

**ОТЗЫВ официального оппонента  
на диссертацию на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
Белозерова Глеба Владимировича  
на тему «Топология слоений Лиувилля интегрируемых билиардов  
в трехмерном евклидовом пространстве»  
по специальности 1.1.3 Геометрия и топология**

Диссертация Белозерова Глеба Владимировича посвящена изучению топологии слоений Лиувилля интегрируемых билиардов в трехмерном евклидовом пространстве, в частности, софокусных билиардов на квадраках и трехмерных билиардов, ограниченных софокусными квадраками. Изучение билиардов актуально с точки зрения исследования интегрируемых систем, поскольку они являются геометрически наглядными и при этом весьма широки в классе интегрируемых систем с точки зрения топологии их слоений Лиувилля. Поэтому важным является вопрос об их классификации на предмет лиувиллевой эквивалентности, т.е. существования гомеоморфизма слоений, переводящего слои Лиувилля одной системы в слои другой.

Системы с двумя степенями свободы могут быть классифицированы с помощью метода инвариантов Фоменко-Цишанга, сопоставляющего системе меченую молекулу. Грубая молекула представляет собой граф, вершины которого соответствуют особым слоям, при этом в зависимости от типа перестройки лиувиллевых торов вершине ставится в соответствие атом, что и определяет грубую молекулу. Такая молекула называется инвариантом Фоменко и позволяет ответить на вопрос о грубой лиувиллевой эквивалентности (существовании гомеоморфизма между базами слоений Лиувилля, который локально поднимается до послойного гомеоморфизма самих слоений). Грубую молекулу можно снабдить метками, позволяющими определить, каким именно образом склеиваются граничные торы атомов, что и определяет инвариант Фоменко-Цишанга. Две интегрируемые гамильтоновы системы лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.

Плоские интегрируемые билиарды, ограниченные софокусными квадраками, а также системы, полученные склейкой плоских областей вдоль сегментов границ (билиардные книжки, введенные В.В. Ведюшкиной), изучались и классифицировались в работах А.Т. Фоменко, В. Драговича, М. Раднович, В.В. Ведюшкиной. В своей работе Г.В. Белозеров изучает и классифицирует с помощью меченых молекул обобщение подобных плоских билиардов – билиарды в софокусных областях на квадраках.

Также Г.В. Белозеровым изучаются системы с тремя степенями свободы, представленные билиардами в трехмерных областях, ограниченными двумерными квадраками – эллипсоидами, гиперboloидами разных типов и их софокусными семействами. Диссертант описывает все возможные трехмерные софокусные билиардные столы, однако для топологической классификации билиардных систем на таких столах на предмет (грубой) лиувиллевой эквивалентности уже не применима теория Фоменко-Цишанга: слоения Лиувилля билиардов являются, вообще говоря, кусочно-гладкими, а размерность слоев равна трем, что влечет наличие у системы более сложных чем атомы особенностей. Тем не менее Г.В. Белозеров описал подход, позволяющий провести такую классификацию для рассматриваемых билиардных систем, а также определил класс гомеоморфности неособой поверхности постоянной энергии в этом случае.

Объем диссертации составляет 151 страницу, состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы, включающего 76 наименований. Из них 3 наименования – статьи автора по теме диссертации в рецензируемых научных журналах.

Во **введении** приведена история рассматриваемых вопросов, обоснована актуальность темы, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, а также перечислены основные результаты и положения, выносимые на защиту. Описаны используемые методы, обсуждается теоретическая ценность работы. Также приведена структура диссертации и ее краткое содержание.

В **первой главе** приведены необходимые сведения. Даны определения и сформулированы общие утверждения, касающиеся теории интегрируемых систем и билиардов, в частности, описан метод инвариантов Фоменко. Также в этой главе описаны софокусные билиарды в  $\mathbb{R}^3$  двух видов – софокусные билиарды на квадраках и трехмерные билиарды, ограниченные софокусными квадраками, и приведено обоснование их интегрируемости в кусочно-гладком смысле.

Во **второй главе** изучаются софокусные билиарды на квадраках, т.е. билиарды в связной области на невырожденной двумерной квадраке, ограниченной линиями ее пересечения в  $\mathbb{R}^3$  с другими квадраками из того же софокусного семейства. Вводится понятие комбинаторной эквивалентности билиардных столов и проводится классификация в соответствии с этим отношением эквивалентности. В частности, доказано, что на эллипсоиде и на однополостном гиперболоиде существует ровно по 21 классу комбинаторно неэквивалентных столов, а на двуполостном гиперболоиде – ровно 13 классов комбинаторно неэквивалентных столов, причем доказано, что существует взаимно однозначное соответствие между плоскими софокусными билиардными столами и билиардными столами на двуполостном гиперболоиде, сохраняющее отношение комбинаторной эквивалентности. Также в этой главе дается обоснование того, что комбинаторная эквивалентность влечет лиувиллеву эквивалентность, т.е. билиардные системы на комбинаторно эквивалентных столах лиувиллево эквивалентны.

