МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Добровольский Николай Николаевич

Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы

Специальность 1.1.5. — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва
2024

Диссертация подготовлена на кафедре математических и компьютерных методов анализа Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный консультант:	**Иванов Валерий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор,
Официальные оппоненты:	**Быковский Виктор Алексеевич**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
	Королёв Максим Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор РАН, заместитель директора по научной работе ФГБУН «Математический институт имени В. А. Стеклова» РАН.
	Чирский Владимир Григорьевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»,

Защита диссертации состоится «29» марта 2024 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университет имени М. В. Ломоносова, по адресу: Российская Федерация, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14–08.

E-mail: *vladimir.manuilov@gmail.com*

С диссертацией можно ознакомиться в отделе дессертаций научной библиотеки «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на портале:
https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2840

Автореферат разослан «29» января 2024.

Учёный секретарь диссертационного совета доктор физико-математических наук, доцент — В. М. Мануйлов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Диссертация является исследованием в аналитической теории чисел и теории диофантовых приближений. В ней рассматриваются вопросы приложения теории чисел к задачам приближенного анализа. В диссертации рассмотрены следующие пять основных тем:

- Логарифмы эйлеровых произведений и их ветви вблизи абсциссы абсолютной сходимости;
- Теория гиперболической дзета-функции Гурвица;
- Дзета-функции моноидов натуральных чисел;
- Теория приведённых алгебраических иррациональностей произвольной степени и обобщённых чисел Пизо;
- Классы периодических функций, порожденных моноидами натуральных чисел, и алгебры рядов Дирихле моноидов натуральных чисел.

Мультипликативный моноид натуральных чисел $\mathbb{N}$ является основным объектом изучения в теории чисел. Со времён Л. Эйлера известно, что его арифметические свойства тесно связаны с дзета-функцией $\zeta(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-\alpha}$ $(\alpha > 1)$ и произведением Эйлера $P(\alpha) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}$, где $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \ldots\}$ — множество всех простых чисел. В частности, основная теорема арифметики об однозначности разложения на простые множители эквивалентна равенству $\zeta(\alpha) = P(\alpha)$, а бесконечность множества простых чисел эквивалентна расходимости дзета-ряда при $\alpha = 1$.

Хорошо известны моноиды натуральных чисел, образующие геометрические прогрессии с первым членом равным 1 и арифметические прогрессии с первым членом равным 1 и произвольной натуральной разностью. Последний пример был частным случаем знаменитой теоремы Дирихле о простых в арифметической прогрессии, при доказательстве которой он использовал характеры Дирихле и L-функции Дирихле, а заодно и заложил основы теории рядов Дирихле.

Отметим, что моноид $M_{1,4} = \{1+4n|n \geqslant 0, n \in \mathbb{Z}\}$, как пишет Г. Дэвенпорт в своей "Высшей арифметике", Д. Гильберт использовал как пример замкнутой мультипликативной системы, в которой отсутствует однозначность разложения на простые элементы (простые числа и псевдопростые).

Необходимость изучения дзета-функций произвольных моноидов натуральных чисел естественным образом возникла в рамках развития теоретико-числового метода в приближенном анализе, основанным в 1957 году в работах профессора Н. М. Коробова. Одним из основных объектов исследования в теоретико-числовом методе в приближенном анализе является гиперболическая дзета-функция решёток.

Гиперболическая дзета-функция в общем виде была определена в работе 1984 года[1].

Определение 1. *Гиперболической дзета-функции решёток $\zeta(\Lambda|\alpha)$ называется функция, которая задаётся в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ дзета рядом*[2]

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{-\alpha}. \quad (1)$$

В работе [21] доказана уточненная асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки.

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов чисто-вещественного поля F:

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F) = \sum_{(\omega)} |N(\omega)|^{-\alpha},$$

тогда

$$\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F) = (-1)^{\nu} \sum_{(\omega)} \ln^{\nu}|N(\omega)||N(\omega)|^{-\alpha}, \quad \nu \geqslant 1.$$

Теорема 1. *При $t > e^a$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \frac{2(\det\Lambda)^{\alpha}}{R(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-1} C_{s-1}^{\nu} \frac{(\ln\det\Lambda(t) - \ln\det\Lambda)^{s-1-\nu}(-1)^{\nu}\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^{\alpha}} +$$

[1] Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, №6090–84.

[2] Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

$$+R(\Lambda, \alpha, \theta), \qquad (2)$$

где

$$R(\Lambda, \alpha, \theta) = O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det \Lambda(t))}{(\det \Lambda(t))^\alpha}\right) \quad \text{и} \quad R \text{ — регулятор поля.}$$

Множество значений нормы $|N(\omega)|$ образуют моноид натуральных чисел $M(\mathbb{Z}_F)$, а дзета-функция Дедекинда главных идеалов чисто-вещественного поля F является первым нетривиальным примером дзета-функции моноида натуральных чисел.

Общее определение дзета-функции произвольного множества натуральных чисел следующее [15]:

Определение 2. *Для любого множества A натуральных чисел определим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ равенством*

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > \sigma_A), \qquad (3)$$

где σ_A — абсцисса абсолютной сходимости.

Если множество A конечное, то равенство (3) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (3) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$. Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Будем через $M(A)$ обозначать минимальный мультипликативный моноид, содержащий множество A. Таким образом, мы имеем:

$$M(A) = \{a_1 \ldots a_l | a_1, \ldots, a_l \in A, l \geqslant 0\}.$$

Здесь мы используем естественное соглашение, что пустое произведение равно 1.

Нетрудно понять, что имеется несчетное множество моноидов натуральных чисел и, следовательно, несчетное множество различных дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Следуя за Б. М. Бредихиным, обозначим через $\nu_M(x)$ — количество элементов моноида M, непревосходящих x, а через $\pi_M(x)$ — количество простых элементов, непревосходящих x.

