МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Пряничников Алексей Михайлович

Полигоны с условиями на решётку конгруэнций

Специальность 1.1.5 –
Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Кожухов Игорь Борисович

Москва – 2026

Содержание

Введение

Диссертационная работа относится к общей алгебре, а именно теории полигонов над полугруппами. В работе изучается строение полигонов с различными условиями на их решётку конгруэнций – модулярность, дистрибутивность, наличие тождества. Кроме того, изучается строение плоских и близких к ним унаров, рассматриваемых как полигоны над свободной циклической полугруппой.

Актуальность темы

Полигоны над полугруппой, т.е множества, на которых действует полугруппа, возникают в различных разделах алгебры и её приложениях. Понятие полигона является алгебраическим выражением понятия автомата, а именно автомата Мура, т.е. автомата без выхода [7; 8]. Таким образом, все работы по алгебраической теории автоматов можно рассматривать как исследования, относящиеся к теории полигонов. Теория полигонов является довольно молодым разделом общей алгебры, имеющим гораздо менее богатую историю, чем многие другие её разделы, а теория конгруэнций полигонов вообще находится на начальной стадии развития, поэтому исследования в этих областях представляются актуальной математической задачей. В монографии [9] представлен обзор работ по разным вопросам теории полигонов.

Авдеевым А.Ю. и Кожуховым И.Б. в [10] получено описание полигонов над регулярными рисовскими матричными полугруппами $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, т.е. вполне 0-простыми полугруппами. Все правые конгруэнции на этих полугруппах были описаны в [11]. Это можно считать описанием конгруэнций свободного циклического полигона над вполне 0-простой полугруппой. Описание конгруэнций произвольных полигонов над вполне 0-простыми или вполне простыми полугруппами представляется довольно сложной математической задачей, поэтому естественно рассматривать частные случаи таких полугрупп. Конгруэнции полигонов над группами были описаны в [12], конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей – в [13]. Конгруэнции полигонов над полугруппами левых нулей описаны в [14, теорема 2].

Решётка конгруэнций $\operatorname{Con} A$ универсальной алгебры A является важной характеристикой этой алгебры. Это полная решётка с наименьшим элементом $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ (отношение равенства), и наибольшим $\nabla_A = A \times A$ (универсальное отношение). Одним из направлений общей алгебры является изучение универсальных алгебр с теми или иными условиями на конгруэнции. Например, условие тривиальности решётки конгруэнций ($\operatorname{Con} A = \{\Delta_A, \nabla_A\}$) определяет простые алгебры (простые группы, кольца, конгруэнц-простые полугруппы и т.д.), условие максимальности или минимальности – соответственно нётеровы и артиновы алгебры. Большое количество работ посвящено подпрямо неразложимым алгебрам, т.е. таким алгебрам A, что либо $|A| = 1$, либо решётка $\operatorname{Con} A$ содержит наименьший отличный от Δ_A элемент.

Конгруэнции алгебры играют важную роль в структурной теории, поскольку конгруэнция – это то же самое, что ядро некоторого гомоморфизма алгебры. Решётка $\operatorname{Con} A$ является подрешёткой решётки $\operatorname{Eq} A$ всех отношений эквивалентности на множестве A. Кажется естественным изучение полигонов с заданными условиями на их решётку конгруэнций. Условиям дистрибутивности или модулярности решёток конгруэнций, а также условиям, когда конгруэнции образуют цепь, посвящено значительное количество статей. Цепные и дистрибутивные кольца и модули – это целое направление теории колец[15—17]. Унары с дистрибутивной, модулярной решёткой конгруэнций и с решёткой конгруэнций, являющейся цепью, полностью описаны в работе [18]. Группы с дистрибутивной решёткой нормальных подгрупп исследовались в [19] (как известно, конгруэнции группы – это в точности разбиения на смежные классы по нормальным подгруппам). В работе [20] приведён обзор исследований решётки конгруэнций полугруппы, включающий результаты по полугруппам с дистрибутивной и модулярной решёткой конгруэнций. В работе [21] были описаны полугруппы, у которых левые конгруэнции образуют цепь. В работе [22] приведены критерии модулярности и дистрибутивности решётки конгруэнций полигонов; в этой работе изучается дистрибутивность и модулярность решётки конгруэнций копроизведения связных полигонов, имеющих модулярную либо дистрибутивную решётку конгруэнций. В работе [14] было получено описание полигонов над полугруппами правых или левых нулей, имеющих дистрибутивную, модулярную или линейно упорядоченную решётку конгруэнций. В своей диссертационной работе автор продолжает эти исследования, а именно: им получено полное описание полигонов над прямоугольными связками, имеющих модулярную, дистрибутивную или линейно упорядоченную решётку конгруэнций.

Кроме того, в диссертации автор затрагивает более широкий вопрос, а именно: как устроен полигон, на решётке конгруэнций которого выполняется хотя бы одно нетривиальное решёточное тождество? Получены необходимые и достаточные условия выполнения нетривиального тождества на решётке конгруэнций произвольного полигона, а также для частного случая полигона – унара найдены необходимые условия того, чтобы на решётке конгруэнций унара выполнялось нетривиальное решёточное тождество.

Понятие полигона над полугруппой аналогично понятию модуля над кольцом, ввиду чего теория полигонов развивалась под большим влиянием теории колец и модулей. Инъективные и проективные объекты категории – важная составная часть гомологической теории. Гомологической теории колец и модулей посвящено большое количество статей и монографий. Общие свойства инъективных и проективных полигонов, а также инъективных оболочек и проективных накрытий полигонов описаны в [23, Главы III.1 и III.17].

В работе [24] была построена инъективная оболочка произвольного полигона над полугруппой. Инъективные оболочки полигонов над клиффордовыми полугруппами были построены в [25]. В работах [26; 27] описаны инъективные и проективные полигоны над вполне простой и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппами, что обобщает работы по полигонам над группами, полугруппами правых, левых нулей и т.д.

Тесно связанным с инъективностью и проективностью является понятие плоскостности. Хорошо известны понятия инъективных, проективных и плоских модулей и различные их обобщения. Промежуточное положение между модулями и полигонами занимают полумодули над полукольцами. Исследовение их плоскостности проводилось в [28]. А именно, было показано, что полумодуль $_RA$ над полукольцом R является плоским тогда и только тогда, когда $_RA$ является L-плоским (т.е. $_RA$ является фильтрованным копределом конечно порождённых свободных полумодулей). В монографии [23] подробно изучалось понятие плоского полигона над полугруппой. В общем случае описание этого класса полигонов затруднительно, поэтому автор рассмотрел интересный и важный частный случай полигона – унар. В монографии [29] дано систематическое изложение теории унаров с особым вниманием к решёткам ретрактов, произведениям, конгруэнциям, гомоморфизмам и многообразиям унаров. В работе [30] были описаны проективные, слабо проективные и псевдопроективные унары; инъективные, слабо, квази- и псевдоинъективные унары. В работе [31] – квазипроективные унары. В работах [32; 33] было обобщено понятие сильной плоскостности полигона и установлена связь между плоскими полигонами и полигонами без кручения. В [34] было отмечено, что различные обобщения плоскостности будут распространяться на компоненты связности полигона. В диссертационной работе автором получено полное описание слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, уравнительно плоских, коуниверсально плоских, точных, строго точных, регулярных унаров и унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P). Оказалось, что коуниверсально плоские унары совпадают с уравнительно плоскими и являются копроизведением прямых и лучей; унары, удовлетворяющие условию (P), плоские, слабо плоские, главно слабо плоские и унары без кручения совпадают и являются в точности копроизведениями прямых, лучей и циклов; унары, удовлетворяющие условию (E), точные, строго точные и регулярные унары совпадают и являются унарами, не содержащими цикл.

В работе [35] получено полное описание конгруэнций свободного унара с произвольным множеством свободных образующих. Условия дистрибутивности решётки квазимногообразий унаров получены в [36]. В [37] приводятся ряд необходимых условий дистрибутивности и модулярности решёток конгруэнций произвольных коммутативных унарных алгебр.

Объект и предмет исследования

В диссертации изучается решётка конгруэнций полигонов над различными полугруппами, а именно: выполняется ли на этой решётке тождество модулярности, дистрибутивности, является ли эта решётка конгруэнций цепью и в целом, выполняется ли на этой решётке какое-либо нетривиальное решёточное тождество.

Также изучаются плоские унары и близкие к ним: слабо плоские, главно слабо плоские унары, унары без кручения, уравнительно плоские, коуниверсально плоские, точные, строго точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (E) или (P).

Цели и задачи

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Описать полигоны над прямоугольной связкой, на решётке конгруэнций которых выполняется тождество модулярности, дистрибутивности или же когда решётка конгруэнций является цепью;

2. Получить условия, при которых на решётке конгруэнций полигона выполняется нетривиальное решёточное тождество;

3. Описать плоские унары и унары, принадлежащие к классам полигонов, близких к плоским: слабо плоские, главно слабо плоские унары, унары без кручения, уравнительно плоские унары, коуниверсально плоские, точные, строго точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (E) или (P).

Положения, выносимые на защиту

Следующие положения являются основными и выносятся на защиту.

1. Полное описание полигонов над прямоугольной связкой, имеющих модулярную, дистрибутивную либо линейно упорядоченную решётку конгруэнций;

2. Полное описание полигонов, на решётке конгруэнций которых выполняется нетривиальное решёточное тождество;

3. Необходимое условие того, чтобы на решётке конгруэнций унара выполнялось нетривиальное решёточное тождество;

4. Полное описание плоских, слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, уравнительно плоских, коуниверсально плоских, точных, строго точных, регулярных унаров и унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P).

Методология и методы исследования

В работе используются алгебраические методы, в частности, методы теории полугрупп, теории групп, теории колец, теории решёток и теории универсальных алгебр.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты состоят в следующем:

1. Показана конечность полигонов над прямоугольной связкой, имеющих модулярную, дистрибутивную либо линейно упорядоченную решётку конгруэнций. Доказано, что решётка конгруэнций таких полигонов конечна;

2. Разработан алгоритм построения решётки конгруэнций полигона и проверки выполнения в ней заданного решёточного тождества. Алгоритм реализован в виде компьютерной программы [38];

3. Получены условия, при которых на решётке конгруэнций полигона выполняется нетривиальное решёточное тождество;

4. Получено необходимое условие того, чтобы на решётке конгруэнций унара выполнялось нетривиальное решёточное тождество;

5. Доказано, что коуниверсально плоские унары совпадают с уравнительно плоскими и являются копроизведением прямых и лучей. Кроме того, совпадают классы унаров, удовлетворяющие условию (P), плоские, слабо плоские, главно слабо плоские и унары без кручения и являются в точности копроизведениями прямых, лучей и циклов. Унары, удовлетворяющие условию (E), точные, строго точные и регулярные унары совпадают и являются унарами, не содержащими цикл.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертационная работа имеет теоретический характер и может служить основой для дальнейших исследований полигонов и их специальных видов – унаров. Но, учитывая тот факт, что полигон можно рассматривать как автомат без выхода (автомат Мура), то результаты работы могут иметь применение в различных практических приложениях теории автоматов, в частности, в распознавании автоматных языков.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность всех результатов работы обоснована строгими математическими доказательствами.

Основные результаты работы докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях и научных семинарах:

1. Международный молодёжный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2025», Москва, Россия, с 11 по 25 апреля 2025 г.;

2. Конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посвящённая 130-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского университета члена-корреспондента АН СССР Николая Григорьевича Чеботарёва и 80-летию со дня рождения заведующего кафедрой академика АН РТ Марата Мирзаевича Арсланова, Казань, Россия, с 27 июня по 1 июля 2024 г.;

3. VI Международная конференция «Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях» (СИТОНИ), Донецк, ДНР, 26 ноября 2019 г.;

4. V Международная научно-техническая конференция «Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях», Донецк, ДНР, 18 мая 2018 г.;

5. Всероссийская конференция «Алгебра и теория алгоритмов», Иваново, Россия, с 21 по 24 марта 2018 г.;

6. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, Москва, Россия, с 23 по 25 мая 2018 г.;

7. Научно-исследовательский семинар кафедры теоретической информатики механико-математического факультета МГУ (неоднократно);

8. Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, 2026.

Публикации по теме исследования

Результаты диссертационной работы изложены в 6 публикациях, из которых 5 (общим объёмом 6.125 п.л.) опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ имени М.В.Ломоносова по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Структура и объём

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, заключения, списка публикаций автора и списка литературы. Текст диссертации изложен на 109 страницах и содержит 22 иллюстрации. Список литературы включает 45 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** излагается информация об актуальности рассматриваемой темы, краткую историю вопроса, изложение цели работы, методов и основных результатов.

В первой главе диссертации получено описание полигонов над прямоугольными связками, имеющих модулярную, дистрибутивную или линейно упорядоченную решётку конгруэнций. В параграфе 1 приводятся основные определения.

Полигоном над полугруппой называется множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X,\ (x,s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X,\ s,t \in S$. [23] Полигон – это то же самое, что автомат, и то же самое, что унарная алгебра, т.е. алгебра, у которой все операции унарны (операциями полигона X над полугруппой S являются умножения на элементы полугруппы, т.е. $x \mapsto xs$ $(s \in S)$).

Полигон, определённый выше, ещё называют *правым полигоном. Левым полигоном над полугруппой* T называется множество X и отображение $S \times X \to X$, $(s,x) \mapsto sx$, удовлетворяющие условию $(st)x = s(tx)$ при всех $x \in X$, $s,t \in S$.

Биполигоном ${}_T X_S$ над полугруппами T и S называется множество X с отображениями $T \times X \to X$ и $X \times S \to X$, удовлетворяющие условиям $x(s_1 s_2) = (x s_1) s_2$, $(t_1 t_2)x = t_1(t_2 x)$ для любых $x \in X$, $s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in T$ а также условию $(tx)s = t(xs)$ для любых $x \in X$, $s \in S$, $t \in T$.

Если полигон X является объединением своих подполигонов X_i $(i \in I)$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то мы называем X *копроизведением* полигонов X_i и пишем $X = \coprod_{i\in I} X_i$. Для любой полугруппы S мы будем обозначать через S^1 наименьшую полугруппу с единицей, содержащую S, т.е.

$$S^1 = \begin{cases} S, \text{ если } S \text{ имеет единицу,} \\ S \cup \{1\}, \text{ если } S \text{ не имеет единицы.} \end{cases}$$

Элемент z полигона X_S называется *нулём*, если $zs = z$ для любых $s \in S$.

Полугруппа левых нулей L – это полугруппа, в которой выполняется тождество $xy = x$. *Полугруппа правых нулей* R – полугруппа с тождеством $xy = y$. *Прямоугольная связка* – это прямое произведение $S = L \times R$, где L – полугруппа левых нулей, R – полугруппа правых нулей.

Пусть X – полигон над полугруппой S и Y – его подполигон. Конгруэнция $\rho_Y = (Y \times Y) \cup \Delta_X$ называется *конгруэнцией Риса*. Для фактор-полигона X/ρ_Y будем использовать также обозначение X/Y.

В параграфе 2 описываются общие свойства полигонов с модулярной решёткой конгруэнций.

Напомним, что решётка L называется *дистрибутивной*, если $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ для любых $x, y, z \in L$, и *модулярной*, если это равенство выполнено при $x \leq z$.

Конгруэнция ρ полигона X называется *сквозной*[22, определение после леммы 2.1], если существует разложение $X = U \sqcup V$ полигона X в копроизведение и элементы $u_1, u_2 \in U,\ v_1, v_2 \in V$ такие, что $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \rho$, а $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \notin \rho$.

В работе [22] исследовались условия модулярности и дистрибутивности решёток конгруэнций полигонов. Была доказана теорема о связи модулярности (дистрибутивности) решёток конгруэнций полигона и его компонент связности.

В работе [10] были полностью описаны полигоны над вполне простой полугруппой и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой. Пусть X – полигон над вполне простой полугруппой S, тогда:

$$X = \underbrace{(X \setminus XS)}_{A} \cup \coprod_{i \in I} Y_i,$$

где Y_i – подполигоны, неразложимые в нетривиальное копроизведение. Более того, каждое Y_i – это простой[1] полигон.

Для элементов $i, j \in I$ таких, что $i \neq j$, введём в рассмотрение двудольный граф Γ_{ij}, у которого вершинами являются элементы множества $Y_i \cup Y_j$, а рёбрами – пары (y_{ir}, y_{jr}) при $r \in R$. Следующая лемма отмечает важное свойство графов Γ_{ij} в случае модулярности решётки конгруэнций.

Лемма 1.11. *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$. Пусть $Y = XS$, $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение полигона Y на компоненты связности. Если решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна, то графы Γ_{ij} связны.*

Свойство связности графа Γ_{ij}, играет существенную роль, как будет видно далее. Сформулируем один из основных результатов главы.

Теорема 1.2. *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой S. Тогда решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна в том и только том случае, если $|A| \leq 2$ и выполнены условия:*

(i) $|I| \leq 3$, $|Y_i| \leq 3$ при $i \in I$ и графы Γ_{ij} связны при $i \neq j$;

при $A = \{a\}$ выполнено условие (i), а также условие

(ii) если $a\varphi_l = i$, при некотором $i \in I$ и всех $l \in L$, то $|Y_i| \leq 2$;

при $A = \{a, b\}$ выполнено условие (i), а также условия:

(iii) $a\varphi_l = b\varphi_{l'}$, при некоторых $l, l' \in L$;

(iv) если одно из множеств $\{a\varphi_l \mid l \in L\}$, $\{b\varphi_l \mid l \in L\}$ состоит из одного элемента i, а в другом более одного элемента, то $|Y_i| \leq 2$;

(v) если $\{a\varphi_l \mid l \in L\} = \{b\varphi_l \mid l \in L\} = \{i\}$, то $|Y_i| = 1$.

При доказательстве была применена написанная автором компьютерная программа [38], строящая решётку конгруэнций заданного полигона и проверяющая выполнение на ней тождеств модулярности и дистрибутивности. Самый

[1] Полигон X называется *простым*, если он не имеет подполигонов, отличных от X.

большой полигон над прямоугольной связкой с модулярной решёткой конгруэнций содержит 11 элементов, а его решётка конгруэнций – 300 элементов.

Следующие две теоремы дают условия дистрибутивности и линейной упорядоченности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой.

Теорема 1.3. *Пусть X - полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$, $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение в копрямое произведение копрямо неразложимых подполигонов. Решётка конгруэнций* $\mathrm{Con}X$ *дистрибутивна в том и только том случае, если $|A| \leq 1$ и выполнены условия:*
при $A = \emptyset$

(i) $|I| \leq 2$, $|Y_i| \leq 2$ и граф Γ_{ij} связен при $i \neq j$;

при $A = \{a\}$ выполнено условие (i), а также условие:

(ii) если $a\varphi_l = i$ при некотором $i \in I$ и всех $l \in L$, то $|Y_i| \leq 1$.

Теорема 1.4. *Пусть X_S – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$. $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение в копроизведение копрямо неразложимых подполигонов. Решётка конгруэнций* $\mathrm{Con}X$ *является цепью в том и только том случае, если $|I| \leq 2$ (считаем, что $I = \{1\}$ или $I = \{1, 2\}$) и выполнено хотя бы одно из условий:*
(i) $A = \emptyset$, $|I| = 1$, $|Y| \leq 2$;
(ii) $A = \emptyset$, $|I| = 2$, $|Y_1|, |Y_2| \leq 2$, $|Y_1| + |Y_2| \leq 3$;
(iii) $|A| = 1$ (скажем, $A = \{a\}$), $|I| = 1$, $|Y| \leq 1$;
(iv) $|A| = 1$ (скажем, $A = \{a\}$), $|I| = 2$, $|Y_1|, |Y_2| \leq 2$, $|Y_1| + |Y_2| \leq 3$ и $aS = Y$.

Естественным представляется расширить вопрос, поставленный в этой главе, на более общий случай, а именно: когда хотя бы одно нетривиальное решёточное тождество будет выполняться на решётке конгруэнций некоторого полигона, а когда нет? Именно этот вопрос исследуется **во второй главе** диссертационной работы.

Первая часть главы содержит краткий обзор работ различных авторов по тематике вопроса, а также некоторые общеизвестные факты, на которые опирается исследование.

Для дальнейшего нам потребуется понятие *вполне простой* и *вполне 0-простой* полугруппы. *Рисовская матричная полугруппа* $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ (здесь G – группа, I и Λ – множества, $P = \|p_{\lambda i}\|$ $(\lambda \in \Lambda, i \in I)$ – матрица с элементами из $G \cup \{0\}$) определяется как множество, состоящее из элемента 0 и элементов вида $(g)_{i\lambda}$, где $g \in G,\ i \in I,\ \lambda \in \Lambda$, с умножением

$$(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = \begin{cases} (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}, \text{ если } p_{\lambda j} \neq 0, \\ 0, \text{ если } p_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$

Рисовская матричная полугруппа $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, где G, I, Λ, P – такие же, как и выше, но $p_{\lambda i} \in G$ при всех $i \in I, \lambda \in \Lambda$ – это множество элементов вида $(g)_{i\lambda}$ с умножением

$$(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}.$$

Хорошо известная теорема Сушкевича – Риса утверждает, что вполне простые полугруппы — это в точности полугруппы, изморфные полугруппе $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, а вполне 0-простые — изоморфные регулярной рисовской матричной полугруппе $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, т.е. такой, у которой матрица P не содержит нулевых строк или столбцов[39, теорема 3.5 и замечания перед леммой 3.1].

Напомним, что дистрибутивные и модулярные решётки образуют многообразия, задаваемые соответственно тождеством $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ и тождеством $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (z \wedge (x \vee y))$[40, глава 5, теорема 347]. Цепи образуют класс решёток, не являющийся многообразием, но замкнутым относительно подрешёток и гомоморфных образов.

Решёточное тождество называется *нетривиальным*, если оно выполняется не во всех решётках.

Основными результатами главы являются следующие утверждения.

Следствие 2.1. *Пусть X – полигон над конечной полугруппой. Тогда решётка конгруэнций $\operatorname{Con} X$ удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству в том и только том случае, если X конечен.*

Теорема 2.2. *Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ – вполне 0-простая полугруппа и $|G| < \infty$, $|I| < \infty$. Тогда для любого полигона X с нулём над полугруппой S выполняется следующее: решётка конгруэнций $\operatorname{Con} X$ удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству в том и только том случае, если X конечен.*

Следствие 2.2. *Если $|G|$, $|I| < \infty$, то решётка $\operatorname{Con} X$ удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству тогда и только тогда, когда X конечен.*

Если опустить условие $|I| < \infty$, то утверждение теоремы 2.2 перестаёт быть верным. В главе 2 строятся два примера бесконечных полигонов X с тривиальной решёткой конгруэнций: $\operatorname{Con} X = \{\Delta, \nabla\}$. В обоих примерах X – бесконечный полигон, но решётка $\operatorname{Con} X$ конечна и, следовательно, удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству.

В главе 3 диссертации исследуются унары с тождествами в решётке конгруэнций. После того, как в предыдущей главе мы выяснили, в каком случае тождество будет выполняться на решётке конгруэнций полигона, естественным представляется получить конкретное описание таких полигонов. В главе 3 такое описание получено для важного частного случая полигона – унара, а именно: показано, что если решётка конгруэнций унара удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству, то унар является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей, а это, в свою очередь, равносильно тому, что унар имеет лишь конечное число компонент связности, узлов, начальных элементов и входная степень каждого элемента унара конечна.

Унар – это множество с одной унарной операцией $f : X \to X$. Его можно рассматривать как полигон над свободной циклической полугруппой $S = \langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, a^4, \ldots\}$ либо как унитарный полигон над свободным циклическим моноидом $S^1 = \{1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots\}$. Здесь $f(x) = xa$, $f(f(x)) = xa^2$ и т.д. Далее, букву a мы будем использовать для обозначения образующего элемента свободной циклической полугруппы $S = \langle a \rangle$.

Унар X называется *связным*, если для любых $x, y \in X$ существуют такие $k, l \geqslant 0$, что $xa^k = ya^l$. Для унара X и элемента $x \in X$ полагаем $xa^{-1} = \{y \mid ya = x\}$.

Приведём некоторые определения из теории графов. В ориентированном графе G с множеством вершин $V(G)$ и рёбер $E(G)$ для каждой вершины $x \in V(G)$ определяются понятия *входной степени*

$$\operatorname{indeg} x = |\{y \mid (y, x) \in E(G)\}|$$

и *выходной степени*

$$\operatorname{outdeg} x = |\{y \mid (x, y) \in E(G)\}|$$

вершины x. Понятно, что у унара X, рассматриваемого как граф, $\operatorname{outdeg} x = 1$ и $\operatorname{indeg} x = |xa^{-1}|$ для всех $x \in X$.

Пусть X – унар. Элемент $x \in X$ назовём *узлом*, если существуют элементы $y, z \in X$ такие, что $y \neq z$ и $y \cdot a = z \cdot a = x$. Элементы $x \in X \setminus XS$ будем называть *начальными.*

Прямой называется унар, изоморфный унару $\mathbb{Z}$ с операцией $i \cdot a = i + 1$ при $i \in \mathbb{Z}$ (см. рисунок 3.1, слева).

Лучом называется унар, изоморфный унару $\mathbb{N}$ с операцией $i \cdot a = i + 1$ при $i \in \mathbb{N}$ (см. рисунок 3.1, по центру).

Циклом $C_n = \{c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ длины n называется унар, изоморфный унару $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ с операцией $i \cdot a = i + 1 \pmod n$ (см. рисунок 3.1, справа).

Основными результатами главы 3 являются следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Если X – унар, у которого решётка конгруэнций $\operatorname{Con} X$ удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству, то X удовлетворяет условиям:*

(i) X имеет лишь конечное число компонент связности;

(ii) X имеет лишь конечное число начальных элементов;

(iii) X имеет лишь конечное число узлов;

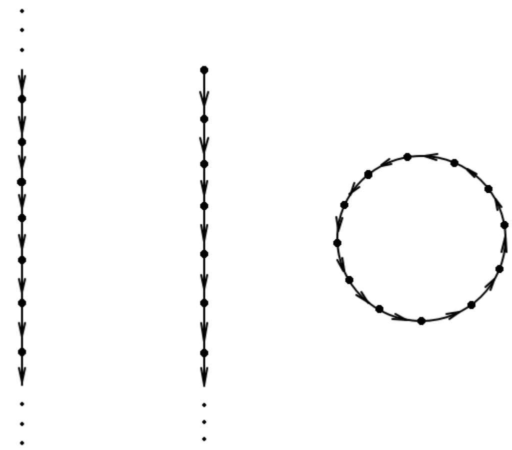


Рисунок 3.1: Прямая (слева), луч (в центре) и цикл (справа).

(iv) $\operatorname{indeg} x < \infty$ *для каждого* $x \in X$.

Теорема 3.2. *Унар* X *удовлетворяет условиям (i)-(iv), сформулированным в теореме 3.1, в том и только том случае, если* X *является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей.*

Из теорем 3.1 и 3.2 непосредственно получается

Следствие 3.1. *Если решётка конгруэнций* $\operatorname{Con} X$ *унара* X *удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству, то* X *является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей.*

Глава 4 диссертационного исследования посвящена условию плоскостности полигона и близким к нему. Рассматриваются унары – полигоны над бесконечной циклической полугруппой. В этой главе получено полное описание коуниверсально плоских, уравнительно плоских, плоских, слабо плоских, главно слабо плоских, точных, строго точных, регулярных унаров, унаров без кручения и унаров, для которых выполняются условия (E) или (P).

Пусть X и Y – соответственно правый и левый полигоны над полугруппой S. Через $X \otimes Y$ будем обозначать их тензорное произведение[23, Определение II.5.2].

Если X_S – правый S-полигон, ${}_SY_T$ – (S,T)-биполигон, то $X \otimes Y$ является правым T-полигоном относительно операции[23, Proposition II.5.12]

$$(x \otimes y)t = x \otimes yt \quad (x \in X,\ y \in Y,\ t \in T).$$

Пусть S – свободная циклическая полугруппа. Так как она коммутативна, то нет разницы между правыми и левыми полигонами над S. Поэтому для унаров X и Y тензорное произведение $X \otimes Y$ – тоже унар. При этом, для $x \in X$, $y \in Y$ имеют место равенства

$$(x \otimes y)a = x \otimes ya = x \otimes ay = xa \otimes y = ax \otimes y = a(x \otimes y).$$

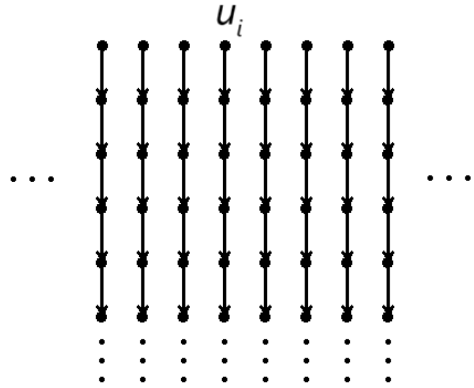


Рисунок 4.1: Свободный унар с множеством свободных образующих $\{u_i \mid i \in I\}$.

Свободный унар с множеством свободных образующих $\{u_i \mid i \in I\}$ – это копроизведение лучей (см. рис. 4.1).

Как и всякий полигон, унар разлагается в копроизведение своих компонент связности. Примеры связных унаров изображены на рисунке 4.2. В первом

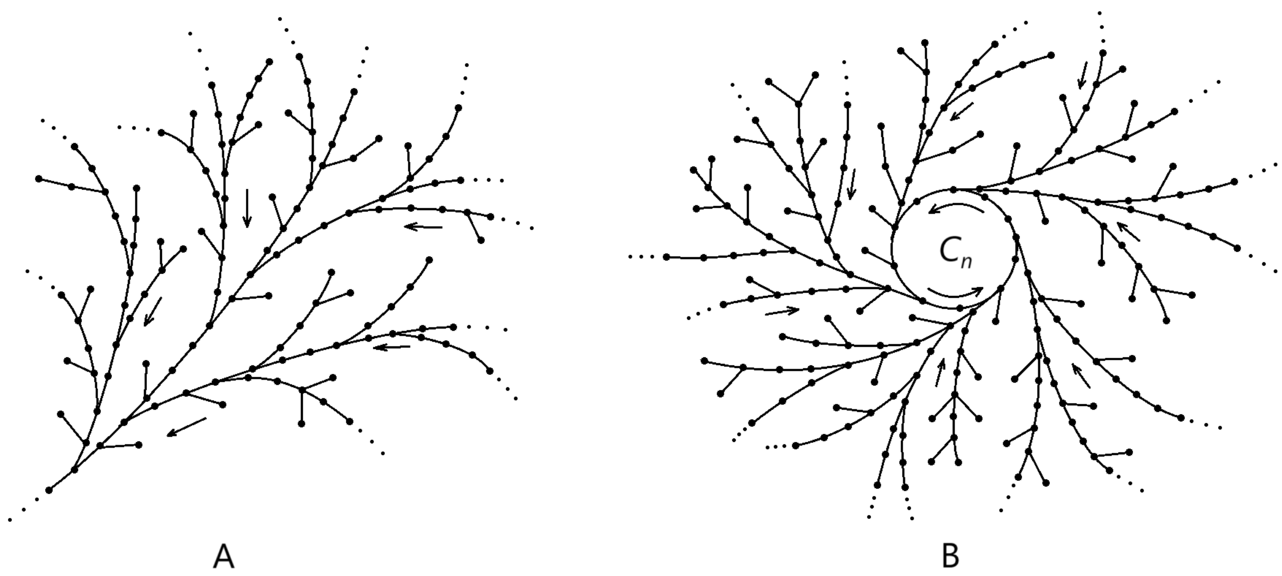


Рисунок 4.2: Связные унары.

случае (рис. 4.2, (A)) унар имеет бесконечную убывающую цепь, во втором (рис. 4.2, (B)) унар содержит цикл C_n.

Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Унар X является плоским в том и только том случае, если X – копроизведение унаров, являющихся прямыми, лучами или циклами.*

Далее описываются унары, тесно связанные с плоскими, а именно: коуниверсально плоские, уравнительно плоские, слабо плоские, главно слабо плоские, точные, строго точные, регулярные унары, унары без кручения и унары, удовлетворяющие условию (E) или (P). Выбор именно этих классов унаров основан на [23, Таблица III.2].

Дадим определение этих типов плоских унаров.

