворяют следующим постулатам:

(1) $\forall x (x \cap x = x), \ \forall x (x \cup x = x)$ (идемпотентность)

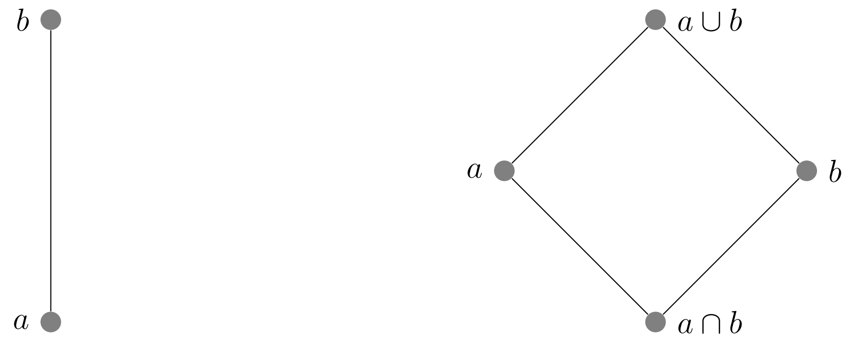

Рисунок 4. Диаграммы Хассе.

(2) $\forall x, y(x \cap y = y \cap x),\ \forall x, y(x \cup y = y \cup x)$ (коммутативность)

(3) $\forall x, y, z(x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z),$

$\forall x, y, z(x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z)$ (ассоциативность)

(4) $\forall x, y(x \cap (x \cup y) = x),\ \forall x, y(x \cup (x \cap y) = x)$ (законы поглощения)

Частичные порядки и, в частности, решетки, удобно изображать графически в виде так называемых диаграмм Хассе, если число элементов в множестве небольшое. Сравнимые по отношению $\leqslant$ элементы связаны линией, при этом больший по отношению элемент располагается выше меньшего. На рисунке 4 изображены простейшие решетки, одна из которых состоит из двух элементов a и b, для которых $a \leqslant b$, а вторая – из четырех элементов, но a и b в ней не сравнимы по отношению $\leqslant$. Заметим, что для первого примера $a \cap b = a$, $a \cup b = b$. Таким образом, $a \leqslant b$ если и только если $a \cap b = a$ $(a \cup b = b)$. Эти соотношения обеспечивают связь между реляционным и алгебраическим вариантами определения решетки, выступая в роли определений операций для реляционного варианта и отношения порядка для алгебраического.

Из определения 6 нетрудно также получить утверждение о том, что в решетке всякое *конечное* подмножество имеет точную нижнюю и верхнюю грани. Однако, если отбросить требование конечности, то наличие точных граней у произвольного подмножества является характеристикой особого класса решеток, называемых *полными*.

Определение 7. Решетка $(A, \leqslant)$ называется полной, если всякое множество $B \subseteq A$ обладает точными нижней и верхней гранями. $\triangleleft$

Ясно, что любая конечная решетка является в то же время и полной. Наличие точных граней у произвольных подмножеств в решетке следует отличать от другой ситуации, когда в решетке содержатся наибольший и наименьший элементы. Наибольший элемент решетки обычно обозначают 1 (но употребляются и другие символы, например $\top$ или $\bigvee$). Ясно, что 1 сравнима с любым элементом решетки и превосходит его по отношению $\leqslant$. Для обозначения наименьшего элемента используется символ 0 (также $\perp$, $\bigwedge$). Любой элемент решетки сравним с 0 и превосходит его.

Определение 8. Решетка $(A, \leqslant)$ называется *ограниченной*, если она содержит элементы 0 и 1. $\triangleleft$

В практике определения тех или иных решеточных свойств нередко смешивают алгебраический и реляционный языки описания решеток. Например, на алгебраический язык удобно перейти для задания важнейшего класса так называемых *дистрибутивных* решеток. В таких решетках должны выполняться законы дистрибутивности операций $\cap$ и $\cup$ друг одной относительно другой:

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z),$$
$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

для произвольных элементов x, y и z. В качестве семантических структур для различных семейств неклассических логик используются не только дистрибутивные решетки[5].

Далее, продолжая рассматривать решетки с алгебраической точки зрения, можно добавлять к бинарным решеточным операциям еще и унарные. В первую очередь это операция дополнения в ограниченных решетках, которая произвольному элементу x ставит в соответствие элемент x' и характеризуется следующими равенствами:

$$x \cup x' = 1,$$
$$x \cap x' = 0.$$

В дистрибутивных решетках дополнение единственно.

Важное значение для логики имеют специальные подмножества носителя решетки – фильтры и идеалы. Фильтры являются семантическими аналогами множества выделенных значений в логических матрицах, а также семантическими напарниками теорий – множеств формул, замкнутых относительно определенного набора дедук-

[5] Так, в статье [15] дается предельно простая и минималистичная характеризация связок $\wedge$ и $\vee$ через правила исчисления секвенций, в котором эти связки недистрибутивны друг относительно друга, что открывает в результате путь к исследованию исключительно интересных семантических конструкций.

тивных постулатов. В свою очередь идеалы можно рассматривать как множества антивыделенных значений или же как аналоги контртеорий (подробнее о теориях и контртеориях см. Главу 2).

Определение 9. Пусть $L = (A, \leqslant)$ – решетка. Непустое множество $B \subseteq A$ называется *фильтром* в L, если выполнены следующие условия:

(1) $\forall x, y(x \in B \ \& \ y \in B \implies x \cap y \in B)$,

(2) $\forall x, y(x \in B \ \& \ y \in A \ \& \ x \leqslant y \implies y \in B)$.

$\triangleleft$

Фильтр B в решетке $L = (A, \leqslant)$ называется собственным, если он не совпадает с A. Собственный фильтр называется *простым*, если он удовлетворяет следующему условию:

$$\forall x, y(x \cup y \in B \implies x \in B \dot{\vee} y \in B).$$

Определение идеала дуально.

Определение 10. Пусть $L = (A, \leqslant)$ – решетка. Непустое множество $B \subseteq A$ называется *идеалом* в L, если выполнены следующие условия:

(1) $\forall x, y(x \in B \ \& \ y \in B \implies x \cup y \in B)$,

(2) $\forall x, y(x \in A \ \& \ y \in B \ \& \ x \leqslant y \implies x \in B)$.

$\triangleleft$

Идеал B в решетке $L = (A, \leqslant)$ называется собственным, если он не совпадает с A. Собственный идеал называется *простым*, если он удовлетворяет следующему условию:

$$\forall x, y(x \cap y \in B \implies x \in B \dot{\vee} y \in B).$$

Более детальную информацию об упорядоченных множествах, решетках и важных для логической семантики алгебраических структурах можно получить из фундаментальных монографий [26, 34, 5, 78].

§5. Обобщение решеточных структур

Наиболее известным и хорошо исследованным обобщением решеток являются структуры, в которых на некотором непустом множестве заданы два отношения решеточного порядка. Такие структуры называются *бирешетками*. В научный обиход бирешетки были введены в работах М. Гинзберга [44, 45] как инструмент для разработки унифицированного подхода к построению семантик для разнообразных формализмов, возникших в связи с исследованиями немонотонных рассуждений в сфере разработки искусственного интеллекта. Кроме того, бирешетки нашли успешное применение в семантическом анализе языков декларативного программирования [39], а также для исследования парадоксов и построения теории истины в целом [38]. Ниже приведены лишь основные сведения о бирешетках, для более полной информации можно обратиться к источникам [45, 41, 42].

В литературе можно встретить разные определения бирешеток. Наиболее общее определение дается в тех работах, где бирешетки рассматриваются как разновидность более широкого класса структур, а именно n-решеток [82, 85]:

Определение 11. Бирешеткой называется структура $\mathscr{B} = \langle \mathscr{S}, \leqslant_1, \leqslant_2 \rangle$, где $\mathscr{S}$ есть непустое множество, а $\leqslant_1$ и $\leqslant_2$ – решеточные частичные порядки на $\mathscr{S}$. ◁

При таком определении оба порядка могут, в частном случае, совпадать, а множество $\mathscr{S}$ быть одноэлементным. В работах М. Фиттинга [41, 42] структуры, задаваемые приведенным определением, называются пред-бирешетками. Бирешетка называется *ограниченной*, если каждый из порядков содержит наибольший и наименьший элементы. В нетривиальных бирешетках наибольшие (как и наименьшие) элементы обоих порядков различаются.

Для каждого из порядков стандартным образом определяются операции пересечения и объединения ($\cap_1$, $\cup_1$ для $\leqslant_1$ и $\cap_2$, $\cup_2$ для $\leqslant_2$, соответственно). Таким образом, как и в случае с решетками, свойства бирешеток можно описывать и с использованием алгебраического языка. Определим некоторые стандартные разновидности бирешеток.

Определение 12. Бирешетка $\mathscr{B} = \langle \mathscr{S}, \leqslant_1, \leqslant_2 \rangle$ называется *полной*, если пересечение и объединение определены для любого подмножества множества $\mathscr{S}$ по каждому из порядков.

Бирешетка называется *дистрибутивной* если в ней выполнены все равенства вида $x \circ (y \bullet z) = (x \circ y) \bullet (x \circ z)$, где $\circ, \bullet \in \{\cap_1, \cup_1, \cap_2, \cup_2\}$ и $\circ \neq \bullet$.

Бирешетка называется *сплетенной*, если каждая из ее операций сохраняет каждый из порядков. ◁

На множестве $\mathscr{S}$ можно также задать унарные операции $-_1$ и $-_2$, каждая из которых обращает свой порядок и сохраняет другой.

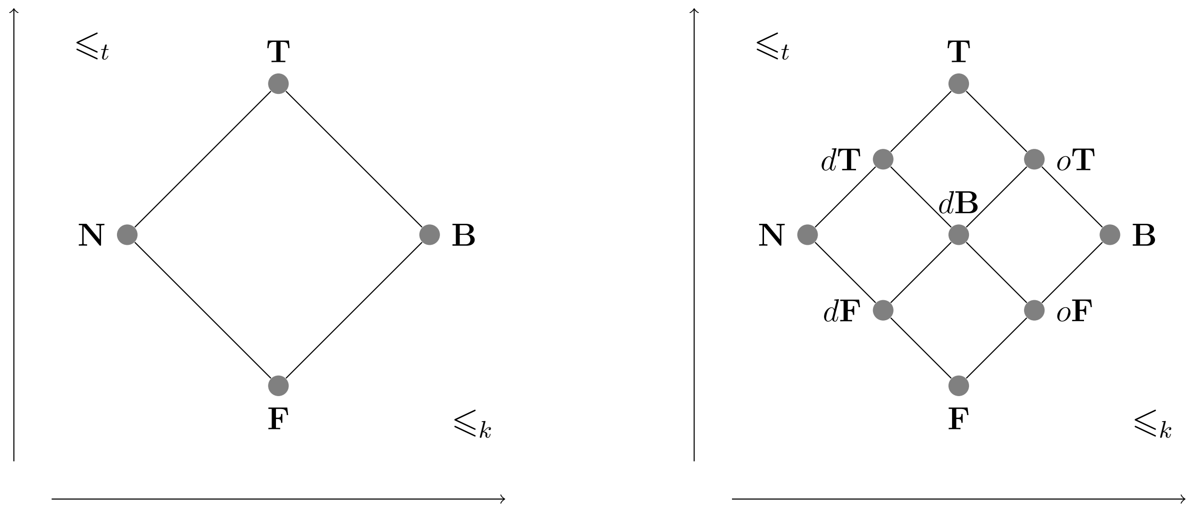

Рисунок 5. Бирешетки $\mathscr{FOUR}$ и $\mathscr{NINE}$

Определение 13. Пусть $\mathscr{B} = \langle \mathscr{S}, \leqslant_1, \leqslant_2 \rangle$ есть бирешетка. Операция $-_1$ на множестве $\mathscr{S}$ называется 1-инверсией, если выполнены следующие условия для любых $x, y \in \mathscr{S}$:

(anti) $$x \leqslant_1 y \Longrightarrow -_1 y \leqslant_1 -_1 x,$$

(iso) $$x \leqslant_2 y \Longrightarrow -_1 x \leqslant_2 -_1 y,$$

(per2) $$-_1 -_1 x = x.$$

$\triangleleft$

Пример 1. Каноническим примером бирешетки является бирешетка $\mathscr{FOUR}$ (рис. 5), являющаяся обобщением решеток истинностных значений, предложенных в работах Н. Белнапа. Множество-носитель этой структур представляет собой множество $\mathbf{4} = \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{F}\}$, на котором заданы два различных отношения порядка $\leqslant_t$ и $\leqslant_k$ – по истинности и по приращению знания (или информации), соответственно – является примером ограниченной, полной, дистрибутивной и сплетенной бирешетки с двумя инверсиями. t-инверсию обычно называют «отрицанием» и обозначают привычным символом $\neg$. Отрицание обращает порядок $\leqslant_t$ и сохраняет $\leqslant_k$. Для наибольшего и элементов порядка $\leqslant_t$, обозначаемых через $\mathbf{T}$ и $\mathbf{F}$, соответственно, выполняется, $\neg\mathbf{T} = \mathbf{F}$ и $\neg\mathbf{F} = \mathbf{T}$. В свою очередь k-инверсия, называемая *конфляцией*, обращает порядок $\leqslant_k$ и сохраняет порядок $\leqslant_t$. Для обозначения конфляции используется символ $\sim$. Для наибольшего и наименьшего элементов в порядке $\leqslant_k$, которые обозначаются как $\mathbf{B}$ и $\mathbf{N}$, соответственно, имеет место $\sim\mathbf{B} = \mathbf{N}$ и $\sim\mathbf{N} = \mathbf{B}$.

В литературе, посвященной исследованию бирешеток, имеются устоявшиеся обозначения для бинарных операций, задаваемых отношениями порядка: $\wedge$ и $\vee$ обозначают соответственно пересечение и объединение в порядке $\leqslant_t$, а $\otimes$ и $\oplus$ — пересечение и объединение в порядке $\leqslant_k$.

Бирешетка $\mathcal{FOUR}$ является классической, то есть для любого ее элемента x верно, что $x \vee \neg\sim x = \mathbf{T}$ [40].

Пример 2. Еще один пример бирешетки основан на представлении истинностных значений как пар множеств возможных миров вида (U, V), где $U, V \subseteq W$, $W \neq \varnothing$. Соотношения 1 задают порядки $\leqslant_t$ и $\leqslant_i$ на множестве B_W таких истинностных значений. Бирешеточные бинарные операции на множестве B_W определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(U, V) \cap_1 (U', V') &= (U \cap U', V \cup V') \\
(U, V) \cup_1 (U', V') &= (U \cup U', V \cap V') \\
(U, V) \cap_2 (U', V') &= (U \cap U', V \cap V') \\
(U, V) \cup_2 (U', V') &= (U \cup U', V \cup V')
\end{aligned}
$$

Унарная операция «отрицание» определяется равенством $\neg(U, V) = (V, U)$. Таким образом полученная структура $(B_W, \cup_1, \cup_1, \cap_2, \cup_2, \neg)$ представляет собой бирешетку как разновидность алгебры с четырьмя бинарными и одной унарной операцией. Кроме того, истинностные значения из бирешетки $\mathcal{FOUR}$ можно получить, если взять $\mathbf{T} = (W, \varnothing)$, $\mathbf{B} = (W, W)$, $\mathbf{N} = (\varnothing, \varnothing)$ и $\mathbf{F} = (\varnothing, W)$.

§6. Многомерные решетки

Естественным обобщением бирешеток, трирешеток, тетрарешеток (и так далее) является структура, в которой на некотором непустом множестве определяется n различных отношений частичного порядка. При этом каждый порядок в отдельности, вместе с исходным множеством, образует решетку.

В контексте исследований обобщенных истинностных значений и их логик такие объекты – n-решетки, n-мерные решетки или *мультирешетки* – были введены в обиход в работе [84]. n-решетки дают возможность строить абстрактные алгебраические семантики для логик обобщенных истинностных значений.

Определение 14 ([84, 85]). n-решетка (мультирешетка, n-мерная решетка) $\mathscr{M}_n$ есть кортеж $\langle \mathscr{S}, \leqslant_1, \ldots, \leqslant_n \rangle$, где $\mathscr{S}$ – непустое множество, $\leqslant_1, \ldots, \leqslant_n$ – частичные порядки на $\mathscr{S}$ такие, что $\langle \mathscr{S}, \leqslant_1 \rangle, \ldots \langle \mathscr{S}, \leqslant_n \rangle$ – различные решетки. $\triangleleft$

Приведенное определение задает n-мерные решетки как особые разновидности реляционных структур, как множества, на которых заданы семейства частичных порядков, каждый из которых удовлетворяет постулатам решеточного частичного порядка (любая пара элементов множества-носителя имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани внутри каждого упорядочения)[6]. Однако, как уже отмечалось ранее, решетки можно рассматривать и как разновидности алгебр и дать определение n-решетки в алгебраических терминах. Для целей данного раздела удобным является определение 14, однако для некоторых описываемых ниже конструкций потребуются операции, сопоставляющие множествам элементов решетки их точные верхние или нижние грани. Напомним, что по отношению порядка в каждой решетке $\langle \mathscr{S}, \leqslant_i \rangle$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ определяются операции объединения $\cup_i$ и пересечения $\cap_i$, сопоставляющие каждой паре элементов из $\mathscr{S}$ их точную верхнюю и нижнюю грани в i-м порядке, соответственно. Таким образом, для всяких $x, y \in \mathscr{S}$ таких, что $x \leqslant_i y$, $x \cap_i y = x$, $x \cup_i y = y$.

Как отмечают авторы статьи [85], определение 14 n-решетки является предельно абстрактным, оно не предполагает какой-то связи между различными решетками, образующими n-мерную структуру. Выпишем еще несколько определений стандартных свойств n-решеток, встречающихся в работах [84, 82].

Определение 15. n-решетка $\mathscr{M}_n$ называется *полной*, если все решетки, образующие $\mathscr{M}_n$, являются полными (то есть в каждой решетке $\langle \mathscr{S}, \leqslant_i \rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$, любое подмножество множества $\mathscr{S}$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани). n-решетка $\mathcal{M}_n$ называется *дистрибутивной*, если все $2(2n^2 - 1)$ законов дистрибутивности выполняются (то есть $x \circ (y \bullet z) = (x \circ y) \bullet (x \circ z)$, где $\circ, \bullet \in \{\cap_1, \cup_1, \ldots, \cap_n, \cup_n\}$ и $\circ \neq \bullet$). $\triangleleft$

Ранее говорилось о том, что в бирешетках имеются также и унарные операции, отрицание и конфляция. В трирешетках выбор унарных операций – называемых *инверсиями* – уже существенно богаче. Например, t-инверсия антитонна относительно t-порядка и монотонна относительно i- и f-порядков, ti-инверсия антитонна относительно t- и i-порядков, но монотонная относительно f-порядка и так далее. При этом

[6] Разумеется n-решетки, в том числе снабженные унарными операциями, описываемыми ниже, представляют собой разновидности алгебраических систем в смысле монографии [5]

всегда предполагается, что двойное применение любой унарной операции возвращает исходный элемент.

Подобного рода инверсии определяются и для n-решеток.

Определение 16. Пусть $\mathscr{M}_n$ есть n-решетка. Унарная операция $-_j$ называется j-инверсией ($1 \leqslant j \leqslant n$), если выполняются следующие условия для всякого k, $k \neq j$, и для любых $x, y \in \mathscr{S}$,

(anti) $$x \leqslant_j y \Longrightarrow -_j y \leqslant_j -_j x,$$

(iso) $$x \leqslant_k y \Longrightarrow -_j x \leqslant_k -_j y,$$

(per2) $$-_j -_j x = x.$$

$\triangleleft$

Данное определение не требует, чтобы операции инверсии были определены в любой n-решетке. Однако в некоторых последующих определениях важно существование j-инверсий для каждого порядка j. Примем соглашение о том, что далее будут всегда иметься в виду только такие n-решетки, в которых гарантировано существование инверсий для каждого порядка в n-решетке $\mathscr{M}_n$ ($-_j$ определена для каждого порядка j).

Полезным будет установить некоторые факты, связанные с применением к элементам n-решетки композиции инверсий. Обозначим символом $\bar{\alpha}_m$ композицию из m инверсий для $m \geqslant 1$. Синтаксически композиция m инверсий выражается последовательностью из m символов вида $-_j$, где $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть $\mathscr{M}_n$ есть n-решетка с носителем $\mathscr{S}$. Для начала заметим, что если $\bar{\alpha}_m$ не содержит символа $-_j$ для фиксированного j ($1 \leqslant j \leqslant n$), то для всяких $x, u \in \mathscr{S}$ верна импликация $x \leqslant_j y \implies \bar{\alpha}_m x \leqslant_j \bar{\alpha}_m y$. Действительно, для $m = 1$ это следует из определения 16. Пусть утверждение верно для какого-то $s < n$, то есть $x \leqslant_j y \implies \bar{\alpha}^s x \leqslant_j \bar{\alpha}^s y$. Тогда, очевидно, $x \leqslant_j y \implies -_k \bar{\alpha}^s x \leqslant_j -_k \bar{\alpha}^s y$, где $k \neq j$. Таким образом, любая последовательность, представляющая композицию инверсий, не содержащая $-_j$, сохраняет порядок $\leqslant_j$.

Теперь рассмотрим последовательности, содержащие в качестве элементов только символ $-_j$. Наименьшая такая последовательность, содержащая нечетное число вхождений $-_j$, состоит только из одного элемента. По определению 16, $x \leqslant_j y \implies -_j y \leqslant_j -_j x$. Наименьшая последовательность с четным числом вхождений $-_j$ имеет вид $-_j -_j$. Тогда $x \leqslant_j y \implies -_j -_j x \leqslant_j -_j -_j y$. Пусть $\bar{\alpha}_s$ есть последовательность, состоящая из символов $-_j$, содержащая нечетное число элементов такая, что, по допущению, $x \leqslant_j y \implies \bar{\alpha}_s y \leqslant_j \bar{\alpha}_s x$. Тогда получаем $x \leqslant_j y \implies -_j\bar{\alpha}_s x \leqslant_j -_j\bar{\alpha}_s y$ для $-_j\bar{\alpha}_s$, содержащей четное число элементов. Если же $\bar{\alpha}_s$ исходно содержит четное число элементов и $x \leqslant_j y \implies \bar{\alpha}_s x \leqslant_j \bar{\alpha}_s y$, то $x \leqslant_j y \implies -_j\bar{\alpha}_s y \leqslant_j -_j\bar{\alpha}_s x$. Таким образом, четное число итераций $-_j$ сохраняет порядок $\leqslant_j$, а нечетное число итераций его инвертирует. Обобщая эти наблюдения получим следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{M}_n$ есть n-решетка с носителем $\mathscr{S}$. Тогда для любых $x, y \in \mathscr{S}$, всякого целого положительного числа m и всякого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$:*

(1) *$x \leqslant_j y \implies \bar{\alpha}_m x \leqslant_j \bar{\alpha}_m y$, если $\bar{\alpha}_m$ содержит четное число вхождений символа $-_j$;*

(2) *$x \leqslant_j y \implies \bar{\alpha}_m y \leqslant_j \bar{\alpha}_m x$, если $\bar{\alpha}_m$ содержит нечетное число вхождений символа $-_j$.*

Важное свойство, которое явным образом постулируется для бирешеток (см. [46, 71]), состоит в перестановочности различных инверсий.

Определение 17. n-решетка называется *коммутативной*, если для любых различных j и k $(\leqslant n)$ справедливо следующее равенство:

$$(\texttt{Cm}) \qquad -_j -_k x = -_k -_j x.$$

◁

Замечание 1. В рамках данного исследования далее рассматриваются только коммутативные n-решетки. ◁

Для коммутативных n-решеток можно доказать наличие ряда полезных свойств. В частности для итерации двух одинаковых последовательностей выполняется свойство, аналогичное снятию и введению двойного отрицания. Прежде, чем сформулировать этот факт в виде леммы предварительно заметим, что для любой n-решетки $\mathscr{M}_n$ с носителем $\mathscr{S}$, для любого $x \in \mathscr{S}$ верно, что $\bar{\alpha}_s -_k -_j \bar{\beta}_p x = \bar{\alpha}_s -_j -_k \bar{\beta}_p x$ для любых последовательностей $\bar{\alpha}_s$ и $\bar{\beta}_p$, откуда следует, что для любых последовательностей $\bar{\alpha}_s$ и $\bar{\beta}_p$ и для любого x верно, что $\alpha_s -_j \beta_p x = -_j \alpha_s \beta_p x = \alpha_s \beta_p -_j x$.

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{M}_n$ есть n-решетка с носителем $\mathscr{S}$. Тогда для всякого $x \in \mathscr{S}$ и всякого $\bar{\alpha}_m$:*

$$x = \bar{\alpha}_m \bar{\alpha}_m x.$$

Доказательство. Для $m = 1$ равенство выполняется в силу свойства (per2). Пусть, далее, имеет место $x = \bar{\alpha}_n \bar{\alpha}_n x$ для некоторого n. Рассмотрим последовательность $\bar{\alpha}_{n+1}$, отличающуюся от $\bar{\alpha}_n$ вхождением символа $-_j$. Конечным числом перестановок можно привести $\bar{\alpha}_{n+1}$ к виду $\bar{\alpha}_n -_j$ и к виду $-_j \bar{\alpha}_n$. Таким образом $\bar{\alpha}_{n+1}\bar{\alpha}_{n+1}x = \bar{\alpha}_n -_j -_j \bar{\alpha}_n = \bar{\alpha}_n \bar{\alpha}_n x = x$. □

Продолжим определять технические понятия, которые понадобятся в дальнейшем для изучения теорий и исчислений классов n-решеточных структур. Для начала обратимся вновь к хорошо изученной нетривиальной разновидности n-решеток, бирешеткам. Напомним, что О. Ариели и А. Аврон в работе [9] ввели понятия (простого) бифильтра и ультрабифильтра, которые являются аналогами (простых) фильтров и ультрафильтров в стандартных решетках. Соответственно, бирешетка, в которой существует простой бифильтр (ультрабифильтр), называется логической (ультралогической) бирешеткой. Назначение этих конструкций – «определять логики способом, полностью аналогичным тому, который используется в булевых алгебрах с простыми фильтрами для классической логики» [9, С. 30–31]. Теперь можно дать аналогичные определения и для n-решеток.

Определение 18. [65] Пусть $\mathscr{M}_n = \langle \mathscr{S}, \leqslant_1, \ldots, \leqslant_n \rangle$ есть n-решетка, $\cap_i, \cup_i$ есть операции пересечения и объединения для каждого i ($1 \leqslant i \leqslant n$). Тогда $\mathscr{U}_n \subset \mathscr{S}$ называется *n-фильтром* на $\mathscr{M}_n$ если для всех $j, k \leqslant n$, $j \neq k$ и $x, y \in \mathscr{S}$:

$$x \cap_i y \in \mathscr{U}_n \iff x \in \mathscr{U}_n \ \& \ y \in \mathscr{U}_n;$$

n-фильтр называется *простым*, если для всех $j, k \leqslant n$, $j \neq k$ и $x, y \in \mathscr{S}$:

$$x \cup_i y \in \mathscr{U}_n \implies x \in \mathscr{U}_n \dot{\vee} y \in \mathscr{U}_n.$$

◁

Замечание 2. В статье [65] также дается определение n-ультрафильтра добавлением к определению простого n-фильтра следующего пункта:

$$(n\mathcal{UF}) \qquad x \in \mathscr{U}_n \iff -_j -_k x \notin \mathscr{U}_n.$$

Однако, непосредственное обобщение конструкции ультрабифильтра приводит к некоторым техническим проблемам. В частности, можно показать, что для любой пары k, j таких, что $k \neq j$ верна следующая эквиваленция: $-_k x \in \mathscr{U}_n \iff -_j x \notin \mathscr{U}_n$

для всякого $x \in \mathscr{U}_n$. Сначала предположим, что $-_k x \in \mathscr{U}_n$. Тогда $-_j -_k -_k x \notin \mathscr{U}_n$. Поскольку $-_k -_k x = x$, получаем $-_j x \notin \mathscr{U}_n$. Обратно, из того, что $-_j x \notin \mathscr{U}_n$ получаем $-_k -_j -_j x \in \mathscr{U}_n$, откуда $-_k x \in \mathscr{U}_n$ в силу равенства $-_j -_j x = x$. Возьмем, далее, индексы k, j, m для которых соответствующие инверсии попарно не равны. Если $-_k x \in \mathscr{U}_n$ для некоторого $x \in \mathscr{U}_n$, то $-_j \notin \mathscr{U}_n$ и $-_m \notin \mathscr{U}_n$, что противоречит ранее доказанной эквиваленции. Таким образом, уже для случая трирешетки существование n-фильтра, удовлетворяющего условию $n\mathcal{UF}$ оказывается невозможным. ◁

Определение n-фильтра на $\mathscr{M}_n$ можно было бы дать и иным образом, более удобным для доказательства метатеоретических утверждений. Множество $\mathscr{U}_n \subseteq \mathscr{S}$ является n-фильтром, если оно замкнуто относительно всех операций пересечений и всех отношений порядка. Последнее означает, что для всяких $x, y \in \mathscr{S}$ и всякого $j \leqslant n$,

$$(\mathcal{C}\ell^{\leqslant}) \qquad x \in \mathscr{S} \ \& \ x \leqslant_j y \implies y \in \mathscr{U}_n$$

Замкнутость относительно всех пересечений уже зафиксирована в определении 18. Теперь допустим, что $x \in \mathscr{S}$ и $x \leqslant_j y$ для какого-то $y \in \mathscr{S}$. Из $x \leqslant_j y$ следует, что $x \cap_j y = x$, то есть $x \cap_j y \in \mathscr{U}_n$. Тогда из определения 18 получаем $y \in \mathscr{U}_n$. Заметим также, что n-фильтр может в частном случае совпадать со всем множеством $\mathscr{S}$, однако простой n-фильтр всегда есть собственное подмножество множества $\mathscr{S}$.

Определение 19. [65, P. 319] Пара $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$ называется *логической* n-решеткой, если $\mathscr{M}_n$ есть n-решетка и $\mathscr{U}_n$ есть простой n-фильтр на $\mathscr{M}_n$. ◁

Замечание 3. В работе [65] наряду с логическими n-решетками вводятся и ультралогические, представялющие собой пару, состоящую из n-решетки и n-ультрафильтра. В настоящем исследовании понятие n-ультрафильтра не используется из-за указанного выше недостатка данной конструкции. Отметим, также, что для термина «n-фильтр» в литературе также используются синоним «мультифильтр». ◁

Пример 3. Бирешетка $\mathcal{FOUR}$ (пример 1) содержит единственный простой бифильтр $\{\mathbf{T}, \mathbf{B}\}$, который одновременно является и ультрабифильтром, в то время, как бирешетка $\mathcal{NINE}$ содержит два различных простых бифильтра, один из них есть множество $\{\mathbf{T}, o\mathbf{T}, \mathbf{B}\}$, а второй – множество $\{\mathbf{T}, o\mathbf{T}, \mathbf{B}, d\mathbf{T}, d\mathbf{B}, o\mathbf{F}\}$. Ни один из них не является ультрабифильтром.

Множество-носитель решетки может также содержать наименьший (обозначаемый как $\mathsf{0}$) и наибольший (обозначаемый как $\mathsf{1}$) элементы (или же только один из них). Решетка, содержащая $\mathsf{0}$ и $\mathsf{1}$ называется ограниченной. Для случая n-решетки введем аналогичное понятие ограниченной n-решетки. Поскольку в n-решетке $\mathscr{M}_n$ одновременно имеется n отношений порядка, то ограниченность всей n-решетки подразумевает наличие наибольшего и наименьшего элементов в каждой из решеток $\langle \mathscr{S}, \leqslant_i \rangle$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, образующих $\mathscr{M}_n$.

Определение 20. n-решетка $\mathscr{M}_n = \langle \mathscr{S}, \leqslant_1, \ldots, \leqslant_n \rangle$ называется *ограниченной* если каждая решетка $\langle \mathscr{S}, \leqslant_j \rangle$, $1 \leqslant j \leqslant n$ в ее составе содержит наибольший и наименьший элементы (обозначаемые как $\mathsf{1}_j$ и $\mathsf{0}_j$, соответственно). $\lhd$

Из определения n-фильтра следует, что любой n-фильтр содержит наибольшие элементы каждого из порядков. В то же время ни один *простой* n-фильтр не может содержать никакой из наименьших элементов.

В следующей лемме фиксируются некоторые простые свойства инверсий и их взаимосвязи с бинарными операциями и наибольшими и наименьшими элементами в порядках.

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{M}_n = \langle \mathscr{S}, \leqslant_1, \ldots, \leqslant_n \rangle$ есть n-решетка. Тогда для всех $j \leqslant n$, $k \leqslant n$, $j \neq k$, и $x, y \in \mathscr{S}$:*

(1) $-_j(x \cap_j y) = -_j x \cup_j -_j y$, (3) $-_k(x \cap_j y) = -_k x \cap_j -_k y$,

(2) $-_j(x \cup_j y) = -_j x \cap_j -_j y$, (4) $-_k(x \cup_j y) = -_k x \cup_j -_k y$,

Если $\mathscr{M}_n$ также n-ограничена, тогда справедливы равенства

(5) $-_j \mathsf{0}_j = \mathsf{1}_j$, (7) $-_k \mathsf{0}_j = \mathsf{0}_j$,

(6) $-_j \mathsf{1}_j = \mathsf{0}_j$, (8) $-_k \mathsf{1}_j = \mathsf{1}_j$.

Доказательство. Приведем достаточно простые доказательства для равенств (1)–(4). Обоснования для (5)–(8) практически очевидны, в качестве примера выпишем рассуждение для случая (5).

(1) В силу того, что $\cup_j$ есть наибольший элемент для пары $-_j x$ и $-_j y$, получаем неравенства $-_j x \leqslant_j -_j x \cup_j -_j y$ и $-_j y \leqslant_j -_j x \cup_j -_j y$. По свойству (anti), $-_j(-_j x \cup_j -_j y) \leqslant_j -_j -_j x$ и $-_j(-_j x \cup_j -_j y) \leqslant_j -_j -_j y$, откуда, $-_j(-_j x \cup_j -_j y) \leqslant_j x$ и $-_j(-_j x \cup_j -_j y) \leqslant_j y$. Далее, используя свойства $\cap_j$, получаем $-_j(-_j x \cup_j -_j y) \leqslant_j x \cap_j y$, откуда, по свойству (anti), $-_j(x \cap_j y) \leqslant_j -_j -_j (-_j x \cup_j -_j y)$. Следовательно, $-_j(x \cap_j y) \leqslant_j -_j x \cup_j -_j y$, по свойству (per2). С другой стороны, используя теперь определение

наименьшего элемента для пары x и y, получаем сначала $x \cap_j y \leqslant_j x$ и $x \cap_j y \leqslant_j y$. По свойству (anti), $-_j x \leqslant_j -_j(x \cap_j y)$ и $-_j y \leqslant_j -_j(x \cap_j y)$, откуда $-_j x \cup_j -_j y \leqslant_j -_j(x \cap_j y)$.

(2) По определению наибольшего элемента, $x \leqslant_j x \cup_j y$ и $y \leqslant_j x \cup_j y$. Далее, по свойству (anti), $-_j(x \cup_j y) \leqslant_j -_j x$ и $-_j(x \cup_j y) \leqslant_j -_j y$, откуда $-_j(x \cup_j y) \leqslant_j -_j x \cap_j -_j y$. С другой стороны, $-_j x \cap_j -_j y \leqslant_j -_j x$ и $-_j x \cap_j -_j y \leqslant_j -_j y$, в силу определения наименьшего элемента. Следовательно, $x \leqslant_j -_j(-_j x \cap_j -_j y)$ и $y \leqslant_j -_j(-_j x \cap_j -_j y)$, используя свойства (anti) и (per2), что влечет $x \cup y \leqslant_j -_j(-_j x \cap_j -_j y)$. Таким образом, $-_j x \cap_j -_j y \leqslant_j -_j(x \cup_j y)$.

(3) Сначала выпишем, $x \cap_j y \leqslant_j x$ и $x \cap_j y \leqslant_j y$. По свойству (iso), $-_k(x \cap_j y) \leqslant_j -_k x$ и $-_k(x \cap_j y) \leqslant_j -_k y$. Следовательно, $-_k(x \cap_j y) \leqslant_j -_k x \cap_j -_k y$. С другой стороны, имеем $-_k x \cap_j -_k y \leqslant_j -_k x$ и $-_k x \cap_j -_k y \leqslant_j -_k y$. Получаем, $-_k(-_k x \cap_j -_k y) \leqslant_j -_k -_k x = x$ и $-_k(-_k x \cap_j -_k y) \leqslant_j -_k -_k y = y$ по (iso) и (per2), что влечет $-_k(-_k x \cap_j -_k y) \leqslant_j x \cap_j y$, откуда $-_k -_k (-_k x \cap_j -_k y) = -_k x \cap_j -_k y \leqslant_j -_k(x \cap_j y)$.

(4) Имеем $x \leqslant_j x \cup_j y$ и $y \leqslant_j x \cup_j y$. Применяя (iso), получаем $-_k x \leqslant_j -_k(x \cup_j y)$ и $-_k y \leqslant_j -_k(x \cup_j y)$, откуда $-_k x \cup_j -_k y \leqslant_j -_k(x \cup_j y)$. С другой стороны, берем $-_k x \leqslant_j -_k x \cup_j -_k y$ и $-_k y \leqslant_j -_k x \cup_j -_k y$. Значит, $-_k -_k x = x \leqslant_j -_k(-_k x \cup_j -_k y)$ и $-_k -_k y = y \leqslant_j -_k(-_k x \cup_j -_k y)$. Следовательно, $x \cup_j y \leqslant_j -_k(-_k x \cup_j -_k y)$. Более того, $-_k(x \cup_j y) \leqslant_j -_k -_k (-_k x \cup_j -_k y) = -_k x \cup_j -_k y$.

(5) $-_j \mathsf{0}_j \leqslant_j \mathsf{1}_j$, поскольку $\mathsf{1}_j$ есть наибольший элемент в $\langle \mathscr{S}, \leqslant_j \rangle$. С другой стороны, $\mathsf{0}_j \leqslant_j -_j \mathsf{1}_j$, поскольку поскольку $\mathsf{0}_j$ есть наименьший элемент в $\langle \mathscr{S}, \leqslant_j \rangle$, откуда, применяя (anti) и (per2), $\mathsf{1}_j \leqslant_j -_j \mathsf{0}_j$.

□

Обобщая результаты предыдущей леммы для последовательностей инверсий, сформулируем следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{M}_n = \langle \mathscr{S}, \leqslant_1, \ldots, \leqslant_n \rangle$ есть n-решетка. Тогда для всех $j \leqslant n$ и всяких $x, y \in \mathscr{S}$:*

(1) *$\bar{\alpha}(x \cap_j y) = \bar{\alpha}x \cup_j \bar{\alpha}y$, $\bar{\alpha}(x \cup_j y) = \bar{\alpha}x \cap_j \bar{\alpha}y$ для любой последовательности инверсий $\bar{\alpha}$, содержащей нечетное число вхождений $-_j$,*

(2) *$\bar{\alpha}(x \cap_j y) = \bar{\alpha}x \cap_j \bar{\alpha}y$, $\bar{\alpha}(x \cup_j y) = \bar{\alpha}x \cup_j \bar{\alpha}y$ для любой последовательности инверсий $\bar{\alpha}$, содержащей четное число вхождений $-_j$,*

Если $\mathscr{M}_n$ также n-ограничена, тогда справедливы равенства

(3) *$\bar{\alpha}\mathsf{0}_j = \mathsf{1}_j$, $\bar{\alpha}\mathsf{1}_j = \mathsf{0}_j$ для любой последовательности инверсий $\bar{\alpha}$, содержащей нечетное число вхождений $-_j$,*

(4) $\bar{\alpha}\mathsf{0}_j = \mathsf{0}_j$, $\bar{\alpha}\mathsf{1}_j = \mathsf{1}_j$ *для любой последовательности инверсий* $\bar{\alpha}$*, содержащей четное число вхождений* $-_j$*.*

Доказательство. Осуществляется индукцией по длине последовательности $\bar{\alpha}$. $\square$

Помимо стандартных операций пересечения и объединения, в n-решетке можно задать также операции типа импликации и ко-импликации, если в ней определены все j-инверсии.

Определение 21. Пусть $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$ есть логическая n-решетка. Определим n-решеточные операции импликации $\supset_1, \ldots, \supset_n$ и ко-импликации $\subset_1, \ldots, \subset_n$ следующим образом (для любых $x, y \in \mathscr{S}$ и любого $j \leqslant n$):

$$x \supset_j y = \begin{cases} y, \text{ если } x \in \mathscr{U}_n, \\ \mathsf{1}_j \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$x \subset_j y = \begin{cases} x, \text{ если } y \in \mathscr{U}_n, \\ \mathsf{1}_j \text{ иначе.} \end{cases}$$

$\triangleleft$

При таком определении импликации любой n-фильтр $\mathscr{U}_n$ в произвольной n-решетке является *импликативным* в том смысле, что

$$(\mathscr{I}mp) \qquad x \supset_i y \in \mathscr{U}_n \ \& \ x \in \mathscr{U}_n \implies y \in \mathscr{U}_n.$$

Дальнейшая модификация n-решеток может идти по пути обогащения семейства заданных на них унарных операций. В частности, можно изучать n-решетки с операциями взятия замыкания и внутренности, в особенности в связи с тем, что их свойства коррелируют со свойствами некоторых типов модальностей. Начало изучения n-решеток с операциями взятия замыкания и внутренности и их логик в контексте исследований систем обобщенных истинностных значений, было положено в работе [65], где такие структуры называются *модальными n-решетками* с операциями (взятия внутренности и замыкания) Тарского. В определении модальной n-решетки, как оно дается в статье [65], операции взятия внутренности и замыкания отвечают следующим условиям:

(1) $I_j(x) \leqslant_j x$, (4) $x \leqslant_j C_j(x)$,

(2) $I_j(x) = I_j I_j(x)$, (5) $C_j(x) = C_j C_j(x)$,

(3) $I_j(x \cap_j y) \leqslant_j I_j(x) \cap_j I_j(y)$, (6) $C_j(x) \cup_j C_j(y) \leqslant_j C_j(x \cup_j y)$.

Однако задача формализации логики класса n-решеток с такими свойствами операций взятия внутренности и замыкания в указанной статье не была решена. Вместо этого в [65] была построена формализация логики некоторого класса реляционных структур с неявным допущением, что логики указанных двух классов семантических структур совпадают.

Определение 22 ([65]). n-решетка $\mathscr{M}_n = \langle \mathscr{S}, \leqslant_1, \ldots, \leqslant_n \rangle$ называется *модальной n-решеткой Тарского*, если в ней определены операции *взятия внутренности* I_j и *взятия замыкания* C_j для каждого $j \leqslant n$, то есть операции, отвечающие следующим условиям для любых $x, y \in \mathscr{S}$, $k \leqslant n$:

$$(\mathscr{I}_1) \qquad I_j(x) \leqslant_j x,$$

$$(\mathscr{I}_2) \qquad I_j(x) = I_j I_j(x),$$

$$(\mathscr{I}_3) \qquad I_j(x \cap_j y) \leqslant_j I_j(x) \cap_j I_j(y),$$

$$(\mathscr{C}_1) \qquad x \leqslant_j C_j(x),$$

$$(\mathscr{C}_2) \qquad C_j(x) = C_j C_j(x),$$

$$(\mathscr{C}_3) \qquad C_j(x) \cup_j C_j(y) \leqslant_j C_j(x \cup_j y).$$

$\lhd$

Замечание 4. В работах [20, 21] изучаются варианты решеток Де Моргана с операциями взятия замыкания и внутренности, обладающими различными свойствами, коррелирующими со свойствами модальных операторов тех или иных систем модальной логики. В частности, рассматриваются решетки Де Моргана, в которых операция замыкания, помимо свойств, определяемых выражениями $(\mathscr{C}_1)$–$(\mathscr{C}_3)$ (для случая, когда $n = 1$), удовлетворяет равенству $C(\mathsf{0}) = \mathsf{0}$ (решетки Де Моргана, как они определяются в указанных работах, всегда являются ограниченными, то есть, содержат $\mathsf{0}$ и $\mathsf{1}$). Такую операцию авторы указанных работ называют *операцией замыкания Тарского*, объясняя это название влиянием работ Тарского, в которых операция взятия замыкания изучалась в связи с отношением следования в логических системах. Решетку с такой операцией взятия замыкания в тех же работах называют *решеткой с* *операцией замыкания Тарского*. То же самое распространяется и на операцию взятия внутренности, только она должна удовлетворять равенству $I(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ в дополнение к $(\mathscr{I}_1)$–$(\mathscr{I}_3)$ (для случая $n = 1$). Получаются *операция взятия внутренности Тарского* и, соответственно, *решетки с операцией взятия внутренности Тарского*.

Заметим, однако, что в определении 22 не сказано, что n-решетка является ограниченной. Ниже дается определение ограниченной модальной n-решетки с операциями Тарского. Структура, задаваемая определением 22 в контексте данного исследования будет именоваться *модальной n-решеткой Тарского* или просто *модальной n-решеткой*. $\triangleleft$

Свойство субмультипликативности $(\mathscr{I}_3)$, которое постулируется для операций взятия внутренности, как и свойство субаддитивности $(\mathscr{C}_3)$ для операций замыкания, эквивалентно их монотонности относительно любого из заданных порядков на множестве $\mathscr{S}$: $x \leqslant_k y \iff I_j(x) \leqslant_k I_j(y)$ $(x \leqslant_k y \iff C_j(x) \leqslant_k C_j(y))$. Покажем для I_j.

Пусть дано неравенство $(\mathscr{I}_3)$, покажем, что тогда имеет место требуемая монотонность. Сначала получаем следующую последовательность импликаций:

$x \leqslant_k y \implies x \cap_k y = x \implies I_j(x \cap_k y) = I_j(x) \implies I_j(x) \leqslant_k I_j(x \cap_k y) \implies I_j(x) \leqslant_k I_j(x) \cap_k I_j(y)$.

Последняя из импликаций в этом ряду обосновывается неравенством $(\mathscr{I}_3)$, а та, что ей предшествует, – рефлексивностью отношения $\leqslant_k$. Учитывая, что обращение последнего в этой цепочке неравенства тривиально выполняется, получаем $I_j(x) \cap_k I_j(y) = I_j(x)$, то есть $I_j(x) \leqslant_k I_j(y)$.

Обратно, допустим, что имеется монотонность I_j и необходимо вывести $(\mathscr{I}_3)$. Для этого нужно показать, что $I_j(x \cap_k y) \cap_k I_j(x) \cap_k I_j(y) = I_j(x \cap_k y)$. По существу требуется обосновать лишь неравенство $I_j(x \cap_k y) \leqslant_k I_j(x \cap_k y) \cap_k I_j(x) \cap_k I_j(y)$. Берем неравенства $(x \cap_k y) \leqslant_k (x \cap_k y)$, $x \cap_k y \leqslant_k x$, $x \cap_k y \leqslant_k y$ и, пользуясь монотонностью I_j, получаем $I_j(x \cap_k y) \leqslant_k I_j(x \cap_k y)$, $I_j(x \cap_k y) \leqslant_k I_j(x)$, $I_j(x \cap_k y) \leqslant_k I_j(y)$, откуда следует то, что требуется.

Операции C_j и I_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ являются дуальными по отношению друг к другу в любой n-решетке $\mathscr{M}_n$ в том смысле, что для всякого $x \in \mathscr{S}$, $C_j(x) = \neg_j I_j \neg_j(x)$ и $I_j(x) = \neg_j C_j \neg_j(x)$. Данное обстоятельство легко проверить, учитывая, что для всяких $x, y \in \mathscr{S}$ всякого j имеет место обращение порядка $x \leqslant_j y \iff \neg_j y \leqslant_j \neg_j x$, а также равенство $x = -_j -_j x$. Кроме того, для всякой модальной n-решетки справедливы еще и следующие равенства для любых $j, k \leqslant n, k \neq j$:

(1) $-_j I_j(x) = C_j(-_j x)$, (3) $-_k I_j(x) = I_j(-_k x)$,

(2) $-_j C_j(x) = I_j(-_j x)$, (4) $-_k C_j(x) = C_j(-_k x)$.

Справедливыми являются и обобщения этих равенств для последовательностей инверсий, содержащих заданное (четное или нечетное) число вхождений конкретной инверсии $-_j$.

Лемма 5. *Для всякой модальной n-решетки верными являются следующие равенства для любого $j (1 \leqslant j \leqslant n)$:*

(1) $\bar{\alpha} I_j(x) = C_j(\bar{\alpha} x)$, *для всякой последовательности инверсий $\bar{\alpha}$, содержащей нечетное число вхождений $-_j$,*

(2) $\bar{\alpha} C_j(x) = I_j(\bar{\alpha} x)$, *для всякой последовательности инверсий $\bar{\alpha}$, содержащей нечетное число вхождений $-_j$,*

(3) $\bar{\alpha} I_j(x) = I_j(\bar{\alpha} x)$, *для всякой последовательности инверсий $\bar{\alpha}$, содержащей четное число вхождений $-_j$,*

(4) $\bar{\alpha} C_j(x) = C_j(\bar{\alpha} x)$, *для всякой последовательности инверсий $\bar{\alpha}$, содержащей четное число вхождений $-_j$.*

Доказательство. Индукцией по числу вхождений инверсий в последовательность $\bar{\alpha}$. □

В монографии [78, Chapter VI] описывается класс структур, называемых топологическими булевыми алгебрами (булевы алгебры с операторами взятия внутренности и замыкания), а также особая разновидность фильтров в таких структурах – I-фильтры, которые наряду с каждым своим элементом содержат и результат применения к нему операции взятия внутренности. Аналогичное понятие можно ввести и для случая n-решеток.

Определение 23. n-фильтр $\mathscr{F}_n$ в n-решетке $\mathscr{M}_n$ называется I-фильтром, если для каждого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и каждого $x \in \mathscr{S}$:

$$x \in \mathscr{F}_n \implies I_j x \in \mathscr{F}_n.$$

◁

Для некоторых технических целей полезной окажется также следующая конструкция:

Определение 24. n-фильтр $\mathscr{F}_n$ в n-решетке $\mathscr{M}_n$ называется *I-монотонным относительно импликации*, если для каждого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и каждого $x \in \mathscr{S}$:

$$(\mathcal{I}m) \qquad x \supset_j y \in \mathscr{F}_n \implies I_j x \supset_j I_j y \in \mathscr{F}_n;$$

n-фильтр $\mathscr{F}_n$ в n-решетке $\mathscr{M}_n$ называется *C-монотонным относительно импликации*, если для каждого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и каждого $x \in \mathscr{S}$:

$$(\mathcal{C}m) \qquad x \supset_j y \in \mathscr{F}_n \implies C_j x \supset_j C_j y \in \mathscr{F}_n.$$

$\triangleleft$

В дальнейшем для краткости будем называть компонент $\mathscr{U}_n$ логической n-решетки $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$, в которой $\mathscr{U}_n$ является I-монотонным (C-монотонным) относительно импликации просто I-монотонным (C-монотонным).

Далее дадим определение ограниченной модальной n-решетки, обобщающее стандартное определение ограниченной решетки.

Определение 25. Модальная n-решетка называется ограниченной модальной n-решеткой, если она является ограниченной и наряду со свойствами $(\mathcal{I}_1)$–$(\mathcal{I}_3)$ и $(\mathcal{C}_1)$–$(\mathcal{C}_3)$, операции I_j и C_j удовлетворяют равенствам

$$(\mathcal{I}_0) \qquad I_j(\mathsf{1}_j) = \mathsf{1}_j$$

$$(\mathcal{C}_0) \qquad C_j(\mathsf{0}_j) = \mathsf{0}_j$$

для всех $j \leqslant n$. $\triangleleft$

Если $\mathscr{M}_n$ есть n-решетка с операциями взятия внутренности и замыкания Тарского (то есть, со свойствами, задаваемыми определением 25), то для указания на этот факт будет использоваться обозначение $\mathscr{M}_n^T$, а для логической n-решетки – $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^T$.

В алгебраической семантике для нормальных систем модальной логики используются более сильные свойства унарных операций, чем субмультипликативность $(\mathcal{I}_3)$ и субаддитивность $(\mathcal{C}_3)$ (где, как правило, $n = 1$). Для получения адекватной семантики требуются равенства (вместо неравенств), выражающие мультипликативность и аддитивность операций. В n-решеточном варианте это будут равенства (для всех

j $(1 \leqslant j \leqslant n)$):

$$(\mathscr{I}_3') \qquad I_j(x \cap_j y) = I_j(x) \cap_j I_j(y),$$

$$(\mathscr{C}_3') \qquad C_j(x \cup_j y) = C_j(x) \cup_j C_j(y).$$

Полезными окажутся и обобщения этих равенств. Пусть для конечного множества $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ элементов произвольной n-решетки с носителем $\mathscr{S}$ запись $\bigcap_j X$ является сокращением для выражения $a_1 \cap_j a_2 \cap_j \dots \cap_j a_n$ (с ассоциацией скобок влево, для определенности), а запись $I_j X$ является сокращением для $\{I_j a_1, I_j a_2, \dots, I_j a_n\}$. Аналогично для $\bigcup_j X$ и $C_j X$. Тогда имеют обобщенные равенства

$$(\mathscr{I}_3^\circ) \qquad I_j \bigcap_j X = \bigcap_j I_j X,$$

$$(\mathscr{C}_3^\circ) \qquad C_j \bigcup_j X = \bigcup_j C_j X.$$

Операции замыкания, определяемые выражениями $(\mathscr{C}_0)$–$(\mathscr{C}_2)$ и $(\mathscr{C}_3')$ называются *операциями взятия замыкания Куратовского* (вновь следуя терминологии работ [20, 21], что, однако, согласуется и с общепринятой терминологией). Соответственно, *операции взятия внутренности Куратовского* определяются выражениями $(\mathscr{I}_0)$–$(\mathscr{I}_2)$ и $(\mathscr{I}_3')$.

Определение 26. Модальная n-решетка, в которой выполняются условия $(\mathscr{I}_0)$–$(\mathscr{I}_2)$, $(\mathscr{I}_3')$, а также $(\mathscr{C}_0)$–$(\mathscr{C}_2)$ и $(\mathscr{C}_3')$ называется *модальной n-решеткой Куратовского*. Модальная n-решетка Куратовского называется ограниченной, если она является ограниченной модальной n-решеткой Тарского. $\triangleleft$

Если $\mathscr{M}_n$ есть n-решетка Куратовского, то для указания на этот будет использоваться обозначение $\mathscr{M}_n^K$, а для (ультра)логической n-решетки – $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^K$.

Наконец, в статье [20] добавляется еще одна разновидность операций – *операции взятия замыкания и внутренности Халмоша*, которые в нашем случае отвечают следующим равенствам (для всех $j \leqslant n$):

$$(\mathtt{H}) \qquad C_j(x) = I_j C_j(x).$$

Равенство (H) можно переписать и в виде одного из двух следующих равенств:

$$(\mathscr{I}_4) \qquad I_j(-_k -_j I_j(x)) = -_k -_j I_j(x),$$

$$(\mathscr{C}_4) \qquad C_j(-_k -_j C_j(x)) = -_k -_j C_j(x).$$

Определение 27. Модальная n-решетка Куратовского, в которой выполняются равенства $(\mathscr{I}_4)$ и $(\mathscr{C}_4)$, называется *модальной n-решеткой Халмоша*. Модальная n-решетка Халмоша называется ограниченной, если она является ограниченной модальной n-решеткой Тарского. ◁

Обозначения для этого случая – $\mathscr{M}_n^H$, а для логической n-решетки – $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^H$.

Замечание 5. В статье [59] изучаются булевы алгебры с операторами, являющимися аналогами кванторов общности и существования. В частности, предлагаются постулаты, которым данные отображения должны удовлетворять. Один из постулатов как раз и является аналогом характеристичсекой аксиомы **5** модальной системы **S5**. Правда, сам автор статьи указывает лишь на аналогию свойств оператора типа квантора существования и свойств топологического оператора замыкания Куратовского. ◁

ГЛАВА ВТОРАЯ. ЛОГИКИ ОНТОЭПИСТЕМИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ИСТИННОСТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Идея, на которой основан подход к построению систем «двухкомпонентных» истинностных значений, состоит в следующем. Истинностное значение представляет собой составной объект, сложно устроенную сущность, может иметь части и некоторую внутреннюю структуру. В рассматриваемом подходе предлагается выделить две составные части истинностного значения – *онтологическую* и *эпистемическую*. Высказывание может оказаться фактически истинным в отношении положения дел в некоторой предметной области, с точки зрения определенной общепринятой теории, объясняющей функционирование объектов данной предметной области, но в то же время оцениваться как ложное исходя из знаний, убеждений или верований какого-то рационального агента (или сообществ рациональных агентов). В первом случае это высказывание можно считать онтологически истинным, во втором – эпистемически ложным. Обе этих оценки сосуществуют в едином истинностном значении. Можно говорить об онтологическом и эпистемическом измерениях, координатах или проекциях единого истинностного значения применительно к выделяемым частям истинностного значения. Само истинностное значение, содержащее онтологическую и эпистемическую компоненты, называется *онтоэпистемическим*.

§1. Логика онотоэпистемических истинностных значений: синтаксис и семантика

Математически только что описанные истинностные значения можно представить как результат декартова произведения двух *базисных* множеств: $\{t, f\}$ и $\{1, 0\}$, где $\{t, f\}$ представляет собой множество онтологических, а $\{0, 1\}$ – множество эпистемических истинностных значений. Результирующее множество состоит из четырех элементов: $\langle t, 1\rangle$, $\langle t, 0\rangle$, $\langle f, 1\rangle$ и $\langle f, 0\rangle$. Обозначим его через $\mathbf{4}^{oe}$.

На множестве $\mathbf{4}^{oe}$ задается отношение частичного порядка с учетом упорядочения элементов базисных множеств. Положим, что базисные множества $\{t, f\}$ и $\{1, 0\}$ упорядочены отношениями частичного порядка $\leqslant_t$ и $\leqslant_1$ соответственно таким образом, что $f \leqslant_t t$ и $0 \leqslant_1 1$. Отношение порядка на $\mathbf{4}^{oe}$ определяется следующим образом.

Определение 28. Для всяких $\langle s, u\rangle$ и $\langle v, w\rangle$ из множества $\mathbf{4}^{oe}$:

$$\langle s, u\rangle \leqslant \langle v, w\rangle \iff s \leqslant_t v \ \ \& \ \ u \leqslant_1 w.$$

$\lhd$

Помимо отношений $\leqslant_t$ и $\leqslant_1$ на базисных множествах $\{t, f\}$ и $\{1, 0\}$, очевидным образом определяются их наибольший и наименьший элементы. Для t и f обозначим как $t \cup_t f = t$ – наибольший, а $t \cap_t f = f$ – наименьший элементы. Аналогично для второго множества: $1 \cup_1 0 = 1$ и $1 \cap_1 0 = 0$. Понятно, что $\cap_t$ и $\cap_1$ – это бинарные операции, семантические аналоги конъюнкции, а $\cup_t$ и $\cup_1$ – дизъюнкции. Также можно ввести и унарные операции $-_t$ и $-_1$: $-_t t = f$, $-_t f = t$, $-_1 1 = 0$, $-_1 0 = 1$.

Пара $\mathscr{L}\mathbf{4}^{oe} = \langle \mathbf{4}^{oe}, \leqslant\rangle$ представляет собой четырехэлементную решетку с наибольшим элементом $\langle t, 1\rangle$ и наименьшим элементом $\langle f, 0\rangle$, а также двумя несравнимыми «боковыми» элементами $\langle t, 0\rangle$ и $\langle f, 1\rangle$. Графическое представление данной структуры показано на следующей диаграмме:

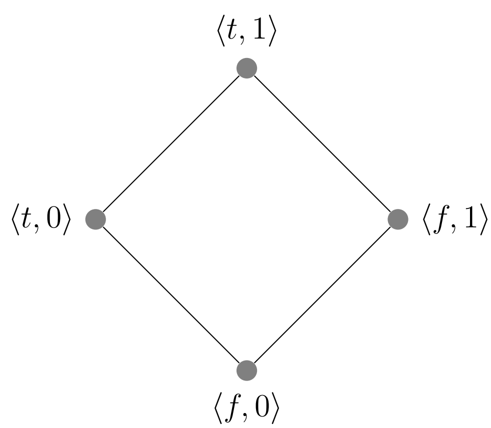

Рисунок 6

Для того, чтобы ответить на вопрос, что из себя представляет логика, а точнее семейство логик онтоэпистемических обобщенных истинностных значений, а также построить формализации тех или иных логик из этого семейства, зададим подходящий пропозициональный язык, назовем его $\mathscr{L}^{oe}$.

Алфавит этого языка содержит счетное множество пропозициональных переменных, $\texttt{Var} = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$, пропозициональные связки $\wedge$, $\vee$, $\neg_t$ и $\neg_1$, а также технические символы, левую и правую круглые скобки: (и). Определение формулы данного языка стандартное. Множество всех формул языка $\mathscr{L}^{oe}$ обозначим как $\texttt{For}_{oe}$.

Определение 29. Оценкой языка $\mathscr{L}^{oe}$ называется отображение $v\colon \mathtt{Var} \longrightarrow \mathbf{4}^{oe}$. Расширением оценки v называется такое отображение $v'\colon \mathtt{For}_{oe} \longrightarrow \mathbf{4}^{oe}$, что для всяких $A, B \in \mathtt{For}_{oe}$

(1) $v'(p) = v(p)$,

(2) $v'(A \wedge B) = v'(A) \cap v'(B)$,

(3) $v'(A \vee B) = v'(A) \cup v'(B)$,

(4) $v'(\neg_t A) = {\sim_t} v'(A)$,

(5) $v'(\neg_1 A) = {\sim_1} v'(A)$.

$\triangleleft$

В дальнейшем, как правило, под оценкой v будет пониматься расширенная оценка, то есть оценка всех формул языка $\mathscr{L}^{oe}$. Теперь можно дать определение отношения логического следования. Как и в случае с системой **FDE**, можно дать различные варианты определения этого отношения: с учетом «сохранения» одного или двух видов истины или «обратного сохранения» одного из видов ложности (см. определения следования в системе **FDE** см. [33, С. 10]). Однако, наиболее фундаментальным представляется отношение следования, определяемое через отношение решеточного порядка. Именно оно и будет аксиоматизировано в следующем параграфе. Кроме того, отношение логического следования определяется как бинарное отношение. Отчасти это обусловлено сложившейся традицией определения следования в **FDE**-подобных системах, отчасти это связано с предполагаемой формализацией в виде системы бинарного следования.

Определение 30. Для всяких $A, B \in \mathtt{For}_{oe}$ и всякой оценки v формул языка $\mathscr{L}^{oe}$,

$$A \vDash_{oe} B \iff v(A) \leqslant v(B)$$

$\triangleleft$

Другие возможные определения отношения следования через сохранность компонентов истинностного значения перечислены ниже. Запись $t \in v(A)$ означает, что пара, которую оценка v приписывает формуле A, содержит t в качестве своего первого компонента. Аналогично для других компонентов, 1, f и 0.

(a) $A \vDash_t B \iff t \in v(A) \Longrightarrow t \in v(B)$,

(b) $A \vDash_1 B \iff 1 \in v(A) \Longrightarrow 1 \in v(B)$,

(c) $A \vDash_f B \iff f \in v(B) \Longrightarrow f \in v(A)$,

(d) $A \vDash_0 B \iff 0 \in v(B) \Longrightarrow 0 \in v(A)$.

В следующей лемме сформулирован ряд утверждений, которые непосредственно следуют из определения 29 расширенной оценки формул.

