МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Корчагин Никита Павлович

Сложность проблемы сюръективного гомоморфизма для циклов

Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Жук Дмитрий Николаевич

Москва — 2026

Оглавление

Стр.

Введение

Диссертация относится к областям теории алгоритмов и теории графов. Исследуется массовая задача о существовании сюръективного гомоморфизма, в которой для фиксированного графа $\mathcal{H}$ по данному графу $\mathcal{G}$ требуется определить, существует ли сюръективный гомоморфизм из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$. Изучается случай, когда граф $\mathcal{H}$ получается из неориентированного цикла путём ориентации некоторых рёбер и в котором каждая вершина содержит петлю. Также рассматривается связанная с ней сюръективная задача удовлетворения ограничениям, в которой для конечного набора ограничений из заданного набора отношений Γ на одном множестве A требуется определить, существует ли сюръективная подстановка значений неизвестных, удовлетворяющая всем ограничениям. В диссертационной работе предлагаются новые инструменты, позволяющие анализировать сложность сюръективной задачи удовлетворения ограничениям для различных Γ. Эти инструменты применяются для определения сложности задачи о существовании сюръективного гомоморфизма для всех рассматриваемых графов, кроме пяти циклов длины $4, 5$ и 6.

Задачи, связанные с поиском гомоморфизма на граф, уже более полувека представляют большой интерес в областях теории графов и теории сложности алгоритмов. Самой естественной из них является задача $\mathrm{Hom}(\mathcal{H})$, в которой для фиксированного графа $\mathcal{H}$ по данному графу $\mathcal{G}$ требуется определить, существует ли гомоморфизм из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$. Эта задача имеет практические применения [1—4], тесно связана со многими другими массовыми задачами в области теории графов [5]. Несложно видеть, что эта задача лежит в NP. Более того, в [6—8] была выдвинута гипотеза, что эта задача всегда решается за полиномиальное время либо является NP-полной.

Задача Hom тесно связана с известной массовой *задачей удовлетворения ограничениям* (*constraint satisfaction problem*), которую обозначают как CSP. В ней для фиксированного множества отношений Γ, заданных на одном и том же множестве A, на вход подаётся набор ограничений из Γ, и требуется определить, существует ли подстановка значений неизвестных, удовлетворяющая всем ограничениям из набора. Эта задача имеет огромную важность в области математической кибернетики. В частности, задача $\mathrm{Hom}(\mathcal{H})$ эквивалентна $\mathrm{CSP}(\Gamma)$, когда Γ состоит из одного двуместного отношения [9; 10]. Первые результаты в изучении её сложности относятся к 1978 году [11]. С тех пор было получено множество результатов, посвящённых сложности самой CSP, связанных с ней массовых задач и различным методам, используемым для анализа сложности задачи [8; 12—23].

Вопрос определения сложности Hom для всех $\mathcal{H}$ долгое время оставался открытым. В 1990 году он был решен для неориентированных графов: было доказано, что Hom($\mathcal{H}$) решается за полиномиальное время, если $\mathcal{H}$ является двудольным или содержит петлю, и является NP-полной иначе [10]. Для ориентированных графов же задача была решена лишь в 2017 году, когда была полностью классифицирована сложность CSP. Эта классификация формулируется в терминах *полиморфизмов* — функций, которые сохраняют отношения. Она формулируется следующим образом: если у набора отношений Γ на множестве A существует полиморфизм p такой, что $p(y, x, \ldots, x) = p(x, y, x, \ldots, x) = \cdots = p(x, x, \ldots, x, y)$ для всех $x, y \in A$, то CSP(Γ) решается за полиномиальное время. Иначе эта задача является NP-полной [9; 24].

Одним из самых естественных продолжений задачи Hom является *задача о существовании сюръективного гомоморфизма* Surj-Hom($\mathcal{H}$). В ней по входному графу $\mathcal{G}$ нужно определить, существует ли гомоморфизм из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$, сюръективный по вершинам. Несложно заметить, что для каждого $\mathcal{H}$ задача CSP($\mathcal{H}$) сводится к SCSP($\mathcal{H}$), поскольку к любому входному графу можно добавить произвольное количество вершин без рёбер, которые обеспечат сюръективность гомоморфизма [25]. Отсюда, если CSP($\mathcal{H}$) является NP-полной, то и SCSP($\mathcal{H}$) также является NP-полной. Тем не менее, эти задачи имеют различную сложность. Первые результаты в области изучения сложности данной задачи относятся ещё к концу XX века [26]. С тех пор было получено множество результатов о сложности Surj-Hom для различных графов $\mathcal{H}$ [27—30]. Например, если $\mathcal{H}$ — связный неориентированный граф без циклов, то задача решается за полиномиальное время, если вершины $\mathcal{H}$ с петлями образуют связный подграф, и является NP-полной иначе [31]. Также определена NP-полнота задачи, когда $\mathcal{H}$ это связный неориентированный граф, содержащий ровно две вершины с петлями, которые не являются смежными [25]. Известна сложность задачи, когда каждая вершина $\mathcal{H}$ содержит петлю, а каждое ребро ориентировано ровно в одном направлении. В этом случае задача решается за полиномиальное время, если для каждой пары рёбер $v \to w \to u$ в графе есть ребро $v \to u$, и является NP-полной иначе [32].

Для некоторых даже очень простых графов вопрос определения сложности Surj-Hom оставался открытым долгое время. Так, для неориентированного цикла $\mathcal{C}$ длины 6 без петель задача была впервые сформулирована в 1999 году [33], но NP-полнота Surj-Hom($\mathcal{C}$) была определена лишь в 2017 году [34]. Также большое внимание получила задача о существовании сюръективного гомоморфизма на неориентированный цикл длины 4 с петлями, также известная как *disconnected cut* [29]. Неоднократно предпринимались попытки классификации её сложности ввиду практического значения и тесной связи со многими массовыми задачами на графах [35—40]. Спустя более пяти лет после того, как эта задача была сформулирована, в 2011 году Мартином и Полусмой была наконец определена NP-полнота этой задачи [41; 42].

Одним из самых простых классов графов, для которых сложность задачи не определена, являются неориентированные циклы длины n. Задача является NP-полной для циклов нечётной длины без петель (поскольку для них Hom является NP-полной). Также задача является NP-полной для цикла длины 6 без петель [34], цикла длины 4 с петлями [42] и решается за полиномиальное время для цикла длины 4 без петель. Известна сложность задачи, если цикл содержит ровно две петли у несмежных вершин [25]. В остальных случаях сложность задачи неизвестна.

В диссертационной работе мы будем рассматривать графы, которые получаются из неориентированных циклов путём произвольной ориентации некоторых рёбер. Для удобства будем называть их просто *циклами*. Для циклов с ориентированными рёбрами сложность задачи известна только при $n = 3$ или когда каждое ребро цикла ориентировано ровно в одну сторону, а каждая вершина содержит петлю [32].

В *сюръективной задаче удовлетворения ограничениям*, которая обозначается как SCSP, на вход подаётся набор ограничений из фиксированного множества отношений Γ на одном множестве A. Однако, в отличие от CSP, в SCSP требуется определить, существует ли сюръективная подстановка значений неизвестных, которая удовлетворяет всем ограничениям. Задача Surj-Hom является частным случаем задачи SCSP(Γ) в случае, когда Γ состоит из единственного двуместного отношения [43]. Эта задача лежит в NP и существует общепринятая гипотеза, согласно которой эта задача всегда решается за полиномиальное время либо является NP-полной [44]. В связи с этим представляет большой интерес вопрос определения сложности SCSP(Γ) для всех различных Γ.

Результатов по сложности этой задачи для различных Γ на данный момент существует совсем немного. Несложно заметить, что CSP(Γ) сводится к SCSP(Γ) добавлением новых не ограниченных переменных, которые обеспечивают сюръективность. Также, если Γ определено на множестве A, то существует сведение по Тьюрингу SCSP(Γ) к CSP($\Gamma \cup \{x = a \mid a \in A\}$) [29; 43]. В связи с этим, было выдвинуто предположение, что для любого Γ задачи SCSP(Γ) и CSP($\Gamma \cup \{x = a \mid a \in A\}$) имеют одну сложность. Однако, в 2021 году [43] было показано, что это предположение неверно. Известно, что если все полиморфизмы Γ существенно зависят не более, чем от одной переменной, то SCSP(Γ) является NP-полной [45]. Тем не менее, сложность SCSP(Γ) нельзя определить с помощью полиморфизмов Γ [43].

Диссертационная работа посвящена изучению сложности Surj-Hom для циклов, в которых каждая вершина содержит петлю. Поскольку для циклов с тремя вершинами сложность задачи полностью определена [32], в рамках диссертации мы ограничиваемся рассмотрением только циклов длины $n > 3$. Исследуются сюръективные полиморфизмы отношений смежности подобных циклов. Известно, что все они существенно зависят ровно от одной переменной [46], но в диссертации мы приведём независимое доказательство этого факта, поскольку наша техника существенно отличается от используемой в приведённой статье.

Крупная часть диссертации посвящена формулировке новых инструментов, позволяющих анализировать SCSP для различных Γ. Данный результат является актуальным, потому что на данный момент способов анализировать SCSP существует совсем немного [43]. В частности, мы получаем новые результаты о связи SCSP(Γ) со структурой полиморфизмов Γ. Полученные инструменты используются для определения сложности Surj-Hom для всех циклов с петлями, кроме двух неориентированных циклов длины $5, 6$ и трёх циклов с петлями длины $4, 5, 6$, содержащих ровно одно ориентированное ребро.

Целью диссертационной работы является исследование сложности задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на циклы, в которых каждая вершина содержит петлю, исследование связи сложности сюръективной задачи удовлетворения ограничениям из набора Γ со структурой полиморфизмов

Γ. Для получения основных результатов необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получение новых свойств, позволяющих анализировать сложность задачи SCSP(Γ) с помощью полиморфизмов Γ, сведения.
2. Описание структуры сюръективных полиморфизмов отношений смежности циклов длины $n > 3$ с петлями.
3. Применение введённых свойств для анализа сложности задачи Surj-Hom в классе неориентированных циклов длины $n > 3$ с петлями.
4. Применение введённых свойств для анализа сложности задачи Surj-Hom в классе циклов длины $n > 3$ с петлями, в которых каждое ребро ориентировано ровно в одну сторону.
5. Применение введённых свойств для анализа сложности задачи Surj-Hom в классе циклов длины $n > 3$ с петлями, в которых часть ребер ориентированы в одну сторону, а часть являются неориентированными.

Научная новизна.

1. Установлена сложность задачи Surj-Hom для всех неориентированных циклов с петлями, содержащих больше шести вершин.
2. Установлена сложность задачи Surj-Hom для всех циклов с петлями, содержащих неориентированные рёбра, больше одного ориентированного ребра и больше трёх вершин.
3. Установлена сложность задачи Surj-Hom для всех циклов с петлями, содержащих неориентированные рёбра, одно ориентированное ребро и больше шести вершин.
4. Предложено новое свойство, связывающее сложность задачи SCSP для множества отношений Γ со структурой полиморфизмов Γ.

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы теории графов, теории алгоритмов, алгебры, дискретной математики.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для всех неориентированных циклов $\mathcal{C}$ с петлями, содержащих больше трёх вершин, кроме циклов длины $5, 6$ (см. Рис. 1, г, д) задача Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-полной.
2. Для всех ориентированных циклов $\mathcal{C}$ с петлями, содержащих больше трёх вершин, кроме трёх циклов длины $4, 5, 6$, содержащих ровно одно ориентированное ребро (см. Рис. 1, а, б, в), задача Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-полной.
3. Пусть Γ — конечное множество отношений, определённых на множестве A, обладающее следующими свойствами:
    а) все сюръективные полиморфизмы Γ существенно зависят ровно от одной переменной,
    б) для любого $k \geqslant 1$ и любого набора $p_1, \ldots, p_k$ трёхместных полиморфизмов Γ, в котором функции совпадают на диагонали и принимают в совокупности все значения из A, хотя бы один из полиморфизмов в наборе будет сюръективным.

   Тогда SCSP(Γ) является NP-полной.

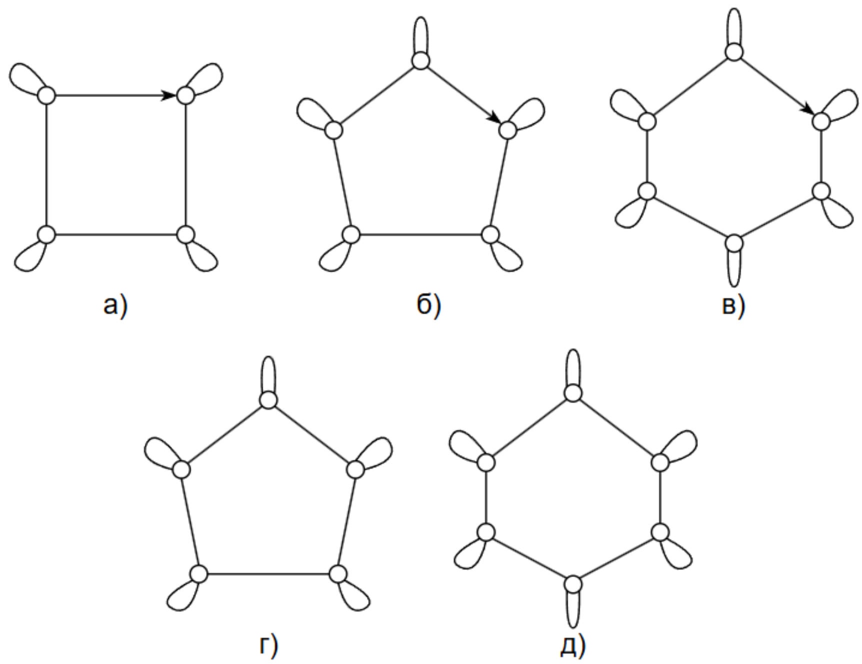

Рисунок 1 — Циклы с петлями, для которых не определена сложность задачи Surj-Hom.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в области теории сложности алгоритмов и теории графов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами. Результаты автора докладывались на научных семинарах и международных конференциях, опубликованы в рецензируемых научных журналах и находятся в строгом соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Результаты работы были доложены на следующих международных и всероссийских конференциях:

1. XXXI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2024», Москва, Россия, с 12 по 26 апреля.
2. XXXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2025», Москва, Россия, с 11 по 25 апреля.
3. XX Международная научная конференция «Проблемы теоретической кибернетики», Москва, Россия, с 5 по 8 декабря 2024 г.

Результаты работы докладывались и обсуждались на заседаниях семинара «Теория автоматов» кафедры Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ под руководством профессора Э.Э.Гасанова, 29 марта 2023 г., 15 февраля 2026 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 3 печатных изданиях общим объемом 4,4375 п.л. [47—49], 1 из которых опубликована в рецензируемом научном издании, рекомендованном для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки) [47], 2 — в рецензируемых научных изданиях из дополнительного списка МГУ, рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки) и входящих в список ВАК [48; 49].

Структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 118 страниц, включая 33 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 49 наименований.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н. Дмитрию Николаевичу Жуку за постановку задачи, постоянное внимание и поддержку в работе. Автор также выражает благодарность д.ф.-м.н. профессору Эльяру Эльдаровичу Гасанову, к.ф.-м.н. Алексею Владимировичу Галатенко за внимание и поддержку, а также коллективу кафедры Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова за тёплую и плодотворную научную атмосферу.

Глава 1. Основные понятия и определения

В этой главе мы вводим основные определения и обозначения, которые будут использоваться на протяжении всего текста. В разделе 1.1 мы рассматриваем основные определения из области теории графов. Раздел 1.2 посвящён циклам и их структуре. В разделе 1.3 определяются основные массовые задачи Surj-Hom, CSP и SCSP, которым посвящена данная диссертация. Раздел 1.4 посвящён минорным условиям — важной структуре, которая широко используется в разделе 2.2. Раздел 1.5 определяет многоосновные отношения, для них определяется сюръективная задача об удовлетворении ограничениям.

1.1 Графы

В данном разделе мы приводим ключевые определения из области теории графов (см. [3]).

Определение 1.1. *Граф* $\mathcal{H} = (V, E)$ — это пара из множества V и множества $E \subseteq V \times V$ упорядоченных пар из V.

- Множество V называется *множеством вершин* $\mathcal{H}$.
- Множество E называется *множеством рёбер* $\mathcal{H}$.
- Двуместное отношение E называется *отношением смежности* $\mathcal{H}$.
- Для вершин $v, w \in V$ пара $(v, w) \in E$ называется *ребром из* v *в* w.
- Ребро $(v, w) \in E$ называется *ориентированным*, если $(w, v) \notin E$, и *неориентированным* иначе.
- *Петлёй* в $\mathcal{H}$ называется ребро вида $(v, v), v \in V$.

Для графа $\mathcal{H} = (V, E)$ ребро $(v, w) \in E$ будем обозначать как $v \to w$ или $w \leftarrow v$. Неориентированное ребро между v и w будем обозначать как $v \leftrightarrow w$. Также для удобства изложения далее в тексте мы часто будем отождествлять граф и отношение смежности на множестве его вершин.

Определение 1.2. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ — граф.

- $\mathcal{H}$ называется *строго-ориентированным*, если все его рёбра, кроме петель, являются ориентированными.

– $\mathcal{H}$ называется *неориентированным*, если все его рёбра неориентированные.
– $\mathcal{H}$ называется *смешанно-ориентированным*, если он содержит как ориентированные рёбра, так и неориентированные рёбра, не являющиеся петлями.

Определение 1.3. Пусть A — произвольное множество, $k \geqslant 1$. *Множеством векторов* A^k будем называть множество всех наборов вида $\overline{a} = (a^1, \ldots, a^k)$, где $a^i \in A$. Элементы A^k будем называть *векторами.*

Для вектора $\overline{a} \in A^k$ через a^i будем обозначать i-ую компоненту вектора.

Определение 1.4. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ — граф, $k \geqslant 1$. Пусть $\overline{v}, \overline{w} \in V^k$. Будем говорить, что существует ребро $\overline{v}\, e\, \overline{w}$, $e \in \{\leftarrow, \leftrightarrow, \rightarrow\}$, если для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ в $\mathcal{H}$ есть ребро $v^i\, e\, w^i$.

Определение 1.5. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ — граф. *Ориентированный путь* π *длины* s это последовательность вида

$$v_0\, e_0\, v_1\, e_1 \ldots v_{s-1}\, e_{s-1}\, v_s,$$

где $v_0, v_1, \ldots, v_s \in V$ и $e_0, e_1, \ldots, e_{s-1} \in \{\leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ — ориентации рёбер такие, что для каждого $i \in \{0, \ldots, s-1\}$ в $\mathcal{H}$ существует ребро $v_i\, e_i\, v_{i+1}$.

Для графа $\mathcal{H} = (V, E)$ и $k \geqslant 1$ ориентированный путь Π длины s на V^k определяется аналогичным образом:

Определение 1.6. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ — граф, $k \geqslant 1$. *Ориентированный путь* Π *длины* s это последовательность вида $\overline{v_0}\, e_0\, \overline{v_1}\, e_1 \ldots \overline{v_{s-1}}\, e_{s-1}\, \overline{v_s}$, где $\overline{v_0}, \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_s} \in V^k$ и $e_0, e_1, \ldots, e_{s-1} \in \{\leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ — ориентации рёбер такие, что для каждого $i \in \{0, \ldots, s-1\}$ верно $\overline{v_i}\, e_i\, \overline{v_{i+1}}$.

Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ — граф, $v, w \in V$. Ориентированный путь из вершины v в w, в котором все рёбра ориентированы как $\rightarrow$, будем обозначать как $v \rightarrow \cdots \rightarrow w$. Аналогично, через $v \leftarrow \cdots \leftarrow w$ и $v \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow w$ будем обозначать ориентированные пути, в которых все рёбра ориентированы как $\leftarrow$ и $\leftrightarrow$ соответственно. Ориентированный путь, в котором все рёбра ориентированы как $\leftrightarrow$, будем также называть *неориентированным путём* или просто *путём.*

Определение 1.7. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ — граф. Пусть $a, b \in V$. *Расстояние между вершинами* a *и* b, которое обозначается как $\rho(a, b)$, — это длина кратчайшего ориентированного пути между этими вершинами.

Заметим, что $\rho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$. Для $k \geqslant 1$ расстояние $\rho(\overline{a}, \overline{b})$ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ из V^k определяется аналогичным образом.

Определение 1.8. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ — граф. Вершина $v \in V$ называется *истоком*, если в неё не входит ни одного ребра, кроме петель, и *стоком*, если из неё не выходит ни одного ребра, кроме петель.

Стоки и истоки также называются *особыми вершинами* или *особыми точками.* Для графа $\mathcal{H}$ множество его вершин-истоков будем обозначать как $S^{\mathcal{H}}_{out}$, а множество вершин-стоков как $S^{\mathcal{H}}_{in}$.

Определение 1.9. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ — граф. Подмножество $V' \subseteq V$ вершин называется *неориентированной компонентой*, если для любых $v, w \in V'$ существует неориентированный путь из v в w.

Несложно заметить, что отношение принадлежности одной и той же неориентированной компоненте это отношение эквивалентности. Отсюда, для графа $\mathcal{H} = (V, E)$ множество его вершин разбивается на $m \leqslant |V|$ неориентированных компонент, соединённых между собой ориентированными рёбрами.

1.2 Циклы

Для $n \geqslant 1$ множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ будем обозначать как Z_n.

Определение 1.10. *Цикл* $\mathcal{C}$ *длины* n — это граф с множеством вершин $Z_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, в котором для каждой вершины $v \in Z_n$ есть ребро $v\, e\, (v + 1 \pmod{n})$, $e \in \{\leftarrow, \leftrightarrow, \rightarrow\}$ и нет других рёбер кроме, может быть, петель.

Таким образом, если цикл $\mathcal{C}$ длины n является неориентированным, то для каждой вершины $v \in Z_n$ есть ребро $v \leftrightarrow (v + 1 \pmod{n})$, а если он строго-ориентирован, то для каждой $v \in Z_n$ есть ребро $v \leftarrow (v + 1 \pmod{n})$ или $v \rightarrow (v + 1 \pmod{n})$.

Несложно заметить, что в строго-ориентированном цикле чётное число особых точек:

Утверждение 1.1. Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный цикл. Тогда $|S_{in}^{\mathcal{C}}| = |S_{out}^{\mathcal{C}}|$.

Определение 1.11. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный цикл, содержащий m неориентированных компонент. Обозначим их как $V_0, V_1, \ldots, V_{m-1}$, обходя граф в произвольном направлении, начиная с произвольной вершины. Строго-ориентированный цикл $\mathcal{C}^s$ с m вершинами будем называть *остовным циклом для* $\mathcal{C}$, если для любых $i,j \in Z_m, i \neq j$ верно

$$i \to j \iff \exists v \in V_i, w \in V_j : v \to w.$$

Иными словами, остовный цикл получается путём стягивания неориентированных компонент в одну вершину. В этом случае между неориентированными компонентами $\mathcal{C}$ и вершинами его остовного цикла $\mathcal{C}^s$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Будем говорить, что вершина i цикла $\mathcal{C}^s$ и компонента V_i цикла $\mathcal{C}$ *соответствуют* друг другу.

Пример 1.1. Рассмотрим смешанно-ориентированный цикл с четырьмя вершинами, изображённый на Рис. 1.1, а. Он содержит три неориентированных компоненты $V_0 = \{0, 3\}, V_1 = \{1\}$ и $V_2 = \{2\}$. Его остовный цикл содержит три вершины $0, 1, 2$ и изображён на Рис. 1.1, б.

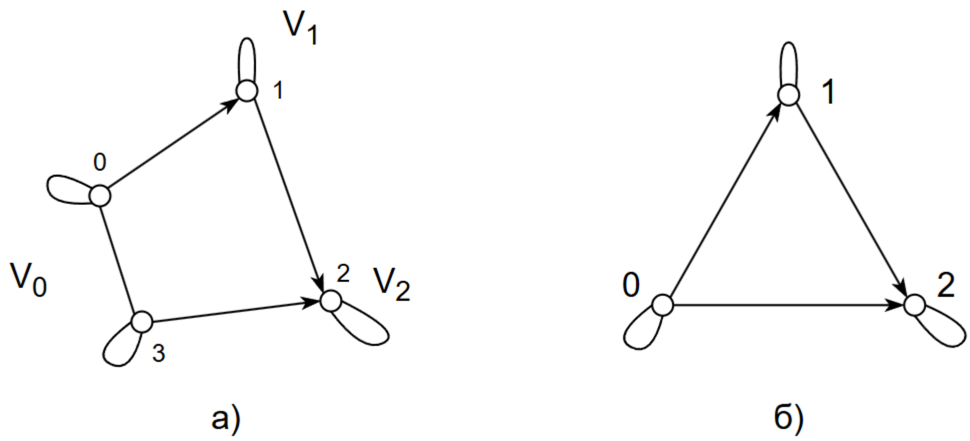

Рисунок 1.1 — Смешанно-ориентированный рефлексивный цикл с четырьмя вершинами и его остовный цикл.

1.3 Массовые задачи

Для обзора основных понятий из области сложности вычислений см. [4]. При исследовании сложности массовых задач мы будем активно пользоваться пользоваться алгебраическими инструментами, которые описаны в [12].

Формально определим центральную задачу, которой посвящена данная работа.

Определение 1.12. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ и $\mathcal{G} = (V', E')$ — графы. *Гомоморфизм* графа $\mathcal{G}$ на граф $\mathcal{H}$ — это отображение $f : V' \to V$ такое, что для любого ребра $(v, w) \in E'$ верно $(f(v), f(w)) \in E$. Гомоморфизм f называется *сюръективным*, если f сюръективно.

Определение 1.13. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ и $\mathcal{G} = (V', E')$ — графы. $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $f : V' \to V$ такое, что для любых вершин $v, w \in V'$ ребро $(v,w) \in E'$ существует тогда и только тогда, когда в E есть ребро $(f(v), f(w))$.

Определение 1.14. Пусть $\mathcal{H}$ — граф. *Задача о существовании сюръективного гомоморфизма* $\text{Surj-Hom}(\mathcal{H})$ — это массовая задача, в которой по данному графу $\mathcal{G}$ требуется определить, существует ли сюръективный гомоморфизм из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$.

Задача о существовании сюръективного гомоморфизма является частным случаем более общей сюръективной задачи удовлетворения ограничениям.

Определение 1.15. Пусть A — конечное множество, Γ — конечное множество отношений на A. *Конъюнктивная формула над* Γ — это формула, в которую входят отношения из Γ, свободные переменные из X и конъюнкции, где X — множество переменных. *Решение конъюнктивной формулы* $\mathcal{I}$ — это подстановка $f : X \to A$ в переменные этой формулы, которая выполняет её. Решение называется *сюръективным*, если $f(X) = A$.

Иными словами, конъюнктивная формула над множеством отношений Γ с множеством переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ имеет вид:

$$\mathcal{I} : R_1(x_{i_{1,1}}, \ldots, x_{i_{1,n_1}}) \wedge \cdots \wedge R_s(x_{i_{s,1}}, \ldots, x_{i_{s,n_s}}),$$

где $R_1, \ldots, R_s$ — отношения из Γ и $i_{1,1}, \ldots, i_{1,n_1}, \ldots, i_{s,1}, \ldots, i_{s,n_s} \in \{1, \ldots, n\}$.

Определение 1.16. Пусть A — конечное множество, Γ — конечное множество отношений на A. *Задача удовлетворения ограничениям*, также обозначаемая как CSP(Γ) — это массовая задача, в которой по набору переменных X и конъюнктивной формуле $\mathcal{I}$ с отношениями из Γ и переменными из X необходимо определить, выполнима ли она. Формула $\mathcal{I}$ вместе с набором переменных называется *экземпляром* задачи CSP(Γ), а решение $f : X \to A$ этой формулы — *решением* экземпляра.

Определение 1.17. *Сюръективная задача удовлетворения ограничениям*, также обозначаемая как SCSP(Γ) — это массовая задача, в которой по набору переменных X и конъюнктивной формуле $\mathcal{I}$ с отношениями из Γ и переменными из X необходимо определить, существует ли у этой формулы сюръективное решение.

При рассмотрении сложности задачи CSP часто используются полиморфизмы — функции, сохраняющие множества отношений.

Определение 1.18. Пусть A — конечное множество, Γ — конечное множество отношений на A. n-местная функция $p : A^n \to A$ является *полиморфизмом* Γ, если для каждого m-местного $R \in \Gamma$ и любых n наборов $(a_1^1, \ldots, a_1^m), \ldots, (a_n^1, \ldots, a_n^m)$ из R верно, что набор $(p(a_1^1, \ldots, a_n^1), \ldots, p(a_1^m, \ldots, a_n^m))$ также из R.

Для множества отношений Γ множество его полиморфизмов обозначается как Pol(Γ), а множество сюръективных полиморфизмов — как SPol(Γ).

Отметим важнейшее свойство полиморфизмов графов, которое следует из их определения. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ — граф, p — k-местный полиморфизм $\mathcal{H}$ и существует ориентированный путь Π в V^k вида:

$$\Pi = \overline{v_0}\, e_0\, \overline{v_1}\, e_1 \ldots \overline{v_{s-1}}\, e_{s-1}\, \overline{v_s}.$$

Тогда образы элементов этого пути образуют путь π в V:

$$\pi = p(\overline{v_0})\, e_0\, p(\overline{v_1})\, e_1 \ldots p(\overline{v_{s-1}})\, e_{s-1}\, p(\overline{v_s}),$$

ориентации рёбер в котором совпадают с ориентациями рёбер в Π. Иными словами, полиморфизмы $\mathcal{H}$ сохраняют ориентации рёбер в ориентированных путях.

Несложно убедиться, что для графа $\mathcal{H}$ задача Surj-Hom($\mathcal{H}$) эквивалентна SCSP(E), где E — бинарное отношение смежности $\mathcal{H}$. В самом деле, пусть множество вершин графа имеет вид $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Возьмём произвольный граф $\mathcal{G} = (V', E')$, где $V' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ и $E' = \{(w_{i_1}, w_{j_1}), (w_{i_2}, w_{j_2}) \ldots, (w_{i_h}, w_{j_h})\}$, где $i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_h, j_h \in \{1, \ldots, n\}$. Возьмём множество переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и построим конъюнктивную формулу $\mathcal{I}$ над E следующего вида:

$$\mathcal{I} : E(x_{i_1}, x_{j_1}) \wedge E(x_{i_2}, x_{j_2}) \wedge \cdots \wedge E(x_{i_h}, x_{j_h}).$$

В получившейся формуле каждой переменной x_s из X соответствует вершина w_s из $\mathcal{G}$, а каждому вхождению ограничения $E(x_{i_l}, x_{j_l})$ в $\mathcal{I}$ — ребро (w_{i_l}, w_{j_l}). Тогда каждый гомоморфизм $f : V' \to V$ задаёт подстановку $g : X \to V$: для $i \in \{1, \ldots, n\}$ положим $g(x_i) = f(w_i)$. При этом по построению полученная подстановка будет решением $\mathcal{I}$, и если гомоморфизм f сюръективен, то и g сюръективна. Аналогично, каждое сюръективное решение $g : X \to V$ формулы $\mathcal{I}$ задаёт отображение $f : V' \to V$, которое также будет являться сюръективным гомоморфизмом из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$. Иными словами, полученный экземпляр Surj-Hom($\mathcal{H}$) имеет решение тогда и только тогда, когда построенный экземпляр SCSP(E) имеет решение.

Пример 1.2. Рассмотрим задачу Surj-Hom(C_3^p), где $\mathcal{C}_3^p$ — строго-ориентированный цикл, изображённый на Рис. 1.1, б. Обозначим отношение смежности на вершинах этого графа также как $\mathcal{C}_3^p$. Рассмотрим граф $\mathcal{G}$ с множеством вершин $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, изображённый на Рис. 1.2. Возьмём множество переменных $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, построим конъюнктивную формулу $\mathcal{I}$ над C_3^p:

$$\mathcal{I} = C_3^p(x_0, x_1) \wedge C_3^p(x_1, x_3) \wedge C_3^p(x_1, x_2) \wedge C_3^p(x_2, x_3).$$

При построении сюръективного гомоморфизма $f : V \to Z_3$ каждой вершине графа $\mathcal{G}$ сопоставляется вершина из Z_3. Тогда по нему можно построить подстановку $g : X \to Z_3$, которая будет сюръективным решением $\mathcal{I}$. Иными словами, сюръективный гомоморфизм из $\mathcal{G}$ на C_p^3 существует тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}$ обладает сюръективным решением.

Определение 1.19. Функция f от n переменных называется *существенно унарной*, если она существенно зависит не более, чем от одной переменной.

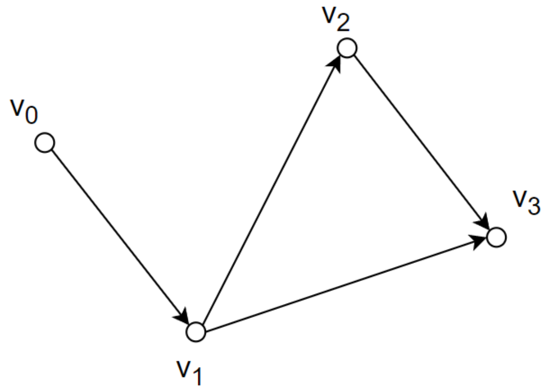

Рисунок 1.2 — Граф $\mathcal{G}$

Иными словами, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно унарна тогда и только тогда, когда существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$ и функция от одной переменной g такие, что $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = g(x_i)$.

Определение 1.20. Пусть A — конечное множество, f — n-местная функция, определённая на A. Векторы вида $(a, \ldots, a) \in A^n$ называются *диагональными*, а множество $\{f(a, \ldots, a) \mid a \in A\}$ — *диагональю* функции f.

Определение 1.21. Пусть A — конечное множество. *j-местная проекция на i-ую переменную на A* — это функция вида $\mathrm{pr}_i^j(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j) = x_i$.

Множество проекций на множестве A обозначается как Proj_A.

1.4 Минорные условия

При описании сложности задачи CSP используют особые системы тождеств, которые называются минорные условия (см. [19]).

Определение 1.22. *Сигнатура* — это множество функциональных символов Σ, дополненное отображением $\mathrm{ar} : \Sigma \to \mathbb{N}$, которое каждому функциональному символу сопоставляет его арность.

Определение 1.23. Пусть Σ — сигнатура, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество переменных. *Минорное условие* $\mathcal{T}$ над Σ — это множество тождеств вида $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) = g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_h})$, где $f, g \in \Sigma$, $\mathrm{ar}(f) = l, \mathrm{ar}(g) = h$ и $i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_h \in \{1, \ldots, n\}$.

Иными словами, минорное условие состоит из набора тождеств, в котором с каждой стороны находятся термы, состоящие ровно из одного функционального символа из Σ и переменных.

Определение 1.24. Пусть Σ — сигнатура, $\mathcal{T}$ — минорное условие над Σ. Пусть M — множество функций, которые определены на одном и том же множестве. Будем говорить, что $\mathcal{T}$ *удовлетворяется* на M, если существует отображение $F : \Sigma \to M$ такое, что:

- t и $F(t)$ имеют одинаковую арность для каждого символа $t \in \Sigma$.
- Для любого тождества $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) = g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_h})$ из $\mathcal{T}$ равенство $F(f)(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) = F(g)(x_{j_1}, \ldots, x_{j_h})$ выполняется для любой подстановки значений из области определения M вместо $x_1, \ldots, x_n$.

Будем говорить, что отображение F *является решением* $\mathcal{T}$.

1.5 Многоосновные отношения

Определение 1.25. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — множества. *n-местное m-основное отношение* — это подмножество $R \subseteq A_{\mathrm{sr}^R(1)} \times \cdots \times A_{\mathrm{sr}^R(n)}$, дополненное функцией $\mathrm{sr}^R : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$. Функция sr^R называется *функцией сорта* R, а значение $\mathrm{sr}^R(i), i \in \{1, \ldots, n\}$ — *сортом i-ой переменной* R.

n-местные m-основные отношения также называют *многоосновными отношениями.* В отличие от обычных отношений, каждая переменная многоосновного отношения, заданного на множествах $A_1, \ldots, A_m$, принимает значения ровно из одного из этих множеств. При этом множества, на которых задаются переменные многоосновного отношения, могут пересекаться или совпадать. Если же $m = 1$, то это определение задаёт обычное отношение.

Многоосновные отношения по структуре во многом похожи на обычные отношения. Так, понятие конъюнктивной формулы (опред. 1.15) формулируется для них аналогичным образом. Отдельно определим для многоосновных отношений понятие полиморфизма, задач CSP и SCSP.

Определение 1.26. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — множества, $k \geqslant 1$. Набор $\overline{f} = (f^1, \ldots, f^m)$, где $f^1, \ldots, f^m$ — k-местные функции вида $f^i : A_i^k \to A_i$, называется *k-местной вектор-функцией, определённой на* $A_1, \ldots, A_m$.

– $\overline{f}$ является *существенно-унарной*, если существует $i \in \{1, \dots, k\}$ такое, что каждая функция из $\overline{f}$ константна или существенно зависит только от своей i-ой переменной.
– $\overline{f}$ *сюръективна*, если каждая функция из этого набора сюръективна.
– $\overline{f}$ является проекцией на i-ую переменную, $i \in \{1, \dots, k\}$, если каждая функция $f^1, \dots, f^m$ является проекцией на i-ую переменную.

Для вектор-функции $\overline{f}$ через f^i будем обозначать i-ую компоненту $\overline{f}$. Вектор-функции подробно разбираются в работах Тайманова [20—23].