Определение 4.7. *Унар X называется коуниверсально плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет коуниверсальный квадрат;*

уравнительно плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет уравнители;

сильно плоским, если он является коуниверсально плоским и уравнительно плоским;

плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет мономорфизмы;

слабо плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет все вложения левых идеалов в S;

главно слабо плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет все вложения главных левых идеалов в S;

унаром без кручения, если $\forall x, x' \in X$, $\forall s \in S$ $xs = x's \to x = x'$.

Приведём известное утверждение о рассматриваемых классах.

Лемма 4.6. *Для любого унара X верны следующие импликации:*

$$\begin{aligned} \textit{сильно плоский} &\Rightarrow \textit{коуниверсально плоский} \\ \textit{сильно плоский} &\Rightarrow \textit{уравнительно плоский} \Rightarrow \textit{плоский} \\ &\Rightarrow \textit{слабо плоский} \Rightarrow \textit{главно слабо плоский.} \end{aligned}$$

Будем говорить, что полигон X над полугруппой S *удовлетворяет условию (P)*, если для него выполняется импликация: если $xs = x's'$ для $x, x' \in X$, $s, s' \in S$, то существуют $x'' \in X$, $u, v \in S$ такие, что $x = x''u$, $x' = x''v$, $us = vs'$ (см. рис. 4.5).

Полигон X над полугруппой S *удовлетворяет условию (E)*, если для него выполняется импликация: если $xs = xs'$ для $x \in X$, $s, s' \in S$, то существуют $x' \in X$, $u \in S$ такие, что $x = x'u$, $us = us'$.

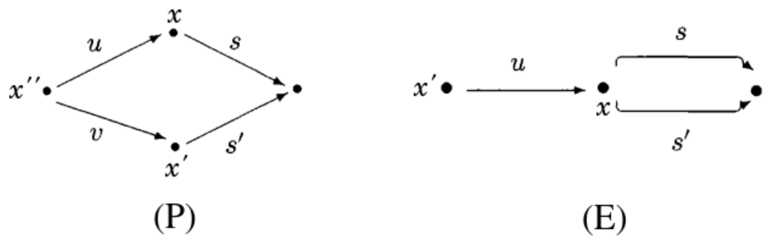


Рисунок 4.5: Условия (P) и (E).

Теперь приведём определение точных, строго точных и регулярных полигонов. "Точное действие" на языке автоматов означает, что разные входные слова по-разному воздействуют хотя бы на одно из состояний автомата. Действие является строго точным, если разные входные слова по разному воздействуют на все состояния автомата.

Полигон X_S называется *точным*, если для $s, t \in S$ выполняется импликация: $(\forall x \in X \; xs = xt) \to s = t$. Полигон X_S называется *строго точным*, если для $s, t \in S$ выполняется импликация: $(\exists x \; xs = xt) \to s = t$ [23, определение I.4.8].

Очевидно, что если полигон является строго точным, то он является точным. Также нетрудно увидеть, что если X – связный унар с циклом (рис. 4.2, (B)), то он не будет являться точным, а значит, не будет и строго точным.

Пусть X – полигон над моноидом S^1. Элемент $x \in S$ называется *регулярным*, если существует гомоморфизм $\varphi : xS^1 \to S^1$ такой, что $x\varphi(x) = x$. Полигон X над моноидом S^1 называется *регулярным* полигоном, если каждый его элемент является регулярным [23, определение III.19.1].

Основными результатами главы являются следующие утверждения.

Следствие 4.6. *Для любого унара X верны следующие эквивалентности:*

(P) $\Leftrightarrow$ плоский $\Leftrightarrow$ слабо плоский $\Leftrightarrow$ главно слабо плоский $\Leftrightarrow$ без кручения.

Следствие 4.7. *Для любого унара X верны следующие импликации:*

коуниверсально плоский $\Leftrightarrow$ уравнительно плоский $\Rightarrow$ (E)
$\Leftrightarrow$ строго точный $\Leftrightarrow$ точный $\Leftrightarrow$ регулярный.

Таким образом, в этой главе диссертационного исследования автором полностью описаны коуниверсально плоские, уравнительно плоские, плоские, слабо плоские, главно слабо плоские унары, унары без кручения, унары, удовлетворяющие условию (E) или (P), точные, строго точные и регулярные унары. На рисунке 4.8 схематично изображены все вышеописанные классы унаров, а также замечание И.А. Сахарова [30, теорема 1] о том, что проективные унары являются копроизведениями лучей.

Таким образом, в диссертационной работе проведено исследование полигонов, на решётке конгруэнций которых выполняется нетривиальное решёточное тождество. Описаны полигоны над прямоугольными связками, решётка конгруэнций которых удовлетворяет тождеству модулярности, дистрибутивности или же является цепью. Разработан и реализован алгоритм, позволяющий строить решётку конгруэнций заданного полигона и проверять различные тождества на ней. Установлены общие свойства полигонов, на решётке конгруэнций которых выполняется хотя бы одно нетривиальное тождество. Получены необходимые условия того, когда на решётке конгруэнций унара выполняется нетривиальное решёточное тождество. Получено полное описание плоских, слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, уравнительно плоских, коуниверсально плоских, точных, строго точных, регулярных унаров и унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P). Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в областях общей алгебры и дискретной математики.

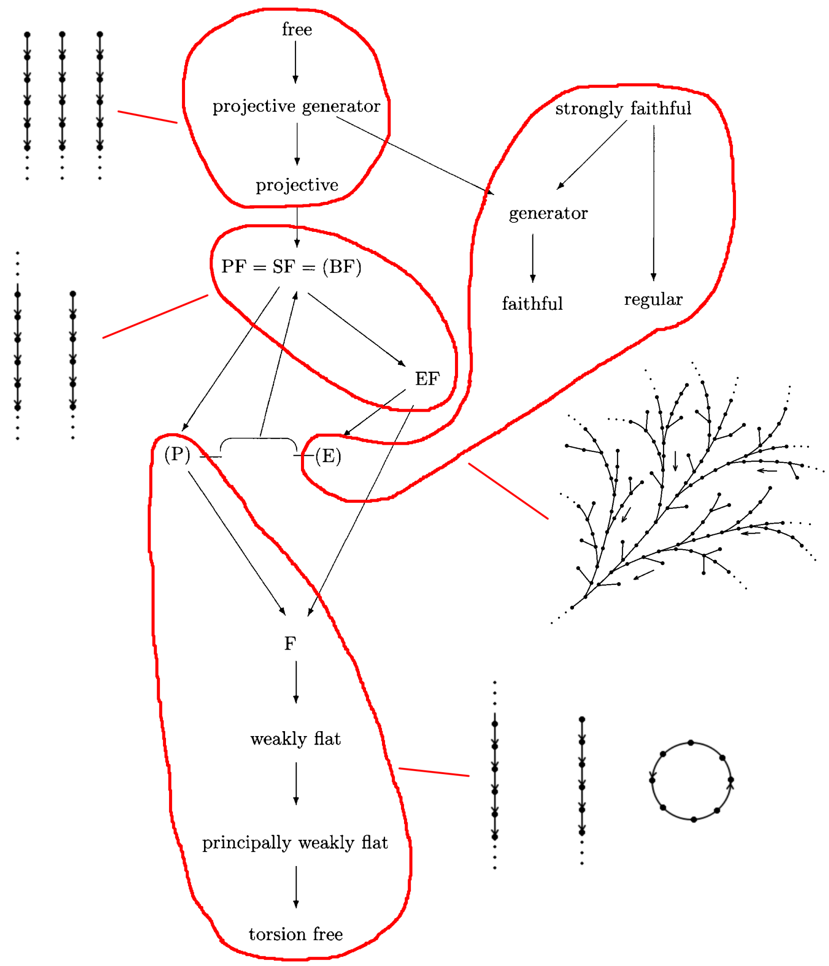


Рисунок 4.8: Классы унаров, близкие к плоским

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Игорю Борисовичу Кожухову за постановку задач и многократные обсуждения. Автор искренне благодарит коллектив кафедры теоретической информатики за дружелюбную атмосферу, а также за предоставленные возможности реализации творческой деятельности.

1 Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой

Начнём изложение с описания полигонов над прямоугольными связками, имеющих модулярную, дистрибутивную, или линейно упорядоченную решётку конгруэнций. Оказывается, что такие полигоны имеют самое большее 11 элементов, а их решётка конгруэнций – 300 элементов. Кроме того, мы установим некоторые факты о строении полигонов с модулярной решёткой конгруэнций над произвольной полугруппой и о строении решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой. Данные исследования основываются на полученном в 2000 году А.Ю. Авдеевым и И.Б. Кожуховым описании полигонов над вполне (0-)простой полугруппой (см. [10]) и характеризации в 2013 году Д.О. Птаховым и А.А. Степановой несвязных полигонов с модулярной или дистрибутивной решёткой конгруэнций (см. [22]).

1.1 Основные определения

Напомним, что полигоны (над полугруппами), имеющие модулярную или дистрибутивную решётку конгруэнций изучались в работах [22] и [14]. Интересно отметить, что, хотя полигон над полугруппой – аналог модуля над кольцом, но решётка конгруэнций модуля (т.е. решётка подмодулей) всегда модулярна, а для решётки конгруэнций полигона модулярность является редким явлением.

Известно, что дистрибутивные и модулярные решётки образуют многообразия, задаваемые соответственно тождеством $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ и тождеством $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (z \wedge (x \vee y))$. Цепи образуют класс решёток, не являющийся многообразием, но замкнутым относительно подрешёток и гомоморфных образов.

Напомним, что *полигоном над полугруппой* называется множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X,\ s, t \in S$ (см. [23]). Можно констатировать, что полигон – это то же самое, что автомат, и то же самое, что унарная алгебра, т.е. алгебра, у которой все операции унарны (операциями полигона X над полугруппой S являются умножения на элементы полугруппы, т.е. $x \mapsto xs$ $(s \in S)$). Элемент z_0 полигона X над полугруппой S называется *нулём*, если $z_0 s = z_0$ для любых $s \in S$.

Если полигон X является объединением своих подполигонов X_i $(i \in I)$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то мы называем X *копроизведением* полигонов X_i и пишем $X = \coprod_{i \in I} X_i$. Для любой полугруппы S мы будем обозначать через S^1 наименьшую полугруппу с единицей, содержащую S, т.е.

$$S^1 = \begin{cases} S, \text{ если } S \text{ имеет единицу,} \\ S \cup \{1\}, \text{ если } S \text{ не имеет единицы.} \end{cases}$$

Заметим, что если S – полугруппа, то S^1 и $S \cup \{1\}$ – не одно и то же, так как во втором случае мы присоединяем единицу к S внешним образом обязательно. Если X – полигон над S, то его можно сделать полигоном над полугруппой S^1, положив $x \cdot 1 = x$ при $x \in X$.

Квазипорядком мы называем рефлексивное и транзитивное бинарное отношение. Пусть X – полигон над полугруппой S. Для элементов $x, y \in X$ положим $x \leqslant y \Leftrightarrow x \in yS^1$. Очевидно, отношение $\leq$ является отношением квазипорядка на множестве X. Полигон X называется *связным*, если для любых $x, y \in X$ существует последовательность элементов $x_0, x_1, \ldots, x_{2k} \in X$ такая, что $x \geqslant x_0 \leqslant x_1 \geqslant x_2 \leqslant \ldots \geqslant x_{2k} \leqslant y$. Ясно, что связность полигона X над полугруппой S – это в точности связность графа с множеством вершин X, у которого рёбрами являются пары (x, xs), где $x \in X,\ s \in S$ и $x \neq xs$. Нетрудно видеть, что всякий полигон является копроизведением связных подполигонов (компонент связности).

Конгруэнцией полигона X над полугруппой S называется такое отношение эквивалентности ρ, что если $(x, y) \in \rho$, то $(xs, ys) \in \rho$ для всех $s \in S$, $x, y \in X$. Все конгруэнции полигона X образуют полную решётку, которую мы будем обозначать $\operatorname{Con}_S X$ или просто $\operatorname{Con} X$. Нуль Δ_X и единицу ∇_X этой решётки мы будем часто обозначать просто Δ и ∇.

Пусть X – полигон над полугруппой S и Y – его подполигон. Конгруэнция $\rho_Y = (Y \times Y) \cup \Delta_X$ называется *конгруэнцией Риса*. Для фактор-полигона X/ρ_Y будем использовать также обозначение X/Y.

Полигон X над полугруппой S (необязательно имеющей единицу) называется *циклическим*, если $X = aS^1$ для некоторого $a \in X$.

Приведём следующее утверждение для полноты изложения.

Лемма 1.1 ([1, лемма 1.1]). *Пусть X – полигон, Y – его подполигон. Тогда:*

(i) решётка $\operatorname{Con} Y$ является подрешёткой решётки $\operatorname{Con} X$;

(ii) решётка $\operatorname{Con}(X/Y)$ изоморфна интервалу решётки $\operatorname{Con} X$;

(iii) если S' – подполугруппа полугруппы S, то решётка $\operatorname{Con}_S X$ является подрешёткой решётки $\operatorname{Con}_{S'} X$.

Доказательство. Для доказательства (i) достаточно заметить, что отображение $\rho \mapsto \rho \cup \Delta_X$ является изоморфным вложением решётки $\operatorname{Con} Y$ в решётку $\operatorname{Con} X$.

Докажем (ii). Утверждение о том, что $\operatorname{Con}(X/Y)$ – подрешётка решётки $\operatorname{Con} X$, следует из общеалгебраического факта: если ρ – конгруэнция алгебры A, то существует взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями алгебры A/ρ и конгруэнциями на A, содержащими ρ; при этом данное соответствие сохраняет операции $\vee$ и $\wedge$, поэтому решётка $\operatorname{Con}(A/\rho)$ изоморфна интервалу $[\rho, \nabla_A]$ решётки $\operatorname{Con} A$ (см. [41, гл. VI, теорема 7] или [42, теорема 6.20]).

Докажем (iii). Пусть $\sigma \in \operatorname{Con}_S X$. Так как σ – конгруэнция, то соотношение $(x, y) \in \sigma$ влечёт $(xs, ys) \in \sigma$ для любых $s \in S$, но тогда это же будет выполняться и для всех $s \in S'$, так как $S' \subseteq S$. $\square$

Замечание 1.1 ([1, замечание 1.1]). *Утверждение (iii) означает, что при «сужении» полугруппы решётка конгруэнций полигона «расширяется». Поэтому если решётка* $\operatorname{Con}_{S'} X$ *модулярна (или дистрибутивна, или является цепью), то решётка* $\operatorname{Con}_S X$ *также модулярна (или дистрибутивна, или является цепью).*

Следующие определения и обозначения будут использоваться на протяжении этой главы.

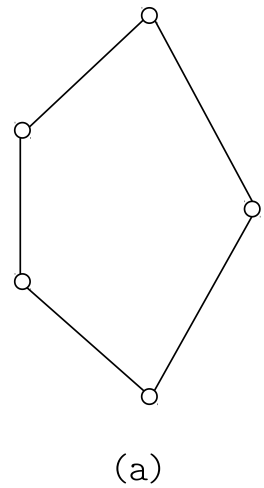
Полугруппа левых нулей L – это полугруппа, в которой выполняется тождество $xy = x$. *Полугруппа правых нулей* R – полугруппа с тождеством $xy = y$. *Прямоугольная связка* – это прямое произведение $S = L \times R$, то есть полугруппа элементов вида (l, r) ($l \in L$, $r \in R$) с умножением $(l, r) \cdot (l', r') = (l, r')$.

Целью этой главы является полное описание полигонов над прямоугольными связками, имеющих модулярную (или дистрибутивную, или линейно упорядоченную) решётку конгруэнций.

Формулировка основных результатов приведена в п. 1.4.2 и п. 1.6.

1.2 Общие свойства полигонов с модулярной решёткой конгруэнций

Хорошо известно, что модулярность решётки равносильна тому, что в ней нет подрешёток, изоморфных решётке, изображённой на рисунке 1.1(a) (называемой *пентагоном*), а дистрибутивность равносильна отсутствию подрешёток, изоморфных пентагону или *диаманту* (рис. 1.1(b)) (см. [41, теоремы I.12 и II.13], [40, теоремы II.1 и II.2]).



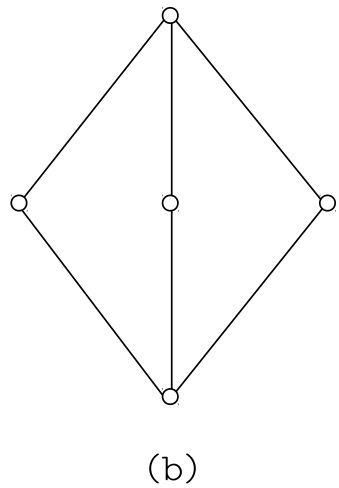


Рисунок 1.1: Пентагон (a) и диамант (b)

Сделаем несколько замечаний о полигонах (над произвольными полугруппами), имеющих модулярную решётку конгруэнций.

Лемма 1.2 ([1, лемма 2.1]). *Пусть M – множество. Тогда:*
(i) решётка $\mathrm{Eq}\, M$ *модулярна тогда и только тогда, когда* $|M| \leqslant 3$*;*
(ii) решётка $\mathrm{Eq}\, M$ *дистрибутивна тогда и только тогда, когда* $|M| \leqslant 2$*;*
(iii) решётка $\mathrm{Eq}\, M$ *– цепь тогда и только тогда, когда* $|M| \leqslant 2$*.*

Доказательство. Решётка $\mathrm{Eq}\, M$ для $|M| > 3$ будет содержать подрешётку-пентагон и следовательно, уже будет немодулярна. Для дистрибутивности и линейной упорядоченности доказательство аналогично. □

Пусть X – полигон над прямоугольной связкой S. Очевидно, множество XS является подполигоном полигона X, причём фактор-полигон Риса X/XS является полигоном над полугруппой левых нулей.

Лемма 1.3 ([1, лемма 2.2]). *Пусть X – полигон над полугруппой S и $A = X \setminus XS$. Тогда:*
(i) если решётка $\mathrm{Con}\, X$ *модулярна, то* $|A| \leqslant 2$;
(ii) если решётка $\mathrm{Con}\, X$ *дистрибутивна, то* $|A| \leqslant 1$;
(iii) если решётка $\mathrm{Con}\, X$ *– цепь, то* $|A| \leqslant 1$.

Доказательство. Рассмотрим полигон X/XS. Докажем (i). Так как X/XS является полигоном над полугрупой левых нулей, то по [14, лемма 1] $|A| \leqslant 2$.

Аналогичным образом, истинность утверждения (ii) следует из [14, леммы 5 и 6], а утверждения (iii) – из [14, теорема 5]. □

В работе [22] исследовались условия модулярности и дистрибутивности решёток конгруэнций полигонов над произвольными полугруппами. Была доказана теорема о связи модулярности (дистрибутивности) решёток конгруэнций полигона и его компонент связности. Важную роль в этих результатах играет понятие сквозной конгруэнции полигона. Приведём точные формулировки.

Конгруэнция ρ полигона X называется *сквозной*, если существует разложение $X = U \sqcup V$ полигона X в копроизведение и элементы $u_1, u_2 \in U,\ v_1, v_2 \in V$ такие, что $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \rho$, а $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \notin \rho$. Сквозные конгруэнции играют важную роль, как показывает следующее утверждение.

Лемма 1.4 ([22, лемма 2.4]). *Если полигон X имеет сквозную конгруэнцию, то решётка* $\mathrm{Con}\, X$ *не модулярна.*

Теорема 1.1 ([22, теорема 3.1]). *Пусть X – полигон над полугруппой S. Решётка* $\mathrm{Con}\, X$ *модулярна в том и только том случае, если выполнены условия:*

(1) полигон X не содержит 4 попарно не пересекающихся подполигонов;

(2) решётка $\mathrm{Con}\, K$ *модулярна для каждой компоненты связности K полигона X;*

(3) полигон X не содержит сквозных конгруэнций.

Отметим ещё одно свойство полигонов с модулярной решёткой конгруэнций (над произвольной полугруппой). В [14, лемма 2] соответствующее утверждение было доказано для полигонов над полугруппой левых нулей.

Лемма 1.5 ([1, лемма 2.3]). *Пусть X – полигон над полугруппой S и $a, b \in X \setminus XS$, где $a \neq b$. Если решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна, то $aS \cap bS \neq \emptyset$.*

Доказательство. Предположим, что $aS \cap bS = \emptyset$. Возьмём какое-нибудь $s \in S$ и положим $y = as$, $z = bs$, $Y = XS$. Рассмотрим отношение $\rho = (ab)(Y)$. Очевидно, что ρ – конгруэнция. Так как $aS \cap bS = \emptyset$, то мы имеем разложение $X = aS^1 \sqcup bS^1 (\sqcup Y')$, где $Y' = Y \setminus (aS \cup bS)$, скобки означают, что третье слагаемое отсутствует, если $Y' = \emptyset$. Заметим, что $(a, b), (y, z) \in \rho$, а $(a, y), (b, z) \notin \rho$, при этом a, y находятся в одном слагаемом, а b, z – в другом. Следовательно, конгруэнция ρ сквозная. Согласно лемме 1.4 решётка $\operatorname{Con} X$ не модулярна. □

1.3 Полигоны над прямоугольными связками

Теперь перейдём к рассмотрению полигонов над прямоугольными связками. Для начала укажем некоторые другие характеризации прямоугольных связок. Приведём их без доказательства, так как в дальнейшем они нам не потребуются. Справедливость этих утверждений проверяется непосредственно.

(i) Прямоугольная связка – это полугруппа, удовлетворяющая тождествам $x^2 = x$ и $xyz = xz$;

(ii) прямоугольная связка – это полугруппа с тождеством $xyx = x$;

(iii) прямоугольная связка – это полугруппа, удовлетворяющая квазитождеству антикоммутативности, т.е. $xy = yx \to x = y$.

В работе [10] были полностью описаны полигоны над вполне простой полугруппой и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой. В качестве следствия основного результата было получено описание полигонов над прямоугольной связкой. Приведём это описание.

Предложение 1.1 ([10, следствие 9]). *Пусть $S = L \times R$ – прямоугольная связка, X и Q – множества. Пусть для $l \in L$ и $r \in R$ заданы отображения $\pi_l : X \to Q$, $\kappa_r : Q \to X$, причём $\kappa_r \pi_l = 1_Q$ (тождественное отображение) при всех $r \in R$, $l \in L$. Для $x \in X$ и $\langle l, r \rangle \in S$ положим $x \cdot \langle l, r \rangle = x\pi_l\kappa_r$. Тогда X будет являться полигоном над S. Кроме того, любой полигон над прямоугольной связкой изоморфен полигону, построенному таким образом.*

Пусть $S = L \times R$ – прямоугольная связка и X – полигон над S. Так как $\kappa_r \pi_l = 1_Q$, то отображения κ_r инъективны, а π_l сюръективны. Положим $Y = XS$. Проверим, что $Y = \bigcup_{r \in R} \operatorname{im}\kappa_r$. Действительно, если $y \in Y$, то $y = x \cdot \langle l, r \rangle = x\pi_l\kappa_r \in \operatorname{im}\kappa_r$ при некотором $r \in R$, а если $u \in \operatorname{im}\,\kappa_r$, то $u = q\kappa_r = q\kappa_r\pi_l\kappa_r = q\kappa_r \cdot \langle l, r \rangle \in XS$. Положим $\tau = \bigcap_{l \in L} \ker\ \pi_l$ и $\sigma = \tau|_Y$. Очевидно, $\tau \in \operatorname{Eq} X$, а $\sigma \in \operatorname{Eq} Y$.

Лемма 1.6 ([1, лемма 3.1]). $(\ker\ \pi_l)|_Y$ *не зависит от* l.

Доказательство. Пусть $l, l' \in L$, $y, y' \in Y$ и $(y, y') \in \ker\ \pi_l$. Тогда $y = q\kappa_r$, $y' = q'\kappa_{r'}$ при некоторых $q, q' \in Q$, $r, r' \in R$ и $y\pi_l = y'\pi_l$. Отсюда следует, что $q\kappa_r\pi_l = q'\kappa_{r'}\pi_l$. Так как $\kappa_r\pi_l = \kappa_{r'}\pi_l = 1_Q$, то $q = q'$. Теперь $y\pi_{l'} = q\kappa_r\pi_{l'} = q = q' = q'\kappa_{r'}\pi_{l'} = y'\pi_l$, т.е. $(y, y') \in \ker\ \pi_{l'}$. □

Ввиду леммы 1.6 $\tau = \ker\pi_l$ при любом $l \in L$. Отношение σ вызывает разбиение множества Y на классы: $Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$.

Лемма 1.7 ([1, лемма 3.2]). *Если* $y \in Y_i$, *то* $y \cdot \langle l, r\rangle \in Y_i$ *и* $y \cdot \langle l, r\rangle$ *не зависит от* l.

Доказательство. Ясно, что $y \cdot \langle l, r\rangle \in Y$. Так как $(y \cdot \langle l, r\rangle)\,\pi_l = y\pi_l\kappa_r\pi_l = y\pi_l$, то $(y, y \cdot \langle l, r\rangle) \in \ker\pi_l$, а значит, $y \cdot \langle l, r\rangle \in Y_i$. Наконец, так как $y \in Y$, то $y = x \cdot \langle l_1, r_1\rangle$ при некоторых $l_1 \in L$, $r_1 \in R$, а значит, $y \cdot \langle l', r\rangle = y\pi_{l'}\kappa_r = x\pi_{l_1}\kappa_{r_1}\pi_{l'}\kappa_r = x\pi_{l_1}\kappa_r = x\pi_{l_1}\kappa_{r_1}\pi_l\kappa_r = y \cdot \langle l, r\rangle$. □

Замечание 1.2 ([1, замечание 3.1]). *Ввиду леммы 1.7 мы можем считать* Y *полигоном над полугруппой* R, *где действие определено формулой* $y \cdot r = y \cdot \langle l, r\rangle$ *для* $y \in Y$, $r \in R$, $l \in L$; *это определение корректно, так как нет зависимости от* l. *Подмножество* Y_i – *подполигон* R*-полигона* Y, *а так как* Y_i – σ*-класс, то* $|Y_i r| = 1$ *при любом* $r \in R$. *Отсюда* $Y_i r = \{y_{ir}\}$ *при некотором* $y_{ir} \in Y_i$.

Лемма 1.8 ([1, лемма 3.3]). *Если* $a \in A$, $l \in L$, $r \in R$, *то* $a \cdot \langle l, r\rangle = y_{ir}$ *при некотором* $i \in I$, *не зависящем от* r.

Доказательство. Очевидно, $a \cdot \langle l, r\rangle \in Y$. Поэтому $a \cdot \langle l, r\rangle \in Y_i$ при некотором $i \in I$. Имеем: $a \cdot \langle l, r\rangle = a \cdot \langle l, r\rangle \cdot \langle l, r\rangle = (a \cdot \langle l, r\rangle)\, r = y_{ir}$. Кроме того, для любого $r' \in R$ мы имеем: $a \cdot \langle l, r'\rangle = a \cdot \langle l, r\rangle \cdot \langle l, r'\rangle \subseteq Y_i r' \subseteq Y_i$. □

Из леммы 1.8 следует, что для каждого $l \in L$ мы имеем отображение $\varphi_l : A \to I$, а именно $a\varphi_l = i \Leftrightarrow a \cdot \langle l, r\rangle = y_{ir}$ при всех $r \in R$.

Лемма 1.9 ([1, лемма 3.4]). $Y_i = \{y_{ir} \mid r \in R\}$ *при любом* $i \in I$ *и* $y_{ir} \cdot r' = y_{ir'}$ *при* $r, r' \in R$.

Доказательство. Очевидно. □

Теперь мы можем переформулировать предложение 1.1, записав его в более удобном для дальнейшего виде.

Утверждение 1.1 ([1, предложение 3.2]). *Пусть* $S = L \times R$ – *прямоугольная связка. Пусть* Y – *множество, разбитое на классы некоторым отношением эквивалентности* σ: $Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$. *Пусть* $\{y_{ir} \mid i \in I,\ r \in R\}$ – *семейство элементов из* Y *таких, что* $Y_i = \{y_{ir} \mid r \in R\}$ *для любого* $i \in I$. *Далее,* *пусть A – множество такое, что $A \cap Y = \emptyset$, и для каждого $l \in L$ задано отображение $\varphi_l : A \to I$. Положим $X = Y \cup A$ и определим умножение элементов $x \in X$ на элементы полугруппы S следующим образом:*

$$x \cdot \langle l, r \rangle = y_{ir}$$

при $x \in Y_i$, а также при $x \in A$, где $x\varphi_l = i$. Тогда X будет являться полигоном над полугруппой $S = L \times R$. Кроме того, любой полигон над прямоугольной связкой изоморфен полигону, построенному таким образом.

Доказательство. Доказательство нетрудно получить, используя леммы 1.6–1.9. □

Таким образом, всякий полигон X над прямоугольной связкой S представим в виде

$$X = (X \setminus XS) \cup \coprod_{i \in I} Y_i, \tag{1.1}$$

где Y_i – подполигоны, неразложимые в нетривиальное копроизведение. Более того, каждое Y_i – это циклический полигон, порождаемый любым своим элементом (из правила умножения на элементы из S видно, что $yS = Y_i$ при любом $y \in Y_i$). И если $a \in A$ и $i = a\varphi_l$ при некотором $l \in L$, то $aS \supseteq Y_i$.

Пользуясь представлением (1.1), можно сделать два важных для дальнейшего замечания.

Замечание 1.3 ([1, замечание 3.2]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой. У каждого подполигона Y_i из* (1.1) *любое отношение эквивалентности является конгруэнцией:* $\operatorname{Con} Y_i = \operatorname{Eq} Y_i$. *Выберем любые отношения $\rho_i \in \mathrm{Eq}Y_i$. Тогда отношение $\bigcup_{i \in I} \rho_i \cup \Delta_X$ будет являться конгруэнцией полигона X.*

Замечание 1.4 ([1, замечание 3.3]). *Полигон над прямоугольной связкой не может содержать более чем $|I|$ попарно непересекающихся подполигонов.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ – семейство попарно не пересекающихся подполигонов. Каждому $\gamma \in \Gamma$ поставим в соответствие какой-нибудь элемент $i \in I$, для которого $U_\gamma \supseteq Y_i$. Ясно, что это отображение является вложением Γ в I. Следовательно, $|\Gamma| \leqslant |I|$. □

Всюду в дальнейшем X будет обозначать полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$. Кроме того, на протяжении всей работы мы будем использовать обозначения, введённые в этом разделе, т.е. $Y = XS = \coprod_{i \in I} Y_i$, $A = X \setminus XS$, $\varphi_l : A \to I$, а также тот факт, что $Y_i = \{y_{ir} \mid r \in R\}$.

1.4 Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой

Следующее утверждение показывает, что модулярность решётки конгруэнций является весьма существенным ограничением для полигонов над прямоугольной связкой.

Лемма 1.10 ([1, лемма 4.1]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$, пусть $Y = \bigsqcup_{i\in I} Y_i$ – разложение на компоненты связности. Если решётка* $\operatorname{Con} X$ *модулярна, то* $|A| \leqslant 2$, $|I| \leqslant 3$ *и* $|Y_i| \leqslant 3$ *для каждого* $i \in I$.

Доказательство. Тот факт, что $|A| \leqslant 2$, следует из леммы 1.3. Далее, так как $Y = XS$ – подполигон, то по лемме 1.1 решётка $\operatorname{Con} Y$ модулярна. Пусть σ – конгруэнция на Y, соответствующая разбиению $Y = \coprod_{i\in I} Y_i$ (см. лемму 1.6 и текст после неё). По лемме 1.1 решётка $\operatorname{Con}(Y/\sigma)$ модулярна. Так как полигон Y/σ состоит целиком из нулей, то $\operatorname{Con}(Y/\sigma) = \operatorname{Eq}(Y/\sigma)$, и лемма 1.1 нам даёт, что $|Y/\sigma| \leqslant 3 \implies |I| \leqslant 3$. $|Y_i| \leqslant 3$ следует из того, что Y_i – циклический полигон, и в нём любое отношение эквивалентности будет являться конгруэнцией. □

Для элементов $i, j \in I$ таких, что $i \neq j$, введём в рассмотрение двудольный граф Γ_{ij}, у которого вершинами являются элементы множества $Y_i \cup Y_j$, а рёбрами – пары (y_{ir}, y_{jr}) при $r \in R$. Следующая лемма отмечает важное свойство графов Γ_{ij} в случае модулярности решётки конгруэнций.