Лемма 6. *Для всяких $A, B \in \mathtt{For}_{oe}$ и всякой оценки v языка $\mathscr{L}^{oe}$ справедливы следующие утверждения:*

(1) $t \in v(A) \iff f \notin v(A)$;

(2) $1 \in v(A) \iff 0 \notin v(A)$;

(3) $t \in v(A) \iff t \in v(\neg_1 A) \iff t \in v(\neg_t \neg_t A)$,

(4) $f \in v(A) \iff f \in v(\neg_1 A) \iff f \in v(\neg_t \neg_t A)$,

(5) $t \in v(\neg_t A) \iff f \in v(A)$,

(6) $f \in v(\neg_t A) \iff t \in v(A)$,

(7) $t \in v(A \wedge B) \iff t \in v(A) \;\&\; t \in v(B)$,

(8) $f \in v(A \wedge B) \iff f \in v(A) \,\dot{\vee}\, f \in v(B)$,

(9) $f \in v(A \vee B) \iff f \in v(A) \;\&\; f \in v(B)$,

(10) $t \in v(A \vee B) \iff t \in v(A) \,\dot{\vee}\, t \in v(B)$,

(11) $1 \in v(A) \iff 1 \in v(\neg_t A) \iff 1 \in v(\neg_1 \neg_1 A)$,

(12) $0 \in v(A) \iff 0 \in v(\neg_t A) \iff 0 \in v(\neg_1 \neg_1 A)$,

(13) $1 \in v(\neg_1 A) \iff 0 \in v(A)$,

(14) $0 \in v(\neg_1 A) \iff 1 \in v(A)$,

(15) $1 \in v(A \wedge B) \iff 1 \in v(A) \;\&\; 1 \in v(B)$,

(16) $0 \in v(A \wedge B) \iff 0 \in v(A) \,\dot{\vee}\, 0 \in v(B)$,

(17) $0 \in v(A \vee B) \iff 0 \in v(A) \;\&\; 0 \in v(B)$,

(18) $1 \in v(A \vee B) \iff 1 \in v(A) \,\dot{\vee}\, 1 \in v(B)$.

Отношение следования, задаваемое определением 30, может быть, конечно же, описано и в терминах принадлежности компонентов t и 1 истинностному значению.

Лемма 7. *Для всяких* $A, B \in \mathtt{For}_{oe}$ *и всякой оценки* v *формул языка* $\mathscr{L}^{oe}$ *верно, что*

$$A \vDash_{oe} B \iff (t \in v(A) \Longrightarrow t \in v(B)) \;\; \& \;\; (1 \in v(A) \Longrightarrow 1 \in v(B)).$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Допустим, что $A \vDash_{oe} B$, то есть $v(A) \leqslant v(B)$, но при этом не выполняется конъюнктивное утверждение в правой части эквиваленции. Пусть, к примеру, ложен левый конъюнкт. Это означает, что $t \in v(A)$, но $t \notin v(B)$. Тогда становится ложным и $v(A) \leqslant v(B)$, поскольку любое из двух истинностных значений, содержащих t, ограничено сверху только истинностными значениями, содержащими t. Таким образом, ложно и $A \vDash_{oe} B$, что противоречит допущению.

($\Longleftarrow$) Допустим, что конъюнктивное утверждение в правой части эквиваленции истинно, но $A \nvDash_{oe} B$. Последнее означает, что $v(B)$ (строго) предшествует $v(A)$ по отношению $\leqslant$ или же они не сравнимы. Просмотром упорядоченного множества 4^{oe} нетрудно убедиться, что тогда t или 1, содержащиеся в $v(A)$, будут отсутствовать в $v(B)$. Но тогда конъюнктивное утверждение становится ложным. $\square$

§2. Аксиоматизации отношений логического следования

Дальнейшая задача, которую предстоит решить, состоит в формализации отношения логического следования, заданного в определении 30. Для этих целей можно использовать различные виды исчислений, однако наиболее удобными и часто используемыми при формализации логик, родственных системе **FDE**, являются системы (исчисления) *бинарного следования* (в терминологии, близкой к используемой в монографии [34, P. 185][7]).

Дедуктивные постулаты систем бинарного следования содержат множество утверждений типа аксиом и множество правил вывода. Утверждения типа аксиом представляют собой пары формул (формульные пары, консеквенции), записываемые обычно как выражения вида $A \vdash B$. Далее для краткости пары формул, наделяемые статусом аксиомных утверждений, будем называть просто аксиомами. Помимо аксиом исчисления бинарного следования содержат и правила вывода, позволяющие от одной или нескольких формульных пар переходить к других формульным парам. Множество аксиом однотипной структуры репрезентируется (обычно конечным) множеством схем аксиом. Определения доказательства и доказуемой формульной пары здесь практически стандартные, дадим их в общем виде для произвольного исчисле-

[7] Если быть более точным, то надо сказать, что в [34] в отношении репрезентации логики в виде множества пар формул используется термин *binary implicational systems*.

ния бинарного следования L.

Определение 31. *Доказательство* в исчислении бинарного следования L есть непустая конечная последовательность формульных пар (языка исчисления L), в которой каждый элемент есть либо аксиома исчисления L, либо получен из предыдущих элементов данной последовательности по одному из правил вывода исчисления L.

Доказательство формульной пары (A, B) в исчислении бинарного следования L есть такое доказательство в L, в котором последний элемент совпадает с (A, B).

Пара формул (A, B) *доказуема* в исчислении бинарного следования L, если существует ее доказательство в L. $\triangleleft$

Тот факт, что (A, B) доказуема в L записывается в виде утверждения $A \vdash_L B$. Понятно, что для любой аксиомы вида $A \vdash B$ некоторого исчисления бинарного следования L верно, что $A \vdash_L B$. Множество всех доказуемых в исчислении L пар формул задает также отношение $\vdash_L$ на множестве формул языка исчисления L.

Логика с синтаксической точки зрения, при данном подходе, представляет собой наименьшее множество *пар формул* фиксированного языка, которое содержит определенный набор исходных дедуктивных постулатов аксиомного типа (в данном случае пар формул) и замкнуто относительно правил вывода.

Каждому из отношений следования, определенных в предыдущем параграфе, может быть сопоставлена (если таковая существует) адекватная формализация в виде некоторого исчисления L бинарного следования. Исчисление бинарного следования, как правило, содержит базисный набор постулатов, описывающих «решеточные» свойства связок $\wedge$ и $\vee$:

(1) $A \wedge B \vdash_L A$,

(2) $A \wedge B \vdash_L B$,

(3) $A \vdash_L B \;\; \& \;\; A \vdash_L C \,/\, A \vdash_L B \wedge C$,

(4) $A \vdash_L A \vee B$,

(5) $B \vdash_L A \vee B$,

(6) $A \vdash_L C \;\; \& \;\; B \vdash_L C \,/\, A \vee B \vdash_L C$

Помимо этого может иметь место дистрибутивность $A \wedge (B \vee C) \vdash_L (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ и аналог закона тождества $A \vdash_L A$.

Теории и контртеории

Введем некоторые синтаксические конструкции, которые играют существенную роль в доказательствах полноты для исчислений типа систем бинарного следования, содержащих в алфавите своего формализованного языка связки $\wedge$ и $\vee$. Пусть в данном случае для определенности имеется в виду язык $\mathscr{L}^{oe}$, в котором сформулирована некоторая система бинарного следования L.

Определение 32. Множество формул $\mathscr{T}$ языка $\mathscr{L}^{oe}$ называется L-*теорией*, если для любых формул A и B:

(1) Если $A \in \mathscr{T}$ и $A \vdash_L B$, то $B \in \mathscr{T}$;

(2) Если $A, B \in \mathscr{T}$, то $A \wedge B \in \mathscr{T}$.

L-теория $\mathscr{T}$ называется *простой*, если $A \vee B \in \mathscr{T}$ влечет $A \in \mathscr{T}$ или $B \in \mathscr{T}$.

Множество формул $\mathscr{T}^\circ$ языка $\mathscr{L}^{oe}$ называется L-*контртеорией*, если для любых формул A и B:

(1) Если $B \in \mathscr{T}^\circ$ и $A \vdash_L B$, то $A \in \mathscr{T}^\circ$;

(2) Если $A, B \in \mathscr{T}^\circ$, то $A \vee B \in \mathscr{T}^\circ$.

L-контртеория $\mathscr{T}^\circ$ называется *простой*, если $A \wedge B \in \mathscr{T}^\circ$ влечет $A \in \mathscr{T}^\circ$ или $B \in \mathscr{T}^\circ$. ◁

Поскольку $\vdash_L$ есть ни что иное, как бинарное отношение на множестве формул, пункт (1) в определении теории сообщает о ее замкнутости по отношению $\vdash_L$ (для контртеорий постулируется обратная замкнутость). В дальнейшем, если из контекста ясно, о какой дедуктивной системе идет речь, или же, наоборот, конкретное исчисление не существенно, будем употреблять термины *теория* и *контртеория* без префикса L.

Один из наиболее естественных вопросов о взаимоотношении теорий и контртеорий состоит в том, можно ли по заданной теории построить контртеорию и наоборот? Это можно сделать, если имеется в наличии некоторый подходящий набор языковых и дедуктивных средств. В частности, достаточно располагать унарной связкой типа отрицания – обозначим ее как $\neg_e$, – для которой имеют место

(C) контрапозиция: $A \vdash_L B$ влечет $\neg_e B \vdash_L \neg_e A$,

(DN) снятие и введение двойного отрицания: $A \dashv\vdash_L \neg_e\neg_e A$, а также постулаты введения и исключения связок $\vee$ и $\wedge$, позволяющие вместе с (C) и (DN) доказать аналоги законов Де Моргана

(D1) $\neg_e A \wedge \neg_e B \dashv\vdash_L \neg_e(A \vee B)$,

(D2) $\neg_e A \vee \neg_e B \dashv\vdash_L \neg_e(A \wedge B)$.

Рассмотрим перестроение теории в контртеорию и обратно более детально. Приведенные рассуждения справедливы для любой системы бинарного следования L, в которой имеются описанный выше набор дедуктивных средств. Для формулы A положим, что $\tilde{\neg}_e A$ есть формула B, если $A = \neg_e B$ и $\neg_e A$ в противном случае. Для множества формул Γ положим, что $\neg_e \Gamma = \{\tilde{\neg}_e A \mid A \in \Gamma\}$.

В следующей лемме доказывается один из ключевых фактов о взаимоотношении L-теорий и L-контртеорий.

Лемма 8. *Пусть $\mathscr{T}$ есть некоторая L-теория, а $\mathscr{T}^\circ$ есть некоторая L-контртеория. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\neg_e \mathscr{T}$ есть L-контртеория;*

(2) *$\neg_e \mathscr{T}^\circ$ есть L-теория.*

Доказательство. Пусть $\neg_e \mathscr{T}$ есть множество, построенное из теории $\mathscr{T}$. Покажем, что оно является контртеорией.

Сначала необходимо показать обратную замкнутость множества $\neg_e \mathscr{T}$ по отношению $\vdash_L$. Допустим, что $A \in \neg_e \mathscr{T}$ и $C \vdash_L A$. Нужно получить утверждение $C \in \neg_e \mathscr{T}$.

Пусть A имеет вид $\neg_e B$ для некоторой формулы $B \in \mathscr{T}$, то есть, по допущению, $C \vdash_L \neg_e B$. Используя правило (C), получаем $\neg_e \neg_e B \vdash \neg_e C$. Далее, учитывая (DN), получаем $B \vdash_L \neg_e C$, что дает $\neg_e C \in \mathscr{T}$ в силу замкнутости $\mathscr{T}$ по отношению $\vdash_L$. Наконец, $C \in \neg_e \mathscr{T}$ по построению этого множества.

Пусть A есть B для некоторой формулы $\neg_e B \in \mathscr{T}$ и по допущению $C \vdash_L B$. Вновь, применяя (C), получаем $\neg_e B \vdash_L \neg_e C$. Отсюда $\neg_e C \in \mathscr{T}$ и $C \in \neg_e \mathscr{T}$ по построению $\neg_e \mathscr{T}$.

Для того, чтобы обосновать замкнутость $\neg_e \mathscr{T}$ относительно $\vee$ допустим, что $A, B \in \neg_e \mathscr{T}$. Теперь потребуется рассмотреть четыре случая, согласно определению множества $\neg_e \mathscr{T}$.

1. Пусть $\neg_e A \in \mathscr{T}$ и $\neg_e B \in \mathscr{T}$. Используя замкнутость множества $\mathscr{T}$ относительно конъюнкции, получаем $\neg_e A \wedge \neg_e B \in \mathscr{T}_t$, а следовательно и $\neg_e(A \vee B) \in \mathscr{T}$, в силу (D1). Таким образом, заключаем, что $A \vee B \in \neg_e \mathscr{T}$.

2. Допустим, что $\neg_e A \in \mathscr{T}$ и $B = \neg_e B'$ для некоторой формулы $B' \in \mathscr{T}$. Сначала получаем $\neg_e \neg_e B' \in \mathscr{T}$ в силу (DN). Затем, так же, как и в предыдущем случае, получаем $\neg_e A \wedge \neg_e \neg_e B' \in \mathscr{T}$, откуда $\neg_e(A \vee \neg_e B') \in \mathscr{T}$. Тогда, по построению $\neg_e \mathscr{T}$, $A \vee \neg_e B' \in \neg_e \mathscr{T}$, что и требовалось.

   Аналогично доказываются оставшиеся случаи

3. $B \in \mathscr{T}$ и $A = \neg_e A'$ для некоторой формулы $B' \in \mathscr{T}$

4. $A = \neg_e A'$ для некоторой формулы $B' \in \mathscr{T}$ и $B = \neg_e B'$ для некоторой формулы $B' \in \mathscr{T}$.

Таким образом, множество $\neg_e \mathscr{T}$ есть L-контртеория. □

Лемма 9. *Для любых теорий $\mathscr{T}_a$, $\mathscr{T}_b$ и контртеорий $\mathscr{T}_a^\circ$, $\mathscr{T}_b^\circ$ верно:*

(1) $\mathscr{T}_a \subseteq \mathscr{T}_b \implies \neg_e \mathscr{T}_a \subseteq \neg_e \mathscr{T}_b$,

(2) $\mathscr{T}_a^\circ \subseteq \mathscr{T}_b^\circ \implies \neg_e \mathscr{T}_a^\circ \subseteq \neg_e \mathscr{T}_b^\circ$.

Доказательство. (1) Пусть для некоторой формулы A верно, что $A \in \neg_e \mathscr{T}_a$. Сначала предположим, что A не имеет вид $\neg_e B$. Тогда $\neg_e A \in \mathscr{T}_a$, а значит $\neg_e A \in \mathscr{T}_b$. Последнее утверждение дает $A \in \neg_e \mathscr{T}_b$.

Пусть, далее, A имеет вид $\neg_e B$. Тогда $B \in \mathscr{T}_a$ и $B \in \mathscr{T}_b$. Из последнего утверждения получаем $\neg_e B \in \neg_e \mathscr{T}_b$, то есть $A \in \neg_e \mathscr{T}_b$. □

Приведенные выше рассуждения имеют достаточно широкую степень общности и подходят для многих **FDE**-подобных систем. В частности, они справедливы и для изучаемых в данной главе логик онтоэпистемических истинностных значений, в которых комбинация $\neg_t \neg_1$ (или $\neg_1 \neg_t$) имеет свойства (C) и (DN).

Теории и контртеории играют в доказательствах полноты для **FDE**-подобных систем такую же роль, как множества Линденбаума в доказательствах полноты для систем классической логики, то есть используются для определения канонической оценки формул. Другое существенное предназначение теорий и контртеорий состоит в отделяющей функции для отношения $\vdash_L$. Если $A \nvdash_L B$, то существует теория $\mathscr{T}$ такая, что $A \in \mathscr{T}$, но $B \notin \mathscr{T}$ или существует контртеория $\mathscr{T}^\circ$ такая, что $B \in \mathscr{T}^\circ$, но $A \notin \mathscr{T}^\circ$. Существование таких отделяющих множеств постулируется и доказывается в следующей лемме (для случая теорий). Лемма формулируется в предположении, что в абстрактном исчислении бинарного следования L присутствуют базисные постулаты, приведенные в конце предыдущего параграфа. Запись $(\Gamma)^{\vdash_L, \wedge}$ означает замыкание множества Γ по отношению $\vdash_L$ и операции $\wedge$.

Лемма 10. *Если $A \nvdash_L B$, то существует простая теория $\mathscr{T}$ такая, что $A \in \mathscr{T}$ и $B \notin \mathscr{T}$.*

Доказательство. Построим последовательность множеств $\mathscr{T}_0, \mathscr{T}_1, \ldots$ следующим образом. Сначала сформируем самый первый элемент этой последовательности: $\mathscr{T}_0 = \{C \mid A \vdash_L C\}$. Ясно, что при наличии $A \vdash_L A$ будет иметь место $A \in \mathscr{T}_0$ и в то же время $B \notin \mathscr{T}_0$. $\mathscr{T}_0$ есть теория, но этой теории не достаточно для того, чтобы задать каноническую оценку формул языка системы L.

Для дальнейшего построения цепочки теорий зафиксируем некоторый пересчет $A_1, A_2, A_3, \ldots$ формул языка системы L и определим $\mathscr{T}_{i+1}$ для $i > 0$ следующим образом:

$$\mathscr{T}_{i+1} = \begin{cases} \mathscr{T}_i \cup \{A_i\}, \text{ если } B \notin (\mathscr{T}_i \cup \{A_i\})^{\vdash_L, \wedge} \\ \mathscr{T}_i \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Пусть $\mathscr{T} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathscr{T}_i$. Полученное множество $\mathscr{T}$ является простой теорией, содержащей A, но не содержащей B. Проверим эти утверждения.

$\mathscr{T}$ является теорией. Действительно, пусть для некоторой формулы $B \in \mathscr{T}$, $B \vdash_L C$. Формула B должна встречаться в пересчете и совпадать с A_j для некоторого j. По построению $\mathscr{T}_j$ получаем, что $C \in \mathscr{T}_j$, а значит $C \in \mathscr{T}$. Замкнутость относительно $\wedge$ также следует из построения $\mathscr{T}$, поскольку для любых формул B и C, содержащихся в $\mathscr{T}$, найдется $\mathscr{T}_k$, которой они принадлежат. В свою очередь $\mathscr{T}_k$ замкнута относительно $\wedge$.

Для доказательства простоты $\mathscr{T}$ потребуется наличие дистрибутивности $\wedge$ относительно $\vee$. Допустим, что для некоторых формул A_i и A_j верно, что $A_i \vee A_j \in \mathscr{T}$, но $A_i \notin \mathscr{T}$ и $A_j \notin \mathscr{T}$. Это означает, что найдутся такие формулы A' и A'', что $A' \in \mathscr{T}_{i-1}$ и $A' \wedge A_i \vdash_L B$, $A'' \in \mathscr{T}_{j-1}$ и $A'' \wedge A_j \vdash_L B$, а значит $(A' \wedge A'') \wedge A_i \vdash_L B$ и $(A' \wedge A'') \wedge A_j \vdash_L B$. Отсюда получаем $((A' \wedge A'') \wedge A_i) \vee ((A' \wedge A'') \wedge A_j) \vdash_L B$. Используя дистрибутивность $\wedge$ относительно $\vee$, выводим $(A' \wedge A'') \wedge (A_i \vee A_j) \vdash_L B$. Однако $(A' \wedge A'') \wedge (A_i \vee A_j) \in \mathscr{T}$, откуда $B \in \mathscr{T}$, что невозможно по построению $\mathscr{T}$. □

Из доказательства простоты теории $\mathscr{T}$ видно, что дедуктивная система L должна содержать постулат, обеспечивающий дистрибутивность $\wedge$ относительно $\vee$, наряду с постулатами исключения $\wedge$ и $\vee$, а также рефлексивность и транзитивность $\vdash_L$.

Хорошо известно, что теории являются аналогами фильтров в решетках, а контртеории – аналогами идеалов. Простым теориям (контртеориям) соответствуют простые фильтры (идеалы). Кроме того, доказанная только что лемма также имеет свой аналог в теории (дистрибутивных) решеток. Если в решетке $(L, \leqslant)$ имеет место $a \nleqslant b$, то существует простой фильтр F такой, что $a \in F$ и $b \notin F$. Это утверждение верно для любых $a, b \in L$.

Для целей данной работы потребуется и более сложная конструкция, представляющая собой пару (теория, контртеория). Решеточным аналогом такой пары является пара (фильтр, идеал) и использовались такие объекты в известном доказательстве А. Уркварта теоремы о представлении недистрибутивных решеток [90]. В доказательстве Уркварта использовались пары вида (F, I), состоящие из фильтра (F) и идеала (I) некоторой недистрибутивной решетки, для которых $F \cap I = \varnothing$, а, кроме того, такие пары должны быть максимальными вот в каком смысле. Фильтр F называется I-максимальным, если он является максимальным элементом множества всех фильтров, не пересекающихся с I. Аналогично, идеал I называется F-максимальным, если он является максимальным элементом в множестве всех идеалов, не пересекающихся с F. Пара (F, I) называется максимальной, если F является I-максимальным, а I, в свою очередь, F-максимальным. Можно доказать лемму о том, что любая пара (F, I) такая, что $F \cap I = \varnothing$, может быть расширена до максимальной. Доказательство этого факта достаточно простое, но оно существенным образом использует лемму Цорна (см., например, [7, P. 521]).

Аналогичным образом можно рассмотреть пару $(\mathscr{T}, \mathscr{T}^\circ)$ L-теории и L-контртеории (для некоторой фиксированной системы L) такую, что $\mathscr{T} \cap \mathscr{T}^\circ = \varnothing$ определить для нее максимальность компонентов: $\mathscr{T}$ является $\mathscr{T}^\circ$-максимальной, если она максимальна в множестве теорий, не пересекающихся с $\mathscr{T}^\circ$, а $\mathscr{T}^\circ$ является $\mathscr{T}$-максимальной, если она максимальна в множестве контртеорий, не пересекающихся с $\mathscr{T}$. Тогда пара $(\mathscr{T}, \mathscr{T}^\circ)$ называется максимальной, если ее компоненты взаимно максимальны. Теперь сформулируем следующую лемму, аналогичную лемме о расширении пары (F, I).

Лемма 11. *Пусть L есть некоторая система бинарного следования, $(\mathscr{T}_0, \mathscr{T}_0^\circ)$ есть пара, состоящая из L-теории $\mathscr{T}_0$ и L-контртеории $\mathscr{T}_0^\circ$. Тогда существует максимальная пара $(\mathscr{T}, \mathscr{T}^\circ)$, состоящая из L-теории $\mathscr{T}$ и L-контртеории $\mathscr{T}^\circ$, такая, что $\mathscr{T}_0 \subseteq \mathscr{T}$ и $\mathscr{T}_0^\circ \subseteq \mathscr{T}^\circ$.*

Для доказательства этой леммы определим порядок на парах по теоретико-множественному включению компонентов и по лемме Цорна получим существование в нем максимального элемента, содержащего $(\mathscr{T}_0, \mathscr{T}_0^\circ)$.

§3. Система $\mathbf{FDE}_{oe}$

Система $\mathbf{FDE}_{oe}$ строится в пропозициональном языке $\mathscr{L}^{oe}$, оценка формул которого описана в параграфе 1 данной главы. Отношение логического следования задается определением 30. Семантика данной системы впервые была представлена в докладе [47], более детально описана в статьях [4] и [96]. Исторически первая аксиоматизация системы $\mathbf{FDE}_{oe}$ в форме системы бинарного следования вместе с доказательствами непротиворечивости и полноты была опубликована в работе [94]. В работах [4, 94, 96] система $\mathbf{FDE}_{oe}$ именуется $\mathbf{FDE}_{scl}$. Нижний индекс в названии $\mathbf{FDE}_{scl}$ отсылает с словосочетанию *super-classical*, которое указывает на важную связь языковых связок $\neg_t$ и $\neg_1$ данной логической системы с отрицанием классической логики. Оказалось, что комбинация из двух различных таких связок, $\neg_t\neg_1$ (или $\neg_1\neg_t$), рассматриваемая как единое целое, обладает всеми свойствами классического отрицания (далее использован знак отношения следования в смысле определения 30):

(1) $A \vDash_{oe} B / \neg_t\neg_1 B \vDash_{oe} \neg_t\neg_1 A$,

(2) $A \vDash_{oe} \neg_t\neg_1\neg_t\neg_1 A$,

(3) $\neg_t\neg_1\neg_t\neg_1 A \vDash_{oe} A$,

(4) $A \wedge \neg_t\neg_1 A \vDash_{oe} B$.

В силу этого обстоятельства связки $\neg_t$ и $\neg_1$ выступают как своеобразные половинки классического отрицания, из-за чего их удобно называть *полуотрицаниями*, несмотря на используемость этого термина в литературе[8] в других значениях.

Аксиоматизация логики $\mathbf{FDE}_{oe}$, предложенная в статье [94], содержит существенно меньше схем. Это схемы аксиом (1)–(7), (18) из списка 1, доказуемая пара (1) из леммы 12, а также правила вывода (R1)–(R3) и (R6) $A \vdash B \vdash \neg_t\neg_1 B \vdash \neg_t\neg_1 A$. Достигается этот эффект за счет сильных свойств теорий, применяемых при доказательстве леммы о канонической оценки (подробнее об этом будет сказано ниже).

Далее будет предложена несколько иная, более развернутая совокупность схем аксиом и правил вывода, формализующая логику $\mathbf{FDE}_{oe}$.

Дедуктивные постулаты предлагаемой системы перечислены в таблице 1. Предварительно заметим, что в данной системе, как этого следует ожидать ввиду классических свойств комбинации $\neg_t\neg_1$, доказуемы аналоги законов Де Моргана для $\neg_t\neg_1$

[8] Например, Л. Хамберстоун с статье [60] в аналогичной ситуации вводит термин *demi-negation*, поскольку более естественный термин, *semi-negation*, уже занят в других работах, в частности, в известной монографии Е. Расевой [78].

Таблица 1. Дедуктивные постулаты системы $\mathbf{FDE}_{oe}$.

(1) $A \wedge B \vdash A$,	(11) $\neg_1 A \wedge B \vdash \neg_1(A \wedge B)$,
(2) $A \wedge B \vdash B$,	(12) $\neg_t A \wedge \neg_t B \vdash \neg_t(A \wedge B)$,
(3) $A \vdash A \vee B$,	(13) $\neg_1 A \wedge \neg_1 B \vdash \neg_1(A \wedge B)$,
(4) $B \vdash A \vee B$,	(14) $\neg_t(A \wedge B) \vdash \neg_t A \vee \neg_t B$,
(5) $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$,	(15) $\neg_1(A \wedge B) \vdash \neg_1 A \vee \neg_1 B$,
(6) $\neg_1\neg_1 A \dashv\vdash A$,	(16) $\neg_t(A \vee B) \vdash \neg_t A \vee \neg_t B$,
(7) $A \dashv\vdash \neg_t\neg_t A$,	(17) $\neg_1(A \vee B) \vdash \neg_1 A \vee \neg_1 B$,
(8) $\neg_t A \wedge \neg_t B \vdash \neg_t(A \vee B)$,	(18) $\neg_t A \wedge \neg_1 A \vdash B$,
(9) $\neg_1 A \wedge \neg_1 B \vdash \neg_1(A \vee B)$,	(19) $A \wedge \neg_t A \vdash B \vee \neg_1 B$,
(10) $\neg_t A \wedge B \vdash \neg_t(A \wedge B)$,	(20) $A \wedge \neg_1 A \vdash B \vee \neg_t B$.
(R1) $A \vdash B, A \vdash C /\ A \vdash B \wedge C$	(R4) $\neg_t A \vdash \neg_1 B /\ \neg_t B \vdash \neg_1 A$
(R2) $A \vdash C, B \vdash C /\ A \vee B \vdash C$	(R5) $\neg_1 A \vdash \neg_t B /\ \neg_1 B \vdash \neg_t A$
(R3) $A \vdash B, B \vdash C /\ A \vdash C$	

(и $\neg_1\neg_t$), а также закон тождества:

(De1) $\neg_t\neg_1(A \wedge B) \dashv\vdash \neg_t\neg_1 A \vee \neg_t\neg_1 B$,

(De2) $\neg_t\neg_1(A \vee B) \dashv\vdash \neg_t\neg_1 A \wedge \neg_t\neg_1 B$,

(T) $A \vdash A$.

Закон тождества следует, например, из схемы аксиом (6) по правилу (R3). Аналоги законов Де Моргана доказываются аналогично тому, как это делается в стандартной аксиоматизации системы **FDE** с правилом контрапозиции, ввиду леммы 12 (2) и выводимого правила (R6) (см. лемму 13).

Лемма 12. *Следующие утверждения являются доказуемыми в системе* $\mathbf{FDE}_{oe}$*:*

(1) $\neg_1\neg_t A \dashv\vdash \neg_t\neg_1 A$,

(2) $A \dashv\vdash \neg_t\neg_1\neg_t\neg_1 A$,

(3) $B \vdash \neg_t A \vee \neg_1 A$,

Доказательство. Приведем доказательства для перечисленных в утверждении леммы пар.

(1) 1. $\neg_1\neg_1 A \vdash A$ Схема акс. (6)

2. $A \vdash \neg_t\neg_t A$ Схема акс. (7)

3. $\neg_1\neg_1 A \vdash \neg_t\neg_t A$ 1, 2 (R3)

4. $\neg_1\neg_t A \vdash \neg_t\neg_1 A$ 3 (R5)

(2) 1. $\neg_t\neg_1 A \vdash \neg_t\neg_1 A$ (T)

2. $\neg_1\neg_1\neg_t\neg_1 A \vdash \neg_t\neg_1 A$ 1, Схема акс. (6), (R3)

3. $\neg_1\neg_1 A \vdash \neg_t\neg_1\neg_t\neg_1 A$ 2, (R5)

4. $A \vdash \neg_t\neg_1\neg_t\neg_1 A$ 3, Схема акс. (6), (R3)

(3) 1. $\neg_t A \wedge \neg_1 A \vdash \neg_t\neg_1 B$ Схема акс. (18)

2. $\neg_t\neg_1\neg_t\neg_1 B \vdash \neg_t\neg_1(\neg_t A \wedge \neg_1 A)$ 1, (R6)

3. $B \vdash \neg_t\neg_1\neg_t\neg_1 B$ лемма 12 (2)

4. $B \vdash \neg_t\neg_1(\neg_t A \wedge \neg_1 A)$ 2, 3, (R3)

5. $\neg_t\neg_1(\neg_t A \wedge \neg_1 A) \vdash \neg_t\neg_1\neg_t A \vee \neg_t\neg_1\neg_1 A$ 4, (De1)

6. $\neg_t A \vdash \neg_1\neg_1\neg_t A$ (T), Схема акс. (6), (R3)

7. $\neg_t\neg_1\neg_t A \vdash \neg_1 A$ 6, (R4)

8. $\neg_1\neg_t\neg_1 A \vdash \neg_t A$ аналогично

9. $\neg_t\neg_1\neg_1 A \vdash \neg_t A$ 8, лемма 12 (1)

10. $\neg_t\neg_1(\neg_t A \wedge \neg_1 A) \vdash \neg_t A \vee \neg_1 A$ 5, 7, 9, (R2), (R3), Схемы акс. (3), (4)

11. $B \vdash \neg_t A \vee \neg_1 A$ 4, 10, (R3)

$\square$

Лемма 13. *Правило вывода* (R6) $A \vdash B \vdash \neg_t\neg_1 B \vdash \neg_t\neg_1 A$ *является выводимым в системе бинарного следования* $\mathbf{FDE}_{oe}$*:*

1. $A \vdash B$ доп.
2. $\neg_t\neg_t A \vdash \neg_1\neg_1 B$
3. $\neg_t\neg_1 B \vdash \neg_1\neg_t A$
4. $\neg_t\neg_1 B \vdash \neg_t\neg_1 A$

Заметим, что правила (R4) и (R5) являются, по-видимому, более сильными, чем правило (R6).

Непротиворечивость системы $\mathbf{FDE}_{oe}$

Для доказательства непротиворечивости системы бинарного следования $\mathbf{FDE}_{oe}$ требуется проверить, что для всякого утверждения $A \vdash B$ из множества аксиом системы верно, что $A \vDash_{oe} B$ и что для всякого правила вывода системы вида $A \vdash B/C \vdash D$ $(A \vdash B, A_1 \vdash B_1/C \vdash B)$ верно, что $A \vDash_{oe} B \Longrightarrow C \vDash_{oe} D$ $(A \vDash_{oe} B, A_1 \vDash_{oe} B_1 \Longrightarrow C \vDash_{oe} B)$. Далее индукцией по длине доказательства пары формул (A, B) стандартным образом обосновывается утверждение $A \vdash_{\mathbf{FDE}_{oe}} B \Longrightarrow A \vDash_{oe} B$

Лемма 14. *Для всякой аксиомы $A \vdash B$ системы $\mathbf{FDE}_{oe}$ верно, что $A \vDash_{oe} B$. Для всякого правила вывода $A \vdash B/C \vdash D$ $(A \vdash B, A_1 \vdash B_1/C \vdash B)$ системы $\mathbf{FDE}_{oe}$ верно, что $A \vDash_{oe} B \Longrightarrow C \vDash_{oe} D$ $(A \vDash_{oe} B, A_1 \vDash_{oe} B_1 \Longrightarrow C \vDash_{oe} B)$.*

Доказательство. 1. Проверим утверждение леммы для некоторых схем аксиом.

Схема аксиом (18). Пусть $t \in v(\neg_t A \wedge \neg_1 A)$ для произвольно взятой оценки v. По лемме 6, $t \in v(\neg_t A)$ и $t \in v(\neg_1 A)$, то есть $t \notin v(A)$ и $1 \notin v(A)$. Это означает, что $v(\neg_t A \wedge \neg_1 A)$ равно наименьшему элементу решетки при любом приписывании v, а значит $v(\neg_t A \wedge \neg_1 A) \leqslant v(B)$ выполняется для любой формулы B и любого приписывания v. То же самое при $1 \in v(\neg_t A \wedge \neg_1 A)$. тогда, согласно лемме 7, верно, что $\neg_t A \wedge \neg_1 A \vDash_{oe} B$, что и требовалось.

Схема аксиом (10). Допустим, что $t \in v(\neg_t A \wedge B)$ для какой-то оценки v. Согласно лемме 6, $t \in v(\neg_t A)$ и $t \in v(B)$. Из первого конъюнкта по той же лемме $f \in v(A)$, а значит и $f \in v(A \wedge B)$. Еще раз применяя лемму 6, получаем $t \in v(\neg_t(A \wedge B))$.

Далее предположим, что $1 \in v(\neg_t A \wedge B)$. Вновь используя лемму 6 для дальнейших семантических рассуждений, выводим $1 \in v(\neg_t A)$ и $1 \in v(B)$. Тогда $1 \in v(A)$, то есть $1 \in v(A \wedge B)$, откуда $1 \in v(\neg_t(A \wedge B))$.

Принимая во внимание $t \in v(\neg_t(A \wedge B))$, $1 \in v(\neg_t(A \wedge B))$ и лемму 7, приходим к заключению, что $\neg_t A \wedge B \vDash_{oe} \neg_t(A \wedge B)$.

2. Проверим одно из правил вывода, например (R4). Пусть $\neg_t A \vDash \neg_1 B$, но $\neg_t B \nvDash \neg_1 A$. Последнее утверждение означает, что нарушено одно из условий наличия отношения логического следования.

Допустим, что $t \in v(\neg_t B)$, но $t \notin v(\neg_1 A)$. Тогда по лемме 6, $f \in v(B)$, откуда $f \in v(\neg_1 B)$, $t \notin v(A)$, то есть $t \notin v(\neg_t \neg_t A)$. Последнее означает, что $f \notin v(\neg_t A)$, то есть $\neg_t A \nvDash \neg_1 B$, что противоречит допущению.

Далее предположим, что $f \in v(\neg_1 A)$, но $f \notin v(\neg_t B)$. Во-первых, заметим, что по лемме 6, $f \in v(\neg_1 A)$ влечет $f \in v(A)$, поэтому $t \in v(\neg_t A)$. Во-вторых, из $f \notin v(\neg_t B)$

следует, что $t \notin v(\neg_t \neg_t B)$, $t \notin v(B)$, то есть $t \notin v(\neg_1 B)$, что вновь противоречит допущению. $\square$

Индукцией по длине доказательства произвольной доказуемой в $\mathbf{FDE}_{oe}$ пары (A, B) получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для всяких формул A и B языка $\mathscr{L}^{oe}$ верно утверждение*

$$A \vdash_{\mathbf{FDE}_{oe}} B \Longrightarrow A \vDash_{oe} B.$$

Полнота системы $\mathbf{FDE}_{oe}$

Приступим к доказательству полноты системы бинарного вывода $\mathbf{FDE}_{oe}$. Для начала сделаем ряд замечаний, касающихся используемых для определения канонической оценки теорий. Задать подходящий для определения канонической оценки переменных и формул объект – одна из наиболее трудных задач, которую приходится решать при разработке доказательств полноты формализаций **FDE**-подобных систем.

Для самой системы **FDE** от теории требовались лишь следующие свойства: замкнутость по отношению $\vdash$ и относительно конъюнкции любых двух формул, содержащихся в теории, а также простота.

В статье [94] для доказательства полноты системы $\mathbf{FDE}_{scl}$ использовались теории с таким набором свойств:

- $\neg_t$-нормальность, состоящая в том, что из двух формул вида A и $\neg_t A$ одна и только одна принадлежит теории. Аналогично определяется $\neg_1$-нормальность.

- $\neg_t$-замкнутость, означающая, что наряду с любой формулой A теория содержит также и формулу $\neg_t A$. Сходным образом определяется и $\neg_1$-замкнутость.

Фактически эти свойства означают, что любая теория должна быть замкнута по одному и только одному из отрицания и из двух формул вида $\neg_t A$ и $\neg_1 A$ содержать одну и только одну формулу. Если теория не является тривиальной, то есть не совпадает с множеством всех формул, то ее непротиворечивость относительно любой пары $\neg_t A$ и $\neg_1 A$ обеспечивает наличие схемы (18) (иначе теория вырождается). Полнота относительно той же пары обеспечивается тем, что доказуема[9] $B \vdash \neg_t A \vee \neg_1 A$ и про-

[9]Попутно заметим, что в статье [94] нет указаний на то, как получить доказательство для пары формул такого вида. В нашем доказательстве используются отсутствующие в системе из [94] правила вывода.

стотой теорий: если формула вида $A \vee B$ принадлежит теории, то ей принадлежит и один из дизъюнктов. Для обеспечения замкнутости относительно одного из полуотрицаний дедуктивных средств не хватает. Можно попробовать насыщать множество, которое расширяется до теории, фиксированным отрицанием каждой добавляемой в нее формулы (как и делается в [94]). Однако затем встает проблема обоснования замкнутости полученной конструкции относительно $\vdash$.

В предлагаемом подходе к теориям не предъявляется требование их $\neg_t$- или $\neg_1$-замкнутости. Однако, оценка происходит в паре теорий. Аналогичный подход реализован в статье [84].

Далее определим каноническую оценку v^c, определенную на множестве `Var`, релятивизированную относительно упорядоченной пары теорий $(\mathcal{T}_t, \mathcal{T}_1)$.

Определение 33. Пусть $(\mathcal{T}_t, \mathcal{T}_1)$ есть пара теорий. Канонической оценкой называется отображение $\mathtt{Var} \longrightarrow 4^{oe}$ такое, что для всякого $p \in \mathtt{Var}$:

(1) $t \in v^c(p) \iff p \in \mathcal{T}_t$,

(2) $1 \in v^c(p) \iff p \in \mathcal{T}_1$,

(3) $f \in v^c(p) \iff \neg_t p \in \mathcal{T}_t$,

(4) $0 \in v^c(p) \iff \neg_1 p \in \mathcal{T}_1$.

$\lhd$

Лемма 15 (О канонической оценке). *Для всякой формулы $A \in \mathtt{For}_{oe}$ и всякой канонической оценки v^c верно, что*

(1) $t \in v^c(A) \iff A \in \mathcal{T}_t$,

(2) $1 \in v^c(A) \iff A \in \mathcal{T}_1$,

(3) $f \in v^c(A) \iff \neg_t A \in \mathcal{T}_t$,

(4) $0 \in v^c(A) \iff \neg_1 A \in \mathcal{T}_1$.

Доказательство. Проводится индукцией по построению формулы.

Для случая, когда A есть пропозициональная переменная, утверждение леммы следует из определения 33. Далее рассмотрим случаи для пропозициональных связок.

Случай $A = \neg_t B$.

(1) $t \in v^c(\neg_t B) \overset{\text{лем.6}}{\iff} f \in v^c(B) \overset{\text{ид}}{\iff} \neg_t B \in \mathcal{T}_t$

Заметим, что для формулы B, являющейся подформулой формулы $\neg_t B$ действует индукционное допущение, то есть утверждение леммы справедливо. В частности, справедлива и следующая его часть: $f \in \upsilon^c(B) \iff \neg_t B \in \mathcal{T}_t$. Этим обосновывается крайняя правая эквиваленция.

(2) $1 \in \upsilon^c(\neg_t B) \overset{\text{лем.6}}{\iff} 1 \in \upsilon^c(B) \overset{\text{лем.6}}{\iff} 0 \notin \upsilon^c(B) \overset{\text{ид}}{\iff} \neg_1 B \notin \mathcal{T}_1 \overset{\text{св-ва.теор.}}{\iff} \neg_t B \in \mathcal{T}_1$

Крайняя правая эквиваленция обоснована свойствами теории, а именно, простотой теории и утверждениями $\neg_t A \in \mathcal{T}_1 \dot\vee \neg_1 A \in \mathcal{T}_1$ и $\dot\neg(\neg_t A \in \mathcal{T}_1 \ \& \ \neg_1 A \in \mathcal{T}_1)$ для любой формулы $A \in \mathtt{For}_{oe}$.

(3) $f \in \upsilon^c(\neg_t B) \overset{\text{лем.6}}{\iff} t \in \upsilon^c(B) \overset{\text{ид}}{\iff} B \in \mathcal{T}_t \overset{(7)}{\iff} \neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_t$

(4) $0 \in \upsilon^c(\neg_t B) \overset{\text{лем.6}}{\iff} 0 \in \upsilon^c(B) \overset{\text{лем.6}}{\iff} 1 \notin \upsilon^c(B) \overset{\text{ид}}{\iff} B \notin \mathcal{T}_1 \overset{(7)}{\iff} \neg_t\neg_t B \notin \mathcal{T}_1 \overset{\text{св-ва.теор.}}{\iff} \neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$

Крайняя правая эквиваленция обоснована свойствами теории, а именно, простотой теории и утверждениями $\neg_t A \in \mathcal{T}_1 \dot\vee \neg_1 A \in \mathcal{T}_1$ и $\dot\neg(\neg_t A \in \mathcal{T}_1 \ \& \ \neg_1 A \in \mathcal{T}_1)$ для любой формулы $A \in \mathtt{For}_{oe}$.

Случай $A = \neg_1 B$.

Доказательство аналогично изложенному для предыдущего случая.

Случай $A = B \wedge C$.

(1) $t \in \upsilon^c(B \wedge C) \overset{\text{лем.6}}{\iff} t \in \upsilon^c(B) \ \& \ t \in \upsilon^c(C) \overset{\text{ид}}{\iff} B \in \mathcal{T}_t \ \& \ C \in \mathcal{T}_t \overset{(1),(2);\wedge\text{-замкн.}}{\iff} B \wedge C \in \mathcal{T}_t$

(2) $1 \in \upsilon^c(B \wedge C) \overset{\text{лем.6}}{\iff} 1 \in \upsilon^c(B) \ \& \ 1 \in \upsilon^c(C) \overset{\text{ид}}{\iff} B \in \mathcal{T}_1 \ \& \ C \in \mathcal{T}_1 \overset{(1),(2);\wedge\text{-замкн.}}{\iff} B \wedge C \in \mathcal{T}_1$

(3) $f \in \upsilon^c(B \wedge C) \overset{\text{лем.6}}{\iff} f \in \upsilon^c(B) \dot\vee f \in \upsilon^c(C) \overset{\text{ид}}{\iff} \neg_t B \in \mathcal{T}_t \dot\vee \neg_t C \in \mathcal{T}_t$. Далее предположим, что $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$. Ясно, что данного утверждения недостаточно, чтобы получить требуемое $\neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$. Поэтому нужно рассмотреть случаи расположения формулы C относительно теории $\mathcal{T}_t$. Сначала предположим, что $C \in \mathcal{T}_t$. Тогда, по замкнутости теории относительно $\wedge$, $\neg_t B \wedge C \in \mathcal{T}_t$. Используя схему (10), получаем $\neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$. Теперь предположим, что $C \notin \mathcal{T}_t$. Это означает, по индукционному допущению, что $t \notin \upsilon^c(C)$, то есть $f \in \upsilon^c(C)$ по лемме 6. Вновь используя индукционное допущение, получаем $\neg_t C \in \mathcal{T}_t$. Замкнутость $\mathcal{T}_t$ относительно $\wedge$ влечет $\neg_t B \wedge \neg_t C \in \mathcal{T}_t$. Тогда, используя (12), получаем, что

$\neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$. При допущении $\neg_t C \in \mathcal{T}_t$ рассуждения аналогичны. Таким образом, было показано, что $\neg_t B \in \mathcal{T}_t \dot{\vee} \neg_t C \in \mathcal{T}_t \Longrightarrow \neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$. Обращение этой импликации следует из определения простой теории и (14).

(4) $0 \in \upsilon^c(B \wedge C)$. В данном случае рассуждения аналогичны приведенным для предыдущего случая. Необходимые для использования схемы аксиом – (11) и (15).

Случай $A = B \vee C$.

(1) $t \in \upsilon^c(B \vee C) \overset{\text{лем.6}}{\Longleftrightarrow} t \in \upsilon^c(B) \dot{\vee} t \in \upsilon^c(C) \overset{\text{ид}}{\Longleftrightarrow} B \in \mathcal{T}_t \dot{\vee} C \in \mathcal{T}_t \overset{(3),(4);\text{пр.}}{\Longleftrightarrow} B \vee C \in \mathcal{T}_t$

(2) $1 \in \upsilon^c(B \vee C)$ аналогично

(3) $f \in \upsilon^c(B \vee C) \overset{\text{лем.6}}{\Longleftrightarrow} f \in \upsilon^c(B)\ \&\ f \in \upsilon^c(C) \overset{\text{ид}}{\Longleftrightarrow} \neg_t B \in \mathcal{T}_t\ \&\ \neg_t C \in \mathcal{T}_t \overset{(1),(2);\text{пр.}}{\Longleftrightarrow}$ $\neg_t B \wedge \neg_t C \in \mathcal{T}_t \overset{(8)}{\Longrightarrow} \neg_t(B \vee C) \in \mathcal{T}_t$

Для того, чтобы обосновать обращение последнего импликативного утверждения, предположим, что $\neg_t(B \vee C) \in \mathcal{T}_t$. Используя (16), получаем $\neg_t B \vee \neg_t C \in \mathcal{T}_t$, что по определению простой теории влечет $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ или $\neg_t C \in \mathcal{T}_t$. Будем рассуждать по случаям. Допустим, что $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$. Рассмотрим возможные расположения формулы C относительно теории $\mathcal{T}_t$. Пусть для начала $C \in \mathcal{T}_t$. Тогда $B \vee C \in \mathcal{T}_t$, согласно схеме аксиом (4). Принимая во внимание допущение $\neg_t(B \vee C) \in \mathcal{T}_t$ и схему (19), заключаем, что $B \vee \neg_1 B \in \mathcal{T}_t$. Заметим, что $B \notin \mathcal{T}_t$. Действительно, $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ по индукционному допущению влечет $f \in \upsilon^c(B)$, то есть $t \notin \upsilon^c(B)$ по лемме 6. Вновь используя индукционное допущение, получаем $B \notin \mathcal{T}_t$. Далее, $B \vee \neg_1 B \in \mathcal{T}_t$ влечет $B \in \mathcal{T}_t \dot{\vee} \neg_1 B \in \mathcal{T}_t$ (в силу простоты теории), то есть $\neg_1 B \in \mathcal{T}_t$. Последнее невозможно. Пусть, с другой стороны, $C \notin \mathcal{T}_t$. Тогда по индукционному допущению $t \notin \upsilon^c(C)$, то есть $f \in \upsilon^c(C)$. Вновь применяя индукционное допущение получаем $\neg_t C \in \mathcal{T}_t$, что вместе с $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ дает $\neg_t B \wedge \neg_t C \in \mathcal{T}_t$ по замкнутости теории относительно $\wedge$.

Аналогичные рассуждения приводятся для случая $\neg_t C \in \mathcal{T}_t$.

(4) $0 \in \upsilon^c(B \vee C)$. Доказывается аналогично только что рассмотренному случаю, с использованием схем аксиом (4) и (20).

□

Теперь имеется все необходимое для того, чтобы сформулировать и доказать теорему о полноте системы бинарного следования $\mathbf{FDE}_{oe}$.

Теорема 2. *Для всяких формул A и B языка $\mathscr{L}^{oe}$ верно утверждение*

$$A \models_{oe} B \Longrightarrow A \vdash_{\mathbf{FDE}_{oe}} B.$$

Доказательство. Допустим, что $A \nvdash_{\mathbf{FDE}_{oe}} B$. Тогда существует пара $(\mathscr{T}_t, \mathscr{T}_1)$ такая, что A содержится в одной из теорий, например $A \in \mathscr{T}_t$, но $B \notin \mathscr{T}_t$. По лемме 15, $t \in v^c(A)$, но при этом $t \notin v^c(B)$. Тогда $A \nvDash_{oe} B$. По контрапозиции получаем утверждение теоремы. □

§4. Система $\mathbf{FDE}^u_{oe}$

Системы обобщенных истинностных значения изначально были задуманы как семантический инструментарий для оценки высказываний о ситуациях или положениях вещей, допускающих наличие противоречивой или неполной информации. Очевидный недостаток совокупности значений, образующих решетку $\mathbf{4}^{oe}$ состоит в наличии «парадоксальных» утверждений, являющихся законами системы $\mathbf{FDE}_{oe}$, репрезентируемых схемами $\neg_t A \wedge \neg_1 A \vdash B$ и $B \vdash \neg_t A \vee \neg_1 A$.

Наиболее естественный путь преодоления этого недостатка состоит в использовании «промежуточного» истинностного значения типа «неопределено» наподобие того, как это делается в трехзначных логиках. Однако в случае двухкомпонентных истинностных значений неопределенность может располагаться как на месте одной из компонент пары, так и на месте обеих компонент. Обозначим соответствующие типы неопределенности как u_t и u_1. Индексы t и 1 понятным образом указывают на тип неопределенности – онтологической или эпистемической. Таким образом, вместо прежних двухкомпонентных базисов $\{f, t\}$ и $\{0, 1\}$ вводятся новые базисы $\{f, u_t, t\}$ и $\{0, u_1, 1\}$. Отношения порядка $\leqslant_t$ и $\leqslant_1$ в этих новых базисах отвечает неравенствам $f \leqslant_t u_t \leqslant_t t$ и $0 \leqslant_1 u_1 \leqslant_1 1$.

Применяя к базисным множествам операцию декартова произведения, получим новое множество $\mathbf{9}^u$ из девяти истинностных значений, на котором задается отношение порядка так же, как в определении 28, используя порядки $\leqslant_t$ и $\leqslant_1$ в новых базисах.

Определение 34. Для всяких $\langle s, u\rangle$ и $\langle v, w\rangle$ из множества $\mathbf{9}^u$

$$\langle s, u\rangle \leqslant \langle v, w\rangle \iff s \leqslant_t v \ \& \ u \leqslant_1 w.$$

Таблица 2

a	$-_t a$	a	$-_1 a$
t	f	1	0
u_t	u_t	u_1	u_1
f	t	0	1

◁

Структура системы полученных обобщенных истинностных значений представлена на диаграмме ниже, изображающей решетку $\mathscr{L}\mathbf{9}^u = \langle \mathbf{9}^u, \leqslant \rangle$.

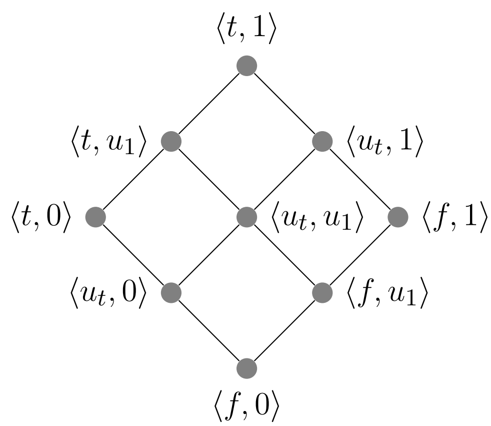

Рисунок 7

Унарные операции $-_t$ и $-_1$ переопределяются в новых базисах посредством таблицы 2. Бинарные операции задаются стандартным образом. Например, $\cap_t$ возвращает наименьший, а $\cup_t$ наибольший из пары элементов, взятых их множества $\{f, u_t, t\}$. Аналогично для $\cap_1$ и $\cup_t$.

Разумеется, нужно заново определить унарные и бинарные операции на множестве $\mathbf{9}^u$. Определения унарных операций $\sim_t$ и $\sim_1$ даны в таблице 3. Бинарные связки задаются следующим определением.

Определение 35. Для всяких $\langle s, u \rangle$ и $\langle v, w \rangle$ из множества $\mathbf{9}^u$:

$$\langle s, u \rangle \cap \langle v, w \rangle = \langle s \cap_t v, u \cap_1 w \rangle,$$
$$\langle s, u \rangle \cup \langle v, w \rangle = \langle s \cup_t v, u \cup_1 w \rangle.$$

Таблица 3. Определения операций $\sim_t$ and $\sim_1$ в решетке $\mathscr{L}\mathbf{9}^u$.

a	$\sim_t a$	$\sim_1 a$	a	$\sim_t a$	$\sim_1 a$
$\langle t, 1\rangle$	$\langle f, 1\rangle$	$\langle t, 0\rangle$	$\langle t, u_1\rangle$	$\langle f, u_1\rangle$	$\langle t, u_1\rangle$
$\langle t, 0\rangle$	$\langle f, 0\rangle$	$\langle t, 1\rangle$	$\langle u_t, 1\rangle$	$\langle u_t, 1\rangle$	$\langle u_t, 0\rangle$
$\langle u_t, u_1\rangle$	$\langle u_t, u_1\rangle$	$\langle u_t, u_1\rangle$	$\langle u_t, 0\rangle$	$\langle u_t, 0\rangle$	$\langle u_t, 1\rangle$
$\langle f, 1\rangle$	$\langle t, 1\rangle$	$\langle f, 0\rangle$	$\langle f, u_1\rangle$	$\langle t, u_1\rangle$	$\langle f, u_1\rangle$
$\langle f, 0\rangle$	$\langle t, 0\rangle$	$\langle f, 1\rangle$			

$\lhd$

Приступим к описанию логики решетки $\mathscr{L}\mathbf{9}^u$, которую обозначим как $\mathbf{FDE}^u_{oe}$. Алфавит языка содержит счетное множество пропозициональных переменных $\mathtt{Var} = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$, пропозициональные связки $\neg_t$, $\neg_1$, $\wedge$ и $\vee$, а также технические символы (и). Определение формулы стандартное. Множество формул как и прежде обозначим как $\mathtt{For}_{oe}$. Язык, таким образом, не отличается от языка $\mathscr{L}^{oe}$. Для определенности обозначим в данном случае язык символом $\mathscr{L}^u$.

Оценка переменных данного языка есть отображение $v : \mathtt{Var} \longrightarrow \mathbf{9}^u$. Расширение оценки задается в точности таким же образом, как это делается в определении 29. Расширенную оценку будем обозначать тем же символом v, что и оценку переменных.

Как и в случае решетки обобщенных истинностных значений $\mathbf{4}^{oe}$, имеется достаточно широкий спектр возможностей для определения отношения логического следования. В контексте данного исследования будет рассмотрен наиболее фундаментальный вариант отношения следования (обозначим как $\models^u_{oe}$), определяемого через решеточный порядок.

Определение 36. Пусть $A, B \in \mathtt{For}_{oe}$. Тогда определим

$$A \models^u_{oe} B \iff v(A) \leqslant v(B) \text{ для всякой функции оценки } v\colon \mathtt{For}_{oe} \longrightarrow \mathbf{9}^u.$$

$\lhd$

Следующая лемма является расширением леммы 6 и фиксирует ряд существенных семантических свойств расширенной оценки формул языка $\mathscr{L}^u$, связанных с ситуациями, когда компонентой истинностного является неопределенность того или иного типа. Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой в соответствии с определением расширенной оценки.

Лемма 16. *Для всяких* $A, B \in \mathtt{For}_{oe}$ *и всякой оценки* $v\colon \mathtt{For}_{oe} \longrightarrow \mathbf{9}^u$ *выполнены все утверждения леммы 6, кроме содержащихся в пунктах* (1) *и* (2)*, в дополнение к следующим утверждениям:*

(1) $t \in v(A) \iff f \notin v(A)\ \&\ u_t \notin v(A)$,

(2) $1 \in v(A) \iff 0 \notin v(A)\ \&\ u_1 \notin v(A)$,

(3) $f \in v(A) \iff t \notin v(A)\ \&\ u_t \notin v(A)$,

(4) $0 \in v(A) \iff 1 \notin v(A)\ \&\ u_1 \notin v(A)$,

(5) $u_t \in v(A) \iff u_t \in v(\neg_t A) \iff u_t \in v(\neg_1 A) \iff t \notin v(A)\ \&\ f \notin v(A)$,

(6) $u_1 \in v(A) \iff u_1 \in v(\neg_t A) \iff u_1 \in v(\neg_1 A) \iff 1 \notin v(A)\ \&\ 0 \notin v(A)$,

(7) $u_t \in v(A \wedge B) \iff (u_t \in v(A)\ \&\ t \in v(B)) \mathbin{\dot\vee} (u_t \in v(B)\ \&\ t \in v(A))$
$\dot\vee\, (u_t \in v(A)\ \&\ u_t \in v(B))$,

(8) $u_1 \in v(A \wedge B) \iff (u_1 \in v(A)\ \&\ 1 \in v(B)) \mathbin{\dot\vee} (u_1 \in v(B)\ \&\ 1 \in v(A))$
$\dot\vee\, (u_1 \in v(A)\ \&\ u_1 \in v(B))$,

(9) $u_t \in v(A \vee B) \iff (u_t \in v(A)\ \&\ f \in v(B)) \mathbin{\dot\vee} (u_t \in v(B)\ \&\ f \in v(A))$
$\dot\vee\, (u_t \in v(A)\ \&\ u_t \in v(B))$,

(10) $u_1 \in v(A \vee B) \iff (u_1 \in v(A)\ \&\ 0 \in v(B)) \mathbin{\dot\vee} (u_1 \in v(B)\ \&\ 0 \in v(A))$
$\dot\vee\, (u_1 \in v(A)\ \&\ u_1 \in v(B))$.

Заметим, что теперь семантические аналоги парадоксальных утверждений $\neg_t A \wedge \neg_1 A \vdash B$ и $B \vdash \neg_t A \vee \neg_1 A$ не являются корректными в смысле отношения $\models^u_{oe}$. Лемма 16 показывает, что онтологическая или эпистемическая неопределенность превращает истинностное значение в фиксированную точку для отрицания соответствующего типа. Поэтому, если значением формулы A является, например, $\langle u_t, u_1\rangle$, то это же значение сохраняется и для $\neg_t A \wedge \neg_1 A$, и тогда легко подобрать значение для B, опровергающее следование, определяемое через решеточный порядок. Аналогично и для $\neg_t A \vee \neg_1 A$.

Аксиоматизация системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$

Сказанное в конце предыдущего раздела означает, что, в отличие от системы $\mathbf{FDE}_{oe}$, парадоксальные утверждения $\neg_t A \wedge \neg_1 A \vdash B$ и $B \vdash \neg_t B \vee \neg_1 B$ теперь не могут выступать в качестве дедуктивных постулатов аксиоматической системы для

Таблица 4. Дедуктивные постулаты системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$.

(1) $A \wedge B \vdash A$,	(12) $\neg_t A \wedge \neg_t B \vdash \neg_t(A \wedge B)$,
(2) $A \wedge B \vdash B$,	(13) $\neg_1 A \wedge \neg_1 B \vdash \neg_1(A \wedge B)$,
(3) $A \vdash A \vee B$,	(14) $\neg_t(A \wedge B) \vdash \neg_t A \vee \neg_t B$,
(4) $B \vdash A \vee B$,	(15) $\neg_1(A \wedge B) \vdash \neg_1 A \vee \neg_1 B$,
(5) $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$,	(16) $\neg_t(A \vee B) \vdash \neg_t A \vee \neg_t B$,
(6) $\neg_1\neg_1 A \dashv\vdash A$,	(17) $\neg_1(A \vee B) \vdash \neg_1 A \vee \neg_1 B$,
(7) $A \dashv\vdash \neg_t\neg_t A$,	(18) $(\neg_t(A \vee B) \wedge \neg_t(A \wedge B)) \vdash \neg_t B$
(8) $\neg_t A \wedge \neg_t B \vdash \neg_t(A \vee B)$,	(19) $(\neg_1(A \vee B) \wedge \neg_1(A \wedge B)) \vdash \neg_1 B$
(9) $\neg_1 A \wedge \neg_1 B \vdash \neg_1(A \vee B)$,	(20) $A \vdash \neg_t A \vee \neg_1 A$,
(10) $\neg_t A \wedge B \vdash \neg_t(A \wedge B)$,	(21) $\neg_t A \wedge \neg_1 A \vdash A$,
(11) $\neg_1 A \wedge B \vdash \neg_1(A \wedge B)$,	(22) $\neg_t A \wedge \neg_1 B \vdash A \vee B$,
(R1) $A \vdash B, A \vdash C /\ A \vdash B \wedge C$	(R4) $\neg_t A \vdash \neg_1 B /\ \neg_t B \vdash \neg_1 A$
(R2) $A \vdash C, B \vdash C /\ A \vee B \vdash C$	(R5) $\neg_1 A \vdash \neg_t B /\ \neg_1 B \vdash \neg_t A$
(R3) $A \vdash B, B \vdash C /\ A \vdash C$	

$\mathbf{FDE}^u_{oe}$. Это, в свою очередь, приведет к отсутствию у *теорий*, используемых в доказательстве полноты системы, ряда полезных свойств. Тем не менее, в сильно ослабленном виде аналоги парадоксальных могут быть использованы в качестве схем аксиом $\neg_t A \wedge \neg_1 A \vdash A$ и $A \vdash \neg_t A \vee \neg_1 A$. Для удобства чтения, приведем в таблице 4 полный список дедуктивных постулатов системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$, содержащий также и большинство постулатов системы $\mathbf{FDE}_{oe}$.

Непротиворечивость аксиоматизации системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$

Для доказательства непротиворечивости предложенной аксиоматизации нужно, как обычно, убедиться, что для всякого утверждения вида $A \vdash B$ из множества аксиом системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$ верно, что $A \vDash^u_{oe} B$ и что для всякого правила вывода системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$ вида $A \vdash B/C \vdash D$ $(A \vdash B, A_1 \vdash B_1/C \vdash B)$ верно, что $A \vDash^u_{oe} B \Longrightarrow C \vDash^u_{oe} D$ $(A \vDash^u_{oe} B, A_1 \vDash^u_{oe} B_1 \Longrightarrow C \vDash^u_{oe} B)$. Далее индукцией по длине доказательства пары формул (A, B) стандартным образом обосновывается утверждение $A \vdash_u B \Longrightarrow A \vDash^u_{oe} B$.

Предварительно полезно будет переформулировать отношение следования через принадлежности истинностным значениям их компонент. Доказательство следующей леммы осуществляется рутинной проверкой.