Определение 1.27. Пусть R — n-местное m-основное отношение, определённое на множествах $A_1, \dots, A_m$. k-местная вектор-функция $\overline{p} = (p^1, \dots, p^m)$, где $p^i : A_i^k \to A_i$, называется *полиморфизмом* отношения R, если для любых k наборов $(a_1^1, .., a_1^n), \dots, (a_k^1, \dots, a_k^n)$ из R верно:

$$(p^{sr^R(1)}(a_1^1, \dots, a_k^1), \dots, p^{sr^R(n)}(a_1^n, \dots, a_k^n)) \in R.$$

Аналогично случаю для обычных отношений, множество полиморфизмов многоосновного отношения R будем обозначать как $\mathrm{Pol}(R)$, а множество сюръективных полиморфизмов — как $\mathrm{SPol}(R)$. Если $\overline{p} \in \mathrm{Pol}(R)$, то будем также говорить, что $\overline{p}$ *сохраняет* R.

Определение 1.28. Пусть $A_1, \dots, A_m$ — конечные множества, Γ — конечное множество многоосновных отношений, заданных на $A_1, \dots, A_m$. *Задача удовлетворения ограничениям*, также обозначаемая как $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ — это массовая задача, в которой на вход подаются множество переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, отображение $\mathrm{sort} : X \to \{1, \dots, m\}$ и формула $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = R_1(x_{i_{1,1}}, \dots, x_{i_{1,n_1}}) \wedge \dots \wedge R_h(x_{i_{h,1}}, \dots, x_{i_{h,n_h}}),$$

где : $R_j \in \Gamma$ и $i_{j,l} \in \{1, \dots, n\}$ для всех $j \in \{1, \dots, h\}, l \in \{1, \dots, n_j\}$ значение $\mathrm{sort}(x_{i_{j,l}})$ совпадает с сортом l-ой переменной R_j, и требуется определить, выполнима ли $\mathcal{I}$. Формула $\mathcal{I}$ вместе с множеством X и отображением sort называется *экземпляром*, а решение этой формулы — *решением* экземпляра.

Определение 1.29. Пусть $A_1, \dots, A_m$ — конечные множества, Γ — конечное множество многоосновных отношений, заданных на $A_1, \dots, A_m$. *Сюръективная задача удовлетворения ограничениям* $\mathrm{SCSP}(\Gamma)$ — это массовая задача, в котором по набору переменных X, отображению sort и конъюнктивной формуле

$\mathcal{I}$ требуется определить, существует ли решение формулы, в котором для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ и всех $a \in A_i$ существует $j \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $\mathrm{sort}(x_j) = i$ и в x_j подставляется a.

Иными словами, в случае многоосновных отношений в задаче CSP каждая переменная определяется ровно на одном множестве, а в задаче SCSP решение также должно быть сюръективно на каждом блоке.

Глава 2. Определение сложности задачи SCSP с помощью свойств семейств отношений

В данной главе формулируются два новых свойства, которые играют ключевую роль в определении сложности задачи Surj-Hom для рефлексивных циклов. Раздел 2.1 посвящен свойству сюръективного интерпретирования, которое позволяет эффективно проводить сведение задачи SCSP. Раздел 2.2 посвящен свойству наследования сюръективности, которое для множества отношений Γ позволяет определять сложность SCSP(Γ) с помощью структуры сюръективных полиморфизмов этого множества.

2.1 Свойство сюръективного интерпретирования

Определение 2.1. Пусть A, B — множества, $|A| > 1$, $|B| > 1$. Пусть R — n-местное отношение на множестве A, S — n-местное отношение на множестве B. Будем говорить, что R *сюръективно интерпретирует* S, если существуют отображения $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to A$ и $(n+k)$-местное отношение Q, задающееся конъюнктивной формулой над R, для которых выполняются следующие условия:

1. $\forall b \in B : \varphi(\psi(b)) = b$.
2. $\forall (b_1, \dots, b_n) \in S \ \exists c_1, \dots, c_k \in A$:
$$(\psi(b_1), \dots, \psi(b_n), c_1, \dots, c_k) \in Q$$
и $\{\psi(b_1), \dots, \psi(b_n), c_1, \dots, c_k\} = \varphi^{-1}(\{b_1, \dots, b_n\})$.
3. $\forall (a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k) \in Q$:
$$(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \in S,$$
и $\varphi(\{a_1, \dots, a_n\}) = \varphi(\{a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k\})$.

Иными словами, первые n переменных отношения Q моделируют отношение S. Согласно первому условию, отображение φ разбивает A на блоки, соответствующие разным элементам B, а отображение ψ сопоставляет каждому элементу B элемент A из его блока. Согласно второму условию, образы любого набора $(b_1, \ldots, b_n)$ из S можно дополнить элементами A до набора из Q, причём выбранные элементы будут полностью покрывать блоки, соответствующие $b_1, \ldots, b_n$. Наконец, третье условие гласит, что для любого набора из Q образы первых n членов этого набора образуют набор из S, а последние k членов лежат в тех же блоках, что и первые n.

Пример 2.1. Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл $\mathcal{C}$ длины 4 и его остовный цикл $\mathcal{C}^s$ из Примера 1.1 (см. Рис. 1.1). Рассмотрим отображения $\varphi : Z_4 \to Z_3$ и $\psi : Z_3 \to Z_4$:

$$\varphi(x) = i, \text{ если } x \in V_i$$
$$\psi(x) = x$$

и 6-местное отношение Q, задающееся формулой (см. Рис. 2.1):

$$Q(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4) = \mathcal{C}(x_1, y_1) \wedge \mathcal{C}(y_1, x_1) \wedge \mathcal{C}(y_1, y_2) \wedge \mathcal{C}(y_2, y_1) \wedge$$
$$\wedge \mathcal{C}(y_2, y_3) \wedge \mathcal{C}(y_3, y_4) \wedge \mathcal{C}(y_4, y_3) \wedge \mathcal{C}(y_4, x_2) \wedge \mathcal{C}(x_2, y_4).$$

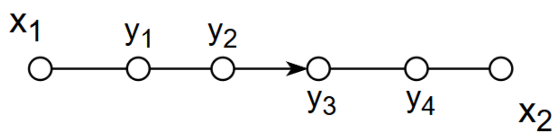

Рисунок 2.1

Покажем, что эти отображения вместе с формулой удовлетворяют условиям из определения сюръективного интерпретирования. Несложно проверить, что $\varphi(\psi(x)) = x$. Теперь, возьмём ребро $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^s$. В зависимости от значений b_1 и b_2 выберем элементы c_1, c_2, c_3 и c_4 (см. Табл. 1):

Таблица 1

b_1	b_2	c_1	c_2
$\neq 0$	$\neq 1$	b_1	b_1
$\neq 0$	1	b_1	b_1
0	$\neq 1$	3	3
0	1	3	0

b_1	b_2	c_3	c_4
$\neq 1$	$\neq 0$	b_2	b_2
1	$\neq 0$	b_2	b_2
$\neq 1$	0	3	3
1	0	0	3

Тогда набор $(\psi(b_1), \psi(b_2), c_1, c_2, c_3, c_4)$ будет удовлетворять Q и $\{\psi(b_1), \psi(b_2), c_1, c_2, c_3, c_4\} = \varphi^{-1}(\{b_1, b_2\})$, то есть второе условие будет выполняться. Наконец, возьмём произвольный набор $(a_1, a_2, c_1, c_2, c_3, c_4) \in Q$.

Нетрудно заметить, что c_1, c_2 лежат в одной неориентированной компоненте с a_1, а c_3, c_4 в одной компоненте с a_2. Значит, $\varphi(\{a_1, a_2\}) = \varphi(\{a_1, a_2, c_1, c_2, c_3, c_4\})$. А так как выполняется $\mathcal{C}(c_2, c_3)$, то верно $(\varphi(a_1), \varphi(a_2)) \in \mathcal{C}^s$. Значит третье свойство тоже выполняется и $\mathcal{C}$ сюръективно интерпретирует $\mathcal{C}^s$.

Теорема 2.1 ([49])**.** Пусть R — n-местное отношение на множестве A. Пусть S — n-местное отношение на множестве B такое, что R сюръективно интерпретирует S. Тогда $\mathrm{SCSP}(S)$ полиномиально сводится к $\mathrm{SCSP}(R)$.

Доказательство. Рассмотрим отображения $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to A$ и $(n+k)$-местное отношение Q, задающееся конъюнктивной формулой над R, которые удовлетворяют условиям из определения сюръективного интерпретирования. Возьмём экземпляр задачи $\mathrm{SCSP}(S)$, задающийся набором переменных $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$ и формулой $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} : S(x_{i_{1,1}}, \ldots, x_{i_{1,n}}) \wedge \cdots \wedge S(x_{i_{h,1}}, \ldots, x_{i_{h,n}}),$$

где $i_{j,s} \in \{1, \ldots, l\}$, $j \in \{1, \ldots, h\}$, $s \in \{1, \ldots, n\}$. Построим формулу $\mathcal{J}$ на Q с множеством переменных $X' = \{x_1, \ldots, x_l, y_{1,1}, \ldots, y_{1,k}, \ldots, y_{h,1}, \ldots, y_{h,k}\}$:

$$\mathcal{J} : Q(x_{i_{1,1}}, \ldots, x_{i_{1,n}}, y_{1,1}, \ldots, y_{1,k}) \wedge \cdots \wedge Q(x_{i_{h,1}}, \ldots, x_{i_{h,n}}, y_{h,1}, \ldots, y_{h,k}).$$

Покажем, что $\mathcal{J}$ имеет сюръективное решение тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}$ имеет сюръективное решение.

Пусть $\mathcal{I}$ обладает сюръективным решением $f : X \to B$. Построим подстановку $g : X' \to A$ в переменные $\mathcal{J}$ следующим образом:

- Для x_i положим $g(x_i) = \psi(f(x_i))$.
- Для $y_{j,l}$ рассмотрим j-ое вхождение Q в $\mathcal{J}$:

$$Q(x_{i_{j,1}}, \ldots, x_{i_{j,n}}, y_{j,1}, \ldots, y_{j,k}).$$

  Так как f — решение $\mathcal{I}$, то $(f(x_{i_{j,1}}), \ldots, f(x_{i_{j,n}})) \in S$. Тогда по второму условию сюръективного интерпретирования существуют $c_{j,1}, \ldots, c_{j,k} \in A$ такие, что верно

$$Q(\psi(f(x_{i_{j,1}})), \ldots, \psi(f(x_{i_{j,n}})), c_{j,1}, \ldots, c_{j,k})$$

  и

$$\{\psi(f(x_{i_{j,1}})), \ldots, \psi(f(x_{i_{j,n}})), c_{j,1}, \ldots, c_{j,k}\} = \varphi^{-1}(\{f(x_{i_{j,1}}), \ldots, f(x_{i_{j,n}})\}).$$

  Положим $g(y_{j,l}) = c_{j,l}$.

Несложно заметить, что по построению g будет решением $\mathcal{J}$. Покажем, что оно также будет сюръективным. Пусть какое-то значение $a \in A$ не принимается на g. Рассмотрим $\varphi(a) = b$. Поскольку f сюръективно, то для некоторых $j \in \{1, \ldots, h\}, s \in \{1, \ldots, n\}$ верно $f(x_{i_{j,s}}) = b$. Но по построению g имеем $a \in \varphi^{-1}(b) \subseteq \{g(x_{i_{j,1}}), \ldots, g(x_{i_{j,n}}), g(y_{j,1}), \ldots, g(y_{j,k})\}$ — противоречие. Значит, g — это сюръективное решение.

Теперь, пусть у $\mathcal{J}$ существует сюръективное решение $g : X' \to A$. Построим подстановку $f : X \to B$ следующим образом: для $x_{i_{j,s}}$ положим $f(x_{i_{j,s}}) = \varphi(g(x_{i_{j,s}}))$. Несложно заметить, что полученная подстановка будет решением, поскольку по третьему условию сюръективного интерпретирования из выполнения

$$Q(g(x_{i_{j,1}}), \ldots, g(x_{i_{j,n}}), g(y_{j,1}), \ldots, g(y_{j,k}))$$

следует

$$(\varphi(g(x_{i_{j,1}})), \ldots, \varphi(g(x_{i_{j,n}}))) \in S.$$

Покажем, что это решение будет сюръективным. Пусть f не принимает значение $b \in B$. Рассмотрим $a = \psi(b)$. Из первого условия сюръективного интерпретирования следует $\varphi(a) = b$. Поскольку g сюръективно, то a принимается на некотором $y_{j,l}$ (если a принимается на одном из $x_{i_{j,s}}$, то по построению f имеем $f(x_{i_{j,s}}) = \varphi(a) = b$). Но тогда по третьему свойству сюръективного интерпретирования получается, что

$$b \in \varphi(\{g(x_{i_{j,1}}), \ldots, g(x_{i_{j,n}}), g(y_{j,1}), \ldots, g(y_{j,k})\}) = f(\{x_{i_{j,1}}, \ldots, x_{i_{j,n}}\}).$$

Получили противоречие. Значит, f — сюръективное решение.

Итак, по экземпляру задачи SCSP(S) из множества переменных X и формулы $\mathcal{I}$ мы за полиномиальное время построили экземпляр SCSP(R) из множества переменных X' и формулы $\mathcal{J}$ такой, что $\mathcal{I}$ имеет сюръективное решение тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}$ имеет сюръективное решение. Это полиномиально сводит SCSP(S) к SCSP(R). $\square$

Заметим, что из Теоремы 2.1 не следует, что если отношение R сюръективно интерпретирует отношение S, то задачи SCSP(R) и SCSP(S) эквивалентны. Так, отношение смежности цикла $\mathcal{C}$ длины 4 из Примера 2.1 сюръективно интерпретирует отношение смежности его остовного цикла $\mathcal{C}^s$. При этом Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) лежит в P [32], но, как будет показано в разделе 4.3.2, Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-полной.

2.2 Свойство наследования сюръективности

Данный раздел посвящён формулировке свойства наследования сюръективности и обоснованию его применимости. Он структурирован следующим образом. Сначала в разделе 2.2.1 вводится NP-полная задача CSP(1IN3). После этого описывается схема сведения, которая по экземпляру $\mathcal{I}$ этой задачи позволяет построить экземпляр $\mathcal{J}$ задачи SCSP(Γ), где Γ — конечное множество отношений, определённых на одном множестве. После этого в разделе 2.2.2 определяется свойство наследования сюръективности и показывается, что если Γ обладает этим свойством, то $\mathcal{I}$ обладает решением тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}$ обладает сюръективным решением. Затем, в разделе 2.2.3 описывается аналог свойства наследования сюръективности, обосновывается его применимость.

2.2.1 Сведение

Рассмотрим отношение $1\mathrm{IN}3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, определенное на множестве $Z_2 = \{0,1\}$. Известно, что задача CSP(1IN3) является NP-полной [11]. Рассмотрим произвольный экземпляр задачи CSP(1IN3), задающийся набором переменных $\{u_1,\dots,u_l\}$ и формулой $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = 1\mathrm{IN}3(u_{i_1},u_{j_1},u_{k_1}) \wedge 1\mathrm{IN}3(u_{i_2},u_{j_2},u_{k_2}) \wedge \dots \wedge 1\mathrm{IN}3(u_{i_m},u_{j_m},u_{k_m}),$$

где $i_1,j_1,k_1,\dots,i_m,j_m,k_m \in \{1,2,\dots,l\}$.

Возьмем сигнатуру $\Sigma_{\mathcal{I}} = \{f_1,\dots,f_m,g_1,\dots,g_l\}$, где $f_1,\dots,f_m$ — трехместные символы и $g_1,\dots,g_l$ — двуместные. Построим минорное условие $\psi(\mathcal{I})$ над $\Sigma_{\mathcal{I}}$ следующим образом:

1. Для каждого $s \in \{1,\dots,m\}$ добавим в $\psi(\mathcal{I})$ следующие тождества:

$$f_s(y,x,x) = g_{i_s}(x,y)$$
$$f_s(x,y,x) = g_{j_s}(x,y)$$
$$f_s(x,x,y) = g_{k_s}(x,y)$$

2. Для каждой пары $i,j \in \{1,\dots,m\}$ такой, что $i \neq j$ добавим в $\psi(\mathcal{I})$ следующие тождества:

$$f_i(x,x,x) = f_j(x,x,x).$$

В получившемся минорном условии каждому вхождению 1IN3 в $\mathcal{I}$ будет соответствовать определенный функциональный символ f_i, а каждой переменной u_j — функциональный символ g_j.

Пусть $\mathcal{I}$ — произвольный экземпляр CSP(1IN3), A — произвольное множество, $|A| > 1$. Решения $\mathcal{I}$ и $\psi(\mathcal{I})$ связаны: $\mathcal{I}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на Proj_A. Это утверждение является следствием замечания 3.15 и примера 2.17 из [16].

Рассмотрим произвольное минорное условие $\mathcal{T}$. Покажем, что для произвольных множеств A и B таких, что $|A| > 1, |B| > 1$, решение $\mathcal{T}$ на множестве проекций Proj_B соответствует решению этого минорного условия на множестве функций на A с ровно одной существенной переменной.

Лемма 2.2. Пусть $\Sigma = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ — сигнатура, $\mathcal{T}$ — минорное условие над Σ, A, B — множества такие, что $|A| > 1$ и $|B| > 1$, $\mathcal{F}_A^{un}$ — множество всех функций, определённых на A, существенно зависящих ровно от одной переменной. Тогда $\mathcal{T}$ имеет решение на $\mathcal{F}_A^{un}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ имеет решение на Proj_B.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ имеет решение $F : \Sigma \to \mathrm{Proj}_B$. Построим отображение $G : \mathrm{Proj}_B \to \mathrm{Proj}_A$, которое каждой j-местной проекции на i-ую переменную на B сопоставляет j-местную проекцию на i-ую переменную на A. Возьмём решение $F : \Sigma \to \mathrm{Proj}_B$ минорного условия. Несложно заметить, что поскольку $|A|, |B| > 1$, то $G \circ F : \Sigma \to \mathrm{Proj}_A$ также будет решением $\mathcal{T}$, при этом, так как проекции — существенно-унарные функции, то это будет решением на $\mathcal{F}_A^{un}$.

Теперь, пусть у $\mathcal{T}$ есть решение $F : \Sigma \to \mathcal{F}_A^{un}$. Построим отображение $G : \Sigma \to \mathrm{Proj}_B$ следующим образом: для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ положим $G(f_i) = \mathrm{pr}_j^{n_i}$, где n_i — арность f_i и $F(f_i) = g(x_j)$. Покажем, что это отображение будет решением. Рассмотрим произвольное тождество из $\mathcal{T}$:

$$f_l(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_l}}) = f_h(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_h}}),$$

где n_l — арность f_l, n_h — арность f_h. Пусть $F(f_l) = g(x_t)$ и $F(f_h) = g'(x_s)$. Тогда после подстановки F в Σ тождество примет следующий вид:

$$g(x_{i_t}) = g'(x_{j_s}).$$

Так как F — решение, то тождество выполняется при любой подстановке значений из A, и из $|A| > 1$ следует $i_t = j_s$. А это значит, что при подстановке

G это тождество примет вид $x_{i_t} = x_{j_s}$ и тоже будет выполняться при любой подстановке значений из B. Значит, G — решение.

□

Следствие 2.2.1. Пусть Γ — конечное множество отношений, определенное на множестве A, $|A| > 1$, такое, что все сюръективные полиморфизмы Γ являются существенно-унарными, $\mathcal{I}$ — произвольный экземпляр задачи CSP($1IN3$). Тогда $\mathcal{I}$ имеет решение тогда и только тогда, когда минорное условие $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на SPol(Γ).

Пусть Γ — конечное множество отношений, определенных на множестве A, $|A| > 1$, $\Sigma = \{f_1, \ldots, f_k\}$ — сигнатура с функцией арности ar. Возьмём произвольный функциональный символ $f \in \Sigma$, $ar(f) = n$. Рассмотрим множество переменных $X_f^A = \{x_{f(a_1,\ldots,a_n)}\}_{a_1,\ldots,a_n \in A}$. В этом множестве каждому набору из n элементов из A соответствует переменная из X_f. Каждая подстановка значений A в X_f^A задаёт подстановку некоторой n-местной функции на A в f, а каждая подстановка функции из A^n в A вместо f образует некую подстановку в X_f^A. Будем говорить, что функция и подстановка в X_f^A, которую она образует, *соответствуют* друг другу. Возьмем m-местное отношение $R \in \Gamma$. Рассмотрим формулу $\mathcal{I}_f^R$ на R:

$$\mathcal{I}_f^R = \bigwedge_{\substack{(a_1^1,\ldots,a_1^m)\in R,\\ \ldots,\\ (a_n^1,\ldots,a_n^m)\in R}} R(x_{f(a_1^1,\ldots,a_n^1)}, \ldots, x_{f(a_1^m,\ldots,a_n^m)}).$$

Эта формула построена следующим образом: мы рассмотрели все возможные сочетания n наборов из R и записали для них условие полиморфизма R. Полученная формула обладает следующим свойством: каждому решению $\mathcal{I}_f^R$ соответствует полиморфизм R, а каждому сюръективному решению — сюръективный полиморфизм. Для множества Γ положим:

$$\mathcal{I}_f^\Gamma = \bigwedge_{R\in\Gamma} \mathcal{I}_f^R$$

и для сигнатуры Σ рассмотрим формулу $\mathcal{I}_\Sigma^\Gamma$:

$$\mathcal{I}_\Sigma^\Gamma = \bigwedge_{i\in\{1,\ldots,k\}} \mathcal{I}_{f_i}^\Gamma.$$

Каждому решению этой формулы $g : X_{f_1}^A \cup \ldots X_{f_k}^A \to A$ соответствует некоторая подстановка полиморфизмов Γ в Σ.

Наконец, рассмотрим произвольное минорное условие $\mathcal{T}$ над Σ с множеством переменных $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Рассмотрим тождество $f_i(y_{i_1}, \dots, y_{i_l}) = f_j(y_{j_1}, \dots, y_{j_m})$, подстановку $a_1, \dots, a_n \in A$ в Y. Рассмотрим равенство на множестве переменных $X^A_{f_1} \cup \dots X^A_{f_k}$ следующего вида:

$$x_{f_i(a_{i_1},\dots,a_{i_l})} = x_{f_j(a_{j_1},\dots,a_{j_m})}. \tag{2.1}$$

Построим формулу $\mathcal{F}^A(\mathcal{T})$ как конъюнкцию равенств вида (2.1) по всем тождествам $\mathcal{T}$ и всем подстановкам из Y в A. Наконец, положим

$$\varphi^\Gamma(\mathcal{T}) = \mathcal{I}^\Gamma_\Sigma \wedge \mathcal{F}^A(\mathcal{T}).$$

Итак, для произвольного Γ и произвольного $\mathcal{T}$ мы получили формулу $\varphi^\Gamma(\mathcal{T})$. Любое решение этой формулы задаёт подстановку полиморфизмов Γ в Σ, причём по построению $\mathcal{F}^A(\mathcal{T})$ эта подстановка будет решением $\mathcal{T}$. Аналогично, каждое решение $\mathcal{T}$ на полиморфизмах Γ образует решение $\varphi^\Gamma(\mathcal{T})$. При этом решение минорного условия на сюръективных полиморфизмах образует сюръективное решение $\varphi^\Gamma(\mathcal{T})$. Отсюда, справедлива следующая лемма:

Лемма 2.3. Пусть Γ — конечное множество отношений, определённых на множестве A, $|A| > 1$, $\mathcal{T}$ — минорное условие. Тогда существует взаимно-однозначное отображение между решениями $\mathcal{T}$ на $\mathrm{Pol}(\Gamma)$ и решениями $\varphi^\Gamma(\mathcal{T})$. Если $\mathcal{T}$ имеет решение на $\mathrm{SPol}(\Gamma)$, то $\varphi^\Gamma(\mathcal{T})$ имеет сюръективное решение.

2.2.2 Формулировка

Описанная в предыдущем подразделе конструкция дает нам возможность сконструировать достаточное условие NP-полноты $\mathrm{SCSP}(\Gamma)$.

Определение 2.2. Пусть Γ — конечное множество отношений, определённых на множестве $A, |A| > 1$. Пусть $p_1, \dots, p_k$ — набор трёхместных полиморфизмов Γ.

– Набор $p_1, \dots, p_k$ называется *совместно сюръективным*, если для каждого $a \in A$ существует $i \in \{1, \dots, k\}, b_1, b_2, b_3 \in A$ такие, что $p_i(b_1, b_2, b_3) = a$.

– Набор $p_1, \ldots, p_k$ называется *диагонально согласованным*, если для всех $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ и всех $a \in A$ верно $p_i(a,a,a) = p_j(a,a,a)$.

Определение 2.3. Пусть Γ — конечное множество отношений, определённых на множестве $A, |A| > 1$. *Полиморфизмы* Γ *наследуют сюръективность*, если в каждом совместно сюръективном диагонально согласованном наборе его трёхместных полиморфизмов найдётся сюръективная функция.

Иными словами, для набора отношений Γ на множестве A это свойство требует, чтобы в каждом наборе трёхместных полиморфизмов Γ, который принимает в совокупности все значения из A и совпадает на диагонали, найдётся сюръективная функция. Будем также говорить, что Γ *обладает свойством наследования сюръективности.*

Определение 2.4. Пусть Γ — конечное множество отношений, определённых на множестве $A, |A| > 1$. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — набор трёхместных полиморфизмов Γ. Набор $p_1, \ldots, p_k$ *имитирует проекции*, если для каждых:

– n-местного отношения $R \in \Gamma$,
– отображения $h : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ и
– набора векторов $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n} \in A^3$ такого, что для всех $j_1, \ldots, j_k \in \{1, 2, 3\}$ верно $R(a_1^{j_{h(1)}}, a_2^{j_{h(2)}}, \ldots, a_n^{j_{h(n)}})$, выполняется

$$R(p_{h(1)}(\overline{a_1}), p_{h(2)}(\overline{a_2}), \ldots, p_{h(n)}(\overline{a_n})). \tag{2.2}$$

Отметим несколько свойств этого определения:

– Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — набор трёхместных проекций на A. Для $i \in \{1, \ldots, k\}$ положим $p_i(x_1, x_2, x_3) = x_{l_i}, l_i \in \{1, 2, 3\}$. Тогда этот набор имитирует проекции. Действительно, возьмём n-местное $R \in \Gamma$, отображение $h : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$, набор векторов $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n} \in A^3$, который удовлетворяет условиям из определения. Тогда набор

$$R(p_{h(1)}(\overline{a_1}), p_{h(2)}(\overline{a_2}), \ldots, p_{h(n)}(\overline{a_n})) \tag{2.3}$$

примет вид

$$R(a_1^{l_{h(1)}}, a_2^{l_{h(2)}}, \ldots, a_n^{l_{h(n)}}),$$

что выполняется по определению набора $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n} \in A^3$.

– Если для n-местного $R \in \Gamma$ в качестве h взять константу $h(y) = i, i \in \{1, \ldots, k\}$, то это требование примет следующий вид:

для каждого набора векторов $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n} \in A^3$ такого, что выполняется $R(a^j_1, a^j_2, \dots, a^j_n)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, верно $R(p_i(\overline{a_1}), p_i(\overline{a_2}), \dots, p_i(\overline{a_n}))$. Это совпадает с определением того, что p_i — полиморфизм R. Иными словами, для того, чтобы доказать, что набор полиморфизмов Γ имитирует проекции, достаточно рассмотреть не-константные функции h.

– Пусть Γ — конечное множество отношений, определённое на A. Тогда по произвольному набору трёхместных полиморфизмов $p_1, \dots, p_k \in \mathrm{Pol}(\Gamma)$ можно эффективно проверить, имитирует ли он проекции, поскольку существует не более $\Sigma_{R\in\Gamma}|A|^{3\mathrm{ar}(R)}k^n$ ограничений вида (2.2), где $\mathrm{ar}(R)$ это арность R.
– Если Γ состоит из единственного двуместного отношения R, то это свойство формулируется более просто: набор $p_1, \dots, p_k$ полиморфизмов R *имитирует проекции*, если для любой пары $i_1, i_2 \in \{1, \dots, k\}, i_1 \neq i_2$, выполняется ограничение $R(p_{i_1}(\overline{a}), p_{i_2}(\overline{b}))$, где $\overline{a}, \overline{b}$ — векторы из A^3 такие, что для всех $h, l \in \{1, 2, 3\}$ верно $R(a^h, b^l)$.

Пример 2.2. Пусть $\Gamma = \{1\mathrm{IN}3\}$. Возьмём произвольные трёхместные $p_1, p_2 \in \mathrm{Pol}(1\mathrm{IN}3)$. В этом случае $A = Z_2 = \{0, 1\}$, $k = 2$. Рассмотрим произвольное ограничение из определения имитирования проекции. Оно имеет вид

$$1\mathrm{IN}3(p_{i_1}(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}), p_{i_2}(a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}), p_{i_3}(a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3})),$$

где $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2\}$ и $a_{l,h} \in Z_2$ для всех $l, h \in \{1, 2, 3\}$. Так как p_1, p_2 — полиморфизмы 1IN3, то для того, чтобы проверить, имитируют ли эти функции проекции, достаточно рассмотреть случай, когда i_1, i_2, i_3 не совпадают. Без ограничения общности положим, что $i_1 = 1, i_2 = i_3 = 2$. Тогда для любых $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$ выполняется:

$$1\mathrm{IN}3(a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, a_{3,j_2}).$$

Пусть хотя бы один элемент из $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}$ равен 1. Тогда для всех $l \in \{2, 3\}, h \in \{1, 2, 3\}$ значения $a_{l,h}$ равны 0. Но тогда все $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}$ равны 1.

Пусть хотя бы один из $a_{2,i}$ или $a_{3,i}$ равен 1. Тогда все $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}$ равны 0. Но тогда для каждого $j \in \{1, 2, 3\}$ один из $a_{2,j}$ и $a_{3,j}$ равен 1, а другой — 0. Значит, если p_1, p_2 имитируют проекции, то выполняются ограничения:

$$1\mathrm{IN}3(p_1(1, 1, 1), p_2(0, 0, 0), p_2(0, 0, 0)),$$
$$1\mathrm{IN}3(p_1(0, 0, 0), p_2(a_1, a_2, a_3), p_2(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}))$$

где $a_1, a_2, a_3 \in Z_2$, $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$.

Заметим, что эти ограничения выполняются, поскольку все полиморфизмы 1IN3 являются проекциями. Тем не менее, как будет показано в Разделе 4.2.3, для некоторых отношений требование того, чтобы набор их полиморфизмы имитировал проекции, является существенным.

Определение 2.5. Пусть Γ — конечное множество отношений, определённых на множестве $A, |A| > 1$. *Полиморфизмы* Γ *наследуют сюръективность в слабой форме*, если в каждом совместно сюръективном диагонально согласованном наборе его трёхместных полиморфизмов, который имитирует проекции, найдётся сюръективная функция.

Верно, что если полиморфизмы Γ наследуют сюръективность, то они наследуют сюръективность в слабой форме.

Теорема 2.4 ([47])**.** Пусть Γ — конечное множество отношений, определённое на множестве A, $|A| > 1$. Пусть выполняются следующие условия:

– Все трёхместные сюръективные полиморфизмы Γ являются существенно унарными.
– Полиморфизмы Γ наследуют сюръективность в слабой форме.

Тогда задача SCSP(Γ) является NP-полной.

Доказательство. Рассмотрим экземпляр $\mathcal{I}$ задачи CSP(1IN3). Пусть минорное условие $\psi(\mathcal{I})$ задается над сигнатурой $\Sigma_{\mathcal{I}} = \{f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l\}$, где $f_1, \ldots, f_k$ — трехместные, $g_1, \ldots, g_l$ — двуместные. Рассмотрим формулу $\varphi^{\Gamma}(\psi(\mathcal{I}))$. По Лемме 2.3 любое решение этой формулы соответствует набору полиморфизмов Γ. При этом по построению $\psi(\mathcal{I})$ решение полностью задается трёхместными полиморфизмами $p_1, \ldots, p_k$ (мы можем ограничиться рассмотрением трёхместных функций, поскольку любая двуместная g_i получается из некоторой трёхместной f_j путем отождествления двух переменных).

Возьмём произвольное n-местное отношение R из Γ. Определим конъюнктивную формулу M_k^R следующим образом:

$$M_k^R = \bigwedge_{\substack{h:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,k\} \\ a_{1,1},a_{1,2},a_{1,3},\ldots,a_{n,1},a_{n,2},a_{n,3}\in A}} R(x_{p_{h(1)}(a_{1,1},a_{1,2},a_{1,3})}, \ldots, x_{p_{h(n)}(a_{n,1},a_{n,2},a_{n,3})}), \qquad (2.4)$$

где $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}$ такие, что для любых $j_1, \ldots, j_k \in \{1, 2, 3\}$ верно:

$$R(a_{1,j_{h(1)}}, a_{2,j_{h(2)}}, \ldots, a_{n,j_{h(n)}}).$$

Положим $M_k^\Gamma = \bigwedge_{R \in \Gamma} M_k^R$. Несложно заметить, что набор $p_1, \ldots, p_k$ имитирует проекции тогда и только тогда, когда соответствующая ему подстановка в переменные M_k^Γ выполняет её. Положим $\mathcal{J} = \varphi^\Gamma(\psi(\mathcal{I})) \wedge M_k^\Gamma$. Покажем, что формула $\mathcal{J}$ имеет сюръективное решение тогда и только тогда, когда $\psi(\mathcal{I})$ обладает решением на $\mathrm{SPol}(\Gamma)$.

Пусть $\psi(\mathcal{I})$ обладает решением на $\mathrm{SPol}(\Gamma)$. Все функции из этого решения существенно унарны. Тогда по Лемме 2.2 это минорное условие обладает решением на проекциях. Рассмотрим соответствующее ему решение $\varphi^\Gamma(\psi(\mathcal{I}))$. Оно сюръективно и выполняет M_k^Γ. Значит, $\mathcal{J}$ обладает сюръективным решением.

Пусть $\mathcal{J}$ обладает сюръективным решением. Возьмем трёхместные полиморфизмы $p_1, \ldots, p_k$, которые соответствуют этому решению. По Лемме 2.3 эти функции образуют решение $\psi(\mathcal{I})$. По построению $\psi(\mathcal{I})$ этот набор функций диагонально согласован. Так как решение сюръективно, то функции из решения совместно сюръективны. Решение выполняет M_k^Γ, значит, $p_1, \ldots, p_k$ имитируют проекции. Отсюда, функции $p_1, \ldots, p_k$ удовлетворяют условиям наследования сюръективности в слабой форме, и среди них найдётся сюръективный полиморфизм p_i. По условию он является существенно-унарным. Значит он сюръективен на диагональных элементах, а, так как полиморфизмы из решения диагонально согласованны, то каждый из них является сюръективным. Значит, $\psi(\mathcal{I})$ обладает решением на $\mathrm{SPol}(\Gamma)$.

Итак, $\mathcal{J}$ имеет сюръективное решение тогда и только тогда, когда $\psi(\mathcal{I})$ обладает решением на $\mathrm{SPol}(\Gamma)$. Отсюда по Следствию 2.2.1 $\mathcal{I}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}$ имеет сюръективное решение. Отсюда, $\mathrm{SCSP}(\Gamma)$ является NP-полной. $\square$

2.2.3 Свойство наследования сюръективности для многоосновных отношений

Сформулируем аналог свойства наследования сюръективности для многоосновных отношений. Аналогично случаю для обычных отношений, мы потребуем, чтобы в каждом наборе полиморфизмов, который принимает все значения на каждом блоке и совпадает на диагонали, как минимум один полиморфизм был сюръективным. Однако, в отличие от обычных отношений, полиморфизмы многоосновных отношений являются вектор-функциями.

Определение 2.6. Пусть Γ — конечное множество многоосновных отношений, определённое на множествах $A_1, \ldots, A_m$, $|A_i| > 1$. Пусть $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}$ — набор трёхместных полиморфизмов Γ.

- Набор $p_1, \ldots, p_k$ называется *совместно-сюръективным*, если для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ и для каждого $a \in A_i$ существуют $j \in \{1, \ldots, k\}, b_1, b_2, b_3 \in A_i$ такие, что $p_j^i(b_1, b_2, b_3) = a$.
- Набор $p_1, \ldots, p_k$ называется *диагонально согласованным*, если для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ и для всех $a \in A_i$, $j, h \in \{1, \ldots, k\}$ верно $p_j^i(a,a,a) = p_h^i(a,a,a)$.

Определение 2.7. Пусть Γ — конечное множество многоосновных отношений, определённых на множестве $A_1, \ldots, A_m$, $|A_i| > 1$. *Полиморфизмы* Γ *наследуют сюръективность*, если в каждом совместно сюръективном диагонально согласованном наборе его трёхместных полиморфизмов найдётся сюръективная функция.

Определение 2.8. Пусть Γ — конечное множество многоосновных отношений, определённое на множестве $A_1, \ldots, A_m$, $|A_i| > 1$. Набор $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}$ — набор трёхместных полиморфизмов Γ *имитирует проекции*, если для каждых:

- n-местного отношения $R \in \Gamma$,
- отображения $h : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$,
- набора векторов $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$, $\overline{a_i} \in A^3_{\mathrm{sr}^R(i)}$, такого, что для всех $j_1, \ldots, j_k \in \{1, 2, 3\}$ верно $R(a_1^{j_{h(1)}}, a_2^{j_{h(2)}}, \ldots, a_n^{j_{h(n)}})$, выполняется

$$R(p_{h(1)}^{\mathrm{sr}^R(1)}(\overline{a_1}), p_{h(2)}^{\mathrm{sr}^R(2)}(\overline{a_2}), \ldots, p_{h(n)}^{\mathrm{sr}^R(n)}(\overline{a_n})).$$

Заметим, что в случае, когда Γ состоит из единственного двуместного отношения, то это свойство формулируется более простым способом. Пусть $R(x_1, x_2)$ — двуместное отношение, в котором x_1 определена на множестве A_1, а x_2 — на множестве A_2. Набор $p_1, \ldots p_k$ *имитирует проекции*, если для любой пары $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, k\}, i_1 \neq i_2$, выполняется ограничение $R(p^1_{i_1}(\overline{a}), p^2_{i_2}(\overline{b}))$, где $\overline{a} \in A_1^3, \overline{b} \in A_2^3$ — векторы такие, что для всех $h, l \in \{1, 2, 3\}$ верно $R(a^h, b^l)$.