В этой главе Г.В. Белозеровым также вычислены инварианты Фоменко и Фоменко-Цишанга для всех классифицированных ранее софокусных билиардов на квадраках, а также определен топологический тип (класс гомеоморфности) трехмерной изоэнергетической поверхности. Результат приведен в виде таблицы, содержащей как изображение области-стола, так и инварианта, что делает его более доступным широкому кругу читателей. Также приводится таблица, в которой изучаемые билиарды сопоставляются известным интегрируемым системам из физики, механики и геометрии с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. Последнее означает, что сложное движение этих систем в многомерном фазовом пространстве устроено так же, как движение билиардного шара на вложенном в  $\mathbb{R}^3$  билиардном столе, что несомненно представляет интерес.

В **третьей главе** исследуются трехмерные софокусные билиарды, ограниченные софокусными квадраками. В этом случае билиардный стол представляет собой замыкание ограниченной области в  $\mathbb{R}^3$ , граница которой состоит из конечного числа гладких граней, лежащих на квадраках софокусного семейства. Здесь также Г.В. Белозеров сначала вводит понятие комбинаторной эквивалентности, а затем классифицирует билиарды в соответствии с этим отношением эквивалентности. В частности, в работе доказано, что существует в точности 35 классов комбинаторно неэквивалентных трехмерных билиардных столов описанного вида.

Поскольку для систем с тремя и более степенями свободы имеющиеся глобальные классифицирующие топологические инварианты (Н.Т. Зунг) устроены существенно сложнее, чем в случае двух степеней свободы (инварианты Фоменко-Цишанга), то при исследовании слоения Лиувилля и его особенностей Г.В. Белозеровым изучались бифуркационные диаграммы рассматриваемых билиардных систем, дополнительно оснащенные типами особенностей.

Для классификации возникающих слоений Лиувилля диссертантом развит оригинальный

нальный подход к описанию слоений Лиувилля трехмерных билиардов, основанный на сведении такой системы к системам на двухмерных квадраках, движение которых происходит в поле потенциала Гука. Данный переход был строго обоснован, что представляет собой яркий и нетривиальный результат. С применением данного подхода Г.В. Белозерову удалось описать слоения Лиувилля трехмерных билиардов, отвечающих не только дугам бифуркационной диаграммы, но и ее вершинам, соответствующим невырожденным и типичным вырожденным особенностям. При этом были применены как элементы общей теории особенностей интегрируемых систем, так и недавние результаты о невырожденных особенностях билиардов с потенциалом, например, содержащиеся в недавней работе В.А. Кибкало и А.Т. Фоменко. Также хочется отметить, что итоговый результат (Таблица 5) оформлен в удобном для использования виде: для каждого трехмерного билиардного стола приведено не только изображение области, но и описание устройства ее границы. Устройство последней не всегда очевидно исходя из двумерного изображения такого трехмерного стола. Невырожденные и типичные вырожденные особенности представлены в виде прямых и почти прямых произведений.

В **четвертой главе** описываются классы гомеоморфности изоэнергетических поверхностей, т.е. поверхностей уровня энергии, для трехмерных софокусных билиардов. При этом используется тот факт, что трехмерный билиардный стол гомеоморфен трем типам областей: либо замкнутому диску  $\bar{D}^3$  (в этом случае изоэнергетическая поверхность гомеоморфна сфере  $S^5$ ), либо сферическому слою  $\bar{D}^1 \times S^2$  (тогда изоэнергетическая поверхность гомеоморфна произведению  $S^2 \times S^3$ ), либо полноторию  $\bar{D}^2 \times S^1$  (в этом случае изоэнергетическая поверхность гомеоморфна произведению  $S^1 \times S^4$ ).

Также в этом разделе рассматриваются изоэнергетические поверхности трехмерного билиарда внутри эллипсоида с потенциалом Гука. Переход к изучению таких систем, как и в двумерном случае, позволяет существенно разнообразить класс возникающих трехмерных слоений Лиувилля и типов их особенностей. Последнее проистекает из наличия параметра – коэффициента  $k$  в потенциале. Случай положительного и отрицательного знаков  $k$  отвечают притягивающей или отталкивающей силе. Также в билиардах с потенциалом слоение на изоэнергетической поверхности начинает существенно зависеть от значения энергии системы, в отличие от билиардов без потенциала. Естественным первым шагом является определение топологического типа (класса гомеоморфности) неособых изоэнергетических поверхностей. Г.В. Белозеровым определено, чему гомеоморфны изоэнергетические поверхности в зависимости от значения коэффициента потенциала Гука. Также отдельным интересным результатом является явная запись интегралов билиарда с потенциалом в случае софокусного стола размерности  $n$ .