Лемма 17. *Для всяких формул $A, B \in \mathscr{L}^{oe}$ и для всякой оценки $v\colon \texttt{For}_{oe} \longrightarrow \mathbf{9}^u$ отношение $A \vDash^u_{oe} B$ имеет место если и только если истинны следующие утверждения:*

(1) $t \in v(A) \implies t \in v(B)$,

(2) $1 \in v(A) \implies 1 \in v(B)$,

(3) $u_t \in v(A) \implies f \notin v(B)$,

(4) $u_1 \in v(A) \implies 0 \notin v(B)$.

Лемма 18. *Для всякой аксиомы вида $A \vdash B$ системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$ верно, что $A \vDash^u_{oe} B$. Для всякого правила вывода $A \vdash B / C \vdash D$ ($A \vdash B, A_1 \vdash B_1 / C \vdash B$) системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$ верно, что $A \vDash^u_{oe} B \Longrightarrow C \vDash^u_{oe} D$ ($A \vDash^u_{oe} B, A_1 \vDash^u_{oe} B_1 \Longrightarrow C \vDash^u_{oe} B$).*

Доказательство. Проверка истинности утверждения леммы представляет собой рутинную семантическую процедуру. Выпишем доказательства для некоторых случаев, пользуясь леммами 16 и 17.

Схема аксиом (18)

(1) $t \in v(\neg_t(A \vee B))\ \&\ t \in v(\neg_t(A \wedge B)) \implies f \in v(A \vee B) \implies f \in v(B) \implies t \in v(\neg_t B)$;

(2) $1 \in v(\neg_t(A \vee B))\ \&\ 1 \in v(\neg_t(A \wedge B)) \implies 1 \in v(\neg_t(A \wedge B)) \implies 1 \in v(A \wedge B) \implies 1 \in v(B) \implies 1 \in v(\neg_t B)$;

(3) $u_t \in v(\neg_t(A \vee B) \wedge \neg_t(A \wedge B)) \implies$ (i) $u_t \in v(A \vee B)\ \&\ u_t \in v(A \wedge B)\ \dot\vee$ (ii) $u_t \in v(A \vee B)\ \&\ f \in v(A \wedge B)\ \dot\vee$ (iii) $f \in v(A \vee B)\ \&\ u_t \in v(A \wedge B)$;

 (i) $u_t \in v(A \vee B) \implies t \notin v(B) \implies f \notin v(\neg_t B)$;

 (ii) то же, что в подслучае (i);

 (iii) $f \in v(A \vee B) \implies f \in v(B) \implies t \in v(\neg_t B) \overset{\text{лем. 6 (6)}}{\implies} f \notin v(\neg_t B)$;

(4) $u_1 \in v(\neg_t(A \vee B) \wedge \neg_t(A \wedge B)) \overset{\text{лем. 16 (8) (6)}}{\implies}$ (i) $u_1 \in v(A \vee B)\ \&\ u_1 \in v(A \wedge B)\ \dot\vee$ (ii) $u_1 \in v(A \vee B)\ \&\ 1 \in v(\neg_t(A \wedge B))\ \dot\vee$ (iii) $1 \in v(\neg_t(A \vee B))\ \&\ u_1 \in v(A \wedge B)$;

 (i) $u_1 \in v(A \wedge B) \implies 0 \notin v(B) \implies 0 \notin v(\neg_t B)$;

(ii) $1 \in v(\neg_t(A \wedge B)) \overset{\text{лем. 6 (11)}}{\Longrightarrow} 1 \in v(A \wedge B) \overset{\text{лем. 16 (2)}}{\Longrightarrow} 0 \notin v(B) \overset{\text{лем. 6 (12)}}{\Longrightarrow} 0 \notin v(\neg_t B)$

(iii) то же, что в подслучае (i);

Схема аксиом (20)

(1) $t \in v(A) \overset{\text{лем. 6 (3)}}{\Longrightarrow} t \in v(\neg_1 A) \overset{\text{лем. 6 (10)}}{\Longrightarrow} t \in v(\neg_t A \vee \neg_1 A)$,

(2) $1 \in v(A) \overset{\text{лем. 6 (11)}}{\Longrightarrow} 1 \in v(\neg_t A) \overset{\text{лем. 6 (18)}}{\Longrightarrow} 1 \in v(\neg_t A \vee \neg_1 A)$,

(3) $u_t \in v(A) \overset{\text{лем. 16 (5)}}{\Longrightarrow} u_t \in v(\neg_t A) \overset{\text{лем. 16 (9)}}{\Longrightarrow} u_t \in v(\neg_t A \vee \neg_1 A) \overset{\text{лем. 16 (3)}}{\Longrightarrow} f \notin v(\neg_t A \vee \neg_1 A)$,

(4) $u_1 \in v(A) \overset{\text{лем. 16 (6)}}{\Longrightarrow} u_1 \in v(\neg_t A) \overset{\text{лем. 16 (10)}}{\Longrightarrow} u_1 \in v(\neg_t A \vee \neg_1 A) \overset{\text{лем. 16 (4)}}{\Longrightarrow} 0 \notin v(\neg_t A \vee \neg_1 A)$

Схема аксиом (22)

(1) $t \in v(\neg_t A \wedge \neg_1 B) \overset{\text{лем. 6 (7)}}{\Longrightarrow} t \in v(\neg_t A)\ \&\ t \in v(\neg_1 B) \overset{\text{лем. 6 (3)}}{\Longrightarrow} t \in v(B) \overset{\text{лем. 6 (10)}}{\Longrightarrow} t \in v(A \vee B)$,

(2) $1 \in v(\neg_t A \wedge \neg_1 B) \overset{\text{лем. 6 (15)}}{\Longrightarrow} t \in v(\neg_t A)\ \&\ t \in v(\neg_1 B) \overset{\text{лем. 6 (3)}}{\Longrightarrow} t \in v(B) \overset{\text{лем. 6 (10)}}{\Longrightarrow} t \in v(A \vee B)$,

(3) $u_t \in v(\neg_t A \wedge \neg_1 B) \overset{\text{лем. 16 (5)}}{\Longrightarrow} f \notin v(\neg_t A \wedge \neg_1 B) \overset{\text{лем. 6 (8)}}{\Longrightarrow} f \notin v(\neg_1 B) \overset{\text{лем. 6 (4)}}{\Longrightarrow} f \notin v(B) \overset{\text{лем. 6 (9)}}{\Longrightarrow} f \notin v(A \vee B)$,

(4) $u_1 \in v(\neg_t A \wedge \neg_1 B) \overset{\text{лем. 16 (6)}}{\Longrightarrow} 0 \notin v(\neg_t A \wedge \neg_1 B) \overset{\text{лем. 6 (16)}}{\Longrightarrow} 0 \notin v(\neg_t A) \overset{\text{лем. 6 (12)}}{\Longrightarrow} 0 \notin v(A) \overset{\text{лем. 6 (17)}}{\Longrightarrow} 0 \notin v(A \vee B)$.

$\square$

Далее индукцией по длине доказательства произвольной доказуемой в $\mathbf{FDE}^u_{oe}$ пары (A, B) получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Для всяких формул A и B языка $\mathscr{L}^{oe}$ верно следующее утверждение*

$$A \vdash_{\mathbf{FDE}^u_{oe}} B \implies A \vDash^u_{oe} B.$$

Полнота аксиоматизации системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$

Доказательство полноты системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$ начнем с того, что дадим определение канонической оценки, релятивизированной, как и в доказательстве полноты системы $\mathbf{FDE}_{oe}$, относительно пары теорий $(\mathcal{T}_t, \mathcal{T}_1)$.

Определение 37. Пусть $(\mathcal{T}_t, \mathcal{T}_1)$ есть пара теорий. Канонической оценкой называется отображение $\mathtt{Var} \longrightarrow 9^u$ такое, что для всякого $p \in \mathtt{Var}$:

(1) $t \in \upsilon^c(p) \iff p \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t p \notin \mathcal{T}_t$,

(2) $u_t \in \upsilon^c(p) \iff p \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t p \in \mathcal{T}_t$,

(3) $1 \in \upsilon^c(p) \iff p \in \mathcal{T}_1 \ \& \ \neg_1 p \notin \mathcal{T}_1$,

(4) $u_1 \in \upsilon^c(p) \iff p \in \mathcal{T}_1 \ \& \ \neg_1 p \in \mathcal{T}_1$,

(5) $f \in \upsilon^c(p) \iff p \notin \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t p \in \mathcal{T}_t$,

(6) $0 \in \upsilon^c(p) \iff p \notin \mathcal{T}_1 \ \& \ \neg_1 p \in \mathcal{T}_1$.

$\triangleleft$

Теперь докажем лемму о том, что заданная таким образом оценка переменных может быть расширена на все множество формул.

Лемма 19 (О канонической оценке)**.** *Для всякой формулы $A \in \mathtt{For}_{oe}$ и всякой канонической оценки υ^c верно, что*

(1) $t \in \upsilon^c(A) \iff A \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t A \notin \mathcal{T}_t$,

(2) $u_t \in \upsilon^c(A) \iff A \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t A \in \mathcal{T}_t$,

(3) $1 \in \upsilon^c(A) \iff A \in \mathcal{T}_1 \ \& \ \neg_1 A \notin \mathcal{T}_1$,

(4) $u_1 \in \upsilon^c(A) \iff A \in \mathcal{T}_1 \ \& \ \neg_1 A \in \mathcal{T}_1$,

(5) $f \in \upsilon^c(A) \iff A \notin \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t A \in \mathcal{T}_t$,

(6) $0 \in \upsilon^c(A) \iff A \notin \mathcal{T}_1 \ \& \ \neg_1 A \in \mathcal{T}_1$.

Доказательство. Предварительно заметим, что все семантические преобразования в данном доказательстве осуществляются на основании леммы 16, указание на которую в большинстве случаев предполагается по умолчанию, чтобы избежать большого количества однотипных ссылок.

Случай $A = \neg_t B$.

(1) $t \in \upsilon^c(\neg_t B) \overset{\text{лем. 16}}{\iff} f \in \upsilon^c(B) \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \notin \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t B \in \mathcal{T}_t \overset{\text{с.а. (7)}}{\iff} \neg_t B \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t \neg_t B \notin \mathcal{T}_t$.

(2) Исходно имеем следующие эквиваленции: $u_t \in \upsilon^c(\neg_t B) \overset{\text{лем. 16}}{\iff} u_t \in \upsilon^c(B) \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t \neg_1 B \in \mathcal{T}_t$.

Сначала покажем $\neg_t B \in \mathcal{T}_t \;\; \& \;\; \neg_t\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_t$. Утверждение $B \in \mathcal{T}_t$ влечет $\neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ (схема аксиом (7)), $\neg_t\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$ сначала дает $\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_t$, которое вместе с $\neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ и схемой (20) влечет $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$. Таким же образом сначала получаем $\neg_1\neg_1 B \in \mathcal{T}_t$, затем, вместе с $\neg_t\neg_1 B \in \mathcal{T}_t$ и схемой (20), $\neg_1 B \in \mathcal{T}_t$. Из последнего утверждения легко получается $\neg_t\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ в силу доказуемости $\neg_1 B \vdash \neg_t\neg_1\neg_t B$: сначала возьмем $\neg_t B \vdash \neg_t B$, получим $\neg_1\neg_1\neg_t B \vdash \neg_t B$ и применим правило (R5).

Обратно пусть $\neg_t B \in \mathcal{T}_t \;\; \& \;\; \neg_t\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_t$. Нетрудно показать, что $\neg_t\neg_1\neg_t B \vdash \neg_1 B$, то есть $\neg_1 B \in \mathcal{T}_t$. Последнее вместе с $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ дает $B \in \mathcal{T}_t$ по схеме аксиом (21). Далее из $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ получаем $\neg_1\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_t$, что вместе с $\neg_t\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ по схеме аксиом (21) влечет $\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_t$, а значит и $\neg_t\neg_1 B \in \mathcal{T}_t$. Теперь по допущению индукции получаем $u_t \in \upsilon^c(B)$, следовательно $u_t \in \upsilon^c(\neg_t B)$.

(3) Имеем $1 \in \upsilon^c(\neg_t B) \iff 1 \in \upsilon^c(B) \iff B \in \mathcal{T}_1 \;\; \& \;\; \neg_1 B \notin \mathcal{T}_1$.

Покажем, что из крайнего правого члена цепи эквиваленций следует, что $\neg_t B \in \mathcal{T}_1 \;\; \& \;\; \neg_1\neg_t B \notin \mathcal{T}_1$. Действительно, $B \in \mathcal{T}_1$ и схема аксиом (20), вместе с простотой теории, дают $\neg_t B \in \mathcal{T}_1 \dot\vee \neg_1 B \in \mathcal{T}_1$. Принимая во внимание $\neg_1 B \notin \mathcal{T}_1$, получаем, что $\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Далее допустим, что $\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Сначала получаем $\neg_t\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$ из допущения и $\neg_1\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$ из $B \in \mathcal{T}_1$. Теперь по схеме аксиом (21) выводим $\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$, противоречие.

Теперь пусть имеет место $\neg_t B \in \mathcal{T}_1 \;\; \& \;\; \neg_1\neg_t B \notin \mathcal{T}_1$. Используя аксиому $\neg_t B \vdash \neg_t\neg_t B \vee \neg_1\neg_t B$ и простоту теории сначала получаем, что $\neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_1 \dot\vee \neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$, что влечет $\neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_1$, а значит и $B \in \mathcal{T}_1$. Осталось показать $\neg_1 B \notin \mathcal{T}_1$. Допустим обратное, $\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$. Тогда $\neg_t\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$ в силу доказуемости $\neg_1 B \vdash \neg_t\neg_1\neg_t B$. Кроме того, из $\neg_t B \in \mathcal{T}_1$ получаем $\neg_1\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Тогда посредством (21) выводим $\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$, противоречие.

(4) Предварительно выпишем $u_1 \in \upsilon^c(\neg_t B) \iff u_1 \in \upsilon^c(B) \iff B \in \mathcal{T}_1 \;\; \& \;\; \neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Необходимо получить $\neg_t B \in \mathcal{T}_1 \;\; \& \;\; \neg_1\neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Из $B \in \mathcal{T}_1$ получаем $\neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_1$, затем, принимая во внимание $\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$ и схему аксиом (21), $\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Аналогично получаем $\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$ и $\neg_1\neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Для обоснования доказуемости $\neg_1 B \vdash \neg_1\neg_t\neg_t B$ используем последовательность шагов $\neg_t B \vdash \neg_t B$, $\neg_1\neg_1\neg_t B \vdash \neg_t B$, $\neg_1 B \vdash \neg_t\neg_1\neg_t B$. Поскольку также доказуема пара $\neg_t\neg_1\neg_t B \vdash \neg_1\neg_t\neg_t B$, осталось применить правило (R3).

Обратно, пусть $\neg_t B \in \mathcal{T}_1 \;\; \& \;\; \neg_1\neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Правый конъюнкт дает $\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$, что вместе с левым конъюнктом допущения влечет $B \in \mathcal{T}_1$ по схеме (21). Утверждение $\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$ нетрудно получить используя $\neg_1\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$ и $\neg_t\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$, которые выводятся из утверждений $\neg_t B \in \mathcal{T}_1$ и $\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$, соответственно.

(5) $f \in \upsilon^c(\neg_t B) \iff t \in \upsilon^c(B) \iff B \in \mathcal{T}_t \;\&\; \neg_t B \notin \mathcal{T}_t \overset{(7)}{\iff} \neg_t B \notin \mathcal{T}_t \;\&\; \neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_t$.

(6) Предварительно выпишем $0 \in \upsilon^c(\neg_t B) \iff 0 \in \upsilon^c(B) \iff B \notin \mathcal{T}_1 \;\&\; \neg_1 B \in \mathcal{T}_1$.

Сначала покажем, что $\neg_t B \notin \mathcal{T}_1 \;\&\; \neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Допустим, что $\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Тогда, поскольку $\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$, по схеме аксиом (21) получаем $B \in \mathcal{T}_1$, противоречие. Далее, $\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$ влечет $\neg_1\neg_1 B \in \mathcal{T}_1 \dot\vee \neg_t\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$. Левый дизъюнкт невозможен, так как $B \notin \mathcal{T}_1$. Следовательно $\neg_t\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$, а значит $\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$.

Для доказательства справа налево допустим, что $\neg_t B \notin \mathcal{T}_1 \;\&\; \neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$. Из $\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$ получаем $\neg_1\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1 \dot\vee \neg_t\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$, используя (20). Левый дизъюнкт влечет $\neg_t B \in \mathcal{T}_1$, что невозможно. Тогда $\neg_t\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$, откуда следует $\neg_1 B \in \mathcal{T}_1$. Далее допустим, что $B \in \mathcal{T}_1$. Тогда $\neg_t\neg_t B \in \mathcal{T}_1$, что вместе с $\neg_1\neg_t B \in \mathcal{T}_1$ влечет $\neg_t B \in \mathcal{T}_1$, противоречие. Из полученных утверждений получаем $0 \in \upsilon^c(\neg_t B)$.

Случай $A = B \wedge C$. Рассмотрим нетривиальные подслучаи.

(1) $t \in \upsilon^c(B \wedge C) \iff t \in \upsilon^c(B) \;\&\; t \in \upsilon^c(C) \iff B \in \mathcal{T}_t \;\&\; \neg_t B \notin \mathcal{T}_t \;\&\; C \in \mathcal{T}_t \;\&\; \neg_t C \notin \mathcal{T}_t \iff B \wedge C \in \mathcal{T}_t \;\&\; \neg_t(B \wedge C) \notin \mathcal{T}_t$.

Для обоснования крайней правой эквиваленции слева направо используется (помимо замкнутости теории относительно $\wedge$) контрапозиция утверждения $\neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$ влечет $\neg_t B \in \mathcal{T}_t \dot\vee \neg_t C \in \mathcal{T}_t$, которое вытекает из схемы аксиом (12).

Для обоснования справа налево допустим, что $B \wedge C \in \mathcal{T}_t \;\&\; \neg_t(B \wedge C) \notin \mathcal{T}_t$. Из первого конъюнкта получаются утверждения $B \in \mathcal{T}_t$ и $C \in \mathcal{T}_t$. В свою очередь $\neg_t(B \wedge C) \notin \mathcal{T}_t$ влечет $\neg_t B \notin \mathcal{T}_t \dot\vee \neg_t C \notin \mathcal{T}_t$. Пусть $\neg_t B \notin \mathcal{T}_t$. Требуется показать, что также $\neg_t C \notin \mathcal{T}_t$. Допустим обратное, $\neg_t C \in \mathcal{T}_t$. Тогда по схеме аксиом (10) получаем $\neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$, противоречие. Точно так же поступаем во втором дизъюнктивном случае.

(2) Пусть $u_t \in \upsilon^c(B \wedge C)$. Нужно рассмотреть три случая, два из которых аналогичны. Для начала пусть $u_t \in \upsilon^c(B) \;\&\; t \in \upsilon^c(C)$. По допущению индукции получаем $B \in \mathcal{T}_t$, $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$, $C \in \mathcal{T}_t$ и $\neg_t C \notin \mathcal{T}_t$. Замкнутость $\mathcal{T}_t$ относительно

$\wedge$ дает $B \wedge C \in \mathcal{T}_t$ и $\neg_t B \wedge C \in \mathcal{T}_t$. Используя схему аксиом (10), получаем из последнего утверждения $\neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$.

Во втором случае имеем $u_t \in \upsilon^c(B) \ \ \& \ \ u_t \in \upsilon^c(C)$, что по индукционному допущению влечет $B \in \mathcal{T}_t \ \ \& \ \ \neg_t B \in \mathcal{T}_t$, а также $C \in \mathcal{T}_t \ \ \& \ \ \neg_t C \in \mathcal{T}_t$. Замкнутость $\mathcal{T}_t$ относительно $\wedge$ дает $B \wedge C \in \mathcal{T}_t$ и $\neg_t B \wedge \neg_t C \in \mathcal{T}_t$. Из $\neg_t B \wedge \neg_t C \in \mathcal{T}_t$ получаем $\neg_t(B \wedge C)$ по схеме аксиом (12).

Обратно, пусть $(B \wedge C) \wedge \neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$. Левый конъюнкт дает возможность получить $B \in \mathcal{T}_t \ \ \& \ \ C \in \mathcal{T}_t$, тогда как правый влечет утверждение $\neg_t B \in \mathcal{T}_t \dot{\vee} \neg_t C \in \mathcal{T}_t$ (в соответствии со схемой аксиом (14)). Пусть $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$. При учете $B \in \mathcal{T}_t$ по допущению индукции получаем $u_t \in \upsilon^c(B)$. Для того, чтобы получить требуемое $u_t \in \upsilon^c(B \wedge C)$, достаточно убедиться, что $f \notin \upsilon^c(C)$. Но это следует из того, что $C \in \mathcal{T}_t$,

(5) Пусть $f \in \upsilon^c(B \wedge C)$, тогда $f \in \upsilon^c(B) \dot{\vee} f \in \upsilon^c(C)$. По индукционному допущению получаем утверждение (i) $B \notin \mathcal{T}_t \ \ \& \ \ \neg_t B \in \mathcal{T}_t$ или $C \notin \mathcal{T}_t \ \ \& \ \ \neg_t C \in \mathcal{T}_t$. Задача состоит в том, чтобы обосновать конъюнктивное утверждение $B \wedge C \notin \mathcal{T}_t \ \ \&$ $\neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$. Первый конъюнкт легко получается из того, что $B \notin \mathcal{T}_t \dot{\vee} C \notin \mathcal{T}_t$ влечет $B \wedge C \notin \mathcal{T}_t$. Истинность второго конъюнкта показать намного сложнее. Будем рассуждать от противного, предположим, что $\neg_t(B \wedge C) \notin \mathcal{T}_t$. Далее допустим левый член утверждения (i).

Сначала заметим, что $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ влечет $\neg_t \neg_t B \dot{\vee} \neg_1 \neg_t B \in \mathcal{T}_t$ по схеме аксиом (21). Однако $\neg_t \neg_t B \notin \mathcal{T}_t$, поскольку $B \notin \mathcal{T}_t$, следовательно $\neg_1 \neg_t B \in \mathcal{T}_t$. Используя схему аксиом (3), получаем $\neg_1 \neg_t B \vee \neg_1 \neg_t C \in \mathcal{T}_t$, а это значит $\neg_1 \neg_t (B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$. Теперь воспользуемся схемой аксиом (20) и получим из последнего утверждения $\neg_1 \neg_1 \neg_t (B \wedge C) \vee \neg_t \neg_1 \neg_t (B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$, что влечет $\neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t \ \dot{\vee} \ \neg_1(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$, откуда $\neg_1(B \vee C) \in \mathcal{T}_t$. Последнее утверждение и схема аксиом (15) дают $\neg_1 B \in \mathcal{T}_t \ \dot{\vee} \ \neg_1 C \in \mathcal{T}_t$. Однако нетрудно видеть, что $\neg_1 B \notin \mathcal{T}_t$, иначе вместе с утверждением $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ мы бы имели $B \in \mathcal{T}_t$. Тогда $\neg_1 C \in \mathcal{T}_t$. Далее, имея $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ и $\neg_1 C \in \mathcal{T}_t$, по схеме аксиом (22) получаем, что $B \vee C \in \mathcal{T}_t$, то есть $B \in \mathcal{T}_t \ \dot{\vee} \ C \in \mathcal{T}_t$, в силу простоты теории. Принимая во внимание $B \notin \mathcal{T}_t$, заключаем $C \in \mathcal{T}_t$. Но тогда по схеме аксиом (10) выводим $\neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$, что противоречит допущению.

Рассуждение с правым дизъюнктом утверждения (i) проводится аналогично.

Обратно допустим, что $B \wedge C \notin \mathcal{T}_t \ \ \& \ \ \neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$. Левый конъюнкт влечет $B \notin \mathcal{T}_t \dot{\vee} C \notin \mathcal{T}_t$. Допустим, что $B \notin \mathcal{T}_t$. Поскольку допущение индукции распространяется на формулу B, очевидно, что $t \notin v^c(B)$ и $u_t \notin v^c(B)$. Поскольку функция v^c всюду определена, получаем, что $f \in v^c(B)$, а значит и $f \in v^c(B \wedge C)$.

Случай $A = B \vee C$.

(1) $t \in v^c(B \vee C) \Longrightarrow t \in v^c(B) \dot{\vee} t \in v^c(C) \Longrightarrow (B \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t B \notin \mathcal{T}_t) \dot{\vee} (C \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t C \notin \mathcal{T}_t) \Longrightarrow (B \vee C) \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t(B \vee C) \notin \mathcal{T}_t$.

Остановимся на обосновании последней импликации. Будем рассуждать по случаям. Пусть сначала $B \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t B \notin \mathcal{T}_t$. Схема аксиом (3) дает $B \vee C \in \mathcal{T}_t$. Чтобы получить $\neg_t(B \vee C) \notin \mathcal{T}_t$, допустим обратное. Из $\neg_t(B \vee C) \in \mathcal{T}_t$ извлекаем $\neg_t B \in \mathcal{T}_t \dot{\vee} \neg_t C \in \mathcal{T}_t$ по схеме аксиом (16), откуда $\neg_t C \in \mathcal{T}_t$, поскольку $\neg_t B \notin \mathcal{T}_t$. Применяя схему аксиом (10), получаем $\neg_t(B \wedge C) \in \mathcal{T}_t$, что вместе с допущением дает $\neg_t B \in \mathcal{T}_t$ (схема аксиом (18)), противоречие. Аналогичные рассуждения для другого случая.

Обратно пусть $(B \vee C) \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t(B \vee C) \notin \mathcal{T}_t$. Используя схему аксиом (8) получаем $\neg_t B \notin \mathcal{T}_t \dot{\vee} \neg_t C \notin \mathcal{T}_t$, а свойства теории дают $B \in \mathcal{T}_t \dot{\vee} C \in \mathcal{T}_t$. Трудность в рассуждении по случаям представляют $B \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t C \notin \mathcal{T}_t$ и $C \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t B \notin \mathcal{T}_t$. Достаточно показать, как поступать в одном из них. Итак, пусть $B \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t C \notin \mathcal{T}_t$. Из правого конъюнкта по допущению индукции получаем, что $f \notin v^c(C)$, равно как и $u_t \notin v^c(C)$. Поскольку функция оценки всюду определена, получаем, что $t \in v^c(C)$, а значит и $t \in v^c(B \vee C)$.

(2) Допустим, что $u_t \in v^c(B \vee C)$. Тогда возникают три случая. Рассмотрим два из них. Пусть $u_t \in v^c(B) \ \& \ u_t \in v^c(C)$. По допущению индукции имеем $B \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t B \in \mathcal{T}_t$ также, как и $C \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t C \in \mathcal{T}_t$. Требуемый результат легко получается с использованием схем аксиом (3) и (8). Во втором случае имеем $f \in v^c(B) \ \& \ u_t \in v^c(C)$. Разница с предыдущим случаем только лишь в том, что $B \notin \mathcal{T}_t$. Однако $C \in \mathcal{T}_t$ по-прежнему влечет $B \vee C \in \mathcal{T}_t$. В остальном случаи аналогичны, как и рассуждения в третьем из возможных вариантов оценки.

Случаи (3) и (4) пропустим.

(5) Предположим, что $f \in v^c(B \vee C)$. Тогда $f \in v^c(B) \ \& \ f \in v^c(C)$, что по индукционному допущению влечет $B \notin \mathcal{T}_t \ \& \ C \notin \mathcal{T}_t$, но $\neg_t B \in \mathcal{T}_t \ \& \ \neg_t C \in \mathcal{T}_t$. Ясно, что $B \vee C \notin \mathcal{T}_t$, иначе B или C должны содержаться в $\mathcal{T}_t$ по свойству теории. Схема аксиом (8) влечет $\neg_t(B \vee C) \in \mathcal{T}_t$.

Обратно допустим, что $B \vee C \notin \mathcal{T}_t \;\&\; \neg_t(B \vee C) \in \mathcal{T}_t$. Левый конъюнкт влечет $B \notin \mathcal{T}_t \;\&\; C \notin \mathcal{T}_t$. Применяя допущение индукции для формул B и C получаем, что $t \notin \upsilon^c(B)$, $u_t \notin \upsilon^c(B)$, $t \notin \upsilon^c(C)$ и $u_t \notin \upsilon^c(C)$. В силу всюду определенности функции оценки получаем, что $f \in \upsilon^c(B) \;\&\; f \in \upsilon^c(C)$, то есть $f \in \upsilon^c(B \vee C)$.

Случай (6) доказывается аналогично.

$\square$

Теперь можно сформулировать и доказать теорему о полноте аксиоматизации системы $\mathbf{FDE}^u_{oe}$.

Теорема 4. *Для всяких формул $A, B \in \mathtt{For}_{oe}$ верно утверждение*

$$A \models^u_{oe} B \implies A \vdash_{\mathbf{FDE}^u_{oe}} B.$$

Доказательство. Допустим, что $A \nvdash_{\mathbf{FDE}^u_{oe}} B$. Тогда существует пара $(\mathscr{T}_t, \mathscr{T}_1)$ такая, что A содержится в одной из теорий, например $A \in \mathcal{T}_t$, но $B \notin \mathcal{T}_t$. По лемме 19, $t \in \upsilon^c(A) \dot\vee u_t \in \upsilon^c(A)$, но при этом $t \notin \upsilon^c(B) \;\;\&\;\; u_t \notin \upsilon^c(B)$. Тогда $A \not\models^u_{oe} B$. По контрапозиции получаем утверждение теоремы. $\square$

§5. Реляционная семантика для языка $\mathscr{L}^{oe}$

Логические системы, изученные в предыдущих параграфах, основаны на конечнозначной семантике. Более того, множество обобщенных истинностных значений в каждом случае образует конечную и довольно элементарную дистрибутивную решетку. Естественным образом встает вопрос о том, можно ли как-то обобщить такие семантические конструкции?

Разумеется, можно рассматривать бесконечные дистрибутивные решетки истинностных значений, которые, скорее всего, будут неотличимыми друг от друга элементами множества-носителя. Возникнет вопрос о том, как именно определить на таких множествах унарные операции $-_t$ и $-_1$? Можно выделить некоторый наименьший набор свойств, характеристических для этих операций и наделить этими свойствами унарные операции в такой решетке.

Есть еще более радикальный путь к обобщению. Он состоит в отказе от дистрибутивности решеточно упорядоченных множеств истинностных значений [10]. Таким

[10]В связи с этим укажем на статью М. Данна и К. Бимбо [15], в начале которой строится базисное секвенциальное исчисление, характеризующее решеточные свойства пропозицио-

образом, далее можно изучать (возможно недистирубтивные) решетки абстрактных истинностных значений с унарными операциями, наследующими ряд свойств от изученных ранее $-_t$ и $-_1$.

Однако в данном исследовании был выбран другой путь, инспирированный работой М. Данна и Д. Олвейна [7]. В числе прочего, авторы этой статьи описывают реляционную семантику для одной из разновидностей линейной логики, с трехзначной оценкой формул в точках реляционной структуры. Эта реляционная семантика, в свою очередь, является в некотором смысле производной от конструкции, предложенной А. Урквартом [90] для доказательства теоремы о представлении для недистрибутивных решеток. Для интерпретации отрицания авторы используют оператор, аналогичный тому, что применяется в реляционной семантике для релевантной логики («Routley star»). В рамках настоящего исследования весь этот аппарат был адаптирован для построения реляционной семантики для логики с эпистемическим и отнотологическим «полуотрицаниями»[11]. Истинностные значения в каждой точке такой структуры – это по-прежнему онтологические и эпистемические истина, ложь и неопределенность. Отношение следования может быть определено по-разному – с сохранением только одного из истинностных компонентов (при обратном сохранении соответствующей ложности) или с сохранением обоих компонентов. Результирующие отношения следования не совпадают и порождают различные логические теории.

Теоремы о представлении для различных классов алгебраических структур принадлежат к числу фундаментальных математических результатов. Наиболее известными примерами подобных результатов являются теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр и дистрибутивных решеток [80, 81], теорема Пристли о представлении дистрибутивных решеток [77], теорема Бялницки-Бирула и Расевой о представлении квази-булевых алгебр [18].

А. Уркварт в статье [90] предложил конструкцию, дающую возможность определить представление для недистрибутивных решеток. Основная идея его подхода состоит в следующем. Для представления абстрактной недистрибутивной решетки $(S, \wedge, \vee)$ сначала определяется реляционная структура $(X, \leqslant_1, \leqslant_2)$, где X есть непустое множество, а $\leqslant_1$ и $\leqslant_2$ – заданные на нем отношения частичного порядка, отве-

нальных связок $\wedge$ и $\vee$. В этом исчислении нельзя доказать законы дистрибутивности этих связок относительно друг друга. Более того, авторы прямо указывают на то, что «недистрибутивные логики исключительно *естественны*».

[11] Таким образом, неявная связь с недистрибутивными решетками все же сохраняется.

чающие условию

$$x \leqslant_1 y \ \& \ x \leqslant_2 y \implies x = y.$$

Кроме того, на множестве 2^X задается пара отображений l и r:

$$l(Y) = \{x \mid \forall y(x \leqslant_1 y \implies x \notin Y)\},$$
$$r(Y) = \{x \mid \forall y(x \leqslant_2 y \implies x \notin Y)\}.$$

Множество $Y \subseteq X$ называется $\leqslant_1$-*возрастающим*, если для всяких $x, y \in X$ верно утверждение $x \leqslant_1 y \ \& \ x \in Y \implies y \in Y$. Аналогичным образом, множество $Y \subseteq X$ называется $\leqslant_2$-*возрастающим*, если для всяких $x, y \in X$ верно утверждение $x \leqslant_2 y \ \& \ x \in Y \implies y \in Y$.

Множество $Y \subseteq X$ называется l-*стабильным* (r-*стабильным*), если $Y = l(r(Y))$ ($Y = r(l(Y))$).

Отображения l и r образуют *соответствие Галуа* между решеткой $\leqslant_1$-возрастающих и решеткой $\leqslant_2$-возрастающих подмножеств множества X.

По заданной реляционной структуре $(X, \leqslant_1, \leqslant_2)$ можно построить алгебру на множестве $L(X)$ l-стабильных подмножеств множества X, определяя алгебраические операции $\wedge^c$ и $\vee^c$ следующим образом: для $Y, Z \subseteq X$, $Y \wedge^c Z = Y \cap Z$, $Y \vee^c Z = l(r(Y) \cap r(Z))$, константы 0^c и 1^c как $\varnothing$ и X, соответственно. Можно показать, что алгебра $(L(X), \wedge^c, \vee^c, 0^c, 1^c)$ есть ограниченная решетка.

Теперь для недистрибутивной решетки $(S, \wedge, \vee)$ можно построить каноническую шкалу $(X(S), \leqslant_1, \leqslant_2)$, носитель которой есть множество пар вида (F, I), где F и I – фильтр и идеал на L, соответственно, такие, что $F \cap I = \varnothing$ и, кроме того, для F не существует собственного расширения F' такого, что $F' \cap I = \varnothing$ и для I не существует собственного расширения I' такого, что $F \cap I' = \varnothing$. Другими словами, если на множестве пар вида (F, I) определить частичный порядок таким образом, что $(F_1, I_1) \preccurlyeq (F_2, I_2)$ в том случае, когда $F_1 \subseteq F_2$ и $I_1 \subseteq I_2$, то множество X состоит в точности из *максимальных* элементов отношения $\preccurlyeq$. Порядок $\leqslant_1$ задается по включению первых компонент пар: $(F_1, I_1) \leqslant_1 (F_2, I_2)$ в том случае, когда $F_1 \subseteq F_2$; порядок $\leqslant_2$ задается по включению вторых компонент пар: $(F_1, I_1) \leqslant_2 (F_2, I_2)$ в том случае, когда $I_1 \subseteq I_2$. Далее можно построить алгебру по этой канонической шкале и показать, что отображение $h(a) = \{x \in X(L) \mid a \in x_1\}$ (где x_1 есть первый компонент пары x) есть погружение исходной решетки в алгебру ее канонической шкалы. Для доказательства теоремы о представлении Урквáрт использовал топологизацию реляционной структуры. Однако для целей данного исследования детали этой конструкции уже не столь существенны, их описание может быть найдено в [90].

М. Данн и Д. Олвейн использовали реляционную структуру $(X, \leqslant_1, \leqslant_2)$ из вышеописанной конструкции представления решеток для построения семантики типа Крипке для одной из разновидностей линейной логики [7, P. 541, 542]. Содержательная интуиция для определения оценки формул в точках реляционной структуры связана с канонической шкалой и ее «мирами», которые представляют собой максимальные (в частичном порядке) пары вида (F, I), в которых компоненты пар не пересекаются. Фильтр F является алгебраическим аналогом теории, в то время как идеал I – аналогом контртеории. Кроме того, есть еще элементы решетки, не лежащие ни в F, ни в I. Отсюда, таким образом, происходит трехзначность в оценке формул: принадлежность формулы теории трактуется как ее истинность, принадлежность контртеории – как ее ложность. Если же формула попадает в «зазор» между теорией и контртеорией, то она не истинна и не ложна, то есть получает истинностное значение типа неопределенности. Другая часть семантики Данна-Олвейна – интерпретация пропозициональных связок – происходит из алгебры на подмножествах носителя реляционной структуры. l-стабильное множество трактуется как множество истинности формулы, а его r-образ – как множество ложности. Таким образом, если $(X, \leqslant_1, \leqslant_2)$ есть реляционная структура, а $Y \subseteq X$ есть l-стабильное множество в алгебре на множестве $L(X)$ и $x \in Y$, то полагаем, что $x \vDash_T A$, в то время, как для $z \in r(Y)$ полагаем $z \vDash_F A$. Если же $x \nvDash_T A$ и $x \nvDash_F A$, то $x \vDash_I A$, то есть формула A получает значение «неопределенности».

Условия истинности и ложности $\wedge$ и $\vee$ напрямую «вычитываются» из определений алгебраических операций в алгебре над множеством $L(X)$. Так, $x \in Y \vee^c Z$ (где $Y, Z \subseteq X$) означает, что $x \in l(r(Y) \cap r(Z))$. Последнее утверждение можно переписать, используя определения отображений l и r, как $\forall y (x \leqslant_1 y \implies x \notin (r(Y) \cap r(Z)))$. Это выражение, в свою очередь, дает условия истинности для формулы $A \vee B$ в точке x реляционной структуры:

$$x \vDash_T A \vee B \iff \forall y (x \leqslant_1 y \implies y \nvDash_F A \dot{\vee} y \nvDash_F B).$$

Заметим, что если $x \vDash_T A$, то отсюда следует, что $x \vDash_T A \vee B$, поскольку в этом случае x лежит в некотором l-стабильном множестве Y и любой y такой, что $x \leqslant_1 y$, не лежит в $r(Y)$, то есть в области ложности формулы A. Однако из $x \vDash_T A \vee B$ не вытекают привычные утверждения $x \vDash_T A$ или $x \vDash_T B$.

Далее, предположим, что $x \in r(Y \vee^c Z)$. Поскольку $r(Y \vee^c Z) = rl(r(Y) \cap r(Z))$, а $rl(r(Y) \cap r(Z)) = r(Y) \cap r(Z)$, получаем $x \vDash_F A \vee B \iff x \vDash_F A \ \& \ x \vDash_F B$, то есть условия ложности для $\vee$ стандартные.

Условия истинности и ложности для $\wedge$ в некотором смысле являются зеркальными по сравнению с условиями для $\vee$. Истинность формулы $A \wedge B$ в точке реляционной структуры определяется стандартно: $x \vDash_T A \wedge B \iff x \vDash_T A \ \& \ x \vDash_T B$, тогда как нестандартными оказываются условия ложности:

$$x \vDash_F A \wedge B \iff \forall y(x \leqslant_2 y \implies y \nvDash_T A \dot{\vee} y \nvDash_T B).$$

Ложность в точке x одного их коъюнктов влечет ложность всей конъюнктивной формулы, однако обратное неверно.

Помимо стандартных связок $\wedge$ и $\vee$ в данной семантике можно определять интерпретации и других пропозициональных связок (в языке варианта линейной логики, который рассматривают авторы статьи [7] имеются также интенсиональные конъюнкция и дизъюнкция, импликация и коимпликация и ряд других связок). Наиболее интересной в контексте данного исследования является отрицание и его интепретация. Следуя нотации [7] обозначим отрицание символом $\sim$. Для его интерпретации в реляционную структуру добавляется унарная операция $\star$, обобщенная «звезда» Раутли-Мейера, которая характеризуется следующими свойствами:

$$\begin{aligned} x \leqslant_1 y &\implies x^\star \leqslant_2 y^\star \\ x \leqslant_2 y &\implies x^\star \leqslant_1 y^\star \\ x^{\star\star} &= x. \end{aligned}$$

В алгебре над множеством $L(X)$ добавляется унарная операция $\hat{\sim}$, которая определяется равенством $\hat{\sim} Y = \{x \mid x^\star \in r(Y)\}$, для $Y \subseteq X$. Таким образом, условия истинности и ложности для $\sim$ задаются следующими соотношениями[12]:

$$\begin{aligned} x \vDash_T {\sim} A &\iff x^\star \vDash_F A, \\ x \vDash_F {\sim} A &\iff \forall y(x \leqslant_2 y \implies y^\star \nvDash_F A). \end{aligned}$$

[12]В статье [7] условие ложности формулы $\sim A$ имеет вид $x \vDash_F {\sim} A \iff \forall y(x \leqslant_2 y \implies y \nvDash_F A)$, что, по-видимому, является опечаткой. Действительно, $x \in r(\hat{\sim} Y)$ (т. е. $x \vDash_F {\sim} A$) означает, что любой y, достижимый из x по отношению $\leqslant_2$ не принадлежит множеству $\{x \mid x^\star \in r(Y)\}$ (т. е. $y^\star \nvDash_F A$).

В канонической шкале операция $\sim$ действует следующим образом: $\sim(F, I) = (\sim I, \sim F)$, где $\sim Y = \{\sim x \mid x \in Y\}$.

Остается сказать, что прежде, чем задать условия истинности и ложности в реляционной структуре с носителем X для формул, построенных применением пропозициональных связок, необходимо определить функцию оценки пропозициональных переменных: $v\colon \mathtt{Var} \times X \longrightarrow \{T, I, F\}$. Простого определения оценки как отображения множества пропозициональных переменных в множество истинностных значений недостаточно, необходимо также, чтобы соблюдались дополнительные условия. Обозначим для произвольной пропозициональной переменной p области ее истинности и ложности: $P_1 = \{x \mid v(p, x) = T\}$, $P_2 = \{x \mid v(p, x) = F\}$. Функция оценки v должна отвечать требованиям $P_1 = l(P_2)$, $P_2 = r(P_1)$.

Теперь обратимся к вопросу том, как можно модифицировать изложенные выше семантические конструкции для случая онтоэпистемических операций. Наличие трехзначной оценки в реляционной структуре позволяет продолжить линию онтоэпистемических истинностных значений с компонентой неопределенности. В то же время можно по-прежнему различать истинность, ложность и неопределенность в онтологическом и эпистемическом смыслах, для чего соответствующим образом модифицировать реляционную структуру. Теперь отношение $\leqslant_1$ будет иметь онтологический ($\lhd_1$) и эпистемический ($\lhd_2$) аналоги, точно так же, как и отношение $\leqslant_2$ ($\blacktriangleleft_1$ и $\blacktriangleleft_2$, соответственно). Кроме того, для интерпретации онтологического и эпистемического отрицаний нужны будут унарные операторы ($\mathtt{N}_t$ и $\mathtt{N}_1$, соответственно), аналоги обобщенной «звезды» Раутли-Мейера. Наконец, отображения l и r, а также функция оценки пропозициональных переменных также разделяются на онтологический и эпистемический варианты. Перейдем к определениям.

Определение 38. Четырехупорядоченная реляционная структура (шкала) есть кортеж $(X, \lhd_1, \lhd_2, \blacktriangleleft_1, \blacktriangleleft_2)$, в которой X есть непустое множество (носитель шкалы), а каждое $\lhd_i$ и $\blacktriangleleft_i$ ($i \in \{1, 2\}$) есть отношение частичного порядка на множестве X. $\lhd$

Элементы множества X, как это принято в логической семантике, базирующейся на той или иной разновидности реляционных структур [13], называются «возможными мирами», «состояниями» или просто «точками». Отношения $\lhd_1, \lhd_2, \blacktriangleleft_1$ и $\blacktriangleleft_2$ на множестве X индуцируют пары функций: (r_1, l_1) и (r_2, l_2) типа $\mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(X)$,

[13] Подробнее о реляционных структурах и их роли в построении семантики для неклассических логик см., например, статью [3].

определяемые следующими равенствами:

(3) $$l_i(Y) = \{x \in X \mid \forall y \in X(x \lhd_i y \implies y \notin Y)\},$$

(4) $$r_i(Y) = \{x \in X \mid \forall y \in X(x \blacktriangleleft_i y \implies y \notin Y)\},$$

где $i \in \{1, 2\}$.

Определение 39. Пусть $(X, \lhd_1, \lhd_2, \blacktriangleleft_1, \blacktriangleleft_2)$ есть четырехупорядоченная шкала, а (r_1, l_1) и (r_2, l_2) – пары функций, индуцированные отношениями $\lhd_1, \lhd_2, \blacktriangleleft_1$ и $\blacktriangleleft_2$ на множестве X. Тогда множество $Y \subseteq X$ называется l_i-стабильным, если $l_i(r_i(Y)) = Y$; множество $Y \subseteq X$ называется r_i-стабильным, если $r_i(l_i(Y)) = Y$, где $i \in \{1, 2\}$. $\lhd$

Определение 40. $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкалой называется кортеж $\mathscr{F} = (X, \lhd_1, \lhd_2, \blacktriangleleft_1, \blacktriangleleft_2\ \mathtt{N}_t, \mathtt{N}_1)$, где $(X, \lhd_1, \lhd_2, \blacktriangleleft_1, \blacktriangleleft_2)$ есть четырехупорядоченная реляционная структура, а $\mathtt{N}_t$ и $\mathtt{N}_1$ есть унарные операции на множестве X, удовлетворяющие следующим соотношениям (для всяких $x, y \in X$, $i \in \{1, 2\}$):

(1) $\mathtt{N}_t(\mathtt{N}_t(x)) = x$,

(2) $\mathtt{N}_1(\mathtt{N}_1(x)) = x$,

(3) $\mathtt{N}_t(\mathtt{N}_1(x)) = \mathtt{N}_1(\mathtt{N}_t(x))$,

(4) $x \lhd_1 y \iff \mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(y)$,

(5) $x \lhd_2 y \iff \mathtt{N}_1(x) \blacktriangleleft_2 \mathtt{N}_1(y)$.

$\lhd$

Лемма 20. *Следующие утверждения выводимы из определения 40 (для всякой $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкалы и всяких $x, y \in X$, $i \in \{1, 2\}$):*

(1) $x \blacktriangleleft_1 y \iff \mathtt{N}_t(x) \lhd_1 \mathtt{N}_t(y)$,

(2) $x \blacktriangleleft_2 y \iff \mathtt{N}_1(x) \lhd_2 \mathtt{N}_1(y)$,

(3) $\mathtt{N}_t(x) \lhd_1 y \iff x \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(y)$,

(4) $\mathtt{N}_1(x) \lhd_2 y \iff x \blacktriangleleft_2 \mathtt{N}_1(y)$,

Доказательство.

(1) $x \blacktriangleleft_1 y \overset{\text{опр. 40 (1)}}{\iff} \mathtt{N}_t(\mathtt{N}_t(x)) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(\mathtt{N}_t(y)) \overset{\text{опр. 40 (5)}}{\iff} \mathtt{N}_t(x) \lhd_1 \mathtt{N}_t(y)$

(2) $x \blacktriangleleft_2 y \overset{\text{опр. 40 (2)}}{\iff} \mathtt{N}_1(\mathtt{N}_1(x)) \blacktriangleleft_2 \mathtt{N}_1(\mathtt{N}_1(y)) \overset{\text{опр. 40 (6)}}{\iff} \mathtt{N}_1(x) \lhd_2 \mathtt{N}_1(y)$

(3) $\mathtt{N}_t(x) \lhd_1 y \overset{\text{опр. 40 (5)}}{\Longleftrightarrow} \mathtt{N}_t(\mathtt{N}_t(x)) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(y) \overset{\text{опр. 40 (1)}}{\Longleftrightarrow} x \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(y)$

(4) $\mathtt{N}_1(x) \lhd_2 y \overset{\text{опр. 40 (6)}}{\Longleftrightarrow} \mathtt{N}_1(\mathtt{N}_1(x)) \blacktriangleleft_2 \mathtt{N}_1(y) \overset{\text{опр. 40 (2)}}{\Longleftrightarrow} x \blacktriangleleft_2 \mathtt{N}_1(y)$

$\square$

Определение 41. Пусть $\mathscr{F} = (X, \lhd_1, \lhd_2, \blacktriangleleft_1, \blacktriangleleft_2\ \mathtt{N}_t, \mathtt{N}_1)$ есть $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкала. Функциями оценки переменных v_t и v_1 называются отображения $v_t \colon \mathtt{Var} \times X \longrightarrow \{t, u_t, f\}$ и $v_1 \colon \mathtt{Var} \longrightarrow \{1, u_1, 0\}$ такие, что для всякой $p \in \mathtt{Var}$ выполняются следующие равенства:

(1) $r_1(P^p_t) = P^p_f$ и $l_1(P^p_f) = P^p_t$, где $P^p_t = \{x \mid x \in X \ \ \& \ \ v_t(p,x) = t\}$, $P^p_f = \{x \mid x \in X \ \ \& \ \ v_t(p,x) = f\}$;

(2) $r_2(P^p_1) = P^p_0$ и $l_2(P^p_0) = P^p_1$, где $P^p_1 = \{x \mid x \in X \ \ \& \ \ v_1(p,x) = 1\}$, $P^p_0 = \{x \mid x \in X \ \ \& \ \ v_1(p,x) = 0\}$.

$\lhd$

Определение 42. Пусть X есть носитель некоторой $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкалы. Определим следующие отношения на множестве $X \times \mathtt{Var}$:

(1) $x \vDash_t p \iff v_t(x,p) = t$,

(2) $x \vDash_{u_t} p \iff v_t(x,p) = u_t$,

(3) $x \vDash_f p \iff v_t(x,p) = f$,

(4) $x \vDash_1 p \iff v_1(x,p) = 1$,

(5) $x \vDash_{u_1} p \iff v_1(x,p) = u_1$,

(6) $x \vDash_0 p \iff v_1(x,p) = 0$.

$\lhd$

Далее определим отношения (различной) истинности, ложности и неопределенности в точке модели для сложных формул.

Определение 43. Пусть X есть носитель некоторой $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкалы. Определим отношения $\vDash_t$, $\vDash_f$, $\vDash_1$ и $\vDash_0$ на множестве $X \times \mathtt{For}_{oe} \setminus \mathtt{Var}$:

(1) $x \vDash_t A \wedge B \iff x \vDash_t A \ \ \& \ \ x \vDash_t B$,

(2) $x \vDash_f A \vee B \iff x \vDash_f A \ \ \& \ \ x \vDash_f B$,

(3) $x \vDash_1 A \wedge B \iff x \vDash_1 A \ \ \& \ \ x \vDash_1 B$,

(4) $x \vDash_0 A \vee B \iff x \vDash_0 A \;\&\; x \vDash_0 B$

(5) $x \vDash_t A \vee B \iff \forall y(x \lhd_1 y \implies (y \vDash_{-f} A \dot{\vee} y \vDash_{-f} B))$,

(6) $x \vDash_1 A \vee B \iff \forall y(x \lhd_2 y \implies (y \vDash_{-0} A \dot{\vee} y \vDash_{-0} B))$,

(7) $x \vDash_f A \wedge B \iff \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies (y \vDash_{-t} A \dot{\vee} y \vDash_{-t} B))$,

(8) $x \vDash_0 A \wedge B \iff \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies (y \vDash_{-1} A \dot{\vee} y \vDash_{-1} B))$,

(9) $x \vDash_t \neg_t A \iff \mathtt{N}_t(x) \vDash_f A$,

(10) $x \vDash_f \neg_t A \iff \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \mathtt{N}_t(y) \vDash_{-f} A)$,

(11) $x \vDash_t \neg_1 A \iff x \vDash_t A$,

(12) $x \vDash_f \neg_1 A \iff x \vDash_f A$,

(13) $x \vDash_1 \neg_1 A \iff \mathtt{N}_1(x) \vDash_0 A$,

(14) $x \vDash_0 \neg_1 A \iff \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies \mathtt{N}_1(y) \vDash_{-0} A)$,

(15) $x \vDash_1 \neg_t A \iff x \vDash_1 A$,

(16) $x \vDash_0 \neg_t A \iff x \vDash_0 A$,

(17) $x \vDash_{u_t} A \iff x \vDash_{-t} A \;\&\; x \vDash_{-f} A$,

(18) $x \vDash_{u_1} A \iff x \vDash_{-1} A \;\&\; x \vDash_{-0} A$.

$\lhd$

Замечание 6. Поясним, каким образом получаются условия ложности для формул с внешними отрицаниями. Пусть $a \vDash_f \neg_t A$. Это означает, что $a \in r_1(P_t^{\neg_t A})$, то есть $a \in \{x \mid \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \notin P_t^{\neg_t A})\}$. В свою очередь $y \notin P_t^{\neg_t A}$ означает, что $\mathtt{N}_t(y) \notin P_f^A$, то есть $\mathtt{N}_t(y) \vDash_{-f} A$. В результате получаем $a \vDash_f \neg_t A \iff \forall y(a \blacktriangleleft_1 y \implies \mathtt{N}_t(y) \vDash_{-f} A)$. $\lhd$

Далее расширим определение областей истинности пропозициональных переменных на множество всех формул. Определим для $A \in \mathtt{For}_{oe}$, $P_i^A = \{x \mid x \in X \;\&\; x \vDash_i A\}$, где X есть носитель $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкалы, а $i \in \{t, 1, f, 0\}$. Ключевой факт, который доказывается в лемме 22, состоит в том, что функции r_1, l_1 и r_2, l_2 ведут себя на множестве областей истинности формул так же, как и на областях истинности пропозициональных переменных.

Лемма 21. *Пусть x есть элемент носителя $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкалы. Следующие утверждения непосредственно следуют из определений функций r_1, l_1 и r_2, l_2 и определения 43:*

(1) $x \in r_1(l_1(P_f^A)) \iff \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z(y \triangleleft_1 z \ \& \ z \vDash_f A))$,

(2) $x \in l_1(r_1(P_t^A)) \iff \forall y(x \triangleleft_1 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_1 z \ \& \ z \vDash_t A))$,

(3) $x \in r_2(l_2(P_0^A)) \iff \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies \exists z(y \triangleleft_2 z \ \& \ z \vDash_0 A))$,

(4) $x \in l_2(r_2(P_1^A)) \iff \forall y(x \triangleleft_2 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_2 z \ \& \ z \vDash_1 A))$.

Лемма 22. *Для всякой формулы A, всякой* $\mathbf{NDst}_{oe}$*-шкалы $\mathscr{F}^u$ и всякого элемента x носителя шкалы $\mathscr{F}^u$ верны следующие равенства:*

(1) $r_1(P_t^A) = P_f^A$,

(2) $r_2(P_1^A) = P_0^A$,

(3) $l_1(P_f^A) = P_t^A$,

(4) $l_2(P_0^A) = P_1^A$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по построению формулы. Для пропозициональных переменных утверждение леммы следует из определения 41. Рассмотрим случаи сложных формул.

Случай $A = \neg_t B$.

Допустим, что $x \in r_1(P_t^{\neg_t B})$. Тогда, по определению функции r_1 получаем $\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \notin P_t^{\neg_t B})$. Последнее выражение можно переписать как $\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-t} \neg_t B)$, которое, в силу определения 43 (9), дает $\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \mathtt{N}_t(y) \vDash_{-f} B)$. Но это, в свою очередь, по определению 43 (10), означает, что $x \vDash_f \neg_t B$, то есть $x \in P_f^{\neg_t B}$. Обратное включение доказывается «обращением» приведенного рассуждения.

Пусть $x \in r_2(P_1^{\neg_t B})$. Для доказательства выпишем следующие эквиваленции:

$$
\begin{aligned}
x \in r_2(P_1^{\neg_t B}) &\overset{\text{опр. } r_2}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies y \notin P_1^{\neg_t B}) \\
&\overset{\text{опр. } P_1^{\neg_t B}}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies y \vDash_{-1} \neg_t B) \\
&\overset{\text{опр.43 (12)}}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies y \vDash_{-1} B) \\
&\overset{\text{опр. } P_1^B}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies y \notin P_1^B) \\
&\overset{\text{и.д.}}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies y \notin l_2(P_0^B)) \\
&\overset{\text{опр. } l_2}{\iff} x \in r_2(l_2(P_0^B)) \\
&\overset{\text{и.д.}}{\iff} x \in P_0^B \\
&\overset{\text{опр. } P_0}{\iff} x \vDash_0 B \\
&\overset{\text{опр. 43 (16)}}{\iff} x \vDash_0 \neg_t B \\
&\overset{\text{опр. } P_0^{\neg_t B}}{\iff} x \in P_0^{\neg_t B}
\end{aligned}
$$

Предположим, что $x \in l_1(P_f^{\neg_t B})$. Получаем сначала следующую цепочку эквиваленций:

$$\text{(E)} \qquad x \in l_1(P_f^{\neg_t B}) \overset{\text{опр. } l_1}{\iff} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \notin P_f^{\neg_t B})$$
$$\overset{\text{опр. } P_f^{\neg_t B}}{\iff} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} \neg_t B)$$
$$\overset{\text{опр.43 (13)}}{\iff} \forall y(x \lhd_1 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_1 z \;\&\; \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B))$$

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы обосновать утверждение $\mathtt{N}_t(x) \in r_1(l_1(P_f^B))$, из которого по допущению индукции следует $\mathtt{N}_t(x) \in P_f^B$, а значит и требуемое $x \in P_t^{\neg_t B}$. Учитывая лемму 21, развернем $\mathtt{N}_t(x) \in r_1(l_1(P_f^B))$ следующим образом:

$$(\alpha_1) \qquad \mathtt{N}_t(x) \in r_1(l_1(P_f^B)) \iff \forall y(\mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z(y \lhd_1 z \;\&\; z \vDash_f B)).$$

Средствами натурального исчисления предикатов покажем, что правая часть этого соотношения эквивалентна формуле $\forall y(x \lhd_1 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_1 z \;\&\; \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B))$, полученной выше в конце цепочки эквиваленций (E). Для удобства докажем части эквиваленции независимо друг от друга.

(1)	$\forall y(x \lhd_1 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_1 z \;\&\; \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B))$	посылка
(2)	$\mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(y)$	дополнительное допущение
(3)	$x \lhd_1 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_1 z \;\&\; \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B)$	(1) исключение $\forall$
(4)	$\mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(y) \implies x \lhd_1 y$	определение 40 (4)
(5)	$\exists z(y \blacktriangleleft_1 z \;\&\; \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B)$	(2), (3), (4) исключение $\implies$
(6)	$y \blacktriangleleft_1 z \;\&\; \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B$	(5) исключение $\exists$
(7)	$y \blacktriangleleft_1 z$	(6) исключение $\&$
(8)	$y \blacktriangleleft_1 z \implies \mathtt{N}_t(y) \lhd_1 \mathtt{N}_t(z)$	лемма 20 (1)
(9)	$\mathtt{N}_t(y) \lhd_1 \mathtt{N}_t(z)$	(7), (8) исключение $\implies$
(10)	$\mathtt{N}_t(z) \vDash_f B$	(6) исключение $\&$
(11)	$\mathtt{N}_t(y) \lhd_1 \mathtt{N}_t(z) \;\&\; \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B$	(9), (10) введение $\&$
(12)	$\exists z(\mathtt{N}_t(y) \lhd_1 z \;\&\; z \vDash_f B)$	(11) введение $\exists$
(13)	$\mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(y) \implies \exists z(\mathtt{N}_t(y) \lhd_1 z \;\&\; z \vDash_f B)$	(12) введение $\implies$
(14)	$\forall y(\mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z(y \lhd_1 z \;\&\; z \vDash_f B))$	(13) введение $\forall$, y абс.огр.,

y ограничивает x

Покажем в обратную сторону:

(1) $\forall y(\mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z(y \lhd_1 z \ \& \ z \vDash_f B))$ посылка

(2) $x \lhd_1 y$ дополнительное допущение

(3) $\mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(y) \implies \exists z(\mathtt{N}_t(y) \lhd_1 z \ \& \ z \vDash_f B)$ (1) исключение $\forall$

(4) $x \lhd_1 y \implies \mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(y)$ определение 40 (4)

(5) $\exists z(\mathtt{N}_t(y) \lhd_1 z \ \& \ z \vDash_f B)$ (2), (3), (4) исключение $\implies$

(6) $\mathtt{N}_t(y) \lhd_1 z \ \& \ z \vDash_f B$ (5) исключение $\exists$

(7) $\mathtt{N}_t(y) \lhd_1 z$ (6) исключение $\&$

(8) $\mathtt{N}_t(y) \lhd_1 z \implies y \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(z)$ лемма 20 (3)

(9) $y \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(z)$ (7), (8), исключение $\implies$

(10) $\mathtt{N}_t(\mathtt{N}_t(z)) \vDash_f B$ (6) исключение $\&$, определение 40 (1)

(11) $y \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(z) \ \& \ \mathtt{N}_t(\mathtt{N}_t(z)) \vDash_f B$ (9), (11), введение $\&$

(12) $\exists z(y \blacktriangleleft_1 z \ \& \ \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B)$ (11), введение $\exists$

(13) $x \lhd_1 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_1 z \ \& \ \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B)$ (12) введение $\implies$

(14) $\forall y(x \lhd_1 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_1 z \ \& \ \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B))$ (13) введение $\forall$, y абс.огр., y ограничивает x

Таким образом, доказано, что заключительное утверждение цепочки эквивалентций (E) (т. е. $\forall y(x \lhd_1 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_1 z \ \& \ \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B)))$ эквивалентно правой части соотношения (α_1) (т. е. $\forall y(\mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z(y \lhd_1 z \ \& \ z \vDash_f B)))$, что позволяет продолжить цепочку (E) утверждением

$$\forall y(x \lhd_1 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_1 z \ \& \ \mathtt{N}_t(z) \vDash_f B)) \iff \mathtt{N}_t(x) \in r_1(l_1(P_f^B)).$$

Поскольку в отношении формулы B действует допущение индукции, можно утверждать, что множество $l_1(P_f^B) = P_t^B$ и $r_1(P_t^B) = P_f^B$, что позволяет получить $\mathtt{N}_t(x) \in r_1(l_1(P_f^B) \iff \mathtt{N}_t(x) \in P_f^B$. Правая часть этой эквиваленции дает $x \in P_t^{\neg_t B}$, что и требовалось.

Пусть $x \in l_2(P_0^{\neg_t B})$. Выпишем следующую цепочку эквиваленций:

$$x \in l_2(P_0^{\neg_t B}) \overset{\text{опр. } l_2}{\iff} \forall y(x \lhd_2 y \implies y \notin P_0^{\neg_t B})$$
$$\overset{\text{опр. } P_0^{\neg_t B}}{\iff} \forall y(x \lhd_2 y \implies y \vDash_{-0} \neg_t B)$$
$$\overset{\text{опр. } 43\,(16)}{\iff} \forall y(x \lhd_2 y \implies y \vDash_{-0} B))$$
$$\overset{\text{опр. } P_0^B}{\iff} \forall y(x \lhd_2 y \implies y \notin P_0^B))$$
$$\overset{\text{и.д.}}{\iff} \forall y(x \lhd_2 y \implies y \notin r_2(P_1^B))$$
$$\overset{\text{опр. } l_2}{\iff} x \in l_2(r_2(P_1^B))$$
$$\overset{\text{и.д.}}{\iff} x \in P_1^B$$
$$\overset{\text{опр. } P_1^B}{\iff} x \vDash_1 B$$
$$\overset{\text{опр. } 43\,(15)}{\iff} x \vDash_1 \neg_t B$$
$$\overset{\text{опр. } P_1^{\neg_t B}}{\iff} x \in P_1^{\neg_t B}$$

Случай $A = \neg_1 B$. Доказательство аналогично случаю $A = \neg_t B$.