Определение 2.9. Пусть Γ — конечное множество многоосновных отношений, определённых на множестве $A_1, \ldots, A_m$, $|A_i| > 1$. *Полиморфизмы* Γ *наследуют сюръективность в слабой форме*, если в каждом совместно сюръективном диагонально согласованном наборе его трёхместных полиморфизмов, который имитирует проекции, найдётся сюръективная функция.

Проведя рассуждения, аналогичные изложенным в Леммах 2.2—2.3 и Теореме 2.4, несложно получить следующую теорему:

Теорема 2.5 ([47])**.** Пусть Γ — конечное множество многоосновных отношений, определённых на множествах $A_1, \ldots, A_m$, $|A_i| > 1$. Пусть выполняются следующие условия:

– Все сюръективные полиморфизмы Γ являются существенно унарными.

– Полиморфизмы Γ наследуют сюръективность в слабой форме

Тогда задача SCSP(Γ) является NP-полной.

Глава 3. Структура рефлексивных циклов

Данная глава посвящена описанию структуры рефлексивных циклов, их свойств. Особенное внимание уделяется структуре сюръективных полиморфизмов подобных графов: одним из важных фактов, необходимых для применения Теоремы 2.4, является то, что, все трёхместные сюръективные полиморфизмы набора отношений являются существенно-унарными. В связи с этим, одним из ключевых результатов данной главы является следующая теорема:

Теорема 3.1. ([46]) Пусть $\mathcal{C}$ — рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин, p — сюръективный полиморфизм $\mathcal{C}$. Тогда p существенно-унарен.

Данная теорема является переформулировкой Теоремы 1.1 из приведённой статьи. Тем не менее, поскольку используемый нами подход существенно отличается от предложенного Ларивьер, Лороз и Пулласом, в данной главе мы приведём отдельное доказательство, которое опирается в первую очередь на топологические свойства графов.

Данная глава структурирована следующим образом. В разделе 3.1 рассматриваются неориентированные рефлексивные циклы. В разделе 3.2 рассматриваются строго-ориентированные рефлексивные циклы, а в разделе 3.3 — смешанно-ориентированные циклы.

3.1 Неориентированные рефлексивные циклы

3.1.1 Общие свойства

Так как все циклы, которые мы будем рассматривать в данном разделе, содержат только неориентированные рёбра, то все пути на подобных графах будут неориентированными. Также, все неориентированные рефлексивные циклы одинаковой длины изоморфны друг другу. Через $\mathcal{C}_n$, $n \geqslant 3$, будем обозначать неориентированный рефлексивный цикл длины n.

Сперва определим несколько понятий, которые будут использоваться в разделах, посвящённых неориентированным циклам.

На множестве $Z_n, n \geqslant 3$, через $\oplus$ и $\ominus$ определим операцию сложения и вычитания по модулю n: $x \oplus y = x + y \pmod n$, $x \ominus y = x - y \pmod n$. Для $a \in Z_n$ через $\ominus a$ обозначается элемент $n - a \pmod n$. Так, $\ominus 1 = n - 1$. Пусть $k \geqslant 1$, на множестве Z_n^k через $\oplus$ и $\ominus$ определим операции поэлементного сложения и вычитания по модулю n.

В случае неориентированных циклов расстояние $\rho(a, b)$ можно определить следующим образом:

$$\rho(a, b) = \min((a \ominus b), (b \ominus a)),$$

а для $k \geqslant 1$ и $\overline{a}, \overline{b} \in Z_n^k$ верно:

$$\rho(\overline{a}, \overline{b}) = \max_{i \in \{1, \ldots, k\}} (\rho(a^i, b^i)).$$

Отметим два свойства, которые прямо следуют из определения расстояния:

Утверждение 3.2. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл, $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant 1$. Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in Z_n^k$.

– $\rho(\overline{a}, \overline{b}) \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
– Существует путь из $\overline{a}$ в $\overline{b}$ длины $\rho(\overline{a}, \overline{b})$.

Определение 3.1. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant 1$, $\overline{a}, \overline{b}, \overline{\delta}, \overline{\Delta} \in Z_n^k$.

– Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ являются *соседями*, если $\rho(\overline{a}, \overline{b}) \leqslant 1$.
– Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ являются *прямыми соседями*, если они являются соседями и существует ровно один $i \in \{1, \ldots, k\}$ такой, что $\rho(a^i, b^i) = 1$.
– Вектор $\overline{\delta}$ называется *сдвигом*, если для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ верно $\delta^i \in \{\ominus 1, 0, 1\}$.
– Вектор $\overline{\Delta}$ называется *прямым сдвигом*, если он является сдвигом и существует ровно один $i \in \{1, \ldots, k\}$ такой, что $\Delta^i \in \{\ominus 1, \oplus 1\}$.

Таким образом, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ являются соседями тогда и только тогда, когда существует ребро $\overline{a} \leftrightarrow \overline{b}$. Также, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ являются соседями тогда и только тогда, когда вектор $\overline{a} \ominus \overline{b}$ является сдвигом, и прямыми соседями, когда $\overline{a} \ominus \overline{b}$ является прямым сдвигом.

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant 1$. Путь Π на Z_n^k называется *циклическим*, если его начало и конец совпадают.

Лемма 3.3. Пусть $\mathcal{C}$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть $\overline{a} \in Z_n^3$ — вектор. Тогда существует вершина $r \in Z_n$ такая, что $\rho(\overline{a},(r,r,r)) \leqslant c$, $c = \lceil\frac{\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor}{2}\rceil$.

Доказательство. Заметим, что если в Z_n существует путь длины s, то существует элемент v такой, что расстояние от v до каждого элемента этого пути не больше $\lceil\frac{s}{2}\rceil$.

Между каждыми двумя из вершин a^1, a^2, a^3 есть два пути: один имеет длину s и не проходит через третью вершину, другой имеет длину $n-s$ и проходит через третью вершину. Можно выбрать две вершины из компонент $\overline{a}$ так, чтобы путь, который не проходит через третью вершину, имел длину $s \geqslant \lceil\frac{n}{3}\rceil$. Это значит, что путь между этими вершинами, который проходит через третью вершину, будет иметь длину $s' \leqslant n - \lceil\frac{n}{3}\rceil = \lfloor\frac{2n}{3}\rfloor$. Значит, для некоторого r верно $\rho(r,a^1) \leqslant c, \rho(r,a^2) \leqslant c$ и $\rho(r,a^3) \leqslant c$, где $c = \lceil\frac{\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor}{2}\rceil$. □

Следующее утверждение следует из определения полиморфизма графа:

Утверждение 3.4. Пусть $\mathcal{C}$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть p — k-местный полиморфизм $\mathcal{C}$. Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in Z_n^k$, Π — путь из $\overline{a}$ в $\overline{b}$. Тогда образы Π принимают все значения из $p(\overline{a}), p(\overline{a}) \oplus 1, \ldots, p(\overline{b}) \ominus 1, p(\overline{b})$ или значения $p(\overline{b}), p(\overline{b}) \oplus 1, \ldots, p(\overline{a}) \ominus 1, p(\overline{a})$

Следствие 3.4.1. Пусть $\mathcal{C}$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть p — полиморфизм $\mathcal{C}$, который принимает больше $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1$ значений. Тогда p сюръективен.

Доказательство. Пусть p имеет вид $p(x_1, \ldots, x_k)$. Заметим, что из Утверждения 3.4 существует $v, m \in Z_n$, $m > \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ такие, что p принимает значения $v, v \oplus 1, \ldots, v \oplus m \ominus 1, v \oplus m$. Рассмотрим векторы $\overline{a}, \overline{b} \in Z_n^k$ такие, что $p(\overline{a}) = v, p(\overline{b}) = v \oplus m$. Рассмотрим кратчайший путь Π из $\overline{b}$ в $\overline{a}$. По Утверждению 3.2 его длина не больше $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. Значит, образы его элементов принимают не более $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1$ значений. Значит, образы элементов Π не могут принимать все значения из $v, v \oplus 1, \ldots, v \oplus m \ominus 1, v \oplus m$, откуда они принимают все $v \oplus m, v \oplus m \oplus 1, \ldots, v \ominus 1, v$, то есть p сюръективен. □

Следствие 3.4.2. Пусть $\mathcal{C}$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть p — k-местный полиморфизм $\mathcal{C}$. Пусть $\overline{a} = (a, \ldots, a), \overline{b} = (b, \ldots, b)$ — диагональные векторы из Z_n^k, Π — путь из $\overline{a}$ в $\overline{b}$. Тогда образы Π принимают на диагонали все значения из $p(\overline{a}), p(\overline{a}) \oplus 1, \ldots, p(\overline{b}) \ominus 1, p(\overline{b})$ или значения $p(\overline{b}), p(\overline{b}) \oplus 1, \ldots, p(\overline{a}) \ominus 1, p(\overline{a})$

3.1.2 Существенная унарность сюръективных полиморфизмов

Определение 3.3. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Частичная функция $r(x, y)$, определённая на соседних вершинах $\mathcal{C}_n$, определяется следующим образом:

$$r(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ если } x \oplus 1 = y \\ -\frac{1}{n}, \text{ если } x \ominus 1 = y \\ 0, \text{ если } x = y \end{cases}$$

Определение 3.4. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant 1$, p — k-местный полиморфизм $\mathcal{C}_n$. Пусть Π — путь в Z_n^k следующего вида:

$$\Pi : \overline{v_0} \leftrightarrow \overline{v_1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_{s-1}} \leftrightarrow \overline{v_s}.$$

Тогда *индекс* $c(\Pi, p)$ *пути* Π *над* p — это численная характеристика, которая определяется следующим образом:

$$c(\Pi, p) = r(p(\overline{v_0}),p(\overline{v_1})) + r(p(\overline{v_1}),p(\overline{v_2})) + \cdots + r(p(\overline{v_{s-1}}),p(\overline{v_s})).$$

Заметим, что если длина Π равна s, то для любого полиморфизма p верно $|c(\Pi, p)| \leqslant \frac{s}{n}$. Заметим также, что индекс пути аддитивен: если конец пути Π_1 совпадает с началом пути Π_2 и путь Π_3 построен из элементов путей Π_1 и Π_2, то для любого полиморфизма p верно $c(\Pi_3, p) = c(\Pi_1, p) + c(\Pi_2, p)$.

Лемма 3.5. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant 1$, p — k-местный полиморфизм $\mathcal{C}_n$, Π — путь в Z_n^k из $\overline{a}$ в $\overline{b}$. Тогда существует $t \in \mathbb{Z}$ такое, что $c(\Pi, p) = \frac{p(\overline{a}) - p(\overline{b})}{n} + t$.

Доказательство. Пусть Π имеет следующий вид:

$$\Pi : \overline{v_0} \leftrightarrow \overline{v_1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_{s-1}} \leftrightarrow \overline{v_s},$$

где $\overline{v_0} = \overline{a}$ и $\overline{v_s} = \overline{b}$. Для $i \in \{1, \ldots, s\}$ через Π_i обозначим фрагмент Π от $\overline{v_0}$ до $\overline{v_i}$. Обозначим через s_1 количество $i \in \{1, \ldots, s\}$ таких, что $c(\Pi_i, p) = c(\Pi_{i-1}, p) + \frac{1}{n}$, через s_2 — количество i таких, что $c(\Pi_i, p) = c(\Pi_{i-1}, p) - \frac{1}{n}$ и через s_3 — количество i таких, что $c(\Pi_i, p) = c(\Pi_{i-1}, p)$. По определению имеем $c(\Pi, p) = \frac{s_1 - s_2}{n}$. При этом по определению индекса пути имеем $p(\overline{v_s}) = p(\overline{v_0}) \oplus s_1 \ominus s_2$, то есть $p(\overline{b}) = p(\overline{a}) + s_1 - s_2 + n \cdot t$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}$, и $c(\Pi, p) = \frac{p(\overline{a}) - p(\overline{b})}{n} + t$. $\square$

Следствие 3.5.1. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant 1$, p — k-местный полиморфизм $\mathcal{C}_n$, Π_1, Π_2 — пути в Z_n^k из $\overline{a}$ в $\overline{b}$. Тогда существует целое t такое, что $c(\Pi_1, p) - c(\Pi_2, p) = t$.

Следствие 3.5.2. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant 1$, p — k-местный полиморфизм $\mathcal{C}_n$, Π — циклический путь в Z_n^k. Тогда $c(\Pi, p)$ — целое число.

Лемма 3.6. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant 1$, p — сюръективный k-местный полиморфизм $\mathcal{C}_n$. Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in Z_n^k$ — векторы такие, что $p(\overline{a}) = p(\overline{b}) \oplus 1$. Тогда существует путь Π в Z_n^k такой, что $c(\Pi, p) = \frac{1}{n}$.

Доказательство. По Утверждению 3.2 существует путь Π из $\overline{a}$ в $\overline{b}$ длины $s \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. По Лемме 3.5 $c(\Pi, p) = \frac{1}{n} + t, t \in \mathbb{Z}$, но $|c(\Pi, p)| \leqslant \frac{s}{n} \leqslant \frac{1}{2}$, откуда $t = 0$. $\square$

Следствие 3.6.1. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant 1$, p — сюръективный k-местный полиморфизм $\mathcal{C}_n$. Тогда в Z_n^k существует циклический путь Π такой, что $c(\Pi, p) = 1$.

Доказательство. Для каждого $i \in Z_n$ выберем вектор $\overline{v_i} \in Z_n^k$ такой, что $p(\overline{v_i}) = i$. Рассмотрим пути $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-1}$, такие, что для каждого $i \in Z_n$ путь Π_i ведёт из $\overline{v_i}$ в $\overline{v_{i \oplus 1}}$ и $c(\Pi_i, p) = \frac{1}{n}$. Рассмотрим путь Π, последовательно собранный из элементов этих путей:

$$\Pi : \overline{v_0} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_{n-1}} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_0}.$$

Он является циклом, при этом по определению $c(\Pi, p) = c(\Pi_0, p) + c(\Pi_1, p) + \cdots + c(\Pi_{n-1}, p) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$. $\square$

Теперь, пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant 1$. Рассмотрим произвольный путь Π в Z_n^k следующего вида:

$$\Pi : \overline{v_0} \leftrightarrow \overline{v_1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_s}.$$

Этот путь можно представить в виде последовательности сдвигов начального элемента: для каждого $i \in \{1, \dots, s\}$ положим $\overline{\Delta_i} = \overline{v_i} \ominus \overline{v_{i-1}}$. Тогда:

$$\overline{v_s} = \overline{v_0} \oplus \overline{\Delta_1} \oplus \overline{\Delta_2} \oplus \dots \oplus \overline{\Delta_s}.$$

Опишем ряд преобразований, которые из Π позволяют получить новый путь Π' по следующим правилам:

1. Пусть существует $i \in \{1, \dots, s\}$ такое, что $\overline{\Delta_i} = (e^1, \dots, e^k)$ содержит как минимум два ненулевых элемента e^h, e^l, $h > l$. Тогда Π' будет образован $\overline{v_0}$ и следующими сдвигами:

$$\overline{\Delta_1}, \dots, \overline{\Delta_{i-1}}, \overline{\varepsilon}, \overline{\Delta_i'}, \overline{\Delta_{i+1}}, \dots, \overline{\Delta_s},$$

где $\overline{\Delta_i'} = (e^1, \dots, e^{l-1}, 0, e^{l+1}, \dots e^k)$ и $\overline{\varepsilon} = (0, \dots, 0, e^l, 0, \dots, 0)$. Иными словами, $\overline{\Delta_i}$ разбивается на два сдвига, один из которых будет прямым.

2. Пусть существует $i \in \{1, \dots, s-1\}$ такое, что $\overline{\Delta_i}$ и $\overline{\Delta_{i+1}}$ — прямые сдвиги, в $\overline{\Delta_i}$ ненулевой элемент стоит на h-ом месте, в $\overline{\Delta_{i+1}}$ ненулевой элемент на l-ом месте и $h > l$. Тогда Π' будет образован $\overline{v_0}$ и следующими сдвигами:

$$\overline{\Delta_1}, \dots, \overline{\Delta_{i-1}}, \overline{\Delta_{i+1}}, \overline{\Delta_i}, \overline{\Delta_{i+2}}, \dots, \overline{\Delta_s}.$$

Иными словами, в Π' мы меняем эти сдвиги местами.

3. Пусть существует $i \in \{1, \dots, s-1\}$ такое, что $\overline{\Delta_i} = \ominus\overline{\Delta_{i+1}}$. Тогда Π' будет образован $\overline{v_0}$ и следующими сдвигами:

$$\overline{\Delta_1}, \dots, \overline{\Delta_{i-1}}, \overline{\Delta_{i+2}}, \dots, \overline{\Delta_s}.$$

Иными словами, в Π' мы убираем эти сдвиги.

Заметим, что данные преобразования не меняют начальную и конечную точку пути. Докажем, что они не меняют и индекс пути:

Лемма 3.7. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n > 3$. Пусть $k \geqslant 1$, p — k-местный полиморфизм $\mathcal{C}_n$. Пусть Π — путь в Z_k^n, Π' — путь, полученный из Π путём любого из преобразований 1-3. Тогда $c(\Pi, p) = c(\Pi', p)$.

Доказательство. Пусть Π имеет следующий вид:

$$\Pi : \overline{v_0} \leftrightarrow \overline{v_1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \overline{v_s}.$$

Для $i \in \{1, \ldots, s\}$ положим $\overline{\Delta_i} = \overline{v_i} \ominus \overline{v_{i-1}}$. Так как Π и Π' имеют одинаковые начало и конец, то по Следствию 3.5.1 их индексы отличаются на целое число t. Покажем, что $t = 0$.

Преобразование 1 для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$ вместо одного сдвига Δ_i добавляет два сдвига $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{\Delta_i'}$. При этом, так как $\overline{\Delta_i} = \overline{\varepsilon} \oplus \overline{\Delta_i'}$, то Π' содержит те же вершины, что и Π, за исключением новой вершины $\overline{v} = \overline{v_0} \oplus \overline{\Delta_1} \oplus \ldots \overline{\Delta_{i-1}} \oplus \overline{\varepsilon}$:

$$\Pi' : \overline{v_0} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_{i-1}} \leftrightarrow \overline{v} \leftrightarrow \overline{v_i} \leftrightarrow \overline{v_{i+1}} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_s}.$$

Это значит, что при этом преобразовании индекс меняется не более, чем на $\frac{3}{n}$: вместо слагаемого $r(p(\overline{v_i}), p(\overline{v_{i-1}}))$ появляется $r(p(\overline{v}), p(\overline{v_{i-1}})) + r(p(\overline{v_i}), p(\overline{v}))$. Так как $n > 3$, то индекс не меняется.

Преобразование 2 удаляет один элемент и добавляет один элемент. Пусть для некоторого $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ $\overline{\Delta_i}$ и $\overline{\Delta_{i+1}}$ — прямые сдвиги, к которым применимо преобразование 2. Тогда Π' будет иметь следующий вид:

$$\Pi' : \overline{v_0} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_{i-1}} \leftrightarrow \overline{v_i'} \leftrightarrow \overline{v_{i+1}} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_s},$$

где $\overline{v_i'} = \overline{v_0} \oplus \overline{\Delta_1} \oplus \cdots \oplus \overline{\Delta_{i-1}} \oplus \overline{\Delta_{i+1}}$. Заметим, что $\overline{v_i}$ и $\overline{v_i'}$ являются соседями, поскольку $\overline{v_i} \ominus \overline{v_i'} = \overline{\Delta_i} \ominus \overline{\Delta_{i+1}}$ и в этих прямых сдвигах ненулевые элементы стоят на разных местах. Индекс пути меняется на четыре слагаемых: вместо

$$r(p(\overline{v_i}), p(\overline{v_{i-1}})) + r(p(\overline{v_{i+1}}), p(\overline{v_i}))$$

появляется

$$r(p(\overline{v_i'}), p(\overline{v_{i-1}})) + r(p(\overline{v_{i+1}}), p(\overline{v_i'})).$$

При этом, если $r(p(\overline{v_i}), p(\overline{v_{i-1}})) = -r(p(\overline{v_i'}), p(\overline{v_{i-1}}))$, то $|p(\overline{v_i}) \ominus p(\overline{v_i'})| = 2$ — противоречие с тем, что p — полиморфизм и $\overline{v_i}$ и $\overline{v_i'}$ — соседи. Значит, индекс меняется не больше, чем на $\frac{3}{n} < 1$, откуда преобразование 2 не меняет индекс.

Преобразование 3 убирает два элемента из цикла. Пусть для некоторого $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ верно $\overline{\Delta_i} = \ominus \overline{\Delta_{i+1}}$. Тогда $\overline{v_{i-1}} = \overline{v_{i+1}}$, и Π' выглядит следующим образом:

$$\Pi' : \overline{v_0} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_{i-1}} \leftrightarrow \overline{v_{i+1}} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_s},$$

При этом в индексе Π' вместо $r(p(\overline{v_i}), p(\overline{v_{i-1}})) + r(p(\overline{v_{i+1}}), p(\overline{v_i}))$ появляется $r(p(\overline{v_{i+1}}), p(\overline{v_{i-1}}))$, то есть индекс отличается не более, чем на $\frac{3}{n} < 1$ и преобразование 3 не меняет индекс. $\square$

Пользуясь введёнными преобразованиями, получим циклический путь, состоящий исключительно из прямых сдвигов одной из координат:

Лемма 3.8. Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n > 3$. Пусть $k \geqslant 1$, p — сюръективный k-местный полиморфизм $\mathcal{C}_n$. Тогда существуют $\overline{a} \in Z_n^k, e \in \{1, \ominus 1\}, i \in \{1, \ldots, k\}$ такие, что для любого $b \in Z_n$ верно $p(a^1, \ldots, a^{i-1}, a^i \oplus b \cdot e, a^{i+1}, \ldots, a^k) = b$.

Доказательство. Рассмотрим циклический путь Π такой, что $c(\Pi, p) = 1$ (он существует согласно Следствию 3.6.1). В качестве начального и конечного элемента возьмём произвольный его элемент $\overline{v}$. Пусть $p(\overline{v}) = t$. Построим цепочку циклов $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots$ следующим образом: последовательно применяем преобразование 1, пока оно применимо хотя бы к одному сдвигу, после этого применяем преобразование 2, пока оно применимо, после чего используем преобразование 3, пока это возможно. Полученная цепочка будет конечна: если Π имеет длину s, то преобразование 1 к нему можно применить не более $k \cdot s$ раз, преобразование 2 — не более s^2 раз и преобразование 3 — не более s раз.

Через Π' обозначим последний цикл в данной цепочке. Он образован исключительно последовательностями из одинаковых прямых сдвигов по одной и той же координате: он содержит s_1 сдвигов $\overline{\varepsilon}_1$ по первой координате, s_2 сдвигов $\overline{\varepsilon}_2$ по второй координате и вплоть до s_k сдвигов $\overline{\varepsilon}_k$ по k-ой координате. Так как путь Π' циклический, то число сдвигов по каждой координате кратно n. При этом n прямых сдвигов по одной и той же координате образуют циклический путь. Значит, Π' разбивается на $\frac{s_1}{n} + \frac{s_2}{n} + \cdots + \frac{s_k}{n}$ циклических подпутей, каждый из которых имеет длину n. Каждый из них имеет индекс 1, 0 или -1. При этом, по Лемме 3.7 индекс Π' равен 1, значит, существует циклический путь длины n, состоящий только из прямых сдвигов вида $\overline{\varepsilon} = (0, \ldots, 0, e, 0, \ldots, 0)$, где ненулевой элемент e стоит на некотором i-ом месте. Из определения индекса следует, что при каждом таком сдвиге значение полиморфизма вырастает на один. Отсюда, для каждого $i \in Z_n$ верно $p(\overline{v} \oplus i\overline{\varepsilon}) = t \oplus i$. Тогда для $\overline{a} = \overline{v} \ominus t \cdot \overline{\varepsilon}$ верно $p(\overline{a} \oplus b \cdot \overline{\varepsilon}) = b$. □

Пользуясь этим, докажем ключевой факт данного раздела:

Лемма 3.9 ([48])**.** Пусть $\mathcal{C}_n$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n > 3$. Пусть $p \in \mathrm{SPol}(\mathcal{C}_n)$. Тогда p существенно унарен.

Доказательство. Пусть p имеет вид $p(x_1, \dots, x_k)$. По Лемме 3.8 существуют $\overline{a} \in Z_n^k, e \in \{1, \ominus 1\}, i \in \{1, \dots, k\}$ такие, что для всех $b \in Z_n$ верно $p(\overline{a} \oplus b \cdot \overline{\varepsilon}) = b$, где $\overline{\varepsilon} = (0, \dots, 0, e, 0, \dots, 0)$ — прямой сдвиг, в котором ненулевой элемент стоит на некотором i-ом месте. Без ограничения общности положим $i = k$, $e = 1$. Покажем, что для произвольного вектора $\overline{b}$ верно $p(\overline{b}) = b^k \ominus a^k$. Доказательство проведём индукцией по $\rho((b^1, \dots, b^{k-1}), (a^1, \dots, a^{k-1}))$.

База индукции. Пусть $(b^1, \dots, b^{k-1})$ — сосед $(a^1, \dots, a^{k-1})$. По определению полиморфизма $p(\overline{b})$ является соседом $p(a^1, \dots, a^{k-1}, b^k \ominus 1) = b^k \ominus a^k \ominus 1$, $p(a^1, \dots, a^{k-1}, b^k) = b^k \ominus a^k$ и $p(a^1, \dots, a^{k-1}, b^k \oplus 1) = b^k \ominus a^k \oplus 1$. А так как $\mathcal{C}_n$ содержит больше трёх вершин, то единственная вершина, смежная с $b^k \ominus a^k \ominus 1, b^k \ominus a^k$ и $b^k \ominus a^k \oplus 1$ — это сама $b^k \ominus a^k$.

Индуктивный переход. Пусть $\rho((b^1, \dots, b^{k-1}), (a^1, \dots, a^{k-1})) = m$ и предположение индукции доказано для всех $m' < m$. Рассмотрим произвольный путь из $(a^1, \dots, a^{k-1})$ в $(b^1, \dots, b^{k-1})$ длины m. Рассмотрим предпоследний элемент этого пути $(c^1, \dots c^{k-1})$. Вектор $\overline{b}$ является соседом $(c^1, \dots, c^{k-1}, b^k \ominus 1)$, $(c^1, \dots, c^{k-1}, b^k)$ и $(c^1, \dots, c^{k-1}, b^k \oplus 1)$. По предположению индукции верно $p(c^1, \dots, c^{k-1}, b^k \ominus 1) = b^k \ominus a^k \ominus 1$, $p(c^1, \dots, c^{k-1}, b^k) = b^k \ominus a^k$ и $p(c^1, \dots, c^{k-1}, b^k \oplus 1) = b^k \ominus a^k \oplus 1$. Отсюда $p(\overline{b}) = b^k \ominus a^k$. □

3.2 Строго-ориентированные рефлексивные циклы

3.2.1 Общие свойства

Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный цикл, содержащий m вершин и $2n$ особых точек. Так как в этом цикле нет неориентированных рёбер, то для $v, w \in Z_m$ ребро $v \leftrightarrow w$ есть тогда и только тогда, когда $v = w$. Будем рассматривать $\mathcal{C}$ с точки зрения его особых точек.

Определение 3.5. Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный цикл, содержащий m вершин. Пусть $v, w \in Z_m$. *Промежуток от v до w*, который будем обозначать как $V_{v,w}^{\mathcal{C}}$ — это множество вершин $\mathcal{C}$, которое содержит v, w и все вершины между ними в обходе по направлению возрастания значений вершин, начиная с v.

Иными словами, если $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный цикл с m вершинами, $v, w \in Z_m$, то:
– $V^{\mathcal{C}}_{v,w} = \{v, v+1, \ldots, w-1, w\}$, если $v < w$,
– $V^{\mathcal{C}}_{v,w} = \{v, v+1, \ldots, m-1, 0, \ldots, w-1, w\}$, если $v > w$,
– $V^{\mathcal{C}}_{v,w} = \{v\}$, если $v = w$.

Определение 3.6. Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный цикл, содержащий m вершин. Пусть $v, w \in Z_m$. Вершина $a \in Z_m$ *лежит на промежутке между* v *и* w, если $a \in V^{\mathcal{C}}_{v,w}$.

Будем также говорить, что a *лежит между* v *и* w или a *между* v *и* w. Сформулируем аналог расстояния в пространстве строго-ориентированных циклов.

Определение 3.7. Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный цикл, содержащий m вершин. *Составным ребром* будем называть последовательность из нескольких смежных ориентированных рёбер с одинаковой ориентацией. Вершины $v, w \in Z_m$ цикла $\mathcal{C}$ *соединены составным ребром*, если существует ориентированный путь из v в w, в котором все рёбра ориентированы в одном направлении.

Заметим, что если $\mathcal{C}$ рефлексивный, то для любого $l > 1$ любой путь длины $t < l$, в котором все рёбра ориентированы одинаково, можно дополнить $l - t$ петлями и получить путь длины l, в котором все рёбра также ориентированы одинаково.

Определение 3.8. Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный цикл, содержащий m вершин. Будем говорить, что вершины $v, w \in Z_m$ *соединены* t *составными рёбрами*, если в $\mathcal{C}$ существуют вершины $v_0 = v, v_1, \ldots, v_t = w$ такие, что для любого $i \in \{0, \ldots, t-1\}$ вершины v_i и v_{i+1} соединены составным ребром.

Определение 3.9. Пусть $\mathcal{C}$ — строго ориентированный цикл, содержащий m вершин. Пусть $a, b \in Z_m$. *Обобщённое расстояние* между вершинами a и b, которое также обозначается как $\rho^{\mathrm{g}}(a, b)$ — это наименьшее t такое, что a и b соединены t составными рёбрами. Будем считать, что $\rho^{\mathrm{g}}(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

Определим понятие составного ребра и обобщённого расстояния на множестве векторов.

Определение 3.10. Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный цикл, содержащий m вершин. Пусть $k \geqslant 1$. Векторы $\overline{v}, \overline{w} \in Z_m^k$ *соединены составным ребром*, если существует ориентированный путь из $\overline{v}$ в $\overline{w}$, в котором все рёбра ориентированы одинаково.

Заметим, что если $\mathcal{C}$ — рефлексивный, то для того, чтобы между k-местными векторами из вершин $\overline{v}$ и $\overline{w}$ существовал ориентированный путь достаточно, чтобы для некоторой ориентации $e \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$ для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ существовал ориентированный путь из v^i в w^i, в котором все рёбра ориентированы как e (при этом длины путей могут быть различными).

Понятие обобщённого расстояния продолжается на множество векторов естественным образом. Многие свойства обобщённого расстояния формулируются аналогично свойствам обыкновенного расстояния в неориентированных циклах. Тем не менее, наличие ориентации в рёбрах строго-ориентированных циклов не даёт нам полностью повторить рассуждения, изложенные в разделе 3.1.1.

Рассмотрим строго-ориентированный цикл $\mathcal{C}$ с $2n$ вершинами, все из которых являются особыми. В этом случае любое кратчайшее составное ребро будет состоять всего из одного ребра или петли.

Лемма 3.10. Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный рефлексивный цикл с $2n$ вершинами, все из которых являются особыми. Верно следующее:

1. Пусть $i,j \in Z_{2n}$. Тогда $\rho^{g}(i,j) = \min(i-j \pmod{2n}, j-i \pmod{2n})$.
2. Пусть $k \geqslant 1$, $s, a_1, \ldots, a_k \in Z_{2n}$. Тогда $\rho^{g}((s,\ldots,s),(a_1,\ldots,a_k)) \leqslant n$.
3. Пусть $a_1, a_2, a_3 \in Z_{2n}$ — особые точки одного типа. Тогда существует вершина $r \in Z_{2n}$ такая, что $\rho^{g}((r,r,r),(a_1,a_2,a_3)) \leqslant \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.

Доказательство.

1) Любой ориентированный путь из i в j будет проходить либо через все вершины между i и j и содержать как минимум $j-i \pmod{2n}$ рёбер, либо через все вершины между j и i и содержать как минимум $i-j \pmod{2n}$ рёбер, откуда $\rho^{g}(i,j) = \min(i-j \pmod{2n}, j-i \pmod{2n})$.

2) Обозначим $t = \max_{i\in\{1,\dots,k\}}(\rho^{g}(s,a_i))$. Из первого пункта данного утверждения имеем $t \leqslant n$. Для каждого $i \in \{1,\dots,k\}$ можно построить ориентированный путь π_i из s в a_i длины t так, что все $\pi_1,\dots,\pi_k$ будут иметь одинаковые ориентации рёбер. Для этого достаточно взять кратчайший путь из s в a_i и добавить ему в конец $t-\rho^{g}(s,a_i)$ петель из a_i Отсюда, можно построить ориентированный путь из $(s,\dots,s)$ в $(a_1,\dots,a_k)$ длины t, и $\rho^{g}((s,\dots,s),(a_1,\dots,a_k)) \leqslant n$.

3) Между любыми двумя из вершин a_1,a_2,a_3 можно построить два ориентированных пути: один имеет длину t и проходит через третью из этих вершин, другой имеет длину $2n-t$ и не проходит через третью вершину. Можно выбрать две вершины так, чтобы путь, который не проходит через третью вершину, имел длину $t \geqslant 2\lceil\frac{n}{3}\rceil$, потому что эти особые точки имеют один и тот же тип и длины путей между тремя вершинами дают в сумме $2n$. Тогда путь между выбранными вершинами, который проходит через третью вершину, имеет длину $t' = 2n - 2\lceil\frac{n}{3}\rceil = 2\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor$. Возьмем вершину r посередине этого пути. Можно построить ориентированные пути из неё до a_1,a_2,a_3 длины $l = \lfloor\frac{2n}{3}\rfloor$ так, что ориентации рёбер в этих путях одинаковые. Значит, существует ориентированный путь из (r,r,r) в (a_1,a_2,a_3) такой, что длина этого пути не больше, чем $\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor$. Отсюда, $\rho^{g}((r,r,r),(a_1,a_2,a_3)) \leqslant \lfloor\frac{2n}{3}\rfloor$. □

Теперь установим несколько свойств полиморфизмов строго-ориентированных рефлексивных циклов.

Лемма 3.11. Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный рефлексивный цикл с $2n$ особыми точками и m вершинами, $n \geqslant 1$, p — k-местный полиморфизм $\mathcal{C}$, $k \geqslant 1$. Верно следующее:

1. Пусть s — исток и существует вектор $\overline{a} \in Z_m^k$ такой, что $p(\overline{a}) = s$. Тогда существуют истоки $s_1,\dots,s_k$ такие, что $p(s_1,\dots,s_k) = s$.
2. Пусть s — сток и существует вектор $\overline{a} \in Z_m^k$ такой, что $p(\overline{a}) = s$. Тогда существуют стоки $s_1,\dots,s_k$ такие, что $p(s_1,\dots,s_k) = s$.
3. Пусть $v,w \in Z_m$, $\overline{a},\overline{b} \in Z_m^k$ такие, что $p(\overline{a}) = v$, $p(\overline{b}) = w$. Тогда p принимает все значения между v и w или все значения между w и v.
4. Пусть $v,w \in Z_m$, $a,b \in Z_m$ такие, что $p(a,\dots,a) = v$, $p(b,\dots,b) = w$. Тогда p принимает на диагонали все значения между v и w или все значения между w и v.

5. Пусть $m = 2n$, $k = 3$, $s \in Z_{2n}$, p принимает значение s. Тогда существует вершина $r \in Z_{2n}$ такая, что $\rho^{\mathrm{g}}(p(r,r,r), s) \leqslant \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.
6. Пусть $m = 2n$. Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in Z_{2n}^k$, $\rho^{\mathrm{g}}(\overline{a}, \overline{b}) = s$. Тогда $p(\overline{b})$ лежит между $p(\overline{a}) - s \pmod{2n}$ и $p(\overline{a}) + s \pmod{2n}$

Доказательство.

1) Для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ выбираем вершину $b^i \neq a^i$ так, чтобы в $\mathcal{C}$ было ребро $a^i \leftarrow b^i$ (если такой вершины нет, из рефлексивности цикла берем $b^i = a^i$). Эти элементы образуют вектор $\overline{b}$, для которого верно $\overline{a} \leftarrow \overline{b}$. По определению полиморфизма верно $p(\overline{a}) \leftarrow p(\overline{b})$, но $p(\overline{a})$ — исток, и единственное ребро, входящее в s — это петля. Отсюда, $p(\overline{b}) = p(\overline{a}) = s$. Так как вершин конечное число, подбирая подобные векторы, в итоге получим вектор $(s_1, \dots, s_k)$, состоящий полностью из истоков, для которого $p(s_1, \dots, s_k) = s$.

2) Доказывается аналогично 1).

3) Рассмотрим произвольный ориентированный путь π из $\overline{a}$ в $\overline{b}$. Образы элементов π образуют ориентированный путь из $p(\overline{a}) = v$ в $p(\overline{b}) = w$. Так как p — полиморфизм, то этот путь проходит через все вершины между v и w или все вершины между w и v, значит, p принимает эти значения.

4) Доказывается аналогично 3). Существует ориентированный путь из (a,a,a) в (b,b,b), состоящий только из диагональных элементов. Образы элементов этого пути принимают значения между v и w или все значения между w и v.

5) Пусть s — исток (случай, если s — сток разбирается аналогично). Возьмем вектор $\overline{a} \in Z_{2n}^3$ такой, что $p(\overline{a}) = s$. По первому пункту данной леммы можно выбрать истоки b^1, b^2, b^3 такие, что $p(\overline{a}) = p(\overline{b}) = s$. Тогда по третьему пункту Леммы 3.10, получим, что можно выбрать вектор $\overline{r} = (r,r,r)$ такой, что $\rho^{\mathrm{g}}(\overline{r}, \overline{b}) \leqslant \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Для него:

$$\rho^{\mathrm{g}}(p(\overline{r}), s) \leqslant \rho^{\mathrm{g}}(\overline{r}, \overline{b}) \leqslant \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor.$$

6) Следует из того, что если все вершины $\mathcal{C}$ являются особыми, то каждое кратчайшее составное ребро будет состоять из ровно одного ориентированного ребра или петли. $\square$

3.2.2 Существенная унарность сюръективных полиморфизмов

Доказательство того, что сюръективные полиморфизмы строго-ориентированных рефлексивных циклов являются существенно унарными, сильно опирается на аналогичный факт для неориентированных циклов, описанный в Лемме 3.9.