Работы по дзета-функции моноидов натуральных чисел оказались тесно связаны с циклом работ Б. М. Бредихина о чём говорится в обзорной работе [3].

Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности (см. [4]), и для таких последовательностей элементарными методами получал асимптотический закон распределения образующих элементов. Для моноидов это понятие звучит следующим образом:

Определение 3. *Моноид M натуральных чисел имеет C степенную θ-плотность, если существует предел*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\nu_M(x)}{x^\theta}=C. \tag{4}$$

Ясно, что натуральный ряд имеет единичную степенную 1-плотность.

Пусть $\mathbb{P}_k=\{2^k,3^k,5^k,\ldots\}$ — множество k-ых степеней всех простых чисел. Ясно, что $M(\mathbb{P})=\mathbb{N}$, а $M(\mathbb{P}_k)=\mathbb{N}_k=\{1^k,2^k,3^k,4^k,\ldots\}$ — множество k-ых степеней всех натуральных чисел. Моноид $M(\mathbb{P}_k)$ — с однозначным разложением на простые элементы, а множеством простых элементов являются псевдопростые числа, которые образуют множество $\mathbb{P}_k$. Легко видеть, что моноид $M(\mathbb{P}_k)$ имеет единичную степенную $\frac{1}{k}$-плотность, так как $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x)=[x^{\frac{1}{k}}]$. Так как $\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x)=\pi(x^{\frac{1}{k}})$, то справедлив асимптотический закон

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x)\sim k\frac{x^{\frac{1}{k}}}{\ln x},$$

который согласно Б. М. Бредихину можно получить элементарно, минуя асимптотический закон для простых чисел.

Наилучший результат здесь получается, конечно, исходя из оценок И. М. Ви-

[3] Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков. Борис Максимович Бредихин и его научно-педагогическая деятельность // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 19–28.

[4] Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.

ноградова [5] и Н. М. Коробова [6]:

$$\pi(x) = \int\limits_2^x \frac{dx}{\ln x} + O\left(xe^{-a(\ln x)^{0.6}(\ln\ln x)^{-0.2}}\right),$$

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \int\limits_2^{x^{\frac{1}{k}}} \frac{dx}{\ln x} + O\left(x^{\frac{1}{k}} e^{-a(\frac{1}{k}\ln x)^{0.6}(\ln\ln x - \ln k)^{-0.2}}\right),$$

где $a > 0$ — некоторая положительная константа.

Здесь используется очевидное равенство $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha) = \zeta(k\alpha)$.

Несомненно, что является **актуальным** построение теории дзета-функций произвольных моноидов натуральных чисел, в которой будут изучены различные классы моноидов натуральных чисел и отличие этих классов от моноида $\mathbb{N}$. Среди **актуальных** задач этой теории можно выделить следующие основные:

1. определение областей сходимости дзета-ряда для различных моноидов;
2. построение аналитического продолжения или определение области голоморфности дзета-функции моноидов;
3. определение асимптотических законов распределения простых элементов в моноиде;
4. решение обратной задачи по распределению элементов моноида;
5. исследование новых классов функций, заданных моноидами натуральных чисел;
6. уточнение некоторых асимптотических формул в теоретико-числовом методе в приближенном анализе;
7. исследование закономерностей для остаточных дробей алгебраических чисел.

[5] И. М. Виноградов, “Новая оценка функции $\zeta(1+it)$”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 22:2 (1958), 161–164.

[6] Н. М. Коробов, “Оценки сумм Вейля и распределение простых чисел”, Докл. АН СССР, 123:1 (1958), 28–31.

Степень разработанности

Впервые гиперболическая дзета-функция сеток появилась в 1957 году в работе Н. М. Коробова[7], с которой ведется отсчет истории создания теоретико-числового метода. Сам термин появился гораздо позже в 2001 году в работе[8], и в более общем виде определение гиперболической дзета-функции дается в работе[9]. Такая ситуация объясняется логикой развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

На первом этапе его развития к задачам интегрирования периодических функций многих переменных применялись известные результаты из теории чисел о тригонометрических суммах. После введения в 1959 году Н. М. Коробовым параллелепипедальных сеток и понятия оптимальных коэффициентов стали выделяться собственно актуальные задачи теории чисел, решение которых требовалось для развития метода оптимальных коэффициентов.

Прежде всего заметим, что появление метода тригонометрических сумм при анализе вопросов численного интегрирования стало возможным благодаря выделению Н. М. Коробовым класса E_s^α периодических функций с быстро убывающими коэффициентами кратного ряда Фурье.

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k f[\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)] - R_N[f]. \quad (5)$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s$$

[7]Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. N 6. С. 1062 — 1065.

[8]Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7. Вып. 1. Тула, 2001. С. 82–86.

[9]Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.

средним взвешенным значением функции $f(x_1,\ldots,x_s)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k)) \qquad (k = 1\ldots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы.* Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы.

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}, \tag{6}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем, также, рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s).$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S^*_M(\vec{m})$.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул.

Теорема 5. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*[10]

$$\begin{aligned} R_N[f] &= C(\vec{0})\left(\frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N} \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \\ &= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \end{aligned} \tag{7}$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

Из этой теоремы непосредственно следует, что для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования $R_N[f]$ на классе A_s всех

[10] Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1,\ldots,m_s) \neq (0,\ldots,0)$.

периодических функций $f(x_1, \ldots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной и абсолютно сходящимся рядом Фурье справедливо равенство

$$\|R_N[\cdot]\|_{A_s} = \max\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|, \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\}} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|\right). \tag{8}$$

Как показали Н. М. Коробов и его последователи на классе E_s^α вопрос о скорости сходимости погрешности к нулю становится содержательным, а дзета-функция сеток с весами в случае параллелепипедальных сеток превращается в гиперболическую дзета-функцию решёток.