Лемма 1.11 ([1, лемма 4.2]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$. Пусть $Y = XS$, $Y = \coprod_{i\in I} Y_i$ – разложение полигона Y на компоненты связности. Если решётка* $\operatorname{Con} X$ *модулярна, то графы* Γ_{ij} *связны.*

Доказательство. Пусть решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна и $i \neq j$. Очевидно, $Y_i \cup Y_j$ является подполигоном, следовательно, по лемме 1.1 решётка $\operatorname{Con}(Y_i \cup Y_j)$ модулярна. Предположим, что граф Γ_{ij} несвязен, и пусть (y_{ir}, y_{jr}), $(y_{ir'}, y_{jr'})$ – рёбра, принадлежащие разным компонентам связности K и K'. Нетрудно проверить, что в этом случае отношение $\rho = (K \times K) \cup (K' \times K') \cup \Delta_X$ будет сквозной конгруэнцией полигона $Y_i \cup Y_j$, что противоречит теореме 1.1. □

Лемма 1.12 ([1, лемма 4.3]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS = \coprod_{i\in I} Y_i$ – разложение на компоненты связности. Если $\rho \in \operatorname{Con} X$, $y \in Y_i$ и $y' \in Y_j$ таковы, что $(y, y') \in \rho$ и граф Γ_{ij} связен, то $(Y_i \cup Y_j) \times (Y_i \cup Y_j) \subseteq \rho$.*

Доказательство. Обозначим через $E(\Gamma_{ij})$ множество рёбер графа Γ_{ij}. Так как $Y_i = \{y_{ir} | r \in R\}$, то $y = y_{ip}$ при некотором $p \in R$. Аналогично $y' = y_{iq}$ при некотором $q \in R$. Так как $(y, y') \in \rho$ и ρ – конгруэнция, то $(yr, y'r) \in \rho$ при любом $r \in R$, т.е. $(y_{ir}, y_{jr}) \in \rho$. Таким образом, для любого ребра (y_1, y_2) графа

Γ_{ij} имеет место соотношение $(y_1, y_2) \in \rho$. Пусть y^* и y^{**} – любые элементы из $Y_i \cup Y_j$. Так как граф Γ_{ij} связен, то существует последовательность элементов из $Y_i \cup Y_j$

$$y^* = y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(k)} = y^{**}$$

такая, что $(y^{(t)}, y^{(t+1)}) \in E(\Gamma_{ij})$ при $t = 0, 1, \ldots, k-1$. Ввиду ранее доказанного $(y^{(t)}, y^{(t+1)}) \in \rho$ при всех t. Следовательно, $(y^*, y^{**}) \in \rho$. □

Замечание 1.5 ([1, замечание 4.1]). *Отметим, что из леммы 1.2 и того факта, что* $\operatorname{Con} X$ *– подрешётка решётки* $\operatorname{Eq} X$*, следует, что при* $|X| \leqslant 3$ *решётка* $\operatorname{Con} X$ *модулярна, а при* $|X| \leqslant 2$ $\operatorname{Con} X = \{\Delta_X, \nabla_X\}$*, поэтому решётка* $\operatorname{Con} X$ *– цепь, а значит, дистрибутивна.*

Связность графа Γ_{ij}, как показывает предыдущая лемма, является сильным ограничением на строение конгруэнций полигона: если какие-либо элементы $y \in Y_i$, $y' \in Y_j$ при $i \neq j$ лежат в одном ρ-классе, то все элементы множества $Y_i \cup Y_j$ лежат в одном ρ-классе. Покажем теперь, что в случае связности графов Γ_{ij} решётка конгруэнций $\operatorname{Con} X$ вообще не зависит от полугруппы R.

Предложение 1.2 ([1, предложение 4.1]). *Пусть X и $\tilde{X}$ – два полигона над прямоугольными связками $S = L \times R$ и $\tilde{S} = L \times \tilde{R}$, и пусть $Y = XS$, $\tilde{Y} = \tilde{X}\tilde{S}$, $A = X \setminus Y$, $\tilde{A} = \tilde{X} \setminus \tilde{Y}$; пусть $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ и $\tilde{Y} = \coprod_{i \in I} \tilde{Y}_i$ – разложения в копроизведение конеразложимых полигонов и графы Γ_{ij}, $\tilde{\Gamma}_{ij}$ связны при $i \neq j$. Пусть для каждого $l \in L$ заданы отображения $\varphi_l : A \to I$ и $\tilde{\varphi}_l : \tilde{A} \to I$. Предположим также, что множества A и $\tilde{A}$, а также для каждого $i \in I$ множества Y_i и $\tilde{Y}_i$ находятся во взаимно однозначном соответствии $A \to \tilde{A}$ ($a \mapsto \tilde{a}$), $Y_i \to \tilde{Y}_i$ ($y \mapsto \tilde{y}$), а отображения φ_l и $\tilde{\varphi}_l$ согласованы в том смысле, что $a\varphi_l = \tilde{a}\tilde{\varphi}_l$ при любых $a \in A$, $l \in L$. Тогда отображение $X \to \tilde{X}$ ($a \mapsto \tilde{a}$, $y \mapsto \tilde{y}$) индуцирует изоморфизм решёток конгруэнций $\operatorname{Con}_S X$ и $\operatorname{Con}_{\tilde{S}} \tilde{X}$.*

Доказательство. Для $\rho \in \operatorname{Eq} X$ положим $\tilde{\rho} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid (x, y) \in \rho\}$. Очевидно, отображение $\rho \mapsto \tilde{\rho}$ является изоморфизмом решёток $\operatorname{Eq} X$ и $\operatorname{Eq} \tilde{X}$. Достаточно доказать эквивалентность $\rho \in \operatorname{Con} X \Leftrightarrow \tilde{\rho} \in \operatorname{Con} \tilde{X}$. Ввиду симметрии можно ограничиться доказательством импликации $\rho \in \operatorname{Con} X \Rightarrow \tilde{\rho} \in \operatorname{Con} \tilde{X}$. Пусть $\rho \in \operatorname{Con} X$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ и $\tilde{s} \in \tilde{S}$. Тогда $\tilde{s} = \langle l, \tilde{r} \rangle$, $\tilde{r} \in \tilde{R}$. Надо доказать, что $(\tilde{x}\tilde{s}, \tilde{y}\tilde{s}) \in \tilde{\rho}$.

1-й случай: $x, y \in A$. Положим $x\varphi_l = i$, $y\varphi_l = j$.

Случай 1.1: $i \neq j$. Тогда $(Y_i \times Y_j) \cap \rho \neq \emptyset$. Следовательно, по лемме 1.12 все элементы множества $Y_i \cup Y_j$ лежат в одном ρ-классе. Это влечёт, что все элементы множества $\tilde{Y}_i \cup \tilde{Y}_j$ лежат в одном $\tilde{\rho}$-классе. Так как $\tilde{x}\tilde{s} \in \tilde{Y}_i$ и $\tilde{y}\tilde{s} \in \tilde{Y}_j$, то $(\tilde{x}\tilde{s}, \tilde{y}\tilde{s}) \in \tilde{\rho}$.

Случай 1.2: $i = j$. Так как $\tilde{x}\tilde{\varphi}_l = \tilde{y}\tilde{\varphi}_l = i$, то $\tilde{x}\tilde{s} = \tilde{x} \cdot \langle l, \tilde{r} \rangle = \tilde{y}_{i\tilde{r}}$ и аналогично $\tilde{y}\tilde{s} = \tilde{y}_{i\tilde{r}}$. Таким образом, $\tilde{x}\tilde{s} = \tilde{y}\tilde{s}$.

2-й случай: $x \in A$, $y \in Y_k$. Пусть $x\varphi_l = i$. Тогда $\tilde{x} \cdot \langle l, \tilde{r} \rangle = \tilde{y}_{i\tilde{r}}$, $\tilde{y} \cdot \langle l, \tilde{r} \rangle = \tilde{y}_{k\tilde{r}}$.

Случай 2.1: $i \neq k$. Имеем: $(x \cdot \langle l, r\rangle, y \cdot \langle l, r\rangle) \in \rho$, т.е. $(y_{ir}, y_{kr}) \in \rho$. Следовательно, $(Y_i \times Y_k) \cap \rho \neq \emptyset$. По лемме 1.12 все элементы множества $Y_i \cup Y_k$ лежат в одном ρ-классе. Это влечёт, что все элементы множества $\tilde{Y}_i \cup \tilde{Y}_k$ лежат в одном $\tilde{\rho}$-классе, а значит, $(\tilde{x}\tilde{s}, \tilde{y}\tilde{s}) \in \tilde{\rho}$.

Случай 2.2: $i = k$. Тогда $\tilde{x}\tilde{s} = \tilde{y}\tilde{s} = \tilde{y}_{i\tilde{r}}$.

3-й случай: $x \in Y_i$, $y \in Y_j$. Имеем: $\tilde{x}\tilde{s} = \tilde{x} \cdot \langle l, \tilde{r}\rangle = \tilde{y}_{i\tilde{r}}$ и аналогично $\tilde{y}\tilde{s} = \tilde{y}_{j\tilde{r}}$.

Случай 3.1: $i \neq j$. Так как $(xs, ys) \in \rho$ и $xs \in Y_i$, $ys \in Y_j$, то xs, ys – в одном ρ-классе. Следовательно, $\tilde{x}\tilde{s}$, $\tilde{y}\tilde{s}$ – в одном $\tilde{\rho}$-классе.

Случай 3.2: $i = j$. Тогда $\tilde{x}\tilde{s} = \tilde{y}\tilde{s}$. $\square$

Только что доказанное утверждение показывает, что если у полигона X изменять множества $\{y_{ir}\}$, но так, чтобы сохранялись соотношения $Y_i = \{y_{ir} \mid r \in R\}$ и связность графов Γ_{ij} (можно даже изменить множество R), то решётка конгруэнций изменяться не будет.

Всюду в дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения для отношений эквивалентности на конечных множествах. Если X – конечное множество, $\rho \in \mathrm{Eq}\, X$ и $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ – ρ-класс, то будем писать $K = (a_1 a_2 \ldots a_m)$. Для ρ-класса $K = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup Y$, где $Y \subseteq X$, пишем $K = (a_1 a_2 \ldots a_m Y)$; в случае $K = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup Y_1 \cup Y_2$ пишем $K = (a_1 \ldots a_k Y_1 Y_2)$ и т.д. Отношение ρ записывается в виде $\rho = K_1 \ldots K_s$, одноэлементные классы писать необязательно. Например, если $X = \{a, b, c, 1, 2, \ldots, 9\}$, $Y = \{a, b, c\}$ и ρ-классы таковы: $Y \cup \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7\}, \{8\}, \{9\}$, то запись имеет вид $\rho = (12Y)(345)(67)$.

Построим один класс конгруэнций полигона X над прямоугольной связкой $S = L \times R$, который в случае, когда $X = XS$ и графы Γ_{ij} связны, совпадает с решёткой конгруэнций.

Предложение 1.3 ([1, предложение 4.2])**.** *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение в копрямое произведение копрямо неразложимых подполигонов. Возьмём любое отношение эквивалентности $\sigma \in \mathrm{Eq}\, I$. Пусть I' – множество всех элементов из I, у которых σ-класс одноэлементен, $I'' = I \setminus I'$, $\{K_\beta \mid \beta \in B\}$ – множество всех σ-классов, лежащих в I'', и $U_\beta = \cup\{Y_i \mid i \in K_\beta\}$ при $\beta \in B$. Для каждого $i \in I'$ возьмём какое-либо $\rho_i \in \mathrm{Eq}\, Y_i$. Положим*

$$\rho = \bigcup\{\rho_i \mid i \in I'\} \cup \bigcup\{U_\beta \times U_\beta \mid \beta \in B\} \tag{1.2}$$

Тогда ρ – конгруэнция полигона Y. Кроме того, если $X = Y$ и все графы Γ_{ij} связны, то (1.2) – общий вид конгруэнций полигона X.

Доказательство. Докажем, что отношение ρ, определённое формулой (1.2), является конгруэнцией. Очевидно, ρ – отношение эквивалентности. Пусть $(x, y) \in \rho$ и $s \in S$. Требуется доказать, что $(xs, ys) \in \rho$. Если $(x, y) \in \rho_i$, то $i \in I'$ и $x, y \in Y_i$. Тогда $xs = ys$, а значит, $(xs, ys) \in \rho$. Пусть $x, y \in U_\beta$. Тогда

$x \in Y_i$, $y \in Y_j$ и $i, j \in K_\beta$. Следовательно, $xs \in Y_i$, $ys \in Y_j$, поэтому $xs, ys \in U_\beta$, а значит, $(xs, ys) \in \rho$.

Предположим теперь, что $X = Y$, графы Γ_{ij} связны и $\rho \in \operatorname{Con} Y$. Рассмотрим отношение $\sigma = \{(x, y) \in I \times I \mid (Y_i \times Y_j) \cap \rho \neq \emptyset\}$ на множестве I. Проверим, что $\sigma \in \operatorname{Eq} I$. Рефлексивность и симметричность отношения σ очевидны. Пусть $(i, j), (j, k) \in \sigma$. Тогда $(x, y), (y', z) \in \rho$ при некоторых $x \in Y_i$, $y, y' \in Y_j$, $z \in Y_k$. Если $i = j$ или $j = k$, то ясно, что $(i, k) \in \sigma$. Далее считаем, что $i \neq j$ и $j \neq k$. Так как граф Γ_{ij} связен, то по лемме 1.12 $Y_i \times Y_j \subseteq \rho$. Из связности графа Γ_{jk} аналогично получаем, что $Y_j \times Y_k \subseteq \rho$. Транзитивность отношения ρ даёт включение $Y_i \times Y_k \subseteq \rho$. Отсюда $(i, k) \in \sigma$. Таким образом, σ транзитивно. Следовательно, $\sigma \in \operatorname{Eq} I$.

Пусть $I'' = \{i \in I \mid \exists j \neq i \, (Y_i \times Y_j) \cap \rho \neq \emptyset$, $I' = I \setminus I''$. Тогда для каждого $i \in I''$ его σ-класс состоит из одного элемента i. Для $i \in I'$ положим $\rho_i = (Y_i \times Y_i) \cap \rho$. Очевидно, $\rho_i \in \operatorname{Eq} Y_i$. При $i \in I''$ существуют элементы x, y такие, что $x \in Y_i$, $y \in Y_j$ при некотором $j \neq i$. Так как граф Γ_{ij} связен, то по лемме 1.12. $Y_i \times Y_j \subseteq \rho$. При этом $(i, j) \in \sigma$. Это означает, что для $i \in I''$, если K – σ-класс элемента i, то все элементы множества $U = \cup\{Y_j \mid j \in K\}$ лежат в одном ρ-классе.

Теперь ясно, что ρ имеет вид (1.2). $\square$

Формулу (1.2) в принятых нами обозначениях можно переписать так:

$$\rho = (Y_{i_1} \dots Y_{i_{k_1}}) \dots (Y_{i_{k_{m-1}+1}} \dots Y_{i_{k_m}}) \rho_{j_1} \dots \rho_{j_t}, \tag{1.3}$$

где $\rho_{j_s} \in \operatorname{Eq} Y_{j_s}$ для $s = 1, 2, \dots, t$ и $I = \{i_1, \dots, i_{k_1}, i_{k_1+1}, \dots, i_{k_m}, j_1, \dots, j_t\}$.

Приведём пример, иллюстрирующий доказанное выше утверждение.

Пример 1.1 ([1, пример 4.1]). *Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ – полигон над прямоугольной связкой S, причём $X = XS$ и $Y_1 = \{1, 2, 3\}$, $Y_2 = \{4, 5\}$, $Y_3 = \{6, 7\}$ – его конеразложимые подполигоны. Тогда множество $C = \{\Delta$, (12), (13), (23), (123), (45), (12)(45), (13)(45), (23)(45), (123)(45), (67), (12)(67), (13)(67), (23)(67), (123)(67), (12)(45)(67), (13)(45)(67), (23)(45)(67), (123)(45)(67), (4567), (12)(4567), (13)(4567), (23)(4567), (123)(4567), (12345), (12367), (12345)(67), (12367)(45), $\nabla\}$ является подрешёткой решётки конгруэнций полигона X. Если графы Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{23} связны, то других конгруэнций нет, т.е. $C = \operatorname{Con} X$. Решётка C изображена на рисунке 1.2. Для непомеченных вершин графа отсутствующие метки легко восстановить.*

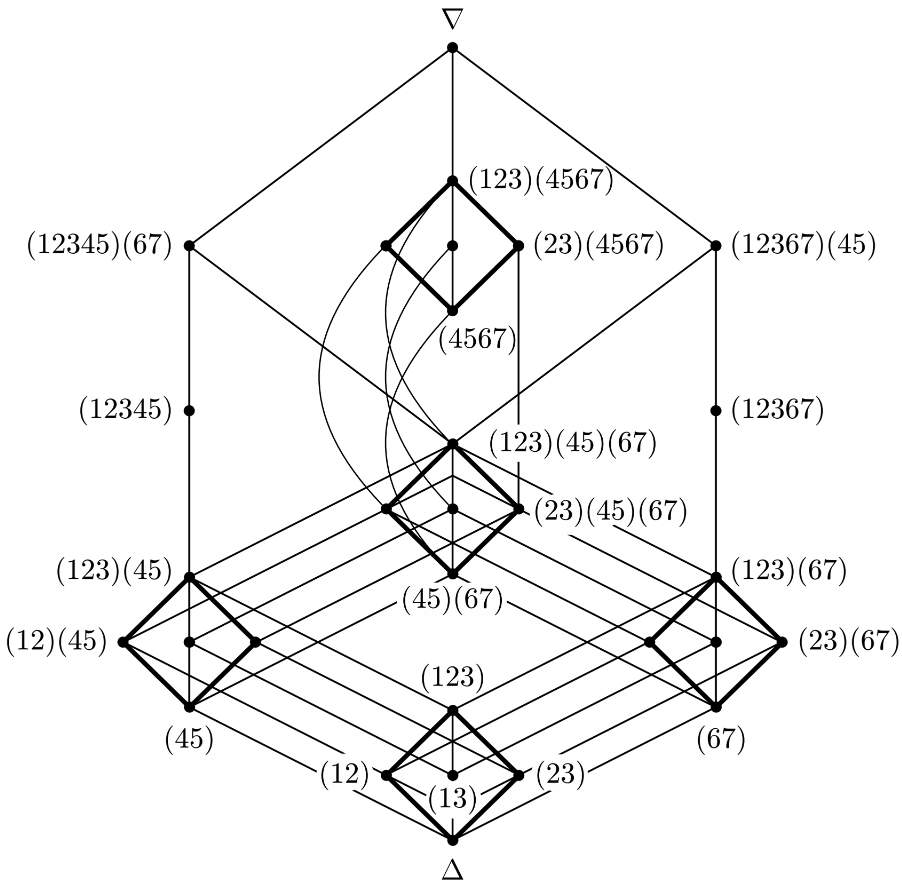


Рисунок 1.2: Решётка C

1.4.1 Случай $|A| \leqslant 1$

Мы видели из леммы 1.3, что в случае модулярности решётки $\operatorname{Con} X$ имеет место неравенство $|A| \leqslant 2$, поэтому далее будем рассматривать случаи $|A| \leqslant 1$ и $|A| = 2$.

Сначала разберём случай $A = \emptyset$. В этом случае $X = XS$, поэтому X можно рассматривать как полигон над полугруппой R, причём $\operatorname{Con}_S X = \operatorname{Con}_R X$. Это позволяет нам использовать полученное в работе [14] описание полигонов над полугруппой правых нулей, имеющих модулярную решётку конгруэнций.

Лемма 1.13 ([1, лемма 4.4])**.** *Если* $I = \{1, 2\}$*,* $A = \{a\}$*,* $aS \subseteq Y_1$*,* $|Y_1| \leqslant 2$*,* $|Y_2| \leqslant 3$ *и граф* Γ_{12} *связен, то решётка* $\operatorname{Con} X$ *модулярна.*

Доказательство. В нашем случае полигон X имеет ровно две компоненты связности: $\{a\} \cup Y_1$ и Y_2. Решётки $\operatorname{Con}(\{a\} \cup Y_1)$ и $\operatorname{Con} Y_2$ модулярны, так как $|\{a\} \cup Y_1| \leqslant 3$, $|Y_2| \leqslant 3$. Следовательно, ввиду теоремы 1.1 нам надо доказать лишь отсутствие сквозных конгруэнций. Пусть $\rho \in \operatorname{Con} X$ – сквозная конгруэнция. Тогда существуют элементы $u_1, u_2 \in \{a\} \cup Y_1$, $v_1, v_2 \in Y_2$ такие, что $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \rho$, а $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \notin \rho$. Очевидно, $u_1 \neq a$ или $u_2 \neq a$. Без ограничения общности мы можем считать, что $u_1 \neq a$. Тогда $u_1 \in Y_1$. Мы имеем: $u_1 \in Y_1$, $v_1 \in Y_2$, $(u_1, v_1) \in \rho$ и граф Γ_{12} связен. Отсюда по лемме 1.12

получаем, что все элементы множества $Y_1 \cup Y_2$ лежат в одном ρ-классе, а значит, $(v_1, v_2) \in \rho$, но это противоречит выбору элементов v_1, v_2. $\square$

Предложение 1.4 ([1, предложение 4.3]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение в копроизведение конеразложимых полигонов, $A = X \setminus XS$ и пусть $|A| \leqslant 1$. Пусть отображения $\varphi_l : A \to I$ $(i \in I)$ и графы Γ_{ij} имеют тот же смысл, что и выше. Решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна в том и только том случае, если выполнены условия:*

при $A = \emptyset$ выполнено условие:

(i) $|I| \leqslant 3$, $|Y_i| \leqslant 3$ для каждого $i \in I$ и графы Γ_{ij} связны при $i \neq j$;

при $A = \{a\}$ выполнено условие (i), а также условие

(ii) если $a\varphi_l = i$ при некотором $i \in I$ и всех $l \in L$, то $|Y_i| \leqslant 2$;

Доказательство. Необходимость. Пусть решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна. Тогда условие (i) выполнено ввиду лемм 1.10 и 1.11. Пусть $A = \{a\}$ и $a\varphi_l = i$ при некотором $i \in I$ и всех $l \in L$. Тогда $a \cdot \langle l, r \rangle = y_{ir}$. Следовательно, $y \cdot \langle l, r \rangle = y_{ir}$ при всех $y \in Y_i \cup \{a\}$. Отсюда видно, что в полигоне $Y_i \cup \{a\}$ любое отношение эквивалентности является конгруэнцией, т.е. $\operatorname{Con}(Y_i \cup \{a\}) = \operatorname{Eq}(Y_i \cup \{a\})$. Так как решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна, то и решётка $\operatorname{Con}(Y_i \cup \{a\})$ модулярна, поэтому $|Y_i \cup \{a\}| \leqslant 3$, а значит, $|Y_i| \leqslant 2$. Таким образом, выполнено (ii).

Достаточность. Если $A = \emptyset$, то $X = Y$, поэтому $\operatorname{Con}_S X = \operatorname{Con}_S Y = \operatorname{Con}_R Y$, и модулярность этой решётки следует из теоремы 6 из [14]. Пусть теперь $A = \{a\}$. Так как $|I| \leqslant 3$, то $|\{a\varphi_l \mid l \in L\}|$ может принимать лишь значения 1,2,3. Разберём каждый из соответствующих этим значениям случаев.

1-й случай: $|\{a\varphi_l \mid l \in L\}| = 1$. Мы можем считать, что $I = \{1\}$, или $I = \{1, 2\}$, или $I = \{1, 2, 3\}$ и $a\varphi_l = 1$ при всех $l \in L$. Если $|I| = 1$, то $|X| \leqslant 3$, поэтому решётка $\operatorname{Eq} X$ модулярна, а значит, решётка $\operatorname{Con} X$ также модулярна. Если $I = \{1, 2\}$, то модулярность решётки $\operatorname{Con} X$ следует из леммы 1.13. Пусть теперь $I = \{1, 2, 3\}$. Компоненты связности полигона X таковы: $\{a\} \cup Y_1$, Y_2 и Y_3. Решётки конгруэнций этих полигонов модулярны, так как $|\{a\} \cup Y_1|$, $|Y_2|$, $|Y_3| \leqslant 3$. Поэтому ввиду теоремы 1.1 нам нужно лишь доказать отсутствие сквозных конгруэнций. Полигон X ровно тремя способами может быть разложен в копроизведение: это $(\{a\} \cup Y_1 \cup Y_2) \sqcup Y_3$, $(\{a\} \cup Y_1 \cup Y_3) \sqcup Y_2$ и $(\{a\} \cup Y_1) \sqcup (Y_2 \cup Y_3)$. Требуется доказать отсутствие сквозных конгруэнций, соответствующих каждому из этих разложений.

Пусть ρ – сквозная конгруэнция, соответствующая разложению $(\{a\} \cup Y_1 \cup Y_2) \sqcup Y_3$. Тогда существуют элементы $u_1, u_2 \in \{a\} \cup Y_1 \cup Y_2$, $v_1, v_2 \in Y_3$ такие, что $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \rho$, а $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \notin \rho$. Очевидно, $u_1 \neq a$ или $u_2 \neq a$. Можно считать, что $u_1 \neq a$. Тогда $u_1 \in Y_1 \cup Y_2$. Можно считать, что $u_1 \in Y_1$. Мы имеем: $u_1 \in Y_1$, $v_1 \in Y_3$, $(u_1, v_1) \in \rho$ и граф Γ_{13} связен. Отсюда по лемме 1.12 все элементы множества $Y_1 \cup Y_3$ лежат в одном ρ-классе, поэтому $(v_1, v_2) \in \rho$, но это противоречит выбору элементов v_1, v_2.

Отсутствие сквозных конгруэнций, соответствующих разложению $X = (\{a\} \cup Y_1 \cup Y_3) \sqcup Y_2$, доказывается аналогично предыдущему.

Пусть теперь ρ – сквозная конгруэнция, соответствующая разложению $X = (\{a\} \cup Y_1) \sqcup (Y_2 \cup Y_3)$, и $u_1, u_2 \in \{a\} \cup Y_1$, $v_1, v_2 \in Y_2 \cup Y_3$ таковы, что (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in \rho$, а $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \notin \rho$. Без ограничения общности мы можем считать, что $u_1 \neq a$, а $v_1 \in Y_2$. Тогда $u_1 \in Y_1$. Так как граф Γ_{12} связен, то по лемме 1.12 все элементы множества $Y_1 \cup Y_2$ лежат в одном ρ-классе. Так как $(u_1, u_2) \notin \rho$, и $u_1 \in Y_1$, то $u_2 \notin Y_1$, а значит, $u_2 = a$. Так как $(v_1, v_2) \notin \rho$ и $v_1 \in Y_2$, то $v_2 \notin Y_2$, а значит, $v_2 \in Y_3$. Так как $(u_2, v_2) \in \rho$, то $(u_2 s, v_2 s) \in \rho$, т.е. $(as, v_2 s) \in \rho$. Но $as \in Y_1$, $v_2 s \in Y_3$, поэтому по лемме 1.12 все элементы множества $Y_1 \cup Y_3$ лежат в одном ρ-классе. Ввиду доказанного ранее множество $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ лежит в одном ρ-классе. Но это противоречит соотношению $(v_1, v_2) \notin \rho$.

2-й случай: $|\{a\varphi_l \mid l \in L\}| = 2$. Можно считать, что $I = \{1, 2\}$ или $I = \{1, 2, 3\}$ и $aS = Y_1 \cup Y_2$. Пусть $I = \{1, 2\}$. Тогда $Y = Y_1 \cup Y_2$. Решётка $\operatorname{Con} Y$ модулярна ввиду теоремы 6 из [14]. Решётку $\operatorname{Con} Y$ можно считать подрешёткой решётки $\operatorname{Con} X$, если отождествить конгруэнцию $\rho \in \operatorname{Con} Y$ с конгруэнцией $\rho \cup \{\Delta_X\} \in \operatorname{Con} X$ (это конгруэнции, у которых множество $\{a\}$ является классом). Выясним, каковы конгруэнции, у которых $\{a\}$ не является классом. Пусть $\rho \in \operatorname{Con} X$ такова, что $\{a\}$ не является ρ-классом. Тогда $(a, y) \in \rho$ для некоторого $y \in Y$. Без ограничения общности можно считать, что $y \in Y_1$. По условию существует такое $s \in S$, что $as \in Y_2$. Полагая $s = \langle l, r \rangle$, получим $(a \cdot \langle l, r \rangle, y \cdot \langle l, r \rangle) \in \rho$, т.е. $(y_{2r}, y_{1r}) \in \rho$. Так как граф Γ_{12} связен, то по лемме 1.12 все элементы множества $Y_1 \cup Y_2$ лежат в одном ρ-классе. В том же классе лежит элемент a. Следовательно, $\rho = \nabla_X$. Таким образом, $\operatorname{Con} X = \operatorname{Con} Y \cup \{\nabla_X\}$. Отсюда видно, что решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна.

Пусть $I = \{1, 2, 3\}$. Существует лишь одно разложение полигона X в копроизведение: $X = (\{a\} \cup Y_1 \cup Y_2) \sqcup Y_3$. Решётка $\operatorname{Con}(\{a\} \cup Y_1 \cup Y_2)$ модулярна – это показывают рассуждения, которые только что приводились при разборе случая $I = \{1, 2\}$. Решётка $\operatorname{Con} Y_3$ модулярна, так как $|Y_3| \leqslant 3$. Остаётся доказать отсутствие сквозных конгруэнций. Это делается так же, как в 1-м случае.

3-й случай: $|\{a\varphi_l \mid l \in L\}| = 3$. Тогда $aS = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = Y$. Решётка $\operatorname{Con} Y$ модулярна по теореме 6 из [14]. Рассуждая так же, как в случае 2, получим: $\operatorname{Con} X = \operatorname{Con} Y \cup \{\nabla_X\}$. Отсюда следует модулярность решётки $\operatorname{Con} X$. $\square$

1.4.2 Формулировка основной теоремы. Доказательство необходимости

Для завершения вопроса об условиях модулярности полигона над прямоугольной связкой нам осталось рассмотреть случай $|A| = 2$. Далее до конца раздела мы считаем, что $A = \{a, b\}$, где $a \neq b$.

Сформулируем теперь основной результат этой главы диссертационной работы и докажем необходимость. Доказательство достаточности будет завершено в конце главы.

Теорема 1.2 ([1, теорема 4.1]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой S. Тогда решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна в том и только том случае, если $|A| \leqslant 2$ и выполнены условия:*

(i) $|I| \leqslant 3$, $|Y_i| \leqslant 3$ при $i \in I$ и графы Γ_{ij} связны при $i \neq j$;

при $A = \{a\}$ выполнено условие (i), а также условие

(ii) если $a\varphi_l = i$, при некотором $i \in I$ и всех $l \in L$, то $|Y_i| \leqslant 2$;

при $A = \{a, b\}$ выполнено условие (i), а также условия:

(iii) $a\varphi_l = b\varphi_{l'}$, при некоторых $l, l' \in L$;

(iv) если одно из множеств $\{a\varphi_l \mid l \in L\}$, $\{b\varphi_l \mid l \in L\}$ состоит из одного элемента i, а в другом более одного элемента, то $|Y_i| \leqslant 2$;

(v) если $\{a\varphi_l \mid l \in L\} = \{b\varphi_l \mid l \in L\} = \{i\}$, то $|Y_i| = 1$.

Доказательство необходимости. Пусть решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна. Тогда из предложения 1.4 следует, что выполняется (i) и (ii). По лемме 1.5 будет выполняться (iii). Пункт (iv) будет выполняться, так как является частным случаем условия (ii) для полигона $\{a\} \cup Y$. Теперь покажем, что выполняется (v). Видно, что в полигоне $\{a, b\} \cup Y_i$ любое отношение эквивалентности является конгруэнцией, т.е. $\operatorname{Con}(\{a, b\} \cup Y_i) = \operatorname{Eq}(\{a, b\} \cup Y_i)$. Следовательно, так как решётка $\operatorname{Con}_S X$ модулярна, то решётка $\operatorname{Eq}(\{a, b\} \cup Y_i)$ также модулярна. Отсюда по лемме 1.2 $|\{a, b\} \cup Y_i| \leqslant 3$, а значит, $|Y_i| = 1$.

Необходимость доказана. Доказательство достаточности – это почти вся оставшаяся часть главы. При этом нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

1.4.3 Случай $|A| = 2$: предварительные замечания

Элементы множества I будем обозначать натуральными числами: $I = \{1, 2, \ldots\}$.