Лемма 3.12 ([47])**.** Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий $m > 3$ вершин. Пусть $p \in \mathrm{SPol}(\mathcal{C})$. Тогда p существенно унарен.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}'$ — неориентированный рефлексивный цикл длины m. Рассмотрим отношение $R(x_1, x_2)$, задающееся конъюнктивной формулой над $\mathcal{C}$ (см. Рис. 3.1):

$$R(x_1, x_2) = \exists y_1, y_2, y_3 \mid \mathcal{C}(x_1, y_1) \wedge \mathcal{C}(x_2, y_1) \wedge$$
$$\wedge \mathcal{C}(y_2, x_1) \wedge \mathcal{C}(y_2, x_2) \wedge \mathcal{C}(y_3, y_1) \wedge \mathcal{C}(y_3, y_2),$$

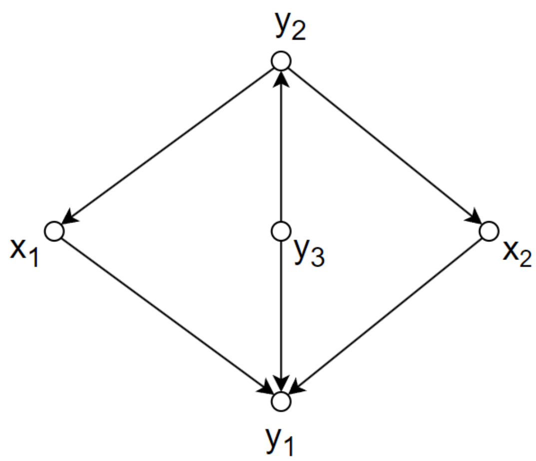

Рисунок 3.1 — Отношение $R(x_1, x_2)$.

Возьмём вершины $a_1, a_2 \in Z_m$ и покажем, что $(a_1, a_2) \in R$ тогда и только тогда, когда $(a_1, a_2) \in \mathcal{C}'$. Очевидно, что достаточно рассмотреть только те вершины a_1, a_2, которые находятся на расстоянии не больше, чем 2.

Пусть условие $\mathcal{C}'(a_1, a_2)$ неверно. В этом случае a_1 и a_2 находятся на расстоянии 2. Заметим, что из условия $m \geqslant 4$ существует не больше двух вершин, смежных и с a_1, и с a_2. Предположим, что верно $R(a_1, a_2)$. Из выполнения $\exists y_1 \, \mathcal{C}(a_1, y_1) \wedge \mathcal{C}(a_2, y_1)$ должна существовать вершина v между a_1 и a_2 такая, что рёбра между этими вершинами ориентированы как $a_1 \to v \leftarrow a_2$. Из выполнения $\exists y_2\, \mathcal{C}(y_2, a_1) \wedge \mathcal{C}(y_2, a_2)$ существует вершина v' между a_1 и a_2 такая, что рёбра между этими вершинами ориентированы как $a_1 \leftarrow v' \to a_2$. Так как каждое ребро $\mathcal{C}$ ориентировано ровно в одну сторону, то $v' \neq v$. Это возможно только когда $\mathcal{C}$ — цикл длины 4 с двумя особыми точками v и v'. Но в этом графе не выполняется $\exists y_3\, \mathcal{C}(y_3, y_1) \wedge \mathcal{C}(y_3, y_2)$, поскольку рёбра между v и v' ориентированы как $v \leftarrow a_1 \leftarrow v'$ и $v \leftarrow a_2 \leftarrow v'$ — противоречие. Отсюда, $(a_1, a_2) \notin R$.

Пусть условие $\mathcal{C}'(a_1, a_2)$ верно, a_1 и a_2 находятся на расстоянии 1 и ребро между ними ориентировано как $a_1 \to a_2$ (случай ребра $a_1 \leftarrow a_2$ разбирается аналогично). Тогда R выполняется при $y_1 = a_2$, $y_2 = y_3 = a_1$.

Пусть теперь условие $\mathcal{C}'(a_1, a_2)$ верно и $a_1 = a_2$. Так как $\mathcal{C}$ — рефлексивный, то R выполняется при $y_1 = y_2 = y_3 = a_1 = a_2$.

Итак, отношение R совпадает с отношением $\mathcal{C}'$. Предположим, что существует сюръективный полиморфизм p отношения $\mathcal{C}$, который существенно зависит больше, чем от одной переменной. Тогда он сохраняет R, откуда $\mathcal{C}'$ тоже обладает сюръективным не существенно-унарным полиморфизмом, что противоречит Лемме 3.9.

$\square$

3.3 Смешанно-ориентированные рефлексивные циклы

Смешанно-ориентированные циклы мы будем рассматривать с точки зрения их неориентированных компонент (число которых совпадает с числом ориентированных рёбер в них). Сперва мы докажем несколько общих свойств о смешанно-ориентированных рефлексивных циклах и их полиморфизмах.

3.3.1 Общие свойства

Лемма 3.13. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин, p — k-местный полиморфизм $\mathcal{C}$. Пусть $\overline{a}, \overline{b}$ —

векторы из вершин $\mathcal{C}$ такие, что верно $\overline{a} \to \overline{b}$ и $p(\overline{a}) \neq p(\overline{b})$. Тогда существует $i \in \{1, \ldots, k\}$ такое, что

$$p(b^1, \ldots, b^{i-1}, a^i, a^{i+1}, \ldots, a^k) = p(\overline{a}),$$
$$p(b^1, \ldots, b^{i-1}, b^i, a^{i+1}, \ldots, a^k) = p(\overline{b}),$$

при этом если не верно $p(\overline{b}) \to p(\overline{a})$, то не верно $b^i \to a^i$.

Доказательство. Рассмотрим набор векторов:

$$(a^1, a^2, a^3, \ldots, a^k),$$
$$(b^1, a^2, a^3, \ldots, a^k),$$
$$(b^1, b^2, a^3, \ldots, a^k),$$
$$\ldots,$$
$$(b^1, b^2, b^3, \ldots, b^k).$$

Для каждого вектора $\overline{v}$ из этого набора верно $\overline{a} \to \overline{v} \to \overline{b}$ и, так как в $\mathcal{C}$ больше трёх вершин, то $p(\overline{v}) \in \{p(\overline{a}), p(\overline{b})\}$. Так как первый и последний векторы набора отображаются в разные значения, то рассматривая по очереди соседние векторы из этого набора, получим два требуемых вектора $\overline{a'}, \overline{b'}$, которые отличаются только по некоторой i-ой координате и отображаются в разные значения. При этом, если есть ребро $b^i \to a^i$, то из определения полиморфизма есть ребро $p(\overline{b'}) = p(\overline{b}) \to p(\overline{a}) = p(\overline{a'})$. □

Лемма 3.14. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин, $p \in \mathrm{Pol}(\mathcal{C})$. Пусть $\overline{a}, \overline{b}$ — векторы такие, что есть ребро $\overline{a} \to \overline{b}$ и не существует ребра $p(\overline{b}) \to p(\overline{a})$.

- Пусть $\overline{c}$ — вектор, для которого существуют рёбра $\overline{c} \to \overline{a}$ и $\overline{c} \to \overline{b}$. Тогда $p(\overline{c}) = p(\overline{a})$.
- Пусть $\overline{c}$ — вектор, для которого существуют рёбра $\overline{a} \to \overline{c}$ и $\overline{b} \to \overline{c}$. Тогда $p(\overline{c}) = p(\overline{b})$.

Доказательство. Докажем первый пункт утверждения (второй доказывается аналогично). Обозначим вершину, смежную $p(\overline{b})$ и не равную $p(\overline{a})$ и $p(\overline{b})$, как v. Так как верно $\overline{c} \to \overline{b}$, то $p(\overline{c}) \in \{p(\overline{a}), p(\overline{b}), v\}$, но раз в $\mathcal{C}$ больше трёх вершин, то ребра $v \to p(\overline{a})$ не существует. По условию ребра $p(\overline{b}) \to p(\overline{a})$ также не существует, откуда $p(\overline{c}) = p(\overline{a})$. □

Следствие 3.14.1. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин, p — его k-местный полиморфизм, $k > 1$. Пусть $a^1, a^2, \ldots, a^k, b^1$ — вершины такие, что есть ребро $a^1 \to b^1$ и нет ребра $p(b^1, a^2, \ldots, a^k) \to p(a^1, a^2, \ldots, a^k)$. Пусть $c^2, \ldots, c^k$ — вершины такие, что существует ориентированный путь вида $(a^2, \ldots, a^k) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (c^2, \ldots, c^k)$. Тогда $p(a^1, c^2, \ldots, c^k) = p(a^1, a^2, \ldots, a^k)$, $p(b^1, c^2, \ldots, c^k) = p(b^1, a^2, \ldots, a^k)$.

Доказательство. Пусть длина кратчайшего пути из неориентированных рёбер между $(a^2, \ldots, a^k)$ и $(c^2, \ldots, c^k)$ — это l. Докажем индукцией по l.

База индукции. Пусть $l = 0$. Тогда $(a^2, \ldots, a^k) = (c^2, \ldots, c^k)$ и предположение индукции верно.

Шаг индукции. Пусть предположение верно для всех $l \leqslant m$. Пусть $l = m + 1$. Рассмотрим произвольный кратчайший путь между $(a^2, \ldots, a^k)$ и $(c^2, \ldots, c^k)$ из неориентированных рёбер. Рассмотрим предпоследний элемент этого пути $(d^2, \ldots, d^k)$. Для него верно предположение индукции и существует ребро $(d^2, \ldots, d^k) \leftrightarrow (c^2, \ldots, c^k)$. Так как верно $(a^1, d^2, \ldots, d^k) \to (b^1, c^2, \ldots, c^k)$ и $(b^1, d^2, \ldots, d^k) \to (b^1, c^2, \ldots, c^k)$, то $p(b^1, c^2, \ldots, c^k) = p(b^1, d^2, \ldots, d^k) = p(b^1, a^2, \ldots, a^k)$. Так как верно $(a^1, c^2, \ldots, c^k) \to (a^1, d^2, \ldots, d^k)$ и $(a^1, c^2, \ldots, c^k) \to (b^1, d^2, \ldots, d^k)$, то $p(a^1, c^2, \ldots, c^k) = p(a^1, d^2, \ldots, d^k) = p(a^1, a^2, \ldots, a^k)$. $\square$

Следующее утверждение естественным образом следует из определения полиморфизмов графов.

Утверждение 3.15. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин, $p \in \mathrm{Pol}(\mathcal{C})$. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — векторы, которые лежат в одной неориентированной компоненте. Тогда $p(\overline{a})$ и $p(\overline{b})$ тоже лежат в одной неориентированной компоненте.

3.3.2 Существенная унарность сюръективных полиморфизмов циклов с $m \geqslant 4$ ориентированными рёбрами

Теперь докажем, что сюръективные полиморфизмы смешанно-ориентированных циклов являются существенно-унарными. Сперва разберём циклы, которые содержат как минимум четыре ориентированных ребра.

Лемма 3.16. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий $m \geqslant 4$ ориентированных рёбер. Пусть $p \in \mathrm{Pol}(\mathcal{C})$. Тогда p существенно-унарен.

Доказательство. Обозначим неориентированные компоненты $\mathcal{C}$ как $V_0, V_1, \ldots, V_{m-1}$, обходя цикл по часовой стрелке, начиная с некоторой вершины. Рассмотрим его остовный цикл $\mathcal{C}^s$, обозначим его вершины как $0, 1, \ldots, m-1$ так, чтобы каждой вершине $i \in Z_m$ соответствовала неориентированная компонента V_i. Пусть p имеет вид $p(x_1, \ldots, x_k)$. Построим функцию $p' : Z_m^k \to Z_m$ по следующему правилу:

$$p'(\overline{v}) = w, \text{ если для каждого } \overline{a} \in Z_n^k \text{ такого, что } a^i \in V_{v^i} \text{ верно } p(\overline{a}) \in V_w.$$

Несложно заметить, что из Утверждения 3.15 p' определена корректно и является сюръективной функцией. Более того, эта функция является полиморфизмом $\mathcal{C}^s$. Действительно, рассмотрим два вектора $\overline{v}, \overline{w} \in Z_m^k$ такие, что есть ребро $\overline{v} \to \overline{w}$. Для каждого $i \in \{1, \ldots k\}$ выберем вершины $a^i \in V_{v^i}, b^i \in V_{w^i}$ такие, что есть ребро $a^i \to b^i$ (такие вершины можно выбрать по построению $\mathcal{C}^s$). Это значит, что существует ребро $p(\overline{a}) \to p(\overline{b})$, а значит, и ребро $p'(\overline{v}) \to p'(\overline{w})$.

Итак, p' является сюръективным полиморфизмом $\mathcal{C}^s$. Значит, она существенно-унарна. Иными словами, существуют $i \in \{1, \ldots, k\}$, сюръективный полиморфизм $g : Z_m \to Z_m$ такие, что для каждого $\overline{v} \in Z_m^k$ верно $p(\overline{v}) = g(v^i)$. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$. А это значит, что для любой неориентированной компоненты V_i в $\mathcal{C}$ и для любого вектора $\overline{a} \in Z_n^k$ значение $p(\overline{a})$ лежит в V_i тогда и только тогда, когда $g(j) = i$, где $a^1 \in V_j$.

Рассмотрим произвольные $a^2, \ldots, a^k \in Z_n$. Положим, $\overline{a_i} = (i, a^2, \ldots, a^k), i \in Z_n$. Покажем, что $p(\overline{a_0}), p(\overline{a_1}), \ldots, p(\overline{a_{n-1}})$ принимают все значения из Z_n. Поскольку $0, 1, \ldots, n-1$ принимают значения из всех неориентированных компонент $\mathcal{C}$, то и $p(\overline{a_0}), p(\overline{a_1}), \ldots, p(\overline{a_{n-1}})$ проходят все неориентированные компоненты. Теперь, пусть среди этих значений не принимается некоторое $v \in Z_n$. Пусть v лежит в неориентированной компоненте $V_i, i \in Z_m$. Рассмотрим элемент $b \in Z_n$ такой, что $p(\overline{a_b}) \in V_i$. Пусть b лежит в неориентированной компоненте V_j. Возьмём произвольные элементы $c \in V_{j-1 \pmod m}$ и $d \in V_{j+1 \pmod m}$, смежные с вершинами из V_j. Элементы $p(\overline{a_c}), p(\overline{a_b})$ и $p(\overline{a_d})$ лежат в попарно различных неориентированных компонентах. Можно выбрать элементы $h, l \in V_j$ и ориентации рёбер $e_1, e_2 \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$

такие, что существует ориентированный путь Π следующего вида:

$$\Pi : \overline{a_c}\, e_1\, \overline{a_h} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \overline{a_b} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \overline{a_l}\, e_2\, \overline{a_d}.$$

Это значит, что существует ориентированный путь от $\overline{a_b}$ до $\overline{a_c}, \overline{a_d}$, содержащий ровно одно ориентированное ребро. Поскольку p — полиморфизм $\mathcal{C}$ и $p(\overline{a_c}), p(\overline{a_d}) \notin V_i$, то эти значения лежат в $V_{i-1 \pmod m}$ и $V_{i+1 \pmod m}$. Так как $m \geqslant 3$, то любой ориентированный путь из элемента $V_{i-1 \pmod m}$ в элемент $V_{i+1 \pmod m}$ через элемент V_i, который проходит не через все V_i, будет иметь больше двух ориентированных рёбер. Значит, образы Π на p проходят через все V_i и найдётся элемент $h \in V_j$ такой, что $p(\overline{a_h}) = v$.

Зафиксируем произвольные $a^2, \dots, a^k, b^2, \dots, b^k \in Z_n$. Покажем, что для любой $v \in Z_n$ верно $p(v, a^2, \dots, a^k) = p(v, b^2, \dots, b^k)$ (что покажет, что p существенно зависит только от своей первой переменной). Доказательство проведём индукцией по расстоянию между $(a^2, \dots, a^k)$ и $(b^2, \dots, b^k)$. Для $w \in Z_n$ обозначим вектор $(w, b^2, \dots, b^k)$ как $\overline{b_w}$.

База индукции. Пусть $\rho((a^2, \dots, a^k), (b^2, \dots, b^k)) = 0$. Тогда $a^i = b^i, i \in \{2, \dots, k\}$ и $p(\overline{b_v}) = p(\overline{a_v}), v \in Z_n$.

Индуктивный переход. Пусть $\rho((a^2, \dots, a^k), (b^2, \dots, b^k)) = m$ и предположение индукции выполняется для всех $m' < m$. Рассмотрим кратчайший ориентированный путь между $(a^2, \dots, a^k)$ и $(b^2, \dots, b^k)$. Рассмотрим предпоследний элемент этого пути $(c^2, \dots, c^k)$. Пусть существует ребро $(c^2, \dots, c^k) \to (b^2, \dots, b^k)$ (случай ребра $(c^2, \dots, c^k) \leftarrow (b^2, \dots, b^k)$ рассматривается аналогично). Для $v \in Z_n$ положим $\overline{c_v} = (v, c^2, \dots, c^k)$. По предположению индукции для каждого $w \in Z_n$ верно $p(\overline{c_w}) = p(\overline{a_w})$. Зафиксируем произвольное $v \in Z_n$. Заметим, что $p(\overline{c_v})$ лежит в одной неориентированной компоненте с $p(\overline{b_v})$. Пусть $p(\overline{c_v}) \neq p(\overline{b_v})$. Обозначим вершины, смежные v и не равные ей, как h и l. Элементы $p(\overline{c_h}) = p(\overline{a_h})$, $p(\overline{c_v}) = p(\overline{a_v})$ и $p(\overline{c_l}) = p(\overline{a_l})$ попарно различны, откуда $p(\overline{b_v}) = p(\overline{c_h})$ или $p(\overline{b_v}) = p(\overline{c_l})$. Рассмотрим первый вариант (второй доказывается аналогично). Пусть существует ребро $l \to v$. Тогда верно $p(\overline{c_l}) \to p(\overline{b_v}) = p(\overline{c_h})$, что невозможно, так как $\mathcal{C}$ содержит больше трёх вершин. Тогда, пусть существует ребро $v \to l$ и не существует ребра $l \to v$. Это значит, что l лежит в разных неориентированных компонентах с v. При этом есть рёбра $p(\overline{c_v}) \to p(\overline{b_l})$ и $p(\overline{b_v}) \to p(\overline{b_l})$. Отсюда, $p(\overline{b_l})$ смежна с двумя разными элементами из одной неориентированной компоненты, что невозможно, так как $m \geqslant 4$. Значит, $p(\overline{b_v}) = p(\overline{c_v}) = p(\overline{a_v})$.

□

3.3.3 Структура циклов, содержащих $m < 4$ ориентированных рёбер

Смешанно-ориентированные рефлексивные циклы, содержащие не больше трёх ориентированных рёбер, мы разберём отдельно. Будем рассматривать такие циклы с точки зрения взаимного расположения в них ориентированных рёбер (см. Рис. 3.2, пунктиром обозначены последовательности из нескольких неориентированных рёбер):

– Будем говорить, что смешанно-ориентированный цикл *имеет тип* A, если он содержит ровно одно ориентированное ребро.
– Цикл *имеет тип* B, если он содержит два ориентированных ребра, две неориентированные компоненты V_0, V_1 и одно ориентированное ребро выходит из V_0 в V_1, а одно — из V_1 в V_0.
– Цикл *имеет тип* C, если он содержит два ориентированных ребра, две неориентированные компоненты V_0, V_1 и все ориентированные рёбра выходят из V_0 в V_1.
– Цикл *имеет тип* D, если он содержит три ориентированных ребра, три неориентированные компоненты V_0, V_1, V_2 и ориентированные рёбра выходят из V_0 в V_1, из V_1 в V_2 и из V_0 в V_2.
– Цикл *имеет тип* D', если он содержит три ориентированных ребра, три неориентированные компоненты V_0, V_1, V_2 и ориентированные рёбра выходят из V_0 в V_1, из V_1 в V_2 и из V_2 в V_0.

3.3.4 Циклы типа A

Лемма 3.17. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий больше трёх вершин, $p \in \mathrm{SPol}(\mathcal{C})$. Тогда p существенно унарен.

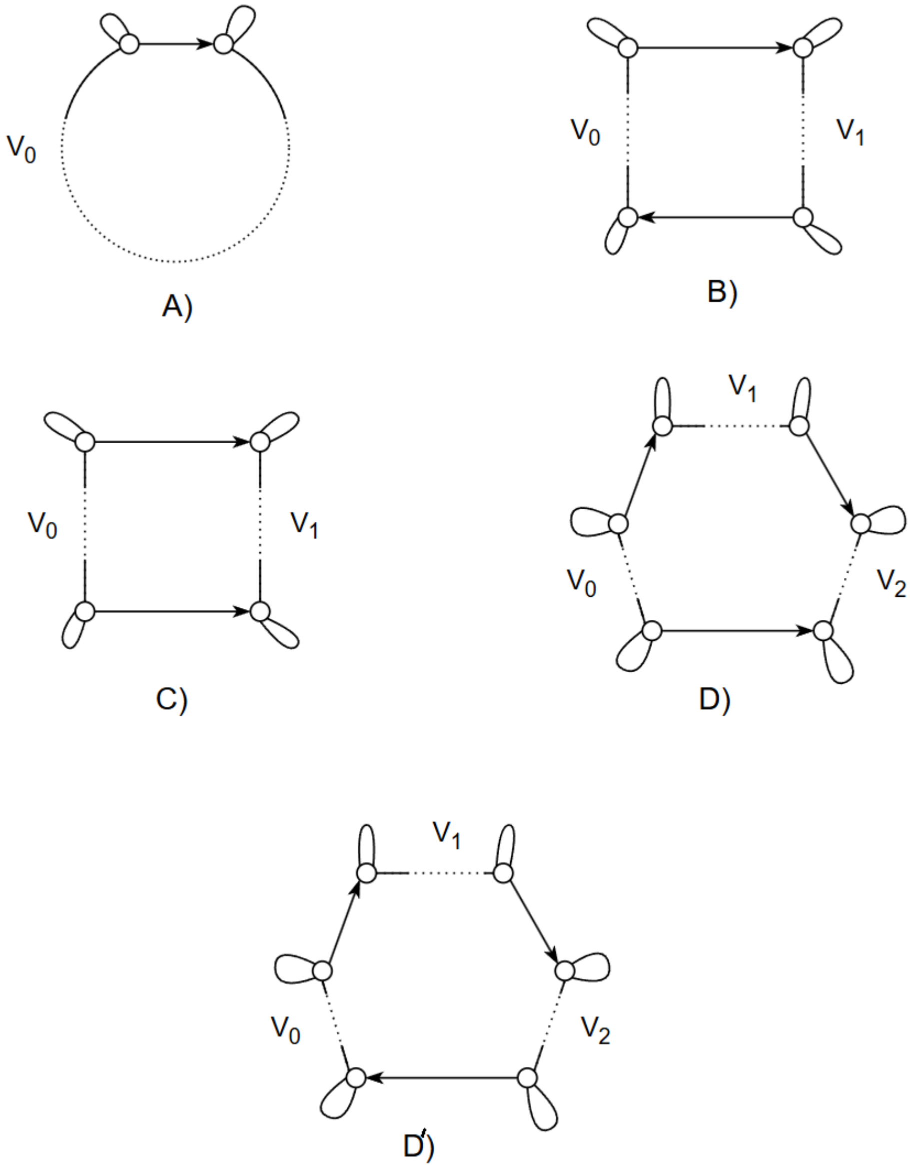

Рисунок 3.2 — Смешанно-ориентированные циклы, содержащие не больше трёх ориентированных рёбер.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ содержит n вершин, $n > 3$. Без ограничения общности пронумеруем вершины этого графа так, чтобы единственное ориентированное ребро имело вид $n-1 \to 0$ (см. Рис. 3.3). Пусть полиморфизм имеет вид $p(x_1, \ldots, x_k)$. Заметим, что для любых вершин $v, w \in Z_n$ существует ориентированный путь π, содержащий два ориентированных ребра и не более $n-4$ неориентированных рёбер, следующего вида:

$$\pi : v \to v' \leftarrow w' \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow w,$$

где v', w' — некоторые вершины $\mathcal{C}$. Это значит, что между любыми векторами $\overline{v}, \overline{w} \in Z_n^k$ существует ориентированный путь длины $l < n-1$.

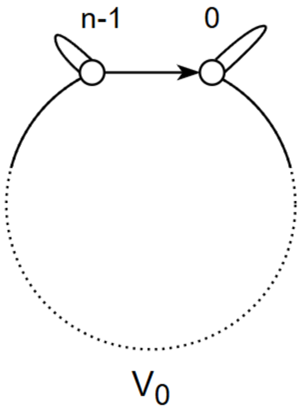

Рисунок 3.3 — Цикл типа A

Рассмотрим векторы $\overline{a}, \overline{b} \in Z_n^k$ такие, что $p(\overline{a}) = n-1$ и $p(\overline{b}) = 0$. Заметим, что любой ориентированный путь в Z_n из $n-1$ в 0 либо проходит через все вершины $\mathcal{C}$ (в этом случае его длина не меньше $n-1$), либо содержит два соседних элемента, которые отображаются в $n-1$ и 0. Рассмотрим кратчайший ориентированный путь из $\overline{a}$ в $\overline{b}$, его длина $l < n-1$. Значит, в нём найдутся два соседних вектора $\overline{c}$ и $\overline{d}$ такие, что $p(\overline{c}) = n-1$, $p(\overline{d}) = 0$. Так как не выполняется $p(\overline{c}) \leftarrow p(\overline{d})$, то верно $\overline{c} \rightarrow \overline{d}$. Отсюда, для некоторой $i \in \{1, \dots, k\}$ верно $c^i = n-1, d^i = 0$. Тогда по Лемме 3.13 без ограничения общности положим $p(n-1, e^2, \dots, e^k) = n-1$, $p(0, e^2, \dots, e^k) = 0$, $e^i \in \{c^i, d^i\}$.

Теперь докажем, что для произвольного вектора $\overline{s} \in Z_n^k$ верно $p(\overline{s}) = s^1$. Для вершины $v \in Z_n$ обозначим вектор $(v, s^2, \dots, s^k)$ как $\overline{s_v}$. Поскольку существует ориентированный путь вида $(s^2, \dots, s^k) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (e^2, \dots, e^k)$, то по Следствию 3.14.1 $p(\overline{s_{n-1}}) = n-1$, $p(\overline{s_0}) = 0$. Рассмотрим путь Π из неориентированных рёбер следующего вида:

$$\Pi : \overline{s_0} \leftrightarrow \overline{s_1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \overline{s_{n-2}} \leftrightarrow \overline{s_{n-1}}.$$

Так как $p(\overline{s_0}) = 0$, $p(\overline{s_{n-1}}) = n-1$ и все рёбра Π ориентированы как $\leftrightarrow$, то образы элементов этого пути на p проходят через все вершины $\mathcal{C}$, а так как этот путь содержит ровно n элементов, то значение каждой вершины принимается ровно один раз и $p(\overline{s}) = s^1$. $\square$

3.3.5 Циклы типа B

Рассмотрим цикл $\mathcal{C}$ типа B. Обозначим множество вершин $\mathcal{C}$ как $V, |V| = n$. Обозначим неориентированные компоненты цикла как V_0 и V_1, $|V_0| = n_0, |V_1| = n_1$. Обозначим вершины V_0, инцидентные ориентированным рёбрам, как 0 и $1'$, и вершины V_1 — как 1 и $0'$ так, чтобы эти рёбра имели вид $0 \to 1$ и $0' \to 1'$ (см. Рис. 3.4).

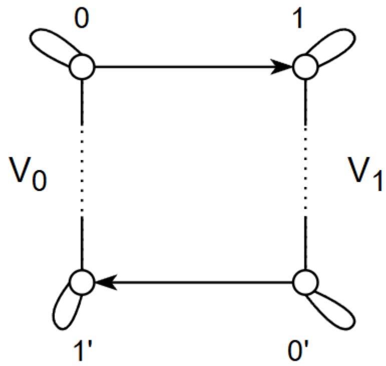

Рисунок 3.4 — Цикл типа B

Лемма 3.18. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа B, содержащий больше трёх вершин, p — его k-местный полиморфизм. Пусть $(a^2, \ldots, a^k) \in V^{k-1}$ — вектор такой, что для каждой вершины $v \in V$ верно $p(v, a^2, \ldots, a^k) = v$. Пусть $(b^2, \ldots, b^k) \in V^{k-1}$ — вектор такой, что существует ребро $(a^2, \ldots, a^k) \to (b^2, \ldots, b^k)$. Тогда для любой вершины $v \in V$ также верно $p(v, b^2, \ldots, b^k) = v$.

Доказательство. Для произвольной вершины $v \in V$ вектор $(v, a^2, \ldots, a^k)$ обозначим как $\overline{a_v}$, а вектор $(v, b^2, \ldots, b^k)$ — как $\overline{b_v}$. Пусть $|V_0| > 1$ (случай $|V_1| > 1$ разбирается аналогично). Обозначим вершины, смежные v и не равные ей, как w, w'. Так как в $\mathcal{C}$ больше трёх вершин, то единственная вершина, смежная w, w' и v — это сама v. Верно $\overline{a_v} \to \overline{b_v}$. Если $v \notin \{0, 0'\}$, то выполняется $w \to v$ и $w' \to v$, откуда верно $\overline{a_w} \to \overline{b_v}$ и $\overline{a_{w'}} \to \overline{b_v}$. А так как $p(\overline{a_w}) = w$ и $p(\overline{a_{w'}}) = w'$, то $p(\overline{b_v})$ смежно w, w' и v, откуда $p(\overline{b_v}) = v$.

Теперь, пусть $v = 0'$. В этом случае положим $w' = 1'$. Так как $|V_0| > 1$, то $0 \neq 1'$ и $p(\overline{b_{1'}}) = 1'$. Есть ребро $w \to 0'$, откуда верно $\overline{a_w} \to \overline{b_{0'}}$. Также выполняется $\overline{a_{0'}} \to \overline{b_{0'}} \to \overline{b_{1'}}$. Значит, верно $w \to p(\overline{b_{0'}}) \to 1'$ и $0' \to p(\overline{b_{0'}})$, откуда $p(\overline{b_{0'}}) = 0'$.

Наконец, пусть $v = 0$, тогда обозначим $w' = 1$. Выше показали, что $p(\overline{b_1}) = 1$. Есть рёбра $w \to 0 \to 1$, значит, верно $\overline{a_w} \to \overline{b_0} \to b_1$ и $\overline{a_0} \to \overline{b_0}$. Значит, $p(\overline{b_0})$ смежно $w, 1$ и 0, откуда $p(\overline{b_0}) = 0$. $\square$

Следствие 3.18.1. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа B, содержащий больше трёх вершин, p — его k-местный полиморфизм. Пусть $(a^2, \ldots, a^k) \in V^{k-1}$ — вектор такой, что для каждой вершины $v \in V$ верно $p(v, a^2, \ldots, a^k) = v$. Тогда p существенно-унарен.

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $\overline{b} \in V^k$. Существует ориентированный путь вида $(b^1, a^2, \ldots, a^k) \to \cdots \to \overline{b}$. Последовательно применяя к элементам этого пути Лемму 3.18, получаем, что $p(\overline{b}) = b^1$, откуда p — существенно-унарная функция. $\square$

Лемма 3.19. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа B, содержащий больше трёх вершин, $p \in \mathrm{SPol}(\mathcal{C})$. Тогда p существенно унарен.

Доказательство. Пусть полиморфизм имеет вид $p(x_1, \ldots, x_k)$. Возьмём векторы $\overline{a}, \overline{b} \in V^k$ такие, что $p(\overline{a}) \in V_0, p(\overline{b}) \in V_1$. Можно выбрать вектор $\overline{c}$, лежащий в одной неориентированной компоненте с $\overline{a}$ и вектор $\overline{d}$ в одной неориентированной компоненте с $\overline{b}$ так, чтобы существовало ребро $\overline{c} \to \overline{d}$. По Утверждению 3.15 $p(\overline{c}) \in V_0, p(\overline{d}) \in V_1$, откуда $p(\overline{c}) = 0$ и $p(\overline{d}) = 1$. Ребра $p(\overline{d}) \to p(\overline{c})$ не существует, значит, для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$ верно $c^i = 0$, $d^i = 1$ или $c^i = 0'$ и $d^i = 1'$. Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично). Без ограничения общности по Лемме 3.13 положим $p(0, e^2, \ldots, e^k) = 0$ и $p(1, e^2, \ldots, e^k) = 1$, $e^i \in \{c^i, d^i\}$. Для вершины $v \in V$ через $\overline{e_v}$ обозначим вектор $(v, e^2, \ldots, e^k)$.

Теперь, рассмотрим ориентированный путь Π длины $n-1$, в котором все рёбра ориентированы как $\to$ и который проходит через все векторы вида $\overline{e_v}$:

$$\Pi : \overline{e_1} \to \cdots \to \overline{e_{0'}} \to \overline{e_{1'}} \to \cdots \to \overline{e_0}.$$

Поскольку $p(\overline{e_1}) = 1$, $p(\overline{e_0}) = 0$ и в этом пути нет рёбер, ориентированных как $\leftarrow$, то образы элементов этого пути на p проходят через все элементы V. А так как длина этого пути равна $n-1$, то каждое значение принимается ровно один раз и $p(\overline{e_v}) = v$. Тогда по Следствию 3.18.1 p существенно унарен.

$\square$

3.3.6 Циклы типа C

Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа C. Обозначим множество его вершин как V, $|V| = n$. Обозначим его неориентированные компоненты как V_0 и V_1 так, чтобы ориентированные рёбра выходили из V_0 в V_1. Пусть $|V_0| = n_0$ и $|V_1| = n_1$. Обозначим вершины V_0, инцидентные ориентированным рёбрам, как $0, 0'$ и вершины V_1 — как $1, 1'$ так, чтобы ориентированные рёбра имели вид $0 \to 1$ и $0' \to 1'$ (см. Рис 3.5).

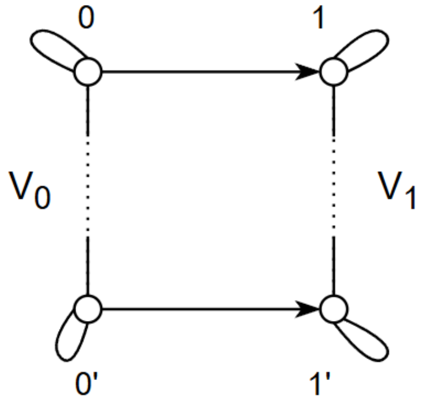

Рисунок 3.5 — Цикл типа C.

Лемма 3.20. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа C, p — его k-местный полиморфмизм. Пусть $s^2, \ldots, s^k$ — вершины $\mathcal{C}$ такие, что для любого $a \in \{0, 1, 0', 1'\}$ верно $p(a, s^2, \ldots, s^k) = a$. Тогда для любой его вершины $v \in V$ верно $p(v, s^2, \ldots, s^k) = v$.

Доказательство. Для вершины $v \in V$ обозначим вектор $(v, s^2, \ldots, s^k)$ как $\overline{s_v}$. Рассмотрим два ориентированных пути Π_0 из $\overline{s_0}$ в $\overline{s_{0'}}$ длины $n_0 - 1$ и Π_1 из $\overline{s_1}$ в $\overline{s_{1'}}$ длины $n_1 - 1$, в которых все рёбра ориентированы как $\leftrightarrow$:

$$\Pi_0 : \overline{s_0} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{s_{0'}},$$
$$\Pi_1 : \overline{s_1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{s_{1'}}.$$

Поскольку $p(\overline{s_0}) = 0$, $p(\overline{s_{0'}}) = 0'$ и все рёбра в Π_0 ориентированы как $\leftrightarrow$, то образы Π_0 на p принимают все значения из V_0 и только их, а так как длина этого пути равна $n_0 - 1$, то каждое значение принимается ровно один раз и для $v \in V_0$ верно $p(\overline{s_v}) = v$. Аналогично, образы элементов Π_1 проходят через все элементы из V_1 и для $v \in V_1$ также верно $p(\overline{s_v}) = v$. $\square$

Лемма 3.21. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа C, содержащий больше трёх вершин, p — его k-местный полиморфизм. Пусть $(a^2, \dots, a^k)$ — вектор из вершин $\mathcal{C}$ такой, что для любой вершины $v \in V$ верно $p(v, a^2, \dots, a^k) = v$. Пусть $(b^2, \dots, b^k)$ — вектор из вершин $\mathcal{C}$, для которого верно $(a^2, \dots, a^k)\ e\ (b^2, \dots, b^k)$, $e \in \{\leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Тогда для любой вершины $v \in V$ также верно $p(v, b^2, \dots, b^k) = v$.

Доказательство. Пусть $e = \rightarrow$ (случаи $e = \leftarrow$ и $e = \leftrightarrow$ рассматриваются аналогично). Для $v \in V$ вектор $(v, a^2, \dots, a^k)$ обозначим как $\overline{a_v}$ и вектор $(v, b^2, \dots, b^k)$ — как $\overline{b_v}$.