Отметим сразу, что и дзета-функция сеток с весами и гиперболическая дзета-функция решётки задаются рядом Дирихле, а значит, их можно рассматривать при комплексных значениях аргумента α и встаёт естественный вопрос об аналитическом продолжении этих рядов Дирихле.

Ещё в 1967 году в работе[11] Н. М. Коробов указывал на связь теории диофантовых приближений с развитием теоретико-числового метода в приближенном анализе. Поэтому естественным является продолжение исследований в области теоретико-числового метода в приближенном анализе и традиционным направлением для Тульской школы теории чисел, связанным с приближением алгебраических чисел[12], [13], [14], [15].

[11]Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22, 3 (135). С.83–118.

[12]В. Д. Подсыпанин О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 43—46.

[13]Е. В. Подсыпанин О разложении иррациональностей высших степеней в обобщенную непрерывную дробь (по материалам В. Д. Подсыпанина) рукопись 1970 // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 47—49.

[14]Е. В. Триколич, Е. И. Юшина, Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сб.2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.

[15]Е. И. Юшина О некоторых приведенных алгебраических иррациональностях // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Региональной научной студенческой конференции. Тула: ТулГУ 2015. С. 66–72.

Цели и задачи

Целью диссертационной работы является формирование основ теории дзета-функции моноидов натуральных чисел.

Также целью данной работы является изучение остаточных дробей алгебраических иррациональностей и законов образования их минимальных многочленов.

Для достижения указанных целей автором сформулированы и решены следующие задачи:

1. изучить логарифм эйлерова произведения;
2. построить аналитическое продолжении одного класса рядов Дирихле, связанного с дзета-функцией Гурвица;
3. рассмотреть дзета-функцию моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители;
4. описать моноиды натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы;
5. построить дзета-функции моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости;
6. доказать гипотезу о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых и рассмотреть обобщенное эйлерово произведение, задающее мероморфную функцию на всей комплексной плоскости;
7. вывести новые асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции решёток;
8. изучить вопрос о количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел;
9. исследовать вопрос о количестве простых и псевдопростых в моноиде квадратичных вычетов;

10. решить обратную задачу для моноида с экспоненциальной последовательностью простых;

11. описать законы поведения минимальных многочленов остаточных дробей для алгебраических иррациональностей;

12. описать новые направления исследований, связанные с теорией дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Положения выносимые на защиту

По результатам исследования на защиту выносятся следующие утверждения:

- Почленное логарифмирование бесконечного эйлерова произведения задает в области абсолютной сходимости непрерывную функцию, которая в подходящей полуплоскости задает главное значение логарифма эйлерова произведения, а при приближении к границе области абсолютной сходимости пробегает все ветви логарифмической функции.

- Теория гиперболической дзета-функции Гурвица является вполне содержательной и аналогична теории обычной дзета-функции Гурвица.

- Моноиды натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы характеризуются тем свойством, что их дзета-функция равна произведению Эйлера.

- Для дзета-функций вложенных моноидов натуральных чисел справедлив принцип вложенности.

- Для дзета-функции моноидов натуральных чисел значение абсциссы абсолютной сходимости может изменяться от 0 до 1.

- Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.

- Методом параметрических множеств, получены две новые асимптотические формулы из теории гиперболической дзета-функции решёток.

- При $q = 3, 4, 6$ для количества простых элементов в моноиде $M_{q,1}$ при $x > \frac{q^4}{64}$ справедливо соотношение
$$\pi_{M_{q,1}}(x) \leqslant \frac{(2+\eta)x}{2\ln(2x/q)} + \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

- Для моноида квадратичных вычетов справедливо асимптотическое равенство
$$\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x) = \frac{x\ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}\right).$$

- Любой моноид $M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых PE типа q имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ и $\theta = \frac{1}{2}$.

- Приведённые алгебраические иррациональности в случае чисто-вещественных алгебраических полей и обобщённые числа Пизо в общем случае играют принципиальную роль в вопросах разложения алгебраических иррациональностей в цепную дробь. Начиная с некоторого места все остаточные дроби являются приведёнными алгебраическими числами в первом случае и приведёнными обобщёнными числами Пизо — во втором случае.

- Во-первых, с каждым моноидом M натуральных чисел связывается класс периодических функций M_s^α, который вложен в хорошо известный класс E_s^α.

  Оказалось, что класс периодических функций M_s^α замкнуты относительно интегральных операторов Фредгольма и на нем разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

  Во-вторых, теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел.

Научная новизна

Представленные в работе результаты являются новыми, получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации следующие:

1. Доказано что почленное логарифмирование эйлерова произведения задает в области абсолютной сходимости непрерывную функцию, которая в подходящей полуплоскости задает главное значение логарифма эйлерова произведения, а при приближении к границе области абсолютной сходимости пробегает все ветви логарифмической функции.

2. Построена теория гиперболической дзета-функции Гурвица.

3. Дано определение дзета-функции моноида натуральных чисел и установлена его связь с произведением Эйлера.

4. Описан общий вид моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы.

5. Построены дзета-функции моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости.

6. Доказана гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых и построено обобщенное эйлерово произведение, задающее мероморфную функцию на всей комплексной плоскости.

7. Выведены две новые асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции решёток.

8. Получены асимптотические формулы для количества простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел.

9. Получены асимптотические формулы для количества простых и псевдопростых в моноиде квадратичных вычетов.

10. Решена обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых.

11. Найдены формулы для минимальных многочленов остаточных дробей для алгебраических иррациональностей.

12. Описаны новые направления исследований, связанные с теорией дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертационного исследования имеют значение для теоретико-числового метода Коробова в приближенном анализе, аналитической теории чисел и теории диофантовых приближений. В нем содержатся основы теории дзета-функций моноидов натуральных чисел, развитие теории гиперболической дзета-функций решёток и дзета-функций сеток с весами. Исследования также содержат важные результаты по теории диофантовых приближений. Результаты относящиеся к теории рассматриваемых дзета-функций могут использоваться в развитии теории рядов Дирихле.