Лемма 1.14 ([1, лемма 4.5]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $a \in A$, $y \in Y_i$, $y' \in Y_j$ и $i \neq j$. Предположим, что граф Γ_{ij} связен. Тогда для любой конгруэнции $\rho \in \operatorname{Con} X$ справедливо утверждение: если $(a, y) \in \rho$ и $i = a\varphi_l$, $j = a\varphi_{l'}$ при некоторых $l, l' \in L$, то все элементы множества $\{a\} \cup Y_i \cup Y_j$ лежат в одном ρ-классе.*

Доказательство. Имеем: $(a, y) \in \rho$, $y \in Y_i$, $i = a\varphi_l$, $j = a\varphi_{l'}$. Тогда $y = y_{ir}$ при некотором $r \in R$. Отсюда $(a \cdot \langle l', r\rangle, y \cdot \langle l', r\rangle) \in \rho$, т.е. $(y_{jr}, y_{ir}) \in \rho$. По лемме 1.12 все элементы множества $Y_i \cup Y_j$ лежат в одном ρ-классе. Так как $(a, y) \in \rho$, то множество $\{a\} \cup Y_i \cup Y_j$ содержится в некотором ρ-классе. □

Лемма 1.15 ([1, лемма 4.6]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $A = \{a, b\}$ $(a \neq b)$. Пусть $a\varphi_l = b\varphi_l = 1$ при всех $l \in L$ и выполнены условия (i), (v) теоремы 1.2. Тогда решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна.*

Доказательство. По условию (v) теоремы 1.2 $|Y_1| = 1$, а по условию (i) $|I| \leqslant 3$ и $|Y_i| \leqslant 3$ при всех $i \in I$. Положим $Y_1 = \{z\}$. Мы имеем: $I = \{1\}$, или $I = \{1, 2\}$, или $I = \{1, 2, 3\}$. Если $|I| = 1$, то $X = \{a, b, z\}$, а решётка конгруэнций любого трёхэлементного полигона модулярна. Далее считаем, что $|I| \geqslant 2$, т.е. $I = \{1, 2\}$ или $I = \{1, 2, 3\}$. Условимся считать, что $Y_3 = \varnothing$ в случае, когда $I = \{1, 2\}$.

По условию леммы $aS = bS = \{z\}$, поэтому компоненты связности полигона X – это $\{a, b, z\}, Y_2$ и, возможно, Y_3 (если $Y_3 \neq \varnothing$). Учитывая условие (i), заключаем, что компоненты связности полигона X содержат каждая не более 3 элементов, поэтому решётки $\mathrm{Con}\{a, b, z\}$, $\mathrm{Con}\, Y_2$, $\mathrm{Con}\, Y_3$ (если $Y_3 \neq \varnothing$) модулярны. Кроме того, ввиду условия $|I| \leqslant 3$ и замечания 1.4 полигон X не содержит 4 попарно не пересекающихся подполигонов. Таким образом, полигон X удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы 1.1. Следовательно, для доказательства модулярности решётки $\mathrm{Con}\, X$ осталось проверить условие (3) – отсутствие сквозных конгруэнций.

Разложение полигона X в копроизведение $U \sqcup V$ может быть осуществлено лишь следующими способами: $X = \{a, b, z\} \sqcup (Y_2 \cup Y_3)$, $X = (\{a, b, z\} \cup Y_3) \sqcup Y_2$ и $X = (\{a, b, z\} \cup Y_2) \sqcup Y_3$ (если $Y_3 \neq \varnothing$). Рассмотрим отдельно эти способы. Пусть ρ – сквозная конгруэнция, соответствующая разложению $X = U \sqcup V$.

1-й случай: $U = \{a, b, z\}$, $V = Y_2 \cup Y_3$. Имеем: $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$. Без ограничения общности можем считать, что $u_1 = a$, $v_1 \in Y_2$. Так как $aS = \{z\}$, $v_1 S = Y_2$ и $(u_1, v_1) \in \rho$, то $(z, y) \in \rho$ для всех $y \in Y_2$. Ввиду леммы 1.14 элементы a, z и множество Y_2 лежат в одном ρ-классе. Так как $(u_1, u_2) \notin \rho$, то $u_2 = b$. Если $v_2 \in Y_2$, то z, b, Y_2 в одном ρ-классе. Таким образом, $(v_1, v_2) \in \rho$, а это противоречит выбору этих элементов v_1, v_2. Если $v_2 \in Y_3$, то z, b, Y_3 - в одном ρ-классе. Отсюда по лемме 1.14 получаем, что элементы множества $Y_1 \cup Y_3$ - в одном ρ-классе. Следовательно, $(v_1, v_2) \in \rho$, и мы опять получаем противоречие.

2-й случай: $U = \{a, b, z\} \cup Y_3$, $V = Y_2$. Если $u_1 \notin Y_3$, то $(z, y) \in \rho$ при некотором $y \in Y_2$, а значит, ввиду леммы 1.14 все элементы множества $\{a, b, z\} \cup Y_2$ – в одном ρ-классе. Следовательно, $(v_1, v_2) \in \rho$, что невозможно. Таким образом, $u_1 \in Y_3$. Так как $(u_1, v_1) \in \rho$, то по лемме 1.14 все элементы из $Y_2 \cup Y_3$ – в одном ρ-классе, и мы снова получаем противоречие с выбором элементов v_1, v_2.

3-й случай: $U = \{a, b, z\} \cup Y_2$, $V = Y_3$. В этом случае мы получаем противоречие, рассуждая так же, как в предыдущем случае. □

Лемма 1.16 ([1, лемма 4.7]). *Пусть X – полигон, $A = \{a, b\}$ $(a \neq b)$, $I = \{1, 2\}$, $a\varphi_l = 1$ для всех $l \in L$, $\{b\varphi_l \mid l \in L\} = \{1, 2\}$ и выполняются условия (i) – (v) теоремы 1.2. Тогда решётка* $\mathrm{Con}\, X$ *модулярна.*

Доказательство. По условию леммы $X = \{a, b\} \cup Y_1 \cup Y_2$, $aS = Y_1$ и $bS = Y_1 \cup Y_2 = Y$. Положим $X' = \{a\} \cup Y$, $X'' = \{b\} \cup Y$. Полигоны X' и X''

удовлетворяют условиям предложения 1.4, поэтому решётки $\operatorname{Con} X'$ и $\operatorname{Con} X''$ модулярны.

Предположим, что решётка $\operatorname{Con} X$ не модулярна. Тогда она содержит подрешётку – пентагон $\Pi = \{\alpha, \rho_1, \rho_2, \sigma, \omega\}$ (см. рис. 1.3).

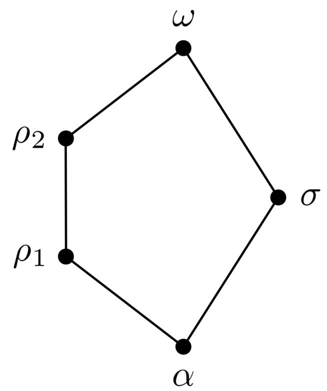


Рисунок 1.3: Пентагон в $\operatorname{Con} X$

Докажем, что множество $\{a\}$ не может быть классом конгруэнций σ и ρ_1 одновременно. Действительно, если множество $\{a\}$ – одновременно σ-класс и ρ_1-класс, то ввиду равенства $\omega = \sigma \vee \rho_1$ оно будет также классом конгруэнции ω, а значит, $\{a\}$ – ρ-класс для всех $\rho \in \Pi$. Применяя введённые в начале раздела сокращённые обозначения отношений эквивалентности, мы можем записать: $\alpha = (a)\alpha'$, $\rho_1 = (a)\rho_1'$, $\rho_2 = (a)\rho_2'$, $\sigma = (a)\sigma'$, $\omega = (a)\omega'$, где $\alpha', \rho_1', \rho_2', \sigma', \omega' \in \operatorname{Con} X''$. Ясно, что тогда $\Pi' = \{\alpha', \rho_1', \rho_2', \sigma', \omega'\}$ – полигон в решётке $\operatorname{Con} X''$, а это противоречит модулярности решётки $\operatorname{Con} X''$. Итак, множество $\{a\}$ не может быть одновременно σ- и ρ_1-классом. Аналогично доказывается, что множество $\{b\}$ – не σ- или не ρ_1-класс.

Найдём все конгруэнции ρ, для которых множество $\{b\}$ не является ρ-классом. Имеем: $(b, x) \in \rho$ при некотором $x \neq b$. Если $x \in Y_1$, то, взяв такое $s \in S$, что $bs \in Y_2$, получим: $(bs, xs) \in (Y_2 \times Y_1) \cap \rho$, а значит, ввиду связности графа Γ_{ij} по лемме 1.14 получаем, что все элементы множества $Y_1 \cup Y_2$ лежат в одном ρ-классе. То есть $\rho \supseteq (Y_1 Y_2) = (Y)$. Так как вдобавок $(b, x) \in \rho$, то $\rho \supseteq (bY)$. Если $x \in Y_2$, то, взяв такое $s \in S$, что $bs \in Y_1$, получим: $(bs, xs) \in (Y_1 \times Y_2) \cap \rho$, откуда также $\rho \supseteq (bY)$. Если $x = a$, то возьмём такое $s \in S$, что $bs \in Y_2$, и получим, что $\rho \supseteq (Y)$. Так как $(a, b) \in \rho$, то $\rho \supseteq (ab)(Y)$. Таким образом, для $\rho \in \operatorname{Con} X$ мы имеем:

$$\{b\} \text{ – не } \rho\text{-класс} \Leftrightarrow \rho \in \{(bY), (ab)(Y), \nabla\}. \tag{1.4}$$

Теперь найдём конгруэнции ρ, для которых множество $\{a\}$ не является ρ-классом. Имеем: $(a, x) \in \rho$ при некотором $x \neq a$. Если $x \in Y_2$, то при любом $s \in S$ имеет место следующее: $(as, xs) \in (Y_1 \times Y_2) \cap \rho$, откуда $\rho \supseteq (Y)$, и в результате $\rho \supseteq (aY)$. Если $x = b$, то $(a, b) \in \rho$, и по доказанному выше $\rho \supseteq (ab)(Y)$. Пусть теперь $x \in Y_1$. Если $(u, v) \in \rho$ для каких-нибудь $u \in \{a\} \cup Y_1$,

$v \in Y_2$, то $\rho \supseteq (Y)$, а значит, $\rho \supseteq (aY)$. Если же $((\{a\} \cup Y_1) \times Y_2) \cap \rho = \emptyset$, то $\rho = \rho'\rho''$, где $\rho' \subseteq (aY_1)$, $\rho'' \subseteq (Y_2)$, причём $\rho' \nsubseteq (Y_1)$. Таким образом, при $\rho \in \operatorname{Con} X$

$$\{a\} \text{ -- не } \rho\text{-класс} \Leftrightarrow \rho \in \{(aY), (ab)(Y), \rho'\rho'', \nabla\}. \tag{1.5}$$

Далее рассмотрим три случая.

1-й случай: множество $\{b\}$ не является ρ_1-классом. Тогда по (1.4) $\rho_1 \in \{(ab)(Y), (bY), \nabla\}$. Ввиду включений $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \omega$ конгруэнция ρ_1 не может быть максимальной или предмаксимальной, а конгруэнции $(ab)(Y)$, (bY), ∇ таковы, что первые две предмаксимальны, а третья максимальна. Таким образом, 1-й случай невозможен.

2-й случай: множество $\{a\}$ не является ρ_1-классом. Тогда, используя (1.5) и тот факт, что конгруэнция ρ_1 не максимальная и не предмаксимальная, получим: $\rho_1 = \rho'\rho''$, где $\rho' \subseteq (aY_1)$, $\rho'' \subseteq (Y_2)$, причём $\rho' \nsubseteq (Y_1)$. Мы видим, что множество $\{b\}$ является ρ_1-классом. Тогда $\{b\}$ не должно быть σ-классом, а значит (так как $\sigma \neq \nabla$), $\sigma \in \{(ab)(Y), (bY)\}$. Так как $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \omega$, то либо $\rho_2 = \rho^*\rho^{**}$, где $\rho^* \supseteq \rho'$, $\rho^{**} \supseteq \rho''$, либо $\rho_2 = (aY)$.

Случай 2.1: $\sigma = (ab)(Y)$. Имеем: $\sigma \cap \rho_1 = \rho'|_{Y_1}\rho''$. В то же время $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $\rho^*|_{Y_1}\rho^{**}$, либо (Y). Так как $\alpha = \sigma \cap \rho_1 = \sigma \cap \rho_2$ и $\rho'|_{Y_1}\rho'' \neq (Y)$, то $\rho'|_{Y_1}\rho'' = \rho^*|_{Y_1}\rho^{**}$. Отсюда $\rho'|_{Y_1} = \rho^*|_{Y_1}$ и $\rho'' = \rho^{**}$. Так как $\rho_1 \subset \rho_2$, то существует пара $(u, v) \in \rho^* \setminus \rho'$. Так как на множестве Y_1 отношения ρ' и ρ^* совпадают, то один из элементов u, v не принадлежит Y_1, то есть равен a. Без ограничения общности мы можем считать, что $u = a$. Таким образом, $(a, v) \in \rho^* \setminus \rho'$. Так как $\rho' \nsubseteq (Y_1)$, то $(a, q) \in \rho'$ при некотором $q \in Y_1$. Ясно, что $(v, q) \in \rho^* \setminus \rho'$ и $v, q \in Y_1$, а это противоречит тому, что ρ' и ρ^* совпадают на множестве Y_1. Следовательно, $\rho' = \rho^*$. Значит, $\rho_1 = \rho_2$, а это невозможно.

Случай 2.2: $\sigma = (bY)$. Имеем: $\sigma \cap \rho_1 = \rho'|_{Y_1}\rho''$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $\rho^*|_{Y_1}\rho^{**}$, либо (Y). Так как $\sigma \cap \rho_1 = \sigma \cap \rho_2$, то $\rho'|_{Y_1}\rho'' = \rho^*|_{Y_1}\rho^{**}$. Рассуждая так же, как в случае 2.1, получим: $\rho_1 = \rho_2$, что невозможно.

3-й случай: $\{a\}$ и $\{b\}$ являются ρ_1-классами. Тогда $\rho_1 \subseteq (Y)$. Кроме того, ни $\{a\}$, ни $\{b\}$ не могут быть σ-классами. Поэтому ввиду (1.4) и (1.5) $\sigma \in \{(ab)(Y), \nabla\}$. Но тогда $\rho_1 \subseteq \sigma$, а это невозможно. $\square$

Лемма 1.17 ([1, лемма 4.8]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $A = \{a, b\}$ ($a \neq b$), $I = \{1, 2, 3\}$, $a\varphi_l = 1$ для всех $l \in L$, $|\{b\varphi_l|\ l \in L\}| \geqslant 2$ и выполнены условия (i)–(v) теоремы 1.2. Тогда решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна.*

Доказательство. Доказательство разобьём на два случая.

1-й случай: $|\{b\varphi_l|\ l \in L\}| = 2$. Так как $aS \cap bS \neq \emptyset$ по лемме 1.5, то мы можем считать, что $|\{b\varphi_l|\ l \in L\}| = \{1, 2\}$. Положим $X' = \{a, b\} \cup Y_1 \cup Y_2$. По лемме 1.16 решётка $\operatorname{Con} X'$ модулярна. Поэтому для полигона X выполняется условие (2) теоремы 1.1. Выполнение условия (1) следует из замечания 1.4.

Докажем теперь, что выполнено также условие (3) – отсутствие сквозных конгруэнций.

Полигон X единственным образом разлагается в копроизведение двух подполигонов, а именно, $X = X' \sqcup Y_3$. Пусть ρ – сквозная конгруэнция. Тогда существуют элементы $u_1, u_2 \in X'$, $v_1, v_2 \in Y_3$ такие, что $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \rho$, а $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \notin \rho$. Так как $X'S = Y_1 \cup Y_2$, $Y_3 S = Y_3$, то $(u_1 s, v_1 s) \in \rho$ при любом $s \in S$. Если $u_1 s \in Y_1$, то $(u_1 s, v_1 s) \in (Y_1 \times Y_3) \cap \rho$, откуда по лемме 1.12 все элементы множества $Y_1 \cup Y_3$ лежат в одном ρ-классе, поэтому $(v_1, v_2) \in \rho$, что противоречит выбору элементов v_1, v_2. Если $u_1 s \in Y_2$, то также получаем, что $Y_3 \times Y_3 \subseteq \rho$, – противоречие.

2-й случай: $|\{b\varphi_l |\ l \in L\}| = 3$. Тогда $|\{b\varphi_l |\ l \in L\}| = \{1, 2, 3\}$. Выберем элементы l_1, l_2 такие, что $b\varphi_{l_1} = 1$, $b\varphi_{l_2} = 2$. Рассмотрим полугруппу $S' = \{l_1, l_2\} \times R$. Так как S' – подполугруппа полугруппы S, то решётка $\operatorname{Con}_S X$ является подрешёткой решётки $\operatorname{Con}_{S'} X$. Решётка $\operatorname{Con}_{S'} X$ модулярна, так как полигон $X_{S'}$ попадает под 1-й случай доказываемой леммы. Отсюда следует, что решётка $\operatorname{Con}_S X$ модулярна. □

1.5 Свед́ение к четырём таблицам

Напомним, что в этой главе у нас $A = \{a, b\}$ – двухэлементное множество и для рассматриваемого полигона предполагаются выполненными условия теоремы 1.2. Случаи, когда одно или оба из множеств $\{a\varphi_l \mid l \in L\}$, $\{b\varphi_l \mid l \in L\}$ одноэлементны, разобраны в леммах 1.15 – 1.17. Поэтому далее мы будем считать, что

$$|\{a\varphi_l \mid l \in L\}|, |\{b\varphi_l \mid l \in L\}| \geqslant 2. \tag{1.6}$$

Заметим, что так как $Y_i S = Y_i$, то соотношения $aS \cap Y_i \neq \emptyset$ и $aS \supseteq Y_i$ эквивалентны. То же самое верно и для элемента b.

Для завершения доказательства достаточности условий основной теоремы в этом подразделе мы осуществим редукцию полигона, удовлетворяющего условиям (i) – (v) теоремы 1.2, к полигонам, соответствующим четырём определённым таблицам, регламентирующим действие прямоугольной связки на рассматриваемый полигон. Останется доказать модулярность решёток конгруэнций полигонов, соответствующих этим таблицам.

Так как $aS \cap bS \neq \emptyset$ по лемме 1.5, то $\{a\varphi_l \mid l \in L\} \cap \{b\varphi_l \mid l \in L\} \neq \emptyset$. По условию (i) $|I| \leqslant 3$, поэтому, принимая во внимание (1.6), $I = \{1, 2\}$ или $I = \{1, 2, 3\}$. Без ограничения общности мы можем считать, что

$$a\varphi_{l_1} = 1,\ a\varphi_{l_2} = 2$$

при некоторых $l_1, l_2 \in L$. Для $b\varphi_{l_i}$ возможны следующие варианты:

$$\begin{array}{c|ccccccccc} b\varphi_{l_1} & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline b\varphi_{l_2} & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \tag{1.7}$$

Рассмотрим первый из этих 9 вариантов:

	a	b
l_1	1	1
l_2	2	1

Так как $|\{b\varphi_l \mid l \in L\}| \geqslant 2$, то найдётся $l_3 \in L$ такое, что $b\varphi_{l_3} \neq 1$. Возможны лишь следующие ситуации:

(а)	a	b
l_1	1	1
l_2	2	1
l_3	1	2

(б)	a	b
l_1	1	1
l_2	2	1
l_3	2	2

(в)	a	b
l_1	1	1
l_2	2	1
l_3	3	2

(г)	a	b
l_1	1	1
l_2	2	1
l_3	1	3

(д)	a	b
l_1	1	1
l_2	2	1
l_3	2	3

(е)	a	b
l_1	1	1
l_2	2	1
l_3	3	3

В случае (а) рассмотрим полугруппу $S_1 = \{l_2, l_3\} \times R$. Она является подполугруппой полугруппы $S = L \times R$. По лемме 1.1 решётка $\operatorname{Con}_S X$ будет модулярной, если модулярна решётка $\operatorname{Con}_{S_1} X$. Для полугруппы S_1 мы имеем:

	a	b
l_2	2	1
l_3	1	2

То есть в случае (а) мы удалили из таблицы 1-ю строчку.
В случае (б) удалим 2-ю строчку, получим:

	a	b
l_1	1	1
l_3	2	2

В случае (в) удалим 1-ю строчку, получим:

	a	b
l_2	2	1
l_3	3	2

В случае (г) уберём 1-ю строчку, получим:

	a	b
l_2	2	1
l_3	1	3

После переименования элементов множеств A, L и перенумерации элементов из I получим то же, что в случае (в).

В случае (д) после удаления 2-й строки получим:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 1 \\ l_2 & 2 & 3 \end{array}$$

В случае (e) после удаления 2-й строки и перенумерации получим:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 1 \\ l_2 & 2 & 2 \end{array}$$

Таким образом, во всех 9 случаях мы имеем 4 вида таблиц:

$$\begin{array}{c|cc} \mathrm{I} & a & b \\ \hline l_1 & 2 & 1 \\ l_2 & 1 & 2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} \mathrm{II} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 1 \\ l_2 & 2 & 2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} \mathrm{III} & a & b \\ \hline l_1 & 2 & 1 \\ l_2 & 3 & 2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} \mathrm{IV} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 1 \\ l_2 & 2 & 3 \end{array} \qquad (1.8)$$

Вернёмся к таблице (1.7). Пусть теперь $b\varphi_{l_1} = 1$, $b\varphi_{l_2} = 2$. Тогда, положив $L = \{l_1, l_2\}$, получим

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 1 \\ l_2 & 2 & 2 \end{array}$$

Это таблица II из (1.8).

Снова возвращаемся к таблице (1.7). Пусть $b\varphi_{l_1} = 1$, $b\varphi_{l_2} = 3$. То есть имеем

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 1 \\ l_2 & 2 & 3 \end{array}$$

– это таблица IV из (1.8).
Если же $b\varphi_{l_1} = 2$, $b\varphi_{l_2} = 1$, то получим

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 2 \\ l_2 & 2 & 1 \end{array}$$

– таблица, совпадающая после перенумерации с таблицей I.
Пусть $b\varphi_{l_1} = 2$, $b\varphi_{l_2} = 2$. Найдём такое $l_3 \in L$, что $b\varphi_{l_3} \neq 2$. Возможны случаи:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 2 \\ l_2 & 2 & 2 \\ l_3 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 2 \\ l_2 & 2 & 2 \\ l_3 & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 2 \\ l_2 & 2 & 2 \\ l_3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 2 \\ l_2 & 2 & 2 \\ l_3 & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 2 \\ l_2 & 2 & 2 \\ l_3 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline l_1 & 1 & 2 \\ l_2 & 2 & 2 \\ l_3 & 3 & 3 \end{array}$$

В каждом из случаев удалим по одной строке. Какую именно – можно увидеть ниже по отсутствующей строке

	a	b
l_2	2	2
l_3	1	1

	a	b
l_2	2	2
l_3	1	3

	a	b
l_1	1	2
l_3	2	1

	a	b
l_1	1	2
l_3	2	3

	a	b
l_1	1	2
l_3	3	1

	a	b
l_2	2	2
l_3	3	3

Видно, что после подходящего переименования элементов в множеств A, L и I каждая из этих таблиц совпадёт с одной из таблиц списка (1.8).
При $b\varphi_{l_1} = 2$, $b\varphi_{l_2} = 3$, либо $b\varphi_{l_1} = 3$, $b\varphi_{l_2} = 1$ либо $b\varphi_{l_1} = 3$, $b\varphi_{l_2} = 2$ получим

	a	b
l_1	1	2
l_2	2	3

	a	b
l_1	1	3
l_2	2	1

	a	b
l_1	1	3
l_2	2	2

– все эти случаи уже учтены в (1.8).
Осталось разобрать случай $b\varphi_{l_1} = 3$, $b\varphi_{l_2} = 3$. Найдём l_3, для которого $b\varphi_{l_3} \neq 3$. Получим:

	a	b
l_1	1	3
l_2	2	3
l_3	1	1

	a	b
l_1	1	3
l_2	2	3
l_3	1	2

	a	b
l_1	1	3
l_2	2	3
l_3	2	1

	a	b
l_1	1	3
l_2	2	3
l_3	2	2

	a	b
l_1	1	3
l_2	2	3
l_3	3	1

	a	b
l_1	1	3
l_2	2	3
l_3	3	2

Удалим в каждом из случаев по строчке:

	a	b
l_2	2	3
l_3	1	1

	a	b
l_2	2	3
l_3	1	2

	a	b
l_1	1	3
l_3	2	1

	a	b
l_1	1	3
l_3	2	2

	a	b
l_2	2	3
l_3	3	1

	a	b
l_1	1	3
l_3	3	2

Видно, что эти таблицы есть в (1.8).

1.5.1 Завершение доказательства основной теоремы

В заключительной части этого раздела мы предполагаем выполненным условие (1.6). Следующая лемма покажет, что мы можем без ограничения общности считать, что $|Y_1| = |Y_2| = |Y_3| = 3$. Ввиду предложения 1.2 нам останется лишь проверить модулярность решёток конгруэнций четырёх полигонов (соответствующих таблицам I, II, III, IV из (1.8)). Это было сделано вручную (см. леммы 1.20– 1.23) и с помощью написанной автором компьютерной программы *Congruencer* [38]. В следующем подразделе мы приведём результаты работы этой компьютерной программы, в которой не только доказывается модулярность, но также строятся сами решётки конгруэнций. А теперь переходим к доказательству лемм.

Лемма 1.18 ([1, лемма 4.9])**.** *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y = \{a, b\}$ ($a \neq b$), причём выполнены условия (i) – (v) теоремы 1.2, а также условие (1.6). Тогда существуют множества $\tilde{R} \supseteq R$, $\tilde{Y}_1 \supseteq Y_1$, $\tilde{Y}_2 \supseteq Y_2$, $\tilde{Y}_3 \supseteq Y_3$ такие, что:*

(i) множество $\tilde{X} = \{a, b\} \cup \tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_2 \cup \tilde{Y}_3$ – полигон над прямоугольной связкой $\tilde{S} = L \times \tilde{R}$, причём $\tilde{Y} = \tilde{X}\tilde{S} = \tilde{Y}_1 \sqcup \tilde{Y}_2 \sqcup \tilde{Y}_3$;

(ii) операция $\tilde{X} \times \tilde{S} \to \tilde{X}$, $(\tilde{x}, \tilde{s}) \mapsto \tilde{x}\tilde{s}$ является продолжением операции $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$;

(iii) $|\tilde{Y}_1| = |\tilde{Y}_2| = |\tilde{Y}_3| = 3$;

(iv) решётка $\operatorname{Con}_S X$ изоморфна подрешётке решётки $\operatorname{Con}_{\tilde{S}} \tilde{X}$.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 1.2, то $|I| \leqslant 3$, $|Y_3| \leqslant 3$. Из условия (1.6) следует, что $|I| \geqslant 2$. Мы можем считать, что $X = \{a, b\} \cup (Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup Y_3)$, где $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$ (множество Y_3 может быть пустым). Расширим множества Y_1, Y_2, Y_3 до множеств $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3$ таких, что $|\tilde{Y}_1| = |\tilde{Y}_2| = |\tilde{Y}_3| = 3$. Расширим множество R до множества R', присоединив к нему дополнительные элементы так, чтобы семейство $\{y_{ir} | r \in R\}$ расширилось до $\{y'_{ir'} | r' \in R'\}$ и были выполнены равенства $\tilde{Y}_i = \{y'_{ir'} | r' \in R'\}$ ($i = 1, 2, 3$). Далее расширяем множество R' до $\tilde{R}$ так, чтобы графы $\tilde{\Gamma}_{ij}$ получились связными. В результате мы будем иметь полигон $\tilde{X}$ над прямоугольной связкой $\tilde{S} = L \times \tilde{R}$. Осталось проверить выполнение условия (iv).

1-й случай: $I = \{1, 2, 3\}$. Возьмём в каждом $\tilde{Y}_i$ какое-либо отношение эквивалентности ρ_i, для которого Y_i является множеством представителей. Ввиду замечания 1.3 отношение $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3 \cup \Delta_{\tilde{X}} \in \operatorname{Con}_{\tilde{S}} \tilde{X}$. При этом фактор-полигон $\tilde{X}/\rho$ (над полугруппой $\tilde{S}$) и полигон X (над S) удовлетворяют условиям предложения 1.2, поэтому $\operatorname{Con}_{\tilde{S}}(\tilde{X}/\rho) \cong \operatorname{Con}_S X$. Ввиду леммы 1.1 решётка $\operatorname{Con}_S X$ изоморфна подрешётке решётки $\operatorname{Con}_{\tilde{S}} \tilde{X}$.

2-й случай: $I = \{1, 2\}$. В этом случае $Y_3 = \emptyset$. Поэтому будем выбирать $\rho_1 \in \operatorname{Eq} \tilde{Y}_1$, $\rho_2 \in \operatorname{Eq} \tilde{Y}_2$ так, чтобы Y_1, Y_2 были множествами представителей классов отношений ρ_1, ρ_2, а для $\tilde{Y}_3$ положим $\rho_3 = \nabla_{\tilde{Y}_3}$. Как и в 1-м случае, положим $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3 \cup \Delta_{\tilde{X}}$. Очевидно, полигон $\tilde{X}$ над $\tilde{S}$ и полигон $X \cup \{\theta\}$ (θ –

присоединённый внешним образом нуль) удовлетворяют условиям предложения 1.2, поэтому $\mathrm{Con}_{\tilde{S}}(\tilde{X}/\rho) \cong \mathrm{Con}_S(X \cup \{\theta\})$. Теперь остаётся заметить, что решётка $\mathrm{Con}_S X$ изоморфна подрешётке решётки $\mathrm{Con}_S(X \cup \{\theta\})$, а решётка $\mathrm{Con}_{\tilde{S}}(\tilde{X}/\rho)$ изоморфна подрешётке решётки $\mathrm{Con}_{\tilde{S}} \tilde{X}$. □

Лемма 1.19 ([1, лемма 4.10]). *Пусть $X = A \cup Y$ – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, где $Y = XS$, $A = X \setminus Y = \{a, b\}$, $Y = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup Y_3$ – разложение полигона Y в копроизведение связных полигонов. Положим $X' = A \cup Y_1 \cup Y_2$. Пусть также выполнены условия:*
(i) решётка $ConX'$ модулярна,
(ii) $|Y_3| \leqslant 3$,
(iii) графы Γ_{ij} связны,
(iv) $aS = bS = Y_1 \cup Y_2$.
Тогда решётка $\mathrm{Con}\, X$ модулярна.

Доказательство. Так как $|I| = 3$, то ввиду замечания 1.4 полигон X содержит не более трёх попарно не пересекающихся подполигонов. По условию решётка $\mathrm{Con}X'$ модулярна. Модулярность решётки $\mathrm{Con}Y_3$ следует из неравенства $|Y_3| \leqslant 3$. Очевидно, полигон X единственным образом разлагается в копроизведение: $X = X' \sqcup Y_3$. Поэтому ввиду [22, теорема 3.1] нам достаточно доказать отсутствие сквозных конгруэнций.

Пусть ρ – сквозная конгруэнция. Тогда существуют элементы $u_1, u_2 \in X'$, $v_1, v_2 \in Y_3$ такие, что $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \rho$, а $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \notin \rho$. Заметим, что ввиду модулярности решётки $\mathrm{Con}\, X'$ по первой части теоремы 1.2 (необходимость, которая нами уже доказана) мы имеем: $|Y_1|, |Y_2| \leqslant 3$, а по условию леммы $|Y_3| \leqslant 3$; следовательно, ввиду связности графов Γ_{ij} и [14, теорема 6] решётка $\mathrm{Con}\, Y$ модулярна.

Если $u_1, u_2 \notin \{a, b\}$, то $\rho \cap (Y \times Y)$ – сквозная конгруэнция полигона Y, а это противоречит [22, теорема 3.1] и только что установленному факту модулярности решётки $\mathrm{Con}Y$. Таким образом, $\{u_1, u_2\} \cap \{a, b\} \neq \emptyset$.

