

**ОТЗЫВ**  
**официального оппонента о диссертации**  
**на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук**  
**Солонкова Александра Алексеевича**  
**на тему: «Свободные универсальные алгебры с непрерывными и**  
**раздельно непрерывными операциями»**  
**по специальности 1.1.3. Геометрия и топология**

В 1950-х годах А.И. Мальцев ввел понятие топологической универсальной алгебры и начал исследование тополого-алгебраических свойств топологических алгебр. Топологические алгебры являются важнейшими объектами исследования в самых разных областях математики — функциональном анализе, геометрии и топологии (в частности, в теории групп и алгебр Ли), теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений и многих других. Напомним, что универсальной алгеброй называется непустое множество  $A$  вместе с любым фиксированным набором операций заданных арностей на этом множестве ( $n$ -арной операцией на множестве  $A$  называется произвольное отображение  $A^n \rightarrow A$ ).

Тогда же А.И. Мальцев определил понятие свободной топологической универсальной алгебры и поставил ряд фундаментальных проблем. Свободные топологические алгебры играют в теории топологических алгебр ту же роль, что и свободные алгебры в теории абстрактных алгебр, и представляют собой мощный инструмент для решения многих проблем, связанных с топологическими алгебрами. Однако к настоящему моменту о них были известны лишь разрозненные факты. В диссертации этот пробел в значительной степени восполнен. В частности, в ней содержится полное и аккуратное доказательство существования и единственности свободной топологической универсальной алгебры в самой общей ситуации, т.е. для произвольного топологического пространства в произвольном многообразии топологических алгебр, получены условия, при которых  $X$  является подпространством своей топологической алгебры и представлено явное описание абсолютно свободной топологической алгебры произвольной

сигнатуры. Все эти результаты представляют собой существенное продвижение в решении проблем Мальцева.

В теории абстрактных универсальных алгебр очень важную роль играют конгруэнц-перестановочные многообразия. В 1954 г. А.И. Мальцев получил критерий конгруэнц-перестановочности в терминах существования так называемого мальцевского терма — тернарной операции, для которой выполнены определенные тождества. Эта теорема Мальцева во многом предопределила дальнейшее развитие теории универсальных алгебр. Впоследствии выяснилось, что не менее важную роль она играет и в теории топологических алгебр; в частности, многие утверждения о топологических группах остаются верными и для мальцевских алгебр (топологических алгебр с мальцевским термом). В диссертации таким алгебрам удалено много внимания: описаны строение и основные свойства свободной топологической мальцевской алгебры, исследованы аксиомы отделимости в мальцевских алгебрах, изучена связь мальцевских алгебр с другими тополого-алгебраическими структурами. Особо хочется отметить явное описание свободной мальцевской алгебры, подобное хорошо известному представлению свободной группы в виде множества несократимых слов. Это описание позволяет следить за сокращениями в мальцевских алгебрах и может принести большую пользу в исследованиях мальцевских алгебр, как топологических, так и абстрактных. В диссертации оно используется в доказательстве важной теоремы о подалгебрах квазитопологических алгебр.

Следует также упомянуть теорему о том, что свободные булевы топологические группы кружевых топологических пространств являются кружевными. (Напомним, что класс кружевых пространств — это важный класс топологических пространств, который содержит все метризуемые пространства и на который обобщается знаменитая теорема Дугунджи о существовании оператора продолжения непрерывных отображений в ЛВП с замкнутых подпространств.) Это очень трудная теорема, и ей посвящена целая глава. Из этой теоремы и обобщения теоремы Дугунджи вытекает, в

частности, что любое кружевное пространство является ретрактом булевой топологической группы (т.е. локально выпуклого векторного пространства над двухэлементным полем).

Наконец, в диссертации подробно исследованы квазитопологические универсальные алгебры, т.е. алгебры с раздельно непрерывными операциями. Теория квазитопологических алгебр представляет собой бурно развивающуюся сравнительно новую область топологической алгебры. Известно, что квазитопологические алгебры обладают уникальными категорными свойствами. Полученные в диссертации результаты демонстрируют, что и общие тополого-алгебраические свойства квазитопологических алгебр во многом более естественны, чем свойства топологических алгебр. Например, свободные топологические алгебры всегда являются топологическими факторалгебрами абсолютно свободных и допускают простое явное описание (которое получено в диссертации). Кроме того, в диссертации доказано, что подалгебра свободной квазитопологической алгебры пространства  $X$ , порожденная подпространством  $Y$  этого пространства, является свободной квазитопологической алгеброй пространства  $Y$ , тогда как для топологических алгебр это не так.