Методология и методы исследования

Исследование базировалось на общей методологии теоретико-числового метода Коробова в приближенном анализе. Согласно этому методу центральными объектами исследования являются тригонометрические суммы сеток с весами, гиперболическая дзета-функция решёток и дзета-функция сеток с весами. При реализации этой методологии использовались метод тригонометрических сумм, геометрия чисел, теория сравнений.

При изучении дзета-функций моноидов натуральных чисел использовались общие подходы из теории дзета-функции Римана и теории рядов Дирихле.

При изучении закономерностей поведения остаточных дробей алгебраических иррациональностей использовался метод дробно-линейных преобразований для минимальных многочленов.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность всех результатов исследования обоснована строгими математическими доказательствами.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых по грантам РФФИ №05-01-00672a, №08-01-00790a, №11-01-00571a, №15-01-01540-a, №15-41-03263 р-центр-а, №16-41-710194 р-а, №19-41-710004 р-а, №19-41-710005 р-а.

Апробация результатов исследования проводилась на всероссийских и международных конференциях:

- VII международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная памяти профессора А. А. Карацубы — г. Тула, 11 — 15 мая 2010 г.,

- Международная научно-практическая конференция «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», посвященная 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина — г. Тула, 3 — 7 октября 2011 г.,

- International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" — Odessa, August 20 — 26, 2012,

- X международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» — г. Волгоград, 10 — 16 сентября 2012 г.,

- XI международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» — г. Саратов, 9 — 14 сентября 2013 г.

- XII Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева. — г. Тула, 21 —- 25 апреля 2014 г.

- XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. — г. Тула, 25 — 30 мая 2015 г.

- Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы социально-экономического развития предприятий, отраслей, комплексов» — г. Тула, 11 — 14 декабря 2015 г.

- VII Международная научно-техническая конференция в рамках II Международного Научного форума Донецкой Народной Республики — г. Донецк, 26 мая 2016 г.

- Всероссийская конференция «Университет XXI века: научное измерение.» — г. Тула, 17 — 31 мая 2016 г.

- XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. — г. Тула, 28 — 31 мая 2018 г.

- XVI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. — г. Тула, 13 — 18 мая 2019 г.

- Международная конференция «Байкальская теория чисел» (26 — 30 августа 2019, о. Ольхон, Россия).

- XVII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённая 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. — г. Тула, 26 — 27 марта 2019 г.

- XVIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. — г. Тула, 23 — 28 сентября 2020 г.

- XIX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённая 200-летию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва. — г. Тула, 18 — 22 2021 г.

- XX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённая 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова. — г. Тула, 21 — 24 сентября 2021 г.

- XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 85-летию со дня рождения А. А Карацубы. — г. Тула, 17 — 21 мая 2022 г.

- Вторая конференция Математических центров России. — г. Москва, 7 — 11 ноября 2022 г.

- XXII Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната №18 при Московском университете. —- г. Тула, 26 — 29 сентября 2023 г.

- II Всероссийская научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д. А. Граве. — г. Вологда, 19 —- 23 сентября 2023 г.

- III Конференция Математических центров России. — г. Майкоп, 10 — 15 октября 2023 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 28 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» [1]–[28], в 3 монографиях [29]–[31] и 17 тезисах и материалах различных конференциях [32]–[48].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 12 глав, разбитых на 83 параграфа, заключения и списка литературы. Полный объем работы составляет 363 страницы. Список литературы содержит 253 наименования.

Содержание работы

Во введении рассматривается актуальность темы исследования, краткая история развития теории, предшествующей данной работе, приводятся основные результаты исследования и их теоретическая и практическая значимость.

Первая глава — «Логарифм эйлерова произведения» — посвящена изучению логарифмов бесконечных произведений Эйлера. В этой главе изучаются непрерывные функции, задающие логарифмы бесконечных произведений Эйлера, полученные почленным логарифмированием. Доказывается ряд лемм, позволяющих установить важный факт, что сумма главных значений логарифма сомножителей бесконечного произведения Эйлера задают главное значение только в некоторой полуплоскости, а при приближении к абсциссе абсолютной сходимости эта непрерывная сумма пробегает все ветви логарифмической функции.

Во введении к первой главе кратко говорится о роли произведений Эйлера и о направлении исследований в первой главе.

В параграфе 2 доказывается следующая основная лемма о ветвях логарифма.

Лемма 1.**(О логарифме)** *Пусть в окрестности точки α_0 логарифм аналитической функции $f(\alpha)$ задан непрерывной функцией $h(\alpha)$: $\ln f(\alpha) = = h(\alpha)$. Если в точке α_0 функция $h(\alpha)$ переходит с одной ветви логарифма на другую, то значение $f(\alpha_0)$ — отрицательное.*

В параграфе 3 на основании леммы о логарифме доказываются две леммы о значениях специальных функций.

В параграфе 4 приводятся необходимые вспомогательные леммы о главных значениях логарифма.

В параграфе 5 исследуется логарифм дзета-функции Римана и доказывается теорема о значении.

Теорема 2. *Для любого натурального N существует τ_N, такое что на отрезке*

$$\left[1 + e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}} + i\tau_N; 2 + i\tau_N\right]$$

найдутся точки $\alpha_k = \sigma_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — отрицательное число ($k = 1, \ldots, N$);

— $\alpha_k = \lambda_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — положительное число ($k = 1, \ldots, N$);

— $\alpha_k = \delta_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — чисто мнимое число ($k = 1, \ldots, N$).

В параграфе 6 исследуются ветви логарифма одной обобщённой L-функции с Эйлеровым произведением. А именно, рассмотрим мультипликативную функцию $h(n) = i^{\sum_{p|n} \alpha_p}$ при $n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}$ и ряд Дирихле $M(\alpha, h)$, заданный равенством

$$M(\alpha, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^\alpha} = \prod_p \left(1 - \frac{i}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Доказана следующая лемма.