Без ограничения общности мы можем считать, что $u_1 = a$. Так как $(a, v_1) \in \rho$, то $(as, v_1 s) \in \rho$ при любом $s \in S$. Возьмём такое s, что $as \in Y_2$ (такое s существует, так как $aS = Y_1 \cup Y_2$). Тогда $as \in Y_2$, $v_1 s \in Y_3$, а значит, $(Y_2 \times Y_3) \cap \rho \neq \emptyset$. Отсюда по лемме 1.14 множество $Y_2 \cup Y_3$ лежит в одном ρ-классе. Отсюда заключаем, что $(v_1, v_2) \in \rho$, а это противоречит выбору элементов v_1, v_2. □

Лемма 1.20 ([1, лемма 4.11]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$, $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение в копроизведение конеразложимых полигонов. Предположим, что полигон X удовлетворяет условиям (i) - (v) теоремы 1.2. Предположим также, что этот полигон соответствует таблице I из (1.8), т.е. $A = \{a, b\}$, $L = \{l_1, l_2\}$, $a\varphi_{l_1} = b\varphi_{l_2} = 2$, $a\varphi_{l_2} = b\varphi_{l_1} = 1$. Тогда решётка $ConX$ модулярна.*

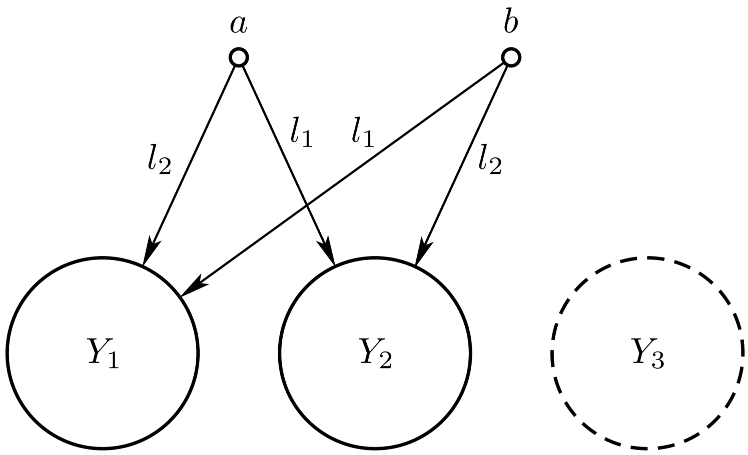


Рисунок 1.4: Полигон X в случае таблицы I

Доказательство. Очевидно, $|I| = 2$ или 3. Вначале предположим, что $|I| = 2$. Рассмотрим полигоны $X' = \{a\} \cup Y$ и $X'' = \{b\} \cup Y$. Нетрудно проверить, что они удовлетворяют условиям предложения 1.4, поэтому решётки $\mathrm{Con}X'$ и $\mathrm{Con}X''$ модулярны.

Найдём конгруэнции, для которых множество $\{a\}$ не является классом. Пусть $\rho \in \mathrm{Con}\, X$ и $(a, x) \in \rho$ при некотором $x \neq a$.

Если $x \in Y_1$, то, взяв такое $s \in S$, что $as \in Y_2$, получим: $as \in Y_2$, $xs \in Y_1$, $(as, xs) \in (Y_2 \times Y_1) \cap \rho$. Так как $(Y_2 \times Y_1) \cap \rho \neq \emptyset$, то по лемме 1.12 получим, что множество $Y_1 \cup Y_2$ лежит в одном ρ-классе. Учитывая соотношение $(a, x) \in \rho$, заключаем, что $\rho \supseteq (aY_1Y_2) = (aY)$. Следовательно, $\rho = (aY)$ или $\rho = \nabla$.

В случае $x \in Y_2$ аналогичным образом получаем, что $\rho \supseteq (aY)$.

Пусть теперь $x = b$. То есть $(a, b) \in \rho$. Возьмём $s = \langle l_1, r \rangle$, тогда $(as, bs) \in (Y_2 \times Y_1) \cap \rho$. Отсюда по лемме 1.12 элементы из $Y_1 \cup Y_2$ лежат в одном ρ-классе. Следовательно, $\rho \supseteq (Y)$, а так как $(a, b) \in \rho$, то $\rho \supseteq (ab)(Y)$. Это означает, что либо $\rho = (ab)(Y)$, либо $\rho = \nabla$.

Итак, множество $\{a\}$ не является ρ-классом в том и только том случае, если $\rho \in \{(aY), (ab)(Y), \nabla\}$. Аналогичным образом доказывается, что множество $\{b\}$ не является ρ-классом тогда и только тогда, когда $\rho \in \{(bY), (ab)(Y), \nabla\}$.

Предположим, что решётка $\mathrm{Con}X$ не модулярна. Тогда она содержит подрешётку - пентагон $\Pi = \{\alpha, \rho_1, \rho_2, \sigma, \omega\}$ (см. рисунок 1.3).

Так же, как в лемме 1.16, убеждаемся, что множество $\{a\}$, а также множество $\{b\}$ не может быть одновременно классом конгруэнций ρ_1 и σ. Далее рассмотрим три случая.

1-й случай: $\sigma = (aY)$. Тогда $\omega = \nabla$. Так как множество $\{b\}$ является σ-классом, то оно не является ρ_1-классом. Следовательно, $\rho_1 \in \{(bY), (ab)(Y), \nabla\}$. Однако, это невозможно, так как ρ_1 – элемент строго возрастающей цепи $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \omega$, а конгруэнции $(bY), (ab)(Y), \nabla$ таковы, что первые две предмаксимальные, а третья максимальна.

2-й случай: $\sigma = (ab)(Y)$. Тогда $\omega = \nabla$. Докажем, что множество $\{a\}$ является ρ_2-классом. Пусть это не так. Тогда $\rho_2 \in \{(aY), (ab)(Y), \nabla\}$. Так как $\rho_2 \neq \nabla, \sigma$, то $\rho_2 = (aY)$. Следовательно, $\alpha = \rho_2 \cap \sigma = (Y)$, а значит, $(Y) \subset \rho_1 \subset (aY)$. Но конгруэнций между (Y) и (aY) нет. Полученное противоречие показывает, что множество $\{a\}$ является ρ_2-классом. Аналогично доказывается, что множество $\{b\}$ – ρ_2-класс. Таким образом, $\rho_2 \subseteq (Y)$, а значит, $\rho_2 \subseteq \sigma$, что невозможно.

3-й случай: множество $\{a\}$ является σ-классом. Тогда $\{a\}$ не является ρ_1-классом. Отсюда следует, что $\rho_1 \in \{(aY), (ab)(Y), \nabla\}$, однако, это невозможно, так как ρ_1 – не максимальная и не предмаксимальная конгруэнция.

Осталось рассмотреть случай, когда $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ и $Y_3 \neq \emptyset$. В этом случае решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна по предыдущей лемме. □

Лемма 1.21 ([1, лемма 4.12]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$, $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение в копроизведение конеразложимых полигонов. Предположим, что полигон X удовлетворяет условиям (i) - (v) теоремы 1.2. Предположим также, что этот полигон соответствует таблице II из (1.8), т.е. $A = \{a, b\}$, $L = \{l_1, l_2\}$, $a\varphi_{l_1} = b\varphi_{l_1} = 1$, $a\varphi_{l_2} = b\varphi_{l_2} = 2$. Тогда решётка $ConX$ модулярна.*

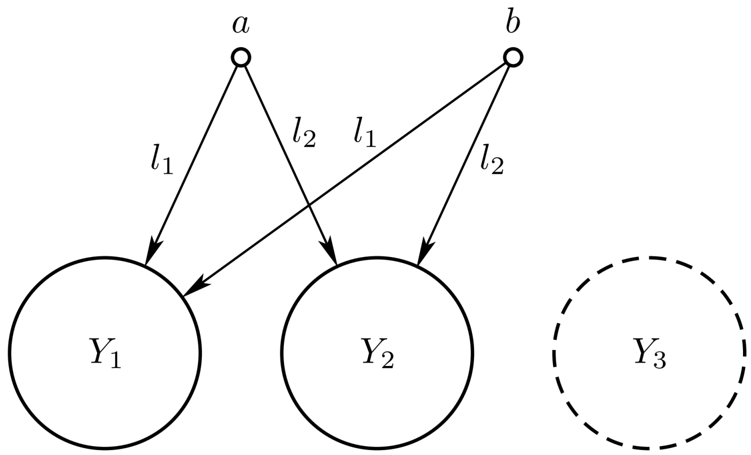


Рисунок 1.5: Полигон X в случае таблицы II

Доказательство. Очевидно, $|I| = 2$ или 3. Вначале предположим, что $|I| = 2$, т.е. $I = \{1, 2\}$, $Y = Y_1 \cup Y_2$. По условию граф Γ_{12} связен. Из леммы 1.17 мы видим, что если конгруэнция $\rho \in \operatorname{Con} X$ такова, что $(Y_1 \times Y_2) \cap \rho \neq \emptyset$, то $\rho \supseteq (Y_1 Y_2)$. Поэтому конгруэнции из $\operatorname{Con} Y \setminus \{\nabla_Y\}$ имеют вид $\rho = \rho' \rho''$, где $\rho' \in \operatorname{Con} Y_1 = \operatorname{Eq} Y_1$, $\rho'' \in \operatorname{Con Y_2} = \operatorname{Eq} Y_2$. Таким образом, имеет место изоморфизм $[\Delta, (Y_1)(Y_2)] \cong [\Delta, (Y_1)] \times [\Delta, (Y_2)] \cong \operatorname{Eq} Y_1 \times \operatorname{Eq} Y_2$.

Всякая конгруэнции ρ из интервала $[\Delta, (ab)(Y_1 Y_2)] = [\Delta, (ab)(Y)]$ такова, что либо $\rho \subseteq (Y)$, либо $\rho = (ab)\rho'$, где $\rho' \subseteq (Y)$. Нетрудно видеть, что $[\Delta, (ab)(Y)] \cong \operatorname{Con} Y \times \operatorname{Eq} 2$, где $\operatorname{Eq} 2$ – двухэлементная решётка (решётка отношений эквивалентности на двухэлементном множестве). Решётка $\operatorname{Con} Y$ модулярна по теореме 6 из [14], поэтому интервал $[\Delta, (ab)(Y)]$, как прямое произведение модулярных решёток, – модулярная решётка. Существуют всего три конгруэнции из $\mathrm{Con}\, X$, не принадлежащие интервалу $[\Delta, (ab)(Y)]$, – это (aY), (bY) и ∇_Y. Решётка $\mathrm{Con}\, X$ схематично изображена на рисунке 1.6.

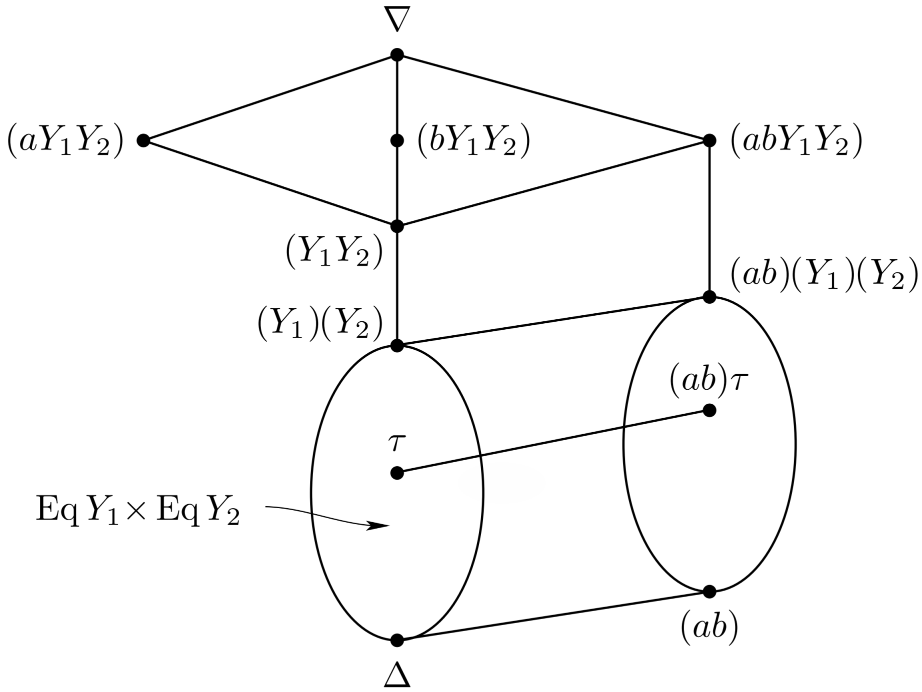


Рисунок 1.6: Решётка конгруэнций полигона X

Предположим, что решётка $\mathrm{Con}X$ не модулярна. Тогда она содержит подрешётку - пентагон $\Pi = \{\alpha, \rho_1, \rho_2, \sigma, \omega\}$ (см. рисунок 1.3). Если $\rho_1, \sigma \in [\Delta, (ab)(Y)]$, то также $\omega = \rho_1 \vee \sigma \in [\Delta, (ab)(Y)]$, и мы получаем, что модулярная решётка $[\Delta, (ab)(Y)]$ содержит пентагон Π, что невозможно. Следовательно, хотя бы одна из конгруэнций ρ_1, σ принадлежит множеству $\{\nabla, (aY), (bY)\}$. Так как ∇ – максимальная конгруэнция, а (aY), (bY) – предмаксимальные, то $\rho_1 \notin \{\nabla, (aY), (bY)\}$. Следовательно, $\sigma \in \{\nabla, (aY), (bY)\}$. Ясно, что $\sigma \neq \nabla$, поэтому $\sigma \in \{(aY), (bY)\}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\sigma = (aY)$. Тогда $\omega = \nabla$. Множество $\{b\}$ является классом конгруэнции σ. Рассуждения, приведённые в лемме 1.16 показывают, что множество $\{b\}$ не может быть одновременно классом конгруэнций ρ_1 и σ. Следовательно, множество $\{b\}$ не является ρ_1-классом. Поэтому $\rho_1 = (bY)$ или $\rho_1 = (ab)\rho'$ для некоторого $\rho' \in \mathrm{Con}\, Y$. Равенство $\rho_1 = (bY)$ невозможно, так как конгруэнция (bY) предмаксимальна. Следовательно, $\rho_1 = (ab)\rho'$. Так как $\rho_2 \supset \rho_1$ и $\rho_2 \neq \nabla$, то $\rho_2 = (ab)\rho''$, где $\rho'' \in \mathrm{Con}\, Y$. Нетрудно проверить, что $\rho_1 \cap \sigma = ((ab)\rho') \cap (aY) = \rho'$ и аналогично $\rho_2 \cap \sigma = \rho''$. Так как $\rho' \neq \rho''$, то $\rho_1 \cap \sigma \neq \rho_2 \cap \sigma$, что невозможно.

Осталось рассмотреть случай, когда $I = \{1, 2, 3\}$. В этом случае решётка $\mathrm{Con}\, X$ модулярна по лемме 1.19. □

Лемма 1.22 ([1, лемма 4.13]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$, $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение в копроизведение конеразложимых полигонов. Предположим, что полигон X удовлетворяет* *условиям (i) - (v) теоремы 1.2. Предположим также, что этот полигон соответствует таблице III из (1.8), т.е.* $A = \{a, b\}$, $L = \{l_1, l_2\}$, $a\varphi_{l_1} = b\varphi_{l_2} = 2$, $a\varphi_{l_2} = 3$, $b\varphi_{l_1} = 1$. *Тогда решётка* $\operatorname{Con} X$ *модулярна.*

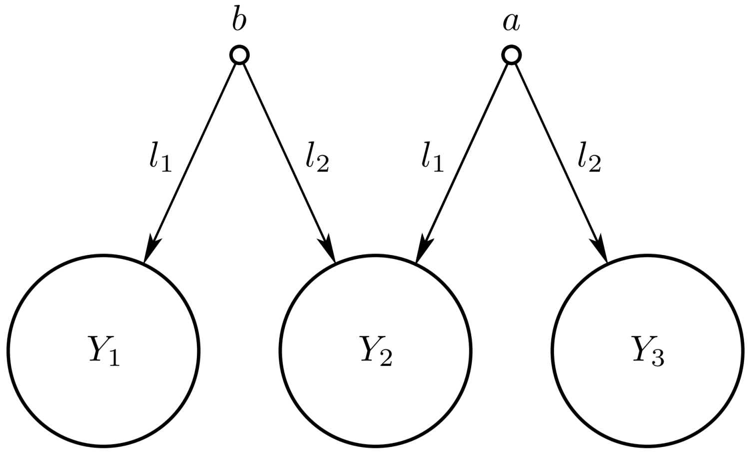


Рисунок 1.7: Полигон X в случае таблицы III

Доказательство. Пусть $X' = \{a\} \cup Y$, $X'' = \{b\} \cup Y$. Эти полигоны удовлетворяют условиям предложения 1.4, поэтому решётки $\operatorname{Con} X'$ и $\operatorname{Con} X''$ модулярны. Предположим, что решётка $\operatorname{Con} X$ не модулярна. Тогда она содержит подрешётку – пентагон $\Pi = \{\alpha, \rho_1, \rho_2, \sigma, \omega\}$ (см. рисунок 1.3). Так же, как в лемме 1.16, доказывается, что множество $\{a\}$ (а также множество $\{b\}$) не может быть классом конгруэнций ρ_1 и σ одновременно.

Выясним, какие из конгруэнций $\rho \in \operatorname{Con} X$ не имеют множество $\{b\}$ своим классом. Пусть $(a, x) \in \rho$ при некотором $x \neq a$. Если $x \in Y_1$, то $(a \cdot \langle l_1, r\rangle, x \cdot \langle l_1, r\rangle) \in \rho \cap (Y_1 \times Y_2)$ и $(a \cdot \langle l_2, r\rangle, x \cdot \langle l_2, r\rangle) \in \rho \cap (Y_3 \times Y_1)$. По лемме 1.12 мы получаем, что все элементы множества Y лежат в одном ρ-классе. Поэтому $\rho = (aY)$ или $\rho = \nabla$. Если $x \in Y_2$, то аналогичным образом получим, что $\rho \supseteq (aY_2Y_3)$, поэтому либо $\rho = (aY)$, либо $\rho = \nabla$, либо $\rho = (aY_2Y_3)\rho'$ для некоторого $\rho' \subseteq (Y_1)$. То же самое получается при $x \in Y_3$. Если же $x = b$, т.е. $(a, b) \in \rho$, то мы получим, что $Y \times Y \subseteq \rho$, а значит, $\rho \in \{(ab)(Y), \nabla\}$. Таким образом,

$$\{a\} \text{ – не } \rho\text{-класс} \Leftrightarrow \rho \in \{(aY_2Y_3)\rho' \,(\rho' \subseteq (Y_1)), (aY), (ab)(Y), \nabla\}. \tag{1.9}$$

Аналогично получим:

$$\{b\} \text{ – не } \rho\text{-класс} \Leftrightarrow \rho \in \{(bY_1Y_2)\rho' \,(\rho' \subseteq (Y_3)), (bY), (ab)(Y), \nabla\}. \tag{1.10}$$

Разберём три случая.

1-й случай: множество $\{a\}$ не является ρ_1-классом. Так как $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \omega$, то конгруэнция ρ_1 не максимальная и не предмаксимальная. Поэтому, учитывая (1.9), получим: $\rho_1 = (aY_2Y_3)\rho'$, где $\rho' \in \operatorname{Eq} Y_1$. Так как $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \omega$, то ρ_2 равно либо $(aY_2Y_3)\rho''$ для некоторого $\rho'' \in \operatorname{Eq} Y_1$, либо (aY).

Мы видим, что множество $\{b\}$ является ρ_1-классом. Следовательно, $\{b\}$ не может быть σ-классом, что ввиду (1.10) нам даёт: σ равно либо $(bY_1Y_2)\rho'''$ при $\rho''' \subseteq (Y_3)$, либо (bY), либо $(ab)(Y)$ (равенство $\sigma = \nabla$ невозможно).

Если $\sigma = (bY_1Y_2)\rho'''$ для $\rho''' \subseteq (Y_3)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_2)\rho'\rho'''$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_2)\rho''\rho'''$, либо $(Y_1Y_2)\rho'''$; в обоих случаях $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$, что противоречит равенствам $\alpha = \sigma \cap \rho_1 = \sigma \cap \rho_2$.

Если $\sigma = (bY)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_2Y_3)\rho'$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_2Y_3)\rho''$, либо (Y), откуда $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$, что невозможно.

Если $\sigma = (ab)(Y)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_2Y_3)\rho'$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_2Y_3)\rho''$, либо (Y), откуда $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$, что невозможно.

2-й случай: множество $\{b\}$ не является ρ_1-классом. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему.

3-й случай: множества $\{a\}$ и $\{b\}$ являются ρ_1-классами. Отсюда $\rho_1 \subseteq (Y)$. Кроме того, $\{a\}$ и $\{b\}$ не являются σ-классами. Из (1.9) и (1.10) мы получаем, что $\sigma \in \{(ab)(Y), \nabla\}$. Очевидно, $\sigma \neq \nabla$, поэтому $\sigma = (ab)(Y)$. Но это означает, что $\rho_1 \subseteq \sigma$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Лемма 1.23 ([1, лемма 4.14]). *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$, $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение в копроизведение конеразложимых полигонов. Предположим, что полигон X удовлетворяет условиям (i) - (v) теоремы 1.2. Предположим также, что этот полигон соответствует таблице IV из (1.8), т.е. $A = \{a, b\}$, $L = \{l_1, l_2\}$, $a\varphi_{l_1} = b\varphi_{l_1} = 1$, $a\varphi_{l_2} = 2$, $b\varphi_{l_2} = 3$. Тогда решётка* $\operatorname{Con} X$ *модулярна.*

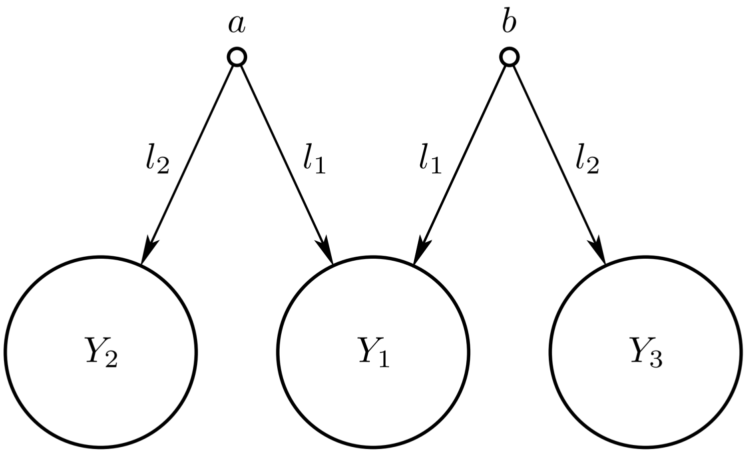


Рисунок 1.8: Полигон X в случае таблицы IV

Доказательство. Пусть $X' = \{a\} \cup Y$, $X'' = \{b\} \cup Y$. Эти полигоны удовлетворяют условиям предложения 1.4, поэтому решётки $\operatorname{Con} X'$ и $\operatorname{Con} X''$ модулярны. Предположим, что решётка $\operatorname{Con} X$ не модулярна. Тогда она содержит подрешётку – пентагон $\Pi = \{\alpha, \rho_1, \rho_2, \sigma, \omega\}$ (см. рисунок 1.3).

Нетрудно видеть, что конгруэнции ρ, для которых множество $\{a\}$ не является ρ-классом, исчерпываются следующими:

$(aY_1Y_2)\rho'$ (где $\rho' \subseteq (Y_3)$), (aY), $(ab)(Y_2Y_3)\rho'$ (где $\rho' \subseteq (Y_1)$), $(ab)(Y)$, ∇.

Конгруэнции ρ, для которых $\{b\}$ – не ρ-класс, таковы:

$(bY_1Y_3)\rho'$ ($\rho' \subseteq (Y_2)$), (bY), $(ab)(Y_2Y_3)\rho'$ ($\rho' \subseteq (Y_1)$), $(ab)(Y)$, ∇.

Рассуждая, как при доказательстве леммы 1.16, убеждаемся, что множество $\{a\}$ не может быть классом конгруэнций ρ_1 и σ одновременно, и также множество $\{b\}$ не может быть одновременно ρ_1- и σ-классом.

Далее будем рассматривать несколько случаев.

1-й случай: множество $\{a\}$ не является ρ_1-классом. Так как $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \omega$, то конгруэнция ρ_1 не максимальная и не предмаксимальная. Поэтому ρ_1 не может равняться (aY), $(ab)(Y)$ или ∇. Следовательно, $\rho_1 \in \{(aY_1Y_2)\rho', (ab)(Y_2Y_3)\rho'\}$.

Случай 1.1: $\rho_1 = (aY_1Y_2)\rho'$ для некоторого $\rho' \subseteq (Y_3)$. Тогда $\rho_2 \in \{(aY), (aY_1Y_2)\rho''\}$. Мы видим, что множество $\{b\}$ – ρ_1-класс. Следовательно, $\{b\}$ не является σ-классом.

Если $\sigma = (bY_1Y_3)\rho'''$ при $\rho''' \subseteq (Y_2)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_1)\rho'\rho'''$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_1Y_3)\rho'''$, либо $(Y_1)\rho''\rho'''$. Так как $\rho' \subset \rho''$, то мы получаем, что $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$, а это невозможно.

Если $\sigma = (bY)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_1Y_2)\rho'$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо (Y), либо $(Y_1Y_2)\rho''$, откуда также $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$. Если $\sigma = (ab)(Y_2Y_3)\rho'''$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_2)\rho'\rho'''$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_2Y_3)\rho'''$, либо $(Y_2)\rho''\rho'''$, и мы снова получаем, что $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Если $\sigma = (ab)(Y)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_1Y_2)\rho'$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо (Y), либо $(Y_1Y_2)\rho''$, откуда снова $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Случай 1.2: $\rho_1 = (ab)(Y_2Y_3)\rho'$ для некоторого $\rho' \subseteq (Y_1)$. Тогда ρ_2 равно либо $(ab)(Y)$, либо $(ab)(Y_2Y_3)\rho''$ при некотором $\rho'' \subseteq (Y_1)$.

Если для σ множества $\{a\}$ и $\{b\}$ являются классами, то $\sigma \subseteq (Y)$. Тогда $\rho_2 \neq (ab)(Y)$ (иначе $\sigma \subseteq \rho_2$, что невозможно). Следовательно, $\rho_2 = (ab)(Y_2Y_3)\rho''$. Имеем: $\sigma \cap \rho_1 = (ab)(Y_2Y_3)\rho' \cap \sigma = Y_2Y_3)\rho' \cap \sigma$, а $\sigma \cap \rho_2 = (Y_2Y_3)\rho'' \cap \sigma$. Следовательно, $\Pi = \{(Y_2Y_3)\rho'' \cap \sigma, (ab)(Y_2Y_3)\rho', (ab)(Y_2Y_3)\rho'', \sigma, (ab)((Y_2Y_3)\rho' \vee \sigma)\}$. Но тогда $\Pi' = \{(Y_2Y_3)\rho'' \cap \sigma, (Y_2Y_3)\rho', (Y_2Y_3)\rho'', \sigma, (Y_2Y_3)\rho' \vee \sigma\}$ – пентагон в решётке $\operatorname{Con} Y$, а это противоречит модулярности этой решётки.

Пусть теперь для σ множество $\{a\}$ не является классом.

Если $\sigma = (ab)\sigma'$, $\sigma' \subseteq (Y)$, то все элементы решётки Π имеют вид $(ab)\tau$, где $\tau \subseteq (Y)$. Отбрасывая (ab), получим пентагон в решётке $\operatorname{Con} Y$, что невозможно. Если $\sigma = (aY)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_2Y_3)\rho'$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо (Y), либо $(Y_2Y_3)\rho''$, откуда $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Итак, множество $\{a\}$ – σ-класс. Тогда $\{b\}$ – не σ-класс. Случай $\sigma = (ab)\sigma'$, где $\sigma' \subseteq (Y)$, уже рассмотрен (он невозможен). Следовательно, σ равно либо $(bY_1Y_3)\rho'''$ при $\rho''' \subseteq (Y_2)$, либо (bY).

Если $\sigma = (bY_1Y_3)\rho'''$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_3)\rho'\rho'''$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_1Y_3)\rho'''$, либо $(Y_3)\rho'\rho''$, откуда $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Если $\sigma = (bY)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_2Y_3)\rho'$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо (Y), либо $(Y_2Y_3)\rho''$, откуда $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

2-й случай: множество $\{b\}$ не является ρ_1-классом. Так как конгруэнция ρ_1 не максимальная и не предмаксимальная, то либо $\rho_1 = (bY_1Y_3)\rho'$, либо $\rho_1 =$

$(ab)(Y_2Y_3)\rho'$.

Случай 2.1: $\rho_1 = (bY_1Y_3)\rho'$ для $\rho' \subseteq (Y_2)$. Тогда ρ_2 равно либо (bY), либо $(bY_1Y_3)\rho''$, $\rho'' \subseteq (Y_2)$.

Так как $\{a\}$ – ρ_1-класс, то $\{a\}$ не является σ-классом.

Если $\sigma = (aY_1Y_2)\rho'''$ для некоторого $\rho''' \subseteq (Y_3)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_1)\rho'\rho'''$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_1Y_2)\rho'''$, либо $(Y_1)\rho''\rho'''$, откуда $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Если $\sigma = (aY)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_1Y_3)\rho'$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо (Y), либо $(Y_1Y_3)\rho''$, откуда также $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Пусть $\sigma = (ab)\sigma'$, где $\sigma' = (Y)$ или $\sigma' = (Y_2Y_3)\rho'''$ для некоторого $\rho''' \subseteq (Y_1)$. Если $\rho_2 = (bY)$, то $\sigma \cap \rho_1$ равно либо $(Y_1Y_3)\rho'$, либо $(Y_3)\rho'\rho'''$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_2Y_3)\rho'''$, либо (Y). В обеих ситуациях $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$, поэтому $\rho_2 \neq (bY)$, а значит, $\rho_2 = (bY_1Y_3)\rho''$. Отсюда получаем: $\sigma \cap \rho_1$ равно либо $(Y_1Y_3)\rho'$, либо $(Y_3)\rho'\rho'''$, а $\sigma \cap \rho_2$ – либо $(Y_1Y_3)\rho''$, либо $(Y_3)\rho''\rho'''$. Снова $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Случай 2.2: $\rho_1 = (ab)(Y_2Y_3)\rho'$, где $\rho' \subseteq (Y_1)$. Тогда ρ_2 равно либо $(ab)(Y_2Y_3)\rho''$ ($\rho'' \subseteq (Y_1)$, либо $(ab)(Y)$.

Если $\sigma = (aY_1Y_2)\rho'''$ ($\rho''' \subseteq (Y_3)$), то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_2)\rho'\rho'''$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_2)\rho''\rho'''$, либо $(Y_1Y_2)\rho'''$, откуда $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Если $\sigma = (aY)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_2Y_3)\rho'$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_2Y_3)\rho''$, либо (Y), а значит, $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Если $\sigma = (bY_1Y_3)\rho'''$ ($\rho''' \subseteq (Y_2)$), то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_3)\rho'\rho'''$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_3)\rho''\rho'''$, либо $(Y_1Y_3)\rho'''$, а значит, $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Если $\sigma = (bY)$, то $\sigma \cap \rho_1 = (Y_2Y_3)\rho'$, а $\sigma \cap \rho_2$ равно либо $(Y_2Y_3)\rho''$, либо (Y), поэтому $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$.

Если $\sigma = (ab)\sigma'$, где $\sigma' = (Y)$ либо $\sigma' = (Y_2Y_3)\rho'''$, то мы имеем: $\Pi = \{(ab)\alpha'$, $(ab)\rho_1'$, $(ab)\rho_2'$, $(ab)\sigma'$, $(ab)\omega'\}$, а значит, $\Pi' = \{\alpha', \rho_1', \rho_2', \sigma', \omega'\}$ – пентагон в решётке $\operatorname{Con} Y$, а это противоречит модулярности этой решётки.

Осталось разобрать случай, когда $\{a\}$ и $\{b\}$ являются σ-классами. Тогда $\sigma \subseteq (Y)$. Так как $\sigma \not\subseteq \rho_2$, то $\rho_2 \neq (ab)(Y)$, поэтому $\rho_2 = (ab)(Y_2Y_3)\rho''$. Имеем: $\alpha = \rho_1 \cap \sigma = (Y_2Y_3)\rho' \cap \sigma$, $\omega = \rho_1 \vee \sigma = (ab)((Y_2Y_3)\rho' \vee \sigma)$. Теперь ясно, что множество

$$\Pi' = \{(Y_2Y_3)\rho' \cap \sigma, (Y_2Y_3)\rho', (Y_2Y_3)\rho'', \sigma, (Y_2Y_3)\rho' \vee \sigma\}$$

– пентагон в решётке $\operatorname{Con} Y$, что противоречит модулярности.