В **заключении** подводятся итоги работы, а также обсуждаются возможные направления дальнейших исследований.

Таким образом, в рамках проделанной работы диссертантом были получены следующие результаты.

- классифицированы софокусные билиарды на квадраках на предмет комбинаторной эквивалентности. Доказано, что на эллипсоиде и однополосном гиперboloиде имеется по 21 типу неэквивалентных областей, а на двуполосном гиперboloиде – 13 типов;
- для каждого типа билларда на квадраках вычислен инвариант Фоменко-Цишанга, т.е. системы на таких столах классифицированы с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. При этом некоторые системы на разных квадраках оказались лиувиллево

эквиваленты. В итоге обнаружено в точности 10 лиувиллево неэквивалентных бильярдов;

- классифицированы трехмерные софокусные бильiardные столы на предмет комбинаторной эквивалентности. Доказано, что существует ровно 35 комбинаторно неэквивалентных трехмерных бильiardных столов;

- в терминах бифуркационных диаграмм, ребра и вершины которых оснащены типами особенностей в прообразе их окрестности, изучен вопрос грубой лиувиллевой эквивалентности бильiardов на трехмерных столах, ограниченных софокусными трехосными квадриками;

- для трехмерных софокусных бильiardов найдено, чему гомеоморфны пятимерные изоэнергетические поверхности.

- определено, каким поверхностям гомеоморфны неособые изоэнергетические поверхности трехмерного бильiardа в эллипсоиде с потенциалом Гаука в зависимости от знака коэффициента  $k$  и значения энергии системы.

Результаты диссертационного исследования Г.В. Белозерова являются новыми, получены автором самостоятельно и изложены в статьях диссертанта, опубликованных в ведущих научных журналах. Также результаты прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

Стоит отметить, что Г.В. Белозеров не только применил разработанный А.Т. Фоменко метод инвариантов для классификации интегрируемы гамильтоновых систем с двумя степенями свободы для бильiardов на софокусных квадриках на предмет лиувиллевой эквивалентности, но и предложил подход, основанный на понижении степени свободы, позволяющий эффективно классифицировать бильiardы в трехмерных областях. В своей работе Г.В. Белозеров продемонстрировал глубокие знания в различных областях математики, таких как теория интегрируемых систем, теория бильiardов, геометрия и топология, комплексный анализ, а также проявил способность творчески подходить к решению задач. Текст диссертации четко структурирован и богато проиллюстрирован рисунками, что делает излагаемый материал более наглядным и удобным в использовании специалистами из смежных областей.

В качестве замечаний можно отметить следующее.

1. Предложение 1.2.4 на стр. 31 формулируется в терминах омбилических точек, однако нигде не дается определение этому понятию. Возможно, стоило сначала его напомнить.
2. Раздел 4.2, посвященный изучению трехмерных бильiardов с потенциалом Гаука, изложен отчасти обособленно. Было бы неплохо дополнить или предвосхитить его (или, возможно, начало главы 4) более подробным изложением истории вопроса по исследованию слоений многомерных бильiardов, в том числе с потенциалом. В частности, в известной работе В. Драговича и М. Раднович (Успехи математических наук, 2010) приведена ссылка на работу Ю.Н. Федорова (Функциональный анализ и приложения, 2000), посвященную бильiardу внутри эллипсоида с квадратичным однородным потенциалом Гаука.
3. Имеется ряд опечаток. Например, в формулировке теоремы 2.1.2 на стр. 51 должно быть "на комбинаторно эквивалентных столах являются" вместо "на комбинаторно эквивалентных являются столах" или во втором предложении на стр. 81 должно быть "степенями" вместо "степеней". Также отсутствуют точки после ряда вынесенных формул.

Однако отмеченные замечания носят редакционный характер, не снижают научную ценность и не оказывают влияния на высокую оценку диссертационной работы Г.В. Белозерова.

Таким образом, диссертационная работа «Топология слоений Лиувилля интегрируемых билиардов в трехмерном евклидовом пространстве» отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Таким образом, соискатель Белозеров Глеб Владимирович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
лаборатории механики природных катастроф  
ФГБУН «Институт проблем механики  
имени А.Ю. Ишлинского РАН»  
ЦВЕТКОВА Анна Валерьевна

24 октября 2025 года

Контактные данные:  
тел.: 7(916)8358620, e-mail: annatsvetkova25@gmail.com  
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:  
01.01.04 Геометрия и топология

Адрес места работы:  
119526, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1,  
ФГБУН «Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН», лаборатория  
механики природных катастроф  
Тел.: 8-495-433-75-44; e-mail: annatsvetkova25@gmail.com