Лемма 14.*Существует $\delta > 0$ такое, что при $1 < \alpha < 1 + \delta$ справедливо неравенство*

$$(\ln M(\alpha, h)) \neq \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}}.$$

В заключении к первой главе подводится итог рассмотренным в главе вопросам.

Во второй главе — «Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле» строится теория гиперболической дзета-функции Гурвица и рассматривается ряд смежных вопросов. Для полноты изложения приводится ряд известных фактов, но они подаются в новом контексте, который позволяет судить о роли этих фактов в развитии теоретико-числового метода в приближенном анализе и связи с последующей теорией дзета-функции моноидов натуральных чисел.

Во введении ко второй главе достаточно подробно описывается связь теории гиперболической дзета-функции решёток и теории гиперболической дзета-функции Гурвица.

В параграфе 2 формулируются цели и дается краткое содержание этой самой объемной главы диссертации.

В третьем разделе мы рассматриваем несобственные интегралы с полиномами Бернулли, которые естественно возникают в этой проблематике, когда от ряда Дирихле с помощью теоремы Абеля переходят к несобственному интегралу.

В четвертом разделе приводятся все необходимые факты о периодизированной по параметру b дзета-функции Гурвица $\zeta(\alpha; b)$ и о дзета-функции Гурвица второго рода.

В пятом разделе вводится понятие гиперболической дзета-функции Гурвица и развивается соответствующая теория, которая во многом является аналогом теории дзета-функции Гурвица.

На основании полученных результатов в шестом разделе строится функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции сдвинутых диагональных решёток.

В седьмом разделе дается подробное изложение теоремы С. М. Воронина о нулях суммы дзета-функций Гурвица по модулю 5 в критической полосе, а в восьмом разделе аналогичный результат излагается для произвольного простого модуля $p > 5$.

Наконец, в заключении ко второй главе обсуждаются полученные результаты и возникающие трудности при реализации намеченной программы.

В третьей главе — «Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители» начинается изучение основной темы диссертации.

Во введении к третьей главе даются многочисленные определения и обозначения, а также формулируются основные цели — изучить свойства дзета-функций мультипликативных моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители и её логарифмов.

Во втором параграфе приводятся различные примеры дзета-функций моноидов натуральных чисел и рассматривается обобщённая функция Мёбиуса.

В параграфе 3 вводится одно из центральных понятий данного исследования — последовательности простых чисел экспоненциального роста.

В заключении к третьей главе дается краткая справка о предшествующих работах, из которых естественным образом возникла новое направление исследований. Кроме этого, указаны наиболее интересные направления дальнейших исследований.

Четвертая глава — «О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы» посвящена описанию моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы, изучению их свойств, дзета-функции этих моноидов натуральных чисел и нахождению их обратных рядов Дирихле.

Во втором разделе этой главы решается вопрос об обращении дзета-функций для произвольных множеств натуральных чисел.

В третьем разделе изучается дзета-функция множества простых чисел. Доказывается теорема об обратной дзета-функции.

В четвертом разделе изучаются вложенные последовательности моноидов. Сформулирован и доказан принцип вложенности, с помощью которого доказаны ряд теорем об обратных рядах для дзета-функций моноидов.

В пятом разделе четвертой главы рассматриваются некоторые важные примеры моноидов с однозначным разложением на простые элементы.

В шестом разделе изучаются дзета-функции множества простых элементов моноида. Получены результаты об обратных рядах Дирихле для этих дзета-функций.

В седьмом разделе найден общий вид моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы.

В заключении к четвертой главе перечислены ряд актуальных и перспективных тем дальнейших исследований по данной тематике.

В пятой главе находятся дзета-функции моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости.

Во введении к пятой главе поставлена задача построения системы простых чисел $\mathbb{P}_{\sigma_0}$ такой, что для абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha)$ выполнялось равенство $\sigma_{M(\mathbb{P}_{\sigma_0})} = \sigma$, где $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Во втором разделе этой главы поставленная задача решается при значениях абсциссы от 0 до $\frac{1}{3}$, используя теорему Ингама и её следствия.

В третьем разделе при значениях от $\frac{1}{3}$ до 1 используется теорема Россера об оценках простого p_n.

Четвертый раздел посвящён изучению обобщённых произведений Эйлера, для которых удается вычислить абсциссу абсолютной сходимости.

В заключении к пятой главе обрисованы актуальных и перспективные темы дальнейших исследований по данной тематике.

Шестая глава — «Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых и обобщенное эйлерово произведение, задающее мероморфную функцию на всей комплексной плоскости» посвящена изучению аналитических свойств некоторых дзета-функций моноидов натуральных чисел и одного обобщенного эйлерова произведения, задающего мероморфную функцию на всей комплексной плоскости.

Во введении к этой главе формулируются основные задачи по трём классам дзета-функций моноидов натуральных чисел, связанные с аналитическими свойствами этих дзета-функций. Кроме этого, изучаются аналитические свойства одного обобщенного произведения Эйлера и одного специального ряда Дирихле с быстро убывающими коэффициентами.

Во втором разделе доказывается явный вид теорем Вейерштрасса и Миттаг–Леффлера для геометрической прогрессии.

В третьем разделе находится представление для дзета-функции геометрической прогрессии через гамму функцию, что позволило найти функциональное уравнение для дзета-функции геометрической прогрессии.

Четвертый раздел посвящён изучению следующего по сложности случая дзета-функции моноида натуральных чисел, порожденного конечным числом простых чисел.

Пятый раздел изучает дзета-функцию моноида натуральных чисел $M^*(\vec{p}) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})$ с однозначным разложением на простые множители, состоящего из натуральных чисел n взаимно простых с $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, а эйлерово произведение $P(M^*(\vec{p})|\alpha)$ состоит из сомножителей по всем простым числам отличным от $p_1, \dots, p_n$.