3-й случай: множества $\{a\}$ и $\{b\}$ является ρ_1-классом. Тогда $\rho_1 \subseteq (Y)$. В этом случае ни $\{a\}$, ни $\{b\}$ не могут быть σ-классами. Следовательно, $\sigma = (ab)\sigma'$, где $\sigma' \subseteq (Y)$. Отсюда $\omega = \rho_1 \vee \sigma = (ab)(\rho_1 \vee \sigma')$. Так как $\rho_1 \subset \rho_2 \subset (ab)(\rho_1 \vee \sigma')$, то либо $\rho_2 \subseteq (Y)$, либо $\rho_2 = (ab)\rho_2'$, где $\rho_2' \subseteq (Y)$. Если $\rho_2 = (ab)\rho_2'$, то $\sigma \cap \rho_1 = \sigma' \cap \rho_1$, а $\sigma \cap \rho_2 = (ab)\sigma' \cap (ab)\rho_2' = (ab)(\sigma' \cap \rho_2')$, поэтому $\sigma \cap \rho_1 \neq \sigma \cap \rho_2$. Таким образом, $\rho_2 \subseteq (Y)$. Мы имеем: $\Pi = \{\rho_1 \cap \sigma', \rho_1, \rho_2, (ab)\sigma', (ab)(\rho_1 \vee \sigma')\}$. Нетрудно видеть, что $\Pi' = \{\rho_1 \cap \sigma', \rho_1, \rho_2, \sigma', \rho_1 \vee \sigma'\}$ – пентагон в решётке $\operatorname{Con} Y$, что противоречит модулярности этой решётки. $\square$

1.5.2 Компьютерные вычисления

Пусть $S = L \times R$ – прямоугольная связка и X – полигон над S. Несложно доказываемая часть теоремы 1.2 – необходимость – показывает, что для полигона X с модулярной решёткой конгруэнций либо $X = Y$, либо $X = \{a\} \cup Y$, либо $X = \{a, b\} \cup Y$. Поэтому компьютер было решено применить для доказательства достаточности. Основную трудность представляет ситуация, когда $X = \{a, b\} \cup Y$ и выполняются неравенства (1.6). В этом случае в подразделе 1.5 было установлено, что решётка конгруэнций полигона, удовлетворяющего условиям теоремы 1.2, изоморфна подрешётке решётки конгруэнций некоторого полигона, соответствующего одной из таблиц I, II, III, IV. Поэтому достаточно было проверить модулярность решёток конгруэнций полигонов, соответствующих этим таблицам.

Сделаем два замечания. Первое относится к полигонам над произвольной полугруппой (не обязательно прямоугольной связкой). Второе касается прямоугольных связок.

Замечание 1.6 ([1, замечание 4.4]). *Пусть X – полигон над полугруппой S и ρ – отношение эквивалентности на множестве X. Пусть T – множество образующих полугруппы S (т.е. $S = T \cup T^2 \cup T^3 \cup \ldots$). Если все элементы из T сохраняют ρ (т.е. $(x, y) \in \rho \Rightarrow (xt, yt) \in \rho$ для всех $t \in T$), то ρ – конгруэнция полигона X.*

Замечание 1.7 ([1, лемма 4.5]). *Если $S = L \times R$ – прямоугольная связка, то множество $T = \{(a_\omega, b_\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ является множеством образующих полугруппы S в том и только том случае, если $\{a_\omega \mid \omega \in \Omega\} = L$, а $\{b_\omega \mid \omega \in \Omega\} = R$.*

Ввиду замечания 1.7, если L и R – конечные множества, то неприводимое множество образующих полугруппы S имеет ровно $\max\{|L|, |R|\}$ элементов.

Вернёмся теперь к полигонам, соответствующим таблицам I, II, III, IV. Ввиду леммы 1.18 мы можем считать, что рассматриваемый полигон X таков, что $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ и $|Y_1| = |Y_2| = |Y_3| = 3$, т.е. проверку модулярности осуществлять для максимальных решёток. Обозначив элементы полигона X соответствующим образом, будем считать, что $X = \{a, b, 1, 2, \ldots, 9\}$, $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$, $Y_1 = \{1, 2, 3\}$, $Y_2 = \{4, 5, 6\}$, $Y_3 = \{7, 8, 9\}$. Ввиду леммы 1.2 зависимости решётки конгруэнций $\operatorname{Con} X$ от полугруппы R нет в случае, когда все графы Γ_{ij} связны. Зададимся какой-либо таблицей элементов $\|y_{ir}\|$, для которой графы Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{23} связны. Например, такой:

$i \backslash r$	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
1	1	2	3	1	2
2	4	5	6	5	6
3	7	8	9	9	7

В этой таблице, например, равенство $y_{2r_3} = 6$ означает, что $Y_2 \cdot r_3 = \{6\}$. Связность графов Γ_{ij} здесь проверяется непосредственно.

Пусть полигон X соответствует таблице I. Тогда прямоугольная связка $S = \{l_1, l_2\} \times \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$, где действие элементов l_1, l_2 определяется таблицей I, а элементов $r_1, \ldots, r_5$ – таблицей $\|y_{ir}\|$. Ввиду замечания 1.7 множество элементов $s_1 = (l_2, r_1)$, $s_2 = (l_2, r_2)$, $s_3 = (l_1, r_3)$, $s_4 = (l_1, r_4)$, $s_5 = (l_2, r_5)$ порождает полугруппу S. Предложение 1.1 определит действие элементов s_i на X. Оно таково:

	a	b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s_1	1	4	1	1	1	4	4	4	7	7	7
s_2	2	5	2	2	2	5	5	5	8	8	8
s_3	6	3	3	3	3	6	6	6	9	9	9
s_4	5	1	1	1	1	5	5	5	9	9	9
s_5	2	6	2	2	2	6	6	6	7	7	7

Компьютер построил решётку конгруэнций этого полигона и произвёл проверку её на модулярность. Проверка дала положительный результат, что согласуется с леммой 1.20. Аналогичные вычисления проделаны с полигонами, соответствующими таблицам II-IV.

Для полигона X, соответствующего одной из таблиц I-IV, мы имеем: $\operatorname{Con} X = (a)(b) \operatorname{Con} Y \cup C_1$, где C_1 – множество конгруэнций $\rho \in \operatorname{Con} X$, для которых хотя бы одно из множеств $\{a\}$, $\{b\}$ не является ρ-классом. Согласно предложению 1.3 элементы $\sigma \in \operatorname{Con} Y$ имеют следующий вид: либо $\sigma = \rho_1\rho_2\rho_3$, либо $\sigma = (Y_1Y_2)\rho_3$, либо $\sigma = (Y_1Y_3)\rho_2$, либо $\sigma = (Y_2Y_3)\rho_1$, либо $\sigma = \nabla$, где $\rho_i \in \operatorname{Eq} Y_i$ при $i = 1, 2, 3$. Так как $|\operatorname{Eq} Y_i| = |\operatorname{Eq} 3| = 5$, то $|\operatorname{Con} Y| = 5^3 + 3 \cdot 5 + 1 = 141$.

Для полигона X, соответствующего таблице I, компьютер дал следующий результат: $\operatorname{Con} X = (a)(b) \operatorname{Con} Y \cup (aY_1Y_2) \times \operatorname{Eq} Y_3 \cup (bY_1Y_2) \times \operatorname{Eq} Y_3 \cup (ab)(Y_1Y_2) \times \operatorname{Eq} Y_3 \cup (abY_1Y_2) \times \operatorname{Eq} Y_3 \cup \{(aY), (bY), (ab)(Y), \nabla\}$. Следовательно, $|\operatorname{Con} X| = 141 + 5 + 5 + 5 + 5 + 4 = 165$.

Для полигона X, соответствующего таблице II, мы имеем: $\operatorname{Con} X = (a)(b) \operatorname{Con} Y \cup (aY_1Y_2) \times \operatorname{Eq} Y_3 \cup (bY_1Y_2) \times \operatorname{Eq} Y_3 \cup (abY_1Y_2) \times \operatorname{Eq} Y_3 \cup (ab) \operatorname{Con} Y \cup \{(aY), (bY), \nabla\}$, поэтому $|\operatorname{Con} X| = 141 + 5 + 5 + 5 + 141 + 3 = 300$.

Для полигона X, соответствующего таблице III, $\operatorname{Con} X = (a)(b) \operatorname{Con} Y \cup \cup (aY_1Y_2) \times \operatorname{Eq} Y_3 \cup (bY_2Y_3) \times \operatorname{Eq} Y_1 \cup \{(aY), (bY), (ab)(Y), \nabla\}$, откуда $|\operatorname{Con} X| = 141 + 5 + 5 + 4 = 155$.

Наконец, для полигона X, соответствующего таблице IV, $\operatorname{Con} X = (a)(b) \operatorname{Con} Y \cup (aY_1Y_2) \times \operatorname{Eq} Y_3 \cup (bY_2Y_3) \times \operatorname{Eq} Y_1 \cup (ab)(Y_1Y_3) \times \operatorname{Eq} Y_2 \cup \{(aY), (bY), (ab)(Y), \nabla\}$, что даёт $|\operatorname{Con} X| = 141 + 5 + 5 + 5 + 4 = 160$.

Что касается полигонов, не соответствующих таблицам I-IV, то у них решётка конгруэнций содержит намного меньше, чем 300 элементов. В частности, для полигона X из леммы 1.16 $|\operatorname{Con} X| \leqslant 185$, для полигона из леммы 1.17 $|\operatorname{Con} X| \leqslant 118$.

1.6 Условия дистрибутивности и линейной упорядоченности решётки конгруэнций полигона

В заключительном разделе главы мы охарактеризуем полигоны X над прямоугольной связкой, у которых решётка конгруэнций $\mathrm{Con}\, X$ дистрибутивна или является цепью.

Теорема 1.3 ([1, теорема 5.1]). *Пусть X - полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$, $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение в копрямое произведение копрямо неразложимых подполигонов. Решётка конгруэнций $\mathrm{Con}\, X$ дистрибутивна в том и только том случае, если $|A| \leqslant 1$ и выполнены условия:*
при $A = \emptyset$

(i) $|I| \leqslant 2$, $|Y_i| \leqslant 2$ и граф Γ_{ij} связен при $i \neq j$;

при $A = \{a\}$ выполнено условие (i), а также условие:

(ii) если $a\varphi_l = i$ при некотором $i \in I$ и всех $l \in L$, то $|Y_i| = 1$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что решётка $\mathrm{Con}\, X$ дистрибутивна. Фактор-полигон X/XS – это полигон с нулевым умножением, поэтому $\mathrm{Con}(X/XS) = \mathrm{Eq}(X/XS)$. По лемме 1.1 решётка $\mathrm{Con}(X/XS)$ изоморфна подрешётке решётки $\mathrm{Con}\, X$, поэтому дистрибутивна. По лемме 1.2 $|X/XS| \leqslant 2$, т.е. $|A| + 1 \leqslant 2$, а значит, $|A| \leqslant 1$. По лемме 1.1 решётка $\mathrm{Con}_S\, Y$ дистрибутивна. Ранее мы видели, что Y может быть рассмотрен как полигон над R, причём $\mathrm{Con}_S\, Y = \mathrm{Con}_R\, Y$. По теореме 7 из [14] $|I| \leqslant 2$ и $|Y_i| \leqslant 2$ при всех $i \in I$. Мы можем считать, что $I = \{1\}$ или $I = \{1, 2\}$. При $I = \{1, 2\}$ теорема 7 из [14] покажет, что граф Γ_{12} связен. Таким образом, выполнено условие (i).

Пусть $A = \{a\}$ и $a\varphi_l = 1$ при всех $l \in L$. Это равносильно тому, что $aS = Y_1$. Подполигон $U = aS^1 = \{a\} \cup Y_1$ полигона X таков, что $|Us| = 1$ при всех $s \in S$. Поэтому $\mathrm{Con}\, U = \mathrm{Eq}\, U$, а значит (по лемме 1.2), $|U| \leqslant 2$, откуда $|Y_1| \leqslant 1$. Но $Y_1 \neq \emptyset$, поэтому $|Y_1| = 1$. Тем самым доказано (ii).

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Если $A = \emptyset$, то X может быть рассмотрен как полигон над полугруппой R, причём $\mathrm{Con}_S\, X = \mathrm{Con}_R\, X$, поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 7 работы [14]. Пусть теперь $A \neq \emptyset$. Тогда $A = \{a\}$ при некотором a. Если $I = \{1\}$, то $X = A \cup Y_1$. Так как $a\varphi_l = 1$ при всех $l \in L$, то $|Y_1| \leqslant 1$. Поэтому $|X| \leqslant 2$. В этом случае решётка $\mathrm{ConX} = \{\Delta, \nabla\}$ и является дистрибутивной.

Пусть теперь $I = \{1, 2\}$. Пусть $a\varphi_l = i$ при некотором $i \in I$ и всех $l \in L$. Это равносильно тому, что $aS = Y_i$. Без ограничения общности мы можем считать, что $aS = Y_1$. По условию $|Y_1| = 1$. Тогда $Y_1 = \{y_1\}$ при некотором y_1. Если $|Y_2| = 1$ (скажем, $Y_2 = \{y_2\}$), то $\mathrm{ConX} = \{\Delta, (ay_1), (ay_2), \nabla\} \cong \{0, 1\} \times \{0, 1\}$

(прямое произведение двух двухэлементных цепей) – эта решётка дистрибутивна. Если $|Y_2| = 2$ (скажем, $Y_2 = \{u, v\}$), то $uS = vS = Y_2$. Нетрудно проверить, что тогда ConX $= \{\Delta, (ay_1), (uv), (ay_1)(uv), (ay_1uv), \nabla\} \cong \{0, 1\} \times \{0, 1/2, 1\}$ (прямое произведение двухэлементной и трёхэлементной цепи) – дистрибутивная решётка.

Осталось рассмотреть случай, когда $aS = Y_1 \cup Y_2$. Так как граф Γ_{12} связен, то по лемме 1.12 для любой конгруэнции $\rho \in \mathrm{Con}\, X$

$$\rho \cap (Y_1 \times Y_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow \rho \supseteq (Y_1Y_2).$$

Дистрибутивность решётки $\mathrm{Con}\, X$ теперь является следствием теоремы 7 из [22].

Эта решётка не содержит пентагонов и диамантов, поэтому дистрибутивна. Случаи, когда $|Y_1| < 2$ или $|Y_2| < 2$ будут давать фактор-полигоны только что рассмотренного полигона, следовательно, их решётки конгруэнций также дистрибутивны. $\square$

Наконец, опишем полигоны с цепной решёткой конгруэнций.

Теорема 1.4 ([1, теорема 5.2]). *Пусть X_S – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$. $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение в копроизведение копрямо неразложимых подполигонов. Решётка конгруэнций* $\mathrm{Con}\, X$ *является цепью в том и только том случае, если $|I| \leqslant 2$ (считаем, что $I = \{1\}$ или $I = \{1, 2\}$) и выполнено хотя бы одно из условий:*

(i) $A = \emptyset$, $|I| = 1$, $|Y| \leqslant 2$;

(ii) $A = \emptyset$, $|I| = 2$, $|Y_1|, |Y_2| \leqslant 2$, $|Y_1| + |Y_2| \leqslant 3$;

(iii) $|A| = 1$ (скажем, $A = \{a\}$), $|I| = 1$, $|Y| \leqslant 1$;

(iv) $|A| = 1$ (скажем, $A = \{a\}$), $|I| = 2$, $|Y_1|, |Y_2| \leqslant 2$, $|Y_1| + |Y_2| \leqslant 3$ и $aS = Y$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что решётка $\mathrm{Con}\, X$ – цепь. По предыдущей теореме $|A| \leqslant 1$, $|I| \leqslant 2$ и $|Y_i| \leqslant 2$ при всех i. Будем считать, что $I = \{1\}$ или $I = \{1, 2\}$.

Пусть $A = \emptyset$. Тогда $X = Y$. Если $I = \{1\}$, то $X = Y_1$, поэтому $\mathrm{Con}\, X = \mathrm{Eq}\, Y_1$, а значит, $|Y_1| \leqslant 2$. Следовательно, выполнено (i). Пусть теперь $I = \{1, 2\}$. Тогда $X = Y = Y_1 \sqcup Y_2$, причём $|Y_1|, |Y_2| \leqslant 2$. Докажем, что $|Y_1| + |Y_2| \neq 4$. Пусть это не так, т.е. $|Y_1| = |Y_2| = 2$. Тогда конгруэнции Риса (Y_1) и (Y_2) таковы, что $(Y_1) \nsubseteq (Y_2)$ и $(Y_2) \nsubseteq (Y_1)$ – противоречие с тем, что $\mathrm{Con}\, X$ – цепь. Таким образом, $|Y_1| + |Y_2| \leqslant 3$, т.е. выполнено (ii).

Теперь пусть $A = \{a\}$. Если $I = \{1\}$, то $X = \{a\} \cup Y_1$. Мы имеем: $|Xs| = 1$ при любых $s \in S$. Следовательно, $\mathrm{Con}\, X = \mathrm{Eq}\, X$, а так как $\mathrm{Con}\, X$ – цепь, то $|X| \leqslant 2$. Это значит, что выполнено (iii). Осталось рассмотреть случай, когда $A = \{a\}$ и $I = \{1, 2\}$. Имеем: $Y = Y_1 \cup Y_2$. Если $aS \subseteq Y_1$, то (aY_1) и (Y_1Y_2) – несравнимые конгруэнции, что противоречит тому, что $\mathrm{Con}\, X$ – цепь. Таким образом, $aS \nsubseteq Y_1$. Аналогично доказывается, что $aS \nsubseteq Y_2$. Следовательно, $aS = Y_1 \cup Y_2$. Если $|Y_1| = |Y_2| = 2$, то (Y_1) и (Y_2) – несравнимые конгруэнции, что противоречит условию. Таким образом, $|Y_1|+|Y_2| \leqslant 3$, поэтому выполнено (iv).

Достаточность. Если выполнено (i) или (iii), то $|X| \leqslant 2$, поэтому решётка $\operatorname{Con} X$ – цепь. Пусть выполнено (ii). Если $|Y_1| = |Y_2| = 1$, то также $|X| = 2$, и $\operatorname{Con} X$ – цепь. Если $|Y_1| = 2$, $|Y_2| = 1$, то $\operatorname{Con} X = \{\Delta, (Y), \nabla\}$ – трёхэлементная цепь. Наконец, пусть выполнено (iv). Так как $|Y_1| + |Y_2| \leqslant 3$, то хотя бы одно из множеств Y_1, Y_2 одноэлементно. Будем считать, что $|Y_1| = 1$, скажем, $Y_1 = \{u\}$. Так как $aS = Y_1 \cup Y_2$, то при $|Y_2| = 2$ мы получаем: $\operatorname{Con} X = \{\Delta, (Y_2), (uY_2), \nabla\}$ – четырёхэлементная цепь, а при $|Y_2| = 1$ $\operatorname{Con} X = \{\Delta, (Y), \nabla\}$ – трёхэлементная цепь. $\square$

2 Полигоны с тождествами в решётке конгруэнций

В предыдущей главе мы выяснили, как устроены полигоны над прямоугольной связкой, на решётке конгруэнций которых выполняется тождество дистрибутивности и модулярности. Естественным представляется поставить вопрос о более общем случае, а именно: когда на решётке конгруэнций некоторого полигона нетривиальное решёточное тождество вообще будет существовать, а когда нет?

Заметим, что, вообще говоря, для алгебры A существование нетривиального решёточного тождества на $\operatorname{Con} A$ может рассматриваться как условие конечности на A. Поэтому, в связи с вышесказанным, кажется естественным изучение универсальных алгебр, у которых решётка конгруэнций удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству.

В главе показано, что для любого полигона X над конечной полугруппой его решётка конгруэнций $\operatorname{Con} X$ вкладывается в его решётку отношений эквивалентности $\operatorname{Eq} M$ в том и только том случае, если X содержит бесконечное число элементов. Или, что то же самое: для любого полигона X над конечной полугруппой его решётка конгруэнций удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству тогда и только тогда, когда X конечен. Такое же утверждение доказано для одного частного случая, а именно полигона с нулём над вполне простой[2] (0-простой) полугруппой $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ где $|G|, |I| < \infty$. В случае же, если X – бесконечный полигон, то на его решётке конгруэнций нетривиальное решёточное тождество может как выполняться, так и нет, мы покажем это на отдельных примерах.

2.1 Введение

Напомним, что решёточное тождество $p \approx q$ называется *нетривиальным*, если оно выполняется не во всех решётках, но выполняется в какой-либо нетривиальной решётке. Здесь p, q — термы сигнатуры $\{\wedge, \vee\}$.

Известно, что дистрибутивные и модулярные решётки образуют многообразия, задаваемые соответственно тождеством $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ и тождеством $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (z \wedge (x \vee y))$ (см. [40, глава 5, теорема 347]). Цепи образуют класс решёток, не являющийся многообразием, но замкнутым относительно взятия подрешёток и гомоморфных образов.

Будем обозначать через $\mathcal{V}$ многообразие всех решёток, а $\operatorname{Var} L$ – многообразие, порождаемое решёткой L.

Следующие 3 леммы представляют собой хорошо известные утверждения. Их легко получить, используя [43, следствие 3.14], [44, теорема 1.28] и [45].

[2] Определение будет приведено далее по тексту.

Лемма 2.1 ([6, лемма 3]). *В конечной решётке выполняется хотя бы одно нетривиальное тождество.*

Доказательство. Пусть L – конечная решётка. Обозначим через $\operatorname{Var} L$ многообразие, порождённое решёткой L. Так как L конечна, то ввиду [43, следствие 3.14] многообразие $\operatorname{Var} L$ локально конечно. Однако, не все решётки локально конечны – например, свободная решётка с 3 свободными образующими не является локально конечной, так как по теореме Уитмена ([40, теорема 8 главы VI]) она содержит свободную решётку с $\aleph_0$ свободными образующими. Следовательно, многообразие $\operatorname{Var} L$ не совпадает с классом всех решёток, а значит, L удовлетворяет нетривиальному тождеству. □

Следующие две леммы представляют собой хорошо известные утверждения.

Лемма 2.2 ([45, следствие 1]). *Всякое решёточное тождество, выполняющееся в решётке* $\operatorname{Eq} M$ *для некоторого бесконечного множества* M*, тривиально.*

Лемма 2.3. *Если решётка* L *содержит в качестве подрешётки* $\operatorname{Eq} M$ *для какого–либо бесконечного множества* M*, то* $\operatorname{Var} L = \mathcal{V}$ *(или, что то же самое: на* L *не выполняется ни одно нетривиальное решёточное тождество).*

Цель главы состоит в доказательстве следующих утверждений.

Теорема 2.1 ([2, теорема 1.1]). *Пусть* X *– полигон над конечной полугруппой. Тогда решётка* $\operatorname{Con} X$ *содержит* $\operatorname{Eq} M$ *для бесконечного множества* M *в том и только в том случае, если* X *бесконечен.*

Из леммы 2.2 сразу следует

Следствие 2.1 ([2, следствие 1.2]). *Пусть* X *– полигон над конечной полугруппой. Тогда решётка* $\operatorname{Con} X$ *удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству в том и только том случае, если* X *конечен.*

Теорема 2.2 даёт аналогичный теореме 2.1 результат для полигонов над вполне простыми полугруппами.

Теорема 2.2 ([2, теорема 1.3]). *Пусть* $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ *– вполне 0-простая полугруппа и* $|G| < \infty$, $|I| < \infty$. *Тогда для любого полигона* X *с нулём над полугруппой* S *выполняется следующее: решётка* $\operatorname{Con} X$ *содержит решётку* $\operatorname{Eq} M$ *для бесконечного множества* M *в том и только том случае, если* X *бесконечен.*

Следствие 2.2 ([2, следствие 1.4]). *Если* $|G|, |I| < \infty$*, то* $\operatorname{Con} X$ *удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству в том и только том случае, если* X *конечен.*

Если I – бесконечное множество, то утверждение теоремы 2.2 оказывается неверным. В этой главе мы построим два примера бесконечного *конгруэнц-простого* полигона X, т.е. такого полигона X, что $\operatorname{Con} X = \{\Delta, \nabla\}$. Первый пример – это полигон X с нулём над полугруппой $\mathcal{M}^0(\{e\}, \mathbb{N}, \mathbb{N}, P)$. Второй пример – полигон X над полугруппой $\mathcal{M}(S_3, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0, P)$, где S_3 – группа перестановок трёхэлементного множества. В обоих примерах X бесконечен, но решётка $\operatorname{Con} X$ конечна и, следовательно, по лемме 2.1 $\operatorname{Con} X$ будет удовлетворять некоторому нетривиальному решёточному тождеству.

Предложение 2.1 ([2, предложение 1.5]). *Каждый минимальный правый идеал полигона X над полугруппой $S = \mathcal{M}^0(\{1\}, \mathbb{N}, \mathbb{N}, I)$, где I – единичная матрица размерности $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, образует конгруэнц-простой бесконечный полигон.*

Предложение 2.2 ([2, предложение 1.6]). *Существует конгруэнц-простой бесконечный полигон X над полугруппой $\mathcal{M}(S_3, \mathbb{N}, \mathbb{N}, P)$ для некоторой матрицы P.*

2.2 Полигоны над конечными полугруппами

Теперь введём конструкции и дадим описание некоторых их свойств, которые понадобятся нам в дальнейшём при доказательстве теоремы 2.1.

Пусть X – полигон над полугруппой S. Для элементов $x, y \in X$ положим $x \leqslant y \Leftrightarrow x \in yS^1$. Очевидно, отношение $\leqslant$ является отношением квазипорядка на множестве X. Полигон X называется *связным*, если для любых $x, y \in X$ существует последовательность элементов $x_0, x_1, \ldots, x_{2k} \in X$ такая, что

$$x \geqslant x_0 \leqslant x_1 \geqslant x_2 \leqslant \ldots \geqslant x_{2k} \leqslant y.$$

Нетрудно видеть, что связность полигона X над полугруппой S – это в точности связность графа с множеством вершин X и рёбрами (x, xs), где $x \in X,\ s \in S$ и $x \neq xs$. Напомним, что всякий полигон является копроизведением связных подполигонов (компонент связности).

Пусть X – полигон над полугруппой S. По квазипорядку, определённому выше стандартным образом определяются отношения эквивалентности и отношение порядка. А именно, пусть

$$x \sim y \Leftrightarrow x \leqslant y \wedge y \leqslant x.$$

Тогда $\sim$ – отношение эквивалентности на множестве X. На фактор-множестве $X/{\sim}$ квазипорядок $\leqslant$ индуцирует порядок, который мы также будем обозначать через $\leqslant$. А именно, пусть K_1, K_2 – два класса эквивалентности отношения $\sim$. $K_1 \leqslant K_2$ означает, что $x \leqslant y$ при каких-либо (а значит, и при всех) $x \in K_1$, $y \in K_2$.

Для $x, y \in X$ полагаем

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \nsim y.$$

Лемма 2.4 ([2, лемма 3.1]). *Отношение $<$ на X транзитивно.*

Доказательство. Пусть $x < y$ и $y < z$. Тогда $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$. Ввиду транзитивности отношения $\leqslant$ мы получаем: $x \leqslant z$. Предположим, что $x \sim z$. Тогда $z \leqslant x$. Отсюда $x \leqslant y \leqslant z \leqslant x$, т.е. $x \sim y$, а это противоречит предположению. □

Лемма 2.5 ([2, лемма 3.2]). *Пусть X – полигон над конечной полугруппой S, причём $|S| = n$. Если $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$ – последовательность элементов из X, то $k \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $k > n$. Мы имеем:

$$x_0 = x_1 s_0,\ x_1 = x_2 s_1,\ \ldots\ x_{k-1} = x_k s_{k-1}$$

при некоторых $s_0, \ldots, s_{k-1} \in S^1$. Так как $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, то $s_0, \ldots, s_{k-1} \in S$. Очевидно,

$$x_i = x_k s_{k-1} s_{k-2} \ldots s_i \tag{2.1}$$

при всех $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Элементы $s_{k-1}, s_{k-1}s_{k-2}, \ldots, s_{k-1}s_{k-2}\ldots s_1 s_0$ принадлежат полугруппе S, а так как $|S| = n$ и $k > n$, то среди этих элементов есть совпадающие, т.е. $s_{k-1}s_{k-2}\ldots s_i = s_{k-1}s_{k-2}\ldots s_j$ при некоторых $i \neq j$. Будем считать, что $i < j$. Из формулы (2.1) видно, что в этом случае $x_i = x_j$, однако, это противоречит неравенству $x_j < x_i$. □

Только что доказанная лемма позволяет ввести понятие длины элемента и длины полигона. Пусть X – полигон над конечной полугруппой S. Положим

$$Z_0 = \{x \in X \mid \forall y \in X\ y \leqslant x \to y \sim x\}.$$

Длиной $l(x)$ элемента $x \in X$, назовём наибольшее число k такое, что существует цепочка элементов

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_k = x.$$

Так как эта цепочка наибольшей длины, то $x_0 \in Z_0$. По лемме 2.5 $k \leqslant n$. *Длиной полигона* X назовём число $l(X) = \max\{l(x) \mid x \in X\}$. Таким образом, $l(x) \leqslant n$ при всех $x \in X$. Очевидно, $l(x) = 0 \Leftrightarrow x \in Z_0$. Ясно, что $l(X) \leqslant n$.

Теперь мы готовы провести доказательство одной из анонсированных теорем.

Доказательство теоремы 2.1. Необходимость. Пусть X – полигон над конечной полугруппой и пусть решётка $\operatorname{Con} X \supseteq \operatorname{Eq} M$ для некоторого бесконечного множества M. Если X – конечный, то по лемме 2.1 в решётке $\operatorname{Con} X$ выполняется хотя бы одно нетривиальное тождество. Но это противоречит лемме 2.2, так как $\operatorname{Eq} M \subseteq \operatorname{Con} X$, а значит, X – бесконечный полигон.

Достаточность. Осталось доказать, что если X бесконечен, то решётка $\operatorname{Con} X$ содержит в себе решётку $\operatorname{Eq} M$ для некоторого бесконечного M. Доказательство проведём индукцией по длине $l(X)$ полигона X.

Базис индукции. Пусть $l(X) = 0$. Тогда $X = Z_0$, и мы имеем:

$$\forall x \in X \ \forall s \in S \ \exists t \in S \ \ xst = x.$$

Очевидно, что в этом случае отношение $\sim$ является конгруэнцией, классами которой являются множества xS^1 $(x \in X)$. Эти множества конечны, поэтому $X/{\sim}$ – бесконечный полигон, состоящий целиком из нулей. Отсюда следует, что $\operatorname{Con}(X/{\sim}) = \operatorname{Eq}(X/{\sim})$, и по лемме 2.2 $\operatorname{Con}(X/{\sim})$ не удовлетворяет никакому нетривиальному решёточному тождеству. Из леммы 1.1 следует, что решётка $\operatorname{Con} X$ также не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.

Индуктивный переход. Пусть $l(X) = m > 0$. Если Z_0 – бесконечный подполигон, то решётка $\operatorname{Con} Z_0$ не содержится ни в каком собственном подмногообразии многообразия $\mathcal{V}$. По лемме 1.1 решётка $\operatorname{Con} X$ содержит изоморфную копию решётки $\operatorname{Con} Z_0$, а следовательно, решётка $\operatorname{Con} X$ также не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.

Далее будем считать, что $|Z_0| < \infty$. Положим $X' = X/Z_0$. Тогда X' – бесконечный полигон с единственным нулём z_0. Ясно, что $l(z_0) = 0$ и $l(x) > 0$ при $x \neq z_0$.

Пусть $Z_1 = \{x \in X' \mid \forall y \in X' \ y < x \to y = z_0\}$. Ясно, что $z_0 \in Z_1$. Проверим, что Z_1 - подполигон. Пусть $x \in Z_1$, $s \in S$. Если $x = z_0$, то $xs = z_0$. Пусть $x \neq z_0$. Имеем: $xs \leqslant x$. Если $xs = z_0$, то $xs \in Z_1$. Если $xs \neq z_0$, то $xs \not< x$. Следовательно, $xs \sim x$. Пусть $y < xs$, тогда $y \leqslant x$. Если $y < x$, то $y = z_0$. Таким образом, $xs \in Z_1$.