Рассмотрим $v = 1$. Поскольку есть рёбра $\overline{a_0} \to \overline{b_1}$ и $\overline{a_1} \to \overline{b_1}$, то по Лемме 3.14 $p(\overline{b_1}) = 1$. Аналогично, $p(\overline{b_{1'}}) = 1'$. Теперь, рассмотрим $p(\overline{b_0})$. Поскольку выполняется $\overline{a_0} \to \overline{b_0} \to \overline{b_1}$ и в $\mathcal{C}$ больше трёх вершин, то $p(\overline{b_0}) \in \{0, 1\}$. Пусть $n_0 > 1$. Тогда существует вершина $w \neq 0$, не смежная 1 и не равная ей, для которой верно $w \to 0$. Тогда верно $\overline{a_w} \to \overline{b_0}$, откуда из $p(\overline{a_w}) = w$ имеем $p(\overline{b_0}) = 0$. Если же $n_0 = 1$, то существуют рёбра $0 \to 1$ и $0 \to 1'$, откуда верно $\overline{b_0} \to \overline{b_1}$ и $\overline{b_0} \to \overline{b_{1'}}$, но в $\mathcal{C}$ больше трёх вершин, значит ребра $1 \to 1'$ не существует. Тогда $p(\overline{b_0}) = 0$. Аналогично доказывается, что $p(\overline{b_{0'}}) = 0'$. Тогда по Лемме 3.20 для любой вершины $v \in V$ верно $p(\overline{b_v}) = v$. □

Следствие 3.21.1. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа C, содержащий больше трёх вершин, p — его k-местный полиморфизм. Пусть $(a^2, \dots, a^k)$ — вектор из вершин $\mathcal{C}$ такой, что для любой вершины $v \in V$ верно $p(v, a^2, \dots, a^k) = v$. Тогда для любого вектора $\overline{w} \in V^k$ верно $p(\overline{w}) = w^1$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ориентированный путь Π из $(a^2, \dots, a^k)$ в $(w^2, \dots, w^k)$. Последовательно применяя к элементам этого пути Лемму 3.21, получаем, что $p(\overline{w}) = w^1$. □

Лемма 3.22. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа C, содержащий больше трёх вершин, $p \in \mathrm{SPol}(\mathcal{C})$. Тогда p существенно унарен.

Доказательство. Пусть полиморфизм p имеет вид $p(x_1, \dots, x_k)$. Рассмотрим вектор $\overline{a} \in V_0^k$. Покажем, что $p(\overline{a}) \in V_0$. Предположим, что $p(\overline{a}) \in V_1$. Возьмём вектор $\overline{b} \in V^k$ такой, что $p(\overline{b}) \in V_0$. Поскольку для любого $v \in V_0$ и любого $w \in V$ существует ориентированный путь вида $v \to \cdots \to w$, то существует ориентированный путь вида $\overline{a} \to \cdots \to \overline{b}$, но ориентированного пути вида

$p(\overline{a}) \to \dots \to p(\overline{b})$ не существует. Получили противоречие. Отсюда, $p(\overline{a}) \in V_0$. Аналогично, для любого $\overline{v} \in V_1^k$ верно $p(\overline{v}) \in V_1$.

Рассмотрим векторы $\overline{0} = (0, \dots, 0)$ и $\overline{1} = (1, \dots, 1)$. Так как $p(\overline{0}) \in V_0$ и $p(\overline{1}) \in V_1$ и верно $\overline{0} \to \overline{1}$, то $p(\overline{0}) = 0, p(\overline{1}) = 1$ или $p(\overline{0}) = 0', p(\overline{1}) = 1'$. Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично). Без ограничения общности по Лемме 3.13 положим $p(0, a^2, \dots, a^k) = 0$ и $p(1, a^2, \dots, a^k) = 1, a^i \in \{0, 1\}$.

Пусть $n_0 \geqslant n_1$ (случай $n_0 \leqslant n_1$ также рассматривается аналогично). Рассмотрим вектор $\overline{b} \in V^k$ такой, что $p(\overline{b}) = 0'$. Для любой вершины $v \in V$ можно выбрать вершину $w \in \{0, 1, 0', 1'\}$ такую, что между ними существует путь из неориентированных рёбер длины $l \leqslant \lfloor \frac{\max(n_0, n_1)}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor$. Это значит, что можно выбрать вектор $\overline{c} \in \{0, 1, 0', 1'\}^k$ такой, что существует путь Π из $\overline{b}$ в $\overline{c}$ длины $l \leqslant \lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor$, в котором все рёбра неориентированные. По Утверждению 3.15 имеем $p(\overline{c}) \in V_0$.

Выберем векторы $\overline{d} \in \{0, 0'\}^k$ и $\overline{e} \in \{1, 1'\}^k$ так, чтобы выполнялось $\overline{d} \to \overline{c} \to \overline{e}$ и $\overline{d} \to \overline{e}$. Так как $p(\overline{d}) \in V_0, p(\overline{e}) \in V_1$, то $p(\overline{d}) \in \{0, 0'\}$ и $p(\overline{e}) \in \{1, 1'\}$, откуда $p(\overline{c}) \in \{0, 0'\}$. При этом если $p(\overline{c}) = 0$, то любой путь из $\overline{b}$ в $\overline{c}$ из неориентированных рёбер должен иметь длину не меньше $n_0 - 1$. Значит, $p(\overline{c}) = 0'$. А это значит, что $p(\overline{d}) = 0'$ и $p(\overline{e}) = 1'$.

Для каждого $i \in \{2, \dots, k\}$ возьмём элемент $s^i \in \{d^i, e^i\}$ так, чтобы s^i лежал в одной неориентированной компоненте с a^i. Для вершины $v \in V$ вектор $(v, s^2, \dots, s^k)$ будем обозначать как $\overline{s_v}$. По 3.14.1 $p(\overline{s_0}) = 0$ и $p(\overline{s_1}) = 1$. По Утверждению 3.15 $p(\overline{s_{0'}}) \in V_0$ и $p(\overline{s_{1'}}) \in V_1$. Покажем, что $p(\overline{s_{0'}}) = 0'$ и $p(\overline{s_{1'}}) = 1'$. Пусть $d^1 = 0$. Тогда $e^1 = 1$ и для $v \in \{0, 1\}$ верно $\overline{d} \to \overline{s_v} \to \overline{e}$, но, так как $p(\overline{d}) = 0'$ и $p(\overline{e}) = 1'$, то это возможно только, когда в $\mathcal{C}$ три вершины — противоречие. Значит, $d^1 = 0'$ и $e^1 = 1'$. А это значит, что для $w \in \{0', 1'\}$ верно $\overline{d} \to \overline{s_w} \to \overline{e}$ и, так как в $\mathcal{C}$ больше трёх вершин, то $p(\overline{s_{0'}}) = 0'$ и $p(\overline{s_{1'}}) = 1'$. Тогда по Лемме 3.20 для любой вершины $v \in V$ верно $p(\overline{s_v}) = v$ и по Следствию 3.21.1 p существенно-унарен.

$\square$

3.3.7 Циклы типа D

Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D. Обозначим множество его вершин как $V, |V| = n > 3$. Обозначим его неориентированные компоненты как V_0, V_1, V_2 так, чтобы ориентированные рёбра выходили из V_0 в V_1, из V_1 в V_2 и из V_0 в V_2. Обозначим вершины V_0, инцидентные ориентированным рёбрам, как 0 и $0'$, вершины V_1 — как $1, 1'$ и вершины V_2 — как $2, 2'$ так, чтобы ориентированные рёбра имели вид $0 \to 2$, $0' \to 1$ и $1' \to 2'$ (см. Рис. 3.6).

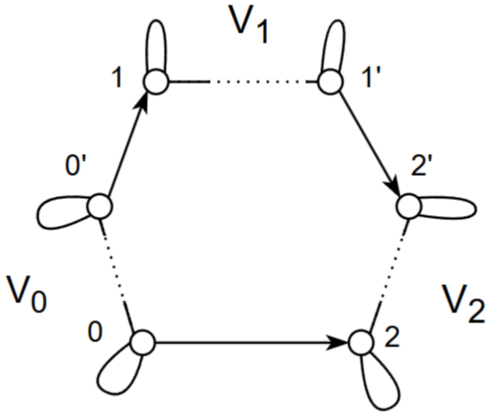

Рисунок 3.6 — Цикл типа D

Лемма 3.23. Пусть $\mathcal{C}$ — смешаннно-ориентированный рефлексивный цикл типа D, p — его k-местный полиморфизм. Пусть $(a^2, \ldots, a^k)$ — вектор из вершин $\mathcal{C}$ такой, что для любой вершины $v \in V$ верно $p(v, a^2, \ldots, a^k) = v$. Пусть $(b^2, \ldots, b^k)$ — вектор из вершин $\mathcal{C}$, у которого есть ребро $(b^2, \ldots, b^k) \to (a^2, \ldots, a^k)$. Тогда для любой вершины $v \in V$ также верно $p(v, b^2, \ldots, b^k) = v$.

Доказательство. Для вершины $v \in V$ обозначим вектор $(v, a^2, \ldots, a^k)$ как $\overline{a_v}$, а вектор $(v, b^2, \ldots, b^k)$ как $\overline{b_v}$.

Пусть $v \notin \{1, 2', 2\}$. Обозначим вершины, смежные v и не равные ей, как w и w'. Так как в $\mathcal{C}$ больше трёх вершин, то единственная вершина, смежная v, w и w' — это сама v. Есть рёбра $v \to w$ и $v \to w'$. Значит, существуют следующие рёбра:

$$\overline{b_v} \to \overline{a_v},$$
$$\overline{b_v} \to \overline{a_w},$$
$$\overline{b_v} \to \overline{a_{w'}},$$

откуда $p(\overline{b_v})$ смежна с $p(\overline{a_v}) = v$, $p(\overline{a_w}) = w$ и $p(\overline{a_{w'}}) = w'$. Значит, $p(\overline{b_v}) = v$.

Теперь, пусть $v = 1$. В этом случае у v две смежные вершины w и $0'$. Тогда есть рёбра:

$$\overline{b_1} \to \overline{a_1},$$
$$\overline{b_1} \to \overline{a_w},$$
$$\overline{b_0'} \to \overline{b_1},$$

откуда $p(\overline{b_1})$ смежна с $p(\overline{a_1}) = 1$, $p(\overline{a_w}) = w$ и $p(\overline{b_{0'}}) = 0'$. Значит, $p(\overline{b_1}) = 1$. Наконец, пусть $v = 2$ (случай $v = 2'$ рассматривается аналогично), тогда у v есть две смежные вершины w и 0. Есть рёбра

$$\overline{b_2} \to \overline{a_2},$$
$$\overline{b_0} \to \overline{b_2},$$

откуда $p(\overline{b_2}) \in \{0, 2\}$. Если $n_2 > 1$, то есть ребро $2 \to w$, откуда есть ребро $\overline{b_2} \to \overline{a_w}$. Если же $n_2 = 1$, то $w = 1'$ и есть ребро $\overline{b_{1'}} \to \overline{b_2}$. Так как $p(\overline{a_w}) = w$ и $p(\overline{b_{1'}}) = 1'$, то $p(\overline{b_2}) = 2$. □

Следствие 3.23.1. Пусть $\mathcal{C}$ — смешаннно-ориентированный рефлексивный цикл типа D, p — его k-местный полиморфизм. Пусть $(a^2, \ldots, a^k)$ — вектор из вершин V_2 такой, что для любой вершины $v \in V$ верно $p(v, a^2, \ldots, a^k) = v$. Тогда для любого вектора $\overline{w} \in V^k$ верно $p(\overline{w}) = w^1$.

Доказательство. Поскольку для любой вершины $h \in V_2$ и любой вершины $h' \in V$ существует ориентированный путь из h' в h вида $h' \to \cdots \to h$, то существует ориентированный путь из $(w^2, \ldots, w^k)$ в $(a^2, \ldots, a^k)$, в котором все рёбра ориентированы как $\to$. Последовательно применяя Лемму 3.23 к элементам подобного пути, получим, что $p(\overline{w}) = w^1$. □

Лемма 3.24. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D, $p \in \mathrm{SPol}(\mathcal{C})$. Тогда p существенно унарен.

Доказательство. Пусть p имеет вид $p(x_1, \ldots, x_k)$. Рассмотрим вектор $\overline{a} \in V_0^k$. Рассмотрим вектор $\overline{b} \in V^k$ такой, что $p(\overline{b}) \in V_0$. Существует ориентированный путь вида $\overline{a} \to \cdots \to \overline{b}$, но ориентированный путь вида $p(\overline{a}) \to \cdots \to p(\overline{b})$ существует только если $p(\overline{a}) \in V_0$. Значит, для любого вектора $\overline{a} \in V_0^k$ верно $p(\overline{a}) \in V_0$. Аналогично, если $p(\overline{a}) \in V_2^k$, то $p(\overline{b}) \in V_2$.

Рассмотрим векторы $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$ и $\overline{2} = (2, \ldots, 2)$. Поскольку $p(\overline{0}) \in V_0$, $p(\overline{2}) \in V_2$ и есть ребро $\overline{0} \to \overline{2}$, то $p(\overline{0}) = 0$, $p(\overline{2}) = 2$. Более того, для любого вектора $\overline{v} \in \{0, 2\}^k$ существуют рёбра $\overline{0} \to \overline{v} \to \overline{2}$, и, так как в $\mathcal{C}$ больше трёх вершин, то $p(\overline{v}) \in \{0, 2\}$.

Возьмём произвольный вектор $\overline{a} \in V_1^k$. Докажем, что $p(\overline{a}) \in V_1$. Пусть $p(\overline{a}) \in V_2$ (случай $p(\overline{a}) \in V_0$ разбирается аналогично). Возьмём вектор $\overline{b} \in V^k$ такой, что $p(\overline{b}) \in V_1$. Для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$ верно $b^i \in V_0$ (иначе существовал бы ориентированный путь вида $\overline{a} \to \cdots \to \overline{b}$, но ориентированного пути вида $p(\overline{a}) \to \cdots \to p(\overline{b})$ не существует). Возьмём вектор $\overline{c} \in \{0, 1, 2\}^k$, который лежит в одной неориентированной компоненте с $\overline{b}$. По Утверждению 3.15 $p(\overline{c}) \in V_1$. Выберем векторы $\overline{d}$ и $\overline{e}$ следующим образом:

$$d^i = \begin{cases} 2, & \text{если } c^i = 0, \\ c^i, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$e^i = \begin{cases} 0', & \text{если } c^i = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Существует ориентированный путь вида $\overline{a} \to \cdots \to \overline{d}$, откуда $p(\overline{d}) \in V_2$. Также, по построению $p(\overline{e}) \in V_0$, $p(\overline{c}) \in V_1$ и есть рёбра $\overline{d} \to \overline{c} \to \overline{e}$, $\overline{d} \to \overline{e}$, что возможно только когда $|V_0| = |V_1| = |V_2| = 1$ — противоречие с тем, что в $\mathcal{C}$ больше трёх вершин. Значит, $p(\overline{a}) \in V_1$.

Рассмотрим векторы $\overline{0'} \in (0', \ldots, 0')$ и $\overline{1} = (1, \ldots, 1)$. Поскольку $p(\overline{0'}) \in V_0, p(\overline{1}) \in V_1$ и есть ребро $\overline{0'} \to \overline{1}$, то $p(\overline{0'}) = 0', p(\overline{1}) = 1$. Без ограничения общности по Лемме 3.13 положим $p(0', a^2, \ldots, a^k) = 0'$ и $p(1, a^2, \ldots, a^k) = 1$, $a^i \in \{0', 1\}$.

Рассмотрим вектор $(b^2, \ldots, b^k) \in \{0, 1'\}^{k-1}$, который лежит в одной неориентированной компоненте с $(a^2, \ldots, a^k)$. По 3.14.1 имеем $p(0', b^2, \ldots, b^k) = 0'$ и $p(1, b^2, \ldots, b^k) = 1$. Возьмём вектор $(c^2, \ldots, c^k) \in V_2^{k-1}$ такой, что есть ребро $(b^2, \ldots, b^k) \to (c^2, \ldots, c^k)$. По Лемме 3.14 верно $p(1, c^2, \ldots, c^k) = 1$. А это значит, что по Утверждению 3.15 для любых $v^1 \in V_1, v^2, \ldots, v^k \in V_2$ верно $p(v^1, \ldots, v^k) \in V_1$.

Рассмотрим ориентированный путь Π длины $n - 1$, который проходит через все векторы вида $(v, 2, \ldots, 2)$:

$$\Pi : (0, 2, \ldots, 2) \to \cdots \to (1, 2, \ldots, 2) \to \cdots \to (2, 2, \ldots, 2).$$

Поскольку $p(0,2,\ldots,2) \in \{0,2\}$ и $p(2,2,\ldots,2) = 2$ и все рёбра пути ориентированы как $\rightarrow$, то образы элементов Π на p либо проходят через все элементы V, либо принимают значения только из V_0 и V_2. Но $p(1,2,\ldots,2) \in V_1$, значит, образы элементов Π проходят значения всех вершин из $\mathcal{C}$. А так как длина этого пути равна $n-1$, то каждый элемент принимается ровно один раз, и для любого $v \in V$ верно $p(v,2,\ldots,2) = v$. А тогда по Следствию 3.23.1 для любого вектора $\overline{w}$ верно $p(\overline{w}) = w^1$. □

3.3.8 Циклы типа D'

Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D'. Обозначим множество его вершин как $V, |V| = n > 3$. Обозначим его неориентированные компоненты как V_0, V_1, V_2 так, чтобы ориентированные рёбра выходили из V_0 в V_1, из V_1 в V_2 и из V_2 в V_0. Обозначим вершины V_0, инцидентные ориентированным рёбрам, как 0 и $0'$, вершины V_1 — как $1, 1'$ и вершины V_2 — как $2, 2'$ так, чтобы ориентированные рёбра имели вид $2 \to 0$, $0' \to 1$ и $1' \to 2'$ (см. Рис. 3.7).

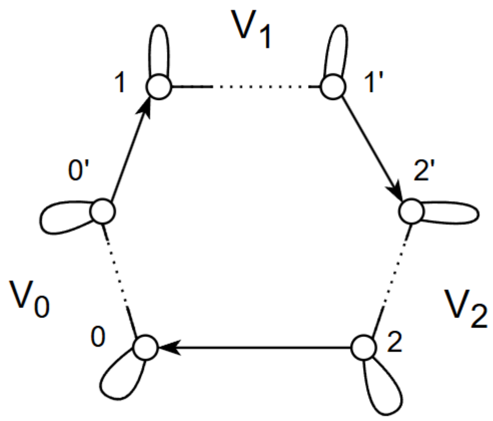

Рисунок 3.7 — Цикл типа D'

Лемма 3.25. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D', содержащий больше трёх вершин, p — его k-местный полиморфизм. Пусть $(a^2,\ldots,a^k) \in V^{k-1}$ — вектор такой, что для каждой вершины $v \in V$ верно $p(v,a^2,\ldots,a^k) = v$. Пусть $(b^2,\ldots,b^k) \in V^{k-1}$ — вектор такой, что существует ребро $(a^2,\ldots,a^k) \to (b^2,\ldots,b^k)$. Тогда для любой вершины $v \in V$ также верно $p(v,b^2,\ldots,b^k) = v$.

Доказательство. Для произвольной вершины $v \in V$ вектор $(v, a^2, \ldots, a^k)$ обозначим как $\overline{a_v}$, а вектор $(v, b^2, \ldots, b^k)$ — как $\overline{b_v}$. Зафиксируем произвольную вершину $v \in V$. Пусть $|V_0| > 1$ (случаи $|V_1| > 1$ и $|V_2| > 1$ разбираются аналогично). Обозначим вершины, смежные с v и не равные ей, как w, w'. Так как в $\mathcal{C}$ больше трёх вершин, то единственная вершина, смежная v, w, w' — это сама v. Верно $\overline{a_v} \to \overline{b_v}$. Если $v \notin \{0', 1', 2\}$, то есть рёбра $\overline{a_w} \to \overline{b_v}$ и $\overline{a_{w'}} \to \overline{b_v}$. Значит, $p(\overline{b_v})$ смежно с $p(\overline{a_w}) = w, p(\overline{a_v}) = v$ и $p(\overline{a_{w'}}) = w'$, то есть $p(\overline{b_v}) = v$.

Теперь, пусть $v = 2$. Положим $w' = 0$. Так как $|V_0| > 1$, то $0 \neq 0'$ и $p(\overline{b_0}) = 0$. Есть ребро $w \to 2$, откуда верно $\overline{a_w} \to \overline{b_2}$. Также верно $\overline{a_2} \to \overline{b_2} \to \overline{b_0}$, откуда $p(\overline{b_2})$ смежно с $w, 2$ и 0, то есть $p(\overline{b_2}) = 2$.

Пусть $v = 1'$. Положим $w' = 2'$. Выше показали, что $p(\overline{b_{2'}}) = 2'$. Есть рёбра $p(\overline{a_w}) \to p(\overline{a_{1'}}) \to p(\overline{b_{2'}})$ и $p(\overline{a_{1'}}) \to p(\overline{b_{1'}})$, откуда $p(\overline{b_{1'}})$ смежна с $w, 2'$ и $1'$, то есть $p(\overline{b_{1'}}) = 1'$.

Наконец, пусть $v = 0'$. Положим $w' = 1$. Аналогично, верно $p(\overline{b_1}) = 1$ и есть рёбра $p(\overline{a_2}) \to p(\overline{b_0}) \to p(\overline{b_1})$ и $p(\overline{a_0}) \to p(\overline{b_0})$ и $p(\overline{a_w}) = w$, $p(\overline{a_0}) = 0$ и $p(\overline{b_1}) = 1$, то есть $p(\overline{b_0}) = 0$. $\square$

Следствие 3.25.1. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D', содержащий больше трёх вершин, p — его k-местный полиморфизм. Пусть $(a^2, \ldots, a^k) \in V^{k-1}$ — вектор такой, что для каждой вершины $v \in V$ верно $p(v, a^2, \ldots, a^k) = v$. Тогда p существенно унарен.

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $(b^2, \ldots, b^k) \in V^{k-1}$. Существует ориентированный путь вида $(a^2, \ldots, a^k) \to (b^2, \ldots, b^k)$. Последовательно применяя к элементам этого пути Лемму 3.25, получаем, что для каждого $v \in V$ верно $p(v, b^2, \ldots, b^k) = p(v, a^2, \ldots, a^k) = v$. Тогда p существенно-унарен. $\square$

Лемма 3.26. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D', $p \in \mathrm{SPol}(\mathcal{C})$. Тогда p существенно унарен.

Доказательство. Пусть полиморфизм имеет вид $p(x_1, \ldots, x_k)$. Возьмём векторы $\overline{a}, \overline{b}$ такие, что $p(\overline{a}) \in V_0$ и $p(\overline{b}) \in V_1$. Рассмотрим произвольный ориентированный путь Π из $\overline{a}$ в $\overline{b}$, в котором все рёбра ориентированы как $\to$. В этом пути найдутся два вектора $\overline{c}$ и $\overline{d}$ такие, что $p(\overline{c}) \in V_0, p(\overline{d}) \in V_1$ и есть ребро $\overline{c} \to \overline{d}$. Это значит, что для некоторых $i \in \{1, \ldots, k\}, j \in Z_3$ верно $c^i \in V_j$, $d^i \in V_{j+1 \pmod 3}$. Без ограничения общности положим $j = 0$ и по Лемме

3.13 $p(0, e^2, \dots, e^k) = 0, p(1, e^2, \dots, e^k) = 1$, $e^i \in \{c^i, d^i\}$. Для $v \in V$ через $\overline{e_v}$ обозначим вектор $(v, e^2, \dots, e^k)$.

Теперь, рассмотрим ориентированный путь Π длины $n-1$, в котором все рёбра ориентированы как $\to$ и который проходит через все векторы вида $\overline{e_v}$:

$$\Pi : \overline{e_1} \to \dots \to \overline{e_{1'}} \to \overline{e_{2'}} \to \dots \to \overline{e_2} \to \overline{e_0} \to \dots \to \overline{e_{0'}}.$$

Поскольку $p(\overline{e_1}) = 1$, $p(\overline{e_{0'}}) = 0'$ и в этом пути нет рёбер, ориентированных как $\leftarrow$, то образы элементов проходят через все элементы V. А так как длина этого пути равна $n-1$, то каждое значение принимается ровно один раз и $p(\overline{e_v}) = v$. Тогда по Следствию 3.25.1 p существенно унарен. $\square$

Итак, благодаря Леммам 3.16, 3.17, 3.19, 3.22, 3.24, 3.26 получили:

Лемма 3.27 ([49])**.** Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно ориентированный рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин. Пусть $p \in \mathrm{SPol}(\mathcal{C})$. Тогда p существенно унарен.

Тогда Леммы 3.9, 3.12, 3.27 доказывают Теорему 3.1, сформулированную в начале данной главы:

Теорема 3.1. ([46]) Пусть $\mathcal{C}$ — рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин, p — сюръективный полиморфизм $\mathcal{C}$. Тогда p существенно-унарен.

Глава 4. Сложность задачи Surj-Hom для рефлексивных циклов

Данная глава посвящена доказательству ключевого результата данной работы, в котором мы классифицируем сложность задачи Surj-Hom для всех рефлексивных циклов, кроме конечного числа циклов длины $4, 5$ и 6:

Теорема 4.1. ([49]) Пусть $\mathcal{C}$ – рефлексивный цикл, не изоморфный ни одному циклу, изображённому на Рис. 4.1. Если $\mathcal{C}$ изоморфен циклу, изображённому на Рис. 4.2, то Surj-Hom($\mathcal{C}$) лежит в P. Иначе Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-полной.

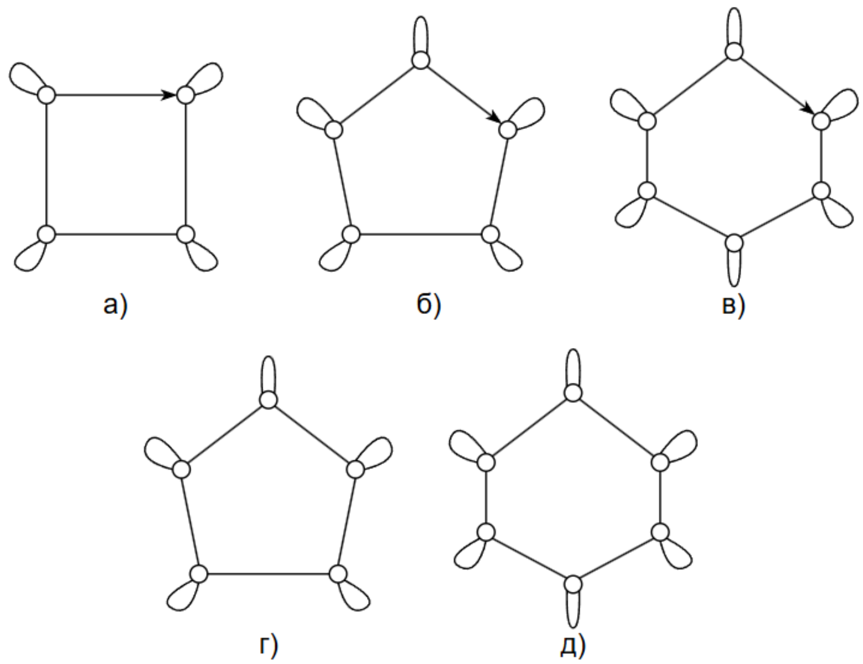

Рисунок 4.1 — Циклы, для которых не определена сложность задачи Surj-Hom.

Глава структурирована следующим образом. В разделе 4.1 разбираются неориентированные рефлексивные циклы. Раздел 4.2 посвящён строго-ориентированным циклам. В разделе 4.3 рассматриваются смешанно-ориентированные циклы. Наконец, в разделе 4.4 подробнее рассматриваются циклы, изображённые на Рис. 4.1. Одним из главных инструментов, который мы будем использовать в данной главе, будет свойство наследования сюръективности, описанное в разделе 2.2. Благодаря Теореме 3.1 для того, чтобы показать NP-полноту задачи Surj-Hom для рефлексивного цикла $\mathcal{C}$ достаточно будет доказать, что полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

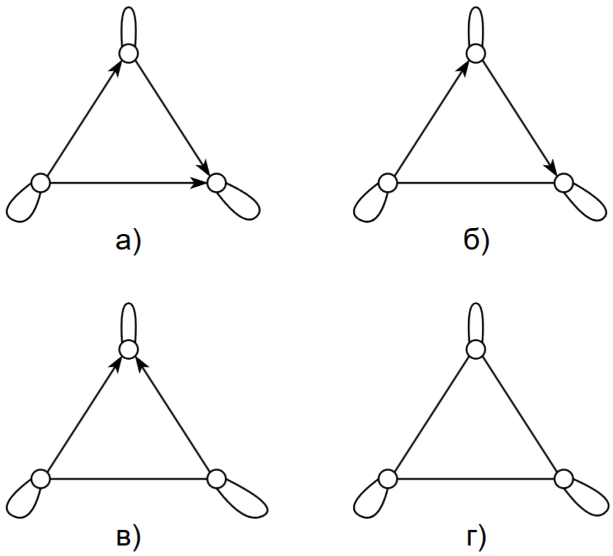

Рисунок 4.2 — Циклы, для которых Surj-Hom решается за полиномиальное время.

4.1 Сложность задачи для неориентированных рефлексивных циклов

Лемма 4.2. Пусть $\mathcal{C}$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n > 6$. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

Доказательство. Возьмём $k \geqslant 1$, $p_1, \ldots, p_k$ — набор совместно сюръективных диагонально согласованных трёхместных полиморфизмов $\mathcal{C}$. Покажем, что среди них найдётся сюръективная функция. Через $\oplus$ и $\ominus$ будем обозначать операции сложения и вычитания по модулю n.

Покажем, что существует такое значение $h \in Z_n$, что каждый полиморфизм принимает на диагонали значения $h, h \oplus 1, \ldots, h \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus c$, где $c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$. Пусть на диагонали принимается значение l. Существуют $i \in \{1, \ldots, k\}, \overline{a} \in Z_n^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = l \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. По Лемме 3.3 существует вектор $\overline{r} = (r,r,r) \in Z_n^3$ такой, что $\rho(\overline{a}, \overline{r}) \leqslant c$. Это значит, что

$$p_i(\overline{r}) \in \{l \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus c, l \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus c \oplus 1, \ldots, l \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus c \ominus 1, l \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus c\}.$$

Тогда по Следствию 3.4.2 функция p_i принимает на диагонали все значения из $l, l \oplus 1, \ldots, l \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus c$ (откуда $h = l$) или все значения из $l \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus c, l \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus c \oplus 1, \ldots, l$ (откуда $h = l \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus c$). Тогда выберем такие векторы $\overline{s} = (s,s,s)$ и $\overline{s'} = (s', s', s')$, что $p_i(\overline{s}) = h$ и $p_i(\overline{s'}) = h \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus c$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Возьмём такие $j \in \{1, \dots, k\}$ и вектор $\overline{b} \in Z_n^3$, что $p_j(\overline{b}) = h \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1$. Покажем, что p_j — сюръективная функция. Положим:

$$V_1 = \{h, h \oplus 1, \dots, h \oplus \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \oplus 1\},$$
$$V_2 = \{h \oplus \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \oplus 1, h \oplus \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \oplus 2, \dots, h \oplus \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \ominus c\}.$$

Заметим, что $|V_1| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ и $|V_2| = n - c$. Так как $p_j(\overline{s}) = h$ и $p_j(\overline{s'}) = h \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus c$, то согласно Утверждению 3.4 функция p_j принимает все значения из V_1 или все значения из V_2.

Пусть p_j принимает все значения из V_1. Так как $|V_1| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$, то по Следствию 3.4.1 p_j сюръективна.

Пусть p_j принимает все значения из V_2. Тогда при $n \neq 8$ верно $n - c > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, и по Следствию 3.4.1 p_j сюръективна. Тогда, пусть $n = 8$. В этом случае на диагонали принимаются два значения h и $h \oplus 1$. Обозначим через d количество диагональных векторов, которые $p_1, \dots, p_k$ отображают в h, а через d' — число диагональных векторов, которые отображаются в $h \oplus 1$. Рассмотрим $i \in \{1, \dots, k\}$, вектор $\overline{a} \in Z_8^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = h \oplus 4$. Заметим, что из определения полиморфизма следует, что для любого $r \in Z_8$ такого, что $p_i(r,r,r) = h$ верно $\rho(\overline{a}, (r,r,r)) \geqslant 4$. При этом для произвольного $r \in Z_8$ верно $\rho(\overline{a}, (r,r,r)) = 4$ тогда и только тогда, когда $r \in \{a^1 \oplus 4, a^2 \oplus 4, a^3 \oplus 4\}$ (иначе $\rho(\overline{a}, (r,r,r)) \leqslant 3$). Это значит, что $d \leqslant 3$. Аналогично, $d' \leqslant 3$. А это значит, что на диагонали принимается не только значения h и $h \oplus 1$. Из Следствия 3.4.2 на диагонали как минимум принимается значение $h \oplus 2$ или $h \ominus 1$. Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично). Рассмотрим $i \in \{1, \dots, k\}$, вектор $\overline{b} \in Z_8^3$ такие, что $p_i(\overline{b}) = h \oplus 5$. По Утверждению 3.4 p_i принимает все $h, h \oplus 1, \dots, h \oplus 5$ или все $h \oplus 5, h \oplus 6, \dots, h \oplus 2$ — как минимум 6 значений, и по Следствию 3.4.2 она сюръективна.

$\square$

Из Леммы 4.2 и Теорем 3.1, 2.4 следует:

Лемма 4.3 ([48])**.** Пусть $\mathcal{C}$ — неориентированный рефлексивный цикл длины $n > 6$. Тогда Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-полной.

4.2 Сложность задачи для строго-ориентированных рефлексивных циклов

Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий $2n$ особых точек. Через $\oplus$ и $\ominus$ в данном разделе будем обозначать операции сложения и вычитания по модулю $2n$. Сложность задачи для строго-ориентированных рефлексивных циклов уже известна [32]. Тем не менее, наш подход является оригинальным и опирается на введённое в Разделе 2.2 свойство наследования сюръективности. В связи с этим мы приведём оригинальную классификацию сложности задачи для всех строго-ориентированных рефлексивных циклов длины $n > 3$, кроме единственного цикла с 6 вершинами, все из которых являются особыми.

4.2.1 Циклы, содержащие больше шести особых точек

Лемма 4.4. Пусть $\mathcal{C}$ – строго-ориентированный рефлексивный цикл, имеющий $2n$ вершин, все из которых являются особыми, $n > 3$. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

Доказательство. Возьмем $k \geqslant 1$, $p_1, \ldots, p_k$ — набор совместно сюръективных диагонально согласованных трёхместных полиморфизмов $\mathcal{C}$. Покажем, что в этом наборе найдется сюръективная функция.

Покажем, что существует значение $h \in Z_{2n}$ такое, что каждый полиморфизм из набора принимает на диагонали значения $h, h \oplus 1, \ldots, h \oplus n \ominus c$, где $c = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Пусть на диагонали принимается значение l. Существуют $i \in \{1, \ldots, k\}$ и вектор $\overline{a} \in Z_{2n}^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = l \oplus n$. Тогда по Лемме 3.11 существует вектор $\overline{r} = (r,r,r) \in Z_{2n}$ такой, что $\rho^{\mathrm{g}}(p_i(\overline{r}), p_i(\overline{a})) \leqslant c$ и $p_i(\overline{r})$ лежит между $l \oplus n \ominus c$ и $l \oplus n \oplus c$. Значит, p_i принимает на диагонали все значения из $l, \ldots, l \oplus n \ominus c$ (откуда $h = l$) или все значения из $l \oplus n \oplus c, \ldots, l$ (откуда $h = l \oplus n \oplus c$). Положим векторы $\overline{s} = (s,s,s)$ и $\overline{s'} = (s', s', s')$ такие, что для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ верно $p_i(\overline{s}) = h$ и $p_i(\overline{s'}) = h \oplus n \ominus c$.

Возьмем $j \in \{1,\dots,k\}$, вектор $\bar{b} \in Z_{2n}$ такие, что $p_j(\bar{b}) = h \oplus n \oplus 1$. Покажем, что p_j – сюръективная функция. Положим $V_1 = V^C_{h,h\oplus n\oplus 1} = \{h, h \oplus 1, \dots, h\oplus n\oplus 1\}$, $V_2 = V^C_{h\oplus n\oplus 1, h\oplus n\ominus c} = \{h\oplus n\oplus 1, h\oplus n\oplus 2, \dots, 2n-1, 0, \dots, h\oplus n\ominus c\}$. Заметим, что $|V_1| = n+2$ и $|V_2| = 2n-c$. Так как $p_j(\bar{s}) = h$ и $p_j(\overline{s'}) = h \oplus n \ominus c$, то по Лемме 3.11 p_j принимает все значения из V_1 или все значения из V_2.

Пусть p_j принимает значения из V_1. Рассмотрим кратчайший ориентированный путь Π из $\bar{s}$ в $\bar{b}$. На этом пути p_j принимает все значения из V_1 или все значения из $h \oplus n \oplus 1, \dots, h$. Из Леммы 3.10 существует ориентированный путь между этими векторами длины не больше n, откуда p_j не может принимать на Π все $n+2$ значений из V_1. Значит, p_j принимает на этом пути все значения между $h \oplus n \oplus 1$ и h, откуда p_j – сюръективная функция.

Пусть p_j принимает значения из V_2. Рассмотрим кратчайший ориентированный путь Π из $\overline{s'}$ и $\bar{b}$. На этом пути p_j принимает все значения между $h\oplus n\ominus c$ и $h \oplus n \oplus 1$ (всего $c+2$ значений) или все значения из V_2. Из Леммы 3.10 длина этого пути не больше n, значит он содержит не больше $n+1$ элементов. Так как при $n \geqslant 4$ верно $n+1 < 2n-c$, то p_i принимает на Π все значения из $h \oplus n \ominus c, \dots, h \oplus n \oplus 1$. Значит, p_j – сюръективная функция. □

Пользуясь доказанным утверждением, покажем, что полиморфизмы всех строго-ориентированных рефлексивных циклов с $2n \geqslant 8$ особыми точками наследуют сюръективность.