В шестом разделе рассматривается моноид $M_{3,1}(p_1, p_2) \subset M(p_1, p_2)$, заданный равенством

$$M_{3,1}(p_1, p_2) = \{n = 3k + 1 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \,|\, \beta_1 + \beta_2 \equiv 0 \pmod 2\},$$

который для краткости называется основным моноидом. Для него найден явный вид обратной дзета-функции и явный вид отношения двух дзета-функций:

$$\zeta(M(p_1, p_2), M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)\zeta^{-1}(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha).$$

В седьмом разделе продолжены исследования аналитических свойств объектов из предыдущего раздела.

В восьмом разделе вводятся два новых моноида натуральных чисел: моноид Эйлера по модулю q множество E_q и единичный моноид по модулю q множество U_q. Оба моноида относятся к классу моноидов с однозначным разложением на простые элементы. Отличия заключаются в том, что в первом случае все простые элементы являются простыми числами, а во втором случае все простые элементы являются псевдопростыми числами.

Девятый раздел посвящён рассмотрению эффекта Дэвенпорта — Хейльбронна для моноидов, рассмотренных в предыдущих разделах данной главы. Отмечены новые особенности этого эффекта для некоторых рассмотренных моноидов.

Десятый раздел посвящён изучению дзета-функции моноида для любого экспоненциального множества PE простых чисел. В результате исследования была сформулирована гипотеза о заградительном ряде для аналитического продолжения этой дзета-функции.

В следующем одиннадцатом разделе «Вес, порядок и радиус в точке» разрабатываются простые эффективные средства, которые будут использоваться для решения гипотезы о заградительном ряде.

Двенадцатый раздел «Область голоморфности дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых» содержит доказательство гипотезы о заградительном ряде и другие примеры дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых областью голоморфности является правая полуплоскость с $\sigma > 0$.

Тринадцатый раздел содержит примеры рядов Дирихле с быстро убывающими коэффициентами, которые сходятся на всей комплексной области.

Четырнадцатый раздел «Ряд Дирихле моноида с конечным числом простых чисел» содержит описание различных результатов об этих рядах Дирихле и их связь с результатами о соответствующих дзета-функциях.

В пятнадцатом разделе исследуются широкий класс рядов Дирихле, заданных обобщёнными произведениями Эйлера. Сформулированы условия при которых эти ряды Дирихле задают мероморфные функции на всей комплексной плоскости, которые имеют бесконечное множество полюсов первого порядка $S_\pi(M, a(p))$.

В заключении к шестой главе дается широкая панорама дальнейших исследований, связанных с тематикой данной главы.

Седьмая глава — «Две асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции решёток» посвящена выводу двух новых асимптотических формул: первая для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки; вторая для числа точек решётки в гиперболическом кресте.

Во ведении к седьмой главе дается небольшая историческая справка об исследованиях по гиперболической дзета-функции решёток.

Во втором разделе разработан новый метод параметрических множеств, с помощью которого получены новые формы для главного члена асимптотических формул, отличный от работ [16] и [17] с более точной оценкой остаточного члена.

В третьем разделе продолжено успешное применение метода параметрических множеств к получению асимптотических формул для числа точек решётки

[16] Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета–функция алгебраических решёток. Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, №2327–В90.

[17] Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

в гиперболическом кресте.

В заключении к седьмой главе подводится итог для обсуждения нового метода параметрических множеств.

Восьмая глава — «О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел» посвящена изучению вопроса о распределении простых элементов в моноидах $M_{3,1}$, $M_{3,1,1}$, $M_{3,1,2}$, $M_{3,2}$ и связанных с ними множествах $M_{3,1,2,0}$, $\mathbb{N}_{3,2}$ и $\mathbb{N}_{3,2,2}$. Кроме этого, изучаются аналогичные вопросы для моноидов $M_{6,1}$, $M_{6,1,1}$, $M_{4,1}$ и $M_{4,1,1}$.

Во втором разделе даются общие формулы для числа составных с двумя делителями.

В третьем разделе «Исторические замечания» описываются подходы в духе мемуаров П. Л. Чебышева двумя способами.

В четвертом разделе приводятся необходимые для дальнейшего классические результаты о распределении простых в арифметических прогрессиях.

В пятом разделе с помощью оценки Бруна-Титчмарша решается вопрос о количестве составных с двумя делителями в прогрессии.

Шестой раздел посвящён решению поставленных задач для моноидов $M_{3,1}$, $M_{4,1}$ и $M_{6,1}$ и связанных с ними.

В заключении к восьмой главе обсуждаются различные формулировки дальнейших исследований по данной тематике.

Девятая глава — «О моноиде квадратичных вычетов» посвящена изучению моноида $M_{p,2}$ всех натуральных чисел, являющихся квадратичными вычетами по модулю p, который разлагается в произведение двух взаимно простых моноидов $M_{p,2} = M_{p,2}^{(1)} \cdot M_{p,2}^{(2)}$. Все простые элементы в моноиде $M_{p,2}^{(1)}$ имеют порядок 1, то есть являются обычными простыми числам, которые одновременно являются квадратичными вычетами по модулю p, таким образом, $M_{p,2}^{(1)} = M\left(\mathbb{P}_p^{(1)}\right)$. Все простые элементы из моноида $M_{p,2}^{(2)}$ имеют порядок 2 и являются псевдопростыми числами, то есть составными числами, равными произведению двух простых чисел, каждое из которых квадратичный невычет по модулю p. Таким образом, справедливо равенство $M_{p,2}^{(2)} = M\left(\mathbb{P}_p^{(2)} \cdot \mathbb{P}_p^{(2)}\right)$.

Цель данной главы — изучить свойства функции распределения простых элементов $\pi_{M_{p,2}^{(\nu)}}(x)$ для $\nu = 1, 2$. Отметим, что $\pi_{M_{p,2}}(x) = \pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x) + \pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x)$.