Предположим, что Z_1 бесконечен. Рассмотрим следующие отношения на полигоне Z_1:

$$\alpha = \{(x, y) \in Z_1 \times Z_1 \mid xS^1 = yS^1\},$$

$$\beta = \{(x, y) \in Z_1 \times Z_1 \mid \forall s \in S^1 \ xs = z_0 \leftrightarrow ys = z_0\}.$$

Очевидно, что отношение α совпадает с $\sim$ на Z_1. Покажем, что β конечного индекса. Действительно, $\beta = \bigcap\{\beta_s \mid s \in S^1\}$, где $\beta_S = \{(x, y) \in Z_1 \times Z_1 \mid xs = z_0 \leftrightarrow ys = z_0\}$. Так как каждое из β_s обладаем индексом 2, то индекс β не превышает 2^{n+1} (так как $|S| = n$). Теперь покажем, что отношение $\alpha \cap \beta$ является конгруэнцией. Пусть $s \in S$ и $(x, y) \in \alpha \cap \beta$. Если $xs = z_0$, то ввиду включения $(x, y) \in \beta$ мы имеем $ys = z_0$. Следовательно, $(xs, ys) \in \alpha \cap \beta$. Пусть $xs \neq z_0$, тогда $ys \neq z_0$ и мы получаем $xs \leqslant x$. Так как $xs \neq z_0$, то $xs \not< x$, поэтому $xs \sim x$. Аналогично получаем, что $ys \sim y$. Так как $x \sim y$, то $xs \sim ys$, т.е. $(xs, ys) \in \alpha$. Теперь покажем, что $(xs, ys) \in \beta$. Так как $xs \sim ys$, то $xs \cdot 1 = z_0 \leftrightarrow ys \cdot 1 = z_0$. Убедимся, что также $xs \cdot t = z_0 \leftrightarrow ys \cdot t = z_0$ при $t \in S$. Положим $xst = z_0$. Так как $(x, y) \in \beta$, то $yst = z_0$. Теперь ясно, что $(xs, ys) \in \beta$. Следовательно, $\alpha \cap \beta$ является конгруэнцией на Z_1.

Так как Z_1 бесконечно и β конечного индекса, то существует бесконечный β класс K. Учитывая, что каждый из $(\alpha \cap \beta)$ классов конечен, то получается, что K содержит бесконечно много $(\alpha \cap \beta)$ классов. Положим $\overline{Z_1} = Z_1/(\alpha \cap \beta)$, $\overline{K} = K/(\alpha \cap \beta)$ (не обязательно будет являться полигоном). Нетрудно видеть, что множество $\overline{K}$ бесконечно. Определим отображение $\overline{K} \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Eq} S^1 \times 2^{S^1}$ следующим образом. Для $\overline{y} \in \overline{K}$ положим $\varphi(\overline{y}) = (\sigma(\overline{y}), A(\overline{y}))$, где

$$\sigma(\overline{y}) = \{(s,t) \in S^1 \times S^1 \mid \overline{y}s = \overline{y}t\}, \quad A(\overline{y}) = \{s \in S^1 \mid \overline{y}s = z_0\}.$$

Здесь $\sigma(\overline{y})$ – правая конгруэнция на полугруппе S^1 и $A(\overline{y})$ – правый идеал в S^1. Так как $\overline{K}$ бесконечно, а $\operatorname{Eq} S^1 \times 2^{S^1}$ конечно, то в отношении $\ker\varphi$ существует бесконечный класс P. Раз так, то $\sigma(\overline{y}) = \sigma(\overline{y}')$ для любых $\overline{y}, \overline{y}' \in P$.

Рассмотрим множество $U = PS^1 \cup \{z_0\}$. Ясно, что U является подполигоном полигона $\overline{Z_1}$. Покажем, что $\operatorname{Eq} P$ вкладывается в $\operatorname{Con} U$.

Пусть $\tau \in \operatorname{Eq} P$. Положим $\rho(\tau) = \{(\overline{y}_1 s, \overline{y}_2 s) \mid s \in S^1, (\overline{y}_1, \overline{y}_2) \in \tau\} \cup \{(z_0, z_0)\}$. Убедимся, что $\rho(\tau) \in \operatorname{Con} U$. Рефлексивность и симметричность отношения $\rho(\tau)$ очевидны. Покажем, что транзитивность также выполняется. Пусть $(u,v),\ (v,w) \in \rho(\tau)$. Заметим, что если $(z_0, u) \in \rho(\tau)$, то $u = z_0$. Действительно, если $u \neq z_0$, тогда $z_0 = \overline{y}_1 s$, $u = \overline{y}_2 s$ для некоторых $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \in P$, $s \in S^1$. Так как $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \in P$, то $A(\overline{y}_1) = A(\overline{y}_2)$ и, следовательно, $\overline{y}_2 s = z_0$, что невозможно. Таким образом, мы можем считать, что $u, v, w \neq z_0$. Тогда $u = \overline{y}_1 s$, $v = \overline{y}_2 s = \overline{y}_3 t$, $w = \overline{y}_4 t$ для некоторых $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3, \overline{y}_4 \in P$, $s, t \in S^1$, где $(\overline{y}_1, \overline{y}_2),\ (\overline{y}_3, \overline{y}_4) \in \tau$. Отсюда мы имеем $\overline{y}_2 s = \overline{y}_3 t \neq z_0$. Элемент $\overline{y}_2 \in \overline{K}$ является классом, содержащим некоторый $y_2 \in K$. Аналогично, $\overline{y}_3$ – это класс, в котором содержится элемент $y_3 \in K$. Так как $y_2 s \neq z_0$, то $(y_2, y_2 s) \in \alpha$. Схожим образом получаем, что $(y_3, y_3 t) \in \alpha$. Так как $y_2, y_3 \in K$, то $(y_2, y_3) \in \beta$, а следовательно, $\overline{y}_2 = \overline{y}_3$ и мы получаем, что $\overline{y}_2 s = \overline{y}_2 t$. Отсюда следует, что $(s,t) \in \sigma(\overline{y}_2)$. Так как $\sigma(\overline{y}_2) = \sigma(\overline{y}_4)$, то $\overline{y}_4 s = \overline{y}_4 t$. Учитывая, что $(\overline{y}_1, \overline{y}_2),\ (\overline{y}_3, \overline{y}_4) \in \tau$ и $\overline{y}_2 = \overline{y}_3$, мы получаем $(\overline{y}_1, \overline{y}_4) \in \tau$. Кроме того, $(\overline{y}_1 s, \overline{y}_4 t) = (\overline{y}_1 s, \overline{y}_4 s)$. Следовательно, $(u, w) \in \rho(\tau)$, что и означает транзитивность $\rho(\tau)$. Импликация $(p,q) \in \rho(\tau) \to (ps, qs) \in \rho(\tau)$ (при $(p,q) \in \tau,\ s \in S$) очевидна, а следовательно, $\rho(\tau)$ – конгруэнция на U.

Рассмотрим отображение $\operatorname{Eq} P \to \operatorname{Con} U$, $\tau \mapsto \rho(\tau)$. Легко проверить, что это отображение является решёточным вложением $\operatorname{Eq} P$ в $\operatorname{Con} U$. Обозначим изоморфное вложение решёток символом $\underset{\to}{\subset}$. Тогда, по лемме 1.1 мы имеем:

$$\operatorname{Con} U \underset{\to}{\subset} \operatorname{Con} \overline{Z}_1 \underset{\to}{\subset} \operatorname{Con} Z_1 \underset{\to}{\subset} \operatorname{Con} X.$$

Следовательно, $\operatorname{Eq} P$ вкладывается в $\operatorname{Con} X$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось рассмотреть случай, когда Z_1 – конечное множество. Положим $X'' = X'/Z_1$.

Докажем, что $l(X'') < m$. Пусть

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_k$$

– цепь наибольшей длины в X''. Предположим, что $k \geqslant m$, и приведём это предположение к противоречию. Так как $X'' = (X' \setminus Z_1) \cup \{0\}$, то $x_1 \neq Z_1$. По определению Z_1 это означает, что существует такое $y \in X'$, что $y < x_1$ и $y \neq z_0$. Если $y \notin Z_1$, то $z < y$ при некотором $z \neq z_0$, и мы можем получить цепочку

$$z < y < x_1 < \ldots < x_k$$

элементов из X, которая показывает, что $l(X) \geqslant k + 1 > m$ – противоречие с условием. Таким образом, $y \in Z_1$ и $y \neq z_0$ в X', т.е. $y \notin Z_0$ в X. Так как $y \notin Z_0$, то $z < y$ при некотором $z \in X$. Мы снова получаем цепочку

$$z < y < x_1 < \ldots < x_k,$$

существование которой приводит к противоречию.

Таким образом, $l(X'') < m$. Так как X'' бесконечен, то по предположению индукции решётка $\operatorname{Con} X''$ содержит изоморфную копию некоторой решётки $\operatorname{Eq} M$ для бесконечного множества M. С другой стороны, так как X'' – гомоморфный образ полигона X, то по лемме 1.1 $\operatorname{Con} X''$ – подрешётка решётки $\operatorname{Con} X$. Отсюда получаем, что решётка $\operatorname{Con} X$ также включает в себя решётку $\operatorname{Eq} M$ для некоторого бесконечного M, а значит, не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. □

2.3 Полигоны над вполне простыми полугруппами

Теперь перейдём к описанию результата, аналогичного теореме 2.1, но для случая, когда S – вполне простая полугруппа.

Напомним, что *вполне простой* полугруппой называется полугруппа S, не имеющая нетривиальных идеалов и имеющая хотя бы один примитивный идемпотент (т.е. идемпотент, минимальный относительно естественного порядка на множестве идемпотентов: $e \leqslant f \Leftrightarrow ef = fe = e$). Полугруппа S с нулём называется *вполне 0-простой*, если выполнены условия: 1) S не имеет идеалов, отличных от $\{0\}$ и S; 2) S имеет 0-минимальный (т.е. минимальный среди ненулевых) идемпотент; 3) $S^2 \neq 0$.

Рисовская матричная полугруппа (с нулём) $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ (здесь G – группа, I и Λ – множества, $P = \|p_{\lambda i}\|$ $(\lambda \in \Lambda, i \in I)$ – матрица с элементами из $G \cup \{0\}$) определяется как множество, состоящее из элемента 0 и элементов вида $(g)_{i\lambda}$, где $g \in G,\ i \in I,\ \lambda \in \Lambda$, с умножением

$$(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = \begin{cases} (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}, \text{ если } p_{\lambda j} \neq 0, \\ 0, \text{ если } p_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$

Рисовская матричная полугруппа $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, где G, I, Λ, P такие же, как и выше, но $p_{\lambda i} \in G$ при всех $i \in I, \lambda \in \Lambda$ – это множество элементов вида $(g)_{i\lambda}$ с умножением

$$(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}.$$

Ввиду того, что элементы матрицы P находятся между элементами g и h при умножении выше, матрицу P называют *сэндвич-матрицей*. Можно считать, что символ $(g)_{i\lambda}$ обозначает матрицу, состоящую целиком из нулей, в которой на пересечении строки i и столбца λ находится элемент группы g, а умножение элементов $(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = (g)_{i\lambda} * P * (h)_{j\mu}$, где $*$ – матричное умножение.

Хорошо известная теорема Сушкевича – Риса утверждает, что вполне простые полугруппы — это в точности полугруппы, изморфные полугруппе $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, а вполне 0-простые — изоморфные рисовской матричной полугруппе $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, при условии, что матрица P не содержит нулевых строк или столбцов (см. [39], теорема 3.5 и замечания перед леммой 3.1).

Для полугрупп S с нулём мы будем рассматривать полигоны X с нулём и накладывать требование $0 \cdot s = x \cdot 0 = 0$ для любых $s \in S,\ x \in X$.

Все полигоны над полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и все полигоны с нулём над полугруппой $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ были описаны в работе [10]. Приведём это описание, но сначала надо сделать несколько предварительных рассуждений.

Пусть S – полугруппа с единицей e. Полигон X над S называется *унитарным*, если $xe = x$ для всех $x \in X$. Всякая полугруппа S является полигоном на собой, при этом конгруэнции этого полигона — это в точности правые конгруэнции полугруппы. Нетрудно проверить, что правая конгруэнция группы G — это в точности разложения в правые смежные классы по некоторой подгруппе группы G. Если H – подгруппа группы G, через G/H мы будем обозначать множество правых смежных классов Hg, где $g \in G$. G/H является G – полигоном относительно операции $Hg \cdot g' = Hgg'$. Пусть $\{H_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ – семейство подгрупп группы G. Положим

$$Q = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} (G/H_\gamma).$$

Нетрудно видеть, что написанное выражение – это общий вид любого унитарного полигона над группой G, а G/H – общий вид унитарного циклического полигона.

Следующие два утверждения дают описание полигонов над вполне простыми и вполне 0-простыми полугруппами.

Предложение 2.3 ([10, теорема 5]). *Пусть X – множество, $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ – вполне простая полугруппа, $\{H_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ – семейство подгрупп группы G, $Q = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma}(G/H_\gamma)$ – унитарный полигон над G. Пусть для $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$ определены отображения $\pi_i : X \to Q$, $\varkappa_\lambda : Q \to X$ такие, что $q\varkappa_\lambda\pi_i = q \cdot p_{\lambda i}$ при любых $q \in Q$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Для $x \in X$ и $(g)_{i\lambda} \in S$ положим $x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\varkappa_\lambda$. Тогда X будет являться полигоном над S. Кроме того, всякий полигон над вполне простой полугруппой изоморфен полигону, устроенному таким образом.*

Предложение 2.4 ([10, теорема 4]). *Пусть X – множество с выделенным в нём элементом 0, $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ – вполне 0-простая полугруппа, $\{H_\gamma \mid$*

$\gamma \in \Gamma\}$ – семейство подгрупп группы G, $Q = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma}(G/H_\gamma)$ – полигон над G. $Q^0 = Q \cup \{0\}$. Пусть для $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$ определены отображения $\pi_i : X \to Q^0$, $\varkappa_\lambda : Q^0 \to X$ такие, что $0\pi_i = 0$, $0\varkappa_\lambda = 0$, $q\varkappa_\lambda\pi_i = q \cdot p_{\lambda i}$ при $q \in Q^0$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Положим $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\varkappa_\lambda$ при $x \in X$, $(g)_{i\lambda} \in S \setminus \{0\}$. Тогда X – полигон с нулём над S. Кроме того, любой полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой изоморфен полигону, устроенному таким образом.

В предыдущей главе мы уже определяли понятие копроизведения полигонов, но для дальнейшего нам понадобится несколько «расширить» это понятие.

Пусть X – полигон с нулём и X_i $(i \in I)$ – его подполигоны. Если $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ и $X_i \cap X_j = \{0\}$ при $i \neq j$, то мы говорим, что X является *0-копроизведением* полигонов X_i, и пишем $X = \bigsqcup^0_{i\in I} X_i$.

Теперь, пусть X – полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, полученный вышеописанной конструкцией, т.е. $Q^0, \varkappa_\lambda, \pi_i$ имеют тот же смысл, что и в предложении 2.4. Положим $Q_\gamma = (G/H_\gamma) \cup \{0\}$. Для $q \in Q^0$, $\gamma \in \Gamma$ положим $X_q = \bigcup\{q\varkappa_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, $X^{(\gamma)} = \bigcup\{X_q \mid q \in Q\}$. Нам понадобится ряд свойств этих множеств, проверка не составляет труда.

Предложение 2.5 ([10, леммы 1–4 и предложение 1]).

(1) $X^{(\gamma)}$ – подполигон полигона X;

(2) $X^{(\gamma)} \cap X^{(\delta)} = \{0\}$ при $\gamma \neq \delta$;

(3) $XS = \bigsqcup^0_{\gamma\in\Gamma} X^{(\gamma)}$;

(4) $xS = X^{(\gamma)}$ для всех $x \in X^{(\gamma)} \setminus \{0\}$;

(5) $X = (X \setminus XS) \cup \bigsqcup^0_{\gamma\in\Gamma} z_\gamma S$, причём $z_\gamma \neq 0$ и $z_\gamma \in xS$ при всех $x \in X^{(\gamma)} \setminus \{0\}$.

Наша следующая цель – найти для полигона X такой фактор-полигон некоторого его подполигона, что G и I являются конечными множествами, а Γ и Λ – бесконечными и этот фактор-полигон должен обладать некоторыми нужными нам свойствами.

Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ – вполне 0-простая полугруппа. Для $i \in I$ положим $R_i = \{0\} \cup \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G, \lambda \in \Lambda\}$ и будем считать R_i полигоном над S. Очевидно, что $S = \coprod^0_{i\in I} R_i$.

Будем называть полигон X с нулём над полугрупой S с нулём *0-простым*, если $XS \neq \{0\}$ и X обладает только двумя подполигонами: $\{0\}$ и X.

Лемма 2.6 ([2, лемма 4.4]). *Пусть C – циклический 0-простой полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ и $CS \neq 0$. Тогда $C \cong R_i/\rho$ для некоторого $i \in I$ и конгруэнции ρ полигона R_i.*

Доказательство. Возьмём $c \in C$ такое, что $cS \neq 0$. Тогда, ввиду 0-простоты полигона C мы имеем: $cS = C$. Так как $S = \cup_{i \in I} R_i$, то $cR_i \neq 0$ для некоторого $i \in I$. Так как cR_i не является нулевым полигоном, то $cR_i = C$. Рассмотрим отображение $f : R_i \to C$, $r \mapsto cr$. Нетрудно увидеть, что f является сюръективным гомоморфизмом полигонов. По первой теореме об изоморфизме $C \cong R_i/\rho$, где $\rho = \ker f$. $\square$

Замечание 2.1. *Из леммы 2.6 и пункта (5) предложения 2.5 следует, что* $XS = \coprod^0_{\gamma \in \Gamma} X^{(\gamma)}$, *где* $X^{(\gamma)} = z_\gamma S = z_\gamma R_i \cong R_i/\rho$ *для некоторого* $i \in I$ *и* $\rho \in \operatorname{Con} R_i$ *(здесь* i *и* ρ *зависят от* γ*).*

Лемма 2.7 ([2, лемма 4.6])**.** *Пусть* $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ *– вполне 0-простая полугруппа и* $\rho \in \operatorname{Con} R_i$ *для некоторого* $i \in I$. *Тогда существует единственная подгруппа* H *группы* G *такая, что*

$$\forall \lambda \in \Lambda \ \forall g, g' \in G \ (g)_{i\lambda} \ \rho \ (g')_{i\lambda} \leftrightarrow g'g^{-1} \in H. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $(g)_{i\lambda} \ \rho \ (g')_{i\lambda}$. Возьмём такое $j \in I$, что $p_{\lambda j} \neq 0$. Тогда мы получим $(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} \ \rho \ (g')_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu}$, т.е. $(gp_{\lambda j}h)_{i\mu} \ \rho \ (g'p_{\lambda j}h)_{i\mu}$. Это означает, что

$$(g)_{i\lambda} \ \rho \ (g')_{i\lambda} \leftrightarrow (g)_{i\mu} \ \rho \ (g')_{i\mu}$$

для всех $g, g' \in G$, $\lambda, \mu \in \Lambda$. Отсюда следует, что отношение

$$\rho' = \{(g, g') \in G \times G \mid (g)_{i\lambda} \ \rho \ (g')_{i\lambda}\}$$

для некоторых (и, следовательно, для всех) $\lambda \in \Lambda$ является правой конгруэнцией на группе G. Следовательно, существует единственная подгруппа $H \subseteq G$ такая, что

$$(g, g') \in \rho' \leftrightarrow Hg = Hg'.$$

$\square$

Введём отношение $\equiv$ на множестве Λ, положив

$$\lambda \equiv \mu \leftrightarrow \forall j \in I (p_{\lambda j} = 0 \leftrightarrow p_{\mu j} = 0). \tag{2.3}$$

Пусть ρ – конгруэнция на полигоне R_i такая, что $\rho \neq \nabla_{R_i}$, и H – подгруппа группы G, удовлетворяющая условию (2.2). Тогда мы будем называть H подгруппой, соответствующей отношению ρ.

Лемма 2.8 ([2, лемма 4.7])**.** *Пусть* H *– подгруппа группы* G, $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ *– вполне 0-простая полугруппа и* $R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G, \lambda \in \Lambda\} \cup \{(0)\}$. *Положим*

$$\overline{\rho} = \{(0, 0)\} \cup \{((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \mid \lambda \equiv \mu \ \& \ \forall j \in I \ Hap_{\lambda j} = Hbp_{\mu j}\}.$$

Тогда $\overline{\rho}$ *– наибольшая конгруэнция на полигоне* R_i *которой соответствует подгруппа* H.

Доказательство. Сначала убедимся, что $\overline{\rho}$ является отношением эквивалентности. Рефлексивность и симметричность очевидны. Покажем транзитивность. Пусть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu})$, $((b)_{i\mu}, (c)_{i\nu}) \in \overline{\rho}$. Так как $\lambda \equiv \mu$ и $\mu \equiv \nu$, то $\lambda \equiv \nu$. В силу того, что $Hap_{\lambda j} = Hbp_{\mu j}$ и $Hbp_{\mu j} = Hcp_{\nu j}$, то $Hap_{\lambda j} = Hcp_{\nu j}$. Следовательно, $((a)_{i\lambda}, (c)_{i\nu}) \in \overline{\rho}$.

Теперь проверим, что $\overline{\rho}$ выдерживает умножение на элементы полугруппы S, т.е. является конгруэнцией. Пусть $(x, y) = ((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \overline{\rho}$ и $s = (g)_{k\nu} \in S$. Тогда $\lambda \equiv \mu$ и $Hap_{\lambda j} = Hbp_{\mu j}$ для всех $j \in I$. Если $p_{\lambda k} = 0$, то $p_{\mu k} = 0$ и $xs = ys = 0$. Предположим, что $p_{\lambda k} \neq 0$, тогда $xs = (a)_{i\lambda} \cdot (g)_{k\mu} = (ap_{\lambda k}g)_{i\nu}$, $ys = (b)_{i\mu} \cdot (g)_{k\mu} = (bp_{\mu k}g)_{i\nu}$. Так как $Hap_{\lambda k}gp_{\nu j} = Hbp_{\mu k}gp_{\nu j}$, то $(xs, ys) \in \overline{\rho}$.

Покажем максимальность конгруэнции $\overline{\rho}$. Предположим, что ρ – конгруэнция на R_i, $\rho \neq \nabla_{R_i}$ и подгруппа H группы G соответствует ρ. Так как $\rho \neq \nabla_{R_i}$ и R_i является 0-простым полигоном, то элемент 0 является *изолированным*, т.е. $(0, x) \notin \rho$ для $x \neq 0$. Пусть $(x, y) = ((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho$ и предположим, что $\lambda \not\equiv \mu$. Тогда существует такой $j \in I$, что либо $p_{\lambda j} = 0$, $p_{\mu j} \neq 0$ либо $p_{\lambda j} \neq 0$, $p_{\mu j} = 0$. Без ограничения общности мы можем считать, что $p_{\lambda j} = 0$, $p_{\mu j} \neq 0$. Положим $s = (g)_{j\nu}$. Тогда $xs = 0$, $ys \neq 0$. Так как $(xs, ys) \in \rho$, то $\rho = \nabla_{R_i}$, что является противоречием. Следовательно, $\lambda \equiv \mu$.

Возьмём любое $j \in I$. Если $p_{\lambda j} = 0$, то $p_{\mu j} = 0$ и мы имеем: $Hap_{\lambda j} = Hbp_{\mu j} = 0$. Теперь предположим, что $p_{\lambda j} \neq 0$, мы получим:

$$\rho \ni (x, y) \cdot (g)_{j\nu} = ((ap_{\lambda j}g)_{i\nu}, (bp_{\mu j}g)_{i\nu}).$$

Отсюда следует, что $Hap_{\lambda j}g = Hbp_{\mu j}g$ и, следовательно, $Hap_{\lambda j} = Hbp_{\mu j}$. Таким образом, $(x, y) \in \overline{\rho}$, откуда получаем $\rho \subseteq \overline{\rho}$. Следовательно, $\overline{\rho}$ – наибольшая конгруэнция для этой подгруппы H. □

Лемма 2.9 ([2, лемма 4.8]). *Пусть X – 0-копроизведение бесконечного числа измоморфных ненулевых полигонов. Тогда решётка* $\operatorname{Con} X$ *не удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству.*

Доказательство. Пусть Y – ненулевой полигон и $X = \coprod_{i \in I}^{0} X_i$, где I – бесконечное множество. Для любого $i \in I$ обозначим через $\varphi_i : Y \to X_i$ изоморфизм между Y и X_i. Далее, для каждого $\sigma \in \operatorname{Eq} I$ положим

$$\rho(\sigma) = \{(\varphi_i(y), \varphi_j(y)) \mid (i, j) \in \sigma, y \in Y\}.$$

Так как σ – отношение эквивалентности и φ_i – биективные отображения, то $\rho(\sigma)$ – конгруэнция.

Покажем, что $\rho(\sigma \cap \tau) = \rho(\sigma) \cap \rho(\tau)$. Так как $\sigma \cap \tau \subseteq \sigma, \tau$, то $\rho(\sigma \cap \tau) \subseteq \rho(\sigma) \cap \rho(\tau)$. Пусть $(x, x') \in \rho(\sigma) \cap \rho(\tau)$ и $x \neq 0$. Тогда $x' \neq 0$. Так как $(x, x') \in \rho(\sigma)$ и $x \neq 0$, то $x = \varphi_i(y)$, $x' = \varphi_j(y)$ для некоторого $y \in Y \setminus \{0\}$, $i, j \in I$, где $(i, j) \in \sigma$. Аналогичным образом $(i, j) \in \tau$. Следовательно, $(i, j) \in \sigma \cap \tau$. Это означает, что $(x, x') \in \rho(\sigma \cap \tau)$.

Докажем, что $\rho(\sigma \vee \tau) = \rho(\sigma) \vee \rho(\tau)$. Включение $\rho(\sigma) \vee \rho(\tau) \subseteq \rho(\sigma \vee \tau)$ очевидно. Пусть $(x, x') \in \rho(\sigma \vee \tau)$. Если $x = 0$, то $(x, x') = (0, 0) \in \rho(\sigma) \vee \rho(\tau)$. Если же $x \neq 0$, то $x' \neq 0$ и $(x, x') = (\varphi_i(y), \varphi_j(y))$ для некоторого $y \in Y \setminus \{0\}$ и $(i, j) \in \sigma \vee \tau$. Нетрудно увидеть, что найдутся элементы $i_1, i_2, \ldots, i_{2m-1} \in I$ такие, что $(i, i_1) \in \sigma,\ (i_1, i_2) \in \tau,\ \ldots,\ (i_{2m-2}, i_{2m-1}) \in \sigma, (i_{2m-1}, j) \in \tau$. Рассмотрим элементы $x_k = \varphi_{i_k}(y)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2m-1)$. Тогда $(x, x_1) \in \rho(\sigma),\ (x_1, x_2) \in \rho(\tau),\ \ldots\ ,\ (x_{2m-2}, x_{2m-1}) \in \rho(\sigma),\ (x_{2m-1}, x') \in \rho(\tau)$. Учитывая вышесказанное мы получаем, что $(x, x') \in \rho(\sigma) \vee \rho(\tau)$, а следовательно, $\rho(\sigma \vee \tau) = \rho(\sigma) \vee \rho(\tau)$.

Рассмотрим отображение $\operatorname{Eq} I \to \operatorname{Con} X,\ \sigma \mapsto \rho(\sigma)$. Рассуждения выше показывают, что это отображение является изоморфным вложением решётки $\operatorname{Eq} I$ в решётку $\operatorname{Con} X$. Так как I – бесконечное множество, то $\operatorname{Eq} I$ не удовлетворяет никакому нетривиальному решёточному тождеству, а следовательно, $\operatorname{Con} X$ тоже. $\square$

Следующая лемма – последний подготовительный шаг перед доказательством теоремы 2.2.

Лемма 2.10 ([2, лемма 4.9]). *Пусть $\rho \neq \nabla_{R_i}$ – конгруэнция на полигоне R_i с соответствующей ей подгруппой $H \leqslant G$. Если $(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu}$ для некоторых $a, b \in G,\ \lambda, \mu \in \Lambda$, то $\lambda \equiv \mu$ (см. (2.3)) и $\forall j \in I\ p_{\lambda j} \neq 0 \to p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1} H b$.*

Доказательство. Обозначим через e единицу группы G и пусть $(a)_{i\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu}$. Если $p_{\lambda j} = 0$ и $p_{\mu j} \neq 0$, то $0 = (a)_{i\lambda} \cdot (e)_{j\lambda}\ \rho\ (b)_{i\mu} \cdot (e)_{j\lambda} = (b p_{\mu j})_{i\lambda}$. Следовательно, $0\ \rho\ x$ для некоторого $x \neq 0$. Так как R_i – 0-простой, то $\rho = \nabla_{R_i}$, что невозможно. То есть мы показали, что $\lambda \equiv \mu$. Пусть $p_{\lambda j} \neq 0$. Тогда $(a p_{\lambda j})_{i\lambda}\ \rho\ (b p_{\mu j})_{i\lambda}$. По лемме 2.7 мы получаем $H a p_{\lambda j} = H b p_{\mu j}$ для некоторой подгруппы H, т.е. $p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1} H b$. $\square$

Доказательство теоремы 2.2. Достаточность. Если X – конечный полигон, то решётка $\operatorname{Con} X$ конечна, а значит, удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству.

Необходимость. Пусть X – полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, где $|G|, |I| < \infty$, и решётка $\operatorname{Con} X$ удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству.

Заметим вначале, что $|X \setminus XS| < \infty$. Действительно, если $X \setminus XS$ – бесконечное множество, то фактор-полигон X/XS – бесконечный и состоит целиком из нулей. Поэтому $\operatorname{Con}(X/XS) = \operatorname{Eq}(X/XS)$. Лемма 1.1 показывает, что все тождества на решётке $\operatorname{Con} X$ – тривиальные, что противоречит предположению.

Итак, $|X \setminus XS| < \infty$. Так как $X = (X \setminus XS) \cup \coprod^0_{\gamma \in \Gamma} z_\gamma S$ (для некоторого Γ по предложению 2.5), то достаточно показать, что Γ – конечное множество и полигоны $z_\gamma S$ конечны.

Рассмотрим подполигон $Y = \coprod^0_{\gamma \in \Gamma} z_\gamma S$. Предположим, что Γ бесконечно и приведём это предположение к противоречию. Так как $S = \bigcup_{i \in I} R_i$ и $z_\gamma S \neq 0$, то существует $i \in I$ такое, что $z_\gamma R_i \neq 0$, и следовательно, ввиду 0-простоты полигонов $z_\gamma S$, $z_\gamma S = z_\gamma R_i$. Выберем для каждого $\gamma \in \Gamma$ некоторый $i \in I$ такой, что $z_\gamma S = z_\gamma R_i \neq 0$. Так как I конечно, а Γ– бесконечно, то существует бесконечное подмножество $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ и элемент $i \in I$ такой, что $z_\gamma R_i \neq 0$ для всех $\gamma \in \Gamma_1$. Рассмотрим подполигон $Y' = \coprod^0_{\gamma\in\Gamma_1} z_\gamma S$ полигона Y. По лемме 1.1 решётка $\operatorname{Con} Y'$ является подрешёткой решётки $\operatorname{Con} Y$, а следовательно, $\operatorname{Con} Y'$ удовлетворяет нетривиальному тождеству.

Мы имеем: $z_\gamma S = z_\gamma R_i \neq 0$ для всех $\gamma \in \Gamma_1$. Так как $z_\gamma R_i$ – циклический полигон, то $z_\gamma R_i \cong R_i/\rho_\gamma$ для некоторой конгруэнции ρ_γ полигона R_i. Так как $z_\gamma R_i \neq 0$, то $\rho_\gamma \neq \nabla_{R_i}$, и следовательно, по лемме 2.7 существует подгруппа H группы G такая, что $\{0\}$ является ρ_γ-классом и

$$(a)_{i\lambda}\ \rho_\gamma\ (b)_{i\lambda} \leftrightarrow Ha = Hb$$

для всех $a, b \in G$, $\lambda \in \Lambda$. Здесь H определяется единственным образом по $\gamma \in \Gamma_1$. Так как группа G конечна, то число её подгрупп также конечно, и следовательно, существует подгруппа $H \subseteq G$ и бесконечное множество $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$ такие, что для H и каждого $\gamma \in \Gamma_2$ выполняется (2.2). По лемме 2.8 $\rho_\gamma \subseteq \overline{\rho}_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$, где $\overline{\rho}$ – наибольшая конгруэнция на R_i, соответствующая подгруппе H. Нетрудно видеть, что $\overline{\rho}_\gamma = \overline{\rho}_{\gamma'}$ для всех $\gamma, \gamma' \in \Gamma_2$. Пусть $Y'' = \coprod^0_{\gamma\in\Gamma_2} R_i/\overline{\rho}_\gamma$. По лемме 1.1 решётка $\operatorname{Con} Y''$ является подрешёткой решётки $\operatorname{Con} Y'$, следовательно, решётка $\operatorname{Con} Y''$ удовлетворяет некоторому нетривиальному решёточному тождеству. Однако, это невозможно ввиду леммы 2.9 (так как Γ_2 бесконечно и все $\overline{\rho}_\gamma$ совпадают). Это противоречие показывает, что Γ – конечное множество.