Случай $A = B \wedge C$.

Допустим, что $x \in r_1(B \wedge C)$. Получим следующую цепочку эквиваленций:

$$x \in r_1(P_t^{B\wedge C}) \overset{\text{опр. } r_1}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \notin P_t^{B\wedge C})$$
$$\overset{\text{опр. } P_t^{B\wedge C}}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-t} B \wedge C)$$
$$\overset{\text{опр. } 43\,(1)}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies (y \vDash_{-t} B \dot\vee y \vDash_{-t} C))$$
$$\overset{\text{опр. } 43\,(7)}{\iff} x \vDash_f B \wedge C$$
$$\overset{\text{опр. } P_f^{B\wedge C}}{\iff} x \in P_f^{B\wedge C}$$

Пусть $x \in r_2(P_1^{B\wedge C})$. Выпишем следующие соотношения:

$$x \in r_2(P_1^{B\wedge C}) \overset{\text{опр. } r_2}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies y \notin P_1^{B\wedge C})$$
$$\overset{\text{опр. } P_1^{B\wedge C}}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies y \vDash_{-1} B \wedge C)$$
$$\overset{\text{опр. } 43\,(3)}{\iff} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies (y \vDash_{-1} B \dot\vee y \vDash_{-1} C))$$
$$\overset{\text{опр. } 43\,(8)}{\iff} x \vDash_0 B \wedge C$$
$$\iff x \in P_0^{B\wedge C}$$

Далее предположим, что $x \in l_1(P_f^{B\wedge C})$. Получаем

$$
\begin{aligned}
x \in l_1(P_f^{B\wedge C}) &\overset{\text{опр. } l_1}{\iff} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \notin P_f^{B\wedge C}) \\
&\overset{\text{опр. } P_f^{B\wedge C}}{\iff} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \models_{-f} B \wedge C) \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(7)}{\iff} \forall y(x \lhd_1 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_1 z \ \& \ (z \models_t B \ \& \ z \models_t C))) \\
&\overset{\text{лем. } 21\,(1)}{\iff} x \in r_1(l_1(P_t^B)) \ \& \ x \in r_1(l_1(P_t^C)) \\
&\overset{\text{и.д.}}{\iff} x \in P_t^B \ \& \ x \in P_t^C \\
&\overset{\text{опр. } P_t^B, P_t^C}{\iff} x \models_t B \ \& \ x \models_t C \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(1)}{\iff} x \models_t B \wedge C
\end{aligned}
$$

Остается рассмотреть подслучай $x \in l_2(P_f^{B\wedge C})$. Здесь имеют место следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
x \in l_2(P_0^{B\wedge C}) &\overset{\text{опр. } l_2}{\iff} \forall y(x \lhd_2 y \implies y \notin P_0^{B\wedge C}) \\
&\overset{\text{опр. } P_0^{B\wedge C}}{\iff} \forall y(x \lhd_2 y \implies y \models_{-0} B \wedge C) \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(8)}{\iff} \forall y(x \lhd_2 y \implies \exists z(y \blacktriangleleft_2 z \ \& \ (z \models_1 B \ \& \ z \models_1 C))) \\
&\overset{\text{лем. } 21\,(3)}{\iff} x \in r_2(l_2(P_1^B)) \ \& \ x \in r_2(l_2(P_1^C)) \\
&\overset{\text{и.д.}}{\iff} x \in P_1^B \ \& \ x \in P_1^C \\
&\overset{\text{опр. } P_1^B, P_1^C}{\iff} x \models_1 B \ \& \ x \models_1 C \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(3)}{\iff} x \models_1 B \wedge C
\end{aligned}
$$

Случай $A = B \vee C$. Пусть $x \in r_1(P_t^{B\vee C})$. Тогда получаем следующие эквиваленции:

$$
\begin{aligned}
x \in r_1(P_t^{A\vee B}) &\overset{\text{опр. } r_1}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \notin P_t^{B\vee C}) \\
&\overset{\text{опр. } P_t^{B\vee C}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-t} B \vee C) \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(5)}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z(y \lhd_1 z \ \& \ (z \vDash_f B \ \& \ z \vDash_f C))) \\
&\overset{\text{лем. } 21\,(2)}{\Longleftrightarrow} x \in l_1(r_1(P_f^B)) \ \& \ x \in l_1(r_1(P_f^C)) \\
&\overset{\text{и.д.}}{\Longleftrightarrow} x \in P_f^B \ \& \ x \in P_f^C \\
&\overset{\text{опр. } P_f^B, P_f^C}{\Longleftrightarrow} x \vDash_f B \ \& \ x \vDash_f C \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(2)}{\Longleftrightarrow} x \vDash_f B \vee C
\end{aligned}
$$

Допустим, что $x \in r_2(P_1^{B\vee C})$. Тогда имеем следующие утверждения:

$$
\begin{aligned}
x \in r_2(P_1^{A\vee B}) &\overset{\text{опр. } r_2}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies y \notin P_1^{B\vee C}) \\
&\overset{\text{опр. } P_1^{B\vee C}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies y \vDash_{-1} B \vee C) \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(6)}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies \exists z(y \lhd_2 z \ \& \ (z \vDash_0 B \ \& \ z \vDash_0 C))) \\
&\overset{\text{лем. } 21\,(4)}{\Longleftrightarrow} x \in l_2(r_2(P_0^B)) \ \& \ x \in l_2(r_2(P_0^C)) \\
&\overset{\text{и.д.}}{\Longleftrightarrow} x \in P_0^B \ \& \ x \in P_0^C \\
&\overset{\text{опр. } P_0^B, P_0^C}{\Longleftrightarrow} x \vDash_0 B \ \& \ x \vDash_0 C \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(4)}{\Longleftrightarrow} x \vDash_0 B \vee C
\end{aligned}
$$

Предположим, что $x \in l_1(P_f^{B\vee C})$. Получаем

$$
\begin{aligned}
x \in l_1(P_f^{B\vee C}) &\overset{\text{опр. } l_1}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \notin P_f^{B\vee C}) \\
&\overset{\text{опр. } P_f^{B\vee C}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} B \vee C) \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(2)}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \lhd_1 y \implies x \vDash_{-f} B \dot{\vee} x \vDash_{-f} C) \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(5)}{\Longleftrightarrow} x \vDash_t B \vee C
\end{aligned}
$$

Остается проверить подслучай $x \in l_2(P_0^{B\vee C})$. Получаем

$$\begin{aligned}
x \in l_2(P_0^{B\vee C}) &\overset{\text{опр. } l_2}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \lhd_2 y \implies y \notin P_0^{B\vee C}) \\
&\overset{\text{опр. } P_0^{B\vee C}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \lhd_2 y \implies y \vDash_{-0} B \vee C) \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(4)}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \lhd_2 y \implies x \vDash_{-0} B \dot{\vee} x \vDash_{-0} C) \\
&\overset{\text{опр. } 43\,(6)}{\Longleftrightarrow} x \vDash_1 B \vee C
\end{aligned}$$

□

Следствие 22.1. *Для всякой $A \in \mathtt{For}_{oe}$ верны следующие утверждения:*

(1) P_t^A *является l_1-стабильным, то есть $P_t^A = l_1(r_1(P_t^A))$,*

(2) P_1^A *является l_2-стабильным, то есть $P_1^A = l_2(r_2(P_1^A))$,*

(3) P_f^A *является r_1-стабильным, то есть $P_f^A = r_1(l_1(P_f^A))$,*

(4) P_0^A *является r_2-стабильным, то есть $P_0^A = r_2(l_2(P_0^A))$.*

Наличие l_1-стабильности у области истинности P_t^A означает, что для произвольной точки $x \in P_t^A$ верно, что в любой, достижимой из x точке y, формула A окажется не-ложной (в смысле f), то есть $y \notin P_f^A$. Аналогично r_1-стабильность множества P_f^A означает, что для любой точки $x \in P_f^A$ верно, что в любой, достижимой из x точке y, формула A должна быть не-истинной (в смысле t), то есть $y \notin P_f^A$. Сходным образом понимаются l_2- и r_2-стабильности соответствующих множеств. Сформулируем это наблюдение в виде леммы.

Лемма 23. *Пусть $\mathscr{F}$ есть $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкала с носителем W. Тогда для всякого $x \in W$ и всякой $A \in \mathtt{For}_{oe}$:*

(1) $x \vDash_t A \iff \forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} A)$,

(2) $x \vDash_1 A \iff \forall y(x \lhd_2 y \implies y \vDash_{-0} A)$,

(3) $x \vDash_f A \iff \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-t} A)$,

(4) $x \vDash_0 A \iff \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-1} A)$.

Доказательство. Выпишем доказательство для случая (1) (для других случаев рассуждение проводится аналогично).

$$
\begin{aligned}
x \vDash_t A &\overset{\text{опр. } P_t^A}{\iff} x \in P_t^A \\
&\overset{\text{сл. 22.1}}{\iff} x \in l_1(r_1(P_t^A)) \\
&\overset{\text{опр. } l_1}{\iff} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \notin r_1(P_t^A)) \\
&\overset{\text{лем. 22}}{\iff} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \notin P_f^A) \\
&\overset{\text{опр. } P_f^A}{\iff} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} A)
\end{aligned}
$$

Замечание 7. Стабильность множеств истинности и ложности формул не дает, однако, сведения определений отношений истинности или ложности дизъюнктивных и конъюнктивных формул в точках $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкалы к стандартным. К примеру, если имеет место $x \vDash_t A$, то, конечно же $x \vDash_t A \vee B$. Однако, информация о том, что имеет место $x \vDash_t A \vee B$ не дает никакой возможности утверждать ни $x \vDash_t A$, ни $x \vDash_t B$. Действительно, из $x \vDash_t A \vee B$ известно лишь, что $\forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} A \dot{\vee} y \vDash_{-f} B)$, но для $x \vDash_t A$ ($x \vDash_t B$) требуется более сильное утверждение $\forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} A)$ ($\forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} B)$). $\lhd$

$\square$

Определение 44. Пусть $A, B \in \mathtt{For}_{oe}$. Зададим семейство отношений логического следования:

(1) $A \vDash_{oe}^{t} B$, если для всякой $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкалы и всякого элемента x ее носителя $x \vDash_t A \implies x \vDash_t B$, $\quad x \vDash_f B \implies x \vDash_f A$,

(2) $A \vDash_{oe}^{1} B$, если для всякой $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкалы и всякого элемента x ее носителя $x \vDash_1 A \implies x \vDash_t B$, $\quad x \vDash_0 B \implies x \vDash_f A$,

(3) $A \vDash_{oe}^{nd st} B$, если для всякой $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкалы и всякого элемента x ее носителя $x \vDash_t A \implies x \vDash_t B$, $\quad x \vDash_1 A \implies x \vDash_1 B$,
$x \vDash_f B \implies x \vDash_f A$, $\quad x \vDash_0 B \implies x \vDash_0 A$.

$\lhd$

§6. Система $\mathbf{NDst}_{oe}^{t}$

Дальнейшая задача состоит в формализации отношений логического следования, определенных в конце предыдущего параграфа. Естественно ожидать, что аксиомати-

Таблица 5. Дедуктивные постулаты системы $\mathbf{NDst}^t_{oe}$.

(C1) $A \wedge B \vdash_t A$,	(C5) $\neg_1\neg_1 A \dashv\vdash_t A$,
(C2) $A \wedge B \vdash_t B$,	(C6) $\neg_t\neg_t A \dashv\vdash_t A$,
(C3) $A \vdash_t A \vee B$,	(C7) $A \dashv\vdash_t \neg_1 A$.
(C4) $B \vdash_t A \vee B$,	
(CR1) $A \vdash_t B, A \vdash_t C/\ A \vdash_t B \wedge C$	(CR3) $A \vdash_t B, B \vdash_t C/\ A \vdash_t C$
(CR2) $A \vdash_t C, B \vdash_t C/\ A \vee B \vdash_t C$	(CR4) $A \vdash_t B/\ \neg_t B \vdash_t \neg_t A$

зация отношений (1) и (2) представляет собой более простую задачу, чем построение исчисления бинарного следования, аксиоматизирующего отношение (3). Сформулируем далее систему $\mathbf{NDst}^t_{oe}$ и исчисление бинарного следования для нее.

В качестве формализованного языка по-прежнему используется язык $\mathscr{L}^{oe}$. Реляционная семантика этого языка описана в предыдущем параграфе. Приведем перечень дедуктивных постулатов, образующих исчисление бинарного следования для системы $\mathbf{NDst}^t_{oe}$ (см. таблицу 5).

6.1 Реляционная непротиворечивость недистрибутивной системы бинарного следования $\mathbf{NDst}^t_{oe}$

Лемма 24. *Для всякой аксиомы вида $A \vdash_t B$ системы $\mathbf{NDst}^t_{oe}$ верно, что $A \vDash^t_{oe} B$. Для всякого правила вывода $A \vdash_t B/C \vdash_t D$ ($A \vdash_t B_1, A_1 \vdash_t B_1/C \vdash_t B$) системы $\mathbf{NDst}^t_{oe}$ верно, что $A \vDash^t_{oe} B \implies C \vDash^t_{oe} D$ ($A \vDash^t_{oe} B_1, A_1 \vDash^t_{oe} B_1/C \vDash^t_{oe} B$).*

Доказательство.

(C1a) $x \vDash_t A \wedge B \overset{\text{опр. 43 (1)}}{\Longrightarrow} x \vDash_t A \ \&\ x \vDash_t B \implies x \vDash_t A$

(C1b) $x \vDash_f A \overset{\text{лем. 23}}{\Longrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-t} A) \implies$
$\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-t} A \dot\vee y \vDash_{-t} B) \overset{\text{опр. 43,(7)}}{\Longrightarrow} x \vDash_f A \wedge B$

(C3a) $x \vDash_t A \overset{\text{лем. 23}}{\Longrightarrow} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} A) \implies$
$\forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} A \dot\vee y \vDash_{-f} B) \overset{\text{опр. 43 (5)}}{\Longrightarrow} x \vDash_t A \vee B$

(C3b) $x \vDash_f A \vee B \overset{\text{опр. 43 (2)}}{\Longrightarrow} x \vDash_f A \ \&\ x \vDash_f B \implies x \vDash_f A$

(C6a) $$\begin{aligned} x \vDash_t \neg_t\neg_t A &\overset{\text{опр. } 43\,(9)}{\Longleftrightarrow} \mathtt{N}_t(x) \vDash_f \neg_t A \\ &\overset{\text{опр. } 43\,(10)}{\Longleftrightarrow} \forall y(\mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_2 y \implies \mathtt{N}_t(y) \vDash_{-f} A) \\ &\overset{\forall_\text{и}/\forall_\text{в}}{\Longleftrightarrow} \mathtt{N}_t(x) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(y) \implies \mathtt{N}_t(\mathtt{N}_t(y)) \vDash_{-f} A \\ &\overset{\text{опр. } 40}{\Longleftrightarrow} x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} A \\ &\overset{\forall_\text{и}/\forall_\text{в}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} A) \\ &\overset{\text{лем. } 23}{\Longleftrightarrow} x \vDash_t A \end{aligned}$$

(C6b) (1) $x \vDash_f A$ — допущение

(2) $x \blacktriangleleft_1 y$ — доп. допущение

(3) $\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-t} A)$ — (1) лемма 23

(4) $\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z(y \lhd_1 z \;\&\; z \vDash_f A))$ — (3) лемма 23

(5) $x \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z(y \lhd_1 z \;\&\; z \vDash_f A)$ — (4) исключение $\forall$

(6) $\exists z(y \lhd_1 z \;\&\; z \vDash_f A)$ — (2), (5) исключение $\implies$

(7) $y \lhd_1 z \;\&\; z \vDash_f A$ — (6) исключение $\exists$ (z а.о., z огр. y)

(8) $y \lhd_1 z$ — (7) исключение $\&$

(9) $z \vDash_f A$ — (7) исключение $\&$

(10) $\mathtt{N}_t(y) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(z)$ — (8) определение 40

(11) $\mathtt{N}_t(\mathtt{N}_t(z)) \vDash_f A$ — (9) определение 40

(12) $\mathtt{N}_t(y) \blacktriangleleft_1 \mathtt{N}_t(z) \;\&\; \mathtt{N}_t(\mathtt{N}_t(z)) \vDash_f A$ — (10), (11) введение $\&$

(13) $\exists z_1(\mathtt{N}_t(y) \blacktriangleleft_1 z_1 \;\&\; \mathtt{N}_t(z_1) \vDash_f A)$ — (12) введение $\exists$

(14) $\mathtt{N}_t(y) \vDash_{-f} \neg_t A$ — (13) определение 43

(15) $x \blacktriangleleft_1 y \implies \mathtt{N}_t(y) \vDash_{-f} \neg_t A$ — (14) введение $\implies$

(16) $\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \mathtt{N}_t(y) \vDash_{-f} \neg_t A)$ — (15) введение $\forall$

(17) $x \vDash_f \neg_t\neg_t A$ — (16) определение 43

(C6c) (1) $x \vDash_f \neg_t\neg_t A$ — допущение

	(2)	$x \blacktriangleleft_1 y$	доп. допущение
	(3)	$\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \mathtt{N}_t(y) \models_{-f} \neg_t A)$	(1) опр. 43 (10)
	(4)	$\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z(\mathtt{N}_t(y) \blacktriangleleft_1 z \ \&\ \mathtt{N}_t(z) \models_f A))$	(3) опр. 43 (10)
	(5)	$x \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z(\mathtt{N}_t(y) \blacktriangleleft_1 z \ \&\ \mathtt{N}_t(z) \models_f A)$	(4) исключение $\forall$
	(6)	$\exists z(\mathtt{N}_t(y) \blacktriangleleft_1 z \ \&\ \mathtt{N}_t(z) \models_f A)$	(2), (5) исключение $\implies$
	(7)	$\mathtt{N}_t(y) \blacktriangleleft_1 z \ \&\ \mathtt{N}_t(z) \models_f A$	(6) исключение $\exists$ (z а.о., z огр. y)
	(8)	$\mathtt{N}_t(y) \blacktriangleleft_1 z$	(7) исключение &
	(9)	$\mathtt{N}_t(z) \models_f A$	(7) исключение &
	(10)	$y \lhd_1 \mathtt{N}_t(z)$	(8) определение 40
	(11)	$y \lhd_1 \mathtt{N}_t(z) \ \&\ \mathtt{N}_t(z) \models_f A$	(9), (10) введение &
	(12)	$\exists z_1(y \lhd_1 z_1 \ \&\ z_1 \models_f A)$	(11) введение $\exists$
	(13)	$x \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z_1(y \lhd_1 z_1 \ \&\ z_1 \models_f A)$	(12) введение $\implies$
	(14)	$\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \exists z_1(y \lhd_1 z_1 \ \&\ z_1 \models_f A))$	(13) введение $\forall$ (y а.о.)
	(15)	$\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \models_{-t} A)$	лемма 23
	(16)	$x \models_f A$	лемма 23
(CR4)	(1)	$A \models^t_{oe} B$	допущение
	(2)	$x \models_t \neg_t B$	доп. допущение
	(3)	$\mathtt{N}_t(x) \models_f B$	(2) определение 43
	(4)	$\mathtt{N}_t(x) \models_f A$	(1), (3) определение 44
	(5)	$x \models_t \neg_t A$	(4) определение 44
	(6)	$x \models_t \neg_t B \implies x \models_t \neg_t A$	(5) введение $\implies$
	(7)	$x \models_f \neg_t A$	доп. допущение
	(8)	$\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \models_{-f} A)$	(7) определение 43
	(9)	$\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \models_{-f} B)$	(1), (8) определение 44
	(10)	$x \models_f \neg_t B$	(9) определение 43
	(11)	$x \models_f \neg_t A \implies x \models_f \neg_t B$	(10) введение $\implies$
	(12)	$\forall x(x \models_f \neg_t A \implies x \models_f \neg_t B)$	(11) введение $\forall$
	(13)	$\forall x(x \models_t \neg_t B \implies x \models_t \neg_t A)$	(6) введение $\forall$
	(14)	$\neg_t B \models^t_{oe} \neg_t A$	(12), (13) определение 44
(CR2)	(1)	$A \models^t_{oe} C$	допущение
	(2)	$B \models^t_{oe} C$	допущение

(3)	$x \vDash_t A \vee B$	доп. допущение
(4)	$x \vDash_{-t} C$	доп. допущение
(5)	$\forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} A \dot{\vee} y \vDash_{-f} B)$	(3) определение 43
(6)	$\exists y(x \lhd_1 y \ \& \ y \vDash_f C)$	(4) определение 43
(7)	$x \lhd_1 y \ \& \ y \vDash_f C$	(6) исключение $\exists$ (y а.о., y огр. x)
(8)	$x \lhd_1 y$	(7) исключение &
(9)	$y \vDash_f C$	(7) исключение &
(10)	$x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f} A \dot{\vee} y \vDash_{-f} B$	(5) исключение $\forall$
(11)	$y \vDash_{-f} A \dot{\vee} y \vDash_{-f} B$	(10) исключение $\implies$
(12)	$y \vDash_{-f} A$	доп. допущение
(13)	$y \vDash_{-f} C$	(1), (12) определение 44
(14)	$\dot{\neg}(y \vDash_{-f} A)$	(9), (13) введение $\dot{\neg}$
(15)	$y \vDash_{-f} B$	(11), (14) исключение $\dot{\vee}$
(16)	$y \vDash_{-f} C$	(2), (15) определение 44
(17)	$\dot{\neg}(x \vDash_{-t} C)$	(9), (16) введение $\dot{\neg}$
(18)	$x \vDash_t C$	определение $\vDash_t$
(19)	$x \vDash_t A \vee B \implies x \vDash_t C$	(18) введение $\implies$
(20)	$x \vDash_f C$	доп. допущение
(21)	$x \vDash_f A$	(20) определение 44
(22)	$x \vDash_f B$	(20) определение 44
(23)	$x \vDash_f A \vee B$	(21), (22) определение 43
(24)	$x \vDash_f C \implies x \vDash_f A \vee B$	(23) введение $\implies$
(25)	$\forall x(x \vDash_f C \implies x \vDash_f A \vee B)$	(24) введение $\forall$
(26)	$\forall x(x \vDash_t A \vee B \implies x \vDash_t C)$	(19) введение $\forall$
(27)	$A \vee B \vDash^t_{oe} C$	определение 44

(CR1)

(1)	$A \vDash^t_{oe} B$	допущение
(2)	$A \vDash^t_{oe} C$	допущение
(3)	$x \vDash_t A$	доп. допущение
(4)	$x \vDash_t B$	(1), (3) определение 44
(5)	$x \vDash_t C$	(2), (3) определение 44
(6)	$x \vDash_t B \wedge C$	(4), (5) определение 43
(7)	$x \vDash_t A \implies x \vDash_t B \wedge C$	(6) введение $\implies$

(8)	$x \vDash_f B \wedge C$	доп. допущение
(9)	$x \vDash_{-f} A$	доп. допущение
(10)	$\exists y(x \blacktriangleleft_1 y \ \& \ y \vDash_t A)$	лемма 23
(11)	$x \blacktriangleleft_1 y \ \& \ y \vDash_t A$	исключение $\exists$ (y а.о., y огр. x)
(12)	$x \blacktriangleleft_1 y$	(11) исключение &
(13)	$y \vDash_t A$	(11) исключение &
(14)	$\forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-t} B \dot\vee y \vDash_{-t} C)$	(8) определение 43
(15)	$x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-t} B \dot\vee y \vDash_{-t} C$	(14) исключение $\forall$
(16)	$y \vDash_{-t} B \dot\vee y \vDash_{-t} C$	(12), (15) исключение $\implies$
(17)	$y \vDash_{-t} B$	доп. допущение
(18)	$y \vDash_{-t} A$	(1), (14) определение 44
(19)	$\dot\neg(y \vDash_{-t} B)$	(13), (21) введение $\dot\neg$
(20)	$y \vDash_{-t} C$	(16), (19) исключение $\dot\vee$
(21)	$y \vDash_{-t} A$	(2), (20) определение 44
(22)	$\dot\neg(x \vDash_{-f} A)$	(9), (21), введение $\dot\neg$
(23)	$x \vDash_f A$	(22), определение $\vDash_f$
(24)	$x \vDash_f B \wedge C \implies x \vDash_f A$	(23) введение $\implies$
(25)	$\forall x(x \vDash_f B \wedge C \implies x \vDash_f A)$	(24) введение $\forall$
(26)	$\forall x(x \vDash_t A \implies x \vDash_t B \wedge C)$	(7) введение $\forall$
(27)	$A \vDash^t_{oe} B \wedge C$	(25), (26) определение 44

$\square$

Лемма 25. *Для всяких формул* $A, B \in \mathtt{For}_{oe}$ *верно:*

$$A \vdash_{\mathbf{NDst}^t_{oe}} B \implies A \vDash^t_{oe} B.$$

Доказательство. Стандартное рассуждение индукцией по длине доказательства формульной пары $A \vdash_t B$. $\square$

6.2 Реляционная полнота недистрибутивной системы бинарного следования $\mathbf{NDst}^t_{oe}$

Сначала определим объекты (четверки), которые будут играть роль «возможных миров» в канонической шкале. Назовем их tc-четверками, поскольку в их образовании участвуют как теории, так и контртеории.

Определение 45. tc-четверкой называется кортеж $(\mathscr{T}_t, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_t^\circ, \mathscr{T}_1^\circ)$, где $\mathscr{T}_t$ и $\mathscr{T}_1$ есть $\mathbf{NDst}^t_{oe}$-теории, а $\mathscr{T}_t^\circ$ и $\mathscr{T}_1^\circ$ – $\mathbf{NDst}^t_{oe}$-контртеории такие, что $\mathscr{T}_t \cap \mathscr{T}_t^\circ = \varnothing$ и $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_1^\circ = \varnothing$. tc-четверка называется максимальной, если $\mathscr{T}_t$ является максимальной среди всех теорий, не пересекающихся с $\mathscr{T}_t^\circ$, а $\mathscr{T}_t^\circ$ является максимальной среди всех контртеорий, не пересекающихся с $\mathscr{T}_t$; $\mathscr{T}_1$ является максимальной среди всех теорий, не пересекающихся с $\mathscr{T}_1^\circ$, а $\mathscr{T}_1^\circ$ является максимальной среди всех контртеорий, не пересекающихся с $\mathscr{T}_1$. $\lhd$

Можно сформулировать аналог леммы 11 для tc-четверок.

Лемма 26. *Пусть $(\mathscr{T}_t, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_t^\circ, \mathscr{T}_1^\circ)$ есть tc-четверка, в которой $\mathscr{T}_t$ и $\mathscr{T}_1$ есть $\mathbf{NDst}^t_{oe}$-теории, а $\mathscr{T}_t^\circ$ и $\mathscr{T}_1^\circ$ – $\mathbf{NDst}^t_{oe}$-контртеории. Тогда существует максимальная tc-четверка $(\tilde{\mathscr{T}}_t, \tilde{\mathscr{T}}_1, \tilde{\mathscr{T}}_t^\circ, \tilde{\mathscr{T}}_1^\circ)$, такая, что $\mathscr{T}_t \subseteq \tilde{\mathscr{T}}_t$, $\mathscr{T}_1 \subseteq \tilde{\mathscr{T}}_1$, $\mathscr{T}_t^\circ \subseteq \tilde{\mathscr{T}}_t^\circ$ и $\mathscr{T}_1^\circ \subseteq \tilde{\mathscr{T}}_1^\circ$.*

Доказательство леммы аналогично приведенному для 11.

Если x есть некоторая tc-четверка, то элементы соответствующего кортежа снабжаются дополнительными верхними индексами: $(\mathscr{T}_t^x, \mathscr{T}_1^x, \mathscr{T}_t^{\circ x}, \mathscr{T}_1^{\circ x})$. Максимальность tc-четверки можно определить и в терминах включения. Для пары tc-четверок x и y отношение $x \subseteq y$ определяется как покомпонентное включение: $\mathscr{T}_t^x \subseteq \mathscr{T}_t^y$, $\mathscr{T}_1^x \subseteq \mathscr{T}_1^y$, $\mathscr{T}_t^{\circ x} \subseteq \mathscr{T}_t^{\circ y}$ и $\mathscr{T}_1^{\circ x} \subseteq \mathscr{T}_1^{\circ y}$. Максимальная tc-четверка является максимальной по отношению $\subseteq$ на множестве tc-четверок.

Определение 46 (Каноническая шкала)**.** $\mathbf{NDst}^t_{oe}$-канонической шкалой называется кортеж $\mathscr{F}^c = (W, \lhd_1^c, \lhd_2^c, \blacktriangleleft_1^c, \blacktriangleleft_2^c, \mathtt{N}_t^c, \mathtt{N}_1^c)$, в котором W есть множество максимальных tc-четверок и для всяких $x, y \in W$

(1) $x \lhd_1^c y \iff \mathscr{T}_t^x \subseteq \mathscr{T}_t^y$,

(2) $x \lhd_2^c y \iff \mathscr{T}_1^x \subseteq \mathscr{T}_1^y$,

(3) $x \blacktriangleleft_1^c y \iff \mathscr{T}_t^{\circ x} \subseteq \mathscr{T}_t^{\circ y}$,

(4) $x \blacktriangleleft_2^c y \iff \mathscr{T}_1^{\circ x} \subseteq \mathscr{T}_1^{\circ y}$,

(5) $\mathtt{N}_t^c(x) = (\neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x}, \mathscr{T}_1^x, \neg_t \mathscr{T}_t^x, \mathscr{T}_1^{\circ x})$,

(6) $\mathtt{N}_1^c(x) = (\mathscr{T}_t^x, \neg_t \mathscr{T}_1^{\circ x}, \mathscr{T}_t^{\circ x}, \neg_t \mathscr{T}_1^x)$.

$\lhd$

Убедимся, что унарные операции $\mathtt{N}_t^c$ и $\mathtt{N}_1^c$ определены корректно, то есть для любой канонической шкалы $\mathscr{F}^c$ и любого элемента x ее множества-носителя верно, что $\mathtt{N}_t^c(x)$

и $\mathtt{N}_1^c(x)$ являются максимальными tc-четверками. Во-первых, заметим, что отрицание $\neg_t$ в дедуктивной системе $\mathbf{NDst}_{oe}^t$ обладает всеми свойствами, которые требуются для применения леммы 8, то есть $\neg_t$ переводит теорию в контртеорию и наоборот.

Далее нужно проверить пустоту пересечения и максимальность. Для доказательства пустоты пересечения нужно проверить, что для $\mathtt{N}_t^c(x)$ верно $\neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x} \cap \neg_t \mathscr{T}_t^x = \varnothing$, а для $\mathtt{N}_1^c(x)$ верно $\neg_t \mathscr{T}_1^{\circ x} \cap \neg_t \mathscr{T}_1^x = \varnothing$. Рассмотрим случай $\mathtt{N}_t^c(x)$. Допустим, что x есть максимальная tc-четверка и $\neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x} \cap \neg_t \mathscr{T}_t^x \neq \varnothing$. Тогда найдется формула $A \in \neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x} \cap \neg_t \mathscr{T}_t^x$. Пусть $A = \neg_t B$ для некоторой формулы B. Тогда $B \in \mathscr{T}_t^{\circ x} \cap \mathscr{T}_t^x$, что противоречит допущению. Если же формула A не начинается со знака $\neg_t$, то $\neg_t A \in \mathscr{T}_t^{\circ x} \cap \mathscr{T}_t^x$.

Пусть $\mathtt{N}_t^c(x)$ не является максимальной. Тогда существует tc-четверка y, отличная от $\mathtt{N}_t^c(x)$ такая, что $\mathtt{N}_t^c(x) \subseteq y$. Заметим, что $\mathtt{N}_t^c(x)$ не отличается от x во втором и четвертом компоненте. Пусть имеет место строгое включение по первому компоненту: $\neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x} \subset \mathscr{T}_t^y$. Применяя лемму 9, получаем $\mathscr{T}_t^{\circ x} \subset \neg \mathscr{T}_t^y$, что невозможно в силу того, что x является максимальной tc-четверкой. Таким же образом невозможно строгое включение по третьему компоненту. Рассуждения для унарной операции $\mathtt{N}_1^c$ аналогичны.

Лемма 27. *Пусть $\mathscr{F}^c$ есть $\mathbf{NDst}_{oe}^t$-каноническая шкала. Тогда $\mathscr{F}^c$ есть $\mathbf{NDst}_{oe}$-шкала.*

Доказательство. Необходимо проверить наличие свойств (1)–(5) из определения 40 у канонической шкалы $\mathscr{F}^c$.

Проверка свойств (1) и (2) сводится к тому, чтобы установить справедливость равенств $\mathscr{T}_i = \neg_t \neg_t \mathscr{T}_i$ и $\mathscr{T}_i^\circ = \neg_t \neg_t \mathscr{T}_i^\circ$ Для всякой теории $\mathscr{T}_i$ и всякой контртеории $\mathscr{T}_i^\circ$, где $i \in \{t, 1\}$.

Возьмем произвольную теорию $\mathscr{T}_i$ и произвольную формулу $A \in \mathscr{T}_i$. Пусть $A \neq \neg_t B$ ни для какой B. Тогда $\neg_t A \in \neg_t \mathscr{T}_i = \mathscr{T}_i^\circ$. Далее $A \in \neg_t \neg_t \mathscr{T}_i = \neg_t \mathscr{T}_i^\circ$ по построению $\neg_t \neg_t \mathscr{T}_i$. Пусть, в ином случае, $A = \neg_t B$ для какой-то формулы B. Тогда $B \in \neg_t \mathscr{T}_i$. Сначала допустим, что $B \neq \neg_t C$ ни для какой C. Тогда $\neg_t B \in \mathscr{T}_i$, то есть $A \in \mathscr{T}_i$. Если же окажется, что $B = \neg_t C$ для какой-то C, то $C \in \mathscr{T}_i$. Однако тогда и $\neg_t \neg_t C \in \mathscr{T}_i$, то есть $A \in \mathscr{T}_i$. Таким образом, $\mathscr{T}_i \subseteq \neg_t \neg_t \mathscr{T}_i$.

Обратно, допустим, что $A \in \neg_t \neg_t \mathscr{T}_i$. Сначала рассмотрим ситуацию, когда $A \neq \neg_t B$ ни для какой B. В таком случае $\neg_t A \in \neg_t \mathscr{T}_i$. Тогда $A \in \mathscr{T}_i$. Пусть, иначе, $A = \neg_t B$ для какой-то B. Тогда $B \in \neg_t \mathscr{T}_i$ и при этом B может иметь, а может и не иметь внешнего $\neg_t$. В первом случае $B = \neg_t C$ для некоторой формулы C, тогда

$C \in \mathscr{T}_i$, а значит и $\neg_t\neg_t C = A \in \mathscr{T}_i$. Во втором случае $\neg_t B = A \in \mathscr{T}_i$. Таким образом, $\neg_t\neg_t \mathscr{T}_i \subseteq \mathscr{T}_i$. Проверка случая с контртеориями аналогична.

(3) Пусть $x = (\mathscr{T}_t^x, \mathscr{T}_1^x, \mathscr{T}_t^{\circ x}, \mathscr{T}_1^{\circ x})$. Тогда $\mathtt{N}_1^c(x) = (\mathscr{T}_t^x, \neg_1 \mathscr{T}_1^{\circ x}, \mathscr{T}_t^{\circ x}, \neg_1 \mathscr{T}_1^x)$, $\mathtt{N}_t^c(\mathtt{N}_1^c(x)) = (\neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x}, \neg_1 \mathscr{T}_1^{\circ x}, \neg_t \mathscr{T}_t^x, \neg_1 \mathscr{T}_1^x) = \mathtt{N}_1^c(\mathtt{N}_t^c(x))$.

(4) Допустим, что $\mathtt{N}_t^c(x) \lhd_1^c \mathtt{N}_1^c(y)$. Это означает, что $\neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x} \subseteq \mathscr{T}_t^y$, поскольку отношение $\lhd^c$ определено на первых компонентах tc-четверок, а первый компонент $\mathtt{N}_t^c(x)$ есть $\mathscr{T}_t^{\circ x}$, в то время, как первый компонент $\mathtt{N}_1^c(y)$ есть $\mathscr{T}_t^y$. Пользуясь леммой 9, получаем включение$\neg_t\neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x} \subseteq \neg_t \mathscr{T}_t^y$, которое можно переписать как $\mathscr{T}_t^{\circ x} \subseteq \neg_t \mathscr{T}_t^y$, принимая во внимание равенство $\mathscr{T}_i^{\circ x} = \neg_t\neg_t \mathscr{T}_i^{\circ x}$. Полученное включение означает, что третий компонент tc-четверки x включен в третий же компонет tc-четверки $\mathtt{N}_t^c(y)$. Заметим также, что $\mathtt{N}_1^c(x)$ не отличается от x в третьем компоненте. Таким образом, $\mathtt{N}_1^c(x) \blacktriangleleft_1^c \mathtt{N}_t^c(y)$.

Обратно, предположим, что $\mathtt{N}_1^c(x) \blacktriangleleft_1^c \mathtt{N}_t^c(y)$. В этом случае получаем включение по третьему компоненту соответствующих tc-четверок. Третий компонент $\mathtt{N}_1^c(x)$ есть $\mathscr{T}_t^{\circ x}$, тогда как третий компонент $\mathtt{N}_t^c(y)$ есть $\neg_t \mathscr{T}_t^y$, то есть $\mathscr{T}_t^{\circ x} \subseteq \neg_t \mathscr{T}_t^y$. Вновь применяя лемму 9, получаем $\neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x} \subseteq \neg_t\neg_t \mathscr{T}_t^y$, то есть $\neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x} \subseteq \mathscr{T}_t^y$. Последнее включение обосновывает утверждение $\mathtt{N}_t^c(x) \lhd_1^c \mathtt{N}_1^c(y)$.

Проверка для (5) также опирается на лемму 9. Пусть $x \lhd_1 y$. Это означает, что $\mathscr{T}_t^x \subseteq \mathscr{T}_t^y$. Применяя указанную лемму, получаем $\neg_t \mathscr{T}_t^x \subseteq \neg_t \mathscr{T}_t^y$, то есть включение по третьим компонентам пар $\mathtt{N}_t^c(x)$ и $\mathtt{N}_t^c(y)$. Таким образом, $\mathtt{N}_t^c(x) \blacktriangleleft^c \mathtt{N}_t^c(y)$, соотношение (5) обосновано. □

В некоторых случаях для обозначения компонентов элемента $\mathtt{N}_t^c(x)$ канонической шкалы удобно пользоваться нотацией $\mathscr{T}_t^{\mathtt{N}_t^c(x)}$, $\mathscr{T}_1^{\mathtt{N}_t^c(x)}$, $\mathscr{T}_t^{\circ\mathtt{N}_t^c(x)}$ и $\mathscr{T}_1^{\circ\mathtt{N}_t^c(x)}$. Аналогично и для элемента $\mathtt{N}_1^c(x)$. Следующая лемма фиксирует практически очевидные равенства, связанные с данными обозначениями. Очевидно также и следствие леммы.

Лемма 28. *Пусть $\mathscr{F}^c$ есть $\mathbf{NDst}_{oe}^t$-каноническая шкала с носителем W и $x \in W$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{T}_t^{\mathtt{N}_t^c(x)} = \neg_t \mathscr{T}_t^{\circ x}$,

(2) $\mathscr{T}_1^{\mathtt{N}_t^c(x)} = \mathscr{T}_1^x$,

(3) $\mathscr{T}_t^{\circ\mathtt{N}_t^c(x)} = \neg_t \mathscr{T}_t^x$,

(4) $\mathscr{T}_1^{\circ\mathtt{N}_t^c(x)} = \mathscr{T}_1^{\circ x}$,

(5) $\mathscr{T}_t^{\mathtt{N}_1^c(x)} = \mathscr{T}_t^x$,

(6) $\mathscr{T}_1^{\mathtt{N}_1^c(x)} = \neg_t \mathscr{T}_1^x$,

(7) $\mathscr{T}_t^{\circ\mathtt{N}_1^c(x)} = \mathscr{T}_t^{\circ x}$,

(8) $\mathscr{T}_1^{\circ\mathtt{N}_1^c(x)} = \neg_t \mathscr{T}_1^x$.

Следствие 28.1. *Для всякой* $\mathbf{NDst}^t_{oe}$*-канонической шкалы с носителем* W*, всякого* $x \in W$ *и всякой* $B \in \mathtt{For}_{oe}$ *справедливы следующие утверждения :*

(1) $B \in \mathscr{T}^x_t \iff \neg_t B \in \mathscr{T}^{\circ \mathtt{N}^c_t(x)}_t$, (9) $B \in \mathscr{T}^x_1 \iff \neg_t B \in \mathscr{T}^{\circ \mathtt{N}^c_1(x)}_1$,

(2) $B \in \mathscr{T}^{\circ x}_t \iff \neg_t B \in \mathscr{T}^{\mathtt{N}^c_t(x)}_t$, (10) $B \in \mathscr{T}^{\circ x}_1 \iff \neg_t B \in \mathscr{T}^{\mathtt{N}^c_1(x)}_1$,

(3) $B \in \mathscr{T}^x_1 \iff B \in \mathscr{T}^{\mathtt{N}^c_t(x)}_1$, (11) $B \in \mathscr{T}^x_t \iff B \in \mathscr{T}^{\mathtt{N}^c_1(x)}_t$,

(4) $B \in \mathscr{T}^{\circ x}_1 \iff B \in \mathscr{T}^{\circ \mathtt{N}^c_t(x)}_1$, (12) $B \in \mathscr{T}^{\circ x}_t \iff B \in \mathscr{T}^{\circ \mathtt{N}^c_1(x)}_t$,

(5) $B \in \mathscr{T}^{\mathtt{N}^c_t(x)}_t \iff \neg_t B \in \mathscr{T}^{\circ x}_t$, (13) $B \in \mathscr{T}^{\mathtt{N}^c_1(x)}_1 \iff \neg_t B \in \mathscr{T}^{\circ x}_1$,

(6) $B \in \mathscr{T}^{\circ \mathtt{N}^c_t(x)}_t \iff \neg_t B \in \mathscr{T}^x_t$, (14) $B \in \mathscr{T}^{\circ \mathtt{N}^c_1(x)}_1 \iff \neg_t B \in \mathscr{T}^x_1$,

(7) $B \in \mathscr{T}^{\mathtt{N}^c_1(x)}_t \iff B \in \mathscr{T}^x_t$, (15) $B \in \mathscr{T}^{\mathtt{N}^c_t(x)}_1 \iff B \in \mathscr{T}^x_1$,

(8) $B \in \mathscr{T}^{\circ \mathtt{N}^c_1(x)}_t \iff B \in \mathscr{T}^{\circ x}_t$, (16) $B \in \mathscr{T}^{\circ \mathtt{N}^c_t(x)}_1 \iff B \in \mathscr{T}^{\circ x}_1$.

Сформулируем и докажем весьма полезную лемму, в которой устанавливается, что теории и контртеории в канонической шкале обладают аналогами свойств стабильности в обычной шкале. Очевидным является тот факт, что формула A, лежащая в некоторой теории $\mathscr{T}$ будет также лежать и в любом ее расширении $\mathscr{T}'$ и не окажется в $\mathscr{T}^{\circ\prime}$ в силу того, что пересечение этих двух множеств пусто. Однако верно также и обратное: если при любом расширении $\mathscr{T}'$ теории $\mathscr{T}$ оказывается, что формула A не содержится в $\mathscr{T}^{\circ\prime}$, то A содержится в $\mathscr{T}$.

Лемма 29. *Пусть* $\mathscr{F}^c$ *есть* $\mathbf{NDst}^t_{oe}$*-каноническая шкала с носителем* W*. Для всякого* $x \in W$ *и всякой* $A \in \mathtt{For}_{oe}$ *верно:*

(1) $A \in \mathscr{T}^x_t \iff \forall y(x \lhd_1 y \implies A \notin \mathscr{T}^{\circ y}_t)$,

(2) $A \in \mathscr{T}^x_1 \iff \forall y(x \lhd_2 y \implies A \notin \mathscr{T}^{\circ y}_1)$,

(3) $A \in \mathscr{T}^{\circ x}_t \iff \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies A \notin \mathscr{T}^y_t)$,

(4) $A \in \mathscr{T}^{\circ x}_1 \iff \forall y(x \blacktriangleleft_2 y \implies A \notin \mathscr{T}^y_1)$.

Доказательство. Покажем для случая (1). Утверждение слева направо очевидно, поскольку формула A содержится в любом расширении теории $\mathscr{T}^x_t$, а пересечение любого такого расширения со своей контртеорией пусто.

Предположим, что $A \notin \mathscr{T}^x_t$. Тогда нужно убедиться, что найдется такой y, для которого $A \in \mathscr{T}^{\circ y}_t$ и $\mathscr{T}^x_t \subseteq \mathscr{T}^y_t$. Если $A \in \mathscr{T}^{\circ x}_t$, то утверждение доказано, поскольку $\mathscr{T}^x_t \subseteq \mathscr{T}^x_t$. В противном случае построим контртеорию, порожденную формулой A

как множество $\{B\colon B \vdash^t A\}$. Это множество будет замкнуто и относительно $\vee$, поскольку $C \vdash^t A$ и $D \vdash^t A$ влечет $C \vee D \vdash^t A$. Кроме того, это множество не имеет общих элементов с $\mathscr{T}_t^x$. $\square$

Перейдем к определению отношения истинности (неистинности, ложности и неложности) между точками канонической модели и формулами языка $\mathtt{For}_{oe}$.

Определение 47. Пусть $\mathscr{F}^c$ есть $\mathbf{NDst}_{oe}^t$-каноническая шкала с носителем W. Определим следующие отношения для всяких $x \in W$, $p \in \mathtt{Var}$:

(1) $x \vDash_t^c p \iff p \in \mathscr{T}_t^x$,

(2) $x \vDash_1^c p \iff p \in \mathscr{T}_1^x$,

(3) $x \vDash_f^c p \iff p \in \mathscr{T}_t^{\circ x}$,

(4) $x \vDash_0^c p \iff p \in \mathscr{T}_1^{\circ x}$,

(5) $x \vDash_{u_t}^c p \notin \mathscr{T}_t^x \ \& \ p \notin \mathscr{T}_t^{\circ x}$,

(6) $x \vDash_{u_1}^c p \notin \mathscr{T}_1^x \ \& \ p \notin \mathscr{T}_1^{\circ x}$.

и при этом выполнены условия

(1c) $r_1(P_t^p) = P_f^p$ и $l_1(P_f^p) = P_t^p$, где $P_t^p = \{x \mid x \in W \ \& \ x \vDash_t^c p\}$, $P_f^p = \{x \mid x \in W \ \& \ x \vDash_f^c p\}$;

(2c) $r_2(P_1^p) = P_0^p$ и $l_2(P_0^p) = P_1^p$, где $P_1^p = \{x \mid x \in W \ \& \ x \vDash_1^c p\}$, $P_0^p = \{x \mid x \in W \ \& \ x \vDash_0^c p\}$.

$\triangleleft$

Лемма 30. *Отношения $\vDash_i^c$, $i \in \{t, f, u_t, 1, 0, u_1\}$, из определения 47 могут быть расширены на все множество $\mathtt{For}_{oe}$.*

Доказательство. Проводится индукцией по построению формулы. Ниже будут детально выписаны случаи для отношений $\vDash_t^c$ и $\vDash_f^c$. Случай $\vDash_{u_t}^c$ является производным, оставшиеся случаи $\vDash_1^c$, $\vDash_0^c$ и $\vDash_{u_1}^c$ доказываются сходным образом.

Случай $A = \neg_t B$

$$(\alpha)\ x \vDash_t^c \neg_t B \overset{\text{опр. 43}}{\iff} \mathtt{N}_t^c(x) \vDash_f^c B \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \in \mathscr{T}_t^{\circ \mathtt{N}_t^c(x)} \overset{\text{сл. 28.1 (6)}}{\iff} \neg_t B \in \mathscr{T}_t^x$$

$$(\beta)\ \ x \vDash_f^c \neg_t B \overset{\text{опр. 43}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \mathtt{N}_t^c(y) \vDash_{-f}^c B)$$

$$\overset{\text{и.д.}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies B \notin \mathscr{T}_t^{\circ \mathtt{N}_t^c(y)})$$

$$\overset{\text{сл. 28.1 (6)}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies \neg_t B \notin \mathscr{T}_t^{y})$$

$$\overset{\text{лем. 29}}{\Longleftrightarrow} \neg_t B \in \mathscr{T}_t^{\circ x}$$

Случай $A = \neg_1 B$

$$(\gamma)\ \ x \vDash_t^c \neg_1 B \overset{\text{опр. 43}}{\Longleftrightarrow} x \vDash_t^c B$$

$$\overset{\text{и.д.}}{\Longleftrightarrow} B \in \mathscr{T}_t^{x}$$

$$\overset{\text{(C7)}}{\Longleftrightarrow} \neg_1 B \in \mathscr{T}_t^{x}$$

$$(\delta)\ \ x \vDash_f^c \neg_1 B \overset{\text{опр. 43}}{\Longleftrightarrow} x \vDash_f^c B$$

$$\overset{\text{и.д.}}{\Longleftrightarrow} B \in \mathscr{T}_t^{\circ x}$$

$$\overset{\text{(C7)}}{\Longleftrightarrow} \neg_1 B \in \mathscr{T}_t^{\circ x}$$

Случай $A = B \vee C$

$$(\epsilon)\ \ x \vDash_t^c B \vee C \overset{\text{опр. 43}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \lhd_1 y \implies y \vDash_{-f}^c B \mathbin{\dot\vee} y \vDash_{-f}^c C)$$

$$\overset{\text{и.д.}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \lhd_1 y \implies B \notin \mathscr{T}_t^{\circ y} \mathbin{\dot\vee} C \notin \mathscr{T}_t^{\circ y})$$

$$\overset{\text{опр. 32}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \lhd_1 y \implies B \vee C \notin \mathscr{T}_t^{\circ y})$$

$$\overset{\text{лем. 29}}{\Longleftrightarrow} B \vee C \in \mathscr{T}_t^{x}$$

$$(\zeta)\ \ x \vDash_f^c B \vee C \overset{\text{опр. 43}}{\Longleftrightarrow} x \vDash_f^c B \ \ \&\ \ x \vDash_f^c C$$

$$\overset{\text{и.д.}}{\Longleftrightarrow} B \in \mathscr{T}_t^{\circ x} \ \ \&\ \ C \in \mathscr{T}_t^{\circ x}$$

$$\overset{\text{опр. 32}}{\Longleftrightarrow} B \vee C \in \mathscr{T}_t^{\circ x}$$

Случай $A = B \wedge C$

$$(\eta)\ \ x \vDash_t^c B \wedge C \overset{\text{опр. 43}}{\Longleftrightarrow} x \vDash_t^c B \ \ \&\ \ x \vDash_t^c C$$

$$\overset{\text{и.д.}}{\Longleftrightarrow} B \in \mathscr{T}_t^{x} \ \ \&\ \ C \in \mathscr{T}_t^{x}$$

$$\overset{\text{опр. 32, (C1),(C2)}}{\Longleftrightarrow} B \wedge C \in \mathscr{T}_t^{x}$$

$$(\theta)\ \ x \vDash_f^c B \wedge C \overset{\text{опр. 43}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies y \vDash_{-t}^c B \dot\vee \vDash_{-t}^c C)$$

$$\overset{\text{и.д.}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies B \notin \mathscr{T}_t^{y} \mathbin{\dot\vee} C \notin \mathscr{T}_t^{y})$$

$$\overset{\text{опр. 32}}{\Longleftrightarrow} \forall y(x \blacktriangleleft_1 y \implies B \wedge C \notin \mathscr{T}_t^{y})$$

$$\overset{\text{лем. 29}}{\Longleftrightarrow} B \wedge C \in \mathscr{T}_t^{\circ x}$$

$\square$

Лемма 31. *Для всяких формул* $A, B \in \mathtt{For}_{oe}$ *верно:*

$$A \models^{t}_{oe} B \implies A \vdash_{\mathbf{NDst}^{t}_{oe}} B.$$

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть $A \nvdash_{\mathbf{NDst}^{t}_{oe}} B$. Тогда существует $\mathbf{NDst}^{t}_{oe}$-теория $\mathscr{T}$, такая, что $A \in \mathscr{T}$ и $B \notin \mathscr{T}$. Далее нужно построить подходящую tc-четверку, которая содержит $\mathscr{T}$ в качестве первого компонента. Для этого достаточно выбрать контртеорию, не пересекающуюся с $\mathscr{T}$, например, порожденную формулой B. Оставшиеся компоненты четверки всегда можно найти. Таким образом, $\mathbf{NDst}^{t}_{oe}$-каноническая шкала содержит tc-четверку $x = (\mathscr{T}^{x}_{t}, \mathscr{T}^{x}_{1}, \mathscr{T}^{\circ x}_{t}, \mathscr{T}^{\circ x}_{1})$, в которой $\mathscr{T}^{x}_{t} = \mathscr{T}$. По лемме 30 получаем, что $x \models^{c}_{t} A$, но $x \not\models^{c}_{t} B$, что влечет $A \not\models^{t}_{oe} B$. $\square$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ. ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫЕ СИСТЕМЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ОТРИЦАНИЙ

Интерес к исследованию *циклических отрицаний* может происходить из разных источников. Например, циклические отрицания хорошо известны в исследованиях алгебр Поста и их логик [76, 78]. С другой стороны, циклическими отрицаниями также интересовались и в контексте некоторых четырехзначных логик, родственных системе **FDE**. В статье [72] указывается, что первой такой работой можно считать [79], при том, что сама статья [72] посвящена исследованию вопроса о функциональной полноте различных расширений системы **FDE**. В частности было показано, что расширение языка **FDE**, получающееся за счет добавления к нему циклического отрицания из [79], является функционально полной системой связок. Отметим также статью [4], в которой описывается четырехзначная семантика онтоэпистемических истинностных значений и исследуются свойства унарных операций на множестве этих истинностных значений. В заключительной части этой работы предлагаются некоторые другие возможные операции на указанном множестве, которые можно было бы также изучить. Среди них операции, названные в тексте статьи левым и правым сдвигами. По сути дела это и есть циклические отрицания, правда их свойства остались неизученными в рамках данной работы. Четырехзначные системы с циклическими отрицаниями исследовались также в работах [63, 75, 74]. Одна из особенностей унарных операций, рассматриваемых в упомянутых выше работах состоит в их возможности симулировать свойства ряда других, но более распространенных унарных операций, например классического или интуиционистского отрицаний, через композицию. Стоит сказать, что симуляция свойств одних операций через композицию других сама по себе является интересной исследовательской задачей, см., например, [60].

§1. Циклические отрицания и квантовые вычисления

Квантовые вычисления и четырехзначные системы истинностных значений с циклическими отрицаниями на первый взгляд не имеют ничего общего. Это действительно весьма отдаленные друг от друга области исследований, но отдельные идеи из мира квантовых вычислений все же могут быть некоторым образом проинтерпретированы с помощью четырехзначной семантики. В частности, это как раз касается унарных операций, которые циклически проходят все множество истинностных значений. В данном разделе эта связь будет показана более детально.

Следует различать *квантовую логику*, как она изначально строилась в основополагающей работе Г. Биркгофа и Дж. фон Неймана [17] и работах более поздних исследователей 70-х, 80-х годов XX века, и логику, или скорее, логические аспекты, *квантовых вычислений*. Квантовое вычисление представляет собой процесс преобразования информации о состоянии квантовой системы. Само состояние квантовой системы описывается посредством математической модели, которая представляет собой n-мерное гильбертовское пространство, то есть n-мерное векторное пространство над множеством комплексных чисел. Приведем здесь минимальные сведения, касающиеся квантовых вычислений. Более детально изложенный материал содержится, например, в монографии [25] и статьях [24, 27, 36].

В классической теории информации состояние некоторой материальной системы описывается с помощью последовательностей, состоящих из 0 и 1. Сами по себе 0 и 1 являются наиболее элементарными сущностями, *битами*, способными репрезентировать состояние системы. В квантовом мире информация репрезентируется посредством квантовых битов, или *кубитов* (от английского словосочетания “quantum bit”). В отличие от классического случая, когда система может находиться в одном из двух состояний, 1 или 0, квантовая система может пребывать в некотором возможном «промежуточном» состоянии, которое выражается через базисные состояния и вероятности того, что система находится в одном из них. В квантовой теории информации в качестве аналогов 0 и 1 используют единичные векторы $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ соответственно, которые записываются в особой нотации как $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Таким образом, кубит записывается в виде выражения $a|0\rangle+b|1\rangle$, где $|0\rangle$ и $|1\rangle$ суть единичные векторы, представляющие «базисные» состояния системы, а a и b – комплексные числа, *амплитуды*, выражающие вероятности состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответственно. При ненулевых амплитудах говорят, что $|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ есть *суперпозиция* (линейная комбинация) векторов $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Состояния более сложных квантовых систем описываются уже более сложно устроенными выражениями, n-кубитами, образующими n-кубитные системы, которые математически можно получить как произведения однокубитых систем. К примеру, пусть имеется два кубита $|\varphi\rangle = a_1|0\rangle + b_1|1\rangle$ и $|\psi\rangle = a_2|0\rangle + b_2|1\rangle$. Тогда $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = a_1a_2|00\rangle + a_1b_2|01\rangle + a_2b_1|10\rangle + a_2b_2|11\rangle$. Полученное выражение уписывает некоторую 2-кубитную систему.

Преобразования квантовой информации моделируются в свою очередь особыми операциями над n-кубитами, в англоязычной литературе называемыми термином *quantum gates*. Именно эти объекты и дали повод изучать своеобразную логику квантовых вычислений, поскольку в чем-то напоминают булевы функции из классической логики. Для примера рассмотрим так называемый Toffoli gate, обозначим его как T. Данный оператор преобразует тройку единичных векторов таким образом, что $\mathsf{T}(|x,y,z\rangle) = |x,y,xy \oplus z\rangle$, где x, y и z – элементы множества $\{0,1\}$, $|x,y,z\rangle$ есть сокращение для $|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle$, а $\oplus$ есть сумма по модулю 2. Интересными являются случаи, когда $z = 0$, поскольку тогда возникает аналогия с определением конъюнкции в классической логике. Теперь можно определить аналог конъюнкции в квантовых вычислениях следующим образом: $\mathtt{AND}(|x\rangle,|y\rangle) = \mathsf{T}(|x\rangle,|y\rangle,|0\rangle)$. Помимо AND определяются и другие операторы, OR, NOT. Однако особый интерес вызывает специфический «неклассический» оператор, обозначаемый как $\sqrt{\mathtt{NOT}}$, «корень из отрицания». Его интуитивный смысл в том, что применение этого оператора соответствует как бы половине обычного отрицания, то есть $\sqrt{\mathtt{NOT}}(\sqrt{\mathtt{NOT}}(|\varphi\rangle)) = \mathtt{NOT}(|\varphi\rangle)$. Приведем известную цитату из статьи [27]:

> Теперь логики должны предложить новую логическую операцию $\sqrt{\mathtt{NOT}}$. Почему? Потому, что для нее существует точная физическая модель.

С логической точки зрения корень из отрицания представляют собой оператор, обладающий своеобразной памятью: примененный к объекту *истина* дважды, он возвращает *ложь* и обратно. При этом однократное применение операции дает нечто вроде промежуточного истинностного значения. Кроме того, чтобы получить правильное значение после следующего за первым применения операции, нужно некоторым образом «помнить» исходное истинностное значение. Именно здесь уместно использовать то, что обобщенные истинностные значения имеют определенную структуру, чтобы сохранить информацию об исходном истинностном значении. Например, применяя операцию типа корня из отрицания к значению $\mathbf{T}$, можно сначала взять в качестве результата истинностное значение $\mathbf{TU}$. Следующее применение приведет к значению $\mathbf{F}$, далее к $\mathbf{FU}$ и, наконец, обратно к $\mathbf{T}$. Таким образом мы получаем представление квадратного корня в рамках четырехзначной семантики. При этом операция как бы проходит циклом по множеству истинностных значений, то есть является примером, или разновидностью, *циклического отрицания*[14].

Теперь в нашем распоряжении имеется множество обобщенных истинностных значений $\{\mathbf{T}, \mathbf{TU}, \mathbf{F}, \mathbf{FU}\}$ и различные возможности для определения отношения порядка на этом множестве, а также выбор подмножества выделенных значений. Что

[14] Вопрос о корректности использования термина «отрицание» в данном словосочетании является дискуссионным и будет обсуждаться в заключительном параграфе этой главы.

Таблица 6

x	$f_{\sim}(x)$
$\mathbf{T}$	$\mathbf{TU}$
$\mathbf{TU}$	$\mathbf{F}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{FU}$
$\mathbf{FU}$	$\mathbf{T}$

касается выделенных значений, то естественным представляется выбор подмножества $\{\mathbf{T}, \mathbf{TU}\}$. Такой выбор может быть обоснован несколькими соображениями. Во-первых, это множество содержит значение $\mathbf{T}$, то есть как бы истину саму по себе, во вторых, значение $\mathbf{TU}$, которое можно понимать как частичную истину, как содержащее «истинностный след». Немаловажным является и то, что это множество образует один из двух простых фильтров в решетке $4\mathcal{Q}$, описанной ниже.

Далее мы подробно изучим две пропозициональные логики, $\mathbf{CNL_4^2}$ и $\mathbf{CNLL_4^2}$, определяемые четырехзначными матрицами, построенными над только что введенным множеством обобщенных истинностных значений. Хотя эти логики имеют много общего, свойства отрицания в них различны. В частности, эти логики различаются взаимоотношением отрицания и бинарных связок, конъюнкции и дизъюнкции. Начнем с описания четырехзначных матриц.

§2. Четырехзначные матрицы с циклическим отрицанием

Обе логики будут сформулированы в одном и том же пропозициональном языке, назовем его $\mathscr{L}_{cn\ell}$, алфавит которого содержит счетное множество пропозициональных переменных, обозначаемое в метаязыке именем $\mathtt{Var}$, множество пропозициональных связок $\{\wedge, \vee, \sim\}$ и технические символы (и). Множество формул $\mathtt{For}_{cn\ell}$ в данном языке определяется стандартным образом.

Теперь приступим к построению четырехэлементных логических матриц, служащих для интерпретации формул языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$. В качестве множества-носителя возьмем $\mathcal{U} = \{\mathbf{T}, \mathbf{TU}, \mathbf{FU}, \mathbf{F}\}$ и построим на нем две различные матрицы $\mathcal{M}^{\mathbf{CNL_4^2}}$ и $\mathcal{M}^{\mathbf{CNLL_4^2}}$ с одним и тем же множеством выделенных значений $\mathcal{D} = \{\mathbf{T}, \mathbf{TU}\}$ и множествами операций $\{f_c\}_{c\in\mathcal{O}}$ и $\{g_c\}_{c\in\mathcal{O}}$, соответственно, где $\mathcal{O} = \{\sim, \wedge, \vee\}$.

Основное различие матриц состоит в том, как именно упорядочено множество $\mathscr{U}$, а значит и в том, как определяются матричные бинарные операции. Табличные опре-

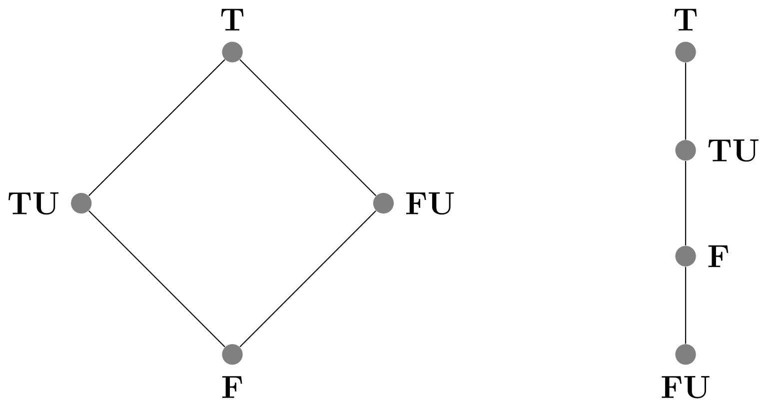

Рисунок 8. Решетки $4\mathcal{Q}$ и $4\mathcal{LQ}$.