Лемма 4.5. Пусть $\mathcal{C}$ – строго-ориентированный рефлексивный цикл, у которого $2n$ особых точек, $n > 3$. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

Доказательство. Возьмем $k \geqslant 1$, $p_1, \dots, p_k$ — набор совместно сюръективных диагонально согласованных трёхместных полиморфизмов $\mathcal{C}$. Покажем, что в этом наборе найдется сюръективная функция. Пронумеруем особые точки $\mathcal{C}$ как $s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$, обходя цикл по направлению возрастания значения вершин, начиная с какой-то особой точки. Возьмем $\mathcal{C}'$ — строго-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий $2n$ вершин, все из которых являются особыми. Каждой особой точке s_i в $\mathcal{C}$ соответствует вершина i в $\mathcal{C}'$ (считаем, что она является особой точкой того же типа). При этом вершины i,j в $\mathcal{C}'$ являются смежными тогда и только тогда, когда s_i и s_j соединены составным ребром. Согласно Лемме 4.4 полиморфизмы $\mathcal{C}'$ наследуют сюръективность.

Построим два набора трёхместных полиморфизмов $p'_1, \ldots, p'_k$ и $p''_1, \ldots, p''_k$ отношения $\mathcal{C}'$ по следующим правилам: для каждых $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $l_1, l_2, l_3 \in Z_{2n}$:

– Если $p_i(s_{l_1}, s_{l_2}, s_{l_3})$ – особая точка s_j, то $p'_i(l_1, l_2, l_3) = p''_i(l_1, l_2, l_3) = j$.

– Если $p_i(s_{l_1}, s_{l_2}, s_{l_3})$ – неособая точка, которая лежит на составном ребре от истока s_{j_1} до стока s_{j_2}, то $p'_i(l_1, l_2, l_3) = j_1$, $p''_i(l_1, l_2, l_3) = j_2$.

Построенные наборы определяются значениями $p_1, \ldots, p_k$ на векторах из особых точках. Значения, соответствующие особым точкам, сохраняются. При этом $p'_1, \ldots, p'_k$ стягивает неособые вершины в истоки против ориентации рёбер, а $p''_1, \ldots, p''_k$ — в стоки по ориентации рёбер.

Покажем, что построенные функции действительно являются полиморфизмами. Для вершин $a, b \in Z_{2n}$ условие $\mathcal{C}'(a, b)$ выполняется тогда и только тогда, когда существует составное ребро между s_a и s_b, в котором все рёбра ориентированы из s_a в s_b. Возьмем векторы $\overline{a}, \overline{b} \in Z_{2n}^3$ такие, что выполняются $\mathcal{C}'(a^1, b^1), \mathcal{C}'(a^2, b^2), \mathcal{C}'(a^3, b^3)$. Тогда существует составное ребро из вектора $\overline{s_a} = (s_{a^1}, s_{a^2}, s_{a^3})$ в вектор $\overline{s_b} = (s_{b^1}, s_{b^2}, s_{b^3})$. Значит, для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ существует составное ребро из $p_i(\overline{s_a})$ в $p_i(\overline{s_b})$. Это значит, что $p_i(\overline{s_a})$ и $p_i(\overline{s_b})$ лежат на одном составном ребре из некоторого истока s_h в некоторый исток s_l. Тогда по построению выполняются условия $\mathcal{C}'(p'_i(\overline{a}), p'_i(\overline{b}))$ и $\mathcal{C}'(p''_i(\overline{a}), p''_i(\overline{b}))$, откуда p' и p'' – полиморфизмы.

Рассмотрим набор $p'_1, \ldots, p'_k$. Заметим, что любая функция p'_i из этого набора принимает значение стока a тогда и только тогда, когда p_i принимает значение s_a. Также заметим, что функции из этого набора принимают все значения на Z_{2n} (поскольку по Лемме 3.11 значения особых точек $\mathcal{C}$ принимаются на векторах из особых точек) и совпадают на диагонали. Значит, этот набор удовлетворяет условиям наследования сюръективности. Так как полиморфизмы $\mathcal{C}'$ наследуют сюръективность, то хотя бы одна из этих функций p'_i является сюръективной. По Теореме 3.1 она существенно унарна, значит, принимает на диагонали все значения, в том числе и значения всех стоков. Отсюда, p_i принимает значения всех своих стоков. А так как все функции $p_1, \ldots, p_k$ совпадают на диагонали, то каждая функция из этого набора принимает на диагонали значения всех стоков.

Аналогично рассматривая набор $p''_1, \ldots, p''_k$, несложно показать, что функции $p_1, \ldots, p_k$ принимают на диагонали значения всех истоков. Отсюда, эти функции принимают на диагонали значения всех особых точек. По Лемме 3.11

эти значения принимаются на векторах из особых точек. Покажем, что все функции из набора являются сюръективными. Возьмем произвольную p_i. Пусть она не принимает значение неособой вершины v, которая лежит между особыми вершинами s_j и $s_{j\oplus 1}$. Возьмем векторы из особых вершин $\overline{s} = (s,s,s), \overline{s'} = (s', s', s')$ такие, что $p_i(\overline{s}) = s_j$, $p_i(\overline{s'}) = s_{j\oplus 1}$. По Лемме 3.10 существует ориентированный путь из $\overline{s}$ в $\overline{s'}$, содержащий не больше n составных рёбер. На этом пути p_i принимает все значения между s_j и $s_{j\oplus 1}$ или все значения между $s_{j\oplus 1}$ и s_j. Но любой путь, который проходит через все значения между $s_{j\oplus 1}$ и s_j будет иметь как минимум $2n-1$ составных рёбер. Значит, p_i принимает на этом пути все значения $s_j, \ldots, s_{j\oplus 1}$, в том числе и v – противоречие. Отсюда, p_i – сюръективная функция.

□

4.2.2 Циклы, содержащие менее четырёх особых точек

Лемма 4.6. Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный рефлексивный цикл, в котором нет особых точек. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

Доказательство. Пусть в $\mathcal{C}$ содержится m вершин. Перенумеруем вершины графа как $0, 1, \ldots, m-1$ по направлению рёбер в графе, начиная с произвольной вершины (см. Рис. 4.3).

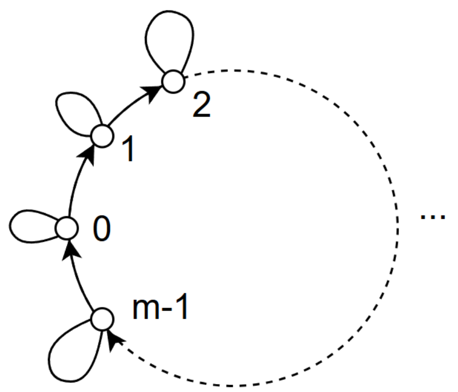

Рисунок 4.3 — Граф C без особых вершин.

Покажем, что если произвольный полиморфизм $p \in \mathrm{Pol}(\mathcal{C})$ принимает как минимум два разных значения, то он сюръективен. Пусть p – k-местная функция и принимает значения $v_1, v_2 \in Z_m$, $v_1 \neq v_2$. Возьмем векторы $\overline{a}, \overline{b} \in Z_m^k$

такие, что $p(\overline{a}) = v_1$ и $p(\overline{b}) = v_2$. Можно построить путь Π из $\overline{a}$ в $\overline{b}$ такой, что все рёбра в этом пути ориентированы в одну сторону от $\overline{a}$ к $\overline{b}$. Так как p – полиморфизм, то образы элементов этого пути на p принимают все значения от v_1 до v_2 (иначе в пути менялась бы ориентация рёбер). Аналогично, можно построить путь Π' из $\overline{b}$ в $\overline{a}$ такой, что все рёбра в этом пути ориентированы в одну сторону от $\overline{b}$ к $\overline{a}$. Образы элементов этого пути на p принимают все значения между v_2 и v_1. Значит, p принимает все значения.

Возьмем $k \geqslant 1$, $p_1, \ldots, p_k$ — набор совместно сюръективных диагонально согласованных трёхместных полиморфизмов $\mathcal{C}$. Покажем, что в этом наборе существует сюръективная функция. Пусть функции этого набора принимают значение $v \in Z_m$ на диагонали. Возьмем элемент $v' \in Z_m$, $v' \neq v$, выберем $i \in \{1, \ldots, m\}, \overline{a} \in Z_m^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = v'$. Тогда p_i принимает два разных значения v, v', и, значит, она сюръективна. □

Лемма 4.7. Пусть $\mathcal{C}$ – строго-ориентированный граф, в котором две особые точки. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

Доказательство. Пусть в $\mathcal{C}$ содержится m вершин. Обозначим s_0 как единственный исток, а s_1 — как единственный сток $\mathcal{C}$ (см. Рис. 4.4).

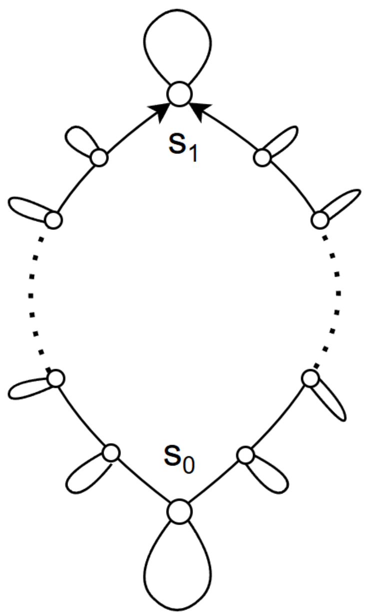

Рисунок 4.4 — Граф C с двумя особыми вершинами.

Возьмем $k \geqslant 1$, $p_1, \ldots, p_k$ — набор совместно сюръективных диагонально согласованных трёхместных полиморфизмов $\mathcal{C}$. По первым двум пунктам Леммы 3.11 $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ для векторов $\overline{s_0} = (s_0, s_0, s_0)$ и $\overline{s_1} = (s_1, s_1, s_1)$ верно $p_i(\overline{s_0}) = s_0$, $p_i(\overline{s_1}) = s_1$. Тогда по четвёртому пункту данной леммы функция p_i

принимает на диагонали все значения из $s_0, \ldots, s_1$ или все значения из $s_1, \ldots, s_0$. Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично).

Возьмем вершину v, лежащую между s_1 и s_0 (если такой вершины нет, то на диагонали принимаются все значения). Возьмем $i \in \{1, \ldots, k\}, \overline{a} \in Z_m^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = v$. Можно построить путь Π из $\overline{s_0}$ в $\overline{s_1}$ через $\overline{a}$ такой, что все рёбра Π ориентированы в одном направлении от $\overline{s_0}$ к $\overline{s_1}$. Образы элементов Π на p_i принимают все значения между s_0 и s_1 или все значения между s_1 и s_0 (иначе в пути менялась бы ориентация рёбер). Так как Π проходит через $\overline{a}$, то p_i принимает все значения между s_1 и s_0. Значит, p_i сюръективен. □

4.2.3 Циклы, содержащие четыре особые точки

В этом разделе мы докажем NP-полноту задачи для строго-ориентированных рефлексивных циклов, содержащих четыре особые точки. Заметим, что не у всех подобных циклов полиморфизмы наследуют сюръективность:

Лемма 4.8. Пусть $\mathcal{C}$ – строго-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий 4 вершины, все из которых являются особыми. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ не наследуют сюръективность в слабой форме.

Доказательство. Обозначим истоки $\mathcal{C}$ как $0, 0'$, а стоки – как $1, 1'$ (см. Рис. 4.5).

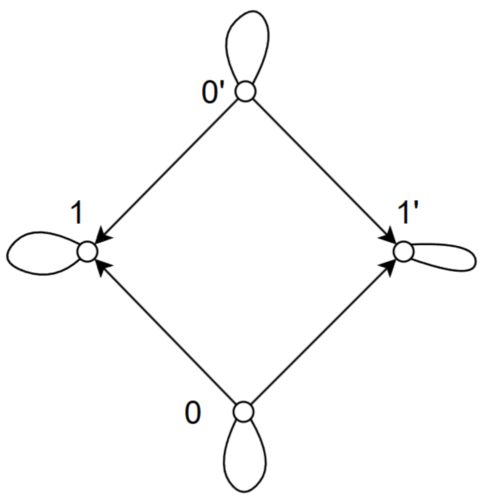

Рисунок 4.5 — Граф $\mathcal{C}$ с четырьмя особыми вершинами.

Рассмотрим трёхместные функции p_1, p_2, устроенные следующим образом:

$$p_1(x,y,z) = \begin{cases} 0', \text{ если } (x,y,z) = (0',0,0), \\ 0, \text{ если } (x,y,z) \in \{0,0'\}^3 \setminus (0',0,0) \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$p_2(x,y,z) = \begin{cases} 1', \text{ если } (x,y,z) = (1',1,1), \\ 1, \text{ если } (x,y,z) \in \{1,1'\}^3 \setminus (1',1,1) \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Эти функции являются полиморфизмами $\mathcal{C}$, диагонально согласованы и совместно сюръективны. Покажем, что они имитируют проекции.

Возьмём произвольное ограничение из формулировки свойства имитирования проекций. Оно будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b})),$$

где $i,j \in \{1,2\}, i \neq j$ и $\overline{a}, \overline{b} \in Z_4^3$ и для любых $h,l \in \{1,2,3\}$ верно $\mathcal{C}(a^h, b^l)$. Пусть вектор $\overline{a}$ диагональный (случай диагональности $\overline{b}$ рассматривается аналогично). Обозначим $\overline{a} = (a,a,a)$. Поскольку p_1 и p_2 совпадают на диагонали, то ограничение $\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b}))$ равносильно $\mathcal{C}(p_j(\overline{a}), p_j(\overline{b}))$, где для каждого $h \in \{1,2,3\}$ верно $\mathcal{C}(a, b^h)$, что выполняется, так как p_1 и p_2 — полиморфизмы $\mathcal{C}$.

Тогда, пусть ни один из $\overline{a}, \overline{b}$ не диагональный и среди компонент $\overline{a}$ есть хотя бы один сток a^i (случай, когда среди b^1, b^2, b^3 есть хоть один исток разбирается аналогично). Тогда из выполнимости $C(a^i, b^l)$ для всех $l \in \{1,2,3\}$ следует, что все b^1, b^2, b^3 равны этому стоку и $\overline{b}$ диагональный. Итак, пусть среди a^1, a^2, a^3 есть оба истока и нет стоков, а среди b^1, b^2, b^3 — оба стока и нет истоков. Тогда по построению $p_i(a^1, a^2, a^3) \in \{0, 0'\}$, а $p_j(b^1, b^2, b^3) \in \{1, 1'\}$. Значит, это условие выполняется.

Итак, мы предъявили набор из двух функций, которые удовлетворяют условиям наследования сюръективности в слабой форме, но ни одна из них не является сюръективной. Отсюда, полиморфизмы $\mathcal{C}$ не наследуют сюръективность в слабой форме.

$\square$

Рассмотрим два множества $A_1 = \{0, 0'\}$ и $A_2 = \{1, 1'\}$. Введём 2-основное отношение $R_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$:

$$R_4(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 = x_2) \vee (y_1 = y_2),$$

где x_1, x_2 определены на A_1, а y_1, y_2 определены на A_2.

Лемма 4.9. Пусть $\mathcal{C}$ – строго-ориентированный рефлексивный цикл, имеющий 4 особые точки. Тогда задача SCSP(R_4) полиномиально сводится к задаче Surj-Hom$(\mathcal{C})$.

Доказательство. Обозначим истоки $\mathcal{C}$ как s_0, s_2, а стоки – как s_1, s_3 (см. Рис. 4.6). Обозначим максимальное количество рёбер между соседними особыми точками $\mathcal{C}$ как l.

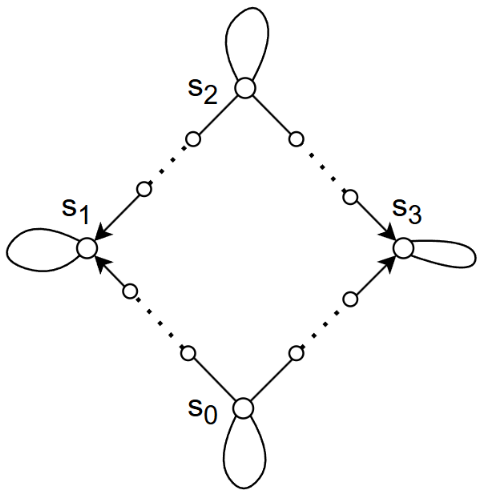

Рисунок 4.6 — Граф $\mathcal{C}$ с четырьмя особыми вершинами.

Рассмотрим произвольный экземпляр задачи SCSP(R_4). Пусть он задается множеством переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$, отображением *sort* : $X \to \{1, 2\}$ таким, что $\mathrm{sort}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = 1$, $\mathrm{sort}(\{y_1, \ldots, y_m\}) = 2$, и формулой $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = R_4(x_{i_1}, x_{i_2}, y_{j_1}, y_{j_2}) \wedge R_4(x_{i_3}, x_{i_4}, y_{j_3}, y_{j_4}) \wedge \cdots \wedge R_4(x_{i_{2h-1}}, x_{i_{2h}}, y_{j_{2h-1}}, y_{j_{2h}}),$$

где $i_1, \ldots, i_{2h} \in \{1, \ldots, n\}$, $j_1, \ldots, j_{2h} \in \{1, \ldots, m\}$. Построим граф $\mathcal{G}$ по следующим правилам:

1. Добавим в граф вершины $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, d_1, \ldots, d_h$.
2. Для каждых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$ добавим в граф l вершин $v_{i,j,1}, \ldots, v_{i,j,l}$ и цепочку рёбер из x_i в y_j через добавленные вершины (см. Рис. 4.7).

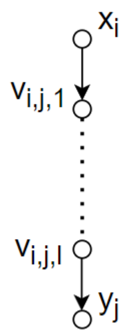

Рисунок 4.7

3. Для каждого $k \in \{1, \ldots, h\}$ добавим в граф $4l$ вершин $w_{k,1}, \ldots, w_{k,4l}$ и цепочки рёбер из $x_{i_{2k-1}}$ в d_k, из $x_{i_{2k}}$ в d_k, из d_k в $y_{j_{2k-1}}$ и из d_k в $y_{j_{2k}}$ через добавленные вершины (см. Рис. 4.8).

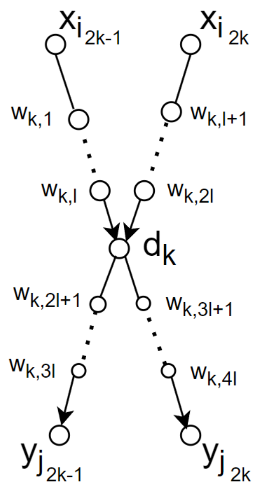

Рисунок 4.8

Заметим, что разные цепочки рёбер в $\mathcal{G}$ могут пересекаться только концами. Покажем, что $\mathcal{G}$ можно сюръективно отобразить на $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}$ имеет сюръективное решение (что продемонстрирует, что SCSP(R_4) полиномиально сводится к SCSP$(\mathcal{C})$).

Пусть существует сюръективный гомоморфизм f из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{C}$. Покажем, что в таком случае вершины $x_1, \ldots, x_n$ отображаются на s_0, s_2, а $y_1, \ldots, y_m$ – на s_1, s_3. Действительно, пусть существует $i \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $f(x_i)$ лежит между s_0 и s_1 и $f(x_i) \neq s_0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Из второго правила построения $\mathcal{G}$ следует, что каждый из $y_1, \ldots, y_m$ также лежит между s_0 и s_1 и не совпадает и s_0. Возьмем вершину v такую, что $f(v) = s_3$. Для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$ существует цепочка рёбер из v в y_j, в которой все рёбра ориентированы от v к y_j. Образы элементов этой цепочки на f также должны образовывать путь, в котором все рёбра ориентированы от $f(v) = s_3$ до $f(y_j)$, что невозможно.

Теперь, для произвольного $k \in \{1, \ldots, h\}$ рассмотрим четвёрку вершин $x_{i_{2k-1}}$, $x_{i_{2k}}$, $y_{j_{2k-1}}$, $y_{j_{2k}}$. Мы уже доказали, что $f(x_{i_{2k-1}}), f(x_{i_{2k}}) \in \{s_0, s_2\}$ и $f(y_{j_{2k-1}}), f(y_{j_{2k}}) \in \{s_1, s_3\}$. По третьему правилу построения существуют цепочки из $x_{i_{2k-1}}$ и $x_{i_{2k}}$ в d_k. Отсюда, если $f(x_{i_{2k-1}}) \neq f(x_{i_{2k}})$, то d_k отображается в сток. Но в этом случае $f(d_k) = f(y_{j_{2k-1}}) = f(y_{j_{2k}})$, так как в $\mathcal{G}$ есть цепочки из d_k в $y_{j_{2k-1}}$ и $y_{j_{2k}}$. Аналогично, если $f(y_{j_{2k-1}}) \neq f(y_{j_{2k}})$, то $f(x_{i_{2k-1}}) = f(x_{i_{2k}})$. Отсюда, верно $f(x_{i_{2k-1}}) = f(x_{i_{2k}}) \vee f(y_{j_{2k-1}}) = f(y_{j_{2k}})$.

Определим отображения $g_1 : \{s_0, s_2\} \to A_1$ и $g_2 : \{s_1, s_3\} \to A_2$ следующим образом: $g_1(s_0) = 0$, $g_1(s_2) = 0'$, $g_2(s_1) = 1$, $g_2(s_3) = 1'$. Тогда $g_1(f(x_1)), \ldots, g_1(f(x_n))$, $g_2(f(y_1)), \ldots, g_2(f(y_m))$ задают решение $\mathcal{I}$. Это решение будет сюръективным: по построению если вершина v принимает значение какой-то особой точки s, то существуют x_i и y_j такие, что $f(v) = f(x_i)$ (если s – исток) или $f(v) = f(y_j)$ (если s – сток). Значит, существует сюръективное решение $\mathcal{I}$.

Пусть теперь существует сюръективное решение $\mathcal{I}$. Пусть оно задается функциями $g_1 : \{x_1, \ldots, x_n\} \to A_1$ и $g_2 : \{y_1, \ldots, y_m\} \to A_2$. Построим отображение $f : V(\mathcal{G}) \to V(\mathcal{C})$ следующим образом:

- $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ положим $f(x_i) = s_0$, если $g_1(x_i) = 0$ и $f(x_i) = s_2$, если $g_1(x_i) = 0'$.
- $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ положим $f(y_j) = s_1$, если $g_2(y_j) = 1$ и $f(y_j) = s_3$, если $g_2(y_j) = 1'$.
- $\forall k \in \{1, \ldots, h\}$ положим $f(d_k) = f(x_{i_{2k}})$, если $f(x_{i_{2k-1}}) = f(x_{i_{2k}})$. Иначе $f(d_k) = f(y_{j_{2k}})$.
- $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$ отобразим вершины цепочки из x_i и y_j в вершины цепочки из $f(x_i)$ в $f(y_j)$.
- $\forall k \in \{1, \ldots, h\}$ отобразим вершины цепочек из $x_{i_{2k-1}}$ в d_k в вершины цепочки из $f(x_{i_{2k-1}})$ в $f(d_k)$, вершины из $x_{i_{2k}}$ и d_k – в вершины из $f(x_{i_{2k}})$ и $f(d_k)$, из d_k в $y_{j_{2k-1}}$ – в вершины из $f(d_k)$ в $f(y_{j_{2k-1}})$ и из d_k в $y_{j_{2k}}$ – в вершины из $f(d_k)$ в $f(y_{j_{2k}})$.

Несложно проверить, что полученное отображение будет гомоморфизмом. Причем, так как $x_1, \ldots, x_n$ отображаются во все истоки и $y_1, \ldots, y_m$ отображаются во все стоки, то все остальные значения принимаются на цепочках между этими вершинами. Значит, f – сюръективный гомоморфизм из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{C}$. $\square$

Теперь докажем, что SCSP(R_4) является NP-полной. Для этого сначала рассмотрим структуру сюръективных полиморфизмов этого отношения.

Лемма 4.10. Пусть $\overline{p}$ – сюръективный полиморфизм R_4. Тогда $\overline{p}$ существенно-унарен.

Доказательство. Пусть $\overline{p}$ имеет вид

$$\overline{p}(x_1, \ldots, x_k) = (p^1(x_1, \ldots, x_k), p^2(x_1, \ldots, x_k)),$$

где $p^1 : A_1^k \to A_1$ и $p^2 : A_2^k \to A_2$, $k \geqslant 1$. Без ограничения общности переупорядочим переменные $\overline{p}$ так, чтобы первая переменная p^1 была существенной. Возьмем элементы $a_1, a_1', a_2, a_3, \ldots, a_k \in A_1$ такие, что:

$$p^1(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = 0,$$
$$p^1(a_1', a_2, a_3, \ldots, a_k) = 0'.$$

Возьмем произвольные наборы $(b_2^1, \ldots, b_k^1)$, $(b_2^2, \ldots, b_k^2) \in \{1, 1'\}^{k-1}$. Для каждого $i \in \{2, \ldots, k\}$ верно $R_4(a_i, a_i, b_i^1, b_i^2)$, значит, по определению полиморфизма для любого $b \in \{1, 1'\}$ имеем:

$$(p^1(a_1, a_2, \ldots, a_k), p^1(a_1', a_2, \ldots, a_k),$$
$$p^2(b, b_2^1, \ldots, b_k^1), p^2(b, b_2^2, \ldots, b_k^2)) \in R_4.$$

Так как $p^1(a_1, a_2, \ldots, a_k) \neq p^1(a_1', a_2, \ldots, a_k)$, то $p^2(1, b_2^1, \ldots, b_k^1) = p^2(1, b_2^2, \ldots, \ldots, b_k^2)$ и $p^2(1', b_2^1, \ldots, b_k^1) = p^2(1', b_2^2, \ldots, b_k^2)$. Значит, функция p^2 существенно унарна. Также, $p^2(1, b_2^1, \ldots, b_k^1) \neq p^2(1', b_2^1, \ldots, b_k^1)$, иначе p^2 не сюръективна. Проводя аналогичные рассуждения для наборов $(1, b_2^1, \ldots, b_k^1)$ и $(1', b_2^1, \ldots, b_k^1)$, получим, что p^1 тоже существенно унарна, причем p^1 и p^2 существенно унарны по одной и той же переменной, откуда $\overline{p}$ существенно унарна. □

Заметим, что полиморфизмы R_4 не наследуют сюръективность: можно взять две трёхместные вектор-функции $\overline{p_1} = (p_1^1, p_1^2)$ и $\overline{p_2} = (p_2^1, p_2^2)$, устроенные следующим образом:

$$p_1^1(x,y,z) = 0,$$
$$p_1^2(x,y,z) = \begin{cases} 1', \text{ если } (x,y,z) = (1',1,1), \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$p_2^1(x,y,z) = \begin{cases} 0', \text{ если } (x,y,z) = (0',0,0), \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$
$$p_2^2(x,y,z) = 1,$$

Несложно проверить, что эти вектор-функции являются полиморфизмами R_4, причём они удовлетворяют условиям наследования сюръективности, но ни один из этих полиморфизмов не является сюръективным. Покажем, что полиморфизмы R_4 наследуют сюръективность в слабой форме.

Лемма 4.11. Полиморфизмы R_4 наследуют сюръективность в слабой форме.

Доказательство. Возьмем $k \geqslant 1$, $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}$ — набор совместно сюръективных диагонально согласованных трёхместных полиморфизмов R_4, который имитирует проекции. Покажем, что хотя бы один полиморфизм из этого набора будет сюръективным. Обозначим через m количество различных значений, которые полиморфизмы из набора принимают на диагонали (это значение общее для всех полиморфизмов решения, поскольку они совпадают на диагонали), $2 \leqslant m \leqslant 4$.

Так как набор имитирует проекции, то для любого отображения $g : \{1,2,3,4\} \to \{1,\ldots,k\}$ и любого набора векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2} \in A_1^3$, $\overline{b_1}, \overline{b_2} \in A_2^3$ такого, что для всех $j_1, \ldots, j_k \in \{1,2,3\}$ верно $R_4(a_1^{j_{g(1)}}, a_2^{j_{g(2)}}, b_1^{j_{g(3)}}, b_2^{j_{g(4)}})$, верно

$$R_4(p^1_{g(1)}(\overline{a_1}), p^1_{g(2)}(\overline{a_2}), p^2_{g(3)}(\overline{b_1}), p^2_{g(4)}(\overline{b_2})).$$

Пусть $m \geqslant 3$, на диагонали принимаются все значения кроме, может быть, a. Возьмем функцию $\overline{p_i}$ из набора, которая принимает значение a. На диагонали она принимает все остальные значения, значит, она сюръективна.

Пусть теперь $m = 2$. Без ограничения общности предположим, что функции из решения принимают на диагонали только значения 0 и 1. Возьмём $i, j \in \{1,\ldots,k\}$, $\overline{a} \in \{0,0'\}^3$, $\overline{b} \in \{1,1'\}^3$ такие, что $p_i^1(\overline{a}) = 0'$ и $p_j^2(\overline{b}) = 1'$. Выберем значения $c^1, c^2, c^3 \in \{0,0'\}$ и $d^1, d^2, d^3 \in \{1,1'\}$ так, чтобы для всех $h, l \in \{1,2,3\}$ было верно $R_4(a^h, c^l, b^h, d^l)$:

$$\overline{a} = (a^1, a^2, a^3)$$
$$\overline{c} = (c^1, c^2, c^3)$$
$$\overline{d} = (d^1, d^2, d^3)$$
$$\overline{b} = (b^1, b^2, b^3)$$

Такие значения всегда можно подобрать по следующему правилу:

– В векторе $\overline{a} = (a^1, a^2, a^3)$ один из элементов отличается от двух других (иначе $\overline{a}$ по предположению отображался бы в 0). Обозначим его индекс как i_1, а значение – как a. Обозначим элемент A_1, отличный от a, как a'.
– В векторе $\overline{b} = (b^1, b^2, b^3)$ один из элементов отличается от двух других. Обозначим его индекс как i_2, а значение – как b. Обозначим элемент A_2, отличный от b, как b'.
– Выберем $c^{i_2} = a'$, а остальные два элемента вектора (c^1, c^2, c^3) равны a.
– Выберем $d^{i_1} = b$, а остальные два элемента вектора (d^1, d^2, d^3) равны b'.

Пример 4.1. Пусть $\overline{a} = (0, 0', 0')$ и $\overline{b} = (1', 1, 1')$. Тогда:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= (0, 0', 0') \\ \overline{c} &= (0, 0', 0) \\ \overline{d} &= (1, 1', 1') \\ \overline{b} &= (1', 1, 1') \end{aligned}$$

Несложно проверить, что в таком случае для любых $h, l \in \{1, 2, 3\}$ будет верно $R_4(a^h, c^l, b^h, d^l)$. Действительно, для того, чтобы это условие нарушилось, нужно $a^h \neq c^l$ и $d^h \neq b^l$. При этом если $a^h \neq c^l$, то по построению $b^h = b^l$, а если $d^h \neq b^l$, то $a^h = c^l$. Построенный набор будет удовлетворять условию имитирования проекций при $g(1) = g(3) = i$ и $g(2) = g(4) = j$. Это значит, что выполняется следующее условие:

$$R_4(p_i^1(\overline{a}), p_j^1(\overline{c}), p_i^2(\overline{b}), p_j^2(\overline{d})),$$

откуда либо $p_j^1(\overline{c}) = p_i^1(\overline{a}) = 0'$, либо $p_i^2(\overline{d}) = p_j^2(\overline{b}) = 1'$. Значит, одна из функций $\overline{p_i}, \overline{p_j}$ принимает 4 значения и является сюръективной. □

Леммы 4.10, 4.11 и Теорема 2.5 доказывают:

Теорема 4.12. Задача SCSP(R_4) является NP-полной.

Откуда по Лемме 4.9:

Следствие 4.12.1. Пусть $\mathcal{C}$ – строго-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий 4 особые точки. Тогда задача Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-полной.

4.2.4 Циклы, содержащие шесть особых точек

В данном разделе мы покажем, что задача Surj-Hom является NP-полной для строго-ориентированных рефлексивных циклов, содержащих 6 особых точек и как минимум 7 вершин.

Рассмотрим строго-ориентированный рефлексивный цикл $\mathcal{C}$ с 6 особыми точками и m вершинами, $m \geqslant 7$. Обозначим максимальное количество рёбер между соседними особыми точками цикла как l, $l > 1$. Через $\xrightarrow{l}$ и $\xleftarrow{l}$ будем обозначать последовательность из l рёбер, ориентированных как $\rightarrow$ и $\leftarrow$ соответственно. Пронумеруем особые вершины $\mathcal{C}$ как $s_0, \ldots, s_5$, обходя граф по направлению возрастания значений вершин, начиная с некоторого истока (см. Рис. 4.9).

Напомним, что для $i,j \in Z_m$ через $V^{\mathcal{C}}_{i,j}$ обозначаем множество вершин $\mathcal{C}$, содержащее i, j и все вершины между ними в обходе по направлению возрастания значений вершин, начиная с i.

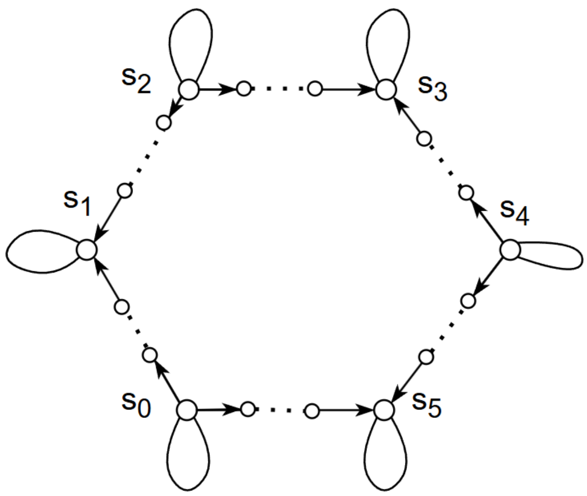

Рисунок 4.9 — Граф C с шестью особыми вершинами.

Лемма 4.13. Пусть $\mathcal{C}$ – строго-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий 6 особых точек и m вершин, $m \geqslant 7$. Тогда полиморфмзмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

Доказательство. Пусть $k \geqslant 1$, возьмем набор трёхместных полиморфизмов $p_1, \ldots, p_k$, который удовлетворяет условиям наследования сюръективности. Для каждой пары истоков s, s' можно выбрать вершину v такую, что в C есть ориентированный путь вида $s \xrightarrow{l} v \xleftarrow{l} s'$. Аналогично, для любой пары стоков s, s'

можно выбрать вершину v' такую, что существует ориентированный путь вида $s \xleftarrow{l} v' \xrightarrow{l} s'$.

Покажем, что если $p_1, \dots, p_k$ принимают на диагонали значения двух различных особых точек одного типа, то в этом наборе найдется сюръективная функция. Пусть функции из набора принимают на диагонали значения двух различных истоков (случай двух стоков рассматривается аналогично). Возьмем истоки s, s' такие, что для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ верно $p_i(\overline{s}) \neq p_i(\overline{s'})$, где $\overline{s} = (s,s,s)$ и $\overline{s'} = (s', s', s')$ (такие векторы существуют по первому пункту Леммы 3.11). Без ограничения общности, считаем что $p_i(\overline{s}) = s_0$, $p_i(\overline{s'}) = s_2$. По четвёртому пункту данной леммы полиморфизмы из набора принимают на диагонали все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_0,s_2}$ или все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_2,s_0}$. Существует ориентированный путь из $\overline{s}$ в $\overline{s'}$ из диагональных элементов, в котором не больше трёх составных рёбер. Любой путь, проходящий через все $V^{\mathcal{C}}_{s_2,s_0}$, будет содержать как минимум 4 составных ребра, значит $p_1, \dots, p_k$ принимают на диагонали значения $V^{\mathcal{C}}_{s_0,s_2}$. Возьмем $j \in \{1, \dots, k\}$, вектор из истоков $\overline{a}$ такие, что $p_j(\overline{a}) = s_4$. Существуют векторы $\overline{v}, \overline{w}$ такие, что существуют пути вида:

$$\Pi : \overline{s} \xrightarrow{l} \overline{v} \xleftarrow{l} \overline{a}$$
$$\Pi' : \overline{s'} \xrightarrow{l} \overline{w} \xleftarrow{l} \overline{a}$$

Функция p_j принимает на Π все значения из $s_4, \dots, s_0$, а на Π' – все значения из $s_2, \dots, s_4$, поскольку любой путь, содержащий все $V^{\mathcal{C}}_{s_0,s_4}$ или все $V^{\mathcal{C}}_{s_4,s_2}$, будет содержать как минимум 4 составных ребра. Значит, p_j – сюръективная функция.

Итак, пусть на диагонали принимаются значения не больше одного истока и не больше одного стока. Рассмотрим произвольный исток s, вектор $\overline{s} = (s,s,s)$. Возьмем исток s_0, функцию p_i и вектор из истоков $\overline{a}$ такие, что $p_i(\overline{a}) = s_0$ (такой вектор существует по второму пункту Леммы 3.11). Можно выбрать вектор $\overline{v}$ такой, что существует путь вида:

$$\overline{s} \xrightarrow{l} \overline{v} \xleftarrow{l} \overline{a}.$$

Отсюда, $p_i(\overline{s}) \in V^C_{s_4,s_2}$. Аналогично рассматривая функцию p_j, на которой принимается s_2, и p_h, на которой принимается s_4, получим, что $p_j(\overline{s}) \in V^C_{s_0,s_4}$ и $p_h(\overline{s}) \in V^C_{s_2,s_0}$. Так как $p_1, \dots, p_k$ совпадают на диагонали, имеем, что для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ и любого истока $s \in \{s_0, s_2, s_4\}$ верно $p_i(s,s,s) \in V^C_{s_4,s_2} \cap V^C_{s_0,s_4} \cap V^C_{s_2,s_0} = \{s_0, s_2, s_4\}$. Аналогично доказывается, что для любого стока $s' \in \{s_1, s_3, s_5\}$ верно $p_i(s', s', s') \in \{s_1, s_3, s_5\}$. Значит, для некоторого $i \in Z_6$

на диагонали принимаются все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_i,s_{i\oplus 1}}$. Без ограничения общности считаем, что на диагонали принимаются $V^{\mathcal{C}}_{s_0,s_1}$, а так как по предположению на диагонали принимается не больше одного истока и не больше одного стока, то каждая функция из $p_1,\dots,p_k$ принимает на каждом диагональном векторе из истоков значение s_0, а на каждом векторе из стоков – значение s_1.