Во введении к девятой главе описываются объекты исследования и формулируется цель этих исследований.

Во втором разделе даются общие формулы для числа простых и псевдопростых.

В третьем разделе приводятся вспомогательные утверждения, которые далее используются в этой главе.

В четвертом разделе выводится асимптотическая формулу для числа простых в моноиде $M_{p,2}^{(1)}$.

Пятый раздел посвящён выводу асимптотической формулы для числа псевдопростых чисел в моноиде $M_{p,2}^{(2)}$.

В заключении к девятой главе подводится итог исследований простых элементов в моноиде квадратичных вычетов по заданному модулю.

Десятая глава — «Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых» посвящена получению аналогов результатов Б. М. Бредихина о связи функции распределения простых элементов в образе свободной группы с функцией распределения элементов для этого образа.

Во введении к этой главе дается обзор результатов связанных с постановкой обратной задачи для моноида с экспоненциальной последовательностью простых. Вводятся новые обозначения и формулируются цель исследований десятой главы.

Во втором разделе приводятся вспомогательные леммы и дается объяснение, почему подход Б. М. Бредихина не работает в случае моноида с экспоненциальной последовательностью простых.

В третьем разделе строятся два гомоморфизма мультипликативного моноида $M(PE)$ в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Даются важные формулы, связывающие функции распределения моноида $M(PE)$ с распределением для образов при этих гомоморфизма.

В четвертом разделе рассматриваются как экспоненциальные последовательности простых чисел, так и общая конструкция экспоненциальной последовательности натуральных чисел.

В пятом разделе из аддитивной теоремы Ингама получены искомые результаты о функции распределения моноида с экспоненциальной последовательностью простых.

В заключении к десятой главе дается определение нового понятия — C логарифмическая θ-степенная плотность. Таким образом, любой моноид $M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых PE типа q имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ и $\theta = \frac{1}{2}$.

Одиннадцатая глава — «О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей» посвящена рассмотрению важной проблемы, решение которой важно для развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

Во ведении к одиннадцатой главе дано описание рассматриваемой задачи теории цепных дробей алгебраических иррациональностей степени 3 и выше. Указана связь с теоретико-числовым методом в приближенном анализе. Сформулированы цели исследований одиннадцатой главы.

Во втором разделе даются определения новых понятий: обобщенное число Пизо n-ой степени, приведённое обобщенное число Пизо; доказаны некоторые свойства остаточных дробей в разложения в цепную дробь.

В третьем разделе рассматриваются принципиально важные свойства дробно-линейных преобразований M многочленов $f(x) \in \mathbb{P}_n[x]$.

Четвертый раздел содержит доказательство принципиального свойства цепных дробей для алгебраических иррациональностей степени 3 и выше, что начиная с некоторого места все остаточные дроби являются приведёнными обобщёнными числами Пизо.

В пятом разделе исследуются минимальные многочлены остаточных дробей. В этом разделе выводятся формулы для коэффициентов минимальных многочленов остаточных дробей и оценки значений минимального многочлена в подходящих дробях к алгебраическому числу. Для остаточных дробей найдена формула, связывающая эту дробь с отношением знаменателей двух последовательных подходящих дробей.

В шестом разделе даётся применение обобщённых чисел Пизо к модификации алгоритма Лагранжа разложения алгебраического числа в цепную дробь. Оказывается, что начиная с некоторого места очередное неполное частное выражается через значение m-ного минимального многочлена в $m-1$-ого неполного частного.

В седьмом разделе рассматривается новое понятие — цепная последовательность преобразований плоскости. С помощью этого понятия дается объяснения эффекта концентрации алгебраически-сопряжённых чисел к остаточной дроби α_m около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

В заключении к одиннадцатой главе подводится итог о роли приведенных алгебраических иррациональностей в случае чисто-вещественных алгебраических иррациональностей и обобщённых чисел Пизо в общем случае. Ставится задача о структуре рационального сопряжённого спектра вещественного алгебраического числа.

Двенадцатая глава — «Новые направления исследований» посвящена описанию новых направлений исследований, связанных с тематикой диссертационного исследования.

Во ведении к главе кратко описываются новые направления исследований.

Во втором разделе дается новая конструкция, которая позволяет с каждым моноидом M натуральных чисел связать класс M_s^α периодических функций многих переменных. Рассмотрен вопрос об уравнении Фредгольма второго рода на этом классе функций. Показано, что относительно интегрального оператора Фредгольма этот класс функций замкнут.

В третьем разделе описаны конструкции бесконечномерных линейных функциональных пространств рядов Дирихле моноида натуральных чисел — $\mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$ над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле. Показано, что $\mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$ является коммутативной алгеброй над полем $\mathbb{K}$.

В заключении к двенадцатой главе перечислены возможные дальнейшие направления исследований, связанных и с новыми функциональными пространствами, и с алгебрами рядов Дирихле, порождёнными моноидами натуральных чисел.

Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

- Теория дзета-функций моноидов натуральных чисел тесно и естественным образом связана с теоретико-числовым методом в приближенном анализе.

- Приведенные алгебраические иррациональности в случае чисто-вещественных алгебраических полей и обобщённые числа Пизо в общем случае играют важную роль в теории цепных дробей алгебраических иррациональностей.

- Имеются важные, перспективные и актуальные направления дальнейших исследований теории дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в области теории чисел и прикладных вопросах.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту — профессору Валерию Ивановичу Иванову за постоянное внимание и неоценимую поддержку.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[1] Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.

DOI: 10.22405/2226-8383-2015-16-3-147-182

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

English transl.: Dobrovol'skii, N. M.; Dobrovol'skii, N. N. About minimal polynomial of residual fractions for algebraic irrationalities. Dokl. Math. 106, Part Suppl. 2, S165-S180 (2022)

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[2] Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сборник 2015. Т. 16, вып. 4 (56). С. 100–149.