деления бинарных операций легко могут быть получены из диаграмм, изображенных на рисунке 8, репрезентирующих отношение порядка на $\mathscr{U}$ для той и другой матрицы. Очевидно, что оба варианта упорядочения дают примеры четырехэлементных решеток, обозначенных как $4\mathcal{Q}$ (диаграмма слева) и $4\mathcal{LQ}$.

Определение 48. Матрица $\mathcal{M}^{\mathbf{CNL_4^2}}$ есть кортеж $\langle \mathcal{U}, \{f_c\}_{c\in\mathcal{O}}, \mathcal{D}\rangle$, где операции $f_\wedge$ и $f_\vee$ определяются как пресечение и объединение в решетке $4\mathcal{Q}$, а $f_\sim$ задается следующей таблицей 6. $\lhd$

Определение 49. Матрица $\mathcal{M}^{\mathbf{CNLL_4^2}}$ есть кортеж $\langle \mathcal{U}, \{g_c\}_{c\in\mathcal{O}}, \mathcal{D}\rangle$, где операции $g_\wedge$ и $g_\vee$ определяются как пересечение и объединение в решетке $4\mathcal{LQ}$, а $g_\sim$ определяется такой же таблицей, как и в случае $f_\sim$. $\lhd$

Оценка пропозициональных переменных, обозначаемая как v, представляет собой отображение $\mathtt{Var} \longrightarrow \mathcal{U}$. Расширение v на множество $\mathtt{For}_{cn\ell}$ зависит от конкретной матрицы. Например, в случае $\mathcal{M}^{\mathbf{CNL_4^2}}$ определим расширение v_2 исходной оценки v таким образом, что для любых $A, B \in \mathtt{For}_{cn\ell}$: $v_2(A\wedge B) = f_\wedge(v_2(A), v_2(B))$, $v_2(A\vee B) = f_\vee(v_2(A), v_2(B))$, $v_2(\neg A) = f_\sim(v_2(A))$. Аналогичным образом поступаем и для определения расширенной оценки v_3 в случае матрицы $\mathbf{CNLL_4^2}$, используя операции $g_\sim$, $g_\wedge$ и $g_\vee$. В дальнейшем, время от времени, v_2 и v_3 будут использоваться как специфицированные переменные, пробегающие по множествам $\mathbf{CNL_4^2}$- и $\mathbf{CNLL_4^2}$-оценок соответственно. С другой стороны, будут также употребляться выражения типа «для всякой $\mathbf{CNL_4^2}$-оценки $v\ldots$», когда речь идет о расширенной оценке v_2, «для всякой $\mathbf{CNLL_4^2}$-оценки $v\ldots$», когда имеется в виду расширенная оценка v_3.

Теперь можно определить отношение логического следования через сохранение выделенного значения. Разумеется, для каждой из матриц определение будет свое.

Определение 50. Для всех $A, B \in \texttt{For}_{cn\ell}$,

(1) $A \models_{\mathbf{CNL^2_4}} B \iff v(A) \in \mathcal{D} \implies v(B) \in \mathcal{D}$, для любой $\mathbf{CNL^2_4}$-оценки v,

(2) $A \models_{\mathbf{CNLL^2_4}} B \iff v(A) \in \mathcal{D} \implies v(B) \in \mathcal{D}$, для любой $\mathbf{CNLL^2_4}$-оценки v.

◁

Также определим, что́ значит быть $\mathbf{CNL^2_4}$-общезначимой ($\mathbf{CNLL^2_4}$-общезначимой) парой формул.

Определение 51. Пара (A, B) называется $\mathbf{CNL^2_4}$-общезначимой ($\mathbf{CNLL^2_4}$-общезначимой) в том случае, если имеет место

$$A \models_{\mathbf{CNL^2_4}} B \quad (A \models_{\mathbf{CNLL^2_4}} B).$$

◁

В заключение раздела рассмотрим множество $\mathcal{U}$ с точки зрения общих принципов построения систем обобщенных истинностных значений. Стандартный способ порождения таких множеств – посредством образования множества-степени от некоторого базисного множества истинностных значений. В качестве базисного множества можно выбрать $\mathbf{T}, \mathbf{U}$, то есть множества, содержащего истину и неопределенность. Множество-степень над ним дает новое множество $\{\{\mathbf{T}, \mathbf{U}\}, \{\mathbf{T}\}, \{\mathbf{U}\}, \varnothing\}$. Естественным образом можно понимать $\{\mathbf{T}\}$ просто как $\mathbf{T}$, в то время как $\{\mathbf{T}, \mathbf{U}\}$ есть $\mathbf{TU}$. Значение $\mathbf{U}$ понимается как «быть неопределенным без того, чтобы быть истинным». Поскольку отсутствие истины может трактоваться как наличие лжи, то $\mathbf{U}$ можно понимать именно как $\mathbf{FU}$. Подобным образом $\varnothing$ это просто значение $\mathbf{F}$.

§3. Системы бинарного следования для $\mathbf{CNL^2_4}$ и $\mathbf{CNLL^2_4}$

Дальнейшая задача состоит в формализации отношений логического следования, данных в определении 50. Для этих целей будут использоваться системы бинарного следования, описанные во второй главе. В частности, напомним, что в параграфе 2 указанной главы были даны общие определения доказательства в исчислении бинарного следования, а также доказательства пары формул и доказуемой пары формул. Все эти определения остаются в силе с учетом того, что теперь в качестве системы L выступают системы $\mathbf{CNL^2_4}$ и $\mathbf{CNLL^2_4}$. Мы не будем вводить каких-то специальных обозначений для систем бинарного следования, аксиоматизирующих логики $\mathbf{CNL^2_4}$ и

$\mathbf{CNLL_4^2}$ и писать, что пара формул (A, B) является $\mathbf{CNL_4^2}$- ($\mathbf{CNLL_4^2}$-) доказуемой, имея в виду доказуемость в соответствующей аксиоматической системе. Также в данном разделе будет использоваться запись $A \vdash_{\mathbf{CNL_4^2}} B$ ($A \vdash_{\mathbf{CNLL_4^2}} B$) для указания на то, что пара формул (A, B) является $\mathbf{CNL_4^2}$- ($\mathbf{CNLL_4^2}$-) доказуемой.

Как было уже сказано ранее, системы бинарного следования для логик $\mathbf{CNL_4^2}$ и $\mathbf{CNLL_4^2}$ имеют общую часть и некоторые отличительные постулаты. Для начала зафиксируем общую часть. Как и раньше, будем использовать сокращение $\sim^n$ для префикса формулы из n знаков $\sim$.

Общие схемы аксиом и правила вывода систем бинарного следования $\mathbf{CNL_4^2}$ & $\mathbf{CNLL_4^2}$:

(a1) $A \wedge B \vdash A$,

(a2) $A \wedge B \vdash B$,

(a3) $B \vdash A \vee B$,

(a4) $A \vdash A \vee B$,

(a5) $\sim A \wedge \sim B \vdash \sim(A \wedge B)$,

(a6) $\sim(A \vee B) \vdash \sim A \vee \sim B$,

(a7) $A \wedge \sim^2 A \vdash B$,

(a8) $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(a9) $A \vdash \sim^4 A$,

(a10) $\sim^4 A \vdash A$.

(r1) $A \vdash B$, $B \vdash C$ / $A \vdash C$,

(r2) $A \vdash B$, $A \vdash C$ / $A \vdash B \wedge C$,

(r3) $A \vdash C$, $B \vdash C$ / $A \vee B \vdash C$,

(r4) $A \vdash B$ / $\sim^2 B \vdash \sim^2 A$.

Далее следуют списки добавочных схем аксиом для каждой из систем. Список правил вывода остается общим, новые правила вывода не вводятся.

Добавочные схемы аксиом для системы $\mathbf{CNL_4^2}$:

(b1) $\sim(A \wedge B) \vdash \sim A \wedge \sim B$,

(b2) $\sim A \vee \sim B \vdash \sim(A \vee B)$.

Добавочные схемы аксиом для системы $\mathbf{CNLL_4^2}$:

(c1) $\sim A \wedge \sim B \vdash \sim(A \vee B)$,

(c2) $\sim(A \wedge B) \vdash \sim A \vee \sim B$,

(c3) $\sim A \wedge \sim^2 A \vdash \sim(A \wedge B)$

(c4) $A \wedge \sim A \vdash \sim(A \vee B)$,

(c5) $\sim(A \vee B) \vdash \sim A \vee B$,

(c6) $\sim(A \vee B) \vdash \sim(B \vee A)$,

(c7) $\sim(A \wedge B) \vdash \sim(B \wedge A)$,

(c8) $(\sim(A \vee B) \wedge \sim(A \wedge B)) \vdash \sim A \wedge \sim B$.

В дальнейшем полезными окажутся две простые технические леммы.

Лемма 32. *Следующие пары формул доказуемы в* $\mathbf{CNL_4^2}$:

(1) $\sim A \wedge \sim B \vdash \sim(A \vee B)$,

(2) $\sim(A \wedge B) \vdash \sim A \vee \sim B$.

Лемма 33. *Следующие пары формул доказуемы в системах* $\mathbf{CNL_4^2}$ *и* $\mathbf{CNLL_4^2}$.

(Id) $A \vdash A$

(De1) $\sim^2 A \wedge \sim^2 B \dashv\vdash \sim^2(A \vee B)$,

(De2) $\sim^2 A \vee \sim^2 B \dashv\vdash \sim^2(A \wedge B)$,

(T) $B \vdash A \vee \sim^2 A$.

Доказательство. Приведем доказательство для (T):

1. $A \wedge \sim^2 A \vdash \sim^2 B$ (a7)
2. $\sim^4 B \vdash \sim^2(A \wedge \sim^2 A)$ 1, (r4)
3. $\sim^2(A \wedge \sim^2 A) \vdash \sim^2 A \vee \sim^4 A$ (De2)
4. $\sim^2 A \vee \sim^4 A \vdash A \vee \sim^2 A$ (Id), (a3), (a4), (a10), (r1), (r3)
5. $B \vdash \sim^4 B$ (a9)
6. $B \vdash A \vee \sim^2 A$ 2, 3, 4, 5, (r1)

□

§4. Непротиворечивость систем $\mathbf{CNL_4^2}$ и $\mathbf{CNLL_4^2}$

Сформулируем основной результат данного параграфа в отношении системы $\mathbf{CNL_4^2}$.

Лемма 34. *Каждая схема аксиом исчисления* $\mathbf{CNL_4^2}$ *представляет собой* $\mathbf{CNL_4^2}$-*общезначимую пару, а каждое правило вывода исчисления* $\mathbf{CNL_4^2}$ *сохраняет* $\mathbf{CNL_4^2}$-*общезначимость.*

Доказательство. Для доказательства необходимо проверить для каждой схемы аксиом α, что α является $\mathbf{CNL_4^2}$-общезначимой, а для каждого правила вывода проверить, что заключение правила представляет собой $\mathbf{CNL_4^2}$-общезначимую пару, если таковыми являются его посылки. Будем рассуждать от противного.

Допустим, что схема аксиом (a7) не является $\mathbf{CNL_4^2}$-общезначимой, то есть существует $\mathbf{CNL_4^2}$-оценка v такая, что $v(A \wedge \sim^2 A) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{TU}\}$ и $v(B) \notin \{\mathbf{T}, \mathbf{TU}\}$ то есть

$v(B) \in \{\mathbf{F}, \mathbf{FU}\}$. Нетрудно видеть, что такая ситуация невозможна в силу того, что $A \wedge {\sim}^2 A$ не может принять какое-либо значение в множестве $\{\mathbf{T}, \mathbf{TU}\}$.

Теперь предположим, что правило (r4) не сохраняет $\mathbf{CNL_4^2}$-общезначимость. Это означает, что найдется такая оценка v, что $A \vDash_{\mathbf{CNL_4^2}} B$, но ${\sim}^2 B \nvDash_{\mathbf{CNL_4^2}} {\sim}^2 A$. Тогда из этого следует, что $v({\sim}^2 B) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{TU}\}$ и $v({\sim}^2 A) \notin \{\mathbf{T}, \mathbf{TU}\}$ что означает $v({\sim}^2 A) \in \{\mathbf{F}, \mathbf{FU}\}$. Также заметим, что определение $\sim$ влечет $v(A) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{TU}\}$ и $v(B) \in \{\mathbf{F}, \mathbf{FU}\}$, но это противоречит тому, что $A \vDash_{\mathbf{CNL_4^2}} B$. Таким образом, (r4) сохраняет $\mathbf{CNL_4^2}$-общезначимость.

Остальные случаи доказываются аналогично. □

Теорема 5 (Непротиворечивость исчисления $\mathbf{CNL_4^2}$)**.** *Для любых формул A и B языка $\mathscr{L}_{cnl}$ справедливо следующее утверждение:*

$$A \vdash B \ \mathbf{CNL_4^2}\text{-}\textit{доказуема} \implies A \vDash_{\mathbf{CNL_4^2}} B.$$

Доказательство. Проводится индукцией по длине доказательства, используя лемму 34. □

Далее сформулируем аналог леммы 34 для системы $\mathbf{CNLL_4^2}$.

Лемма 35. *Каждая схема аксиом исчисления $\mathbf{CNLL_4^2}$ представляет собой $\mathbf{CNLL_4^2}$-общезначимую пару, а каждое правило вывода сохраняет $\mathbf{CNLL_4^2}$-общезначимость.*

Доказательство. Аналогично тому, как это делалось для доказательства леммы 34, покажем общезначимость одной из схем аксиом, тогда как правила вывода для обеих систем совпадают.

Предположим, что схема аксиом (c8) не является общезначимой, то есть найдется такая оценка v, что $v({\sim}(A \vee B) \wedge {\sim}(A \wedge B)) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{TU}\}$ и $v({\sim}A \wedge {\sim}B) \notin \{\mathbf{T}, \mathbf{TU}\}$. Последнее означает, что $v({\sim}A \wedge {\sim}B) \in \{\mathbf{F}, \mathbf{FU}\}$.

(a) Пусть $v({\sim}(A \vee B) \wedge {\sim}(A \wedge B)) = \mathbf{T}$. Согласно определению конъюнкции это значит, что $v({\sim}(A \vee B)) = \mathbf{T}$ и $v({\sim}(A \wedge B)) = \mathbf{T}$. Тогда имеем $v(A \vee B) = \mathbf{FU}$ и $v(A \wedge B) = \mathbf{FU}$. Первое равенство влечет $v(A) = \mathbf{FU}$ и $v(B) = \mathbf{FU}$.

   Пусть $v({\sim}A \wedge {\sim}B) = \mathbf{F}$. Это может иметь место тогда, когда $v({\sim}A) = \mathbf{F}$ или $v({\sim}B) = \mathbf{F}$. То есть $v(A) = \mathbf{TU}$ или $v(B) = \mathbf{TU}$. Ни один из этих случаев не возможен в силу сказанного ранее.

   Пусть $v({\sim}A \wedge {\sim}B) = \mathbf{FU}$. Эта ситуация имеет место когда $v({\sim}A) = \mathbf{FU}$ или $v({\sim}B) = \mathbf{FU}$, что влечет $v(A) = \mathbf{F}$ или $v(B) = \mathbf{F}$, что вновь невозможно.

(b) Допустим, что $v(\sim(A \vee B) \wedge \sim(A \wedge B)) = \mathbf{TU}$. Согласно определению конъюнкции, нужно рассмотреть три случая, два из которых идентичны. Предположим, что $v(\sim(A \vee B)) = \mathbf{T}$ и $v(\sim(A \wedge B)) = \mathbf{TU}$. Из условия истинности для $\sim$ следует, что $v(A \wedge B) = \mathbf{T}$. Это означает, что $v(A) = \mathbf{T}$ и $v(B) = \mathbf{T}$. Принимая во внимание уже рассмотренные случаи, когда $v(\sim A \wedge \sim B) \in \{\mathbf{F}, \mathbf{FU}\}$ заключаем, что такие оценки невозможны. Аналогично рассуждаем, когда $v(\sim(A \vee B)) = \mathbf{TU}$ и $v(\sim(A \wedge B)) = \mathbf{TU}$.

$\square$

Теорема 6 (Непротиворечивость исчисления $\mathbf{CNLL_4^2}$). *Для любых формул A и B языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$, имеет место следующее утверждение:*

$$A \vdash B \ \mathbf{CNLL_4^2}\text{-}\textit{доказуема} \implies A \vDash_{\mathbf{CNLL_4^2}} B.$$

Доказательство. Индукцией по длине доказательства, используя лемму 35. $\square$

§5. Полнота систем $\mathbf{CNL_4^2}$ и $\mathbf{CNLL_4^2}$

Как это уже в случае с системами, описанными во второй главе, ключевую роль в доказательстве полноты играет синтаксический объект, называемый теорией (в узком, техническом смысле этого слова). Теория выполняет ту же функцию, что и максимальное непротиворечивое множество в доказательствах полноты классических систем. Дадим определение $\mathbf{CNL_4^2}$- ($\mathbf{CNLL_4^2}$)-теории над множеством формул языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$.

Определение 52. $\mathbf{CNL_4^2}$- ($\mathbf{CNLL_4^2}$)-теория есть множество формул α языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$ такое, что для всяких формул A и B выполняются следующие условия,

(1) $A \wedge B \in \alpha$, если $A \in \alpha$ и $B \in \alpha$,

(2) $B \in \alpha$, если $A \in \alpha$ и $A \vdash B$ является $\mathbf{CNL_4^2}$- ($\mathbf{CNLL_4^2}$)-доказуемой.

$\mathbf{CNL_4^2}$- ($\mathbf{CNLL_4^2}$)-теория называется простой, если $A \vee B \in \alpha$ влечет $A \in \alpha$ или $B \in \alpha$. Будем называть $\mathbf{CNL_4^2}$-($\mathbf{CNLL_4^2}$)-теорию α *c-нормальной* в том случае, если для каждой формулы A верно, что $A \in \alpha$ если и только если $\sim^2 A \notin \alpha$. $\triangleleft$

Если из контекста ясно, о какой – $\mathbf{CNL_4^2}$ или $\mathbf{CNLL_4^2}$ – теории идет речь, то ее спецификация может опускаться.

Далее нужно сформулировать и доказать лемму, в которой фиксируется существование простых теорий наряду со способом их построения. Данная лемма является аналогом леммы Линденбаума в доказательствах полноты классических исчислений, однако при некоторой аналогии имеются существенные различия в способах построения этих объектов. Как отмечает М. Данн [33], простая теория на синтаксическом уровне выполняет примерно ту же *отделяющую* функцию, что и простой фильтр в дистрибутивной решетке. Поскольку доказательства этой леммы для исчислений $\mathbf{CNL_4^2}$ и $\mathbf{CNLL_4^2}$ не отличаются, дадим его в терминах одного из них.

Лемма 36 (Лемма о расширении). *Для всех формул A и B языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$ верно, что если $A \vdash B$ не является $\mathbf{CNL_4^2}$-доказуемой, то существует такая c-нормальная простая теория α, что $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.*

Доказательство. Пусть для некоторых формул A и B, $A \vdash B$ не является $\mathbf{CNL_4^2}$-доказуемой. Определим $\alpha_0 = \{C \mid A \vdash_{\mathbf{CNL_4^2}} C\}$. α_0 является теорией, поскольку она замкнута по отношению $\vdash_{\mathbf{CNL_4^2}}$ и $\wedge$ (последнее обеспечивается правилом (r2)). Далее построим последовательность теорий, используя некоторый пересчет множества $\mathtt{For}_{cn\ell}$ $(A_1, A_2, \ldots)$. Определим

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \alpha_n, \text{ если } \alpha_n \cup \{A_{n+1}\} \vdash_{\mathbf{CNL_4^2}} B, \\ \alpha_n \cup \{A_{n+1}\}, \text{ если } \alpha_n \cup \{A_{n+1}\} \nvdash_{\mathbf{CNL_4^2}} B. \end{cases}$$

Пусть α есть объединение всех α_n. Покажем сначала, что α есть простая теория для которой $A \in \alpha$, но $B \notin \alpha$. $A \in \alpha$ по построению. Допустим, что $B \in \alpha$. Это значит, что B была добавлена к α_i на какой-то i-й стадии построения последовательности теорий, что невозможно в силу определения α_i. Чтобы показать простоту, допустим обратное, то есть, что α не является простой: $C \vee D \in \alpha$, но $C \notin \alpha$ и $D \notin \alpha$ для каких-то C и D. Это, в свою очередь, означает, что оба расширения, $\alpha \cup \{C\}$ и $\alpha \cup \{D\}$, содержат B. Тогда имеется конъюнкция формул из α, назовем ее E, такая, что $E \wedge C \vdash_{\mathbf{CNL_4^2}} B$ и $E \wedge D \vdash_{\mathbf{CNL_4^2}} B$. Отсюда, используя правило $(r3)$, выводится $(E \wedge C) \vee (E \wedge D) \vdash_{\mathbf{CNL_4^2}} B$. Затем, используя (a10) и $(r1)$, получаем $E \wedge (C \vee D) \vdash_{\mathbf{CNL_4^2}} B$, значит $B \in \alpha$.

Наконец, покажем, что α также является c-нормальной. Действительно, если для некоторого k, $A_k \in \alpha$ и $\sim^2 A_k \in \alpha$, то найдется такая α_i, которая содержит $A_k \wedge \sim^2 A_k$ наряду с B, в силу схемы аксиом $A \wedge \sim^2 A \vdash B$, а также правил (r1) и (r2), что противоречит допущению. С другой стороны, простота теории α и выводимая схема $B \vdash_{\mathbf{CNL_4^2}} A \vee \sim^2 A$ гарантируют, что для любой A_k, одна из двух формул, A_k или $\sim^2 A_k$, принадлежит α. □

Теперь обратимся непосредственно к доказательству полноты для системы $\mathbf{CNL_4^2}$.

Условимся, что $\mathcal{A}$ обозначает множество $\{\mathbf{TU}, \mathbf{F}\}$. Тот факт, что формула принимает то или иное истинностное значение можно выразить через принадлежность или непринадлежность оценки этой формулы множествам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
v(A) = \mathbf{T} &\iff v(A) \in \mathcal{D} \text{ и } v(A) \notin \mathcal{A},\\
v(A) = \mathbf{TU} &\iff v(A) \in \mathcal{D} \text{ и } v(A) \in \mathcal{A},\\
v(A) = \mathbf{F} &\iff v(A) \notin \mathcal{D} \text{ и } v(A) \in \mathcal{A},\\
v(A) = \mathbf{FU} &\iff v(A) \notin \mathcal{D} \text{ и } v(A) \notin \mathcal{A}.
\end{aligned}
$$

Следующая лемма легко доказывается из семантических определений пропозициональных связок.

Лемма 37. *Пусть $A, B \in \mathtt{For}_{cn\ell}$, и пусть v есть $\mathbf{CNL_4^2}$-оценка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $v(\sim A) \in \mathcal{D} \iff v(A) \notin \mathcal{A}$,

(2) $v(\sim A) \in \mathcal{A} \iff v(A) \in \mathcal{D}$,

(3) $v(A \wedge B) \in \mathcal{D} \iff v(A) \in \mathcal{D}$ *и* $v(B) \in \mathcal{D}$,

(4) $v(A \wedge B) \in \mathcal{A} \iff v(A) \in \mathcal{A}$ *или* $v(B) \in \mathcal{A}$,

(5) $v(A \vee B) \in \mathcal{D} \iff v(A) \in \mathcal{D}$ *или* $v(B) \in \mathcal{D}$,

(6) $v(A \vee B) \in \mathcal{A} \iff v(A) \in \mathcal{A}$ *и* $v(B) \in \mathcal{A}$.

Теперь дадим определение канонической $\mathbf{CNL_4^2}$-оценки.

Определение 53. Для любой c-нормальной простой теории α и пропозициональной переменной p определим каноническую $\mathbf{CNL_4^2}$-оценку v^c как отображение $\mathtt{Var} \longrightarrow 4\mathcal{Q}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $v^c(p) \in \mathcal{D} \iff p \in \alpha$;

(2) $v^c(p) \in \mathcal{A} \iff \sim^3 p \in \alpha$;

◁

Оценка v^c расширяется стандартным и единственным образом на все множество формул. Будем обозначать расширенную оценку тем же символом v^c. Докажем, что расширенная оценка ведет себя так же, как и исходная по отношению к c-нормальным простым теориям.

Лемма 38 (Лемма о канонической оценке для $\mathbf{CNL_4^2}$). *Для каждой c-нормальной простой теории α, формулы A и расширенной канонической $\mathbf{CNL_4^2}$-оценки v^c справедливы следующие утверждения:*

(1) $v^c(A) \in \mathcal{D} \iff A \in \alpha$,

(2) $v^c(A) \in \mathcal{A} \iff {\sim}^3 A \in \alpha$.

Доказательство. Осуществляется индукцией по построению формулы A. Базисный случай, когда A есть пропозициональная переменная, непосредственно следует из определения 53.

Далее рассмотрим случаи, в которых A есть сложная формула. Согласно индукционному допущению, утверждение леммы справедливо для собственных подформул формулы A. Также в некоторых случаях, чтобы не загромождать запись, не будет дополнительно оговариваться использование стандартных свойств теорий, таких, как, замкнутость относительно конъюнкции или замкнутость по отношению $\vdash_{\mathbf{CNL_4^2}}$.

Случай $A = {\sim}B$.

$v^c({\sim}B) \in \mathcal{D} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \notin \mathcal{A} \overset{\text{и.д.}}{\iff} {\sim}^3 B \notin \alpha \overset{c\text{-норм.}}{\iff} {\sim}B \in \alpha$.

$v^c({\sim}B) \in \mathcal{A} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \in \mathcal{D} \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \in \alpha \overset{\text{(a9),(a10)}}{\iff} {\sim}^4 B \in \alpha$.

Случай $A = B \wedge C$.

$v^c(B \wedge C) \in \mathcal{D} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \in \mathcal{D}$ и $v^c(C) \in \mathcal{D} \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \in \alpha$ и $C \in \alpha \overset{\text{опр.}\alpha\text{,(a1),(a2)}}{\iff} B \wedge C \in \alpha$.

$v^c(B \wedge C) \in \mathcal{A} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \in \mathcal{A}$ или $v^c(C) \in \mathcal{A} \overset{\text{и.д.}}{\iff} {\sim}^3 B \in \alpha$ или ${\sim}^3 C \in \alpha \overset{c\text{-норм.}}{\iff} {\sim}B \notin \alpha$ или ${\sim}C \notin \alpha \overset{\text{(a1),(a2),(a5),(b1)}}{\iff} {\sim}(B \wedge C) \notin \alpha \overset{c\text{-норм.}}{\iff} {\sim}^3(B \wedge C) \in \alpha$.

Случай $A = B \vee C$.

$v^c(B \vee C) \in \mathcal{D} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \in \mathcal{D}$ или $v^c(C) \in \mathcal{D} \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \in \alpha$ или $C \in \alpha \overset{\text{(a3),(a4),прост.}}{\iff} B \vee C \in \alpha$.

$v^c(B \vee C) \in \mathcal{A} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \in \mathcal{A}$ и $v^c(C) \in \mathcal{A} \overset{\text{и.д.}}{\iff} {\sim}^3 B \in \alpha$ и ${\sim}^3 C \in \alpha \overset{c\text{-норм.}}{\iff} {\sim}B \notin \alpha$ и ${\sim}C \notin \alpha \overset{\text{(a3),(a4),(a6),(b2),прост.}}{\iff} {\sim}(B \vee C) \notin \alpha \overset{c\text{-норм.}}{\iff} {\sim}^3(B \vee C) \in \alpha$. □

Теорема 7 (Полнота для $\mathbf{CNL_4^2}$). *Для любых формул A и B языка $\mathscr{L}_{cnl}$ справедливо следующее утверждение:*

$$A \vDash_{\mathbf{CNL_4^2}} B \implies A \vdash B \ \mathbf{CNL_4^2}\text{-}\textit{доказуема}.$$

Доказательство. Предположим, что $A \vdash B$ не является $\mathbf{CNL_4^2}$-доказуемой. Тогда, по лемме 36, существует такая простая теория α, что $A \in \alpha$ и $B \notin \alpha$. Из этого следует, что по лемме 38, можно утверждать, что $v^c(A) \in \mathcal{D}$, но $v^c(B) \notin \mathcal{D}$. Таким образом, $A \not\models_{\mathbf{CNL_4^2}} B$. $\square$

Теперь обратимся к доказательству полноты для системы $\mathbf{CNLL_4^2}$.

Условимся символом $\mathcal{B}$ обозначать множество $\{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$. Следующая лемма является прямым следствием семантического определения пропозициональных связок.

Лемма 39. *Для всяких $A, B \in \mathtt{For}_{cn\ell}$, всякой $\mathbf{CNLL_4^2}$-оценки v справедливы следующие утверждения:*

(1) $v({\sim}A) \in \mathcal{D} \iff v(A) \in \mathcal{B}$,

(2) $v({\sim}A) \in \mathcal{B} \iff v(A) \notin \mathcal{D}$,

(3) $v(A \wedge B) \in \mathcal{D} \iff v(A) \in \mathcal{D}$ *и* $v(B) \in \mathcal{D}$,

(4) $v(A \wedge B) \in \mathcal{B} \iff v(A), v(B) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}$ *или* $v(A) \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{D}$ *или* $v(B) \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{D}$,

(5) $v(A \vee B) \in \mathcal{D} \iff v(A) \in \mathcal{D}$ *или* $v(B) \in \mathcal{D}$,

(6) $v(A \vee B) \in \mathcal{B} \iff v(A), v(B) \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{D}$ *или* $v(A) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}$ *или* $v(B) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}$.

Теперь дадим определение канонической $\mathbf{CNLL_4^2}$-оценки.

Определение 54. Для всякой c-нормальной простой теории α и пропозициональной переменной p определим каноническую $\mathbf{CNLL_4^2}$-оценку v^c как отображение $\mathtt{Var} \longrightarrow 4\mathcal{LQ}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $v^c(p) \in \mathcal{D} \iff p \in \alpha$;

(2) $v^c(p) \in \mathcal{B} \iff {\sim}p \in \alpha$;

$\triangleleft$

Как и в аналогичной ситуацией с системой $\mathbf{CNL_4^2}$, необходимо расширить исходную оценку на все множество $\mathtt{For}_{cn\ell}$ и доказать следующую лемму о канонической оценке.

Лемма 40 (Лемма о канонической оценке для $\mathbf{CNLL_4^2}$)**.** *Для всякой c-нормальной простой теории α, формулы A и расширенной канонической $\mathbf{CNLL_4^2}$-оценки v^c справедливы следующие утверждения:*

(1) $v^c(A) \in \mathcal{D} \iff A \in \alpha$,

(2) $v^c(A) \in \mathscr{B} \iff {\sim}A \in \alpha$.

Доказательство. Осуществляется индукцией по построению формулы A. Для случая, когда формула A есть пропозициональная переменная, доказательство непосредственно следует из определения канонической оценки v^c.

Случай $A = {\sim}B$.

$v^c({\sim}B) \in \mathscr{D} \overset{\text{лем. 39}}{\iff} v^c(B) \in \mathscr{B} \overset{\text{и.д.}}{\iff} {\sim}B \in \alpha$.

$v^c({\sim}B) \in \mathscr{B} \overset{\text{лем. 39}}{\iff} v^c(B) \notin \mathscr{D} \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \notin \alpha \overset{c\text{-норм.}}{\iff} {\sim}^2B \in \alpha$.

Случай $A = B \wedge C$.

$v^c(B \wedge C) \in \mathscr{D} \overset{\text{лем. 39}}{\iff} v^c(B) \in \mathscr{D}$ и $v^c(C) \in \mathscr{D} \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \in \alpha$ и $C \in \alpha \overset{\text{опр.}\alpha,\text{(a1)},\text{(a2)}}{\iff}$ $B \wedge C \in \alpha$.

($\Rightarrow$) Пусть $v^c(B \wedge C) \in \mathscr{B}$. Согласно лемме 39, необходимо рассмотреть три подслучая. (i) Из $[v^c(B) \in \mathscr{B}$ и $v^c(C) \in \mathscr{B}]$ и и.д. получаем ${\sim}B \in \alpha$ и ${\sim}C \in \alpha$, что по $\wedge$-замыканию теории α и схеме аксиом (a5) влечет ${\sim}(B \wedge C) \in \alpha$. (ii) Если $[v^c(B) \notin \mathscr{D}$ и $v^c(B) \in \mathscr{B}]$ то и.д. дает $B \notin \alpha$ и ${\sim}B \in \alpha$. По c-нормальности теории α, ${\sim}^2B \in \alpha$. Таким образом, используя схему аксиом (c3), получаем ${\sim}(B \wedge C) \in \alpha$. (iii) Если $[v(C) \notin \mathscr{D}$ и $v(C) \in \mathscr{B}]$ подобным же образом получаем ${\sim}C \wedge {\sim}^2C \in \alpha$, следовательно ${\sim}(C \wedge B) \in \alpha$ и, наконец, по (c7), ${\sim}(B \wedge C) \in \alpha$.

($\Leftarrow$) Предположим ${\sim}(B \wedge C) \in \alpha$. Тогда, по (c2), ${\sim}B \vee {\sim}C \in \alpha$, следовательно, используя простоту теории α, ${\sim}B \in \alpha$ или ${\sim}C \in \alpha$. Рассмотрим случай ${\sim}B \in \alpha$. Согласно и.д., $v^c(B) \in \mathscr{B}$, но этого недостаточно, чтобы утверждать $v^c(B \wedge C) \in \mathscr{B}$. Поэтому нужно принять во внимание возможное расположение формулы B по отношению к теории α. Допустим, что $B \in \alpha$. По $\wedge$-замыканию теории α, $B \wedge {\sim}B \in \alpha$. Используя схему аксиом (c4), получаем ${\sim}(B \vee C) \in \alpha$ что, совместно с (c8) и $\wedge$-замыканием теории α, влечет ${\sim}B \wedge {\sim}C \in \alpha$, что означает, что имеет место ${\sim}C \in \alpha$. По и.д., $v^c(C) \in \mathscr{B}$, следовательно $v^c(B \wedge C) \in \mathscr{B}$. Далее допустим $B \notin \alpha$. Применяя и.д., получаем $v^c(B) \notin \mathscr{D}$. Это означает, что $v^c(B) = \mathbf{FU}$, поэтому $v^c(B \wedge C) \in \mathscr{B}$. Аналогично для ${\sim}C \in \alpha$.

Случай $A = B \vee C$.

$v^c(B \vee C) \in \mathscr{D} \overset{\text{lem. 39}}{\iff} v^c(B) \in \mathscr{D}$ или $v^c(C) \in \mathscr{D} \overset{\text{IH}}{\iff} B \in \alpha$ или $C \in \alpha \overset{\text{(a3)},\text{(a4)},\text{prim.}}{\iff}$ $B \vee C \in \alpha$.

($\Rightarrow$) Допустим, что $v^c(B \vee C) \in \mathscr{B}$. Тогда, согласно лемме 39, получаем три дизъюнктивных подслучая. Сначала допустим, что $[v^c(B) \in \mathscr{B}$ и $v^c(C) \in \mathscr{B}]$. Достаточно получить ${\sim}B \in \alpha$ и ${\sim}C \in \alpha$ по и.д., а затем ${\sim}(B \vee C) \in \alpha$ с использованием (c1). Пусть теперь $v^c(B) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{B}$. и.д. влечет $B \in \alpha$ и ${\sim}B \in \alpha$. Используя (c4) и $\wedge$-замкнутость теории α, получаем $\sim (B \vee C) \in \alpha$. Третий дизъюнктивный случай разбирается аналогично второму.

($\Leftarrow$) Допустим, что $\sim(B \vee C) \in \alpha$. По схеме аксиом (a6) и свойству простоты теории α получаем $\sim B \in \alpha$ или $\sim C \in \alpha$. Рассмотрим первый из дизъюнктивных подслучаев. Из и.д. следует, что $v^c(B) \in \mathcal{B}$. Однако, чтобы получить требуемое утверждение $v^c(B \vee C) \in \mathcal{B}$, необходима дополнительная информация. Применяя схему (c6), а затем (c5) к $\sim(B \vee C) \in \alpha$, приходим к $\sim C \vee B \in \alpha$. Простота теории α вместе с и.д. дает $v^c(C) \in \mathcal{B}$ или $v^c(B) \in \mathcal{D}$. В обоих этих случаях, с учетом $v^c(B) \in \mathcal{B}$, заключаем к $v^c(B \vee C) \in \mathcal{B}$. Аналогичные рассуждения используются для случая $\sim C \in \alpha$. $\square$

Теорема 8 (Полнота для $\mathbf{CNLL^2_4}$). *Для любых формул A и B языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$ верно, что*

$$A \models_{\mathbf{CNLL^2_4}} B \implies A \vdash B \ \mathbf{CNLL^2_4}\text{-}\textit{доказуема.}$$

Доказательство. Аналогично доказательству, приведенному для системы $\mathbf{CNL^2_4}$. $\square$

§6. Системы $\mathbf{CNL^2_4}$ и $\mathbf{CNLL^2_4}$ и классическая логика

Нетрудно заметить, что системы $\mathbf{CNL^2_4}$ и $\mathbf{CNLL^2_4}$ имеют общие постулаты с классической логикой. Классическая логика также может быть аксиоматизирована в виде системы бинарного следования, если взять схемы (a1)–(a4), (a8)–(a10), правила (r1)–(r4) и добавить к ним «парадоксальные» постулаты (a7) и (T) (считая, конечно же, что $\sim\sim$ должно быть заменено на классическое отрицание). Также хорошо известно, что альтернативная формулировка классического бинарного исчисления высказываний может быть получена, если заменить правило контрапозиции на полный набор законов Де Моргана для $\sim\sim$. Будем использовать символ $\vdash_{\mathbf{Cl}}$ для обозначения классического варианта отношения между формулами в бинарном исчислении: $A \vdash_{\mathbf{Cl}} B$ обозначает, что пара (A, B) доказуема в (некотором варианте) *классического* бинарного исчисления высказываний.

Нетрудно заметить, что двойное циклическое отрицание, то есть синтаксический объект $\sim\sim$, обладает всеми свойствами классического отрицания[15]. Таким образом можно предположить, что классическая логика может быть некоторым способом представлена или «изображена» внутри систем циклического отрицания.

[15]Достаточный набор свойств, например, такой: контрапозиция, снятие и введение двойного отрицания и две приведенные схемы, выражающие «парадоксы» следования [35, С. 54].

Более точно эта интуиция описывается посредством процедуры погружения классической логики в системы $\mathbf{CNL_4^2}$ и $\mathbf{CNLL_4^2}$. Для этого определим функцию перевода, назовем ее Φ, языка классической логики высказываний $\mathscr{L}_{c\ell}$ (с множеством исходных пропозициональных связок $\{\wedge, \vee, \neg\}$ и множеством всех формул $\mathtt{For}_{c\ell}$ в этом языке) в язык изучаемых в данной главе систем. Условимся, что множество пропозициональных переменных $\mathtt{Var} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ является общим для обоих языков.

$$\Phi(p) = p, \quad p \in \mathtt{Var},$$
$$\Phi(A \circ B) = \Phi(A) \circ \Phi(B), \quad \circ \in \{\wedge, \vee\},$$
$$\Phi(\neg A) = {\sim}{\sim}\Phi(A), \quad A, B \in \mathtt{For}_{c\ell}.$$

Докажем, что Φ есть погружающая операция с помощью семантических рассуждений. Напомним, что в общем случае некоторая функция перевода f языка системы S_1 в язык системы S_2 является погружающей операцией, если имеет место следующая эквиваленция: $A \models_{S_1} B \iff f(A) \models_{S_2} f(B)$. Пусть выражение $A \vDash_{\mathbf{Cl}} B$ есть утверждение о наличии отношения классического логического следования между формулами A и B.

Для любой заданной оценки $v\colon \mathtt{Var} \longrightarrow \mathcal{U}$ определим соответствующую ей классическую оценку $v^*\colon \mathtt{Var} \longrightarrow \{t, f\}$:

$$v^*(p) = \begin{cases} t, \text{ если } v(p) \in \mathcal{D}, \\ f \text{ иначе}, \end{cases}$$

где $p \in \mathtt{Var}$. Пусть, далее, v_1, v_2 и v_3 являются расширениями классической, $\mathbf{CNL_4^2}$- и $\mathbf{CNLL_4^2}$-оценки, соответственно. В дальнейшем мы будем для краткости называть v_1, v_2 и v_3 оценками, полагая, что имеются в виду расширенные оценки.

Нетрудно проверить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 41. *Для всякой $A \in \mathtt{For}_{c\ell}$, всякой оценки v_2 (оценки v_3) найдется оценка v_1 такая, что $v_1(A) = t \iff v_2(\Phi(A)) \in \mathcal{D}$, ($v_1(A) = t \iff v_3(\Phi(A)) \in \mathcal{D}$).*

Доказательство. Осуществляется индукцией по построению формулы A. Рассмотрим некоторые случаи для оценки v_2. Напомним, что «у.и.» есть сокращение для выражения «условия истинности», а «и.д.» для «индукционное допущение».

Случай $A = \neg B$.

$v_1(\neg B) = t \overset{\text{у.и.} \neg}{\iff} v_1(B) \neq t \overset{\text{и.д.}}{\iff} v_2(\Phi(B)) \notin \mathcal{D} \overset{\text{лем. 37}}{\iff} v_2({\sim}{\sim}\Phi(B)) \in \mathcal{D}$.

Случай $A = B \wedge C$.

$v_1(B \wedge C) = t \overset{\text{у.и.} \wedge}{\iff} v_1(B) = t$ и $v_1(C) = t \overset{\text{и.д.}}{\iff} v_2(\Phi(B)) \in \mathscr{D}$ и $v_2(\Phi(C)) \in \mathscr{D} \overset{\text{лем. 37}}{\iff} v_2(\Phi(A \wedge B)) \in \mathscr{D}$. □

С другой стороны, имея $v_1(p) = t$ для некоторой $p \in \mathtt{Var}$, можно определить такую оценку v_2 (оценку v_3), что $v_2(p) \in \mathscr{D}$ ($v_3(p) \in \mathscr{D}$), в то время, как при $v_1(p) = f$ можно положить $v_2(p) \notin \mathscr{D}$ ($v_3(p) \notin \mathscr{D}$). Получаем следующую лемму.

Лемма 42. *Для любой формулы $A \in \mathtt{For}_{c\ell}$, классической оценки v_1, найдется оценка v_2 (соотв. оценка v_3) такая, что*

$$v_1(A) = t \iff v_2(\Phi(A)) \in \mathscr{D} \quad (\textit{соотв. } v_3(\Phi(A)) \in \mathscr{D}).$$

Лемма 43. *Для любых формул $A, B \in \mathtt{For}_{c\ell}$*

(1) $A \models_{\mathbf{Cl}} B \iff \Phi(A) \models_{\mathbf{CNL_4^2}} \Phi(B)$

(2) $A \models_{\mathbf{Cl}} B \iff \Phi(A) \models_{\mathbf{CNLL_4^2}} \Phi(B)$.

Доказательство. Рассмотрим только утверждение для системы $\mathbf{CNL_4^2}$. Пусть $A \models_{\mathbf{Cl}} B$, но $\Phi(A) \not\models_{\mathbf{CNL_4^2}} \Phi(B)$. Тогда найдется оценка v_2 такая, что $v_2(\Phi(A)) \in \mathscr{D}$, $v_2(\Phi(B)) \notin \mathscr{D}$. Применяя лемму 41 находим классическую оценку v_1 такую, что $v_1(A) = t$, $v_1(B) \neq t$. В обратную сторону очевидно. □

Следствие 43.1. Φ *есть функция, погружающая* $\mathbf{Cl}$ *в* $\mathbf{CNL_4^2}$ ($\mathbf{CNLL_4^2}$).

Погружение классической логики в системы циклического отрицания вполне ожидаемо в силу того, что двойное отрицание в этих системах, как говорят, «симулирует» классическое. Более интересен вопрос о нетривиальном погружении систем $\mathbf{CNL_4^2}$ и $\mathbf{CNLL_4^2}$ в классическую логику.

Для решения этой задачи определим новый перевод, назовем его Ψ, и покажем, что он тоже является погружающей функцией. В следующем определении A и B суть формулы языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$, а i есть целое положительное число.

$$
\begin{aligned}
\Psi(p_i) &= p_{2i-1},\\
\Psi({\sim}p_i) &= p_{2i},\\
\Psi({\sim}{\sim}A) &= \neg\Psi(A),\\
\Psi(A \circ B) &= \Psi(A) \circ \Psi(B), \quad \circ \in \{\wedge, \vee\},\\
\Psi({\sim}(A \circ B)) &= \Psi({\sim}A) \circ \Psi({\sim}B), \quad \circ \in \{\wedge, \vee\}.
\end{aligned}
$$

Определим классическую оценку v^* для этого случая следующим образом (где i есть целое положительное число, $v\colon \mathtt{Var} \longrightarrow \mathcal{U}$)

$$
v^*(p_i) = \begin{cases} t, \text{ если } i \text{ есть нечетное и } v(p_{\frac{i+1}{2}}) \in \mathcal{D},\\ t, \text{ если } i \text{ есть четное и } v(p_{\frac{i}{2}}) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\},\\ f \text{ иначе.} \end{cases}
$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 44. *Для всякой* $\mathbf{CNL_4^2}$*-оценки* v_2 *и формулы* $A \in \mathtt{For}_{cn\ell}$ *найдется классическая оценка* v_1 *такая, что*

$$
v_1(\Psi(A)) = t \iff v_2(A) \in \mathcal{D}.
$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\Psi(A)$ есть пропозициональная переменная, скажем p_k. Если k есть нечетное число, то утверждение леммы следует из определения v^*. Если же k четное, тогда допустим, что $v_1(p_k) = v^*(p_k) = t$. Поскольку прообраз p_k есть ${\sim}p_{\frac{k}{2}}$ и $v_2(p_{\frac{k}{2}}) = v(p_{\frac{k}{2}}) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$, $v_2({\sim}p_k) \in \mathcal{D}$. В обратную сторону очевидно.

Теперь выпишем некоторые, наиболее интересные, случаи со сложными формулами.

Случай $A = {\sim}{\sim}B$.

$v_1(\Psi({\sim}{\sim}B)) = t \overset{\text{опр. }\Psi}{\iff} v_1(\neg(\Psi(B))) = t \overset{\text{у.и. }\neg}{\iff} v_1(\Psi(B)) \neq t \overset{\text{и.д.}}{\iff} v_2(B) \notin \mathcal{D}$ $\overset{\text{у.и. }\sim}{\iff} v_2({\sim}{\sim}B) \in \mathcal{D}$.

Случай $A = {\sim}(B \wedge C)$.

$v_1(\Psi({\sim}(B \wedge C))) = t \overset{\text{опр. }\Psi}{\iff} v_1(\Psi({\sim}B) \wedge \Psi({\sim}C))) = t \overset{\text{у.и. }\wedge}{\iff} v_1(\Psi({\sim}B)) = t$ и $v_1(\Psi({\sim}C)) = t \overset{\text{и.д.}}{\iff} v_2({\sim}B) \in \mathcal{D}$ и $v_2({\sim}C) \in \mathcal{D} \overset{\text{у.и. }\sim}{\iff} v_2(B) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$ и $v_2(C) \in$

$\{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\} \overset{\text{у.и.} \wedge}{\iff} v_2(B \wedge C) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\} \overset{\text{у.и.} \sim}{\iff} v_2({\sim}(B \wedge C)) \in \mathcal{D}$.

Случай $A = {\sim}(B \vee C)$.

$v_1(\Psi({\sim}(B \vee C))) = t \overset{\text{опр.} \Psi}{\iff} v_1(\Psi({\sim}B) \vee \Psi({\sim}C))) = t \overset{\text{у.и.} \vee}{\iff} v_1(\Psi({\sim}B)) = t$ или $v_1(\Psi({\sim}C)) = t \overset{\text{и.д.}}{\iff} v_2({\sim}B) \in \mathcal{D}$ или $v_2({\sim}C) \in \mathcal{D} \overset{\text{у.и.} \sim}{\iff} v_2(B) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$ или $v_2(C) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\} \overset{\text{у.и.} \vee}{\iff} v_2(B \vee C) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\} \overset{\text{у.и.} \sim}{\iff} v_1({\sim}(B \vee C)) \in \mathcal{D}$.

□

С другой стороны, отталкиваясь от заданной классической оценки v^*, можно получить $\mathbf{CNL_4^2}$-оценку, выбрав произвольное отображение v, для которого $v(p_{\frac{i+1}{2}}) \in \mathcal{D}$, когда $v^*(p_i) = t$ и $v(p_{\frac{i+1}{2}}) \notin \mathcal{D}$, когда $v^*(\Psi(p_i)) = f$ для нечетного i, в то время, как $v(p_{\frac{i}{2}}) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$, когда $v^*(p_i) = t$ и $v(p_{\frac{i}{2}}) \notin \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$, когда $v^*(p_i) = f$ для четного i. Сформулируем аналог предыдущей леммы.

Лемма 45. *Для всякой классической оценки v_1 и формулы $A \in \mathtt{For}_{cn\ell}$ найдется $\mathbf{CNL_4^2}$-оценка v_2 такая, что*

$$v_1(\Psi(A)) = t \iff v_2(A) \in \mathcal{D}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 44. □

Лемма 46. *Для всяких формул $A, B \in \mathtt{For}_{cn\ell}$,*

$$A \models_{\mathbf{CNL_4^2}} B \iff \Psi(A) \models_{\mathbf{Cl}} \Psi(B).$$

Доказательство. Сначала предположим, что $\Psi(A) \models_{\mathbf{Cl}} \Psi(B)$, но $A \not\models_{\mathbf{CNL_4^2}} B$. Тогда существует какая-то $\mathbf{CNL_4^2}$-оценка v_2, для которой $v_2(A) \in \mathcal{D}$ и $v_2(B) \notin \mathcal{D}$. Согласно лемме 44, найдется такая классическая оценка v_1, что $v_1(\Psi(A)) = t$, но при этом $v_1(\Psi(B)) = f$.

Для доказательства в обратную сторону допустим, что $A \models_{\mathbf{CNL_4^2}} B$, но $\Psi(A) \not\models_{\mathbf{Cl}} \Psi(B)$. Тогда найдется такая классическая оценка v, что $v(\Psi(A)) = t$, $v(\Psi(B)) = f$. Используя лемму 45, приходим к тому, что $A \not\models_{\mathbf{CNL_4^2}} B$. □

Следствие 46.1. Ψ *есть функция, погружающая* $\mathbf{CNL_4^2}$ *в* $\mathbf{Cl}$.

Для того, чтобы получить аналогичный результат для $\mathbf{CNLL_4^2}$ необходима модификация функции Ψ. Однако в данном случае ситуация более сложная и обойтись простыми условиями перевода для бинарных связок, по всей видимости, не получится. Тем не менее, определить подходящую функцию перевода можно. Обозначим через Ψ' такую функцию, которая отличается от Ψ образами формул $\sim(B \wedge C)$ и $\sim(A \vee B)$, а в остальном совпадает с ней. Положим

$$\begin{aligned}\Psi'(\sim(B \wedge C)) = (\neg\Psi'(B) \wedge \Psi'(\sim B)) \vee (\neg\Psi'(C) \wedge \Psi'(\sim C)) \vee \\ \vee (\Psi'(\sim B) \wedge \Psi'(\sim C)), \\ \Psi'(\sim(B \vee C)) = (\Psi'(B) \wedge \Psi'(\sim B)) \vee (\Psi'(C) \wedge \Psi'(\sim C)) \vee \\ \vee (\Psi'(\sim B) \wedge \Psi'(\sim C)).\end{aligned}$$

Теперь для данного перевода необходимо доказать аналоги лемм 44 и 45. Для краткости обозначим через tr правые части равенств в определении функции Ψ'.

Лемма 47. *Для всякой* $\mathbf{CNLL_4^2}$*-оценки* v_3 *и формулы* $A \in \mathtt{For}_{cn\ell}$ *найдется классическая оценка* v_1 *такая, что*

$$v_1(\Psi'(A)) = t \iff v_3(A) \in \mathcal{D}.$$

Доказательство. Проверим наиболее важные случаи.

Случай $A = \sim(B \wedge C)$.

Имеем следующую эквиваленцию. $v_1(\Psi(\sim(B \wedge C))) = t \overset{\text{опр. }\Psi'}{\Rightarrow} v_1(tr) = t$. Отсюда видно, что любой из дизъюнктов части tr может принять значение t при оценке v_1. Проверим все три подслучая. Начнем с $v_1(\neg\Psi'(B) \wedge \Psi'(\sim B)) = t \overset{\text{у.и. }\wedge,\neg}{\Rightarrow} v_1(\Psi'(B)) = f$ и $v_1(\Psi'(\sim B)) = t \overset{\text{и.д.}}{\Rightarrow} v_3(B) \notin \mathcal{D}$ и $v_3(\sim B) \in \mathcal{D} \overset{\text{у.и. }\sim}{\Rightarrow} v_3(B) = \mathbf{FU} \overset{\text{у.и. }\wedge}{\Rightarrow} v_3(B \wedge C) = \mathbf{FU} \overset{\text{у.и. }\sim}{\Rightarrow} v_3(\sim(B \wedge C)) = \mathbf{T} \in \mathcal{D}$. Второй дизъюнктивный подслучай доказывается аналогично.

Далее выпишем цепочку импликативных утверждений: $v_1(\Psi'(\sim B) \wedge \Psi'(\sim C)) = t \overset{\text{у.и. }\wedge}{\Rightarrow} v_1(\Psi'(\sim B)) = t$ и $v_1(\Psi'(\sim C)) = t \overset{\text{и.д.}}{\Rightarrow} v_3(\sim B) \in \mathcal{D}$ и $v_3(\sim C) \in \mathcal{D} \overset{\text{у.и. }\sim}{\Rightarrow} v_3(B) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$ и $v_3(C) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\} \overset{\text{у.и. }\wedge}{\Rightarrow} v_3(B \wedge C) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\} \overset{\text{у.и. }\sim}{\Rightarrow} v_3(\sim(B \wedge C)) \in \mathcal{D}$.

Для обращения только что приведенных импликативных утверждений используем следующее: $v_3(\sim(B \wedge C)) \in \mathcal{D} \overset{\text{у.и. }\sim}{\Rightarrow} v_3(B \wedge C) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\} \overset{\text{у.и. }\wedge}{\Rightarrow}$ (a) $v_3(B) = v_3(C) = \mathbf{T}$ или (b) $v_3(B) = \mathbf{FU}$ или (c) $v_3(C) = \mathbf{FU}$.

Подслучай (a): $v_3(\sim B) = \mathbf{TU} \in \mathcal{D}$ и $v_3(\sim C) = \mathbf{TU} \in \mathcal{D} \overset{\text{и.д.}}{\Rightarrow} v_1(\Psi'(\sim B)) = t$ и $v_1(\Psi'(\sim C)) = t \overset{\text{у.и. }\wedge}{\Rightarrow} v_1(\Psi'(\sim B) \wedge \Psi'(\sim C)) = t \overset{\text{у.и. }\vee}{\Rightarrow} v_1(tr) = t \overset{\text{опр. }\Psi'}{\Rightarrow} v_1(\Psi'(\sim(B \wedge C))) = t$.

Подслучай (b): $v_3(B) = \mathbf{FU} \notin \mathcal{D} \overset{\text{у.и. }\sim}{\Rightarrow} v_3(\sim B) = \mathbf{T} \in \mathcal{D} \overset{\text{и.д.}}{\Rightarrow} v_1(\Psi'(B)) \neq t$ и $v_1(\Psi'(\sim B)) = t \overset{\text{у.и. }\wedge}{\Rightarrow} v_1(\neg\Psi'(B) \wedge \Psi'(\sim B)) = t \overset{\text{у.и. }\vee}{\Rightarrow} v_1(tr) = t \overset{\text{опр. }\Psi'}{\Rightarrow} v_1(\Psi'(\sim(B \wedge C))) = t$.

Подслучай (c) аналогично.

Случай $A = {\sim}(B \vee C)$.

$v_1(\Psi({\sim}(B \vee C))) = t \overset{\text{опр. }\Psi'}{\Rightarrow} v_1(tr) = t$. Как и раньше, любой из дизъюнктов tr может получить значение t при оценке v_1. Рассмотрим следующую цепочку импликаций: $v_1(\Psi'(B) \wedge \Psi'({\sim}B)) = t \overset{\text{у.и.}\wedge}{\Rightarrow} v_1(\Psi'(B)) = t$ и $v_1(\Psi'({\sim}B)) = t \overset{\text{и.д.}}{\Rightarrow} v_3(B) \in \mathscr{D}$ и $v_3({\sim}B) \in \mathscr{D} \overset{\text{у.и.}\sim}{\Rightarrow} v_3(B) = \mathbf{T} \overset{\text{у.и.}\vee}{\Rightarrow} v_3(B \vee C) = \mathbf{T} \overset{\text{у.и.}\sim}{\Rightarrow} v_3({\sim}(B \vee C)) = \mathbf{TU} \in \mathscr{D}$. Второй дизъюнктивный подслучай доказывается аналогично, а рассуждение для третьего подслучая легко может быть получено из аналогичного для ${\sim}(B \wedge C)$.

Для обращения импликативных утверждений используем следующее: $v_3({\sim}(B \vee C)) \in \mathscr{D} \overset{\text{у.и.}\sim}{\Rightarrow} v_3(B \vee C) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\} \overset{\text{у.и.}\vee}{\Rightarrow}$ (a) $v_3(B) = v_3(C) = \mathbf{FU}$ или (b) $v_3(B) = \mathbf{T}$ или (c) $v_3(C) = \mathbf{T}$.

Подслучай (a): $v_3({\sim}B) = \mathbf{T} \in \mathscr{D}$ и $v_3({\sim}C) = \mathbf{T} \in \mathscr{D} \overset{\text{IH}}{\Rightarrow} v_1(\Psi'({\sim}B)) = t$ и $v_1(\Psi'({\sim}C)) = t \overset{\text{у.и.}\wedge}{\Rightarrow} v_1(\Psi'({\sim}B) \wedge \Psi'({\sim}C)) = t \overset{\text{у.и.}\vee}{\Rightarrow} v_1(tr) = t \overset{\text{опр. }\Psi'}{\Rightarrow} v_1(\Psi'({\sim}(B \vee C))) = t$.

Подслучай (b): $v_3(B) = \mathbf{T} \in \mathscr{D} \overset{\text{у.и.}\sim}{\Rightarrow} v_3({\sim}B) = \mathbf{TU} \in \mathscr{D} \overset{\text{IH}}{\Rightarrow} v_1(\Psi'(B)) = t$ и $v_1(\Psi'({\sim}B)) = t \overset{\text{у.и.}\wedge}{\Rightarrow} v_1(\Psi'(B) \wedge \Psi'({\sim}B)) = t \overset{\text{у.и.}\vee}{\Rightarrow} v_1(tr) = t \overset{\text{опр. }\Psi'}{\Rightarrow} v_1(\Psi'({\sim}(B \vee C))) = t$.

Подслучай (c) аналогично. □

Теперь нетрудно получить доказательства для следующих двух лемм.

Лемма 48. *Для любой классической оценки v_1 и формулы $A \in \mathtt{For}_{cn\ell}$ существует $\mathbf{CNLL_4^2}$-оценка v_3 такая, что*

$$v_1(\Psi'(A)) = t \iff v_2(A) \in \mathscr{D}.$$

Лемма 49. *Для всяких формул $A, B \in \mathtt{For}_{cn\ell}$,*

$$A \models_{\mathbf{CNLL_4^2}} B \iff \Psi'(A) \models_{\mathbf{Cl}} \Psi(B).$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 46. □

Следствие 49.1. Ψ' *есть функция, погружающая* $\mathbf{CNLL_4^2}$ *в* $\mathbf{Cl}$.

§7. Аксиоматическое исчисление $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$

Системы бинарного следования, формализующие изучаемые в данной главе логические теории, относятся, пожалуй, к экзотическим вариантам исчислений. Для системы $\mathbf{CNL_4^2}$ были получены и исследованы и более привычные и распространенные формы исчислений (см. [10]), а именно аксиоматическое исчисление гильбертовского типа, обозначаемое $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$, и секвенциальное исчисление $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$. В этом разделе будет изложено аксиоматическое исчисление, доказаны стандартные метатеоретические результаты.

Алфавит языка исчисления $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$ расширяет алфавит языка системы $\mathbf{CNL_4^2}$ за счет добавления связки типа импликации $\to$. Стандартное определение формулы теперь содержит добавление относительно выражения вида $(A \to B)$, которое является формулой, если A и B – формулы.

Дедуктивные постулаты исчисления представляют собой схемы аксиом и единственное правило вывода – *modus ponens*. Приведем список схем аксиом исчисления $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$, $A, B, C \in \mathtt{For}_{cn\ell}$:

(A1) $A \to (B \to A)$,

(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

(A3) $(A \wedge B) \to A$,

(A4) $(A \wedge B) \to B$,

(A5) $A \to (B \to (A \wedge B))$,

(A6) $A \to (A \vee B)$,

(A7) $B \to (A \vee B)$,

(A8) $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$,

(A9) $({\sim}A \wedge {\sim}B) \leftrightarrow {\sim}(A \wedge B)$,

(A10) $({\sim}A \vee {\sim}B) \leftrightarrow {\sim}(A \vee B)$,

(A11) $(A \wedge {\sim}{\sim}{\sim}B) \to {\sim}{\sim}{\sim}(A \to B)$,

(A12) $({\sim}{\sim}B \to {\sim}{\sim}A) \to (({\sim}{\sim}B \to A) \to B)$,

Определения вывода (формулы A) из множества допущений Γ, отношения выводимости $\vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}}$, доказательства (формулы A) и доказуемой формулы – стандартные. Заметим, что выражение $\Gamma \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} A$ означает, как обычно, что существует вывод формулы A из множества допущений Γ, тогда как в контексте систем бинарного вывода смысл выражения $A \vdash_{\mathbf{CNL_4^2}} B$ заключается в том, что пара (A, B) является доказуемой в системе бинарного следования $\mathbf{CNL_4^2}$.

Лемма 50. *Следующие формулы доказуемы в исчислении* $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$*:*

(T1) $A \leftrightarrow {\sim}{\sim}{\sim}{\sim}A$,

(T2) $({\sim}{\sim}A \vee {\sim}{\sim}B) \leftrightarrow {\sim}{\sim}(A \wedge B)$,

(T3) $({\sim}{\sim}A \wedge {\sim}{\sim}B) \leftrightarrow {\sim}{\sim}(A \vee B)$,

(T4) $A \vee (A \to B)$,

(T5) ${\sim}{\sim}A \to (A \to B)$,

(T6) $A \vee {\sim}{\sim}A$,

(T7) $((A \to B) \to A) \to A$,

(T8) $(A \to B) \leftrightarrow ({\sim}{\sim}A \vee B)$.

Доказательство. Доказательство может быть получено из аналогичных доказательств в классическом аксиоматическом исчислении высказываний, при учете того, что комбинация ${\sim}{\sim}$ по своим свойствам не отличается от классического отрицания. $\square$

Для доказательства полноты и непротиворечивости сформулированного исчисления, потребуется распространить определение $\mathbf{CNL_4^2}$-оценки на формулы вида $A \to B$. Для этого необходимо расширить множество операций

Положим, что

$$v(A \to B) \in \mathcal{D} \iff v(A) \in \mathcal{D} \implies v(B) \in \mathcal{D},$$
$$v(A \to B) \notin \mathcal{D} \iff v(A) \in \mathcal{D} \ \ \& \ \ v(B) \notin \mathcal{D}.$$

Нетрудно проверить, что каждая из схем аксиом репрезентирует множество $\mathbf{CNL_4^2}$-общезначимых формул, а также и то, что правило *modus ponens* «сохраняет» выделенное значение формул, то есть, если значения посылок лежат в множестве $\mathcal{D}$, то там же лежит и значение заключения. Применяя стандартное рассуждение индукцией по длине вывода получаем следующую теорему.