Возьмем векторы $\overline{s_0} = (s_0,s_0,s_0)$ и $\overline{s_1} = (s_1,s_1,s_1)$. Возьмем $h,j \in \{1,\dots,k\}$, $\overline{a}$ – вектор из стоков, $\overline{b}$ – вектор из истоков такие, что $p_h(\overline{a}) = s_3$ и $p_j(\overline{b}) = s_4$. Можно выбрать векторы $\overline{v},\overline{v'}$ такие, что существуют пути вида:

$$\Pi : \overline{s_0} \xrightarrow{l} \overline{v} \xleftarrow{l} \overline{b},$$
$$\Pi' : \overline{s_1} \xleftarrow{l} \overline{v'} \xrightarrow{l} \overline{a}.$$

Так как $p_j(\overline{s_0}) = s_0$ и $p_h(\overline{s_1}) = s_1$, то на пути Π функция p_j принимает все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_4,s_0}$ (поскольку любой путь, проходящий через $V^{\mathcal{C}}_{s_0,s_4}$ будет содержать как минимум 4 составных ребра). Аналогично, на Π' функция p_h принимает все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_1,s_3}$. Значит, p_h принимает все значения между s_0 и s_3, а p_j – все значения между s_4 и s_1.

Пусть между особыми вершинами s_3 и s_4 есть неособая вершина u. Возьмем $m \in \{1,\dots,k\}$, вектор $\overline{c}$ такие, что $p_m(\overline{c}) = u$. Можно выбрать векторы $\overline{v_1},\overline{v_2}$ такие, что существует ориентированный путь из $\overline{s_0}$ в $\overline{c}$ вида:

$$\overline{s_0} \xrightarrow{l} \overline{v_1} \xleftarrow{l} \overline{v_2} \xrightarrow{l} \overline{c}.$$

На этом пути p_m принимает все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_0,u}$ или из $V^{\mathcal{C}}_{u,0}$. При этом любой путь, который проходит через все $V^{\mathcal{C}}_{s_0,u}$, содержит как минимум 4 составных ребра. Значит, p_m принимает на этом пути все значения между u и s_0. Аналогично, можно выбрать векторы $\overline{w_1},\overline{w_2}$ такие, что существует ориентированный путь из $\overline{s_1}$ в $\overline{c}$ вида

$$\overline{s_1} \xleftarrow{l} \overline{w_1} \xrightarrow{l} \overline{w_2} \xleftarrow{l} \overline{c}.$$

На этом пути p_m принимает все значения между s_1 и u. Так как p_m принимает все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_0,s_1}$ на диагонали, то p_m – сюръективная функция.

Пусть теперь между s_3 и s_4 нет неособых вершин. Это значит, что в $\mathcal{C}$ есть ребро вида $s_4 \to s_3$. Заметим, что в таком случае для любого стока s можно выбрать вершины w_1,w_2 такие, что существует ориентированный путь вида

$$s_0 \xrightarrow{l} w_1 \xleftarrow{l} w_2 \to s,$$

где между w_2 и s всего одно ребро. Это значит, что можно выбрать векторы $\overline{v_1}, \overline{v_2}$ такие, что существует ориентированный путь из $\overline{s_0}$ в $\overline{a}$ вида:

$$\overline{s_0} \xrightarrow{l} \overline{v_1} \xleftarrow{l} \overline{v_2} \to \overline{a}, \tag{4.1}$$

где между $\overline{v^2}$ и $\overline{a}$ также всего одно ребро.

Пусть между особыми вершинами s_2 и s_3 существует неособая вершина. На пути (4.1) функция p_h принимает все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_0,s_3}$ или из $V^{\mathcal{C}}_{s_3,s_0}$. При этом если этот путь принимает все $V^{\mathcal{C}}_{s_0,s_3}$, то $p_h(\overline{v_2})$ принимает значение между s_0 и s_2, поскольку фрагмент пути от $\overline{s_0}$ до $\overline{v_2}$ содержит всего два составных ребра. А это значит, что между $p_h(\overline{v_2})$ и s_3 всего одно ребро – противоречие с тем, что между s_2 и s_3 существует неособая вершина. Значит, p_h принимает на этом пути все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_3,s_0}$. Так как p_h принимает все $s_0, \ldots, s_3$, то p_h – сюръективная функция. Аналогично показываем, что если между особыми вершинами s_4 и s_5 есть неособая вершина, то p_j – сюръективная.

Пусть теперь между s_2 и s_5 нет неособых вершин. Тогда они существуют только между s_5 и s_2. В этом случае для любого стока s можно выбрать такие вершины w_1, w_2, что существует путь вида:

$$s_0 \xrightarrow{l} w_1 \leftarrow w_2 \to s,$$

где между w_1 и w_2, w_2 и s по одному ребру. В этом случае можно выбрать векторы $\overline{v_1}$ и $\overline{v_2}$, что существует ориентированный путь из $\overline{s_0}$ в $\overline{a}$ вида:

$$\overline{s_0} \xrightarrow{l} \overline{v_1} \leftarrow \overline{v_2} \to \overline{a}. \tag{4.2}$$

Пусть между особыми вершинами s_1 и s_2 есть неособые вершины. На пути (4.2) p_h принимает значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_3,s_0}$ или из $V^{\mathcal{C}}_{s_0,s_3}$. Но если этот путь принимает все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_0,s_3}$, то он содержит больше одного ребра, ориентированного как $\leftarrow$ (потому что между s_1 и s_2 есть неособые вершины). Значит, p_h принимает все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_3,s_0}$. А так как p_h принимает все значения из $s_0, \ldots, s_3$, то p_h – сюръективная функция. Аналогично показываем, что если между s_5 и s_0 есть неособые вершины, то p_j – сюръективная функция.

Наконец, пусть между s_1 и s_0 нет неособых вершин. Тогда они есть только между s_0 и s_1. Возьмем исток s_2, вектор $\overline{s_2} = (s_2, s_2, s_2)$. Для каждого стока s можно выбрать вершины w_1, w_2, что существует ориентированный путь

$$s_2 \to w_1 \leftarrow w_2 \to s.$$

В этом пути всего три ребра. Тогда можно выбрать векторы $\overline{v_1}, \overline{v_2}$ такие, что существует путь из $\overline{s_2}$ в $\overline{a}$ вида:

$$\overline{s_2} \to \overline{v_1} \leftarrow \overline{v_2} \to \overline{a}. \tag{4.3}$$

Поскольку каждая функция из $p_1, \ldots, p_k$ принимает на диагональных векторах из истоков значение s_0, то $p_h(\overline{s_2}) = s_0$. Между s_0 и s_1 есть неособые вершины, значит, любой путь, принимающий все значения из $s_0, \ldots, s_3$ будет содержать больше трёх рёбер. А это значит, что на пути (4.3) p_h принимает все значения из $V^{\mathcal{C}}_{s_3,s_0}$ и p_h – сюръективная функция.

Итак, мы показали, что как минимум одна функция из набора $p_1, \ldots, p_k$ будет сюръективной. Значит, полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность. $\square$

Итак, с помощью Лемм 4.5, 4.6, 4.7, 4.13, Теорем 3.1, 2.4 и Следствия 4.12.1 мы доказали:

Лемма 4.14 ([47]). Пусть $\mathcal{C}$ — строго-ориентированный рефлексивный цикл содержащий больше трёх вершин и не изоморфный циклу, изображённому на Рис. 4.10. Тогда Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-полной.

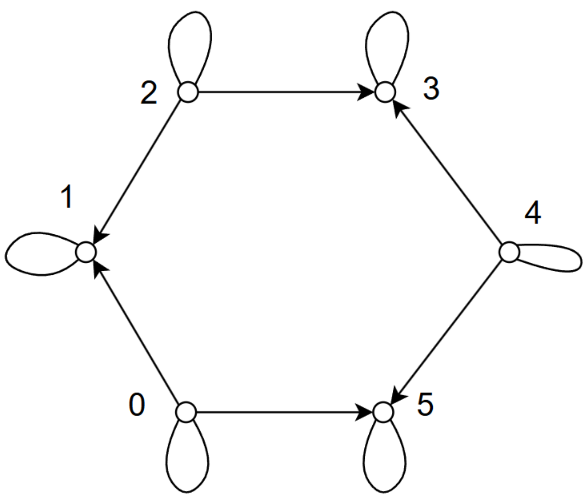

Рисунок 4.10

4.3 Сложность задачи для смешанно-ориентированных рефлексивных циклов

Смешанно-ориентированные циклы мы будем рассматривать с точки зрения их остовных циклов. В разделе 4.3.1 мы покажем, что если для основного цикла $\mathcal{C}^s$ смешанно-ориентированного рефлексивного цикла $\mathcal{C}$ задача Surj-Hom является NP-полной, то и задача Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-полной. В разделе 4.3.2 мы разберём смешанно ориентированные циклы, у которых нет остовного цикла.

4.3.1 Определение сложности с помощью сюръективного интерпретирования

Лемма 4.15. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно ориентированный рефлексивный цикл, содержащий n вершин и m неориентированных компонент, $m \geqslant 3$. Пусть $\mathcal{C}^s$ – остовный цикл для $\mathcal{C}$. Тогда $\mathcal{C}$ сюръективно интерпретирует $\mathcal{C}^s$.

Доказательство. Так как в $\mathcal{C}$ содержится m неориентированных компонент, то $\mathcal{C}^s$ содержит m вершин. Обозначим неориентированные компоненты $\mathcal{C}$ как $V_0, \ldots, V_{m-1}$, обходя цикл по часовой стрелке, начиная с произвольной вершины. Обозначим вершины $\mathcal{C}^s$ как $\{0, \ldots, m-1\}$ так, чтобы каждой вершине $i \in Z_m$ соответствовала компонента V_i. Выберем в каждой компоненте V_i произвольную вершину v_i. Пусть неориентированные компоненты $\mathcal{C}$ содержат не больше k вершин. Рассмотрим отображения $\varphi : Z_n \to Z_m$ и $\psi : Z_m \to Z_n$, которые задаются следующим образом:

$$\varphi(v) = i, \text{если } v \in V_i,$$
$$\psi(i) = v_i$$

и $4k+2$-местное отношение Q, задающееся конъюнктивной формулой над $\mathcal{C}$ (см. Рис. 4.11):

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, y_1, \dots, y_{4k}) = \mathcal{C}(x_1, y_1) \wedge \mathcal{C}(y_1, x_1) \wedge \mathcal{C}(y_2, y_1) \wedge \mathcal{C}(y_1, y_2) \wedge \dots \wedge \\ \wedge \mathcal{C}(y_{2k-1}, y_{2k}) \wedge \mathcal{C}(y_{2k}, y_{2k-1}) \wedge \mathcal{C}(y_{2k}, y_{2k+1}) \wedge \\ \wedge \mathcal{C}(y_{2k+1}, y_{2k+2}) \wedge \mathcal{C}(y_{2k+2}, y_{2k+1}) \wedge \dots \wedge \\ \wedge \mathcal{C}(y_{4k-1}, y_{4k}) \wedge \mathcal{C}(y_{4k}, y_{4k-1}) \wedge \mathcal{C}(y_{4k}, x_2) \wedge \mathcal{C}(x_2, y_{4k}). \end{aligned}$$

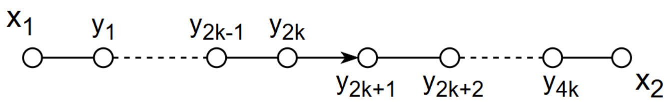

Рисунок 4.11

Проверим, что полученные отображения и формула удовлетворяют условиям из определения сюръективной интерпретации. Так как для каждой вершины $i \in Z_m$ верно $v_i \in V_i$, то $\varphi(\psi(x)) = x$, и первое условие выполняется. По построению в любом наборе $(a_1, a_2, c_1, \dots, c_{4k}) \in Q$ элементы $c_1, \dots, c_{2k}$ лежат в одной неориентированной компоненте с a_1, а $c_{2k+1}, \dots, c_{4k}$ – в одной компоненте с a_2. При этом, так как формула Q содержит ограничение $\mathcal{C}(y_{2k}, y_{2k+1})$, то для любых $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^s$ можно выбрать $c_1, \dots, c_{4k} \in Z_n$ такие, что $(\psi(b_1), \psi(b_2), c_1, \dots, c_{4k}) \in Q$ и $\{\psi(b_1), c_1, \dots, c_{2k}\} = \varphi^{-1}(\{(b_1\}),$ $\{\psi(b_2), c_{2k+1}, \dots, c_{4k}\} = \varphi^{-1}(\{b_2\})$, откуда второе условие выполняется.

Теперь, возьмём произвольный набор $(a_1, a_2, c_1, \dots, c_{4k}) \in Q$. Поскольку $c_1, \dots, c_{2k}$ лежат в одной неориентированной компоненте с a_1, а $c_{2k+1}, \dots, c_{4k}$ – с a_2, то $\{\varphi(a_1)\} = \varphi(\{a_1, c_1, \dots, c_{2k}\})$ и $\{\varphi(a_2)\} = \varphi(\{a_2, c_{2k+1}, \dots, c_{4k}\})$, а так как $(c_{2k}, c_{2k+1}) \in \mathcal{C}$, то $(\varphi(a_1), \varphi(a_2)) \in \mathcal{C}^s$. Значит, третье свойство также выполняется, и $\mathcal{C}$ сюръективно интерпретирует $\mathcal{C}^s$. Тогда, Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) полиномиально сводится к Surj-Hom($\mathcal{C}$). А так как Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) является NP-трудной, то и Surj-Hom($\mathcal{C}$) также является NP-трудной. □

Из данной леммы и Теоремы 2.1 следует:

Следствие 4.15.1. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно ориентированный рефлексивный цикл, содержащий n вершин и m неориентированных компонент, $m \geqslant 3$. Пусть $\mathcal{C}^s$ – остовный цикл для $\mathcal{C}$. Если задача Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) является NP-трудной, то и задача Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-трудной.

4.3.2 Определение сложности с помощью наследования сюръективности

В этом разделе мы рассмотрим смешанно-ориентированные рефлексивные циклы, для которых мы ещё не определили сложность задачи Surj-Hom. Это циклы $\mathcal{C}$, к которым не применимо Следствие 4.15.1. К ним относятся циклы, у которых не существует остовных циклов $\mathcal{C}^s$ или для которых задача Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) решается за полиномиальное время. Будем рассматривать такие графы относительно взаимного расположения в них ориентированных рёбер (см. Рис. 4.12, пунктиром обозначены последовательности из нескольких неориентированных рёбер):

– Будем говорить, что смешанно-ориентированный цикл *имеет тип* A, если он содержит ровно одно ориентированное ребро.
– Цикл *имеет тип* B, если он содержит два ориентированных ребра, две неориентированные компоненты V_0, V_1 и одно ориентированное ребро выходит из V_0 в V_1, а одно – из V_1 в V_0.
– Цикл *имеет тип* C, если он содержит два ориентированных ребра, две неориентированные компоненты V_0, V_1 и все ориентированные рёбра выходят из V_0 в V_1.
– Цикл *имеет тип* D, если он содержит три ориентированных ребра, три неориентированные компоненты V_0, V_1, V_2 и ориентированные рёбра выходят из V_0 в V_1, из V_1 в V_2 и из V_0 в V_2.

Рассмотрим также *циклы типа* E которые содержат шесть ориентированных рёбер, шесть неориентированных компонент $V_0, V_1, \ldots, V_5$ и ориентированные рёбра выходят из V_1 в V_0 и V_2, из V_3 в V_2 и V_4 и из V_5 в V_4 и V_0. Поскольку для их остовного цикла $\mathcal{C}^s$ задача Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) является NP-полной [32], то Следствие 4.15.1 к ним применимо. Тем не менее, поскольку $\mathcal{C}^s$ это единственный строго-ориентированный цикл длины $n > 3$, для которого в разделе 4.2 не была определена сложность задачи Surj-Hom, для цельности изложения мы независимо докажем NP-полноту задачи для них.

Напомним одно важное свойство полиморфизмов смешанно-ориентированных циклов, которое будет использоваться в дальнейшем изложении.

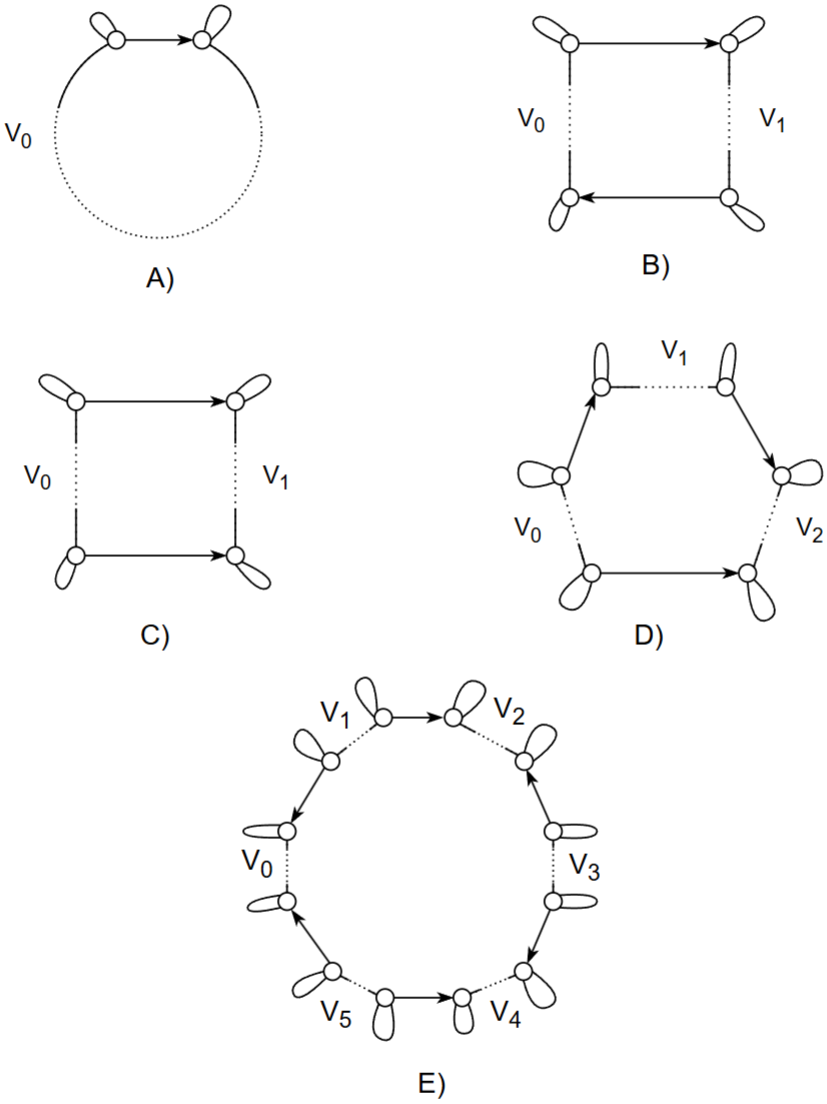

Рисунок 4.12 — Типы циклов, к которым не применимо Следствие 4.15.1.

Утверждение 3.15. Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин, $p \in \mathrm{Pol}(\mathcal{C})$. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — векторы, которые лежат в одной неориентированной компоненте. Тогда $p(\overline{a})$ и $p(\overline{b})$ тоже лежат в одной неориентированной компоненте.

Циклы типа A

Рассмотрим цикл типа A. Этот граф состоит из единственной неориентированной компоненты и содержит одно ориентированное ребро.

Доказательство того, что полиморфизмы циклов типа A наследуют сюръективность, во многом схоже с аналогичным доказательством для неори-

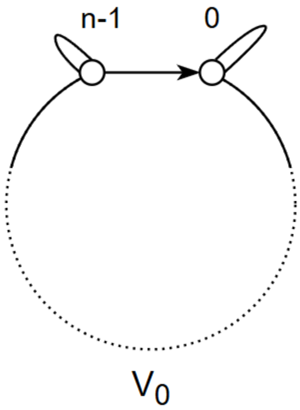

Рисунок 4.13 — Цикл типа A

ентированных циклов, изложенным в разделе 4.1. Тем не менее, наличие ориентированного ребра в циклах, которые мы рассматриваем, не позволяет нам полностью скопировать доказательство. В связи с этим, мы сформулируем следующее утверждение, опираясь на Утверждение 3.2, Лемму 3.3 и Следствие 3.4.1, а то, что полиморфизмы циклов наследуют сюръективность, мы докажем независимо.

Лемма 4.16. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий n вершин, $n > 3$. Тогда:

1. Для любого вектора $\overline{a} \in Z_n^3$ существует вершина $r \in Z_n$ такая, что существует ориентированный путь вида $\overline{a} \to \cdots \to (r,r,r)$ или $(r,r,r) \to \cdots \to \overline{a}$ длины $l \leqslant c, c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$.
2. Пусть p – полиморфизм $\mathcal{C}$, который принимает значения $s, s+1 \pmod{n}, \ldots, s + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \pmod{n}$ и существует вершина r такая, что $p(r, \ldots, r) = s$. Тогда p сюръективен.

Доказательство. Обозначим неориентированный рефлексивный цикл длины n как $\mathcal{C}'$.

1. Пронумеруем вершины $\mathcal{C}$, обходя цикл по часовой стрелке так, чтобы единственное ориентированное ребро имело вид $n-1 \to 0$ (см. Рис. 4.13). Согласно Лемме 3.3, можно выбрать вершину $r \in Z_n$ такую, что в $\mathcal{C}'$ существуют пути из неориентированных рёбер от r до a_1, a_2 и a_3 длины меньшей или равной c. Пусть $r \in \{0, 1, \ldots, c\}$. В этом случае в цикле $\mathcal{C}$ существуют аналогичные ориентированные пути, в которых все рёбра ориентированы как $\leftarrow$. Теперь, пусть $r \in \{c+1, c+2, \ldots, n-1\}$. В этом случае в $\mathcal{C}$ есть пути из r в компоненты $\overline{a}$ длины не более c, в которых все рёбра имеют ориентацию $\to$. Значит, в $\mathcal{C}$ есть

ориентированный путь вида $(r,r,r) \to \dots \to \overline{a}$ или $(r,r,r) \leftarrow \dots \leftarrow \overline{a}$ длины $l \leqslant c$.

2. Возьмём вектор $\overline{a}$ такой, что $p(\overline{a}) = s + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \pmod n$. Обозначим $\overline{r} = (r,r,r)$. Согласно Утверждению 3.2 в $\mathcal{C}'$ существует путь между $\overline{a}$ и $\overline{r}$ из неориентированных рёбер длины $l \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Значит, если $r \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, то в $\mathcal{C}$ есть ориентированный путь вида $\overline{r} \leftarrow \dots \leftarrow \overline{a}$ длины l. А если $r \in \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, \dots, n-1\}$, то в $\mathcal{C}$ есть путь вида $\overline{r} \to \dots \to \overline{a}$ длины l. Образы элементов этого пути проходят через все значения $s + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \pmod n, s + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \pmod n, \dots, s$, поскольку иначе этот путь проходил бы через все $s, s+1 \pmod n, \dots, s + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \pmod n$ и содержал как минимум $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ элементов. Значит, p сюръективен.

□

Лемма 4.17. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий больше шести вершин. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ содержит n вершин, $n > 6$. Без ограничения общности пронумеруем вершины этого графа так, чтобы единственное ориентированное ребро имело вид $n-1 \to 0$. Возьмем $k \geqslant 1$, $p_1, \dots, p_k$ — набор совместно сюръективных диагонально согласованных трёхместных полиморфизмов $\mathcal{C}$. Покажем, что среди них найдётся сюръективная функция. Возьмём $i, j \in \{1, \dots, k\}$, векторы $\overline{a}, \overline{b} \in Z_n^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = n-1$, $p_j(\overline{b}) = 0$.

По первому пункту Леммы 4.16 можно выбрать элемент $r \in Z_n$ такой, что существует ориентированный путь вида $\overline{b} \to \dots \to (r,r,r)$ или $(r,r,r) \to \dots \to \overline{b}$ длины $l \leqslant c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$. Это значит, что $p_j(r,r,r) \in \{0, 1, \dots, c\}$ или $p_j(r,r,r) \in \{n-c, n-c+1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим первый случай. Существует путь Π из вектора (r,r,r) в $\overline{a}$ из неориентированных рёбер. Поскольку полиморфизмы из набора совпадают на диагонали, то $p_i(r,r,r) \in \{0, \dots, c\}$, откуда образы элементов Π принимают на p_i все значения из $\{c, c+1, \dots, n-1\}$. Значит, p_i принимает как минимум $n-c$ значений. Аналогично, пусть $p_j(r,r,r) \in \{n-c, n-c+1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим произвольный путь между (r,r,r) и $\overline{b}$ из неориентированных рёбер. Образы его элементов принимают на p_j все $n-c+1$ значений из $\{0, 1, \dots, n-c\}$. Если $n \neq 8$, то из $n > 6$ имеем $n-c > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, откуда по второму пункту Леммы 4.16 одна из функций p_i и p_j сюръективна.

Теперь, пусть $n = 8$. В этом случае $c = 3$. Пусть существует $s \in Z_8$ такое, что функции из набора принимают на (s,s,s) значение из $\{0, 1, 2\}$. Рассмотрим произвольный путь вида $(s,s,s) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{a}$. Поскольку каждое ребро этого пути ориентировано как $\leftrightarrow$ и $p_i(\overline{a}) = 7$, то образы элементов этого пути принимают на p_i все значения из $\{2, 3, \ldots, 7\}$ – всего 6 значений, откуда по второму пункту Леммы 4.16 функция p_i сюръективна. Аналогично, если существует s такое, что $p_1, \ldots, p_k$ принимают на (s,s,s) значение из $\{5, 6, 7\}$, то p_j – сюръективна.

Тогда, пусть функции из набора принимают на диагонали только значения из $\{3, 4\}$. Заметим, что для произвольных вектора $\overline{v} \in Z_8^3$ и элемента $s \in Z_8$ кратчайший ориентированный путь из (s,s,s) в $\overline{v}$ имеет длину 4 тогда и только тогда, когда $s \in \{v^1 + 4 \pmod 8, v^2 + 4 \pmod 8, v^3 + 4 \pmod 8\}$ (в противном случае длина этого пути будет не больше трёх). Обозначим через d количество диагональных элементов, которые $p_1, \ldots, p_k$ отображают в 3, тогда в 4 отображаются $8 - d$ элементов. Возьмём произвольный элемент $r \in Z_8$ такой, что $p_i(r,r,r) = 3$. При этом, так как $p_i(\overline{a}) = 7$, то любой ориентированный путь из (r,r,r) в $\overline{a}$ должен иметь длину не меньше 4. Это значит, что $d \leqslant 3$. Аналогично рассматривая диагональные элементы, которые отображаются в 4 и $p_j(\overline{b})$, получаем $8 - d \leqslant 3$, то есть $d \geqslant 5$ – противоречие. Значит, на диагонали принимаются не только $\{3, 4\}$ и в наборе найдётся сюръективная функция. $\square$

Циклы типа A длины $4, 5, 6$ более детально рассматриваются в разделе 4.4.

Циклы типа B

Рассмотрим цикл $\mathcal{C}$ типа B. Обозначим множество вершин $\mathcal{C}$ как V. Обозначим неориентированные компоненты цикла как V_0 и V_1 (см. Рис. 4.14).

Лемма 4.18. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа B. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

Доказательство. Возьмем $k \geqslant 1$, $p_1, \ldots, p_k$ — набор совместно сюръективных диагонально согласованных трёхместных полиморфизмов $\mathcal{C}$. Покажем, что среди них найдётся сюръективная функция.

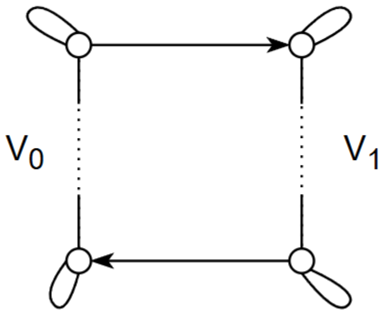

Рисунок 4.14 — Цикл типа B

Пусть существует $a \in V$ такое, что полиморфизмы из набора принимают на векторе $\overline{a} = (a,a,a)$ значение $v \in V_0$ (случай $v \in V_1$ разбирается аналогично). Возьмём $i \in \{1, \dots, k\}$, вектор $\overline{b} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{b}) \in V_1$. Существует ориентированный путь вида:

$$\overline{a} \to \dots \to \overline{b} \to \dots \to \overline{a}.$$

Поскольку на этом пути первый и последний элементы совпадают, все рёбра ориентированы как $\to$ и полиморфизм p_i принимает на нём значения и из V_0, и из V_1, то по определению полиморфизма образы элементов этого пути на p_i проходят через все значения из V, откуда p_i – сюръективная функция. □

Циклы типа C

Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа C. Обозначим множество его вершин как V, $|V| = n$. Обозначим его неориентированные компоненты как V_0 и V_1 так, чтобы ориентированные рёбра выходили из V_0 в V_1. Пусть $|V_0| = n_0$ и $|V_1| = n_1$. Обозначим вершины V_0, инцидентные ориентированным рёбрам, как $0, 0'$ и вершины V_1 – как $1, 1'$ так, чтобы ориентированные рёбра имели вид $0 \to 1$ и $0' \to 1'$ (см. Рис 4.15).

Лемма 4.19. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа C, содержащий больше трёх вершин. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

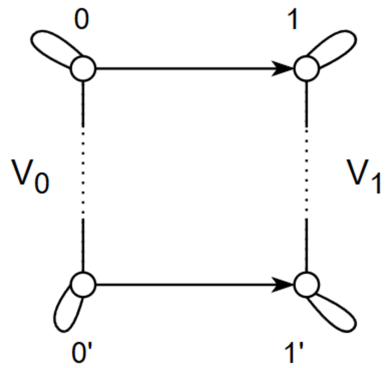

Рисунок 4.15 — Цикл типа C.

Доказательство. Возьмем $k \geqslant 1$, $p_1, \ldots, p_k$ — набор совместно сюръективных диагонально согласованных трёхместных полиморфизмов $\mathcal{C}$. Покажем, что среди них найдётся сюръективная функция.

Рассмотрим векторы $\overline{0} = (0,0,0)$ и $\overline{1} = (1,1,1)$. Рассмотрим $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) \in V_0$. Поскольку существует ориентированный путь вида $\overline{0} \to \cdots \to \overline{a}$, то $p_i(\overline{0}) \in V_0$ (иначе пути вида $p(\overline{0}) \to \cdots \to p(\overline{a})$ не существовало бы), а так как полиморфизмы из набора совпадают на диагонали, то для каждого $j \in \{1, \ldots, k\}$ верно $p_j(\overline{0}) \in V_0$. Аналогично, $p_j(\overline{1}) \in V_1$. А так как в $\mathcal{C}$ есть ребро $\overline{0} \to \overline{1}$ и нет ребра $\overline{0} \leftarrow \overline{1}$, то либо $p_j(\overline{0}) = 0$ и $p_j(\overline{1}) = 1$, либо $p_j(\overline{0}) = 0'$ и $p_j(\overline{1}) = 1'$. Без ограничения общности положим $p_j(\overline{0}) = 0$ и $p_j(\overline{1}) = 1$.

Пусть $n_0 \geqslant n_1$ (случай $n_1 \geqslant n_0$ рассматривается аналогично). Возьмём $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = 0'$. Покажем, что p_i – сюръективная функция. Несложно заметить, что для каждой вершины v можно выбрать вершину $w \in \{0, 1, 0', 1'\}$ такую, что между v и w существует путь из неориентированных рёбер, содержащий не больше $\lfloor \frac{\max(n_0,n_1)-1}{2} \rfloor$ рёбер. Это значит, что можно выбрать вектор $\overline{b} \in \{0, 1, 0', 1'\}^3$ такой, что существует ориентированный путь Π вида $\overline{a} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{b}$ длины $l \leqslant \lfloor \frac{\max(n_0,n_1)-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n_0-1}{2} \rfloor$. По Утверждению 3.15 $p_i(\overline{b}) \in V_0$. Тогда можно выбрать векторы $\overline{c} \in V_0^3, \overline{d} \in V_1^3$ такие, что существуют рёбра $\overline{c} \to \overline{d}$ и $\overline{c} \to \overline{b} \to \overline{d}$. Из того, что $p_i(\overline{0}) = 0$, $p_i(\overline{1}) = 1$, по Утверждению 3.15 имеем $p_i(\overline{c}) \in \{0, 0'\}$, $p_i(\overline{d}) \in \{1, 1'\}$, откуда $p_i(\overline{b}) \in \{0, 0'\}$. Но любой путь из 0 в $0'$ из неориентированных рёбер должен иметь длину не меньше $n - 1$, откуда $p_i(\overline{b}) = 0'$ и $p_i(\overline{c}) = 0', p_i(\overline{d}) = 1'$.

Существуют путь Π_1 из векторов V_0^3 вида $\overline{0} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{c}$ и путь Π_2 из векторов V_1^3 вида $\overline{1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{d}$. Поскольку $p_i(\overline{0}) = 0$, $p_i(\overline{c}) = 0'$ и все рёбра Π_1 ориентированы как $\leftrightarrow$, то образы элементов Π_1 на p_i принимают все значения из V_0. Аналогично, элементы Π_2 принимают на p_i все значения из V_1. Значит, p_i – сюръективная функция. $\square$

Циклы типа D

Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D. Обозначим множество его вершин как $V, |V| = n > 3$. Обозначим его неориентированные компоненты как V_0, V_1, V_2 так, чтобы ориентированные рёбра выходили из V_0 в V_1, из V_1 в V_2 и из V_0 в V_2 (см. Рис. 4.16).

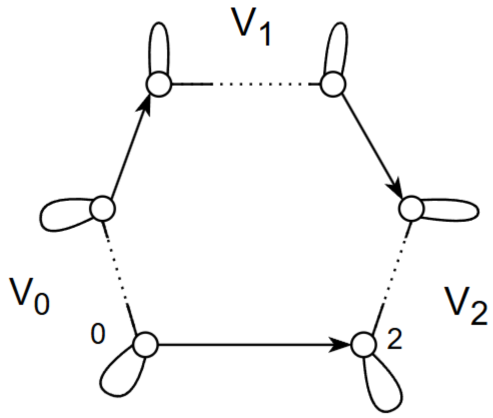

Рисунок 4.16 — Цикл типа D

Лемма 4.20. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

Доказательство. Возьмем $k \geqslant 1$, $p_1, \ldots, p_k$ — набор совместно сюръективных диагонально согласованных трёхместных полиморфизмов $\mathcal{C}$. Докажем, что среди них найдётся сюръективная функция.

Обозначим вершины, инцидентные ориентированному ребру из V_0 в V_2, как 0 и 2 (см. Рис. 4.16). Положим $\overline{0} = (0{,}0{,}0)$, $\overline{2} = (2{,}2{,}2)$. Возьмём $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) \in V_0$. Существует ориентированный путь вида $\overline{0} \to \cdots \to \overline{a}$, откуда $p_i(\overline{0}) \in V_0$ (иначе существовал бы ориентированный путь из элемента V_1 или V_2 в элемент V_0, в котором все рёбра ориентированы как $\to$, что невозможно). А так как полиморфизмы совпадают на диагонали, то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ верно $p_j(\overline{0}) \in V_0$. Аналогично, $p_j(\overline{2}) \in V_2$. А так как существует ребро $\overline{0} \to \overline{2}$, то $p_j(\overline{0}) = 0$ и $p_j(\overline{2}) = 2$.

Рассмотрим $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{b} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{b}) \in V_1$. Существует ориентированный путь вида:

$$\overline{0} \to \cdots \to \overline{b} \to \cdots \to \overline{2}.$$

Поскольку $p_i(\overline{0}) = 0$, $p_i(\overline{2}) = 2$ и все рёбра пути ориентированы как $\to$, то образы элементов этого пути принимают на p_i либо только значения из V_0 и V_2, либо все значения из V. А так как $p_i(\overline{b}) \in V_1$, то p_i принимает все значения из V, то есть она сюръективна. □

Заметим, что так как смешанно-ориентированные графы по определению содержат неориентированные рёбра, то смешанно-ориентированные циклы типа D содержат не меньше четырёх вершин.

Циклы типа E

Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл $\mathcal{C}$ типа E. Обозначим неориентированные компоненты $\mathcal{C}$ как $V_0, V_1, \ldots, V_5$ так, чтобы ориентированные рёбра выходили из V_1 в V_0, V_2, из V_3 в V_2, V_4 и из V_5 в V_4, V_0. Обозначим множество вершин $\mathcal{C}$ как $V, |V| = n > 6$. Обозначим вершины, инцидентные ориентированным рёбрам $\mathcal{C}$, как $0, 1, \ldots, 5, 0', 1', \ldots, 5'$ образом, изображённым на Рис. 4.17. Заметим, что для некоторых $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ неориентированные компоненты V_i могут содержать всего одну вершину. В этом случае вершины i и i' будут совпадать. При этом как минимум одна неориентированная компонента всегда будет содержать больше одной вершины. Множество вершин $V_0 \cup V_2 \cup V_4$ будем обозначать как V_{in}, а множество $V_1 \cup V_3 \cup V_5$ – как V_{out}.

Полиморфизмы циклов типа E по структуре похожи на полиморфизмы строго-ориентированных циклов с шестью особыми точками, которые рассматриваются в разделе 3.2.1. В частности, следующая лемма формулируется аналогично Лемме 3.11:

Лемма 4.21. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа E, p – его трёхместный полиморфизм.