DOI: 10.22405/2226-8383-2015-16-4-100-149

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[3] N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2016. № 2. P. 27–39.

Журнал индексируется в Scopus. IF: SJR 0.29

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[4] Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control 69, 81-140

DOI: 10.1007/978-3-319-40673-2_5

Книга проиндексированна в WoS, Scopus.

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[5] Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

DOI: 10.22405/2226-8383-2016-17-3-72-105

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[6] Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. Н. Добровольский, Е. А. Матвеева О дробно-линейных преобразованиях форм А. Туэ — М. Н. Добровольского — В. Д. Подсыпанина // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 2. С. 54–97.

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-54-97

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[7] Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 2. С. 98–128.

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-98-128

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[8] Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.

DOI: 0.22405/2226-8383-2017-18-4-325-337

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[9] Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-187-207

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

[10] Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-1-79-105

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

[11] Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-1-106-123

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[12] Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-142-150

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

[13] Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-123-141

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[14] Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-3-95-108

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[15] Добровольский Н. Н. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 3. С. 109–134.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-3-109-134

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

[16] И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-4-118-176

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Обзорная статья. Добровольскому Н. Н. принадлежат разделы 6, 7, 14.

[17] Н. Н. Добровольский. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-1-148-163

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

English trans.: Dobrovol'skii, N. N. A model zeta function of the monoid of natural numbers. Dokl. Math. 106, Part Suppl. 2, S192-S200 (2022);

[18] Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в

приближенном анализе// Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.

DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-1-164-178

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[19] Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-1-179-194

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[20] Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 156–168.

DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-2-156-168

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[21] Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.

DOI: 10.22405/2226-8383-2020-21-3-165-185

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[22] Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка II // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 100–121.

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-100-121

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Автору принадлежат разделы статьи посвященные вопросам теории чисел.

[23] Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 166–178.

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-166-178

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[24] Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных сдвинутых решёток // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 196–231.

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-196-231

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[25] Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник, 2021, Т. 22, вып. 3, С. 368–382.

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-368-382

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Автору принадлежит раздел статьи посвященный вопросам теории чисел.

[26] А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, Т. 22, вып. 4, С. 168–182.

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-4-168-182

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[27] М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном функциональном уравнении // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 359–364.

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-359-364

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

[28] Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Об обобщённых неравномерных сетках Коробова // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 365–373.

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-365-373

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Добровольскому Н. Н. принадлежат все теоремы

Монографии

[29] Добровольский Н. Н., Добровольская Л. П., Серегина Н. К., Бочарова О. Е. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов: Моногр. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – 223 с.

Добровольскому Н. Н. принадлежат главы 5, 6, 8, 9

[30] Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. / Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

Добровольскому Н. Н. принадлежат главы 2, 4

[31] Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. / Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. II. – 186 с.

Добровольскому Н. Н. принадлежат главы 2, 3

Тезисы и материалы конференций

[32] Добровольский Н.М., Добровольский Н.Н. Гиперболическая дзета-функция решёток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 28-31.

[33] Добровольский Н.Н. Об одном вопросе из элементарной теории чисел // В сборнике: Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование (ИУСМКМ - 2016). Сборник материалов VII Международной научно-технической конференции в рамках II Международного Научного форума Донецкой Народной Республики "Инновационные перспективы

Донбасса". Редколлегия: А.Ю. Харитонов [и др.]. г. Донецк, 2016. С. 35-36.

[34] Добровольский Н.М., Добровольский Н.Н., Балаба И.Н., Реброва И.Ю. Значение минимальной формы остаточной дроби в точках (-QM-2, QM-1) и (-PM-2, PM-1) и алгебраические решетки для остаточных дробей // В сборнике: Университет XXI века: научное измерение. Материалы Всероссийской конференции. Сер. "Библиотека Чебышевского сборника"Библиотека Чебышевского сборника, Московский педагогический государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет. 2016. С. 31-43.

[35] Серегина Н.К., Добровольский Н.Н. О числе точек решетки решений линейного сравнения в областях // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. 2018. С. 323-325.

[36] Климова Е.И., Добровольский Н.Н. Квадратичные поля и квадратурные формулы // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. 2018. С. 308-310.

[37] Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей и теоретико-числовой метод в приближенном анализе // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. 2018. С. 304-305.

[38] Добровольский Н.Н. Ряды Дирихле и гиперболическая дзета-функция решёток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. 2018. С. 303-304.

[39] Серегина Н.К., Добровольский Н.Н. О количественной мере качества одной обобщенной параллелепипедальнои сетки // В сборнике: Алгебра, теория

чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. 2019. С. 301-302.

[40] Добровольский Н.Н., Добровольский М.Н., Добровольский Н.М., Балаба И.Н., Реброва И.Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. 2019. С. 289-291.

[41] Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М., Реброва И.Ю., Родионов А.В. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. 2019. С. 285-288.

[42] Добровольский Н.Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. 2019. С. 283-285.

[43] Добровольский Н.М., Добровольский Н.Н. Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближённом анализе // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. 2019. С. 185-187.

[44] Добровольский Н.М., Добровольский Н.Н. Актуальные задачи теоретико-числового метода в приближенном анализе // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б.

Стечкина. Тула, 2020. С. 290-294.
[45] Добровольский Н.Н. Работы Б. М. Бредихина по свободным числовым полугруппам и современная аналитическая теория моноидов натуральных чисел // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: Современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 2020. С. 25-29.
[46] Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М. Приближение алгебраических решеток целочисленными решетками // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П.Л. Чебышёва. Тула, 2021. С. 253-255.
[47] Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М. Башни полей Дирихле и многомерные квадратурные формулы // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П.Л. Чебышёва. Тула, 2021. С. 250-253.
[48] Добровольский Н.Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел и смежные вопросы // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П.Л. Чебышёва. Тула, 2021. С. 16-20.