Хочется отметить большое количество примеров, которые доказывают окончательность результатов, дают отрицательные ответы на естественно возникающие вопросы или демонстрируют, насколько свойства квазитопологических алгебр отличаются от свойств топологических.

Диссертация содержит введение, раздел «Основные понятия и предварительные сведения», пять глав, заключение и список литературы из 39 наименований, включающий в себя 4 работы автора по теме диссертации в рецензируемых журналах. Объем диссертации составляет 105 страниц.

Во введении приводится краткая история вопроса, определяется область исследования, обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов, формулируются основные результаты диссертации. В разделе «Основные понятия и предварительные сведения» содержатся

самые основные определения, а также формулируются и доказываются некоторые нужные в дальнейшем общие факты.

Первая глава посвящена свободным топологическим универсальным алгебрам. Приведено полное подробное доказательство существования и единственности свободных топологических алгебр любых пространств в любых многообразиях, доказаны основные свойства свободных топологических алгебр, получено явное описание абсолютно свободной топологической алгебры произвольной сигнатуры.

Вторая глава посвящена мальцевским алгебрам, их строению и свойствам. Исследованы свойства свободных топологических мальцевских алгебр. Введены тихоновские мальцевские алгебры и описаны их свойства. Получен критерий того, что топологическое пространство  $X$  является мальцевским пространством (т.е. допускает непрерывную операцию Мальцева) в терминах свободной топологической мальцевской алгебры этого пространства. Исследована связь между свободными мальцевскими алгебрами, свободными топологическими группами и свободными топологическими группами. В конце главы приведено явное описание свободной мальцевской алгебры, подобное представлению свободной группы в виде множества несократимых слов.

В третьей главе доказано, что свободная булева группа (т.е. свободное локально выпуклое пространство над двухэлементным полем) кружевного топологического пространства является кружевной.

Четвертая глава посвящена общим квазитопологическим алгебрам, т.е. универсальным алгебрам с топологией, относительно которой операции раздельно непрерывны. Описаны основные свойства таких алгебр (многие из которых выгодно отличают квазитопологические алгебры от топологических), доказано существование и единственность свободных квазитопологических алгебр, явно описаны свободные и абсолютно свободные квазитопологические алгебры.

Наконец, в пятой главе исследуются квазимальцевские алгебры, т.е. квазитопологические алгебры, среди производных операций которых найдётся раздельно непрерывная операция Мальцева. Доказано, в частности, что всякое квазимальцевское пространство является ретрактом своей свободной квазитопологической группы; всякое тихоновское квазимальцевское пространство гомеоморфно ретракту некоторой тихоновской квазитопологической группы; подалгебра свободной квазимальцевской алгебры тихоновского пространства  $X$ , порожденная замкнутым подпространством  $Y$  этого пространства, является свободной квазимальцевской алгеброй пространства  $Y$ . Заметим, что для топологических мальцевских алгебр эти результаты неверны.

Работа А.А. Солонкова представляет собой систематическое и целостное исследование топологических и квазитопологических универсальных алгебр. Помимо ряда важных результатов о свойствах топологических и квазитопологических алгебрах автор получил полные описания свободных квазитопологических алгебр, а также абсолютно свободных и свободных мальцевских топологических алгебр, которые имеют ключевое значение для теорий топологических и квазитопологических алгебр. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут найти применения в общей топологии, алгебре, функциональном анализе, теории дифференциальных уравнений и теории вероятности. Работа не содержит существенных погрешностей, за исключением немногочисленных опечаток, характерных для компьютерного набора, которые не умаляют значимости диссертационного исследования. Полученные в работе результаты не вызывают сомнений. Автореферат полно и корректно отражает основные результаты диссертации.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также

критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Солонков Александр Алексеевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой математического анализа  
имени академика П.С. Новикова  
математического факультета  
ФГБОУ ВО «Московский педагогический  
государственный университет»  
ГЕВОРКЯН Павел Самвелович

Контактные данные:

тел.: +7(499)264-38-09, e-mail:  
Специальность, по которой официальным оппонентом  
зашита диссертация:  
01.01.04 – Геометрия и топология

Адрес места работы:

107140, г. Москва, ул.Краснопрудная, д.14, каб. 302,  
Московский педагогический государственный университет,  
математический факультет, кафедра математического анализа  
Тел.: +7(499)264-38-09; e-mail: [ps.gevorkyan@mpgu.su](mailto:ps.gevorkyan@mpgu.su)

Подпись сотрудника МПГУ  
П.С. Геворкяна удостоверяю:  
специалист по УМР