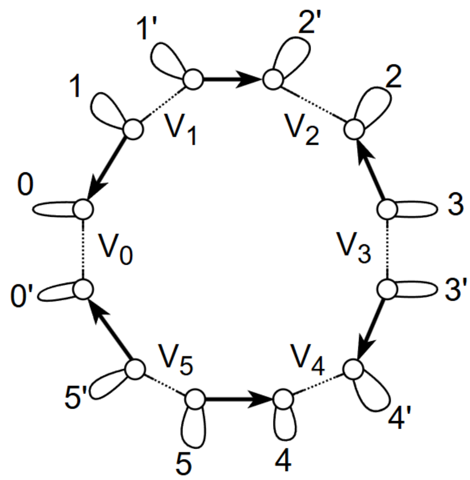

Рисунок 4.17 — Цикл типа E.

1. Пусть $\overline{a} \in V^3$ – вектор такой, что $p(\overline{a}) \in V_i$, $i \in \{0, 2, 4\}$. Тогда существует вектор $\overline{b} \in V^3_{in}$ такой, что $p(\overline{b}) \in V_i$.
2. Пусть $\overline{a} \in V^3$ – вектор такой, что $p(\overline{a}) \in V_i$, $i \in \{1, 3, 5\}$. Тогда существует вектор $\overline{b} \in V^3_{out}$ такой, что $p(\overline{b}) \in V_i$.
3. Для любого вектора $\overline{a} \in V^3$ существует вершина $w \in V$ такая, что есть ориентированный путь из (w,w,w) в $\overline{a}$, содержащий не более двух ориентированных рёбер.
4. Пусть $i, j \in Z_6$, $a, b \in V$ такие, что $p(a, \dots, a) \in V_i$, $p(b, \dots, b) \in V_j$. Тогда полиморфизм p принимает на диагонали значения из всех $V_i, V_{i+1 \pmod 6}, \dots, V_j$ или из всех $V_j, V_{j+1 \pmod 6}, \dots, V_i$.

Доказательство.

1. Выберем вектор $\overline{b} \in V^3_{in}$ такой, что существует ориентированный путь вида $\overline{b} \leftarrow \cdots \leftarrow \overline{a}$. Пусть $p(\overline{b}) \in V_{out}$. Тогда образы этого пути составляют ориентированный путь из элемента V_{out} в элемент V_{in}, в котором все рёбра ориентированы как $\leftarrow$, что невозможно. Значит, $p(\overline{b}) \in V_{in}$.

2. Доказывается аналогично 1.

3. Поскольку вектор $\overline{a}$ трёхместный, то существует $i \in \{0, \dots, 5\}$ такое, что ни одна из a^1, a^2, a^3 не лежит в V_i. Положим $i' = i + 3 \pmod 6$. Пусть $V_{i'} \subseteq V_{in}$ (случай $V_i' \subseteq V_{out}$ разбирается аналогично). Возьмём произвольную $w \in V_{i'}$ Тогда для каждой $j \in \{1,2,3\}$ можно выбрать вершины v_1, v_2, v_3, v_4 такие, что существует ориентированный путь из w в a^j, содержащий не более двух ориентированный рёбер, следующего вида:

$$w \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_1 \leftarrow v_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_3 \rightarrow v_4 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow a^j.$$

А это значит, что в $\mathcal{C}$ есть ориентированный путь из (r,r,r) в $\overline{a}$, который содержит не больше двух ориентированных рёбер.

4. Существует ориентированный путь из (a,a,a) в (b,b,b), состоящий только из диагональных элементов. Образы членов этого пути принимают на p значения из всех $V_i, V_{i+1 \pmod 6}, \ldots, V_j$ или из всех $V_j, V_{j+1 \pmod 6}, \ldots, V_i$. $\square$

Лемма 4.22. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа E, p – его полиморфизм. Пусть p принимает значения как минимум из пяти различных неориентированных компонент. Тогда p сюръективен.

Доказательство. Сперва покажем, что если p принимает значения из V_0, V_2 и V_4, то он принимает все значения из V_{out}. Пусть p не принимает значение $v \in V_1$ (случаи $v \in V_3$ и $v \in V_5$ разбираются аналогично). Согласно первому пункту Леммы 4.21 существуют векторы $\overline{a}, \overline{b} \in V_{in}^3$ такие, что $p(\overline{a}) \in V_0$ и $p(\overline{b}) \in V_2$. Можно выбрать векторы $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4} \in V^3$ такие, что существует ориентированный путь из $\overline{a}$ в $\overline{b}$, содержащий всего два ориентированных ребра вида:

$$\overline{a} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_1} \leftarrow \overline{v_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_3} \rightarrow \overline{v_4} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{b}.$$

Образы элементов этого пути принимают на p все значения из V_1, поскольку любой путь из элемента V_0 в элемент V_2, не проходящий через V_1, будет содержать как минимум 4 ориентированных ребра.

Аналогично показывается, что если p принимет значения из V_1, V_3 и V_5, то он принимает все значения из V_{in}. Значит, если полиморфизм $\mathcal{C}$ принимает значения из всех шести неориентированных компонент, то он сюръективен. Теперь, пусть p принимает значения из всех неориентированных компонент кроме, может быть, $V_i \subseteq V_{out}$ (случай $V_i \in V_{in}$ рассматривается аналогично). Выше показали, что тогда эта функция принимает все значения из V_{out}, откуда p сюръективна.

$\square$

Лемма 4.23. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа E, $p_1, \ldots, p_k$ – набор его полиморфизмов, удовлетворяющий условиям наследования сюръективности. Тогда:

1. $p_1, \ldots, p_k$ принимают на диагонали значения как минимум из двух неориентированных компонент.

2. Если на диагонали принимаются значения хотя бы из трёх неориентированных компонент, то среди $p_1, \ldots, p_k$ найдётся сюръективная функция.

Доказательство.

1. Пусть на диагонали принимается значение s. Без ограничения общности положим $s \in V_0$. Рассмотрим $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) \in V_3$. Согласно третьему пункту Леммы 4.21 существует элемент w такой, что есть ориентированный путь из (w,w,w) до $\overline{a}$, который содержит не больше двух ориентированных рёбер. А это значит, что $p_i(w,w,w) \notin V_0$. Так как полиморфизмы совпадают на диагонали, то все $p_1, \ldots, p_k$ принимают на диагонали как минимум одно значение из V_0 и одно не из V_0.

2. Без ограничения общности положим, что на диагонали принимается значение из V_0. В этом случае по четвёртому пункту Леммы 4.21 на диагонали также принимаются значения из V_1 и V_2, из V_5 и V_4 или из V_1 и V_5. Рассмотрим первый вариант (остальные доказываются аналогично). Рассмотрим $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) \in V_4$. Рассмотрим произвольный элемент $s \in V$ такой, что $p_i(s,s,s) \in V_1$. Рассмотрим произвольный ориентированный путь из (s,s,s) в $\overline{a}$. Образы элементов этого пути принимают на p значения из V_3 или V_5. Значит, p_i принимает значения из как минимум пяти неориентированных компонент и по Лемме 4.22 она сюръективна. $\square$

Лемма 4.24. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа E. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.

Доказательство. Рассмотрим набор трёхместных полиморфизмов $p_1, \ldots, p_k$, удовлетворяющий условиям наследования сюръективности. Докажем, что среди них найдётся сюръективная функция.

По второму пункту Леммы 4.23 если $p_1, \ldots, p_k$ принимают на диагонали значения из трёх неориентированных компонент, то один из этих полиморфизмов будет сюръективным. Тогда, по первому пункту данной леммы достаточно рассмотреть случай, когда эти функции принимают на диагонали значения только из двух неориентированных компонент. Согласно четвёртому пункту Леммы 4.21 эти компоненты смежны. Без ограничения общности положим, что $p_1, \ldots, p_k$ принимают на диагонали только значения из V_0, V_1.

Рассмотрим $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) \in V_3$. По второму пункту Леммы 4.21 существует вектор $\overline{a'} \in V^3_{out}$ такой, что $p_i(\overline{a'}) \in V_3$.

Возьмём вершину $s \in V$ такую, что $p_i(s,s,s) \in V_0$. Любой ориентированный путь из (s,s,s) в $\overline{a'}$ должен содержать не меньше трёх ориентированных рёбер. Поскольку для любых двух векторов $\overline{v}, \overline{w} \in V_{out}^3$ существует ориентированный путь из $\overline{v}$ в $\overline{w}$, содержащий не более двух ориентированных рёбер, то из $\overline{a'} \in V_{out}^3$ следует $(s,s,s) \notin V_{out}$, то есть $s \in V_{in}$. Это значит, что для любых $j \in \{1,\ldots,k\}$ и $s' \in V_{out}$ верно $p_j(s',s',s') \in V_1$. Аналогично рассматривая $h \in \{1,\ldots,k\}$ и вектор $\overline{b} \in V^3$ такие, что $p_h(\overline{b}) \in V_4$, показываем, что для всех $s' \in V_{in}$ верно $p_j(s',s',s') \in V_0$. Более того, отсюда по Утверждению 3.15 для любого $j \in Z_6$ и любых $\overline{v} \in V_j^3, i \in \{1,\ldots k\}$ верно $p_i(\overline{v}) \in V_0$, если $j \in \{0,2,4\}$ и $p_i(\overline{v}) \in V_1$, если $j \in \{1,3,5\}$.

Пусть $|V_3| > 1$ (случай $|V_4| > 1$ рассматривается аналогично). Рассмотрим $i \in \{1,\ldots,k\}$, $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = 3'$. Существует вектор $\overline{a'} \in V_{in} \cup V_1 \cup V_5 \cup \{3,3'\}$ такой, что есть путь из $\overline{a}$ в $\overline{a'}$ из неориентированных рёбер длины $l \leqslant \lfloor \frac{|V_3|}{2} \rfloor$. По Утверждению 3.15 $p_i(\overline{a'}) \in V_3$. Можно выбрать векторы $\overline{b} \in \{0,0'\}^3$, $\overline{v_1},\ldots\overline{v_4} \in V^3$ такие, что существует ориентированный путь Π с тремя ориентированными рёбрами следующего вида:

$$\Pi : \overline{b} \leftarrow \overline{v_1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_2} \rightarrow \overline{v_3} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_4} \leftarrow \overline{a'}.$$

Так как $p_i(\overline{b}) \in V_0$ и путь до $\overline{v_4}$ содержит всего два ориентированных ребра, то $p_i(\overline{v_4}) \notin V_3$, а так как $p_i(\overline{a'}) \in V_3$, то $p_i(\overline{a'}) \in \{3,3'\}$. Поскольку $p_i(\overline{a}) = 3'$ и пути из неориентированных рёбер из $3'$ в 3 длины $l \leqslant \lfloor \frac{|V_3|}{2} \rfloor$ не существует, то $p_i(\overline{a'}) = 3'$. А так как $|V_3| > 1$, то это значит, что $p_i(\overline{v_4}) \in V_4$ и, значит, $p_i(\overline{v_1}) \in V_5$. Получили, что p_i принимает значения из всех неориентированных компонент кроме, может быть, V_2. Значит, по Лемме 4.22 эта функция сюръективна.

Теперь, пусть $|V_3| = |V_4| = 1$, тогда положим $V_3 = \{3\}$ и $V_4 = \{4\}$. В этом случае в $\mathcal{C}$ есть рёбра $2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow 5$. Пусть $|V_5| > 1$ (случай $|V_2| > 1$ разбирается аналогично). Возьмём $i \in \{1,\ldots,k\}$, $\overline{a} \in V_{in}^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = 4$. Можно выбрать векторы $\overline{b} \in \{1,1'\}^3$, $\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3} \in V^3$ такие, что существует ориентированный путь Π с тремя ориентированными рёбрами следующего вида:

$$\Pi : \overline{b} \rightarrow \overline{v_1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_2} \leftarrow \overline{v_3} \rightarrow \overline{a}.$$

Заметим, что так как путь до $\overline{v_3}$ содержит ровно два ориентированных ребра, $p_i(\overline{b}) \in V_1$ и есть ребро $\overline{v_3} \rightarrow \overline{a}$, то $p_i(\overline{v_3}) \in V_3 \cup V_5$. Но если $p_i(\overline{v_3}) \in V_5$, то по построению Π имеем $p_i(\overline{v_2}) \in V_0$. Но тогда из существования рёбер $\overline{v_2} \leftarrow \overline{v_3} \rightarrow \overline{a}$ следует $|V_5| = 1$ – противоречие. Значит, $p_i(\overline{v_3}) \in V_3$. А это значит, что

$p_i(\overline{v_2}) \in V_2$, и p_i принимает значения из пяти неориентированных компонент $V_0, V_1, \ldots, V_4$. Значит, p_i сюръективная.

Наконец, пусть все компоненты V_2, V_3, V_4, V_5 содержат по одной вершине, тогда положим $V_2 = \{2\}$, $V_5 = \{5\}$. В этом случае $|V_0| > 1$ или $|V_1| > 1$. Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично). Возьмём $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V_{in}^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = 4$. Можно выбрать вектор $\overline{a'} \in \{0, 2, 4\}^3$, лежащий в одной неориентированной компоненте с $\overline{a}$, для него по Утверждению 3.15 верно $p_i(\overline{a'}) = 4$. Также можно выбрать векторы $\overline{v_1} \in \{1, 1'\}^3$, $\overline{v_2}, \overline{v_3} \in V^3$ такие, что существует ориентированный путь Π, в котором все рёбра ориентированные, следующего вида:

$$\overline{v_1} \to \overline{v_2} \leftarrow \overline{v_3} \to \overline{a'}.$$

Поскольку $p_i(\overline{v_1}) \in V_1$, $p_i(\overline{a'}) \in V_4$, то образы элементов Π принимают на p_i все значения из V_0 и 5 или 2 и 3. Но поскольку $|V_0| > 1$, то любой путь, проходящий через все элементы из V_0 и 5 имел бы длину не меньше четырёх. Значит, p_i принимает значения $2, 3$. Получили, что p_i принимает значения из пяти различных неориентированных компонент $V_0, \ldots, V_4$, откуда p_i – сюръективная функция. □

Итак, с помощью Лемм 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.24, Теорем 3.1, 2.5 и Леммы 4.15.1 доказали:

Лемма 4.25 ([49])**.** Пусть $\mathcal{C}$ — смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, не изоморфный циклам, изображённым на Рис. 4.18. Если $\mathcal{C}$ изоморфен циклу, изображённому на Рис. 4.19, то Surj-Hom($\mathcal{C}$) решается за полиномиальное время. Иначе Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-полной.

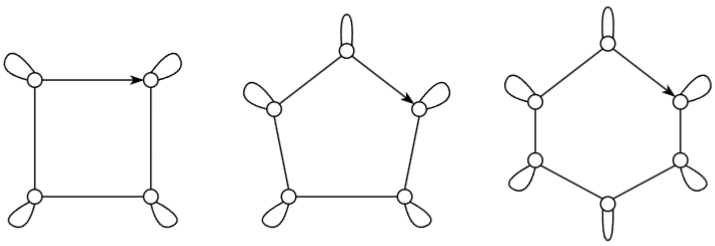

Рисунок 4.18

И наконец, Леммы 4.3, 4.14 и 4.25 и результаты, изложенные в [32; 42] доказывают ключевую теорему, сформулированную в начале этой главы:

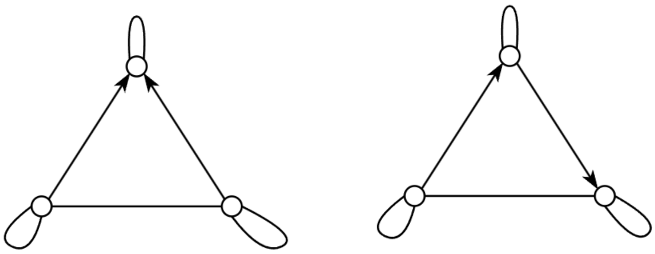

Рисунок 4.19

Теорема 4.1. ([49]) Пусть $\mathcal{C}$ – рефлексивный цикл, не изоморфный ни одному циклу, изображённому на Рис. 4.1. Если $\mathcal{C}$ изоморфен циклу, изображённому на Рис. 4.2, то Surj-Hom($\mathcal{C}$) лежит в P. Иначе Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-полной.

4.4 Циклы, не обладающие свойством наследования сюръективности в слабой форме

В данной главе мы покажем, что циклы, для которых не определена сложность задачи Surj-Hom, не обладают свойством наследования сюръективности в слабой форме.

Лемма 4.26. Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий 4 вершины. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ не наследуют сюръективность в слабой форме.

Доказательство. Пронумеруем $\mathcal{C}$ образом, указанным на Рис. 4.20.

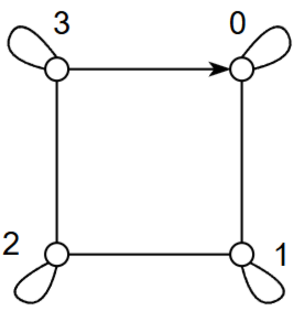

Рисунок 4.20

Рассмотрим трёхместные функции p_1, p_2, устроенные следующим образом:

$$p_1(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,y,z) = (0,3,2), \\ 2, & \text{если } (x,y,z) \in \{(1,1,1),(2,2,2)\}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_2(x,y,z) = \begin{cases} 3, & \text{если } (x,y,z) = (1,2,3), \\ 1, & \text{если } (x,y,z) \in \{(0,0,0),(3,3,3)\}, \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эти функции являются полиморфизмами $\mathcal{C}$, диагонально согласованы и совместно сюръективны. Покажем, что они имитируют проекции.

Возьмём произвольное ограничение из формулировки третьего условия. Оно будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b})),$$

где $i, j \in \{1,2\}$ и $\overline{a}, \overline{b} \in Z_4^3$. По определению, если $i = j$, то для каждого $h \in \{1,2,3\}$ верно $\mathcal{C}(a^h, b^h)$. Тогда это условие выполняется потому, что p_1 и p_2 являются полиморфизмами. Если же $i \neq j$, то для любых $h, l \in \{1,2,3\}$ верно $\mathcal{C}(a^h, b^l)$. Теперь, пусть вектор $\overline{a}$ диагональный (случай диагональности вектора $\overline{b}$ рассматривается аналогично). Обозначим $\overline{a} = (a,a,a)$. Поскольку p_i и p_j совпадают на диагонали, то ограничение $\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b}))$ равносильно $\mathcal{C}(p_j(\overline{a}), p_j(\overline{b}))$, где для каждого $h \in \{1,2,3\}$ верно $\mathcal{C}(a, b^h)$. А это ограничение выполняется, поскольку p_j – полиморфизм.

Итак, пусть $i \neq j$ и ни один из векторов $\overline{a}, \overline{b}$ не диагональный. Если элементы $\overline{a}$ принимают три разных значения, то существует ровно одно b такое, что выполняется $\mathcal{C}(a^i, b), i \in \{1,2,3\}$, то есть $\overline{b}$ диагональный. Аналогично, если $\overline{b}$ содержит три разных элемента, то $\overline{a}$ диагональное. Если же $\overline{a}$ и $\overline{b}$ принимают не более двух разных значений, то по построению $p(\overline{a}), p(\overline{b}) \in \{1,2\}$, откуда $\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b}))$ выполняется.

Итак, мы предъявили набор из двух функций, которые удовлетворяют условиям наследования сюръективности в слабой форме, но ни одна из них не является сюръективной, откуда $\mathcal{C}$ не обладает этим свойством. □

Лемма 4.27. Пусть $\mathcal{C}$ — неориентированный или смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий 5 вершин. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ не наследуют сюръективность в слабой форме.

Доказательство. Пронумеруем $\mathcal{C}$ образом, указанным на Рис. 4.21.

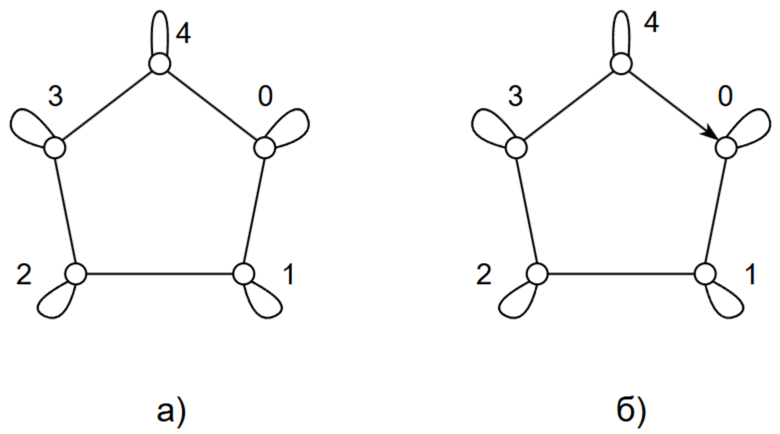

Рисунок 4.21

Построим набор из двух функций p_1, p_2, которые являются полиморфизмами $\mathcal{C}$, диагонально согласованы, совместно сюръективны и имитируют проекции, но не сюръективны. И для неориентированного цикла (см. Рис. 4.21, а), и для смешанно-ориентированного цикла (см. Рис. 4.21, б) эти функции строятся одинаковым способом:

$$p_1(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{если} (x,y,z) = (0,1,3), \\ 1, & \text{если } \rho((x,y,z)(0,1,3)) = 1, \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_2(x,y,z) = \begin{cases} 4, & \text{если} (x,y,z) = (0,2,4), \\ 3, & \text{если } \rho((x,y,z),(0,2,4)) = 1, \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что p_1 и p_2 принимают на диагонали только значение 2. Несложно заметить, что эти функции являются полиморфизмами $\mathcal{C}$, диагонально согласованы и совместно сюръективны. Покажем, что они имитируют проекции.

Возьмём произвольное ограничение из формулировки условия имитирования проекций. Оно будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b})),$$

где $i, j \in \{1, 2\}$ и $\overline{a}, \overline{b} \in Z_4^3$. Аналогично случаю из предыдущей леммы, достаточно рассмотреть случаи, когда $i \neq j$ и векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ содержат ровно по два разных элемента. Заметим, что в этом случае из того, что для любых $h, l \in$

$\{1,2,3\}$ выполняется условие $\mathcal{C}(a^h, b^l)$, следует, что $\{a^1, a^2, a^3\} = \{b^1, b^2, b^3\}$. По построению функций p_1 и p_2 выбранное условие может не выполняться только в том случае, если $\{p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b})\} = \{1,3\}$. Без ограничения общности положим $i = 1, j = 2$ и $p_1(\overline{a}) = 1, p_2(\overline{b}) = 3$. Так как $\overline{a}$ содержит ровно два разных элемента и существует ребро между $\overline{a}$ и $(0,1,3)$, то $\overline{a} \in \{1,2\}^3$ или $\overline{a} \in \{0,4\}^3$. Аналогично, $\overline{b} \in \{0,1\}^3$ или $\overline{b} \in \{3,4\}^3$. Иными словами, если $\{p(\overline{a}), p(\overline{b})\} = \{1,3\}$, то $\{a^1, a^2, a^3\} \neq \{b^1, b^2, b^3\}$. Значит, условие не выполняется, то есть функции p_1 и p_2 удовлетворяют условиям наследования сюръективности в слабой форме, но ни одна из них не является сюръективной. $\square$

Лемма 4.28. Пусть $\mathcal{C}$ — неориентированный рефлексивный цикл, содержащий 6 вершин или смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий 6 вершин. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ не наследуют сюръективность в слабой форме.

Доказательство. Пронумеруем $\mathcal{C}$ образом, указанным на Рис. 4.22.

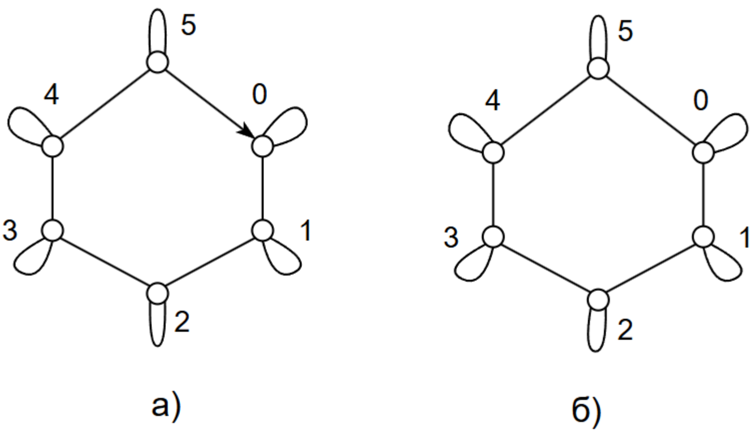

Рисунок 4.22

Аналогично случаю из предыдущего утверждения, построим диагонально согласованный совместно сюръективный набор из двух полиморфизмов p_1, p_2, имитирующий проекции, в котором нет сюръективных функций. Для неориентированного (см. Рис. 4.22, а) и смешанно-ориентированного (см. Рис. 4.22, б) цикла $\mathcal{C}$ эти функции строятся следующим образом:

$$p_1(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,y,z) = (0,4,2), \\ 1, & \text{если } \rho((x,y,z),(0,4,2)) = 1, \\ 3, & \text{если } (x,y,z) \in \{(1,1,1),(3,3,3),(5,5,5)\}, \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_2(x,y,z) = \begin{cases} 5, & \text{если } (x,y,z) = (1,3,5), \\ 4, & \text{если } \rho((x,y,z),(1,3,5)) = 1, \\ 2, & \text{если } (x,y,z) \in \{(0,0,0),(2,2,2),(4,4,4)\}, \\ 3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажем, что эти функции являются полиморфизмами $\mathcal{C}$. Рассмотрим условие $\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_i(\overline{b}))$, где $\overline{a}, \overline{b}$ — векторы Z_6^3 такие, что выполняется $\mathcal{C}(a^j, b^j), j \in \{1,2,3\}$. Пусть $i = 1$ (случай $i = 2$ разбирается аналогично).

– Пусть $p_1(\overline{a}) = 0$. Тогда $p_1(\overline{b}) \in \{0,1\}$.
– Пусть $p_1(\overline{a}) = 1$. По построению любой ориентированный путь между $(0,4,2)$ и векторами $(1,1,1),(3,3,3),(5,5,5)$ имеет длину не меньше трёх. Значит, $p_1(\overline{b}) \in \{0,1,2\}$.
– Пусть $p_1(\overline{a}) = 3$. Тогда $p_1(\overline{b}) \in \{3,2\}$.
– Пусть $p_1(\overline{a}) = 2$. Тогда $p_1(\overline{b}) \in \{1,2,3\}$.

Значит, условие $\mathcal{C}(p_1(\overline{a}), p_1(\overline{b}))$ выполняется.

Итак, эти функции являются полиморфизмами $\mathcal{C}$, диагонально согласованы и совместно сюръективны. Проверим, что они имитируют проекции. Возьмём произвольное ограничение из формулировки условия имитирования проекций. Оно будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b})),$$

$i, j \in \{1,2\}$ и $\overline{a}, \overline{b} \in Z_6^3$. Аналогично случаю из Леммы 4.26, достаточно рассмотреть $i \neq j$ и векторы $\overline{a}, \overline{b}$, которые содержат ровно по два разных элемента. Заметим, что так как для любых $h, l \in \{1,2,3\}$ верно $\mathcal{C}(a^h, b^l)$, то все a^1, a^2, a^3 и b^1, b^2, b^3 смежные между собой. Также заметим, что по построению p_1 и p_2 если $p_1(\overline{v}) \in \{0,1\}$ или $p_2(\overline{v}) \in \{5,4\}$, то среди v^1, v^2, v^3 всегда найдутся несмежные вершины. Значит, $p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b}) \in \{2,3\}$ и это ограничение выполняется. Отсюда, функции p_1 и p_2 удовлетворяют всем трём условиям, но ни одна из них не является сюръективной. $\square$

Заметим, что из данных результатов не следует, что задача о существовании сюръективного гомоморфизма на рассмотренные циклы не является NP-полной. Так, полиморфизмы строго-ориентированного цикла $\mathcal{C}_4$ с четырьмя вершинами и четырьмя особыми точками также не наследуют сюръективность в слабой форме (см. Лемму 4.8), но Surj-Hom$(\mathcal{C}_4)$ является NP-полной. Тем не менее, для анализа сложности задачи для данных циклов требуются новые инструменты, не описанные в данной работе.

Заключение

В диссертации рассматривалась задача о существовании сюръективного гомоморфизма на рефлексивный цикл, а также смежная ей задача сюръективного удовлетворения ограничениям. Были получены следующие результаты:

1. Для неориентированных рефлексивных циклов длины $n > 6$ была доказана NP-полнота задачи Surj-Hom($\mathcal{C}$).
2. Для строго ориентированных рефлексивных циклов длины $n > 3$, кроме единственного цикла длины 6, было предложено оригинальное доказательство NP-полноты задачи Surj-Hom($\mathcal{C}$).
3. Для смешанно-ориентированных рефлексивных циклов длины $n > 3$, кроме трёх смешанно-ориентированных циклов длины $n \in \{4, 5, 6\}$, содержащих ровно одно ориентированное ребро, была доказана NP-полнота задачи Surj-Hom($\mathcal{C}$).
4. Было предложено оригинальное доказательство того, что сюръективные полиморфизмы отношения смежности рефлексивных циклов, содержащих больше трёх вершин, существенно зависят ровно от одной переменной.
5. Были предложены свойство наследования сюръективности, которое для множества отношений Γ позволяет определять сложность SCSP(Γ) с помощью анализа полиморфизмов Γ и свойство сюръективного интерпретирования, которое позволяет определять сложность SCSP с помощью сведения.

Список литературы

1. *Garey M. R.*, *Johnson D. S.*, *So H. C.* An application of graph coloring to printed circuit testing // Proceedings of the 16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. — USA : IEEE Computer Society, 1975. — С. 178—183.
2. *Maurer H.*, *Salomaa A.*, *Wood D.* Colorings and interpretations: a connection between graphs and grammar forms // Discrete Applied Mathematics. — 1981. — Т. 3, № 2. — С. 119—135.
3. *Ope O.* Теория графов. — Наука, 1980.
4. *M. Гэри Д. Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — Мир, 1982.
5. *Hell P.*, *Nesetril J.* Graphs and Homomorphisms. — Oxford University Press, 07.2004.
6. *Maurer H.*, *Sudborough J.*, *Welzl E.* On the complexity of the general coloring problem // Information and Control. — 1981. — Т. 51, № 2. — С. 128—145.
7. *Feder T.*, *Vardi M. Y.* The Computational Structure of Monotone Monadic SNP and Constraint Satisfaction: A Study through Datalog and Group Theory // SIAM Journal on Computing. — 1998. — Т. 28, № 1. — С. 57—104.
8. *Feder T.*, *Vardi M. Y.* Monotone monadic SNP and constraint satisfaction // Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. — San Diego, California, USA : Association for Computing Machinery, 1993. — С. 612—622.
9. *Bulatov A. A.* A Dichotomy Theorem for Nonuniform CSPs // 2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). — 2017. — С. 319—330.
10. *Hell P.*, *Nešetřil J.* On the complexity of H-coloring // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1990. — Т. 48, № 1. — С. 92—110.
11. *Schaefer T. J.* The complexity of satisfiability problems // Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. — San Diego, California, USA : Association for Computing Machinery, 1978. — С. 216—226.

12. *Barto L.*, *Krokhin A.*, *Willard R.* Polymorphisms, and how to use them. — 2017 ; — EPrint Processing Status: Full text deposited in DRO.

13. *Kolaitis P. G.*, *Vardi M. Y.* A Game-Theoretic Approach to Constraint Satisfaction // Proceedings of the Seventeenth National Conference on Artificial Intelligence and Twelfth Conference on Innovative Applications of Artificial Intelligence. — AAAI Press, 2000. — P. 175—181.

14. *Kun G.*, *Szegedy M.* A new line of attack on the dichotomy conjecture // European Journal of Combinatorics. — 2016. — Vol. 52. — P. 338—367 ; — Special Issue: Recent Advances in Graphs and Analysis.

15. *А. В. Тарасов.* Булевы биюнктивные функции, графы 2-КНФ и их порядковые функции. Оценки веса биюнктивной функции с заданным числом слоев // Матем. вопр. криптогр. — 2021. — Т. 12, № 1. — С. 83—95.

16. Algebraic Approach to Promise Constraint Satisfaction / L. Barto [et al.] // J. ACM. — New York, NY, USA, 2021. — July. — Vol. 68, no. 4.

17. *Dechter R.* Constraint processing. — Morgan Kaufmann Publishers, 2003.

18. *Barto L.*, *Kozik M.*, *Niven T.* The CSP Dichotomy Holds for Digraphs with No Sources and No Sinks (A Positive Answer to a Conjecture of Bang-Jensen and Hell) // SIAM Journal on Computing. — 2009. — Vol. 38, no. 5. — P. 1782—1802.

19. *Barto L.* Algebraic Theory of Promise Constraint Satisfaction Problems, First Steps. — 07/2019. — P. 3—17.

20. *В. А. Тайманов.* О базисах замкнутых классов вектор-функций многозначной логики // Дискретная математика. — 2016. — Т. 28, № 2. — С. 127—132.

21. *В. А. Тайманов.* О некоторых свойствах вектор-функций алгебры логики // Дискретная математика. — 2019. — Т. 30, № 1. — С. 114—128.

22. *В. А. Тайманов.* О базисах замкнутых классов вектор-функций алгебры логики // Дискретная математика. — 2019. — Т. 31, № 3. — С. 78—92.

23. *В. А. Тайманов.* О базисах всех замкнутых классов вектор-функций алгебры логики // Дискретная математика. — 2022. — Т. 34, № 2. — С. 106—119.

24. *Zhuk D.* A Proof of the CSP Dichotomy Conjecture // J. ACM. — New York, NY, USA, 2020. — Авг. — Т. 67, № 5.

25. Surjective H-colouring : new hardness results. / P. Golovach [и др.] // Computability. — 2019. — Т. 8, № 1. — С. 27—42.

26. *Creignou N.*, *Hebrard J.-J.* On generating all solutions of generalized satisfiability problems // RAIRO - Theoretical Informatics and Applications - Informatique Théorique et Applications. — 1997. — Vol. 31, no. 6. — P. 499—511.

27. Finding Vertex-Surjective Graph Homomorphisms / P. A. Golovach [и др.] // Computer Science – Theory and Applications. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. — С. 160—171.

28. *Feder T.*, *Hell P.*, *Huang J.* Bi-arc graphs and the complexity of list homomorphisms // Journal of Graph Theory. — 2003. — Т. 42, № 1. — С. 61—80.

29. *Bodirsky M.*, *Kara J.*, *Martin B.* The Complexity of Surjective Homomorphism Problems – a Survey // Computing Research Repository - CORR. — 2011. — Апр. — Т. 160, № 12. — С. 1680—1690.

30. *Focke J.*, *Goldberg L. A.*, *Živný S.* The Complexity of Counting Surjective Homomorphisms and Compactions // SIAM Journal on Discrete Mathematics. — 2019. — Т. 33, № 2. — С. 1006—1043.

31. *Golovach P. A.*, *Paulusma D.*, *Song J.* Computing vertex-surjective homomorphisms to partially reflexive trees // Theoretical Computer Science. — 2012. — Т. 457. — С. 86—100.

32. *Larose B.*, *Martin B.*, *Paulusma D.* Surjective H-Colouring over Reflexive Digraphs // ACM Trans. Comput. Theory. — New York, NY, USA, 2018. — Нояб. — Т. 11, № 1.

33. *Vikas N.* Computational complexity of compaction to cycles // Proceedings of the Tenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. — Baltimore, Maryland, USA : Society for Industrial, Applied Mathematics, 1999. — С. 977—978.

34. *Vikas N.* Computational Complexity of Graph Partition under Vertex-Compaction to an Irreflexive Hexagon // 42nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2017). Т. 83. — Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2017. — 69:1—69:14.

35. Finding H-partitions efficiently / Dantas, Simone [и др.] // RAIRO-Theor. Inf. Appl. — 2005. — Т. 39, № 1. — С. 133—144.

36. Covering graphs with few complete bipartite subgraphs / H. Fleischner [и др.] // Theoretical Computer Science. — 2009. — Т. 410, № 21. — С. 2045—2053.

37. Parameterizing cut sets in a graph by the number of their components / T. Ito [и др.] // Theoretical Computer Science. — 2011. — Т. 412, № 45. — С. 6340—6350.

38. On disconnected cuts and separators / T. Ito [и др.] // Discrete Applied Mathematics. — 2011. — Т. 159, № 13. — С. 1345—1351.

39. 2K2 vertex-set partition into nonempty parts / K. Cook [и др.] // Discrete Mathematics. — 2010. — Т. 310, № 6. — С. 1259—1264.

40. *Dantas S.*, *Maffray F.*, *Silva A.* 2K2-partition of some classes of graphs // Discrete Applied Mathematics. — 2012. — Т. 160, № 18. — С. 2662—2668 ; — V Latin American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium — Gramado, Brazil, 2009.

41. *Martin B.*, *Paulusma D.* The Computational Complexity of Disconnected Cut and 2K2-Partition // Principles and Practice of Constraint Programming – CP 2011. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011. — P. 561—575.

42. *Martin B.*, *Paulusma D.* The computational complexity of disconnected cut and 2K2-partition // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 2015. — Т. 111. — С. 17—37.

43. *Zhuk D.* No-Rainbow Problem and the Surjective Constraint Satisfaction Problem // 2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS). — 2021. — С. 1—7.

44. *Bulatov A.*, *Jeavons P.*, *Krokhin A.* Classifying the Complexity of Constraints Using Finite Algebras // SIAM Journal on Computing. — 2005. — Т. 34, № 3. — С. 720—742.

45. *Chen H.* An algebraic hardness criterion for surjective constraint satisfaction // Algebra universalis. — 2014. — Т. 72. — С. 393—401.

46. *Larivière I.*, *Larose B.*, *Pullas D.* Surjective polymorphisms of directed reflexive cycles // Algebra universalis. — 2023. — Нояб. — Т. 85.

Публикации автора по теме диссертации

47. *Н. П. Корчагин.* Сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на ориентированные рефлексивные циклы // Дискрет. матем. — 2025. — Т. 37, № 4. — С. 54—88.

48. *Н. П. Корчагин.* Сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на рефлексивные циклы // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2023. — Т. 27. — С. 40—61.

49. *Н. П. Корчагин.* Сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на смешанно-ориентированные рефлексивные циклы // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2025. — Т. 29, вып. 4. — С. 102—134.