Теорема 9 (О непротиворечивости)**.** *Пусть* $\Gamma, A \subseteq \mathtt{For}_{cn\ell}$. *Тогда имеет место следующее:*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{H}\mathbf{CNL_4^2}} A \implies \Gamma \vDash_{\mathbf{CNL_4^2}} A.$$

Для доказательства теоремы о полноте потребуется аналог $\mathbf{CNL_4^2}$-теории, задаваемой определением 52 с той лишь разницей, что в данном случае нужно постулировать замкнутость теории α относительно выводимости $\vdash_{\mathcal{H}\mathbf{CNL_4^2}}$. Другими словами, если $\Gamma \subseteq \alpha$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}\mathbf{CNL_4^2}} A$, то $A \in \alpha$, причем замкнутость относительно $\wedge$ отсюда следует непосредственно, благодаря аксиоме (A8). Будем называть теории только что описанного типа $\mathcal{H}\mathbf{CNL_4^2}$-теориями. Для *простой* $\mathcal{H}\mathbf{CNL_4^2}$-теории α также верно, что $A \vee B \in \alpha$ влечет $A \in \alpha$ или $B \in \alpha$ для всяких $A, B \in \mathtt{For}_{cn\ell}$.

Лемма о расширении формулируется и доказывается аналогично лемме 36.

Лемма 51. *Пусть* $\Gamma, A \subseteq \mathtt{For}_{cn\ell}$. *Если* $\Gamma \nvdash_{\mathcal{H}\mathbf{CNL_4^2}} A$, *то существует простая* $\mathcal{H}\mathbf{CNL_4^2}$*-теория* α *такая, что* $\Gamma \subseteq \alpha$ *и* $A \notin \alpha$.

Результирующая $\mathcal{H}\mathbf{CNL_4^2}$-теория α из данной леммы, очевидно, не совпадает со всем множеством $\mathtt{For}_{cn\ell}$. Такие теории будем называть *нетривиальными*.

Лемма 52. *Любая нетривиальная* $\mathcal{H}\mathbf{CNL_4^2}$*-теория* α *обладает свойством c-нормальности, то есть для всякой* $A \in \mathtt{For}_{cn\ell}$,

$$A \in \alpha \iff {\sim\sim} A \notin \alpha.$$

Доказательство. Пусть для некоторой формулы A верно, что $A \in \alpha$ и ${\sim\sim}A \in \alpha$. Тогда, принимая во внимание лемму 50 (T5), получаем, что для любой формулы B верно, что $B \in \alpha$, что противоречит нетривиальности α. Теперь допустим, что $A \notin \alpha$ и ${\sim\sim}A \notin \alpha$. Получаем противоречие со свойством простоты теории, вновь используя лемму 50 (T6). □

Сформулируем еще две вспомогательные леммы. Первая из них является по сути продолжением леммы 37, формулировка которой остается неизменной в отношении формул, содержащих в качестве главных знаков $\sim, \wedge$ и $\vee$.

Лемма 53. *Для всяких* $A, B \in \mathtt{For}_{cn\ell}$ *и всякой* $\mathbf{CNL_4^2}$*-оценки* v *верно следующее:*

(1) $v(A \to B) \in \mathcal{D} \iff v(A) \notin \mathcal{D}$ *или* $v(B) \in \mathcal{D}$,

(2) $v(A \to B) \in \mathcal{A} \iff v(A) \in \mathcal{D}$ *и* $v(B) \in \mathcal{A}$.

Лемма 54. *Для всякой простой* $\mathcal{H}\mathbf{CNL_4^2}$*-теории* α *и всяких* $A, B \in \mathtt{For}_{cn\ell}$ *верно, что*

$$A \to B \in \alpha \iff A \notin \alpha \text{ или } B \in \alpha.$$

Доказательство. Допустим, что $A \to B \in \alpha$ и при этом $A \in \alpha$ и $B \notin \alpha$. Тогда, используя правило *modus ponens*, сразу же получаем противоречие.

Для доказательства в обратную сторону рассмотрим два случая. Пусть, сначала, $A \notin \alpha$ и $A \to B \notin \alpha$. Тогда, используя лемму 50 (T4), получаем противоречие, поскольку α есть простая теория. Далее предположим, что $B \in \alpha$ и $A \to B \notin \alpha$. Противоречие легко получается из схемы аксиом (A1) и *modus ponens*. □

Используя простые $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$-теории можно задать соответствующую каноническую оценку v^c, которая задается точно так же, как и для системы $\mathbf{CNL_4^2}$, см. определение 53.

Далее оценка пропозициональных переменных v^c расширяется стандартным и единственным образом на все множество $\mathtt{For}_{cn\ell}$. Будем обозначать расширенную оценку тем же символом v^c. Доказательство того, что расширенная оценка ведет себя так же, как и исходная по отношению к простым $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$-теориям, будет несколько отличаться от доказательства леммы 38 о канонической оценке для $\mathbf{CNL_4^2}$, поскольку дедуктивные постулаты, и даже сам язык, теперь отличаются от того, что было ранее.

Лемма 55 (Лемма о канонической оценке для $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$). *Для каждой простой $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$-теории α, формулы A и расширенной канонической $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$-оценки v^c справедливы следующие утверждения:*

(1) $v^c(A) \in \mathcal{D} \iff A \in \alpha,$

(2) $v^c(A) \in \mathcal{A} \iff {\sim}^3 A \in \alpha.$

Доказательство. Проводится индукцией по построению формулы A. Базисный случай, когда $A \in \mathtt{Var}$, непосредственно следует из определения 53.

Далее рассмотрим случаи, в которых A есть сложная формула.

Случай $A = {\sim}B$.

$v^c({\sim}B) \in \mathcal{D} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \notin \mathcal{A} \overset{\text{и.д.}}{\iff} {\sim}^3 B \notin \alpha \overset{\text{лем.52}}{\iff} {\sim}B \in \alpha.$

$v^c({\sim}B) \in \mathcal{A} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \in \mathcal{D} \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \in \alpha \overset{\text{(T1)}}{\iff} {\sim}^4 B \in \alpha.$

Случай $A = B \wedge C$.

$v^c(B \wedge C) \in \mathcal{D} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \in \mathcal{D}$ и $v^c(C) \in \mathcal{D} \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \in \alpha$ и $C \in \alpha \overset{\text{(A1),(A3),(A4)}}{\iff} B \wedge C \in \alpha.$

$v^c(B \wedge C) \in \mathcal{A} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \in \mathcal{A}$ или $v^c(C) \in \mathcal{A} \overset{\text{и.д.}}{\iff} {\sim}^3 B \in \alpha$ или ${\sim}^3 C \in \alpha \overset{\text{лем.52}}{\iff} {\sim}B \notin \alpha$ или ${\sim}C \notin \alpha \overset{\text{(A8),(A9)}}{\iff} {\sim}(B \wedge C) \notin \alpha \overset{\text{лем.52}}{\iff} {\sim}^3(B \wedge C) \in \alpha.$

Случай $A = B \vee C$.

$v^c(B \vee C) \in \mathcal{D} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \in \mathcal{D}$ или $v^c(C) \in \mathcal{D} \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \in \alpha$ или $C \in \alpha \overset{\text{(A6),(A7),прост.}}{\iff} B \vee C \in \alpha.$

$v^c(B \vee C) \in \mathcal{A} \overset{\text{лем.37}}{\iff} v^c(B) \in \mathcal{A}$ и $v^c(C) \in \mathcal{A} \overset{\text{и.д.}}{\iff} {\sim}^3 B \in \alpha$ и ${\sim}^3 C \in \alpha \overset{\text{лем.52}}{\iff} {\sim}B \notin \alpha$ и ${\sim}C \notin \alpha \overset{\text{(A10),прост.}}{\iff} {\sim}(B \vee C) \notin \alpha \overset{\text{лем.52}}{\iff} {\sim}^3(B \vee C) \in \alpha.$

Случай $A = B \to C$.

$v^c(B \to C) \in \mathcal{D} \overset{\text{лем.53}}{\iff} v^c(B) \notin \mathcal{D}$ или $v^c(C) \in \mathcal{D} \overset{\text{и.д.}}{\iff} B \notin \alpha$ или $C \in \alpha \overset{\text{лем.52}}{\iff} {\sim}{\sim}B \in \alpha$ или $C \in \alpha \overset{\text{(T8), прост.}}{\iff} B \to C \in \alpha.$

$v^c(B \to C) \in \mathscr{A} \overset{\text{лем.53}}{\Longleftrightarrow} v^c(B) \in \mathscr{D}$ и $v^c(C) \in \mathscr{A} \overset{\text{и.д.}}{\Longleftrightarrow} B \in \alpha$ и $\sim^3 C \in \alpha \overset{(A3)\text{–}(A5),(A11)}{\Longleftrightarrow}$ $\sim^3(B \to C) \in \alpha$.

$\square$

Теперь есть все необходимое для доказательства следующей теоремы.

Теорема 10 (О ПОЛНОТЕ)**.** *Пусть* $\Gamma, A \subseteq \mathtt{For}_{cn\ell}$. *Тогда имеет место следующее:*

$$\Gamma \models_{\mathbf{CNL_4^2}} A \implies \Gamma \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} A.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 7. $\square$

§8. Секвенциальное исчисление $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$

В этом разделе будет сформулировано секвенциальное исчисление $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$, формализующее ту же самую логическую теорию, что и исчисление $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$. Для начала дадим общие технические определения.

Секвенцией называют пару $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ конечных множеств формул некоторого языка $\mathscr{L}$, обычно записываемую как выражение $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Множество Γ в таком случае есть антецедент, а множество Δ – сукцедент данной секвенции. Если необходимо выделить некоторую формулу A в антецеденте и или сукцеденте секвенции, будем применять запись $A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ или $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$, соответственно и называть A «выделенной» формулой, а множества Γ и Δ – контекстами секвенции. Будем также говорить о секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$ языка $\mathscr{L}$, имея в виду, что все формулы из множеств Γ и Δ принадлежат $\mathscr{L}$.

Приведем дедуктивные постулаты секвенциального исчисления $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$[16]:

Основные секвенции исчисления $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$ имеют следующий вид (где $p \in \mathtt{Var}$):

$$(Ax)\ p \Rightarrow p \qquad (Ax_\neg)\ {\sim}p \Rightarrow {\sim}p$$

Структурные правила секвенциального исчисления $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$:

$$(W \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}, \qquad (\Rightarrow W)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}, \qquad (Cut)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Theta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Pi},$$

[16]Исчисление $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$ первоначально было сформулировано в работе [10], но с иными правилами $({\sim}{\to} \Rightarrow)$, $(\Rightarrow {\sim}{\to})$, требующими обязательного наличия в исчислении правила (Cut). Видоизмененные правила $({\sim}{\to} \Rightarrow)$, $(\Rightarrow {\sim}{\to})$, приводимые здесь, были сформулированы в статье [68].

Правила для пропозициональных связок

$$(\Rightarrow\sim\sim)\ \frac{A,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\sim\sim A}\qquad(\sim\sim\Rightarrow)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A}{\sim\sim A,\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{A,B,\Gamma\Rightarrow\Delta}{A\wedge B,\Gamma\Rightarrow\Delta}\qquad(\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\quad\Gamma\Rightarrow\Delta,B}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\wedge B}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{A,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad B,\Gamma\Rightarrow\Delta}{A\vee B,\Gamma\Rightarrow\Delta}\qquad(\Rightarrow\vee)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A,B}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\vee B}$$

$$(\Rightarrow\to)\ \frac{A,\Gamma\Rightarrow\Delta,B}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\to B}\qquad(\to\Rightarrow)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\qquad B,\Theta\Rightarrow\Pi}{A\to B,\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Pi}$$

$$(\sim\wedge\Rightarrow)\ \frac{\sim A,\sim B,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\sim(A\wedge B),\Gamma\Rightarrow\Delta}\qquad(\Rightarrow\sim\wedge)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\sim A\qquad\Gamma\Rightarrow\Delta,\sim B}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\sim(A\wedge B)}$$

$$(\sim\vee\Rightarrow)\ \frac{\sim A,\Gamma\Rightarrow\Delta\qquad\sim B,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\sim(A\vee B),\Gamma\Rightarrow\Delta}\qquad(\Rightarrow\sim\vee)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\sim A,\sim B}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\sim(A\vee B)}$$

$$(\sim\to\Rightarrow)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\qquad\sim B,\Theta\Rightarrow\Pi}{\sim(A\to B),\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Pi}\qquad(\Rightarrow\sim\to)\ \frac{A,\Gamma\Rightarrow\Delta,\sim B}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\sim(A\to B)}$$

Замечание 8. Каждое правило исчисления является схемой, которая репрезентирует множество пар вида $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle$ или $\langle\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle,\mathfrak{c}\rangle$, где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ пробегают по множеству секвенций. Множество таких пар есть множество применений правила. $\triangleleft$

Дадим определение доказательства секвенции S в исчислении $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$. Общая идея состоит в том, что доказательство в исчислении $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$ представляет собой дерево[17] $\mathscr{T}$, вершины которого содержат отдельные секвенции (отмечены секвенциями) языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$, в то время как построение дерева осуществляется путем применения правил исчисления. Нерекурсивное описание такой конструкции предполагает также, что:

(i) листья $\mathscr{T}$ содержат основные секвенции;

[17]Будем считать уже известным подходящее определение дерева. Например, как реляционной структуры $(S,<)$, в которой $S\neq\emptyset$; $<$ есть иррефлексивное транзитивное бинарное отношение; существует $r\in S$ такой, что из него достижим любой другой элемент из S по транзитивному замыканию отношения $<$ и каждый элемент из $S\setminus\{r\}$ имеет ровно одного предшественника по $<$.

(ii) корень $\mathcal{T}$ содержит секвенцию S;

(iii) любая вершина в $\mathcal{T}$ имеет не более двух наследников;

(iv) если вершина $N \in \mathcal{T}$ имеет единственного наследника N', то существует применение одного из правил системы $\mathcal{G}\mathbf{CNL_4^2}$ вида $\langle N', N\rangle$;

(v) если у вершины $N \in \mathcal{T}$ имеется два наследника N' и N'', то существует применение одного из правил системы $\mathcal{G}\mathbf{CNL_4^2}$ вида $\langle\langle N', N''\rangle/N\rangle$.

Однако для доказательств метатеорем индукцией по построению дерева требуется индуктивное определение доказательства секвенции. Будем считать доказанными следующие факты: если имеется дерево $\mathcal{T}$ с корнем r, то добавление к $\mathcal{T}$ нового элемента r', предшественника для r, дает дерево $\mathcal{T}'$ с корнем r' (символически $\dfrac{\mathcal{T}}{r'}$); если имеются деревья $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ с корнями r_1 и r_2, соответственно, то добавление нового элемента r', предшественника для r_1 и r_2, дает новое дерево $\mathcal{T}'$ с корнем r' (символически $\dfrac{\mathcal{T}_1 \quad \mathcal{T}_2}{r'}$).

Определение 55. [Доказательство секвенции S]

(1) Основная секвенция S есть доказательство секвенции S;

(2) Если $\mathcal{T}$ есть доказательство секвенции S', а пара $\langle S', S\rangle$ есть применение одного из однопосылочных правил исчисления $\mathcal{G}\mathbf{CNL_4^2}$, то $\dfrac{\mathcal{T}}{S}$ есть доказательство секвенции S;

(3) Если $\mathcal{T}_1$ есть доказательство секвенции S', $\mathcal{T}_2$ есть доказательство секвенции S'', а пара $\langle\langle S', S''\rangle, S\rangle$ есть применение одного из двухпосылочных правил системы $\mathcal{G}\mathbf{CNL_4^2}$, то $\dfrac{\mathcal{T}_1 \quad \mathcal{T}_2}{S}$ есть доказательство секвенции S;

(4) Ничто иное доказательством секвенции S не является.

$\lhd$

Определим далее функцию h, меру *высоты доказательства секвенции* S. Для краткости будем говорить, что секвенция S получена из секвенции S' (секвенций S', S''), если существует применение однопосылочного (двухпосылочного) правила $\langle S', S\rangle$ ($\langle\langle S', S''\rangle, S\rangle$) исчисления $\mathcal{G}\mathbf{CNL_4^2}$.

Определение 56. (1) Если $\mathcal{T}$ есть доказательство основной секвенции, то $h(\mathcal{T}) = 0$.

(2) Если $\mathscr{T}$ есть доказательство секвенции S, полученной из секвенции S', доказательство которой есть $\mathscr{T}'$, то $h(\mathscr{T}) = h(\mathscr{T}') + 1$.

(3) Если $\mathscr{T}$ есть доказательство секвенции S, полученной из секвенций S' и S'', доказательства которых есть $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ соответственно, то $h(\mathscr{T}) = max(h(\mathscr{T}_1), h(\mathscr{T}_2))$. ◁

Определение 57. Секвенция S является доказуемой в $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$ ($\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2} \vdash S$), если существует ее доказательство в системе $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$. ◁

Доказуемая секвенция S находится в корне дерева T, представляющего собой ее доказательство. Для краткости будем говорить, что S есть *последняя* секвенция в T, предполагая, таким образом, что построение доказательства начинается с исходных секвенций, находящихся в «листьях» дерева и заканчивается его корнем. Кроме того, применение правила, в результате которого была получена секвенция корня дерева T, будем называть последним применением правила в доказательстве, представляющем собой дерево T.

Формульным образом секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$ в языке $\mathscr{L}_{cn\ell}$ называется формула вида $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$. При этом принимается соглашение,что $\bigwedge \varnothing = (p \to p)$, а $\bigvee \varnothing = (p \wedge \sim\sim p)$, для некоторой фиксированной пропозициональной переменной p. Для удобства можно задать функцию ρ, определенную на множестве секвенций, которая каждой секвенции S ставит в соответствие ее формульный образ $\rho(S)$.

Полноту и непротиворечивость системы $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$ можно показать опосредованным образом, пользуясь уже установленными результатами семантической адекватности исчисления $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$, а также тем, что обе дедуктивные системы сформулированы в одном языке.

Теперь дадим семантическую характеризацию секвенций.

Определение 58. Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть секвенция, построенная из формул языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$.

Секвенция выполнима в матрице $\mathscr{M}^{\mathbf{CNL_4^2}}$, если для некоторой $\mathbf{CNL_4^2}$-оценки v верно, что если $v(A) \in \mathscr{D}$ для всякой формулы $A \in \Gamma$, то $v(B) \in \mathscr{D}$ для некоторой формулы $B \in \Delta$.

Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ называется $\mathbf{CNL_4^2}$-общезначимой (символически $\vDash_{\mathbf{CNL_4^2}} \Gamma \Rightarrow \Delta$), если она выполнима в матрице $\mathscr{M}^{\mathbf{CNL_4^2}}$ при любой $\mathbf{CNL_4^2}$-оценке. ◁

Лемма 56. *Пусть* $\Gamma, A \subseteq \mathtt{For}_{cn\ell}$. *Тогда*

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} A \implies \vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}} \Gamma \Rightarrow A.$$

Доказательство. Индукцией по длине доказательства в исчислении $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$. Для этого нужно сначала показать, что все аксиомы исчисления $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$ доказуемы в исчислении $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$, а также, что правило *modus ponens* доказуемо в $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$. Приведем в качестве примера следующее доказательство, которое для удобства разобьем на части.

Сначала получаем:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B \Rightarrow {\sim\sim}B,\, B}\,(\Rightarrow W)}{\Rightarrow {\sim\sim}B,\, B,\, {\sim\sim}B}\,(\Rightarrow{\sim\sim}) \qquad \dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B,\, A \Rightarrow B}\,(W\Rightarrow)}{A \Rightarrow B,\, {\sim\sim}B}\,(\Rightarrow{\sim\sim})}{{\sim\sim}B \to A \Rightarrow B,\, {\sim\sim}B}\,(\to\Rightarrow)$$

Затем:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B,\, {\sim\sim}A \Rightarrow B}\,(W\Rightarrow)}{{\sim\sim}A \Rightarrow B,\, {\sim\sim}B}\,(\Rightarrow{\sim\sim}) \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow B,\, A}\,(\Rightarrow W)}{{\sim\sim}A,\, A \Rightarrow B}\,({\sim\sim}\Rightarrow)}{{\sim\sim}A,\, {\sim\sim}B \to A \Rightarrow B}\,(\to\Rightarrow)$$

Наконец, соединяя полученные подвыводы, имеем доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{{\sim\sim}B \to A \Rightarrow B,\, {\sim\sim}B} \qquad \dfrac{\vdots}{{\sim\sim}A,\, {\sim\sim}B \to A \Rightarrow B}}{{\sim\sim}B \to {\sim\sim}A, {\sim\sim}B \to A \Rightarrow B}\,(\to\Rightarrow)}{{\sim\sim}B \to {\sim\sim}A \Rightarrow ({\sim\sim}B \to A) \to B}\,(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow ({\sim\sim}B \to {\sim\sim}A) \to ({\sim\sim}B \to A) \to B}\,(\Rightarrow\to)$$

□

Теперь докажем обратное утверждение.

Лемма 57. *Пусть* $\Gamma, A \subseteq \mathtt{For}_{cn\ell}$. *Тогда*

$$\vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}} \Gamma \Rightarrow A \implies \Gamma \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} A.$$

Доказательство. Для основных секвенций утверждение леммы верно в силу того, что имеет место $A \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} A$.

Допустим, что для секвенции $\Gamma \Rightarrow A$ имеется доказательство высоты n. По допущению индукции, утверждение леммы выполняется для посылок применения правила, по которому получена секвенция $\Gamma \Rightarrow A$, поскольку посылки применения правила тоже доказуемы в исчислении $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$ и высота их доказательств меньше n. Пусть, например, посылки применения правила имеют вид $\Gamma' \Rightarrow A'$ и $\Gamma'' \Rightarrow A''$.

По допущению индукции имеем $\Gamma' \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} A'$ и $\Gamma'' \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} A''$, что равносильно $\vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} \bigwedge \Gamma' \to A'$ и $\vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} \bigwedge \Gamma'' \to A''$. Остается показать, что из этих двух импликативных формул выводима формула $\bigwedge \Gamma \to A$.

Для этих целей необходимо показать, что для всякого правила секвенциального исчисления $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$ верно, что $\rho(S_1) \models_{\mathbf{CNL_4^2}} \rho(S)$ (в случае однопосылочного правила) или $\rho(S_1), \rho(S_2) \models_{\mathbf{CNL_4^2}} \rho(S)$ (в случае двухпосылочного). Далее, пользуясь теоремой о полноте исчисления $\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}$, отсюда получим, что $\rho(S_1) \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} \rho(S)$ или $\rho(S_1), \rho(S_2) \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} \rho(S)$

Рассмотрим в качестве примера два случая.

Случай $(\Rightarrow \sim\wedge)$. Допустим, что $v(\rho(\Gamma \Rightarrow \sim A)) \in \mathscr{D}$, $v(\rho(\Gamma \Rightarrow \sim B)) \in \mathscr{D}$ и $v(\bigwedge \Gamma) \in \mathscr{D}$. Из первых двух допущений, применяя определение функции оценки, извлекаем следующие эквиваленции:

$$v(\rho(\Gamma \Rightarrow \sim A)) \in \mathscr{D} \iff v(\bigwedge \Gamma \to \sim A) \in \mathscr{D} \iff v(\bigwedge \Gamma) \notin \mathscr{D} \text{ или } v(A) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\},$$
$$v(\rho(\Gamma \Rightarrow \sim B)) \in \mathscr{D} \iff v(\bigwedge \Gamma \to \sim B) \in \mathscr{D} \iff v(\bigwedge \Gamma) \notin \mathscr{D} \text{ или } v(B) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}.$$

Используя допущение $(\bigwedge \Gamma) \in \mathscr{D}$, получим $v(A) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$ и $v(B) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$, что в результате дает $\sim(A \wedge B) \in \mathscr{D}$.

Случай $(\Rightarrow \sim \to)$. Предположим, что $v(\rho(A, \Gamma \Rightarrow \sim B)) \in \mathscr{D}$ и $v(\bigwedge \Gamma) \in \mathscr{D}$. Первое из допущений приводит к следующим эквиваленциям:

$$v(\rho(A, \Gamma \Rightarrow \sim B)) \in \mathscr{D} \iff v(A \wedge \bigwedge \Gamma \to \sim B) \in \mathscr{D}$$
$$\iff v(A \wedge \bigwedge \Gamma) \notin \mathscr{D} \text{ или } v(\sim B) \in \mathscr{D}.$$

Используя допущение $v(\bigwedge \Gamma) \in \mathscr{D}$, получим $v(A) \notin \mathscr{D}$ или $v(B) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$. Нетрудно проверить, что тогда $v(A \to B) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{FU}\}$. Таким образом, $v(\sim(A \to B)) \in \mathscr{D}$. □

На основании лемм 56 и 57 сформулируем следующую теорему.

Теорема 11. *Пусть* $\Gamma, A \subseteq \mathtt{For}_{cn\ell}$. *Тогда*

$$\vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}} \Gamma \Rightarrow A \iff \Gamma \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} A.$$

В качестве следствия данной теоремы получим теорему об адекватности исчисления $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$.

Следствие 57.1. *Пусть* $\Gamma, A \subseteq \mathtt{For}_{cn\ell}$. *Тогда*

$$\vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}} \Gamma \Rightarrow A \iff \models_{\mathbf{CNL_4^2}} \Gamma \Rightarrow A.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}} \Gamma \Rightarrow A$, тогда, согласно теореме 11, $\Gamma \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} A$. Далее из теоремы 9 получаем $\Gamma \models_{\mathbf{CNL_4^2}} A$.

($\Leftarrow$) Теперь допустим, что $\Gamma \models_{\mathbf{CNL_4^2}} A$. Сначала применим теорему 10, чтобы получить $\Gamma \vdash_{\mathscr{H}\mathbf{CNL_4^2}} A$, а затем по теореме 11, $\vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}} \Gamma \Rightarrow A$. $\square$

Перейдем к доказательству фундаментального для секвенциальных исчислений результата об устранимости правила сечения. Доказательство устранимости правила сечения в секвенциальном исчислении $\mathscr{G}\mathbf{CNL_4^2}$ может быть проведено как непосредственно, синтаксически, так и опосредованно, через погружение в подходящее секвенциальное исчисление, для которого данная теорема уже доказана. Доказательства устранимости сечения через погружение часто применяются в работах, посвященных исследованию n-решеточных логик (см., например, [62, 64]). В данном случае подходящим секвенциальным исчислением является классическое пропозициональное исчисление секвенций $\mathscr{G}\mathbf{CL}$, сформулированное в языке $\mathscr{L}_{c\ell}$, алфавит которого состоит из множества пропозициональных переменных $\mathtt{Var}$, множества пропозициональных связок $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$ и скобок. Однако для технических целей, связанных с определением функции перевода, будем полагать, что множество $\mathtt{Var}$ обогащается копиями каждой пропозициональной переменной. Пусть $\mathtt{Var}^* = \{p^* \mid p \in \mathtt{Var}\}$. Таким образом, получаем $\mathtt{Var} \cup \mathtt{Var}^*$ в качестве нового множества пропозициональных переменных. Поскольку множество формул обогащенного таким образом языка существенным образом не изменяется, оставим для его обозначения имя $\mathscr{L}_{c\ell}$. Определение секвенции такое же, как было дано в начале данного раздела.

Дедуктивными постулатами секвенциального исчисления $\mathscr{G}\mathbf{CL}$ являются основные секвенции вида $p \Rightarrow p$, где $p \in \mathtt{Var} \cup \mathtt{Var}^*$ и правила для пропозициональных связок, описываемые следующими схемами:

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg)\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \qquad (\vee \Rightarrow)\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\to)\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B} \qquad (\to\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Структурные правила исчисления $\mathscr{G}\mathbf{CL}$: $(W \Rightarrow)$, $(\Rightarrow W)$ и (Cut).

Теперь определим функцию перевода из языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$ в язык $\mathscr{L}_{c\ell}$.

Определение 59. Отображение $f\colon \mathscr{L}_{cn\ell} \mapsto \mathscr{L}_{c\ell}$ есть перевод формул языка $\mathscr{L}_{cn\ell}$ в формулы языка $\mathscr{L}_{c\ell}$, если выполнены следующие условия:

(1) $f(p) = p$, $f({\sim}p) = p^*$, для всякой $p \in \mathtt{Var}$,

(2) $f(A \circ B) = f(A) \circ f(B)$, где $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$,

(3) $f({\sim}{\sim}A) = \neg f(A)$,

(4) $f({\sim}(A \wedge B)) = f({\sim}A) \wedge f({\sim}B)$,

(5) $f({\sim}(A \vee B)) = f({\sim}A) \vee f({\sim}B)$,

(6) $f({\sim}(A \to B)) = f(A) \to f({\sim}B)$.

$\triangleleft$

Условимся, что $f(\Gamma)$ обозначает множество $\{f(A) \mid A \in \Gamma\}$. Будем использовать обозначения $\mathscr{G}\mathbf{CNL^2_{4}}_{-Cut}S$ и $\mathscr{G}\mathbf{CL}_{-Cut}S$ для соответствующих исчислений, но без правила сечения, а также $\vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CNL^2_{4}}_{-Cut}} S$ и $\vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CL}_{-Cut}} S$ для указания на то, что секвенция S доказуема в этих исчислениях.

Теперь сформулируем основную техническую лемму данного раздела.

Лемма 58. *Пусть* Γ *и* Δ *есть конечные множества формул языка* $\mathscr{L}_{cn\ell}$, f *есть функция перевода. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) $\vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CNL^2_4}} \Gamma \Rightarrow \Delta \implies \vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CL}} f(\Gamma) \Rightarrow f(\Delta)$,

(2) $\vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CL}_{-Cut}} f(\Gamma) \Rightarrow f(\Delta) \implies \vdash_{\mathscr{G}\mathbf{CNL^2_{4}}_{-Cut}} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Доказательство. (1) Проводится индукцией по длине доказательства P секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$ в исчислении $\mathscr{G}\mathbf{CNL^2_4}$.

Случай, когда $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть основная секвенция тривиален. Рассмотрим некоторые случаи применения правил для пропозициональных связок.

Случай $(\Rightarrow \sim\sim)$. Допустим, что $\Gamma \Rightarrow \Delta$ имеет вид $\Gamma \Rightarrow \Delta', \sim\sim A$ и последнее применение правила в доказательстве P есть

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \sim\sim A}\,(\Rightarrow \sim\sim)$$

По допущению индукции имеем $\vdash_{\mathcal{G}\mathbf{CL}} f(A), f(\Gamma) \Rightarrow f(\Delta')$, так что остается расширить это доказательство применением правила $(\Rightarrow \neg)$

$$\frac{f(A), f(\Gamma) \Rightarrow f(\Delta')}{f(\Gamma) \Rightarrow f(\Delta'), \neg f(A)}\,(\Rightarrow \neg)$$

где $\neg f(A) = f(\sim\sim A)$ как и требуется.

Случай $(\sim\vee \Rightarrow)$. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ имеет вид $\sim(A \vee B), \Gamma' \Rightarrow \Delta$ и последнее применение правила в P есть

$$\frac{\sim A, \Gamma' \Rightarrow \Delta \qquad \sim B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\sim(A \vee B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(\sim\vee \Rightarrow)$$

По допущению индукции имеются доказательства посылок следующего применения привила:

$$\frac{f(\sim A), f(\Gamma') \Rightarrow f(\Delta) \qquad f(\sim B), f(\Gamma') \Rightarrow f(\Delta)}{f(\sim A) \vee f(\sim B), f(\Gamma') \Rightarrow f(\Delta)}\,(\vee \Rightarrow)$$

где $f(\sim A) \vee f(\sim(B)) = f(\sim(A \vee B))$.

Случай $(\sim\to \Rightarrow)$. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ имеет вид $\sim(A \to B), \Gamma', \Theta' \Rightarrow \Delta', \Pi'$ и последнее применение правила в доказательстве P имеет вид

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta', A \qquad \neg B, \Theta' \Rightarrow \Pi'}{\sim(A \to B), \Gamma', \Theta' \Rightarrow \Delta', \Pi'}\,(\sim\to \Rightarrow)$$

Используем доказуемость по допущению индукции секвенций в посылках следующего подвывода:

$$\frac{f(\Gamma') \Rightarrow f(\Delta'), f(A) \qquad f(\sim B), f(\Theta') \Rightarrow f(\Pi')}{f(A) \to f(\sim B), f(\Gamma'), f(\Theta') \Rightarrow f(\Delta'), f(\Pi')}\,(\to\Rightarrow)$$

Наконец, $f(A) \to f(\sim B)) = f(\sim(A \to B))$.

Случай $(\Rightarrow \sim\to)$. Пусть $\Gamma \Rightarrow \Delta$ имеет вид $\Gamma' \Rightarrow \Delta', \sim(A \to B)$ и последнее применение правила в P есть

$$\frac{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \sim B}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \sim(A \to B)}\,(\Rightarrow \sim\to)$$

Вновь применяя допущение индукции, получаем доказуемость секвенции посылки в следующем применении правила $(\Rightarrow\to)$:

$$\frac{f(A), f(\Gamma') \Rightarrow f(\Delta'), f({\sim}B)}{f(\Gamma') \Rightarrow f(\Delta'), f(A) \to f({\sim}B)}\,(\Rightarrow\to)$$

для заключения которого справедливо $f(A) \to f({\sim}B) = f({\sim}(A \to B))$.

(2) Общая идея доказательства остается прежней. Допустим, что уже обосновано $\vdash_{\mathcal{G}\mathbf{CL}_{-Cut}} f(\Gamma) \Rightarrow f(\Delta)$ для некоторой секвенции $f(\Gamma) \Rightarrow f(\Delta)$. Рассмотрим различные случаи заключительного применения правила в доказательстве и применим допущение индукции по отношению к секвенциям в посылках этого применения правила, чтобы получить в результате требуемое доказательство в исчислении $\mathcal{G}\mathbf{CNL}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{4}-Cut}$.

Для случая основных секвенций $f(\Gamma) \Rightarrow f(\Delta)$ есть просто $p \Rightarrow p$ или $p^* \Rightarrow p^*$ для некоторой $p \in \mathtt{Var}$. Ясно, что их возможные прообразы имеют вид $p \Rightarrow p$ или ${\sim}p \Rightarrow {\sim}p$, то есть являются основными секвенциями исчисления $\mathcal{G}\mathbf{CNL}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{4}}$, доказуемыми и в $\mathcal{G}\mathbf{CNL}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{4}-Cut}$. Далее рассмотрим некоторые случаи применения пропозициональных правил.

Случай $(\neg \Rightarrow)$. Предположим сначала, что секвенция $f(\Gamma) \Rightarrow f(\Delta)$ имеет вид $f({\sim}{\sim}A), f(\Gamma') \Rightarrow f(\Delta)$ и является последней в доказательстве в исчислении $\mathcal{G}\mathbf{CL}_{-Cut}$. Поскольку $f({\sim}{\sim}A) = \neg f(A)$, последнее правило, примененное в доказательстве есть $(\neg \Rightarrow)$:

$$\frac{f(\Gamma') \Rightarrow f(\Delta), f(A)}{\neg f(A), f(\Gamma') \Rightarrow f(\Delta)}\,(\neg \Rightarrow)$$

По допущению индукции имеем доказательство секвенции $\Gamma' \Rightarrow \Delta, A$ в исчислении $\mathcal{G}\mathbf{CNL}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{4}-Cut}$. Применяя правило, $({\sim}{\sim} \Rightarrow)$ получаем $\Gamma', {\sim}{\sim}A \Rightarrow \Delta$, то есть $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Случай $(\wedge \Rightarrow)$. Далее допустим, что $f(\Gamma) \Rightarrow f(\Delta)$ имеет вид $f(\Gamma'), f({\sim}(A \wedge B)) \Rightarrow \Delta$. Поскольку $f({\sim}(A \wedge B)) = f({\sim}A) \wedge f({\sim}B)$ последнее применение правила в доказательстве есть

$$\frac{f(\Gamma'), f({\sim}A), f({\sim}B) \Rightarrow f(\Delta)}{f(\Gamma'), f({\sim}A) \wedge f({\sim}B) \Rightarrow f(\Delta)}\,(\wedge \Rightarrow)$$

В соответствии с допущением индукции, получаем, что $\Gamma', {\sim}A, {\sim}B \Rightarrow \Delta$ уже имеет доказательство в $\mathcal{G}\mathbf{CNL}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{4}-Cut}$. Расширим его следующим применением правила:

$$\frac{\Gamma', {\sim}A, {\sim}B \Rightarrow \Delta}{\Gamma', {\sim}(A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\,({\sim}\wedge \Rightarrow)$$

Остальные случаи доказываются аналогично. $\square$

§9. Циклические отрицания и коннегация

Вопросу о том, какими характеристическими свойствами должна обладать унарная связка для того, чтобы считаться отрицанием, посвящена обширная литература (см., например [32, 67, 92, 37]). Характеризация отрицания в логических системах может быть дана в чисто синтаксических терминах, как набор постулатов некоторой логической теории, а может быть получена на основе определенных семантических соображений. Например, в классической статье М. Данна [32], где была предложена известная диаграмма, *kite of negations*, репрезентирующая отношения между различными видами отрицаний, наименьшее отрицание (субминимальное) должно удовлетворять принципу контрапозиции, который в логической теории, для которой определено отношение $\vdash$ на множестве формул (как, например, в системе $\mathbf{CNL_4^2}$), задается правилом

$$A \vdash B / \neg B \vdash \neg A.$$

Для циклического отрицания это правило не является корректным (хотя оно корректно для удвоенного циклического отрицания). Вопрос о том, является ли циклическое отрицание отрицанием в каком-то конвенциональном понимании этого термина, остается таким образом открытым и ответ на него зависит от общего взгляда на природу отрицания в целом.

Однако, циклические отрицания, изученные в данной главе, можно рассматривать и вовсе как частные случаи «более общей» пропозициональной связки, которая в работе [10] получила название «коннегация». Сам термин является производным от двух других терминов – «отрицание» («негация») и «конфляция» – используемых в теории бирешеток и при этом обозначающих как сами унарные операции в бирешетках, так и соответствующие им пропозициональные связки в логических исчислениях (см. [9]).

Подразумевается, что коннегация, при рассмотрении с семантической точки зрения, сочетает свойства обеих бирешеточных операций или же, с синтаксической точки зрения, обладает некоторыми синтаксическими свойствами отрицания и в то же время некоторыми свойствами конфляции.

Как отмечается в [10], сама коннегация может пониматься двояко. Циклические отрицания, изученные в работах [63, 74], также обладают некоторыми свойствами отрицания и конфляции, но в ином сочетании, нежели циклические отрицания данной главы. Рассмотрим вопрос об отношении циклических отрицаний и коннегаций более детально.

Поскольку бирешетка $\mathcal{FOUR}$ является наименьшей нетривиальной четырехэлементной бирешеткой, в которой в качестве множества-носителя берется множество $\mathbf{4} = \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{F}\}$ белнаповских истинностных значений, уместно использовать именно эту конструкцию для характеризации бирешеточных отрицания и конфляции. Помимо этого, используем также содержательную интерпретацию белнаповских истинностных значений: формула A по крайней мере истинна, если ее значения лежат в множестве $\{\mathbf{T}, \mathbf{B}\}$, поскольку, как теоретико-множественные объекты, оба значения содержат классическое значение T; формула A по крайней мере ложна, если ее значения лежат в множестве $\{\mathbf{B}, \mathbf{F}\}$. Также, например, формула A по крайней мере не истинна, если ее значения лежат в множестве $\{\mathbf{F}, \mathbf{N}\}$.

Отрицание, как бирешеточная пропозициональная связка, отвечает следующим свойствам:

(1) $\neg A$ по крайней мере истинна, если и только если A по крайней мере ложна;

(2) $\neg A$ по крайней мере ложна, если и только если A по крайней мере истинна.

В то же время конфляция характеризуется следующими свойствами

(i) $\sim A$ по крайней мере истинна, если и только если A по крайней мере не ложна;

(ii) $\sim A$ по крайней мере ложна, если и только если A по крайней мере не истинна.

С содержательной точки зрения отрицание можно понимать как логический термин, который позволяет выразить на синтаксическом уровне ложность некоторого утверждения A как некую семантическую противоположность его истинности. Другими словами, как бы мы не понимали или не называли[18] сами истинностные значения, то, что́ приписывается формуле A в качестве значений, должно составлять некую семантическую противоположность тому, что́ приписывается в качестве значения формуле $\neg A$. Попутно заметим, что разница между истинностью и не-ложностью, а также ложностью и не-истинностью играет существенную роль в различных трактовках отрицания. В частности, в связи с вопросом о том, являются ли истинность и ложность взаимоисключающими или исчерпывающими в универсуме истинностных значений.

[18]Интересен в этой связи анализ, данный в работе М. Дамметта [29], где он, в частности, критикует Фреге за то, что тот использовал в качестве значений высказываний объекты, называемые «истиной» и «ложью» (а не как-нибудь иначе), создав, тем самым, впечатление, что это ровно те же самые истина и ложь, с которыми мы привыкли иметь дело [29, P. 142]

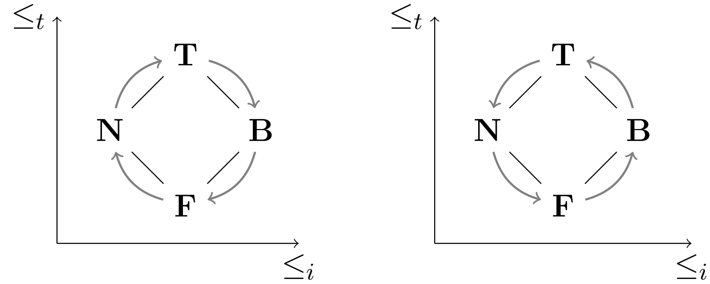

Рисунок 9. Циклические унарные связки в бирешетке $\mathcal{FOUR}$.

Понятие конфляции, разумеется, привлекало не столь много внимания исследователей, как понятие отрицания. Можно с уверенностью сказать, что, в отличие от отрицания, конфляция не является средством для выражения семантических противоположностей. Интуитивную трактовку конфляции, как операции на множестве истинностных значений, дает, например, М. Фиттинг в своей статье [38]. Сами истинностные значения понимаются им (следуя М. Гинзбергу [44, 45]) в обобщенном представлении как пары подмножеств множества возможных миров вида (F, A), в которых первый компонент есть множество возможных миров, выполняющих некоторое высказывание («свидетельствующих за»), а второй компонент – множество возможных миров, которое его опровергает («свидетельствующих против»). Тогда отрицание, как операция на множестве истинностных значений, дает обращение пары: $\neg(F, A) = (A, F)$.

Конфляция, примененная к истинностному значению, дает новое истинностное значение, в котором «свидетельствующее за» – это то множество возможных миров, которое не свидетельствовало против, а «свидетельствующее против» – то множество, которое не «свидетельствовало за». Другими словами, $\sim(F, A) = (\overline{A}, \overline{F})$, где $\overline{A}$ и $\overline{F}$ есть теоретико-множественные дополнения соответствующих множеств внутри всего множества возможных миров, из которого они выделены.

Коннегация, таким образом, является своеобразным гибридом, частично наследуя свойства как отрицания, так и конфляции. В четырехзначной семантике, построенной на основе бирешетки $\mathcal{FOUR}$, возникают по крайней мере две возможности задать коннегацию. Диаграммные представления бирешеток и циклических операций на них даны на рис. 9.

Вариант коннегации, который изучался в работах [63, 74], соответствует диаграмме, изображенной справа. Характеризация коннегации в этом случае дается в следующих соотношениях:

(1a) $\sim_1 A$ по крайней мере истинна, если и только если A по крайней мере ложна,

(2a) $\sim_1 A$ по крайней мере ложна, если и только если A по крайней мере не истинна.

Пункт (1a) совпадает с пунктом (1) характеризации отрицания $\neg$, тогда как пункт (2a) совпадает с (ii) в харатеризации конфляции $\sim$.

Коннегация, изученная в статье [10] по своим формальным свойствам совпадает с циклическим отрицанию системы $\mathbf{CNL_4^2}$ и характеризуется следующими утверждениями:

(1b) $\sim_2 A$ по крайней мере истинна, если и только если A по крайней мере не ложна;

(2b) $\sim_2 A$ по крайней мере ложна, если и только если A по крайней мере истинна.

В этом случае, как нетрудно заметить, (1b) совпадает с (i) в характеризации конфляции $\sim$, а (2b) совпадает с (2) из описания свойств отрицания $\neg$.

Коннегации, описанные подобным образом, можно рассматривать как отображения в произвольной решетке обобщенных истинностных значений, в которой так или иначе задан смысл выражений «по крайней мере истинно» и «по крайне мере ложно» и рассматривать в более широком контексте, чем четырехзначная семантика. Однако, прежде всего встает вопрос о содержательном понимании коннегации и ее «месте» среди других унарных операций, изучаемых в связи с системами обобщенных истинностных значений.

В работе [10] предпринята попытка дать общий анализ коннегаций, суть которого в том, что эти операции (и соответствующие им пропозициональные связки) не должны трактоваться как некоторые разновидности отрицания, но иметь свое специфическое понимание.

Например, основанное на следующих интерпретациях выражений «по крайней мере истинно» и «по крайне мере ложно». Первое означает, что высказывание получает верификацию того или иного вида, а второе, что имеется та или иная форма фальсификации высказывания. Далее могут быть предложены следующие варианты понимания коннегации обоих указанных выше типов.

Сначала рассмотрим коннегацию из работ [63, 74], где она является пропозициональной связкой системы, называемой **CP**. Значения высказывания в правой части эквиваленций естественным образом приводят к анализу двух познавательных ситуаций: когда высказывание ложно и когда высказывание по крайней мере не истинно. Эти две ситуации различны в силу того, что в первом случае речь идет о наличии опровержения, а во втором – только об отсутствии подтверждения. Тем не менее обе эти ситуации являются негативными, отличаясь, образно говоря, степенью негативности информации. Коннегация первого типа, таким образом, действует подобно отрицанию на сильную негативную информацию, меняя ее на сильную позитивную, или усиливает слабую негативную часть информации о положении дел, описываемом в высказывании.

Сказанное можно также проиллюстрировать с помощью обобщенных истинностных значений, построенных на основе реляционных моделей из работ М. Фиттинга и М. Гинзберга [38, 45]. Если высказыванию p приписано истинностное значение (F, A), то тогда $\sim_1 p$ получит истинностное значение $(A, \overline{F})$. Те возможные миры, которые опровергали p, теперь его подтверждают, а те, которые не подтверждали, теперь будут опровергать (усиление негативной составляющей информации).

Коннегация второго типа, изученная в работе [10] как семантическая операция и пропозициональная связка логической системы, именуемой в этой работе как **dCP**, позволяет изменять степень позитивности информации о положении дел, которое описывается в высказывании. Сильное позитивное утверждение состоит в том, что имеется верификация высказывания, например, оно доказуемо в некоторой аксиоматической системе. Коннегация $\sim_2$ заменяет сильную позитивную информацию на сильную же негативную (2b). Однако слабую позитивную информацию $\sim_2$ переводит в сильную позитивную.

Вновь привлекая реляционные истинностные значения, получаем следующую картину. Если высказыванию p приписано значение (F, A), то $\sim_2 p$ получает истинностное значение $(\overline{A}, F)$. Подтверждающее множество возможных миров становится опровергающим, а неопровергающее – подтверждающим.

В заключение следует отметить, что обе коннегации уравновешивают друг друга в том смысле, что обладают одинаковыми возможностями по симуляции классического отрицания. Последнее означает, что двойная итерация коннегации любого из рассмотренных типов имеет характеристические свойства классического отрицания ($i \in \{1, 2\}$):

$$(\sim_i\sim_i B \to \sim_i\sim_i A) \to ((\sim_i\sim_i B \to A) \to B),$$

$$A \leftrightarrow \sim_i\sim_i\sim_i\sim_i A,$$

$$(\sim_i\sim_i A \vee \sim_i\sim_i B) \leftrightarrow \sim_i\sim_i(A \wedge B),$$

$$(\sim_i\sim_i A \wedge \sim_i\sim_i B) \leftrightarrow \sim_i\sim_i(A \vee B),$$

$$\sim_i\sim_i A \to (A \to B),$$

$$A \vee \sim_i\sim_i A.$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. ЛОГИКИ n-РЕШЕТОК

Многомерные решетки (n-решетки, мультирешетки) являются предельно абстрактными структурами, которые служат естественным обобщением разнообразных решеточно упорядоченных систем истинностных значений. В то же время n-решетки представляют собой весьма сложный математический объект, свойства которого еще мало изучены. Тем не менее, попытки построить формализации логик, определяемых классами таких объектов предпринимались в литературе.

Исчисление секвенций $\mathbf{GML}_n$, формализующее пропозициональную логику n-решеток в языке, содержащем связки $\wedge_i, \vee_i, \neg_i$ (для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$), было построено в работе [82] как обобщение исчисления логики бирешеток из работы [9]. Теоремы об адекватности для исчисления $\mathbf{GML}_n$ в работе [82] сформулированы без доказательств. Несколько измененная версия исчисления $\mathbf{GML}_n$ (называемая исчислением $\mathbf{ML}_n$) была предложена в статье [64]. В указанной работе были построены погружения $\mathbf{ML}_n$ в подходящую секвенциальную формализацию классической логики высказываний, а также и обратное погружение классического пропозиционального секвенциального исчисления в $\mathbf{ML}_n$, которые использовались для доказательства ключевых метатеоретических результатов: адекватности и разрешимости $\mathbf{ML}_n$, а также устранимости сечения, наличия модифицированного интерполяционного свойства, отделимости. Доказательство алгебраической полноты исчисления $\mathbf{ML}_n$ в указанных статьях не приводится.

Исчисление генценовского типа $\mathbf{MML}_n$ для логики модальных n-решеток, задаваемых определением 22, было сформулировано в статье [65]. Немодальную основу этого исчисления составляют правила системы $\mathbf{ML}_n$. Для доказательства метатеоретичесих свойств также использовались погружения в секвенциальное исчисление модальной логики **S4** (и обратно, секвенциального исчисления для **S4** в исчисление $\mathbf{MML}_n$), поскольку операторы замыкания и взятия внутренности из определения 22 рассматривались как аналоги модальностей системы **S4**. Следуя терминологии работ [20, 21], авторы статьи [65] называют эти решеточные операторы *операторами Тарского*. Заметим, однако, что фактически в работе [65] было построено исчисление для логики класса моделей Крипке, построенных на **S4**-шкалах Крипке с паранепротиворечивой (в терминологии авторов) оценкой. «Паранепротиворечивость» функции оценки заключается в том, что истинностные значения в возможном мире (посредством применения этой функции) сопоставляются не только пропозициональным переменным, но и их отрицаниям.

Вопрос о том, совпадает ли логика, формализуемая исчислением $\mathbf{MML}_n$, с логикой класса n-решеток определения 22 остался неясным, хотя из контекста работы следует, что дело обстоит именно так. Кроме того, функция перевода языка исчисления $\mathbf{MML}_n$ в язык модальной системы **S4** определена таким образом, что законы **S4** могут иметь в качестве прообразов формулы, не доказуемые в системе $\mathbf{MML}_n$ (что приводит к некорректности всех результатов, опирающихся на неудачно сформулированный перевод, не дающий погружения). Таким образом, вопрос об алгебраических полноте и корректности системы $\mathbf{MML}_n$ остался открытым.

Следующий естественный шаг в направлении дальнейших исследований состоит в том, чтобы построить логику n-решеток, в которых имеются аналоги модальностей системы **S5**, которые вводятся в работах [20, 21] как *операторы Халмоша*. Отчасти эта работа была проделана авторами статьи [53], в которой был реализован тот же подход, что и в статье [65]. Однако задача доказательства алгебраической полноты построенного исчисления по-прежнему оставалась не рассмотренной и в этой публикации.

Попытку заполнить этот пробел авторы [53] предприняли уже в другой своей статье [54]. Несколько позже было также замечено, что операторы Тарского из определения 22 не являются аналогами модальностей системы **S4** в силу того, что свойства субмультипливативности и субаддитивности более слабые, чем это требуется для алгебраических аналогов **S4**-модальностей. Вновь используя терминологию [20, 21], можно было бы сказать, что аналогами **S4**-модальностей являются *операторы Куратовского*, в то время как операторы Тарского соответствуют модальностям более слабой системы монотонной модальной логики. Данные наблюдения привели авторов [53] к еще одному обобщающему исследованию на эту тему [55]. Таким образом, следует различать как сами классы n-решеток с операторами замыкания и взятия внутренности Тарского, Куратовского и Халмоша, так и логики (и их формализации в виде исчислений того или иного типа) ими детерминируемые.

§1. Языки, интерпретации, отношение логического следования

Исчисления, которые будут изложены ниже, формулируются в пропозициональных языках, различающихся набором логических символов. В параграфе 2 описывается исчисление $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$, формализующее логику (понимаемую как множество общезначимых формул) класса ограниченных логических n-решеток, в которых в дополнение к стандартным n-решеточным операциям определена еще n-решеточная импликация. Таким образом, пропозициональный язык, требуемый для построения соответствующего исчисления, содержит в своем алфавите множество символов для пропозициональных переменных, обозначаемое, как и ранее, символом `Var`, а также семейство пропозициональных связок $\{\neg_j, \wedge_j, \vee_j, \to_j, \top_j, \bot_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$, где символы из списка $\top_1, \ldots, \top_n, \bot_1, \ldots, \bot_n$ – пропозициональные константы, а индекс n обозначает целое положительное число. Помимо указанных символов в алфавите имеются технические символы – левая и правая круглые скобки. Определение формулы стандартное. Описанный язык будет обозначаться символом $\mathscr{L}^n_{\to}$.

В параграфе 5 излагается исчисление $\mathcal{G}\mathbf{ML}^{\mathbf{S4}}_n$, которое формализует логику класса ограниченных логических n-решеток Куратовского. В n-решетках данного типа определены операции замыкания и взятия внутренности, схожие по своим свойствам с модальностями системы $\mathbf{S4}$. Набор пропозициональных связок соответствующего формализованного языка расширяется за счет добавления семейства модальностей и представляет собой множество $\{\neg_j, \wedge_j, \vee_j, \to_j, \Box_j, \Diamond_j, \top_1, \ldots, \top_n, \bot_1, \ldots, \bot_n\}_{j \leqslant n}$, где, по-прежнему, n есть целое положительное число. Определение формулы здесь также стандартное. Язык, в котором будет сформулировано исчисление $\mathcal{G}\mathbf{ML}^{\mathbf{S4}}_n$ обозначается как $\mathscr{L}^n_{\Box}$.

В утверждениях, не требующих определенности языка, будет использоваться метапеременная $\mathscr{L}$, которая может обозначать любой из только что описанных языков. Символы $\mathscr{F}^n_{\to}$ и $\mathscr{F}^n_{\Box}$ обозначают множества формул языков $\mathscr{L}^n_{\to}$ и $\mathscr{L}^n_{\Box}$, соответственно.

Теперь зададим интерпретацию правильно построенных выражений формализованных языков $\mathscr{L}^n_{\to}$ и $\mathscr{L}^n_{\Box}$. Пусть $\mathscr{M}_n$ есть n-решетка с множеством носителем $\mathscr{S}$. *Оценкой* в $\mathscr{M}_n$ называют функцию v из множества `Var` в множество $\mathscr{S}$. Оценка может быть расширена на множество всех формул того или иного языка $\mathscr{L}$, но это расширение предполагает использование подходящего типа n-решетки. Другими словами, расширенная оценка должна быть определена для всех символов языка $\mathscr{L}$. Например, если в пропозициональном языке имеется связка импликация, то соответствующая операция должна быть определена и в n-решетке. То же самое относится и к модальностям формализованного языка.

Для краткости будем говорить, что n-решетка $\mathscr{M}_n$ является *подходящей для означивания* множества Γ, если любая оценка (пропозициональных переменных) в $\mathscr{M}_n$ может быть расширена на множество формул Γ в соответствии с приведенными ниже равенствами. Если Γ есть $\{A\}$ для некоторой формулы A, то будем говорить, что $\mathscr{M}_n$ является подходящей для означивания A. Разумеется, ту же самую идею можно представить в более формальном виде, если рассматривать языки как алгебры формул, а оценки как гомоморфные отображения.

Общими для всех изучаемых в данной главе языков и типов n-решеток являются следующие равенства ($1 \leqslant j \leqslant n$):

(1) $v(\neg_j B) = -_j v(B)$,

(2) $v(B \wedge_j C) = v(B) \cap_j v(C)$,

(3) $v(B \vee_j C) = v(B) \cup_j v(C)$,

Для n-решеток, в которых определена операция $\supset_j$, и языков с импликативными связками положим:

(4) $v(B \to_j C) = v(B) \supset_j v(C)$,

Для модальных n-решеток с операциями взятия внутренности и замыкания:

(5) $v(\Box_j B) = I_j v(B)$,

(6) $v(\Diamond_j B) = C_j v(B)$.

Для ограниченных n-решеток и языков с пропозициональными константами:

(7) $v(\top_j) = \mathsf{1}_j$,

(8) $v(\bot_j) = \mathsf{0}_j$.

Теперь можно дать определение логического следования для n-решеток. Основная идея здесь по существу та же, что обычно используется для определения логического следования в разнообразных матричных семантиках. В совсем простом, отвлеченном от технических деталей выражении, это сохранение выделенных значений: из множества формул Γ логически следует формула B, если при любой оценке, при которой каждой формуле из Γ сопоставляется выделенное истинностное значение, формуле B также приписывается выделенное истинностное значение.

В случае n-решеток роль множества выделенных значений выполняет n-фильтр (в бирешетках это может быть ультрабифильтр).

Параметр X указывает на возможную разновидность n-решетки (модальная n-решетка Тарского (T), Куратовского (K) или Халмоша (H)). Таким образом, запись $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^T} \Delta$ означает наличие отношения следования между конечными множествами формул Γ и Δ в логической n-решетке Тарского $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$.

Следующее определение носит общий характер в том смысле, что формулируется для любых логических модальных n-решеток.

Определение 60. Пусть Γ и Δ есть конечные множества формул некоторого фиксированного языка $\mathscr{L}$, $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^X$ есть *логическая* n-решетка, подходящая для означивания Γ и Δ. Тогда полагаем, что

(1) $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^X} \Delta \iff$ для всякой оценки v формул языка $\mathscr{L}$ верно, что если $v(A) \in \mathscr{U}_n$ (для всех $A \in \Gamma$), то $v(B) \in \mathscr{U}_n$ (для некоторой $B \in \Delta$); если $\Gamma = \emptyset$, то полагаем $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^X} \Delta \iff \top_j \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^X} \Delta$ для всякого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$; если $\Delta = \emptyset$, то полагаем $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^X} \Delta \iff \Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^X} \bot_j$ для всякого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

(2) $\Gamma \models_X \Delta \iff \Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^X} \Delta$ для всякой пары $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^X$.

$\triangleleft$

Только что приведенное определение логического следования вводится в работе [82] для случая немодальных n-решеток и их логики, сформулированной в более узком языке, не содержащем импликаций и модальностей ($\models_{ML_n}$ в нотации указанной статьи). По существу оно является обобщением аналогичного определения для случая бирешеток из статьи [9]. Однако в той же работе [82] сформулирована теорема 5.4, согласно которой для произвольных конечных множеств формул $A_1, \ldots, A_l, B_1, \ldots, B_m$ указанного языка утверждение $A_1, \ldots, A_l \models_{ML_n} B_1, \ldots, B_m$ имеет место если и только если *для всякого* $j \leqslant n$ верно, что $A_1 \wedge_j \ldots \wedge_j A_l \models_j B_1 \vee \ldots \vee_j B_m$. В свою очередь отношение $\models_j$ определяется через порядок $\leqslant_j$ в n-решетке: $A \models_j B \iff v(A) \leqslant_j v(B)$ для всякой n-решетки $\mathscr{M}_n$ и всякой оценки формул v. Таким образом, определение отношения $\models_{ML_n}$ через сохранность принадлежности оценки формул множеству $\mathscr{U}_n$ равносильно определению того же отношения через отношения порядка в n-решетке.

Как таковое доказательство указанного факта слева направо – наиболее интересная из импликаций – отсутствует, приводится лишь эвристическое соображение об обобщении леммы 4.3 из статьи [84]. Однако, как это обобщение осуществить, остается неясным. Разница между случаем абстрактных n-решеток и конкретной реализацией 3-решеток из [84] состоит, например, в том, что порядки в 3-решетке определяются через компоненты самих истинностных значений, тогда как в абстрактных n-решетках никакой структуры истинностных значений нет и порядки не определяются каким-то специальным образом, позволяющим их различать.

Кроме того, возможность найти доказательство такой сильной связи между отношением следования $\models_{ML_n}$ и отношениями порядка в n-решетке представляется сомнительной. Можно привести следующее соображение. Любой n-фильтр в n-ограниченной решетке содержит наибольшие элементы каждого из порядков. Поэтому всегда будет иметь место $\top_i \models_{ML_n} \top_j$ для любых $j, j \leqslant n$. Однако, если при этом допустить, что $\mathbf{1}_i \leqslant_k \mathbf{1}_j$ и $\mathbf{1}_j \leqslant_k \mathbf{1}_i$ для какого-то k, то $\mathbf{1}_i = \mathbf{1}_j$. Более того, наибольшие элементы всех порядков в таком случае должны совпадать в любой n-решетке (чего, конечно же, не происходит).

Вопрос о взаимосвязи отношения логического следования, определяемого через принадлежность оценки формул множеству $\mathscr{U}_n$ и отношениями порядка в n-решетке, как видно из последнего замечания, требует более детального изучения. В особенности это важно для обоснования корректности правил с модальностями в случае секвенциальных исчислений, формализующих логики модальных n-решеток. По-видимому, определения следования через сохранность значения формулы из множества $\mathscr{U}_n$ и через отношения порядка задают разные математические объекты.

Между отношением логического следования и алгебраической операцией $\supset_j$ имеется корреляция.

Лемма 59. *Пусть Γ и Δ есть конечные множества формул некоторого фиксированного языка $\mathscr{L}$ (где $\mathscr{L} \in \{\mathscr{L}^n_{\rightarrow}, \mathscr{L}^n_{\Box}\}$), $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$ есть логическая n-решетка, подходящая для означивания Γ и Δ. Тогда для всякой $\mathscr{L}$-оценки v и всякого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$:*

(1) $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle} \Delta \iff (v(\bigwedge_j \Gamma) \in \mathscr{U}_n \implies v(\bigvee_j \Delta) \in \mathscr{U}_n)$;

(2) $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle} \Delta \iff v(\bigwedge_j \Gamma) \supset_j v(\bigvee_j \Delta) \in \mathscr{U}_n$;

(3) $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle} \Delta \iff v(I_j(\bigwedge_j \Gamma)) \in \mathscr{U}_n \implies v(I_j(\bigvee_j \Delta)) \in \mathscr{U}_n$, *если $\mathscr{U}_n$ есть I-монотонный n-фильтр;*

(4) $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle} \Delta \iff v(C_j(\bigwedge_j \Gamma)) \in \mathscr{U}_n \implies v(C_j(\bigvee_j \Delta)) \in \mathscr{U}_n$, *если $\mathscr{U}_n$ есть C-монотонный n-фильтр;*

Доказательство.

(1) Следует из определения 60, а также свойств $\mathscr{U}_n$.

(2) Допустим, что $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle} \Delta$. Это означает, что для такой оценки v, что $v(A) \in \mathscr{U}_n$ для каждой формулы $A \in \Gamma$, то $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta$, то есть $v(\bigvee_j \Delta) \in \mathscr{U}_n$. Пусть v есть такая оценка. Тогда, по определению операции $\supset_j$, получаем, что $v(\bigwedge_j \Gamma) \supset_j v(\bigvee_j \Delta) = v(\bigvee_j \Delta) \in \mathscr{U}_n$.

Теперь допустим, что $v(A) \notin \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $A \in \Gamma$. Это означает, что $v(\bigwedge_j \Gamma) \notin \mathscr{U}_n$. Тогда, вновь по определению операции $\supset_j$, получаем, что $v(\bigwedge_j \Gamma) \supset_j v(\bigvee_j \Delta) = \mathtt{1}_j \in \mathscr{U}_n$.

Пусть $v(\bigwedge_j \Gamma) \supset_j v(\bigvee_j \Delta) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой оценки v. Тогда $v(\bigwedge_j \Gamma) \supset_j v(\bigvee_j \Delta) = \mathtt{1}_j$ или $v(\bigwedge_j \Gamma) \supset_j v(\bigvee_j \Delta) = v(\bigvee_j \Delta) \in \mathscr{U}_n$. В первом случае $v(A) \notin \mathscr{U}_n$, что обеспечивает $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle} \Delta$. Во втором случае $v(A) \in \mathscr{U}_n$ для каждой формулы $A \in \mathscr{U}_n$ и, при этом, $v(\bigvee_j \Delta) \in \mathscr{U}_n$. Из последнего, в силу простоты $\mathscr{U}_n$, получаем, что $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta$, что и требуется.

(3) Пусть $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle} \Delta$. По пункту (2) данной леммы получаем $v(\bigwedge_j \Gamma) \supset_j v(\bigvee_j \Delta) \in \mathscr{U}_n$. Поскольку $\mathscr{U}_n$ является I-монотонным, $v(I_j \bigwedge_j \Gamma) \supset_j v(I_j \bigvee_j \Delta) \in \mathscr{U}_n$ для всякого j ($1 \leqslant j \leqslant n$). Допустим, что $v(I_j \bigwedge_j \Gamma) \in \mathscr{U}_n$. По определению операции получаем $v(I_j \bigwedge_j \Gamma) \supset_j v(I_j \bigvee_j \Delta) = v(I_j \bigvee_j \Delta) \in \mathscr{U}_n$.

(4) Доказывается аналогично (3). □

§2. Исчисление $\mathscr{G}$**ML**$_n$

Как уже отмечалось выше, исчисление **GML**$_n$ (отличное от исчисления $\mathscr{G}$**ML**$_n$), служащее для формализации логики n-решеток, было предложено в работах [82] и [64], однако для доказательства непротиворечивости и полноты исчисления использовалось погружение его в секвенциальную формализацию классической логики высказываний в языке, содержащем $\wedge$, $\vee$ и $\neg$. Проблема алгебраической адекватности исчисления, содержащего правила **GML**$_n$, но сформулированного в расширенном языке, была изучена в работе [54].

В данном разделе будет предложен модифицированный вариант как самого исчисления, так доказательства его алгебраической корректности и полноты. Исчисление $\mathscr{G}$**ML**$_n$, приведенное ниже существенно отличается от исчисления **GML**$_n$ из статей [82] и [64].

Дадим для начала краткое описание правил исчисления **GML**$_n$ из работ [82, 64], чтобы были видны отличия от исчисления $\mathscr{G}$**ML**$_n$, излагаемого в данном параграфе.

Язык исчисления – стандартный пропозициональный язык, в алфавите которого каждая связка из множества $\{\wedge, \vee, \neg\}$ имеется в n экземплярах.

Основные секвенции имеют вид $p \Rightarrow p$ и $\neg_j p \Rightarrow \neg_j p$ для всех $p \in \mathtt{Var}$ и всякого j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Набор структурных правила исчисления содержит правила утончения ($W \Rightarrow$) и ($\Rightarrow W$), а также правило сечения (Cut).

Правила для пропозиционалных связок можно разделить на три группы. Позитивные правила, представляющие собой по сути стандартные правила, а также две группы негативных правил для комплексов связок. Для примера ниже выписаны правила для $\wedge_j$ и ее отрицаний.

$$(\wedge_j \Rightarrow)\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge_j B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge_j B}$$

$$(\neg_j\wedge_j \Rightarrow)\ \frac{\neg_j A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \neg_j B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg_j(A \wedge_j B), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg_j\wedge_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg_j A, \neg_j B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg_j(A \wedge_j B)}$$

$$(\neg_k\wedge_j \Rightarrow)\ \frac{\neg_k A, \neg_k B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg_k(A \wedge_j B), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg_k\wedge_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg_k A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg_k B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg_k(A \wedge_j B)}$$

Исчисление также содержит правила для комплексов связок вида $\neg_k\neg_j$ для $k \neq j$, напоминающие правила для отрицания в секвенциальном исчислении для классической логики высказываний:

$$(\neg_k\neg_j \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg_k\neg_j A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg_k\neg_j)\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg_k\neg_j A}$$

Семантически такие правила являются корректными только в специфическом классе n-решеток, называемых в [82] и [64] *ультралогическими*. Однако, как было отмечено на стр. 40, конструкция n-ультрафильтра, предложенная авторами указанных работ, является проблематичной. Естественный выход из данной ситуации – ограничиться изучением логик логических n-решеток, в секвенциальных формализациях которых правил $(\neg_k\neg_j \Rightarrow)$ и $(\Rightarrow \neg_k\neg_j)$ быть не должно. Разумеется, тогда оказывается, что необходимы правила для более сложных комплексов связок, то есть префиксов (последовательностей) из отрицаний произвольной длины, не превышающей некоторое число n, семантически отсылающее к размерности n-решеток.

Теперь перейдем к описанию исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$. Предварительно введем некоторые синтаксические обозначения. Символом $\overset{\alpha_m}{\neg}$ обозначим последовательность длины m, состоящую из элементов множества $\{\neg_1, \ldots, \neg_n\}$. Запись $\overset{\alpha_m}{\neg}_j$ применяется для обозначения такой последовательности $\overset{\alpha_m}{\neg}$, в которой символ $\neg_j$ имеет *нечетное* число вхождений; запись $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}$ обозначает такую непустую последовательность $\overset{\alpha_m}{\neg}$, в которой элемент $\neg_j$ отсутствует или имеет *четное* число вхождений. Выражение $\overset{\alpha_s}{\neg}\overset{\alpha_{s'}}{\neg}$ обозначает результат конкатенации последовательностей $\overset{\alpha_s}{\neg}$ и $\overset{\alpha_{s'}}{\neg}$. Отдельный символ $\neg_j$ будет пониматься как последовательность длины 1, состоящая только из этого символа; запись $\overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j$ понимается как результат конкатенации последовательностей $\overset{\alpha_s}{\neg}$ и $\neg_j$. При этом, допускаются и пустые последовательности подобного рода. Так, если $s = 0$, то $\overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j$ есть просто $\neg_j$.

Заметим, что в основных секвенциях и правилах исчисления, представленных ниже, символы, обозначающие последовательности отрицаний, ведут себя обычным образом, как это принято для метаязыковых знаков. Например, символ $\overset{\alpha_s}{\neg}$ в посылках и заключении правила обозначает одну и ту же последовательность, точно так же, как метапеременная A одну и ту же формулу. Знаки $\overset{\alpha_s}{\neg}$ и $\overset{\beta_s}{\neg}$ могут обозначать разные последовательности длины s.

Сформулируем исчисление $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$, формализующее логику n-решеток. Формулы исчисления принадлежат языку $\mathscr{L}^n_{\rightarrow}$. Определения секвенции, доказательства, его высоты и доказуемой формулы получаются несложной модификацией из соответствующих определений, данных в параграфе 8 предыдущей главы.

Для всех правил исчисления положим, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, $k \neq j$, $m \geqslant 1$, $s, s' \geqslant 0$.

Основные секвенции исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$ имеют следующий вид (где $p \in \mathtt{Var}$):

$$p \Rightarrow p \qquad \Rightarrow \top_j \qquad \overset{\alpha_m}{\neg}_j \top_j \Rightarrow \qquad \bot_j \Rightarrow$$

$$\overset{\alpha_m}{\neg} p \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg} p \qquad \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} \top_j \qquad \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_j \bot_j \qquad \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} \bot_j \Rightarrow$$

Структурные правила секвенциального исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$:

$$(Cut)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

$$(W \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow W)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Позитивные правила:

$$(\wedge_j \Rightarrow)\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge_j B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge_j B}$$

$$(\vee_j \Rightarrow)\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee_j B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee_j B}$$

$$(\rightarrow_j \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Theta \Rightarrow \Lambda}{A \rightarrow_j B, \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda} \qquad (\Rightarrow \rightarrow_j)\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow_j B}$$

j-негативные правила:

$$(\neg_j\wedge_j\Rightarrow)\ \frac{\overset{\alpha_m}{\neg}_j A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \overset{\alpha_m}{\neg}_j B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \wedge_j B), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg_j\wedge_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_j A, \overset{\alpha_m}{\neg}_j B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \wedge_j B)}$$

$$(\neg_j\vee_j\Rightarrow)\ \frac{\overset{\alpha_m}{\neg}_j A, \overset{\alpha_m}{\neg}_j B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \vee_j B), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg_j\vee_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_j A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_j B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \vee_j B)}$$

$$(\neg_j\to_j\Rightarrow)\ \frac{A, \overset{\alpha_m}{\neg}_j B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \to_j B), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg_j\to_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda, \overset{\alpha_m}{\neg}_j B}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda, \overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \to_j B)}$$

$$(\neg_j\neg_j\Rightarrow)\ \frac{\overset{\alpha_s}{\neg}\overset{\alpha_{s'}}{\neg} A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j\neg_j\overset{\alpha_{s'}}{\neg} A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg_j\neg_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_s}{\neg}\overset{\alpha_{s'}}{\neg} A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j\neg_j\overset{\alpha_{s'}}{\neg} A}$$

jj-негативные правила:

$$(\neg_{jj}\wedge_j\Rightarrow)\ \frac{\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg_{jj}\wedge_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B)}$$

$$(\neg_{jj}\vee_j\Rightarrow)\ \frac{\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \vee_j B), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg_{jj}\vee_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \vee_j B)}$$

$$(\neg_{jj}\to_j\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B, \Theta \Rightarrow \Lambda}{\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \to_j B), \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda} \qquad (\Rightarrow\neg_{jj}\to_j)\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \to_j B)}$$

kj-правила:

$$(\neg_k\neg_j\Rightarrow)\ \frac{\overset{\alpha_s}{\neg}\neg_k\neg_j\overset{\alpha_{s'}}{\neg} A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j\neg_k\overset{\alpha_{s'}}{\neg} A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg_k\neg_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_k\neg_j\overset{\alpha_{s'}}{\neg} A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j\neg_k\overset{\alpha_{s'}}{\neg} A}$$

Замечание 9. Основные секвенции исчисления, содержащие метепеременную p, представляют собой схемы, репрезентирующие бесконечное множество секвенций указанного типа. Каждое правило исчисления, в свою очередь, тоже является схемой, которая репрезентирует множество пар вида $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ или $\langle \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle, \mathfrak{c} \rangle$, где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ пробегают по множеству секвенций. Множество таких пар есть множество применений правила.

◁

В следующей лемме приведен перечень доказуемых секвенций, показывающих взаимоотношения (последовательностей) унарных и бинарных пропозициональных связок, соответствующих инверсиям (их последовательностям) и пересечениям или объединениям в n-решетках. Кроме того, общезначимость этих секвенций будет использоваться далее для доказательства метатеоретических результатов. Чтобы несколько упростить запись, будем опускать параметр, указывающий на длину последовательности в тех случаях, когда он не играет существенной роли.

Лемма 60. *Следующие секвенции доказуемы в $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$ для любых $A, B \in \mathscr{F}^n_{\rightarrow}$ и для любых j, k таких, что $1 \leqslant j, k \leqslant n$ и $j \neq k$:*

(1) $A \Rightarrow A, \quad A \wedge_j B \Rightarrow A, \quad A \wedge_j B \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow A \vee_j B, \quad B \Rightarrow A \vee_j B,$

(2) $\overset{\alpha_s}{\neg}\neg_k\neg_j\overset{\alpha_{s'}}{\neg}A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j\neg_k\overset{\alpha_{s'}}{\neg}A,$

(3) $\overset{\alpha}{\neg}_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_jA \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_jB, \quad \overset{\alpha}{\neg}_jA \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_jB \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j(A \wedge_j B),$

(4) $\overset{\alpha}{\neg}_j(A \vee_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_jA \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_jB, \quad \overset{\alpha}{\neg}_jA \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_jB \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j(A \vee_j B),$

(5) $\overset{\alpha}{\neg}_j(A \rightarrow_j B) \Rightarrow A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_jB, \quad A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_jB \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j(A \rightarrow_j B),$

(6) $\overset{\alpha}{\neg}_{jj}(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B, \quad \overset{\alpha}{\neg}_{jj}A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}(A \wedge_j B),$

(7) $\overset{\alpha}{\neg}_{jj}(A \vee_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B, \quad \overset{\alpha}{\neg}_{jj}A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}(A \vee_j B),$

(8) $\overset{\alpha}{\neg}\neg_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}(\neg_jA \vee_j \neg_jB), \quad \overset{\alpha}{\neg}(\neg_jA \vee_j \neg_jB) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}\neg_j(A \wedge_j B),$

(9) $\overset{\alpha}{\neg}\neg_j(A \vee_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}(\neg_jA \wedge_j \neg_jB), \quad \overset{\alpha}{\neg}(\neg_jA \wedge_j \neg_jB) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}\neg_j(A \vee_j B),$

(10) $\overset{\alpha}{\neg}\neg_k(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}(\neg_kA \wedge_j \neg_kB), \quad \overset{\alpha}{\neg}(\neg_kA \wedge_j \neg_kB) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}\neg_k(A \wedge_j B),$

(11) $\overset{\alpha}{\neg}\neg_k(A \vee_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}(\neg_kA \vee_j \neg_kB) \quad \overset{\alpha}{\neg}(\neg_kA \vee_j \neg_kB) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}\neg_k(A \vee_j B),$

(12) $\overset{\alpha}{\neg}_{jj}(A \rightarrow_j B) \Rightarrow A \rightarrow_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B$

Доказательство. (1) Индукцией по числу вхождения пропозициональных связок в формулу. В случаях, когда A есть пропозициональная переменная, возможно префиксированная конечной последовательностью отрицаний, получаем аксиоматические секвенции. Если A пропозициональная константа, возможно префиксированная конечной последовательностью отрицаний, то доказательство для $A \Rightarrow A$ легко получается из исходных секвенций.

Приведем доказательства для некоторых случаев сложных формул.

Случай $A = B \wedge_j C$. По допущению индукции доказуемы $B \Rightarrow B$ и $C \Rightarrow C$. Тогда получаем

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B, C \Rightarrow B}\,(W \Rightarrow) \qquad \dfrac{C \Rightarrow C}{B, C \Rightarrow C}\,(W \Rightarrow)}{B, C \Rightarrow B \wedge_j C}\,(\Rightarrow \wedge_j)}{B \wedge_j C \Rightarrow B \wedge_j C}\,(\wedge_j \Rightarrow)$$

Случай $A = \overset{\alpha}{\neg}_{jj}(B \wedge_j C)$. По допущению индукции доказуемы $\overset{\alpha}{\neg}_{jj}B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B$ и $\overset{\alpha}{\neg}_{jj}C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}C$. Тогда получаем

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}B, \overset{\alpha}{\neg}_{jj}C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B}\,(W \Rightarrow) \qquad \dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}C}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}B, \overset{\alpha}{\neg}_{jj}C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}C}\,(W \Rightarrow)}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}B, \overset{\alpha}{\neg}_{jj}C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}(B \wedge_j C)}\,(\Rightarrow \neg_{jj}\wedge_j)}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}(B \wedge_j C) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}(B \wedge_j C)}\,(\neg_{jj}\wedge_j \Rightarrow)$$

Случай $A = \overset{\alpha}{\neg}_{jj}(B \vee_j C)$ доказывается схожим образом с предыдущим.

(2) Секвенция $\overset{\alpha_s}{\neg}\neg_k\neg_j\overset{\alpha_{s'}}{\neg}A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_k\neg_j\overset{\alpha_{s'}}{\neg}A$ доказуема согласно пункту (1) данной леммы. Затем нужно применить правила $(\neg_k\neg_j \Rightarrow)$ и $(\Rightarrow \neg_k\neg_j)$.

(3) Используя результат случая (1) сначала возьмем доказуемые секвенции $\overset{\alpha}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A$, $\overset{\alpha}{\neg}_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j B$ и далее построим вывод

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A}{\overset{\alpha}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A, \overset{\alpha}{\neg}_j B}\,(\Rightarrow W) \qquad \dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j B}{\overset{\alpha}{\neg}_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A, \overset{\alpha}{\neg}_j B}\,(\Rightarrow W)}{\overset{\alpha}{\neg}_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A, \overset{\alpha}{\neg}_j B}\,(\neg_j\wedge_j)}{\overset{\alpha}{\neg}_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B}\,(\Rightarrow \vee_j)$$

(6) Используя результат случая (1) сначала возьмем доказуемые секвенции $\neg_k A \Rightarrow \neg_k A$, $\neg_k B \Rightarrow \neg_k B$ и далее получаем вывод

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}A}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}A, \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}A}\,(W \Rightarrow) \qquad \dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}A, \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B}\,(W \Rightarrow)}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}A, \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B}\,(\Rightarrow \wedge_j)}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj}B}\,(\neg_{jj}\wedge_j \Rightarrow)$$

(5) Верхние секвенции дерева доказуемы в силу (1). Далее получаем

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\overset{\alpha}{\neg}_j B, A \Rightarrow A}\,(W\Rightarrow)}{\overset{\alpha}{\neg}_j (A \to_j B) \Rightarrow A}\,(\overset{\alpha}{\neg}_j{\to_j}\Rightarrow) \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j B}{\overset{\alpha}{\neg}_j B, A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j B}\,(\Rightarrow W)}{\overset{\alpha}{\neg}_j (A \to_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j B}\,(\neg_j{\to_j}\Rightarrow)}{\overset{\alpha}{\neg}_j (A \to_j B) \Rightarrow A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_j B}\,(\Rightarrow \wedge_j)$$

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad \overset{\alpha}{\neg}_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j B}{A, \overset{\alpha}{\neg}_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j (A \to_j B)}\,(\Rightarrow \neg_j{\to_j})}{A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j (A \to_j B)}\,(\wedge_j \Rightarrow)$$

Для доказательств секвенций (8) и (10) нужно рассмотреть различные случаи, в зависимости от вида последовательности $\overset{\alpha}{\neg}$. Пусть например, $\overset{\alpha}{\neg}$ есть $\overset{\alpha}{\neg}_j$. Покажем для одной из секвенций (8).

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_j \neg_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j \neg_j A \qquad \overset{\alpha}{\neg}_j \neg_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j \neg_j B}{\overset{\alpha}{\neg}_j \neg_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j \neg_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j \neg_j A, \overset{\alpha}{\neg}_j \neg_j B}\,(\vee_j \Rightarrow)}{\overset{\alpha}{\neg}_j \neg_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j \neg_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j (\neg_j A \wedge_j \neg_j B)}\,(\Rightarrow \neg_j{\wedge_j})$$

(12)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow \neg_{jj} B, A}\,(\Rightarrow W) \qquad \neg_{jj} B \Rightarrow \neg_{jj} B}{A, \overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \to_j B) \Rightarrow \neg_{jj} B}\,(\neg_{jj}{\to_j}\Rightarrow)}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \to_j B) \Rightarrow A \to_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj} B}\,(\Rightarrow{\to_j})$$

$\square$

§3. Алгебраическая непротиворечивость исчисления $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n$

Начнем данный раздел с общих семантических определений, необходимых для дальнейших рассуждений о семантической корректности правил исчисления.

Определение 61. Формула A языка $\mathscr{L}^n_{\to}$ называется общезначимой в логической n-решетке $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$ (символически $\models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle} A$), если $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$ является подходящей для означивания A и $v(A) \in \mathscr{U}_n$ для любой оценки формул v.

Формула A языка $\mathscr{L}^n_{\to}$ называется общезначимой в классе C логических n-решеток ($\models_C A$), если она общезначима в каждой n-решетке из этого класса.

Формула A языка $\mathscr{L}^n_{\to}$ называется общезначимой ($\models A$), если она общезначима *в любой* логической n-решетке $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$.

Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенная из формул языка $\mathscr{L}^n_{\to}$, называется общезначимой в логической n-решетке $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$, если $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$ является подходящей для означивания каждой формулы из множеств Γ и Δ и $\Gamma \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle} \Delta$.

Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенная из формул языка $\mathscr{L}^n_{\to}$, называется общезначимой в классе C логических n-решеток (символически $\models_C \Gamma \Rightarrow \Delta$), если она общезначима в любой n-решетке из этого класса.

Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенная из формул языка $\mathscr{L}^n_{\to}$, называется общезначимой (символически $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$), если она общезначима в любой логической n-решетке.

Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенная из формул языка $\mathscr{L}^n_{\to}$, называется опровержимой, если существует логическая n-решетка $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$ и такая оценка формул v, что $v(A) \in \mathscr{U}_n$ для всякой формулы $A \in \Gamma$, но $v(D) \notin \mathscr{U}_n$ для всякой формулы $D \in \Delta$. $\triangleleft$

Для доказательства следующей леммы потребуется соответствие между синтаксическими объектами – последовательностями отрицаний формализованного языка $\mathscr{L}^n_{\to}$ и семантическими объектами – последовательностями инверсий, определенных на множестве-носителе n-решетки (введенных на стр. 39). Пусть $\overset{\alpha_m}{\neg}$ есть последовательность отрицаний длины m. Тогда *соответствующая* ей последовательность инверсий $\bar{\alpha}_m$ получается из $\overset{\alpha_m}{\neg}$ заменой каждого символа $\neg_j$ ($1 \leqslant j \leqslant n$) символом $-_j$.

Лемма 61. *Все секвенции, доказуемые согласно лемме 60, являются общезначимыми.*

Доказательство. Рассмотрим случаи в той же нумерации, что дана в лемме 60, опуская тривиальные случаи.

Случай (2). Следует из допущения на стр. 39, согласно которому в настоящем исследовании во внимание принимаются только коммутативные n-решетки.

Случай (3). Допустим, что $v(\overset{\alpha}{\neg}_j(A \wedge_j B)) \in \mathscr{U}_n$ для произвольных n-решетки $\mathscr{M}_n$, n-фильтра $\mathscr{U}_n$ в $\mathscr{M}_n$ и оценки формул v и пусть последовательность инверсий $\bar{\alpha}$ соответствует последовательности отрицаний $\overset{\alpha}{\neg}$. Далее заметим, что $v(\overset{\alpha}{\neg}_j A) \leqslant_j v(\overset{\alpha}{\neg}_j A) \vee_j v(\overset{\alpha}{\neg}_j B)$ и $v(\overset{\alpha}{\neg}_j B) \leqslant_j v(\overset{\alpha}{\neg}_j A) \vee_j v(\overset{\alpha}{\neg}_j B)$, откуда сначала получаем $\bar{\alpha}v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B) \leqslant_j \bar{\alpha}v(\overset{\alpha}{\neg}_j A)$ и $\bar{\alpha}v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B) \leqslant_j \bar{\alpha}v(\overset{\alpha}{\neg}_j B)$, а затем $\bar{\alpha}v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B) \leqslant_j \bar{\alpha}\bar{\alpha}v(A)$ и $\bar{\alpha}v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B) \leqslant_j \bar{\alpha}\bar{\alpha}v(B)$, принимая во внимание соответствие между $\overset{\alpha}{\neg}$ и $\bar{\alpha}$ и определение оценки v. В силу леммы 2 заключаем, что $\bar{\alpha}v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B) \leqslant_j v(A)$ и

$\bar{\alpha} v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B) \leqslant_j v(B)$. Это означает, что $\bar{\alpha} v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B))$ принадлежит множеству нижних границ для $\{v(A), v(B)\}$, а значит $\bar{\alpha} v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B)) \leqslant_j v(A) \cap_j v(B) = v(A \wedge_j B)$. Из последнего неравенства получаем $\bar{\alpha} v(A \wedge_j B) \leqslant_j \bar{\alpha}\bar{\alpha} v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B)$, то есть $v(\overset{\alpha}{\neg}_j (A \wedge_j B)) \leqslant_j v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B)$. Получаем, что $v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B) \in \mathscr{U}_n$, поскольку $\mathscr{U}_n$ замкнут относительно $\leqslant_j$. Таким образом, $\overset{\alpha}{\neg}_j (A \wedge_j B) \models_{\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle} \overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B$, значит $\models \overset{\alpha}{\neg}_j (A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B$ в силу произвольности выбора $\mathscr{M}_n$.

Пусть $v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B) \in \mathscr{U}_n$. Из неравенств $v(A \wedge_j B) \leqslant_j v(A)$ и $v(A \wedge_j B) \leqslant_j v(B)$ получаем $\bar{\alpha} v(A) \leqslant_j \bar{\alpha} v(A \wedge_j B)$ и $\bar{\alpha} v(B) \leqslant_j \bar{\alpha} v(A \wedge_j B)$, где $\bar{\alpha}$ соответствует $\overset{\alpha}{\neg}_j$, то есть $\bar{\alpha} v(A \wedge_j B)$ лежит во множестве верхних границ множества $\{\bar{\alpha} v(A), \bar{\alpha} v(B)\}$, а значит $\bar{\alpha} v(A) \cup_j \bar{\alpha} v(B) = v(\overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B) \leqslant_j \bar{\alpha} v(A \wedge_j B)$. Отсюда получаем $v(\overset{\alpha}{\neg}_j (A \wedge_j B)) \in \mathscr{U}_n$ и $\models \overset{\alpha}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j (A \wedge_j B)$.

Случай (6) Допустим, что $v(\overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B)) \in \mathscr{U}_n$. Из неравенств $v(A \wedge_j B) \leqslant_j v(A)$ и $v(A \wedge_j B) \leqslant_j v(B)$ получаем $\bar{\alpha} v(A \wedge_j B) \leqslant_j \bar{\alpha} v(A)$ и $\bar{\alpha} v(A \wedge_j B) \leqslant_j \bar{\alpha} v(B)$, где $\bar{\alpha}$ соответствует $\overset{\alpha}{\neg}_{jj}$, откуда $\bar{\alpha} v(A \wedge_j B) \leqslant_j \bar{\alpha} v(A) \cap_j \bar{\alpha} v(B) = v(\overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj} B)$. В силу замкнутости $\mathscr{U}_n$, $v(\overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj} B) \in \mathscr{U}_n$. Таким образом, $\models \overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \wedge B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj} B$.

Пусть $v(\overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj} B) \in \mathscr{U}_n$. Воспользуемся неравенствами $\bar{\alpha} v(A) \wedge_j \bar{\alpha} v(B) \leqslant_j \bar{\alpha} v(A)$ и $\bar{\alpha} v(A) \wedge_j \bar{\alpha} v(B) \leqslant_j \bar{\alpha} v(B)$, где последовательность $\bar{\alpha}$ соответствует $\overset{\alpha}{\neg}$. В силу того, что последовательность $\bar{\alpha}$ сохраняет порядок $\leqslant_j$ и в силу леммы 2, получаем неравенства $\bar{\alpha}(\bar{\alpha} v(A) \wedge_j \bar{\alpha} v(B)) \leqslant_j v(A)$ и $\bar{\alpha}(\bar{\alpha} v(A) \wedge_j \bar{\alpha} v(B)) \leqslant_j v(B)$, откуда $\bar{\alpha}(\bar{\alpha} v(A) \wedge_j \bar{\alpha} v(B)) \leqslant_j v(A \wedge_j B)$. Вновь используя сохранение порядка $\leqslant_j$ последовательностью $\bar{\alpha}$ получаем $\bar{\alpha}\bar{\alpha}(\bar{\alpha} v(A) \wedge_j \bar{\alpha} v(B)) \leqslant_j \bar{\alpha} v(A \wedge_j B)$. Отсюда, как нетрудно видеть, $v(\overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj} B) \leqslant_j v(\overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B))$, то есть $v(\overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B) \in \mathscr{U}_n$ и $\models \overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \wedge_j \overset{\alpha}{\neg}_{jj} B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B)$.

$\square$

Для доказательства алгебраической непротиворечивости построенного исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$ относительно класса n-решеток необходимо показать, что все правила $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$ сохраняют общезначимость в классе n-решеток C при переходе от посылок правила к его заключению. Более точно это утверждение формулируется следующим образом. Пусть правило ρ репрезентирует множество пар вида $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$, где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ есть секвенции формул языка $\mathscr{L}^n_{\rightarrow}$. Тогда сохранение общезначимости в классе n-решеток C при переходе от посылки правила ρ к его заключению означает, что для всякой пары $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ верно, что если секвенция $\mathfrak{a}$ общезначима в классе n-решеток C, то секвенция $\mathfrak{b}$ общезначима в классе n-решеток C. Аналогично, если ρ репрезентирует множество пар вида $\langle \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle, \mathfrak{c} \rangle$, то если секвенции $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ общезначимы в классе n-решеток C, то секвенция $\mathfrak{c}$ общезначима в классе n-решеток C.

Лемма 62.

(1) *Каждая основная секвенция исчисления* $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$ *является общезначимой в классе ограниченных* n*-решеток.*

(2) *Каждое правило* ρ *исчисления* $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$ *сохраняет общезначимость секвенций при переходе от посылки (или посылок) этого правила к его заключению в классе ограниченных* n*-решеток.*

Доказательство. (1) Для обоснования этого утверждения нужно проверить основные секвенции, что не представляет особой трудности, с учетом оценки пропозициональных констант и леммы 4.

(2) Общая схема рассуждения в случае каждого применения правила исчисления следующая. По допущению, секвенции в посылке (посылках) применения правила являются общезначимыми, далее нужно показать, что секвенция заключения применения правила также является общезначимой. Стандартное допущение здесь состоит в том, что оценка всех формул антецедента секвенции заключения принадлежат n-фильтру $\mathscr{U}_n$ произвольной n-решетки $\mathscr{M}_n$. Остается показать, что оценка какой-то формулы сукцедента этой секвенции также располагается в $\mathscr{U}_n$. Рассмотрим подробно случай какого-либо правила, например $(\Rightarrow \wedge_j)$, а для других правил выпишем ключевые моменты доказательств.

Случай $(\Rightarrow \wedge_j)$. Пусть $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ и $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, B$, требуется показать, что $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge_j B$. Возьмем произвольную логическую nрешетку $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle$, оценку v и предположим, что $v(C) \in \mathscr{U}_n$ для каждой формулы $C \in \Gamma$. Ясно, что, если для какой-то формулы $D \in \Delta$ верно, что $v(D) \in \mathscr{U}_n$, то случай доказан. Если же это не так, то требуется показать $v(A \wedge_j B) \in \mathscr{U}_n$. В силу общезначимости секвенций $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ и $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$, необходимо, что $v(A) \in \mathscr{U}_n$ и $v(B) \in \mathscr{U}_n$. Тогда, по определению $\mathscr{U}_n$, $v(A) \cap_j v(B) \in U_n$, что, в свою очередь, дает $v(A \wedge_j B) \in \mathscr{U}_n$ по определению оценки v для формулы $A \wedge_j B$.

Случай $(\wedge_j \Rightarrow)$. Пусть $\models A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ и оценка всех формулы из множества $\{A \wedge_j B\} \cup \Gamma$ лежит в $\mathscr{U}_n$. Пусть v есть такая оценка. Поскольку $v(A \wedge_j B) \leqslant_j v(A)$ и $v(A \wedge_j B) \leqslant_j v(B)$, а $\mathscr{U}_n$ замкнут по каждому отношению, имеет место $v(A) \in \mathscr{U}_n$ и $v(B) \in \mathscr{U}_n$. Тогда из допущения об общезначимости секвенции посылки правила получаем, что $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta$, что и требуется.

Случай $(\neg_j \wedge_j \Rightarrow)$. Допустим, что $\models \overset{\alpha_m}{\neg}_j A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ и $\models \overset{\alpha_m}{\neg}_j B, \Gamma \Rightarrow \Delta$, а также, что оценка v для всех формул из Γ лежит в $\mathscr{U}_n$, как и $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \wedge_j B)) \in \mathscr{U}_n$. По лемме 60 (3), в $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$ доказуема секвенция $\overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha_m}{\neg}_j B$. Тогда, согласно лемме 61, она является общезначимой, то есть $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \wedge_j B)) \models v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha_m}{\neg}_j B)$. Другими словами, $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \wedge_j B)) \in \mathscr{U}_n$ влечет $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha_m}{\neg}_j B) \in \mathscr{U}_n$. В силу простоты $\mathscr{U}_n$ это означает, что $\overset{\alpha_m}{\neg}_j A \in \mathscr{U}_n$ или $\overset{\alpha_m}{\neg}_j B \in \mathscr{U}_n$. И в том, и в другом случае исходное допущение дает $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta$. Таким образом, секвенция заключения рассматриваемого применения правила общезначима.

Случай $(\Rightarrow \neg_j \wedge_j)$. Пусть $\models \Gamma \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_j A, \overset{\alpha_m}{\neg}_j B, \Delta$ и для каждой формулы $C \in \Gamma$ верно, что $v(C) \in \mathscr{U}_n$. Очевидно, что если $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для какой-то формулы $D \in \Delta$, то случай доказан. Иначе допустим, что $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A) \in \mathscr{U}_n$. Тогда $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha_m}{\neg}_j B) \in \mathscr{U}_n$ в силу того, что $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A) \leqslant_j v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha_m}{\neg}_j B)$, а $\mathscr{U}_n$ замкнут по каждому из отношений. Теперь, используя ранее установленную общезначимость секвенции $\overset{\alpha_m}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha_m}{\neg}_j B \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \wedge_j B)$ (леммы 60 (3) и 61), приходим к тому, что $\overset{\alpha_m}{\neg}_j (A \wedge_j B) \in \mathscr{U}_n$, что дает общезначимость секвенции заключения правила данного случая.

Случай $(\neg_{jj} \wedge_j \Rightarrow)$. Допустим, что $\models \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B, \Gamma \Rightarrow \Delta$, а также, что $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B)) \in \mathscr{U}_n$ и оценка каждой формулы из Γ лежит во множестве $\mathscr{U}_n$. В силу общезначимости секвенции $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A \wedge_j \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B$ (леммы 60 (6) и 61) получаем $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A \wedge_j \overset{\alpha_m}{\neg}_j B) \in \mathscr{U}_n$, откуда $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A) \in \mathscr{U}_n$ и $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j B) \in \mathscr{U}_n$. Тогда из допущения следует, что $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta$. Таким образом получили, что $\models \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B), \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Случай $(\Rightarrow \neg_{jj} \wedge_j)$. Пусть $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A$ и $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B$. Допустим, далее, что оценка всех формул множества Γ попадает в $\mathscr{U}_n$. Если при этом для некоторой $D \in \Delta$ верно, что $v(D) \in \mathscr{U}_n$, то этого достаточно для обоснования общезначимости секвенции заключения правила. В противном случае имеем $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A) \in \mathscr{U}_n$ и $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B \in \mathscr{U}_n)$. Тогда $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A \wedge_j \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B) \in \mathscr{U}_n$ в силу замкнутости $\mathscr{U}_n$ относительно $\wedge_j$, а далее используем общезначимость секвенции $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A \wedge_j \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B)$ (леммы 60 (6) и 61), которая дает $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} (A \wedge_j B)) \in \mathscr{U}_n$. Вновь получили общезначимость секвенции заключения правила.

Случай $(\rightarrow_j \Rightarrow)$. Пусть верны утверждения $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ и $\models B, \Theta \Rightarrow \Lambda$. Далее допустим, что оценка каждой формулы из множества $\Gamma \cup \Theta$, а также оценка формулы $A \rightarrow_j B$ лежат в множестве $\mathscr{U}_n$. По определению оценки v имеем $v(A \rightarrow_j B) = v(A) \supset_j v(B)$. В свою очередь $v(A) \supset_j v(B) = v(B)$, если $v(A) \in \mathscr{U}_n$ и $v(A) \supset_j v(B) = \top_j$ в противном случае. При первой из этих возможностей $v(B) \in \mathscr{U}_n$, что вместе со вторым конъюнктом допущения дает $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для какой-то формулы

$D \in \Lambda$, что обеспечивает общезначимость секвенции заключения. Предположим, что $v(A) \supset_j v(B) \neq v(B)$. В таком случае $v(A) \notin \mathscr{U}_n$. Первый конъюнктивный член допущения влечет $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta$, что вновь приводит к утверждению об общезначимости секвенции заключения правила данного случая.

Случай $(\Rightarrow\to_j)$. Допустим, что $\models A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$, а также, что оценка каждой формулы из множества Γ попадает в $\mathscr{U}_n$. Если для какой-либо формулы $D \in \Delta$ верно, что $v(D) \in \mathscr{U}_n$, доказательство данного случая завершено. Предположим, иначе, что $v(D) \notin \mathscr{U}_n$ для всякой $D \in \Delta$. Тогда требуется рассмотреть два подслучая. В первом $v(A) \in \mathscr{U}_n$. Тогда, в силу допущения об общезначимости $A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$ должно выполняться $v(B) \in \mathscr{U}_n$. С другой стороны, по определению оценки формулы $A \to_j B$ и операции $\supset_j$ получаем, что $v(A \to_j B) \in \mathscr{U}_n$, что и требуется для общезначимости секвенции заключения правила. Во втором подслучае $v(A) \notin \mathscr{U}_n$, то есть $v(A \to_j B) = \top_j$, что вновь обеспечивает $v(A \to_j B) \in \mathscr{U}_n$.

Случай $(\neg_j\to_j \Rightarrow)$. Пусть имеет место утверждение $\models A, \overset{\alpha_m}{\neg}_j B\Gamma \Rightarrow \Delta$ и значения всех формул из множеств Γ, а также формулы $\overset{\alpha_m}{\neg}_j(A \to_j B)$ лежат в n-фильтре $\mathscr{U}_n$. Заметим, что, если $v(A) \notin \mathscr{U}_n$, то $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j(A \to_j B)) \notin \mathscr{U}_n$. Действительно, если $v(A) \notin \mathscr{U}_n$, то $v(A \to_j B) = \mathsf{1}_j$. Тогда $\mathsf{1}_j \leqslant_j v(A \to_j B)$, откуда $\bar{\alpha}_m v(A \to_j B) \leqslant_j \bar{\alpha}_m \mathsf{1}_j$, где $\bar{\alpha}_m$ соответствует $\overset{\alpha_m}{\neg}_j$. По определению v и лемме 4 получаем, что $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j(A \to_j B)) \leqslant_j \mathsf{0}_j$, по лемме 1. Ясно, что $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j(A \to_j B)) \in \mathscr{U}_n$ влечет $\mathsf{0}_j \in \mathscr{U}_n$, что невозможно, так как $\mathscr{U}_n$ является собственным подмножеством носителя n-решетки. Теперь допустим, что $A \in \mathscr{U}_n$. Получаем, что $v(A \to_j B) = v(B) \in \mathscr{U}_n$, откуда $v(B) \leqslant_j v(A \to_j B)$. По лемме 1 получаем $\bar{\alpha}_m v(A \to_j B) \leqslant_j \bar{\alpha}_m v(B)$, то есть $\bar{\alpha}_m v(B) \in \mathscr{U}_n$ (где $\bar{\alpha}_m$ соответствует $\overset{\alpha_m}{\neg}_j$), а значит $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j B) \in \mathscr{U}_n$. Исходное допущение дает тогда $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Lambda$, что обеспечивает общезначимость секвенции заключения правила.

Случай $(\Rightarrow \neg_j\to_j)$. Пусть $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ и $\models \Theta \Rightarrow \Lambda, \overset{\alpha_m}{\neg}_j B$ и для всякой $C \in \Gamma \cup \Delta$ верно, что $v(C) \in \mathscr{U}_n$. Ясно, что, если $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta \cup \Theta$, то случай доказан. Допустим, иначе, что $v(A) \in \mathscr{U}_n$ и $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j B) \in \mathscr{U}_n$. Поскольку $v(A) \in \mathscr{U}_n$, определение операции $\supset_j$ дает $v(A) \supset_j v(B) = v(B)$, то есть $v(A \to_j B) = v(B)$. Отсюда извлекаем $v(A \to_j B) \leqslant_j v(B)$ и далее, по лемме 1 получаем $\bar{\alpha}_m v(B) \leqslant_j \bar{\alpha}_m v(A \to_j B)$, где $\bar{\alpha}_m$ соответствует $\overset{\alpha_m}{\neg}_j$. Таким образом, $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j B) \leqslant_j v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j(A \to_j B))$, а значит $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j(A \to_j B)) \in \mathscr{U}_n$, что и требуется.

Случай $(\neg_{jj}\to_j \Rightarrow)$. Допустим, что $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ и $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B, \Theta \Rightarrow \Lambda$, а также, что оценка v всех формул из множества $\Gamma \cup \Theta$ и формулы $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}(A \to_j B)$ попадают в $\mathscr{U}_n$. Рассмотрим два возможных варианта определения оценки: $v(A) \in \mathscr{U}_n$ и $v(A) \notin \mathscr{U}_n$.

В первом случае получаем $v(A \to_j B) = v(B)$, в силу определений оценки v и операции $\supset_j$. Тогда $\bar{\alpha}_m v(A \to_j B) \leqslant_j \bar{\alpha}_m v(B)$ для $\bar{\alpha}_m$ соответствующей $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}$, что влечет $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B) \in \mathscr{U}_n$, поскольку $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}(A \to_j B)) \in \mathscr{U}_n$. При учете допущения $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B, \Theta \Rightarrow \Lambda$ получаем, что $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Lambda$, что обеспечивает общезначимость секвенции заключения правила. Пусть, иначе, $v(A) \notin \mathscr{U}_n$. Тогда допущение $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ дает $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta$, что и требуется.

Случай ($\Rightarrow \neg_{jj}{\to_j}$). Предположим, что $\models A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B$, а также, что оценка всех формул множества Γ лежит в $\mathscr{U}_n$. Если $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta$, то доказательство случая на этом завершено. Пусть такой формулы не нашлось. Вновь рассмотрим две ситуации: $v(A) \in \mathscr{U}_n$ и $v(A) \notin \mathscr{U}_n$. В первом случае имеем $v(A \to_j B) = v(B)$ в силу определений оценки v и операции $\supset_j$, а также $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B) \in \mathscr{U}_n$, в силу исходного допущения, а также допущения, что оценки всех формул из множества Δ не лежат в $\mathscr{U}_n$. Тогда, ввиду неравенств $v(B) \leqslant_j v(A \to_j B)$, $\bar{\alpha} \leqslant_j \bar{\alpha} v(A \to_j B)$, $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} B) \leqslant_j v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}(A \to_j B))$ (где $\bar{\alpha}$ соответствует $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}$), получаем $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}(A \to_j B)) \in \mathscr{U}_n$, что и требуется для общезначимости секвенции заключения правила. В случае $v(A) \notin \mathscr{U}_n$ получаем $v(A \to_j B) = \mathsf{1}_j$, откуда извлекаем неравенства $\mathsf{1}_j \leqslant_j v(A \to_j B)$, $\mathsf{1}_j = \bar{\alpha} \mathsf{1}_j \leqslant_j \bar{\alpha} v(A \to_j B) = v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}(A \to_j B))$ для $\bar{\alpha}$ соответствующей $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}$.

Случай ($\neg_k \neg_j \Rightarrow$). Допустим, что $\models \overset{\alpha_s}{\neg} \neg_k \neg_j \overset{\alpha_{s'}}{\neg} A, \Gamma \Rightarrow \Delta$, а также, что оценки всех формул множества Γ и формулы $\overset{\alpha_s}{\neg} \neg_j \neg_k \overset{\alpha_{s'}}{\neg} A$ попадают в $\mathscr{U}_n$. Последнее означает, что $\bar{\alpha}_s -_j -_k \bar{\alpha}_{s'} v(A) \in \mathscr{U}_n$, где $\bar{\alpha}_s$ и $\bar{\alpha}_{s'}$ соответствуют $\overset{\alpha}{\neg}$ и $\overset{\alpha_{s'}}{\neg}$. В силу коммутативности n-решетки (см. замечание на стр. 39) получаем $-j -_k \bar{\alpha}_{s'} v(A) = -_k -_j \bar{\alpha}_{s'} v(A)$, откуда $\bar{\alpha}_s -_j -_k \bar{\alpha}_{s'} v(A) = \bar{\alpha}_s -_k -_j \bar{\alpha}_{s'} v(A)$. Таким образом, $v(\overset{\alpha_s}{\neg} \neg_k \neg_j \overset{\alpha_{s'}}{\neg} A) \in \mathscr{U}_n$, что вместе с допущением влечет $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta$, что и требуется.

Оставшиеся случаи доказываются аналогично уже рассмотренным. □

Теорема 12. *Для всякой секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенной из формул языка $\mathscr{L}$ верно, что если $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$, то она общезначима в классе всех ограниченных n-решеток, подходящих для означивания формул, содержащихся в множестве $\Gamma \cup \Delta$.*

Доказательство. Стандартное рассуждение по высоте дерева доказательства секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$. □

§4. Алгебраическая полнота $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n$

Для доказательства алгебраической полноты воспользуемся конструкцией, аналогичной той, которая применяется при построении алгебры Линденбаума-Тарского для заданного наперед исчисления. Несмотря на кажущуюся искусственность такой семантической структуры, данный вид алгебры является чрезвычайно полезным инструментом для того, чтобы убедиться, что построенное исчисление действительно является полным относительно класса алгебр определенного типа. Можно сказать и так, что конструкция Линденбаума-Тарского является своеобразным представлением алгебр определенного типа, осуществляемым теоретико-доказательственными средствами.

На множестве формул $\mathscr{F}^n_{\to}$ определим отношение $\equiv_1$ следующим образом.

Определение 62. Пусть $A, B \in \mathscr{F}^n_{\to}$. Положим

$$A \equiv_1 B \iff \mathscr{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg} A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg} B \ \& \ \mathscr{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg} B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg} A$$

для любого натурального[19] числа s. $\lhd$

Нетрудно проверить, что $\equiv_1$ есть отношение эквивалентности на множестве $\mathscr{F}^n_{\to}$.

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы показать, что $\equiv_1$ есть также *конгруэнция* на множестве $\mathscr{F}^n_{\to}$. Для этого сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 63. *Для всяких формул $A, B \in \mathscr{F}^n_{\to}$ и для всякого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ верно, что*

(1) $A \equiv_1 B \implies \neg_j A \equiv_1 \neg_j B$,

(2) $A \equiv_1 B \ \& \ C \equiv_1 D \implies A \circ C \equiv_1 B \circ D$, *где* $\circ \in \{\wedge_j, \vee_j, \to_j\}$.

Доказательство.

(1) Непосредственно следует из определения 62.

(2) Рассмотрим случай со связкой $\wedge_j$ для какого-то j $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Покажем сначала, что $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n \vdash A \Rightarrow B$ и $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n \vdash C \Rightarrow D$ влечет $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n \vdash A \wedge_j C \Rightarrow B \wedge_j D$ (для случая пустой последовательности $\overset{\alpha_s}{\neg}$, где $s = 0$).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B}{A, C \Rightarrow B}\,(IW \Rightarrow) \qquad \dfrac{C \Rightarrow D}{A, C \Rightarrow D}\,(IW \Rightarrow)}{A, C \Rightarrow B \wedge_j D}\,(\Rightarrow \wedge_j)}{A \wedge_j C \Rightarrow B \wedge_j D}\,(\wedge_j \Rightarrow)$$

[19] Здесь и далее полагается, что 0 также является натуральным числом.

Далее продемонстрируем, что $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j B$ и $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}_j C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j D$ влечет $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}_j (A \wedge_j C) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j (B \wedge_j D)$, а также, что $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} B$ и $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}_{jj} C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} D$ влечет $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \wedge_j C) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} (B \wedge_j D)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j B}{\overset{\alpha}{\neg}_j A, \overset{\alpha}{\neg}_j C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j B}\,(IW \Rightarrow) \qquad \dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_j C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j D}{\overset{\alpha}{\neg}_j A, \overset{\alpha}{\neg}_j C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j D}\,(IW \Rightarrow)}{\overset{\alpha}{\neg}_j A, \overset{\alpha}{\neg}_j C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j (B \wedge_j D)}\,(\Rightarrow \neg_j \wedge_j)}{\overset{\alpha}{\neg}_j (A \wedge_j C) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j (B \wedge_j D)}\,(\neg_j \wedge_j \Rightarrow)$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} B \qquad \overset{\alpha}{\neg}_{jj} C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} D}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj} A, \overset{\alpha}{\neg}_{jj} C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} (B \wedge_j D)}\,(\Rightarrow \neg_{jj} \wedge_j)}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \wedge_j C) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} (B \wedge_j D)}\,(\neg_{jj} \wedge_j \Rightarrow)$$

(3) Теперь докажем аналогичные утверждения для $\to_j$. Пусть имею место $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash B \Rightarrow A$ и $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash C \Rightarrow D$. Тогда получаем

$$\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow A \qquad C \Rightarrow D}{B, A \to_j C \Rightarrow D}\,(\to_j \Rightarrow)}{A \to_j C \Rightarrow B \to_j D}\,(\Rightarrow \to_j)$$

Пусть, далее $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash A \Rightarrow B$ и $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}_j C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j D$. В таком случае имеем

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad \overset{\alpha}{\neg}_j C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j D}{A, \overset{\alpha}{\neg}_j C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j (B \to_j D)}\,(\Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j \to_j)}{\overset{\alpha}{\neg}_j (A \to_j C) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j (B \to_j D)}\,(\overset{\alpha}{\neg}_j \to_j \Rightarrow)$$

Остается проверить $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \to_j C) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} (B \to_j D)$. Для этого используем утверждения $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash B \Rightarrow A$ и $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}_{jj} C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} D$. Тогда получаем

$$\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow A \qquad \overset{\alpha}{\neg}_{jj} C \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} D}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \to_j C), B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} D}\,(\overset{\alpha}{\neg}_{jj} \to_j \Rightarrow)}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj} (A \to_j C) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} (B \to_j D)}\,(\Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} \to_j)$$

Случай со связками $\vee_j$ трудностей не представляет и доказывается аналогично. $\square$

Таким образом, отношение $\equiv_1$ есть конгруэнция на $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}$, что позволяет задать фактор-алгебру на множестве формул $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}$. Иначе говоря, лемма 63 обеспечивает корректность алгебраических операций определения 63, приведенного ниже.

Отношение $\equiv_1$ задает разбиение множества $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}$ на классы эквивалентности. Пусть $[A] = \{B\colon A \equiv_1 B\}$ обозначает класс эквивалентности формулы A по отношению $\equiv_1$. Ясно, что если $A \equiv_1 B$, то $[A] = [B]$. Обозначим факторизованное по $\equiv_1$ множество $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}$ как $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}/_{\equiv_1}$.

Определение 63. $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}$-фактор-алгеброй (алгеброй Линденбаума-Тарского) называется структура

$$\mathfrak{A}^1_n = \langle \mathscr{F}^n_{\rightarrow}/_{\equiv_1}, \{\cap_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}, \{\cup_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}, \{\supset_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}, \{-_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}\rangle,$$

в которой для каждого $j \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
[A] \cap_j [B] &= [A \wedge_j B],\\
[A] \cup_j [B] &= [A \vee_j B],\\
[A] \supset_j [B] &= [A \rightarrow_j B],\\
-_j[A] &= [\neg_j A].
\end{aligned}$$

◁

Можно показать, что $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}$-фактор-алгебра является алгебраическим вариантом n-решетки. С другой стороны, на множестве $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}/_{\equiv_1}$ можно определить семейство частичных порядков $\{\leqslant_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ через операции алгебры $\mathfrak{A}^1_n$ стандартным В : $[A] \leq_j [B] \iff [A] \cap_j [B] = [A]$ (или же $[A] \cup_j [B] = [B]$) для каждого j ($1 \leqslant j \leqslant n$). Корректность определения отношений $\leq_j$ обеспечивается корректностью определения операций на множестве $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}/_{\equiv_1}$.

Лемма 64. *Структура* $\mathscr{M}^1_n = \langle \mathscr{F}^n_{\rightarrow}/_{\equiv_1}, \leq_1, \ldots, \leq_n\rangle$*, в которой определены инверсии* $\{-_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ *является ограниченной n-решеткой.*

Доказательство. Сначала нужно убедиться, что структура $\langle \mathscr{F}^n_{\rightarrow}/_{\equiv_1}, \leq_1, \ldots, \leq_n\rangle$ есть n-решетка. Это следует из того, что любая пара $\langle \mathscr{F}^n_{\rightarrow}/_{\equiv_1}, \leq_i\rangle$ является решеткой, что, в свою очередь, обеспечивается тем, что $\langle \mathscr{F}^n_{\rightarrow}/_{\equiv_1}, \cap_i, \cup_i\rangle$ для каждого i есть решетка.

Покажем, что выполнены также свойства (anti), (iso) и (per2) для каждой операции $-_j$ на множестве $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}/_{\equiv_1}$.

(anti) Пусть $[A] \leq_j [B]$ для некоторых формул A и B. Нужно показать, что $-_j[B] \leq_j -_j[A]$, то есть, что $-_j[B] \cap_j -_j[A] = -_j[B]$. Последнее равенство, согласно определениям связок, переписывается как $[\neg_j B \wedge_j \neg_j A] = [\neg_j B]$. Отсюда видно, что задача сводится к обоснованию $(\neg_j B \wedge_j \neg_j A) \equiv_1 \neg_j B$, то есть утверждений

(i) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}(\neg_j B \wedge_j \neg_j A) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j B$,

(ii) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}(\neg_j B \wedge_j \neg_j A)$.

для всякого натурального числа s и всякого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Рассмотрим случаи, когда $s = 0$ и далее, при $s > 0$, когда $\overset{\alpha_s}{\neg}$ есть $\overset{\alpha_s}{\neg}_j$ и когда $\overset{\alpha_s}{\neg}$ есть $\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}$.

Итак, пусть $s = 0$. В таком случае нужно доказать утверждения

(1.1) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \neg_j B \wedge_j \neg_j A \Rightarrow \neg_j B$,

(2.1) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \neg_j B \Rightarrow \neg_j B \wedge_j \neg_j A$.

Первое из утверждений очевидно. Для дальнейших рассуждений используем допущение $[A] \leq_j [B]$, которое дает $[A \vee_j B] = [B]$, то есть $(A \vee_j B) \equiv_1 B$. Из последнего утверждения следуют

(a) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}(A \vee_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}B$,

(b) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha}{\neg}B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}(A \vee_j B)$.

для всякой последовательности $\overset{\alpha}{\neg}$.

Из утверждения (b) и доказуемости секвенции $\neg_j(B \vee_j A) \Rightarrow \neg_j B \wedge_j \neg_j A$ (частный случай леммы 60 (4)) следует справедливость (2.1).

Теперь допустим, что $\overset{\alpha_s}{\neg}$ есть $\overset{\alpha_s}{\neg}_j$. Задача состоит в доказательстве утверждений

(1.2) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}_j(\neg_j B \wedge_j \neg_j A) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\neg_j B$,

(2.2) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}_j\neg_j B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j(\neg_j B \wedge_j \neg_j A)$.

Сначала из утверждения (a) получаем $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}_j\neg_j(B \vee_j A) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\neg_j B$. Далее используем лемму 60 (9) и получим (1.2). Аналогично для (2.2). Сначала с использованием (b) получаем доказуемость секвенции $\overset{\alpha_s}{\neg}_j\neg_j B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\neg_j(A \vee_j B)$, а затем применяем лемму 60 (9).

Далее, пусть $\overset{\alpha_s}{\neg}$ есть $\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}$. Необходимо доказать утверждения

(1.3) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}(\neg_j B \wedge_j \neg_j A) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\neg_j B$,

(2.3) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\neg_j B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}(\neg_j B \wedge_j \neg_j A)$.

Рассуждения аналогичны приведенным для случаев (1.2) и (2.2).

(iso) Допустим, что $[A] \leq_j [B]$ для некоторых формул A и B. Нужно показать, что для любого $k \neq j$, $-_k[A] \leq_j -_k[B]$. Последнее неравенство перепишем в виде $-_k[A] \cap_j -_k[B] = -_k[A]$, то есть $[\neg_k A \wedge_j \neg_k B] = [\neg_k B]$. Необходимо продемонстрировать справедливость утверждений

(i) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}(\neg_k A \wedge_j \neg_k B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_k B$,

(ii) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_k B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_k(A \wedge_j \neg_k B)$.

для всякого натурального s и всякого k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Для доказательства нужно вновь рассмотреть случаи, когда $s = 0$ или $\overset{\alpha_s}{\neg}$ имеет один из двух видов, $\overset{\alpha_s}{\neg}_j$ или $\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}$, используя лемму 60 (10) и (11) аналогично тому, как это делалось для случая (anti).

(per2) Необходимо показать, что для любой формулы A и любого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ выполняется равенство $-_j -_j [A] = [A]$. Перепишем это равенство сначала в виде $[\neg_j\neg_j A] = [A]$. Далее нужно обосновать следующие утверждения для всякого j, $1 \leqslant j \leqslant n$ и всякого натурального s:

(i) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j\neg_j A$,

(ii) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}\neg_j\neg_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}A$.

Секвенция $\overset{\alpha_s}{\neg}A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}A$ является доказуемой. Далее остается лишь использовать правила $(\neg_j\neg_j \Rightarrow)$ и $(\Rightarrow \neg_j\neg_j)$.

Теперь обоснуем, что построенная n-решетка является ограниченной. Покажем, что для каждого отношения порядка $\leqslant_j$, где j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, элемент $[\top_j]$ является таким, что $[A] \leq_j [\top_j]$ для любой формулы $A \in \mathscr{F}^n_{\to}$. Другими словами, необходимо показать, что $[A] \cap_j [\top_j] = [A]$, то есть $A \wedge_j \top_j \equiv_1 A$. Приходим к задаче доказательства следующих утверждений для всякого j, $1 \leqslant j \leqslant n$ и всякого натурального s:

(i) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}(A \wedge_j \top_j) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}A$,

(ii) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}(A \wedge_j \top_j)$.

Пусть, для начала, $s = 0$. Приведем доказательство для (ii) (для (i) оно тривиально):

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow \top_j}{A \Rightarrow \top_j}\,(W \Rightarrow) \qquad A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \wedge_j \top_j}\,(\Rightarrow \wedge_j)$$

Теперь пусть $\overset{\alpha_s}{\neg}$ есть $\overset{\alpha_s}{\neg}_j$. Тогда получаем для (i):

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_j\top_j \Rightarrow}{\overset{\alpha}{\neg}_j\top_j \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A}\,(\Rightarrow W) \qquad \overset{\alpha}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A}{\overset{\alpha}{\neg}_j(A \wedge_j \top_j) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A}\,(\neg_j\wedge_j \Rightarrow)$$

и для (ii):

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A}{\overset{\alpha}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j A, \overset{\alpha}{\neg}_j\top_j}\,(\Rightarrow W)}{\overset{\alpha}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j(A \wedge_j \top_j)}\,(\Rightarrow \neg_j\wedge_j)$$

Далее, в случае, когда $\overset{\alpha_s}{\neg}$ есть $\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}$, для (i) получаем:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} A}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}\top_j, \overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} A,}\,(W \Rightarrow)}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj}(A \wedge_j \top_j) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} A}\,(\neg_{jj}\wedge_j \Rightarrow)$$

и, наконец, для (ii):

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\top_j}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\top_j}\,(W \Rightarrow) \qquad \overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj} A}{\overset{\alpha}{\neg}_{jj} A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}(A \wedge_j \top_j)}\,(\Rightarrow \neg_{jj}\wedge_j)$$

$\square$

Оценка формул в решетке $\mathscr{M}_n^1$ производится следующим образом. Сначала определяется каноническая оценка для пропозициональных переменных, при которой каждая пропозициональная переменная отображается в тот класс эквивалентности, в котором она содержится. Затем эта каноническая оценка расширяется на все множество формул стандартным образом. Однако утверждение о том, что при расширенной канонической оценке каждая формула также отображается в содержащий ее класс эквивалентности, доказывается в виде соответствующей леммы.

Определение 64. Канонической оценкой в n-решетке $\mathscr{M}_n^1$ называется отображение $v^c\colon \mathtt{Var} \longrightarrow \mathscr{F}^n_{\rightarrow}/_{\equiv_1}$ такое, что для всякой $p \in \mathtt{Var}$, $v^c(p) = [p]$. $\triangleleft$

Имеет место следующая стандартная лемма о канонической оценке.

Лемма 65. *Для всякой формулы $A \in \mathscr{F}^n_{\rightarrow}$ и расширения канонической оценки v^c в n-решетке $\mathscr{M}_n^1$ на множество всех формул языка $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}$ верно, что $v^c(A) = [A]$.*

Доказательство. Доказательство ведется индукцией по построению формулы. Базисный случай следует из определения 64. Остальные случаи следуют из определения 63. $\square$

Остается показать, как полученную структуру можно использовать для доказательства полноты исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$. Напомним, что множество выделенных значений в n-решетке – это некоторое подмножество ее носителя, образующее простой n-фильтр. Поскольку структура $\mathscr{M}_n^1$, как было показано, представляет собой n-решетку, то ничто не мешает рассматривать n-фильтры, построенные из ее элементов. Следующая лемма утверждает, что для любой $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$-недоказуемой секвенции S можно построить такой n-фильтр на $\mathscr{M}_n^1$, что секвенция S будет опровержимой.

Лемма 66. *Пусть* Γ *и* Δ *есть конечные подмножества формул языка* $\mathscr{L}^n_{\rightarrow}$. *Если* $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, *то существует логическая* n*-решетка* $\langle \mathscr{M}_n^1, \mathscr{U}_n \rangle$ *такая, что* $[A] \in \mathscr{U}_n$ *для всякой формулы* $A \in \Gamma$, *но* $[B] \notin \mathscr{U}_n$ *для всякой формулы* $B \in \Delta$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. Для доказательства того, что данная секвенция не является общезначимой в $\langle \mathscr{M}_n^1, \mathscr{U}_n \rangle$, достаточно построить подходящий n-фильтр $\mathscr{U}_n$ на $\mathscr{M}_1$ такой, что $\Gamma \not\models_{\langle \mathscr{M}_1, \mathscr{U}_n \rangle} \Delta$.

Зафиксируем некоторый пересчет $A_1, A_2, A_3, \ldots$ элементов множества $\mathscr{F}^n_{\rightarrow}$. Далее определим последовательность множеств формул следующим образом:

$$\Theta_0 = \Gamma,$$
$$\Theta_{i+1} = \begin{cases} \Theta_i \cup \{A_{i+1}\}, \text{ если } \mathcal{G}\mathbf{ML}_n \nvdash \Theta_i, A_{i+1} \Rightarrow \Delta, \\ \Theta_i \text{ в ином случае.} \end{cases}$$
$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Theta_i.$$

Теперь построим множество $[\Lambda]$, то есть Λ, факторизованное по отношению $\equiv_1$. Остается показать, что $[\Lambda]$ и есть искомый простой n-фильтр $\mathscr{U}_n^1$.

Сначала обоснуем следующий вспомогательный факт:

$$(\star) \qquad \mathcal{G}\mathbf{ML}_n \nvdash \Theta_i \Rightarrow \Delta \quad \text{для любого натурального числа } i.$$

Рассуждение ведется индукцией по $i \in \mathbb{N}$. Поскольку $\Theta_0 = \Gamma$ и $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, то $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \nvdash \Theta_0 \Rightarrow \Delta$, что дает доказательство для базисного случая.

Пусть, согласно допущению индукции, имеет место $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \nvdash \Theta_i \Rightarrow \Delta$. Если $\Theta_{i+1} = \Theta_i$, то $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \nvdash \Theta_{i+1} \Rightarrow \Delta$. В ином случае имеем $\Theta_{i+1} = \Theta_i \cup \{A_{i+1}\}$, то есть $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \nvdash \Theta_{i+1} \Rightarrow \Delta$, по построению Θ_{i+1}.

Поскольку $\Gamma \subseteq \Lambda$, для каждой формулы $C \in \Gamma$ найдется $[C'] \in [\Lambda]$ такой, что $C \in [C']$. Более того, для любой формулы $D \in \Delta$ не существует класса эквивалентности $[D'] \in [\Lambda]$ такого, что $D \in [D']$. Действительно, предположим, что для некоторой формулы $B' \in \Delta$ имеет место $[B'] \in [\Lambda]$. Тогда $B' \in \Lambda$, что влечет $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \Theta_i \Rightarrow \Delta$ для некоторого i. Действительно, если формула B' содержится в множестве Λ, то она была добавлена в Θ_i на некотором шаге построения цепочки множеств. Кроме того, $B' \in \Delta$. Тогда секвенцию $\Theta_i \Rightarrow \Delta$ можно получить из $B' \Rightarrow B'$, доказуемой по лемме 60 (1), применяя правила $(\Rightarrow W)$ и $(W \Rightarrow)$.

Теперь покажем, что $[\Lambda]$ есть n-фильтр на $\mathscr{M}_1$. Допустим, что $[B], [C] \in [\Lambda]$ для некоторых формул B, C. Тогда $B, C \in \Lambda$ и найдутся такие натуральные числа s и p, что $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \Theta_s \Rightarrow B$ и $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \Theta_p \Rightarrow C$. Предположим, что при этом $[B] \cap_j [C] \notin [\Lambda]$ для какого-то j. Тогда $[B \wedge_j C] \notin [\Lambda]$, то есть $B \wedge_j C \notin \Lambda$. Это означает, что существует такое натуральное число i, что $A_i = B \wedge_j C$ и $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \Theta_{i-1}, A_i \Rightarrow \Delta$. Имеем следующий вывод (где двойная черта означает конечное число последовательных применений одного и того же правила):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Theta_s \Rightarrow B}{\Theta_p, \Theta_s \Rightarrow B}\,(W \Rightarrow) \qquad \dfrac{\Theta_p \Rightarrow C}{\Theta_p, \Theta_s \Rightarrow C}\,(W \Rightarrow)}{\Theta_p, \Theta_s \Rightarrow B \wedge_j C}\,(\Rightarrow \wedge_j) \qquad \Theta_{i-1}, B \wedge_j C \Rightarrow \Delta}{\Theta_p, \Theta_s, \Theta_{i-1} \Rightarrow \Delta}\,(Cut)$$

Сочленяя данный вывод с доказательствами секвенций, находящихся в его листьях, получаем доказательство для секвенции $\Theta_p, \Theta_s, \Theta_{i-1} \Rightarrow \Delta$, что противоречит установленному выше факту $(\star)$. В самом деле, одно из трех множеств, по построению, уже содержит остальные два в качестве подмножеств. Пусть, например, $p < i-1$ и $s < i-1$. Тогда получим доказуемость секвенции $\Theta_{i-1} \Rightarrow \Delta$.

Таким образом, $[B] \cap_j [C] \in [\Lambda]$ для всех $B, C \in \mathscr{F}^n_{\rightarrow}$ и $j \leqslant n$.

Допустим, что $[B] \cap_j [C] \in [\Lambda]$, но $[B] \notin [\Lambda]$ или $[C] \notin [\Lambda]$ для какого-то $j \leqslant n$. Тогда $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \Theta_s \Rightarrow B \wedge_j C$ для некоторого натурального числа s. Предположим, что $[B] \notin [\Lambda]$, то есть $B \notin \Lambda$. Тогда для некоторого натурального числа i имеет место: $A_i = B$ и $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \Theta_{i-1}, B \Rightarrow \Delta$. Построим следующий вывод:

$$\dfrac{\Theta_s \Rightarrow B \wedge_j C \qquad \dfrac{\dfrac{\Theta_{i-1}, B \Rightarrow \Delta}{\Theta_{i-1}, B, C \Rightarrow \Delta}\,(W \Rightarrow)}{\Theta_{i-1}, B \wedge_j C \Rightarrow \Delta}\,(\wedge_j \Rightarrow)}{\Theta_s, \Theta_{i-1} \Rightarrow \Delta}\,(Cut)$$

Соединяя этот вывод и доказательства его исходных секвенций, вновь получаем противоречие факту ($\star$), откуда $[B] \in [\Lambda]$. Случай, когда $[C] \notin [\Lambda]$ разбирается аналогичным образом.

Теперь покажем, что $[\Lambda]$ является *простым* n-фильтром. Допустим, что $[B] \cup_j [C] \in \Lambda$, но $[B], [C] \notin [\Lambda]$ для какого-то $j \leqslant n$. Имеем $[B \vee_j C] \in [\Lambda]$, то есть $B \vee_j C \in \Lambda$. Таким образом, $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \Theta_i \Rightarrow B \vee_j C$ наряду с $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \Theta_s, B \Rightarrow \Delta$ и $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n \vdash \Theta_p, C \Rightarrow \Delta$ для некоторых натуральных чисел i, s и p. Далее построим вывод, получая описанным ранее способом противоречие с фактом ($\star$):

$$\dfrac{\Theta_i \Rightarrow B \vee_j C \qquad \dfrac{\dfrac{\Theta_s, B \Rightarrow \Delta}{\Theta_p, \Theta_s, B \Rightarrow \Delta}\,(W \Rightarrow) \qquad \dfrac{\Theta_p, C \Rightarrow \Delta}{\Theta_p, \Theta_s, C \Rightarrow \Delta}\,(W \Rightarrow)}{\Theta_p, \Theta_s, B \vee_j C \Rightarrow \Delta}\,(\vee_j \Rightarrow)}{\Theta_i, \Theta_p, \Theta_s, \Rightarrow \Delta}\,(Cut)$$

Таким образом, $[B], [C] \in \Lambda$.

$\square$

Теорема 13. *Для всякой секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенной из формул языка $\mathscr{L}$ верно, что если $\Gamma \Rightarrow \Delta$ общезначима в классе всех ограниченных n-решеток, подходящих для означивания формул, содержащихся в множестве $\Gamma \cup \Delta$, то она доказуема в исчислении $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$.*

§5. Исчисление $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$

Перейдем к построению исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$, формализующего логику класса n-решеток с операторами замыкания и взятия внутренности Куратовского в виде секвенциального исчисления. Можно считать, что бóльшая часть подготовительной работы уже была проделана параграфе 8 предыдущей главы и в предшествующих параграфах данной главы. Это касается тех определений аппарата секвенциального исчисления, которые напрямую не связаны с дополнительными модальными правилами, имеющимися в $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$.

Формулы, из которых образуются секвенции исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$, принадлежат языку $\mathscr{L}_\Box^n$.

Для записи модальных правил секвенциального исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$ примем следующие соглашения: метапеременная P обозначает множество формул, которое либо пусто, либо имеет вид $\{\Box_j\Gamma_1, \overset{\alpha}{\neg}_j\Diamond_j\Gamma_2, \overset{\beta}{\neg}_{jj}\Box_j\Gamma_3\}$; метапеременная Q обозначает множество формул, которое либо пусто, либо имеет вид $\{\Diamond_j\Delta_1, \overset{\alpha}{\neg}_j\Box_j\Delta_2, \overset{\beta}{\neg}_{jj}\Diamond_j\Delta_3\}$.

Далее сформулируем правила исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$. Основа исчисления, состоящая из правил для немодальных пропозициональных связок или их отрицаний, совпадает с исчислением $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$. Приведем список модальных правил.

Позитивные модальные правила:

$$(\Box_j \Rightarrow)\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box_j A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \Box_j)\ \frac{P \Rightarrow A}{P \Rightarrow \Box_j A}$$

$$(\Diamond_j \Rightarrow)\ \frac{A \Rightarrow Q}{\Diamond_j A \Rightarrow Q} \qquad (\Rightarrow \Diamond_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Diamond_j A}$$

j-негативные модальные правила:

$$(\neg_j\Box_j \Rightarrow)\ \frac{\overset{\alpha_m}{\neg}_j A \Rightarrow Q}{\overset{\alpha_m}{\neg}_j\Box_j A \Rightarrow Q} \qquad (\Rightarrow \neg_j\Box_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_j A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_j\Box_j A}$$

$$(\neg_j\Diamond_j \Rightarrow)\ \frac{\overset{\alpha_m}{\neg}_j A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\overset{\alpha_m}{\neg}_j\Diamond_j A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg_j\Diamond_j)\ \frac{P \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_j A}{P \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_j\Diamond_j A}$$

jj-негативные модальные правила:

$$(\neg_{jj}\Box_j \Rightarrow)\ \frac{\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}\Box_j A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg_{jj}\Box_j)\ \frac{P \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A}{P \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}\Box_j A}$$

$$(\neg_{jj}\Diamond_j \Rightarrow)\frac{\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A \Rightarrow Q}{\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}\Diamond_j A \Rightarrow Q} \qquad (\Rightarrow \neg_{jj}\Diamond_j)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}\Diamond_j A}$$

§6. Алгебраическая непротиворечивость $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$

Как уже отмечалось, определения общезначимости формулы и секвенции в логической модальной n-решетке такие же, как были даны в определении 61. В рассматриваемом случае требуется дополнительная спецификация семантических конструкций.

Во-первых, речь пойдет о модальных n-решетках с операторами Куратовского, а во-вторых, некоторые модальные правила требуют спецификации и самих n-фильтров.

Напомним, что для данного случая применяется обозначение $\langle \mathscr{M}_n, \mathscr{U}_n \rangle^K$ для логической n-решетки, а также $\models_K A$ ($\models_K \Gamma \Rightarrow \Delta$), для обозначения общезначимости формулы A (секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$) в классе ограниченных n-решеток с операторами Куратовского.

Для доказательства леммы о сохранении правилами вывода исчисления $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$ общезначимости в некотором классе логических n-решеток, потребуется аналоги ранее доказанных лемм 60 и 61. Поскольку для доказательства приведенных в лемме 60 не используется никакое модальное правило, эти же результаты остаются справедливы и для исчисления $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$.

Лемма 67. *Секвенции, имеющие следующий вид, доказуемы в исчислении $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$ для любых $A, B \in \mathscr{F}_\Box^n$ и для любых j, k $(1 \leqslant j, k \leqslant n)$ и любого $m \geqslant 1$:*

(1) *Все секвенции, формы которых приведены в формулировке леммы 60,*

(2) $\Box_j A \Rightarrow A$, $\quad \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Box A \Rightarrow A$,

(3) $\Box_j A \Rightarrow \Box_j\Box_j A$, $\quad \Box_j\Box_j A \Rightarrow \Box_j A$,

(4) $\overset{\alpha}{\neg}\Box_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}\Box_j\Box_j A$, $\quad \overset{\alpha}{\neg}\Box_j\Box_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}\Box_j A$,

(5) $\Box_j(A \wedge_k B) \Rightarrow \Box_j A \wedge_k \Box_j B$, $\quad \Box_j A \wedge_k \Box_j B \Rightarrow \Box_j(A \wedge_k B)$,

(6) $\overset{\alpha}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_k B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j\Box_j A \wedge_k \overset{\alpha}{\neg}_j\Box_j B$,

(7) $\overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Box_j(A \wedge_k B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Box_j A \wedge_k \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Box_j B$, $\quad \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Box_j A \wedge_k \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Box_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Box_j(A \wedge_k B)$,

(8) $\Box_j A \vee_k \Box_j B \Rightarrow \Box_j(A \vee_k B)$,

(9) $A \Rightarrow \Diamond_j A$, $\quad A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Diamond_j A$,

(10) $\Diamond_j A \Rightarrow \Diamond_j\Diamond_j A$, $\quad \Diamond_j\Diamond_j A \Rightarrow \Diamond_j A$,

(11) $\overset{\alpha}{\neg}\Diamond_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}\Diamond_j\Diamond_j A$, $\quad \overset{\alpha}{\neg}\Diamond_j\Diamond_j A \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}\Diamond_j A$,

(12) $\Diamond_j(A \vee_k B) \Rightarrow \Diamond_j A \vee_k \Diamond_j B$, $\quad \Diamond_j A \vee_k \Diamond_j B \Rightarrow \Diamond_j(A \vee_k B)$,

(13) $\overset{\alpha}{\neg}_j\Diamond_j A \vee_k \overset{\alpha}{\neg}_j\Diamond_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j\Diamond_j(A \vee_k B)$,

(14) $\overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Diamond_j(A \vee_k B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Diamond_j A \vee_k \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Diamond_j B$, $\quad \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Diamond_j A \vee_k \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Diamond_j B \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_{jj}\Diamond_j(A \vee_k B)$,

(15) $\Diamond_j(A \wedge_k B) \Rightarrow \Diamond_j A \wedge_k \Diamond_j B$.

Лемма 68. *Все секвенции, доказуемые согласно лемме 67, являются общезначимыми в классе ограниченных n-решеток с операторами Куратовского.*

Лемма 69. *Пусть метапеременные P и Q обозначают множества формул в соответствии с соглашением, принятым для записи правил исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$. Тогда имеют место следующие равенства:*

(1) $v(\bigwedge_j P) = I_j v(\bigwedge_j P)$,

(2) $v(\bigvee_j Q) = C_j v(\bigvee_j Q)$.

Доказательство. (1) Возьмем произвольную n-решетку с носителем $\mathscr{S}$. Заметим, что для операций I_j и $\cap_j$ справедливо равенство $I_j(a \cap_j b) = I_j a \cap_j I_j b$ для любых $a, b \in \mathscr{S}$. Далее пусть множество P состоит из формул $A_1, \ldots, A_k$. В таком случае $\bigwedge_j P = A_1 \wedge_j \ldots \wedge_j A_k$ и $v(\bigwedge_j P) = v(A_1) \cap_j \ldots \cap_j v(A_k)$, откуда $I_j(v(\bigwedge_j P)) = I_j v(A_1) \cap_j \ldots \cap_j I_j v(A_k)$. Покажем, что для всякого i ($1 \leqslant i \leqslant n$) верно, что $I_j v(A_i) = v(A_i)$, что обеспечит требуемое равенство (1). Пусть A_i имеет вид $\Box_j B$, тогда $I_j v(A_1) = I_j v(\Box_j B) = I_j I_j v(B) = I_j v(B) = v(\Box_j B) = v(A_i)$. Отметим использование свойства $\mathscr{I}_2$ для обоснования равенства $I_j I_j v(B) = I_j v(B)$. Далее, пусть A_i имеет вид $\overset{\alpha}{\neg}_j \Diamond_j B$. Тогда $I_j v(A_i) = I_j v(\overset{\alpha}{\neg}_j \Diamond_j B) = I_j \bar{\alpha} C_j v(B)$, где $\bar{\alpha}$ соответствует $\overset{\alpha}{\neg}_j$. Используя лемму 5, получаем равенства $I_j \bar{\alpha} C_j v(B) = I_j I_j \bar{\alpha} v(B) = I_j \bar{\alpha} v(B) = \bar{\alpha} C_j v(B) = v(\overset{\alpha}{\neg}_j \Diamond_j B) = v(A_i)$. Остается рассмотреть случай A_i есть $\overset{\alpha}{\neg}_{jj} \Box_j B$. Получаем $I_j v(A_i) = I_j v(\overset{\alpha}{\neg}_{jj} \Box_j B) = I_j \bar{\alpha} I_j v(B)$, где теперь $\bar{\alpha}$ соответствует $\overset{\alpha}{\neg}_{jj}$. Вновь по лемме 5 имеем равенства $I_j \bar{\alpha} I_j v(B) = I_j I_j \bar{\alpha} v(B) = I_j \bar{\alpha} v(B) = \bar{\alpha} I_j v(B) = v(\overset{\alpha}{\neg}_{jj} \Box_j B)$.

Равенство (2) доказывается аналогичными рассуждениями. $\Box$

Лемма 70. *Каждое модальное правило ρ исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$ сохраняет общезначимость секвенций при переходе от посылки (или посылок) этого правила к его заключению в классе ограниченных логических n-решеток, с I-монотонными и C-монотонными n-фильтрами.*

Доказательство. Ограничимся доказательствами для правил, позволяющих вводить формулы с модальностью $\Box_j$ (возможно с префиксом из отрицаний).

Случай ($\Box_j \Rightarrow$). Допустим, что $\models_K A, \Gamma \Rightarrow \Delta$, а также, что оценки всех формул из Γ и формулы $\Box_j A$ лежат в множестве $\mathscr{U}_n$ произвольным образом выбранной n-решетки $\mathscr{M}_n$. Из $v(\Box_j A) \in \mathscr{U}_n$ следует $I_j v(A) \in \mathscr{U}_n$, а из неравенства $I_j v(A) \leqslant_j v(A)$ (свойство $\mathscr{I}_1$) и свойства $\mathcal{Cl}^{\leqslant}$ следует, что $v(A) \in \mathscr{U}_n$. Тогда, согласно допущению, $v(D) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $D \in \Delta$, что обеспечивает общезначимость секвенции заключения правила.

Случай ($\Rightarrow \Box_j$). Пусть $\models_K P \Rightarrow A$ и оценка всех формул из P содержится в $\mathscr{U}_n$. Обозначим, как и ранее, через $\bigwedge_j P$ конъюнкцию (для $\wedge_j$) всех формул множества P.

По допущению и согласно лемме 59, имеет место утверждение $v(\bigwedge_j P) \supset_j v(A) \in \mathscr{U}_n$. Поскольку $\mathscr{U}_n$ является I-монотонным, получаем, что $I_j(v(\bigwedge_j P)) \supset_j I_j(v(A)) \in \mathscr{U}_n$. Используя лемму 69, получаем $I_j(v(\bigwedge_j P)) = v(\bigwedge_j P)$, а значит $v(\bigwedge_j P) \supset_j I_j(v(A)) \in \mathscr{U}_n$. Остается заметить, что, в силу свойства $(\mathscr{I}\boldsymbol{mp})$, $I_j(v(A)) = v(\Box_j A) \in \mathscr{U}_n$, то есть секвенция заключения правила является общезначимой.

Случай $(\neg_j \Box_j \Rightarrow)$. Пусть имеет место $\models_K \overset{\alpha_m}{\neg}_j A \Rightarrow Q$ и оценка формулы $\overset{\alpha_m}{\neg}_j \Box_j A$ попадает в $\mathscr{U}_n$. Обозначим через $\bigvee_j Q$ дизъюнкцию (для $\vee_j$) всех формул множества Q. Из допущения и леммы 59 получаем, что справедливо утверждение $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A) \supset_j v(\bigvee_j Q) \in \mathscr{U}_n$. Поскольку n-фильтр $\mathscr{U}_n$ является C-монотонным, верно $C_j v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A) \supset_j C_j v(\bigvee_j Q) \in \mathscr{U}_n$. Лемма 69 и определение v дают равенства $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j \Box_j A) = C_j v(\bigvee_j Q) = v(\bigvee_j Q)$, то есть $C_j v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A) \supset_j v(\bigvee_j Q) \in \mathscr{U}_n$. В силу свойства $(\mathscr{I}\boldsymbol{mp})$, получаем $v(\bigvee_j Q) \in \mathscr{U}_n$, то есть для некоторой формулы $B \in Q$ верно $v(B) \in \mathscr{U}_n$, что и требуется.

Случай $(\Rightarrow \neg_j \Box_j)$. Пусть $\models_K \Gamma \Rightarrow \Delta, \overset{\alpha_m}{\neg}_j A$ и v есть такая оценка, что $v(A) \in \mathscr{U}_n$ для любой формулы $A \in \Gamma$. Если для некоторой $B \in \Delta$ верно, что $v(B) \in \mathscr{U}_n$, то этого достаточно для общезначимости секвенции заключения правила. Пусть общезначимость секвенции посылки правила обусловлена тем, что $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A) \in \mathscr{U}_n$. Неравенство $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A) \leqslant_j C_j v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A)$ влечет $C_j v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j A) \in \mathscr{U}_n$, откуда $C_j(\bar{\alpha} v(A)) \in \mathscr{U}_n$, где $\bar{\alpha}$ соответствует $\overset{\alpha_m}{\neg}_j$. По лемме 5 получаем $\bar{\alpha} I_j v(A) \in \mathscr{U}_n$, то есть $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_j \Box_j A) \in \mathscr{U}_n$.

Случай $(\neg_{jj} \Box_j \Rightarrow)$. Пусть $\models_K \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ и оценки всех формул из из Γ и формулы $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} \Box_j A$ лежат в $\mathscr{U}_n$. Возьмем одну из таких оценок v и из $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} \Box_j A)$ получим $\bar{\alpha} I_j v(A) \in \mathscr{U}_n$, где $\bar{\alpha}$ соответствует $\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj}$. Из леммы 5 получим $I_j \bar{\alpha} v(A) \in \mathscr{U}_n$. В силу того, что $I_j \bar{\alpha} v(A) \leqslant_j \bar{\alpha} v(A)$, имеем $\bar{\alpha} v(A) \in \mathscr{U}_n$, то есть $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A) \in \mathscr{U}_n$. Теперь из допущения об общезначимости секвенции посылки правила следует, что $v(B) \in \mathscr{U}_n$ для некоторой формулы $B \in \Delta$, что обеспечивает общезначимость секвенции заключения правила.

Случай $(\Rightarrow \neg_{jj} \Box_j)$. Допустим, что $\models_K P \Rightarrow \overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A$ и оценки всех формул из P попадают в $\mathscr{U}_n$. Обозначим через $\bigwedge_j P$ конъюнкцию (для $\wedge_j$) всех формул из P. Из допущения и леммы 59 получаем $v(\bigwedge_j P) \supset_j v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A) \in \mathscr{U}_n$. Поскольку $\mathscr{U}_n$ является I-монотонным, заключаем, что $I_j v(\bigwedge_j P) \supset_j I_j v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A) \in \mathscr{U}_n$. В силу того, что по лемме 69 $I_j v(\bigwedge_j P) = v(\bigwedge_j P)$, имеет место $I_j v(\bigwedge_j P) \in \mathscr{U}_n$. Теперь, по свойству $(\mathscr{I}\boldsymbol{mp})$, получаем $I_j v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} A) \in \mathscr{U}_n$, то есть $v(\overset{\alpha_m}{\neg}_{jj} \Box_j A) \in \mathscr{U}_n$), согласно лемме 5. $\square$

Теорема 14. *Для всякой секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, построенной из формул языка $\mathscr{L}^n_\Box$ верно,* *что если $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$, то она общезначима в классе всех ограниченных n-решеток с операторами Куратовского, подходящих для означивания формул, содержащихся в множестве $\Gamma \cup \Delta$.*

Доказательство. Стандартное рассуждение по высоте дерева доказательства. □

§7. Алгебраическая полнота $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$

Для доказательства алгебраической полноты исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$ воспользуемся той же конструкцией фактор-алгебры Линденбаума-Тарского, что была описана в параграфе 4 настоящей главы, с учетом необходимых для данного случая модификаций. Начнем с определения отношения $\equiv_2$ на множестве $\mathscr{F}_{\Box}^{n}$ через доказуемость секвенций в исчислении $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$.

Определение 65. Пусть $A, B \in \mathscr{F}_{\Box}^{n}$.Тогда

$$A \equiv_1 B \iff \mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}} \vdash \overset{\alpha_s}{\neg} A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg} B \ \ \& \ \ \mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}} \vdash \overset{\alpha_s}{\neg} B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg} A$$

для любого натурального числа s. ◁

Вновь нетрудно убедиться, что '$\equiv_2$' есть отношение эквивалентности на множестве $\mathscr{F}_{\Box}^{n}$.

Сформулируем аналог леммы 63 в применении к отношению $\equiv_2$. Доказательство аналогично приведенному для леммы 63 и элементарно для случаев с модальностями.

Лемма 71. *Для всяких формул $A, B \in \mathscr{F}_{\Box}^{n}$ и для всякого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ верно, что*

(1) $A \equiv_2 B \implies \neg_j A \equiv_2 \neg_j B$,

(2) $A \equiv_2 B \implies \Diamond_j A \equiv_2 \Diamond_j B$,

(3) $A \equiv_2 B \implies \Box_j A \equiv_2 \Box_j B$,

(4) $A \equiv_2 B \ \& \ C \equiv_2 D \implies A \circ C \equiv_2 B \circ D$, *где* $\circ \in \{\wedge_j, \vee_j, \to_j, \}$.

Как и $\equiv_1$ из параграфа 4, отношение $\equiv_2$ есть конгруэнция, которая задает разбиение множества $\mathscr{F}_{\Box}^{n}$ на классы эквивалентности. Определим стандартным образом класс эквивалентности по формуле A: $[A] = \{B \colon A \equiv_2 B\}$. Факторизованное по $\equiv_2$ множество $\mathscr{F}^n_\Box$ обозначим как $\mathscr{F}^n_\Box/_{\equiv_2}$. Определение фактор-алгебры $\mathfrak{A}^2_n$ точно такое же, как было дано в определении 63 (с учетом того, что в данном случае факторизация, как было сказано, производится по отношению $\equiv_2$). Как и раньше, для последующих утверждений интерес представляет реляционная структура $\mathscr{M}^2_n = \langle \mathscr{F}^n_\Box/_{\equiv_2}, \leq_1, \ldots, \leq_n\rangle$, снабженная семействами операций $\{-_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$, $\{I_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ и $\{C_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$.

Лемма 72. *Реляционная структура $\mathscr{M}^2_n = \langle \mathscr{F}^n_\Box/_{\equiv_2}, \leq_1, \ldots, \leq_n\rangle$, в которой заданы унарные операции $\{-_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$, $\{I_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ и $\{C_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$, есть модальная n-решетка Куратовского.*

Доказательство. Для доказательства данного утверждения требуется показать наличие свойств (anti), (iso) и (pre). Из «модальной» части необходимо убедиться, что имеют место свойства $(\mathscr{I}_0)$, $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{I}_1)$, $(\mathscr{I}_2)$, $(\mathscr{I}'_3)$, $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ и $(\mathscr{C}'_3)$.

$(\mathscr{I}_1)$ Требуется показать, что для любой формулы A и для всякого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ имеет место $I_j([A]) \leqslant_j [A]$. Переписывая последнее неравенство, получаем равенство $[\Box_j A \wedge_j A] = [\Box_j A]$. Для доказательства этого равенства нужно обосновать следующие утверждения о доказуемости секвенций для всякого натурального s и всякого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$:

(i) $\mathscr{G}\mathbf{ML}^{\mathbf{S4}}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}(\Box_j A \wedge_j A) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}\Box_j A$,

(ii) $\mathscr{G}\mathbf{ML}^{\mathbf{S4}}_n \vdash \overset{\alpha_s}{\neg}\Box_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}(\Box_j A \wedge_j A)$.

Пусть $s = 0$. Доказуемость (i) очевидна. Для доказательства (ii) нужно показать доказуемость в исчислении $\mathscr{G}\mathbf{ML}^{\mathbf{S4}}_n$ секвенции $\Box_j A \Rightarrow A$. Секвенция $A \Rightarrow A$ доказуема в $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n$, а значит и в $\mathscr{G}\mathbf{ML}^{\mathbf{S4}}_n$. Далее применяем правило $(\Box_j \Rightarrow)$.

Далее рассмотрим случай когда $\overset{\alpha_s}{\neg}$ есть $\overset{\alpha_s}{\neg}_j$.

Приведем фрагмент доказательства для (i):

$$\dfrac{\overset{\alpha_s}{\neg}_j(\Box_j A \wedge_j A) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A \vee_j \overset{\alpha_s}{\neg}_j A \qquad \dfrac{\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A \qquad \dfrac{\overset{\alpha_s}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j A}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A}\,(\Rightarrow \neg_j\Box_j)}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A \vee_j \overset{\alpha_s}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A}\,(\vee_j \Rightarrow)}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j(\Box_j A \wedge_j A) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A}\,(Cut)$$

Верхняя формула крайней левой ветви, доказуема по лемме 60 (3), а формулы в вершинах двух других ветвей – по лемме 67 (1).

Теперь выпишем фрагмент доказательства для утверждения (ii).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_jA}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_jA,\overset{\alpha_s}{\neg}_jA}\,(\Rightarrow W)}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_jA\vee_j\overset{\alpha_s}{\neg}_jA}\,(\Rightarrow\vee_j)\qquad \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_jA\vee_j\overset{\alpha_s}{\neg}_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_j(\Box_jA\wedge_jA)}{\vdash\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_j(\Box_jA\wedge_jA)}\,(Cut)$$

Формула, находящаяся в вершине левой ветви доказуема по лемме 67 (1), а находящаяся в вершине правой ветви, доказуема по лемме 60 (3).

Рассмотрим вторую из возможностей, когда $\overset{\alpha_s}{\neg}$ есть $\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}$. Применяя лемму 60 (6), получаем доказуемость секвенции $\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}(\Box_jA\wedge_jA)\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_jA\wedge_j\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}A$, откуда легко получается утверждение (i).

Для доказательства (ii) выпишем следующее дерево секвенций:

$$(Cut)\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}A\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}A}{\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}A}\,(\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_j)\qquad\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_jA}{\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}A\wedge_j\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_jA}\,(\Rightarrow\wedge_j)\qquad\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}A\wedge_j\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}(\Box_jA\wedge_jA)}{\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}(\Box_jA\wedge_jA)}$$

Формула, находящаяся в вершине крайней правой ветви, доказуема по лемме 60 (6), а формулы в других вершинах – по лемме 67 (1).

($\mathcal{I}_2$). Требуется показать, что для любой формулы A и для любого j $(1\leqslant j\leqslant n)$ имеет место $I_j([A])=I_jI_j[A]$. Данное равенство перепишем в виде $[\Box_jA]=[\Box_j\Box_jA]$. Далее нужно показать истинность следующих утверждений для всякого натурального s и всякого j $(1\leqslant j\leqslant n)$:

(i) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}\vdash\overset{\alpha_s}{\neg}\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}\Box_j\Box_jA$,

(ii) $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}\vdash\overset{\alpha_s}{\neg}\Box_j\Box_jA\Rightarrow\overset{\alpha_s}{\neg}\Box_jA$.

Случаи (i) и (ii) для $s=0$ доказуемы согласно лемме 67 (2), а для $s>0$ в силу (4) той же леммы.

($\mathcal{I}_3$). Для доказательства данного свойства требуется обосновать неравенство

$$I_j([A]\wedge_j[B])\leqslant_j I_j([A])\wedge I_j([B])$$

для всякого j $(1\leqslant j\leqslant n)$.

Перепишем сначала это неравенство в соответствии с определением отношения $\leqslant_j$ в виде равенства $I_j([A\wedge_jB])\wedge_j(I_j([A])\wedge_jI_j([B]))=I_j([A\wedge_jB])$ и далее запишем его в виде $[\Box_j(A\wedge_jB)\wedge_j\Box_jA\wedge_j\Box_jB]=[\Box_j(A\wedge_jB)]$. Требуется обосновать доказуемость следующих секвенций в исчислении $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$ для всякого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и всякого натурального s:

(i) $\overset{\alpha_s}{\neg}(\Box_j(A \wedge_j B) \wedge_j \Box_j A \wedge_j \Box_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}\Box_j(A \wedge_j B)$,

(ii) $\overset{\alpha_s}{\neg}\Box_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}(\Box_j(A \wedge_j B) \wedge_j \Box_j A \wedge_j \Box_j B)$.

Пусть $s = 0$. Доказательство для секвенции (i) очевидно. Для построения доказательства секвенции (ii) нужно использовать лемму 67 пункт (5), а также доказуемость секвенции вида $A \Rightarrow A$ для любой формулы $A \in \mathscr{F}_{\Box}^n$ и правило $(\Rightarrow \wedge_j)$.

Пусть, далее, $\overset{\alpha_s}{\neg}$ есть $\overset{\alpha_s}{\neg}_j$.

Приведем фрагменты искомого доказательства для (i), предполагая доказуемость секвенции вида $A \Rightarrow A$ для любой формулы $A \in \mathscr{F}_{\Box}^n$.

Для начала заметим, что доказуемы секвенции $\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B)$ и $\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B)$. Например, для первой из них выпишем следующее дерево секвенций:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\alpha_s}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j A}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j A, \overset{\alpha_s}{\neg}_j B}\,(\Rightarrow W)}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha_s}{\neg}_j B}\,(\Rightarrow \vee_j) \qquad \overset{\alpha_s}{\neg}_j A \vee_j \overset{\alpha_s}{\neg}_j B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j (A \wedge_j B)}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j (A \wedge_j B)}\,(Cut)}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j \Box_j(A \wedge_j B)}\,(\Rightarrow \neg_j \Box_j)}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j \Box_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j \Box_j(A \wedge_j B)}\,(\Box_j \Rightarrow)$$

Верхняя секвенция правой ветви доказуема согласно лемме 60 (3). Далее получаем

$$\dfrac{\overset{\alpha_s}{\neg}_j(\Box_j A \wedge_j \Box_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A \vee_j \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j B \qquad \dfrac{\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B) \qquad \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B)}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j A \vee_j \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B)}}{\overset{\alpha_s}{\neg}_j(\Box_j A \wedge_j \Box_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B)}\,(Cut)$$

Верхняя секвенция крайней левой ветви является доказуемой согласно лемме 60 (3). Далее получаем

$$\dfrac{\overset{\alpha}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B) \qquad \overset{\alpha}{\neg}_j(\Box_j A \wedge_j \Box_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B)}{\overset{\alpha}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B) \vee_j \overset{\alpha}{\neg}_j(\Box_j A \wedge_j \Box_j B) \Rightarrow \overset{\alpha}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B)}\,(\vee_j \Rightarrow)$$

Наконец, заметим, что согласно 60 (3) в исчислении $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$(а значит и в $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$) доказуема секвенция $\overset{\alpha_s}{\neg}_j(\Box_j(A \wedge_j B) \wedge_j \Box_j A \wedge_j \Box_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j\Box_j(A \wedge_j B) \vee_j \overset{\alpha_s}{\neg}_j(\Box_j A \wedge_j \Box_j B)$.

Используя правило (Cut), получаем доказуемость в $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$ требуемой секвенции $\overset{\alpha_s}{\neg}_j(\Box_j(A \wedge_j B) \wedge_j \Box_j A \wedge_j \Box_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j \Box_j(A \wedge_j B)$.

Обоснование доказуемости секвенции (ii) достаточно простое. Во-первых, в $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}}$ доказуема секвенция $\overset{\alpha_s}{\neg}_j \Box_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_j \Box_j(A \wedge_j B) \vee_j \overset{\alpha_s}{\neg}_j(\Box_j A \wedge_j \Box_j B)$, а далее нужно использовать лемму 60 (3).

Перейдем к доказательству для случая, когда $\overset{\alpha_s}{\neg}$ есть $\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}$.

Доказательство секвенции (i) в этом случае не представляет трудности.

Для доказательства секвенции (ii) нужно действовать следующим образом. Для начала выпишем следующее применение правила:

$$\frac{\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_j(A \wedge_j B) \qquad \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}(\Box_j A \wedge_j \Box_j B)}{\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_j(A \wedge_j B) \wedge_j \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}(\Box_j A \wedge_j \Box_j B)}\,(\Rightarrow \wedge_j)$$

Левая секвенция множества посылок правила имеет вид $A \Rightarrow A$, в то время, как правая секвенция доказуема, поскольку доказуемы секвенции вида $\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_j(A \wedge_j B) \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_j A \wedge_j \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}\Box_j B$ (лемма 67 (7)) и $\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}A \wedge_j \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}(A \wedge_j B)$, согласно лемме 60 (6). Заключение применения правила вместе с доказуемостью секвенции вида $\overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}A \wedge_j \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}B \Rightarrow \overset{\alpha_s}{\neg}_{jj}(A \wedge_j B)$ и правилом (Cut) дает окончательный результат.

Доказательства для свойств $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ и $(\mathcal{C}_3')$ осуществляются аналогично. $\Box$

Сформулируем необходимые определения и леммы аналогично тому, как это делалось для исчисления $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n$.

Определение 66. Канонической оценкой в n-решетке $\mathscr{M}_n^2$ называется отображение $v^c\colon \mathtt{Var} \longrightarrow \mathscr{F}_\Box^n/_{\equiv_2}$ такое, что для всякой $p \in \mathtt{Var}$, $v^c(p) = [p]$. $\triangleleft$

Имеет место следующая стандартная лемма о расширении канонической оценки v^c на множество $\mathscr{F}_\Box^n$.

Лемма 73. *Для всякой формулы $A \in \mathscr{F}_\Box^n$ и канонической оценки v^c в n-решетке $\mathscr{M}_n^2$ верно, что $v^c(A) = [A]$.*

Лемма 74. *Пусть Γ и Δ есть конечные подмножества множества $\mathscr{F}_\Box^n$. Если $\mathcal{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}} \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, то существует логическая n-решетка $\langle \mathscr{M}_n^2, \mathscr{U}_n \rangle$ с такая, что*

(1) *n-фильтр $\mathscr{U}_n$ является I-монотонным и C-монотонным;*

(2) *$[A] \in \mathscr{U}_n$ для всякой формулы $A \in \Gamma$, но $[B] \notin \mathscr{U}_n$ для всякой формулы $B \in \Delta$.*

Доказательство. Процедура построения множества $[\Lambda]$ и доказательство того, что $[\Lambda]$ является простым n-фильтром такие же, как в доказательстве леммы 66.

В дополнение к этому необходимо убедиться, что $[\Lambda]$ обладает свойствами I- и C-монотонности. Рассмотрим первое из них. Пусть для каких-то формул $A, B \in \mathscr{F}^n_\Box$ и какого-то j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, $[A] \supset_j [B] \in [\Lambda]$. Тогда $[A \to_j B] \in \Lambda$. Последнее означает, что для некоторого натурального числа i имеет место $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}} \vdash \Theta_i \Rightarrow A \to_j B$. В таком случае $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}} \vdash A, \Theta_i \Rightarrow B$. Далее последовательно применяются правила $(\Box_j \Rightarrow)$ и $(\Rightarrow \Box_j)$, чтобы получить $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}} \vdash \Box_j A, \Theta_i \Rightarrow \Box_j B$. Наконец, применяя правило $(\Rightarrow\to_j)$, получаем $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}} \vdash \Theta_i \Rightarrow \Box_j A \to_j \Box_j B$. Таким образом, $[\Box_j A \to_j \Box_j B] \in \Lambda$, то есть $I_j[A] \supset_j I_j[B] \in [\Lambda]$.

Аналогично доказывается и C-монотонность $[\Lambda]$. $\Box$

Осталось сформулировать основную теорему о полноте.

Теорема 15 (О ПОЛНОТЕ)**.** *Для всякой секвенции* $\Gamma \Rightarrow \Delta$*, построенной из формул языка* $\mathscr{L}^n_\Box$ *верно утверждение*

$$\models_K \Gamma \Rightarrow \Delta \implies \mathscr{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Доказательство. Допустим, что $\mathscr{G}\mathbf{ML}_n^{\mathbf{S4}} \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. Тогда, по лемме 74 в n-решетке $\mathscr{M}_n^2$ можно построить n-фильтр $\mathscr{U}_n$ такой, что $[B] \in \mathscr{U}_n$ для всякой формулы $B \in \Gamma$, но $[C] \notin \mathscr{U}_n$ для всякой формулы $C \in \Delta$. Таким образом, для канонической оценки v^c получаем, что $v^c(B) \in \mathscr{U}_n$ для любой формулы $B \in \Gamma$, но $v^c(C) \notin \mathscr{U}_n$ для любой формулы $C \in \Delta$. Это и означает, что $\not\models^K \Gamma \Rightarrow \Delta$. $\Box$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщенные истинностные значения представляют собой удобный инструмент для представления формальными семантическими средствами широкого круга философских идей, связанных с различным пониманием истины, выделением тех или иных ее аспектов, моделированием познавательных ситуаций. Системы обобщенных истинностных значений могут формировать частично упорядоченные множества, обладающие определенными свойствами (например, решетки), логические матрицы, алгебры, реляционные структуры. В то же время обобщение истинностных значений может идти как в сторону усложнения их внутреннего устройства, так и в сторону усложнения самих структур, которые они образуют.

В силу своего устройства, системы обобщенных истинностных значений позволяют получить целый спектр отношений логического следования, формализация которых может представлять собой весьма нетривиальную задачу. Это хорошо видно уже на примере трирешеток, обобщающих множество белнаповских истинностных значений. Отсюда порождается проблематика изучения отношений между различными логическими теориями, а также между исчислениями, формализующими различные отношения логического следования, определенные в рамках одной и той же системы истинностных значений. Встает вопрос и об отношениях между вновь получаемыми логическими теориями и исчислениями и уже известными логиками. Кроме того, актуальным является изучение стандартных метатеоретических свойств получаемых исчислений.

Все вышесказанное в полной мере относится к системам онтоэпистемических истинностных значений. Множество онтоэпистемических истинностных значений вместе с отношением частичного порядка образует семантическую структуру (четырехэлементную решетку), подходящую для означивания формул пропозиционального языка, алфавит которого, помимо стандартных связок $\wedge$ и $\vee$, соответствующих решеточным операциям, содержит связки $\neg_t$ и $\neg_1$. Однако логику, определяемую такой семантической структурой, можно понимать и задавать разными способами. Например, можно определять логические матрицы с различными множествами выделенных значений. С другой стороны, можно следовать образцу, известному по построению базисной системы релевантной логики первоуровневого следования **FDE** и отталкиваться от определения бинарного отношения логического следования, а саму логику определять как бинарную систему выводимостей, то есть как множество пар формул. В случае системы онтоэпистемических истинностных значений наиболее естественный, хотя и не единственный, вариант определения отношения следования – это «следование через решеточный порядок». Именно такой вариант определения отношения следования используется в работах [4, 47, 96], посвященных изучению описанной системы онтоэпистемических истинностных значений, а также в данном диссертационном исследовании.

Аксиоматизация бинарного отношения логического следования, заданного на системе онтоэпистемических истинностных значений, оказалась не самой простой задачей, и в самых первых работах [4, 96] по данной тематике какие-либо формализации логики (как множества пар формул, образующих бинарное отношение следования), представлены не были. Первая из известных формализаций появилась в работе [94], но доказательство полноты предложенной аксиоматизации опирается на довольно сильные допущения о наличии свойств теорий (аналогов максимальных насыщенных множеств в стандартных доказательствах семантической полноты для аксиоматических систем). В данном диссертационном исследовании предложен иной подход к аксиоматизации логик онтоэпистемических истинностных значений, при котором доказательство семантической полноты не предполагает использования каких-либо особых свойств теорий.

Один из возможных путей модификации систем онтоэпистемических значений состоит в добавлении новых типов элементов в исходные системы истинностных значений. В частности, естественным представляется добавление истинностного значения, содержательно интерпретируемого как неопределенность (отнологического и эпистемического характера), что приводит к исходным множествам $\{t, u_t, f\}$ и $\{1, u_1, 0\}$. Декартово произведение этих множеств дает девятиэлементное множество новых истинностных значений, которые теперь могут содержать компонент неопределенности. Полученное множество также образует решеточно упорядоченную структуру, подходящую для означивания формул пропозициоанльного языка. На этом множестве помимо стандартных решеточных операций вновь определяются две унарные операции $\sim_t$ и $\sim_1$, которым в пропозициональном языке логической теории по-прежнему соответствуют «полуотрицания» $\neg_t$ и $\neg_1$. В настоящем исследовании предложена аксиоматизация отношения логического следования, которое, как и ранее, определяется через отношение частичного порядка на множестве истинностных значений. Заметим, что и здесь, при доказательстве семантической полноты предложенной аксиоматизации, никакие специальные свойства теорий не использовались.

Обобщение конечнозначных систем онтоэмистемических истинностных значений естественным образом ведет к абстрактным решеткам, содержащим унарные операции, подобные (по характеристическим свойствам) тем, что были в конечном случае. Такие абстрактные решетки нередко становятся самостоятельными объектами изучения ([8, 28]).

Однако в данном исследовании был выбран другой путь, инспирированный работой М. Данна и Д. Олвейна [7], где, в числе прочего, авторы описывают реляционную семантику для одной из разновидностей линейной логики с трехзначной оценкой формул в точках реляционной структуры. Эта реляционная семантика, в свою очередь, является в некотором смысле производной от конструкции, предложенной А. Урквартом [90] для доказательства теоремы о представлении для недистрибутивных решеток. В рамках настоящего исследования весь этот аппарат был адаптирован для построения реляционной семантики для логики с эпистемическим и отнотологическим «полуотрицаниями». Истинностные значения формул в каждой точке такой структуры – это по-прежнему онтологические и эпистемические истина, ложь и неопределенность, как это было в случае девятиэлементной решетки $\mathscr{L}\mathbf{9}^u$.

Отношение следования в реляционной семантике может быть определено по-разному – с сохранением только одного из истинностных компонентов (при обратном сохранении соответствующей ложности) или с сохранением обоих компонентов. Результирующие отношения следования не совпадают и порождают различные логические теории. В данной работе предложена аксиоматизация одного из отношений следования, с прямым сохранением онтологической истины и обратным сохранением онтологической ложности. Одна из наиболее интересных открытых задач – аксиоматизация отношения следования с прямым сохранением обоих видов истинности и обратным сохранением обоих видов ложности.

Разумеется остаются нерешенные задачи и в рамках того материала, который представлен в данной работе. Прежде всего это касается системы $\mathbf{NDst}_{oe}$. Остается задача построения формализации отношения логического следования, определяемого через прямое сохранение онтологической и эпистемической истинности и обратное сохранение онтологической и эпистемической ложности. Из примеров видно, что это отношение не является пустым, и не является тривиальным. Если исчисление удастся получить, то интересно исследовать его метатеоретические свойства, в первую очередь разрешимость, а также отношения с другими исчислениями, формализующими теории бикомпонентной истины.

Матрицы, построенные на обобщенных истинностных значениях с циклической одноместной операцией (служащей для интерпретации циклического отрицания) допускают различные определения отношения логического следования за счет варьирования множества выделенных значений. В данной работе изучен лишь один вариант определения следования, хотя, вероятно, наиболее естественный с точки зрения выбора множества выделенных значений.

Унарная операция, получившая название «коннегации», изучена лишь в контексте довольно простых четырехэлементных систем истинностных значений. Интересно было бы рассмотреть более абстрактные алгебраические структуры с обобщенной коннегацией.

Многомерные решетки представляют собой абстракции от систем обобщенных истинностных значений (бирешеток, трирешеток и т. д.) и с точки зрения своих формальных свойств изучены к настоящему моменту довольно мало. Важные для построения логических теорий конструкции в многомерных решетках, аналоги фильтров и идеалов в стандартных решетках, также практически не исследованы, что сильно затрудняет их применение в доказательствах метатеоретических свойств логических теорий и исчислений. Тем не менее, абстрактные n-мерные решетки являются вполне естественными обобщениями конечных решеточных структур с семействами отношений порядка и без сомнения требуют своего дальнейшего изучения.

Одна из проблем, имеющихся в работах [62, 65, 82, 51], состоит в том, что теоремы о полноте для секвенциальных исчислений, формализующих те или иные логики n-решеток, доказываются через погружения в другие секвенциальные исчисления, в то время, как доказательство алгебраической полноты не дается. Семантика для языка, в котором исчисления сформулированы, также обычно не алгебраическая, а лишь предположительно определяющая ту же логику, что и классы n-решеток.

В данном исследовании этот пробел отчасти восполнен, однако результирующие системы несколько отличаются от тех, которые предложены в вышеперечисленных работах. Разработка доказательств алгебраической непротиворечивости и полноты для предложенных исчислений показала, в первую очередь, насколько более сложно устроенными структурами являются абстрактные n-мерные решетки по сравнению с достаточно хорошо изученными «одномерными» решетками и даже бирешетками. Нельзя каждый раз путем прямого обобщения получать те же самые объекты и утверждения о них, которые известны из общей теории решеток.

Продолжая линию исследований заключительной главы данной работы, можно построить секвенциальные исчисления, формализующие классы n-решеток с операторами замыкания и взятия внутренности Тарского и Халмоша в таком же духе, как это сделано для случая n-мерных решеток с операторами Куратовского.

Список литературы

[1] Беликов А. А., Григорьев О. М., Зайцев Д. В. Две грани циклического отрицания // Материалы Международной научной конференции «Одиннадцатые Смирновские чтения по логике ». Москва, 19–21 июня 2019 года. Современные тетради. Москва. 2019. С. 8–10.

[2] Беликов А. А., Григорьев О. М., Маркин В. И. Основные направления и результаты исследований по философской логике в Московском университете // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 2024. Т. 48, № 6. С. 71–98.

[3] Григорьев О. М. Системы временной логики I: моменты, истории, деревья // Логические исследования. 2021. Т. 27, № 2. С. 153–184.

[4] Григорьев О. М., Зайцев Д. В. Две истины – одна логика // Логические исследования. 2011. Т. 17. С. 121–139.

[5] Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука. 1070.

[6] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука. 1971.

[7] Allwein G., Dunn J. M. Kripke models for linear logic // Journal of Symbolic Logic. 1993. Vol. 58. № 2. P. 514–545.

[8] Almeida A. Canonical Extensions and Relational Representations of Lattices with Negation // Studia Logica. 2009. Vol. 91, P 171–199.

[9] Arieli O., Avron A. Reasoning with logical bilattices // Journal of Logic, Language and Information. 1996. № 5. P. 25–63.

[10] Belikov A., Grigoriev O., Zaitsev D. On connegation // Relevance Logics and other Tools for Reasoning. Essays in Honor of J. Michael Dunn. Vol. 46 of Tributes. United States: College Publications. 2022. P. 73–88.

[11] Belnap N. D., A Useful Four-Valued Logic // Dunn J. M., Epstein G. (eds) Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Episteme. Vol 2. Springer, Dordrecht. 1977.

[12] Belnap N. D. How a computer should think // Ryle G. (ed), Contemporary aspects of philosophy. Stocksfield, Oriel Press. 1977. P. 30–56.

[13] Benthem van J., Logical dynamics meets logical pluralism? // The Australasian Journal of Logic. 2008. Vol. 6. P. 182–209.

[14] Benthem van J., Logical dynamics of information and interaction. Cambridge University Press, 2011.

[15] Bimbo K. Dunn M., Four valued logic // Notre Dame Journal Formal Logic. 2001. Vol. 42. № 3. P. 171–192.

[16] Bimbo K. Dunn M., Generalized Galois logics. Relational semantics od nonclassical logical calculi. CSLI lecture notes № 188. 2008.

[17] Birkhoff G., Neumann von J. The Logic of Quantum Mechanics // Annals of Mathematics. 1936. Vol. 37, № 4. P. 823–843.

[18] Białnicki-Birula, A., Rasiowa, H. On the representation of quasi-boolean algebras // Bulletin de I'Academie Polonaise des Sciences. 1957. Vol. 5. № 3. P. 259–261.

[19] Bolotov A., Basukoski A., Grigoriev O., Shangin V. Natural deduction calculus for linear-time temporal logic // Lecture Notes in Computer Science. 2006. Vol. 4160. Springer Berlin Heidelberg. P. 56–68. (Ядро РИНЦ – Scopus, Web of Science, SJR – 0,352, 0,8 п. л., объем авторского вклада не менее 30%).

[20] Cattaneo G. Algebraic Methods for Rough Approximation Spaces by Lattice Interior–Closure Operations // Mani A., Cattaneo G., Düntsch I. (eds) Algebraic Methods in General Rough Sets. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. 2018. P. 13–156.

[21] Cattaneo G., Ciucci D. Lattices with interior and closure operators and abstract approximation spaces. // Peters J. F. et al. (eds.) Transactions on Rough Sets X. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 5656. 2009. P. 67–116.

[22] Chagrov A., Zakharyaschev M. Modal logic. Oxford University Press. 1997.

[23] Chellas R. Modal logic. Cambridge University Press. 1980.

[24] Chiara M. L. D., Giuntini R., Leporini R. Logics from quantum computation // International Journal of Quantum Information. 2005. Vol. 3. № 2. P. 293–337.

[25] Chiara M. L. D., Giuntini R., Greechie R. Reasoning in quantum theory: sharp and unsharp quantum logics. 2013. Vol. 22. Springer Science & Business Media.

[26] Davey B. A., Priestley H. A. Introduction to Lattices and Order. 2nd ed. Cambridge University Press. 2002.

[27] Deutsch D. Ekert A. Lupacchini R. Machines, logic and quantum physics // Bulletin of Symbolic Logic. 2000. Vol. 6. № 3. P. 265–283.

[28] Dzik W., Orlowska E., Alten van C. Relational Representation Theorems for General Lattices with Negations // Schmidt R. A. (eds) Relations and Kleene Algebra in Computer Science. RelMiCS 2006. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 4136. P. 162–176. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 2006.

[29] Dummett M. Truth // Proceedings of the Aristotelian Society. Vol. 59. 1959. P. 141–162. (Reprinted in Truth and Other Enigmas. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1978, 1–24).

[30] Dunn J. M. The algebra of intensional logics. Doctoral Dissertation. University of Pittsburgh. Ann Arbor. 1966 (University Microfilms).

[31] Dunn J. M. Intuitive semantics for first-degree entailment and 'coupled trees' // Philosophical Studies. 1976. Vol. 29. P. 149–168.

[32] Dunn J. M. Star and perp: two treatments of negation // Philosophical Perspectives. 1993. Vol. 7. P. 331–357.

[33] Dunn J. M. Partiality and its dual // Studia Logica. 2000. Vol. 66. P. № 4. 5–40.

[34] Dunn J. M., Hardegree G. Algebraic Methods in Philosophical Logic. Number 41 in Oxford Logic Guides. OUP, 2001.

[35] Dunn J. M., Restall G., Relevance logic // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 6. 2002. P. 1–128.

[36] Dunn J. M., Moss L. S., Wang, Z. Editors' Introduction: The Third Life of Quantum Logic: Quantum Logic Inspired by Quantum Computing // Journal of Philosophical Logic. 2013. Vol. 42. P. 443–459.

[37] Dunn J. M., Zhou C. Negation in the context of gaggle theory // Studia Logica. 2005. Vol. 80. P. 235–264.

[38] Fitting M. C. Bilattices and the theory of truth. Journal of Philosophical Logic, 18:225–256, 1989.

[39] Fitting M. C. Bilattices in logic programming // Proceedings of the Twentieth International Symposium on Multiple-Valued Logic, Charlotte, NC, USA, 1990, P. 238–246.

[40] Fitting M. C. Kleene's three-valued logics and their children // Fundamenta Informaticae. 1994. Vol. 20. P. 113–131.

[41] Fitting M. C. Bilattices are nice things // Bolander T., Hendricks V., Pederrsen S. A. (eds). Self-Reference. Chapter 3. P 53–77. Center for the Study of Language and Information. 2006.

[42] Fitting M. C. Bilattice basics // Journal of Applied Logics – IfCoLog Journal of Logics and their Applications. 2020. Vol. 7. № 6. P. 973–1018.

[43] Font J. M., Jansana R., Pigozzi D. A Survey of Abstract Algebraic Logic // Studia Logica. Vol. 74. 2003. P. 13–97.

[44] Ginsberg M. L., Multi-valued Logics // Proceedings of AAAI-86, Fifth National Conference on Artifcial Intelligence. Morgan Kaufmann. 1986. P. 243–247.

[45] Ginsberg M. L. Multivalued Logics: A Uniform Approach to Inference in Artificial Intelligence. 1988. // Computational Intelligence. Vol. 4, № 3. P. 265–316.

[46] Greco G., Liang F., Palmigiano A., Rivieccio U. Bilattice logic properly displayed // Fuzzy Sets and Systems, Vol. 363. 2019. P. 138–155.

[47] Grigoriev O. Bipartite truth and semi-negations // Материалы международной научной конференции «Седьмые Смирновские чтения по логике». Москва, 22–24 июня 2011 г. Современные тетради. Москва. 2011. С. 54–55.

[48] Grigoriev O. A tableau calculus for a logic of two-component truth // Материалы международной научной конференции «Восьмые Смирновские чтения по логике». Москва, 19–21 июня 2013 г. Современные тетради. Москва. 2013.

[49] Grigoriev O. M. Semantic analysis of classical seminegations // Материалы международной научной конференции «Девятые Смирновские чтения по логике». Москва, 17–19 июня 2015 года. Современные тетради. Москва. 2015. P. 58–59.

[50] Grigoriev O. M. Generalized truth values and quantum logic // Материалы Международной научной конференции «Десятые Смирновские чтения по логике». Москва. 15–17 июня 2017 года. Современные тетради. Москва. 2017. P. 70–71.

[51] Grigoriev O. M. Logic of bipartite truth with uncertainty dimension // Journal of Applied Logics – IfCoLoG Journal of Logics and their Applications. 2019. Vol. 6. № 2. P. 291–319.

[52] Grigoriev O. M., Petrukhin Y. I. On a multilattice version of S5 // Материалы Международной научной конференции «Одиннадцатые Смирновские чтения по логике». Москва, 19–21 июня 2019 года. Современные тетради. Москва. 2019. P. 14–16.

[53] Grigoriev O., Petrukhin Y. On a multilattice analogue of a hypersequent S5 calculus // Logic and Logical Philosophy. 2019. Vol. 28, № 4. P. 683–730.

[54] Grigoriev O., Petrukhin Y. Two proofs of the algebraic completeness theorem for multilattice logic // Journal of Applied Non-classical logics. 2019. Vol. 29. № 4. P. 358–381.

[55] Grigoriev O., Petrukhin Y.: Modal multilattice logics with Tarski, Kuratowski and Halmos operators // Logic and Logical Philosophy. 2021. Vol. 30, № 3. P. 385–415.

[56] Grigoriev O., Petrukhin Y. Basic modal congruent and monotonic multilattice logics // Journal of Logic and Computation. 2023. Vol. 33, № 6. P. 1379–1398.

[57] Grigoriev O., Petrukhin Y. Non-deterministic logic of generalized classical truth values // Many-valued Semantics and Modal Logics: Essays in Honour of Yuriy Vasilievich Ivlev. Synthese Library. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG. 2024. P. 93–109.

[58] Grigoriev O., Zaitsev D. Basic four-valued systems of cyclic negations // Bulletin of the section of logic. 2022. Vol. 51, № . 4. P. 507–533.

[59] Halmos P. R. The basic concepts of algebraic logic // The American Mathematical Monthly. 1956. Vol. 63. № 6. P. 363–387.

[60] Humberstone L. Negation by iteration // Theoria. 1995. Vol. 61. № 1. P. 1–24.

[61] Indrzejczak A. Sequents and Trees An Introduction to the Theory and Applications of Propositional Sequent Calculi. Birkhaäuser Basel. 2021.

[62] Kamide N. Trilattice logic: an embedding-based approach // Journal of Logic and Computation. 2015. Vol. 25. P. 581–611.

[63] Kamide N. Paraconsistent double negations as classical and intuitionistic negations // Studia Logica. 2017. Vol. 105. № 6. P. 1167–1191.

[64] Kamide N., Shramko Y. Embedding from multilattice logic into classical logic and vice versa // Journal of Logic and Computation. 2017. Vol. 27. № 5. P. 1549–1575.

[65] Kamide N., Shramko Y. Modal Multilattice Logic // Logica Universalis. 2017. Vol. 11. № 3. P. 317–343.

[66] Karpenko A. Factor semantics for n-valued logics // Studia Logica. 1983. Vol. 42. № 2/3. P. 179–185.

[67] Negation. A Notion in Focus. Wansing H. (ed) Berlin: de Gruyter. 1996.

[68] Niki S. Double Negation as Minimal Negation // Journal of Logic, Language and Information. 2023. Vol. 32. № 5. P. 861–886.

[69] Odintsov S. P. Constructive Negations and Paraconsistency. Springer Netherlands. 2008.

[70] Odintsov S. P. On axiomatizing Shramko-Wansing's logic // Studia Logica. 2009. Vol. 91. 407–428.

[71] Odintsov S. P. Wansing H. The Logic of Generalized Truth Values and the Logic of Bilattices // Studia Logica. 2015. Vol. 103. P. 91–112.

[72] Omori H., Sano K. Generalizing functional completeness in Belnap-Dunn logic // Studia Logica. 2015. Vol. 103. № 5. P. 883–917.

[73] Omori H., Arenhart J. A note on Grigoriev and Zaitsev's system $\mathbf{CNL}_4^2$ // Proceedings Eleventh International Conference on Non-Classical Logics. Theory and Applications (NCL'24), Łódź, Poland, 5–8 September 2024. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. Vol. 415, P. 229–243.

[74] Omori H., Wansing H. On contra-classical variants of Nelson logic N4 and its classical extension // The Review of Symbolic Logic. 2018. Vol. 11. № 4. P. 805–820.

[75] Paoli F. Bilattice Logics and Demi-Negation // Omori H., Wansing H. (eds) New Essays on Belnap-Dunn Logic. Synthese Library, vol 418. Springer, Cham. 2019. P. 233–253.

[76] Post E. Introduction to a general theory of elementary propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43. P. 163–185.

[77] Priestley H. A. Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices // Proceedings of the London Mathematical Society.1972. Vol. 2. P. 507–530.

[78] Rasiowa H. An algebraic approach to non-classical logics. Studies in Logic and Foundations of Mathematics. Vol. 78. North-Holland, Amsterdam. 1974.

[79] Ruet P. Complete set of connectives and complete sequent calculus for Belnap's logic // Tech. rep. Ecole Normale Superieure. Logic Colloquium 96. Document LIENS-96–28. 1996.

[80] Stone M. H. The theory of representations for Boolean algebras // Transactions of the American Mathematical Society. 1936. Vol. 40. P. 37–111.

[81] Stone M. H. Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics // Časopis pro Pěstování Matematiky a Fysiky. Vol. 67. 1937. P. 1–25.

[82] Shramko, Y., Truth, falsehood, information and beyond: the American plan generalized // Bimbo K. (ed) J. Michael Dunn on Information Based Logics, Outstanding Contributions to Logic. Springer, Dordrecht. 2016. P. 191–212.

[83] Shramko Y., Dunn J. M., Takenaka T. The trilattice of constructive truth-values // Journal of Logic and Computation. 2001. Vol. 11. № 6. P. 761–788.

[84] Shramko Y., Wansing H. Some useful 16-valued logics: how a computer network should think // Journal of Philosophical Logic 2005. Vol. 34. № 2. P. 121–153.

[85] Shramko, Y., Wansing, H. Hyper-Contradictions, Generalized Truth Values and Logics of Truth and Falsehood // Journal of Logic, Language, and Information. 2006. Vol. 15. № 4. P. 403–424.

[86] Shramko Y. Wansing H. Truth Values // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `https://plato.stanford.edu/archives/win2021/entries/truth-values`.

[87] Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A. First-degree entailment and its relatives // Studia Logica. 2017. Vol. 105. № 6. P. 1291–1347.

[88] Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A. The fmla-fmla axiomatizations of the exactly true and non-falsity logics and some of their cousins // Journal of Philosophical Logic. 2019. Vol. 48, № 5. P. 787–808.

[89] Takeuti G. Proof theory. North-Holland Publishing Company. 1975.

[90] Urquhart A. A topological representation theory for lattices // Algebra Universalis, vol. 8. 1978. P. 45–58.

[91] Wansing H. The power of Belnap. Sequent systems for $SIXTEEN_3$ // Journal of Philosophical Logic. 2010. Vol. 39. № 4. P. 369–393.

[92] What is Negation? Gabbay D. M. Wansing H. (eds) Applied Logic Series. Vol. 13. Springer, Dordrecht. 1999.

[93] Wójcicki R. Theory of logical calculi. Basic theory of consequence operations. Synthese Library. Vol. 199. Reidel, Dordrecht. 1988.

[94] Zaitsev D. Logics of generalized classical truth values // Arazim P., Peliš M. (eds) The Logica Yearbook 2014. College Publications London. 2015. P. 331–341.

[95] Zaitsev D. A few more useful 8-valued logics for reasoning with tetralattice $EIGHT_4$ // Studia Logica. 2009. Vol. 92. № 2. P. 265–280.

[96] Zaitsev D., Shramko Y. Bi-facial truth: a case for generalized truth values // Studia Logica. 2013. Vol. 101. № 6. P. 1299–1318.