Для завершения доказательства осталось показать, что полигоны $z_\gamma S$ конечны. Предположим, что некоторый $z_\gamma S$ бесконечен. Мы имеем: $z_\gamma S = z_\gamma R_i$ (i здесь фиксировано). Нетрудно увидеть, что множество $z_\gamma R_i$ бесконечно. По условию I конечно, поэтому будем считать, что $I = \{1, 2, \dots, m\}$. Далее, мы можем поставить в соответствие каждому $\lambda \in \Lambda$ строку $r(\lambda) = (p_{\lambda 1}, p_{\lambda 2}, \dots, p_{\lambda m})$ элементов сэндвич-матрицы P. Так как G – конечная группа, то существует лишь конечное число различных строк. Введём отношение $\approx$ на множестве Λ, положив

$$\lambda \approx \mu \leftrightarrow \forall j \in I\ p_{\lambda j} = p_{\mu j}$$

(т.е. $\lambda \approx \mu \leftrightarrow r(\lambda) = r(\mu)$). Очевидно, что $\approx$ является отношением эквивалентности и делит множество Λ на конечное число классов.

Для любого $g \in G$ положим

$$M(g) = \{z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

Ясно, что $z_\gamma R_i = \{0\} \cup \bigcup_{g\in G} M(g)$. Так как G конечна и $z_\gamma R_i$ бесконечный, то существует $g \in G$ и бесконечное подмножество $\Lambda' \subseteq \Lambda$ такие, что $z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda} \neq z_\gamma \cdot (g)_{i\mu}$, где $\lambda, \mu \in \Lambda'$, $\lambda \neq \mu$. Положим $u_\lambda = z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda}$ для $\lambda \in \Lambda'$.

Бесконечное множество Λ' делится отношением $\approx$ на конечное число классов. Следовательно, как минимум один из них бесконечный, обозначим его через Λ''.

Мы имеем $u_\lambda \neq u_\mu$, $\lambda \approx \mu$ для элементов $\lambda \neq \mu$ множества Λ''. Покажем, что $u_\lambda s = u_\mu s$ для любого $\lambda, \mu \in \Lambda''$ и $s \in S$. Для случая $s = 0$ это очевидно. Пусть $s \neq 0$, тогда $s = (h)_{j\nu}$ для некоторых $h \in G$, $j \in I$, $\nu \in \Lambda$. Если $p_{\lambda j} = 0$, то $p_{\mu j} = 0$, так как $\lambda \approx \mu$, а следовательно, $u_\lambda s = u_\mu s = 0$. Если же $p_{\lambda j} \neq 0$, то $p_{\mu j} \neq 0$, и кроме того, $p_{\lambda j} = p_{\mu j}$ (так как $\lambda \approx \mu$). Теперь мы имеем $u_\lambda s = z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\nu} = z_\gamma \cdot (gp_{\lambda j}h)_{i\nu} = z_\gamma \cdot (gp_{\mu j}h)_{i\nu} = z_\gamma \cdot (g)_{i\mu} \cdot (h)_{j\nu} = u_\mu s$.

Так как $u_\lambda \neq 0$ и полигон $z_\gamma R_i$ порождается любым своим ненулевым элементом, то $u_\lambda R_i = z_\gamma R_i$ для любого $\lambda \in \Lambda''$. Для любого отношения эквивалентности $\sigma \in \operatorname{Eq}\Lambda''$ мы построим отношение эквивалентности $\rho(\sigma)$ на Λ'' следующим образом:

$$\rho(\sigma) = \{(u_\lambda, u_\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \sigma\} \cup \Delta_{z_\gamma R_i}.$$

Так как $u_\lambda s = u_\mu s$ для всех $s \in S$, то $\rho(\sigma)$ – конгруэнция на $z_\gamma R_i$. Нетрудно проверить, что $\rho(\sigma \cap \tau) = \rho(\sigma) \cap \rho(\tau)$ и $\rho(\sigma \vee \tau) = \rho(\sigma) \vee \rho(\tau)$. Кроме того, отображение $\sigma \mapsto \rho(\sigma)$ инъективно, а значит, является изоморфным вложением решётки $\operatorname{Eq}\Lambda''$ в решётку $\operatorname{Con}(z_\gamma R_i)$. Лемма 1.1 показывает, что решётка $\operatorname{Con}(z_\gamma R_i)$ не удовлетворяет никакому нетривиальному решёточному тождеству, что невозможно. Это противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

2.4 Бесконечные полигоны

В случае, когда полигон бесконечный, то вопрос о том, выполняется ли на его решётке конгруэнций нетривиальное тождество или нет не является однозначным. Мы покажем это, рассматривая бесконечный полигон над вполне 0-простой полугруппой и доказав предложение 2.2.

Напомним, что полигон U над полугруппой S называется *простым*, если $uS = U$ для любого $u \in U$, и *конгруэнц-простым*, если $|\operatorname{Con} U| \leqslant 2$.

Доказательство предложения 2.1. Рассмотрим вполне 0-простую полугруппу $S = \mathcal{M}^0(\{1\}, \mathbb{N}, \mathbb{N}, P)$, где

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$

Докажем, что правый идеал

$$R = \{(1)_{1i} \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

является бесконечным полигоном с нулём над S, у которого решётка конгруэнций двухэлементна, а именно, $\operatorname{Con} R = \{\Delta_R, \nabla_R\}$, т.е. R – конгруэнц-простой полигон. В этом случае решётка $\operatorname{Con} R$ конечна, а значит, удовлетворяет нетривиальному тождеству (например, тождеству дистрибутивности).

Для доказательства того, что $\operatorname{Con} R = \{\Delta_R, \nabla_R\}$, достаточно доказать, что любая конгруэнция, порождённая парой (x, y), где $x, y \in R$ и $x \neq y$, совпадает с ∇_R.

Пусть ρ – конгруэнция, порождённая парой $(0, (1)_{1i})$. Так как $(0, (1)_{1i}) \cdot (1)_{ij} = (0, (1)_{1j})$, то $(0, (1)_{1j}) \in \rho$. Аналогично $(0, (1)_{1k}) \in \rho$ при любом k. Следовательно, $((1)_{1j}, (1)_{1k}) \in \rho$. Таким образом, $\rho = \nabla_R$. Также несложно доказывается, что $\rho = \nabla_R$, если ρ порождается парой $((1)_{1i}, (1)_{1j})$, где $i \neq j$. □

Следующие леммы являются подготовкой к доказательству предложения 2.2.

Лемма 2.11 ([2, лемма 4.10]). *Пусть U – простой полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Тогда $U = uS = uR_i$ для любого $u \in U$, $i \in I$. Кроме того, $u \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = u$ при некотором $\lambda \in \Lambda$.*

Доказательство. Так как uS и uR_i – подполигоны и U – простой, то $U = uS = uR_i$. Так как U – простой, то $u \in uR_i$, т.е. $u = u \cdot (g)_{i\lambda}$ при некотором $\lambda \in \Lambda$. Имеем:

$$u \cdot (g)_{i\lambda} = u \cdot (g)_{i\lambda} \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = u \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}.$$

□

Лемма 2.12 ([2, лемма 4.11]). *Пусть U – простой полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Тогда для любого $i \in I$ существует такая конгруэнция ρ полигона R_i, что $U \cong R_i/\rho$.*

Доказательство. По предыдущей лемме 2.11 при некотором $\lambda \in \Lambda$ мы имеем $u = ue_i$, где $e_i = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Рассмотрим отображение $\varphi : R_i \to U$, $r \to ur$, $r \in R_i$. Очевидно, что φ – гомоморфизм полигонов. Так как U – простой, то $R_i\varphi = U$. Теперь, по теореме об изоморфизме $U \cong R_i/\rho$ для некоторого $\rho \in \operatorname{Con} R_i$. □

В работе [11] были описаны все правые конгруэнции вполне простой полугруппы $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Так как $S_S \cong \bigsqcup_{i \in I} R_i$, то можно с помощью теоремы 2 из [11] найти все конгруэнции полигона R_i. Однако, для дальнейшего нам не нужно будет полное описание, а потребуется лишь установить некоторые свойства конгруэнций на R_i.

Лемма 2.13 ([2, лемма 4.12]). *Пусть ρ – конгруэнция полигона R_i. Будем рассматривать полигон R_i как дизъюнктное объединение подмножеств: $R_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G)_{i\lambda}$, где $(G)_{i\lambda} = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G\}$ при $\lambda \in \Lambda$. Тогда существует подгруппа H группы G такая, что*

$$((a)_{i\lambda}, (b)_{i\lambda}) \in \rho \Leftrightarrow Ha = Hb \tag{2.4}$$

для всех $a, b \in G$, $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$ и рассмотрим отношение $\rho' = ((G)_{i\lambda} \times (G)_{i\lambda}) \cap \rho$ на множестве $(G)_{i\lambda}$. Нетрудно видеть, что $(G)_{i\lambda}$ – группа, изоморфная группе G (изоморфизмом является отображение $g \mapsto (gp_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$). Очевидно, ρ' является правой конгруэнцией группы $(G)_{i\lambda}$. Пусть σ – отношение на группе G, определённое правилом

$$(g, g') \in \sigma \Leftrightarrow ((g)_{i\lambda}, (g')_{i\lambda}) \in \rho. \tag{2.5}$$

Проверим, что σ – правая конгруэнция группы G. Действительно, пусть $(g, g') \in \sigma$ и $a \in G$. Тогда из 2.5 следует, что $((g)_{i\lambda}, (g')_{i\lambda}) \in \rho$. Умножив на $(p_{\lambda i}^{-1}a)_{i\lambda}$ получим:

$$((g)_{i\lambda} \cdot (p_{\lambda i}^{-1}a)_{i\lambda}, (g')_{i\lambda} \cdot (p_{\lambda i}^{-1}a)_{i\lambda}) \in \rho,$$

т.е. $((ga)_{i\lambda}, (g'a)_{i\lambda}) \in \rho$. Ввиду 2.5 это означает, что $(ga, g'a) \in \sigma$. Таким образом, σ – правая конгруэнция группы G. Хорошо известно, что правая конгруэнция на группе соответствует разложению группы G на правые смежные классы по некоторой подгруппе H. Следовательно, $(g, g') \in \sigma \Leftrightarrow Hg = Hg'$.

Итак, для каждого $\lambda \in \Lambda$ мы имеем:

$$((g)_{i\lambda}, (g')_{i\lambda}) \in \rho \Leftrightarrow Hg = Hg'$$

для некоторой подгруппы H группы G. Для доказательства утверждения (2.4) осталось показать, что подгруппа H не зависит от $\lambda \in \Lambda$.

Пусть H, H' – подгруппы, $\lambda, \mu \in \Lambda$ и

$$((a)_{i\lambda}, (b)_{i\lambda}) \in \rho \Leftrightarrow Ha = Hb,$$
$$((a)_{i\mu}, (b)_{i\mu}) \in \rho \Leftrightarrow H'a = H'b.$$

Пусть $h \in H$. Тогда $((e)_{i\lambda}, (h)_{i\lambda}) \in \rho$. Умножив справа на $(e)_{i\mu}$, получим: $((p_{\lambda i})_{i\mu}, (hp_{\lambda i})_{i\mu}) \in \rho$, а значит, $H'p_{\lambda i} = H'hp_{\lambda i}$. Отсюда получаем: $h \in H'$. Нами доказано, что $H' \subseteq H$. Симметричным образом получаем $H \subseteq H'$. □

Лемма 2.14 ([2, лемма 4.13]). *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ – вполне простая полугруппа, $R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G, \lambda \in \Lambda\}$ – главный правый идеал полугруппы S, рассматриваемый как правый полигон над S. Пусть ρ – конгруэнция полигона R_i и H – подгруппа группы G, определённая в лемме 2.13. Если $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho$, то $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$ при всех $j \in I$.*

Доказательство. Возьмём любые $j \in I$, $\nu \in \Lambda$. Тогда получим: $((a)_{i\lambda} \cdot (e)_{j\nu}, (b)_{i\mu} \cdot (e)_{j\nu}) \in \rho$, т.е. $((ap_{\lambda j})_{i\nu}, (bp_{\mu j})_{i\nu}) \in \rho$. По лемме 2.13 $Hap_{\lambda j} = Hbp_{\mu j}$. Следовательно, $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$. □

Лемма 2.15 ([2, лемма 4.14]). *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ – вполне простая полугруппа. Возьмём любое $i \in I$ и подгруппу H группы G. Для $(a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu} \in R_i$ положим*

$$((a)_{i\lambda}, (b)_{j\mu}) \in \rho \Leftrightarrow \forall j \in I \ p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb. \tag{2.6}$$

Тогда ρ является конгруэнцией полигона R_i. Кроме того, ρ – наибольшая конгруэнция на R_i, удовлетворяющая условию (2.4).

Доказательство. Проверим, что формула 2.6 определяет конгруэнцию. При $\lambda = \mu$ мы получим $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho \Leftrightarrow e \in a^{-1}Hb$, то есть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\lambda}) \in \rho \Leftrightarrow Ha = Hb$. Рефлексивность отношения ρ очевидна.

Пусть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho$. Тогда $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$ при всех $j \in I$. Следовательно, $(p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1})^{-1} \in (a^{-1}Hb)^{-1}$, т.е. $p_{\mu j}p_{\lambda j}^{-1} \in b^{-1}Ha$ при всех j. Это означает, что $((b)_{i\mu}, (a)_{i\lambda}) \in \rho$. Этим доказана симметричность отношения ρ.

Теперь покажем транзитивность. Пусть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}), ((b)_{i\mu}, (c)_{i\nu}) \in \rho$. Тогда $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$, $p_{\mu j}p_{\nu j}^{-1} \in b^{-1}Hc$ при всех $j \in I$. Перемножив эти соотношения, получим: $p_{\lambda j}p_{\nu j}^{-1} \in a^{-1}Hc$. Так как это выполняется при всех $j \in I$, то ρ транзитивно.

Докажем, что ρ выдерживает умножение на элементы полугруппы S, т.е. что ρ – конгруэнция. Пусть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho$. Умножив на $(c)_{j\nu}$, получим пару $((ap_{\lambda j}c)_{i\nu}, (bp_{\mu j}c)_{i\nu})$. Так как $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$, то $Hap_{\lambda j}c = Hbp_{\mu j}c$. Следовательно, $((ap_{\lambda j}c)_{i\nu}, (bp_{\mu j}c)_{i\nu}) \in \rho$.

Покажем теперь, что конгруэнция ρ наибольшая среди тех, которые соответствуют подгруппе H. Пусть $\rho' \in \operatorname{Con} R_i$ такова, что $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\lambda}) \in \rho' \Leftrightarrow Ha = Hb$ и пусть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho'$. Тогда $((a)_{i\lambda} \cdot (e)_{j\nu}, (b)_{i\mu} \cdot (e)_{j\nu}) \in \rho'$. То есть $((ap_{\lambda j})_{i\nu}, (bp_{\mu j})_{i\nu}) \in \rho'$. Поэтому $Hap_{\lambda j} = Hbp_{\mu j}$, а значит, $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$. Так как это выполнено для всех $j \in I$, то ввиду (2.6) $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho$. Таким образом, $\rho' \subseteq \rho$. Этим доказана максимальность конгруэнции ρ. □

Доказательство предложения 2.2. Покажем, что существует бесконечный полигон X над полугруппой $S = \mathcal{M}(S_3, \mathbb{N}, \mathbb{N}, P)$ такой, что $\operatorname{Con} X = \{\Delta, \nabla\}$. Делать это мы будем путём выбора подходящей сэндвич-матрицы P.

Возьмём в качестве группы G симметрическую группу на 3-элементном множестве: $G = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Положим $a = (13)$, $b = (23)$, $h = (12)$, $H = \langle(12)\rangle = \{e, h\}$. Далее, пусть $I = \Lambda = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Сэндвич-матрицу $P = \|p_{\lambda i}\|$ будем строить из следующих соображений. Рассмотрим $I \times \Lambda$ таблицу T (таблица 1).

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & & & & \Lambda & & & \\
 & ha & b & a & b & a & b & \ldots \\
 & a & hb & a & b & a & b & \ldots \\
I & a & b & ha & b & a & b & \ldots \\
 & a & b & a & hb & a & b & \ldots \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Таблица 1: Таблица T

То есть:

$$t_{j\lambda} = \begin{cases} a, \text{ если } \lambda \text{ чётно и } j \neq \lambda, \\ ha, \text{ если } \lambda \text{ чётно и } j = \lambda, \\ b, \text{ если } \lambda \text{ нечётно и } j \neq \lambda, \\ hb, \text{ если } \lambda \text{ нечётно и } j = \lambda. \end{cases}$$

Элементы матрицы P определим рекуррентно, полагая $p_{0j} = e$ для всех $j \in \mathbb{N}_0$ и $p_{\lambda+1,j} = t_{j\lambda}^{-1} p_{\lambda j}$ $(\lambda, j \in \mathbb{N}_0)$.

Пусть $S = \mathcal{M}(S_3, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0, P)$, где матрица P определена выше. Правый идеал

$$R_0 = \{(g)_{0\lambda} \mid g \in G, \lambda \in \Lambda\}$$

полугруппы S будем рассматривать как полигон над S. Рассмотрим конгруэнцию ρ над R_0, определённую по формуле (2.6), которую мы в нашем случае перепишем в виде

$$((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0\mu}) \in \rho \Leftrightarrow \forall j \in I \; p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} \in g_1^{-1} H g_2. \tag{2.7}$$

Положим $X = R_0/\rho$. Докажем вначале, что X бесконечен. Для этого достаточно доказать, что $((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0\mu}) \notin \rho$ при $|\lambda - \mu| \geqslant 2$ и любых $g_1, g_2 \in G$. Можно считать, что $\mu = \lambda + k$, где $k \geqslant 2$. Рассмотрим выражение $p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1}$. Преобразуем его:

$$p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} = p_{\lambda j} p_{\lambda+k,j}^{-1} = p_{\lambda j} p_{\lambda+1,j}^{-1} \cdot p_{\lambda+1,j} p_{\lambda+2,j}^{-1} \cdot \ldots \cdot p_{\lambda+k-1,j} p_{\lambda+k,j}^{-1} =$$
$$= t_{j\lambda} t_{j,\lambda+1} \ldots t_{j,\lambda+k-1}.$$

Возьмём следующие значения индекса j: $j = \lambda, j = \lambda + 1, j = \lambda + 2$. Будем считать, что λ – чётное число. Рассмотрим фрагмент таблицы T:

	λ				$\lambda + k$
$j = \lambda$	ha	b	a	b	$\ldots$
$j = \lambda + 1$	a	hb	a	b	$\ldots$
$j = \lambda + 2$	a	b	ha	b	$\ldots$

Имеем:

$$p_{\lambda\lambda} p_{\mu\lambda}^{-1} = ha \cdot b \cdot a \cdot w,$$

$$p_{\lambda,\lambda+1} p_{\mu,\lambda+1}^{-1} = a \cdot hb \cdot a \cdot w,$$

$$p_{\lambda,\lambda+2} p_{\mu,\lambda+2}^{-1} = a \cdot b \cdot ha \cdot w,$$

где w – некоторый элемент группы G. Нетрудно проверить, что элементы hab, ahb и abh различны. Следовательно, при $|\lambda - \mu| \geqslant 2$ множество $\{p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} \mid i \in I\}$ содержит 3 различных элемента, поэтому $\{p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} \mid j \in I\} \not\subseteq g_1^{-1} H g_2$ (т.к. $|H| = 2$). Если же λ нечётное, то также верно, что $\{p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} \mid j \in I\} \not\subseteq g_1^{-1} H g_2$

(так как элементы hba, bha и bah различны). Таким образом, X – бесконечный полигон.

Осталось доказать, что X конгруэнц-простой. По лемме 2.14 ρ – наибольшая конгруэнция полигона R_0, соответствующая подгруппе H. Пусть $\rho' \in \operatorname{Con} R_0$ и $\rho' \supset \rho$. Тогда ρ' соответствует некоторой подгруппе $H' \supset H$. Нетрудно видеть, что H – максимальная собственная подгруппа группы S_3, поэтому $H' = S_3$. Таким образом,

$$\forall \lambda \in \Lambda \ \forall g_1, g_2 \in G \ ((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0\lambda}) \in \rho'. \tag{2.8}$$

Из таблицы T видно, что

$$\{p_{\lambda j} p^{-1}_{\lambda+1,j} \mid j \in I\} = \begin{cases} \{a, ha\} \text{ при чётном } \lambda, \\ \{b, hb\} \text{ при нечётном } \lambda. \end{cases}$$

Значит, при чётном λ мы имеем: $p_{\lambda j} p^{-1}_{\lambda+1,j} \in Ha$ при всех $j \in I$, а при нечётном λ имеем включение $p_{\lambda j} p^{-1}_{\lambda+1,j} \in Hb$ при всех $j \in I$. Таким образом, для любого $\lambda \in \Lambda$ существуют $g_1, g_2 \in G$ такие, что $((g_1)_{0,\lambda}, (g_2)_{0,\lambda+1}) \in \rho$. Так как $\rho' \supset \rho$, то $H' \supset H$. Но H – максимальная собственная подгруппа, следовательно $H' = G$.

Из полученного выше включения и из (2.8) вытекает, что $\rho' = \nabla_{R_i}$. Возвращаясь к полигону $X = R_0/\rho$ мы заключаем, что полигон X не обладает нетривиальными конгруэнциями, а это означает, что $\operatorname{Con} X = \{\Delta_X, \nabla_X\}$. □

2.5 Заключение

В заключение главы, скажем несколько слов о вполне простых полугруппах $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, у которых группа G бесконечна. Здесь бесконечные полигоны X с решёткой конгруэнций $\operatorname{Con} X$, удовлетворяющей нетривиальному тождеству, существуют даже в случае когда $|I|$, $|\Lambda| < \infty$. Действительно, пусть $|I| = |\Lambda| = 1$ и $X = G$, где G – абелева группа. Тогда решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна, а значит, в ней выполняется нетривиальное тождество.

3 Унары с тождествами в решётке конгруэнций

После того, как в предыдущей главе мы выяснили, в каком случае нетривиальное тождество в принципе будет выполняться на решётке конгруэнций произвольного полигона, естественным представляется получить конкретное описание таких полигонов. Это будет сделано для частного случая полигона – унара, а именно: в главе будет показано, что если решётка конгруэнций унара удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству, то унар является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей, а это, в свою очередь, равносильно тому, что унар имеет лишь конечное число компонент связности, узлов, начальных элементов и входная степень каждого элемента унара конечна.

3.1 Основные определения

Унар – это множество X с одной унарной операцией $f : X \to X$. Его можно рассматривать как полигон над свободной циклической полугруппой $S = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$, либо же как унитарный полигон над свободным циклическим моноидом $\{1, a, a^2, \ldots\}$ (категории правых S-полигонов и унитарных правых S^1-полигонов изоморфны[3]). Здесь $f(x) = xa$, $f(f(x)) = xa^2$ и т.д. Далее букву a мы будем использовать для обозначения образующего элемента свободной циклической полугруппы S.

Унар, т.е. множество X с одной унарной операцией $f : X \to X$, *мы здесь будем рассматривать как полигон над свободной циклической полугруппой* $S = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$, при этом $x \cdot a = f(x)$, $x \cdot a^i = f^i(x)$ при $i \geqslant 1$, $f^0(x) = x$ для всех $x \in X$. Унар X называется *связным*, если для любых $x, y \in X$ существуют такие $k, l \geqslant 0$, что $xa^k = ya^l$. Нетрудно видеть, что любой унар является копроизведением связных подунаров X_i (*компонент связности*). Для унара X и элемента $x \in X$ полагаем $xS = \{xa^k \mid k \geqslant 1\}$, $xS^{-1} = \{y \mid \exists k \geqslant 1\ ya^k = x\}$, $xa^{-1} = \{y \mid ya = x\}$.

Приведём также некоторые определения из теории графов. В ориентированном графе G с множеством вершин $V(G)$ и рёбер $E(G)$ для каждой вершины $x \in V(G)$ определяются понятия *входной степени*

$$\operatorname{indeg} x = |\{y \mid (y, x) \in E(G)\}|$$

и *выходной степени*

$$\operatorname{outdeg} x = |\{y \mid (x, y) \in E(G)\}|$$

[3]Определим функтор $F : \mathbf{Act} - S \to \mathbf{Act}_1 - S^1$ следующим образом: $F(X_S) = X_{S^1}$, а именно: множества элементов X полигонов X_S и X_{S^1} совпадают, и если $x = x's$ в X_S, то $x = x's$ в X_{S^1}, $s \in S$, $x, x' \in X$. Морфизму $\varphi : X_S \to Y_S$ будем ставить в соответствие морфизм $F(\varphi) : X_{S^1} \to Y_{S^1}$. Обратный функтор $G(X_{S^1}) = X_S$ определяется аналогично, его единственность очевидна.

вершины x. Понятно, что у унара X, рассматриваемого как граф, $\operatorname{outdeg} x = 1$ и $\operatorname{indeg} x = |xa^{-1}|$ для всех $x \in X$.

Пусть X – унар. Элемент $x \in X$ назовём *узлом*, если существуют элементы $y, z \in X$ такие, что $y \neq z$ и $y \cdot a = z \cdot a = x$. Элементы $x \in X \setminus XS$ будем называть *начальными*. Эквивалентное определение: элемент x унара X называется *начальным*, если $xa^{-1} = \emptyset$. Элемент $x \in X$ *периодический*, если $x \cdot a^n = x$ для некоторого $n > 0$.

На полигоне X над полугруппой S вводится отношение *квазипорядка* $\leqslant$ (рефлексивное и транзитивное отношение): $x \leqslant y \Leftrightarrow x \in yS^1$.

Прямой называется унар, изоморфный унару $\mathbb{Z}$ с операцией $i \cdot a = i + 1$ при $i \in \mathbb{Z}$ (см. рисунок 3.1, слева).

Лучом называется унар, изоморфный унару $\mathbb{N}$ с операцией $i \cdot a = i + 1$ при $i \in \mathbb{N}$ (см. рисунок 3.1, по центру).

Циклом $C_n = \{c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ длины n называется унар, изоморфный унару $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ с операцией $i \cdot a = i + 1 \pmod n$ (см. рисунок 3.1, справа).

Цикл с хвостом – это унар, изоморфный унару $X = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ с операцией

$$f(i) = \begin{cases} i + 1 \pmod n, & \text{если } i \geqslant 0, \\ i + 1, & \text{если } i < 0. \end{cases}$$

При этом $C = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ – цикл, $T = \{\ldots, -1, 0\}$ – хвост. Хвост может быть конечным или бесконечным (см. рисунок 3.2).

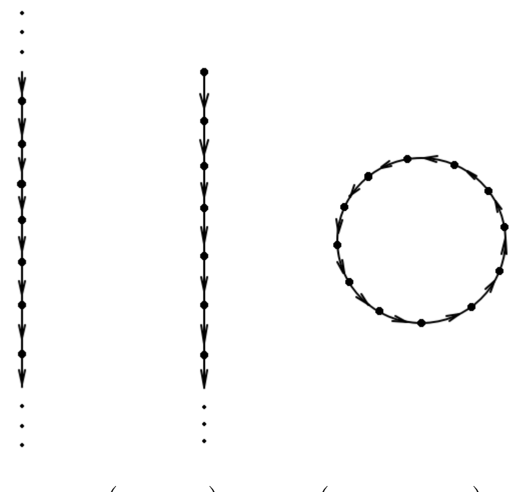


Рисунок 3.1: Прямая (слева), луч (в центре) и цикл (справа).

Нетрудно видеть, что унары, не содержащие узлов, – это в точности прямые, лучи или циклы (см. рис. 3.1).

Лемма 3.1 ([3, лемма 4]). *Пусть X – унар. Если решётка* $\operatorname{Con} X$ *удовлетворяет нетривиальному тождеству, то:*

1. *X имеет лишь конечное число компонент связности;*

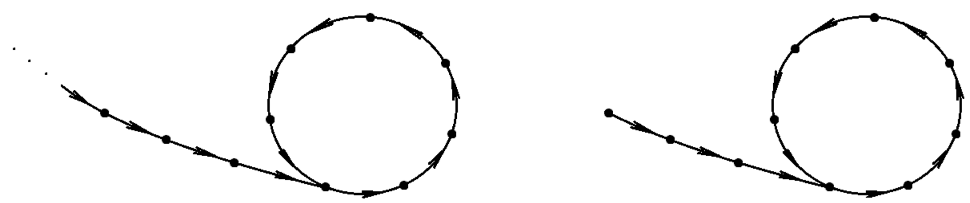


Рисунок 3.2: Цикл с бесконечным хвостом (слева) и с конечным хвостом (справа).

2. *множество $X \setminus XS$ конечно (т.е. количество начальных элементов конечно);*

3. *X имеет лишь конечное число периодических элементов;*

4. *X не содержит бесконечного множества попарно несравнимых относительно естественного квазипорядка ($\leqslant$) элементов.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть X – полигон, для которого $\operatorname{Con} X$ удовлетворяет нетривиальному тождеству. Пусть $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ – разложение X на компоненты связности. Очевидно, отношение $\rho = \bigcup_{i\in I}(X_i \times X_i)$ является конгруэнцией, и фактор-полигон X/ρ состоит из нулей. По лемме 1.1 решётка $\operatorname{Con} X/\rho$ также удовлетворяет нетривиальному тождеству (тому же, что $\operatorname{Con} X$). Так как X/ρ состоит из нулей, то $\operatorname{Con}(X/\rho) = \operatorname{Eq}(X/\rho) \cong \operatorname{Eq} I$. Следовательно, по лемме 2.2 $I < \infty$.

Покажем 2. Предположим, что это не так, то есть $|X \setminus XS| = \infty$. Так как мы только что показали, что число компонент связности полигона X конечно, то существует такая компонента X_k, что $|X_k \setminus X_k S| = \infty$. Нетрудно увидеть, что тогда $\operatorname{Con}(X_k/X_kS) = \operatorname{Eq}(X_k/X_kS)$, где $|X_k/X_kS| = \infty$. Но тогда, по лемме 1.1 $\operatorname{Con}(X_k/X_kS)$ – подрешётка решётки $\operatorname{Con} X$, и по лемме 2.3 решётка $\operatorname{Con} X$ не удовлетворяет нетривальному решёточному тождеству – противоречие.

Докажем 3. Очевидно, в каждой компоненте связности унара периодические элементы, если они есть, образуют конечный цикл $\{x, xa, xa^2, \ldots, xa^{m-1}\}$, где $xa^m = x$. Нетрудно видеть, что цикл в компоненте связности унара может быть только один. По пункту 1 компонент связности конечное число. Следовательно, периодических элементов также конечное число.

Докажем 4. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ – бесконечное множество попарно не сравнимых элементов. Ввиду пункта 3 мы можем считать без ограничения общности, что все элементы x_i непериодические. Положим $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} x_i S^1$, $Y' = \bigcup_{i=1}^{\infty} x_i S$. По лемме 1.1 решётка $\operatorname{Con}(Y/Y')$ удовлетворяет нетривиальному тождеству. Кроме того, Y/Y' состоит из нулей. Поэтому $\operatorname{Con}(Y/Y') = \operatorname{Eq}(Y/Y')$. Докажем, что унар Y/Y' бесконечен. Для этого достаточно показать, что $x_i \notin Y'$ при всех $i \in I$. Пусть $x_i \in Y'$ для какого-либо i. Тогда $x_i = x_j a^k$ при некоторых $j, k \geqslant 1$. При $i \neq j$ получаем противоречие, так как x_i и x_j не могут быть сравнимы. Если $i = j$ то x_i – периодический элемент, что также невозможно. Итак, Y/Y' – бесконечное множество. Отсюда по лемме 2.2 решётка $\operatorname{Eq}(Y/Y')$

не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству, а это противоречит ранее доказанному. □

3.2 Предварительные результаты

Приведём две леммы, необходимые для доказательства основных утверждений главы.

Лемма 3.2 ([3, лемма 5]). *Если решётка* $\operatorname{Con} X$ *унара* X *удовлетворяет нетривиальному тождеству, то* $\operatorname{indeg} x < \infty$ *для каждого* $x \in X$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. множество xa^{-1} бесконечно при некотором $x \in X$. Отсюда следует, что можно найти различные элементы $y_1, y_2, \ldots \in X$ такие, что $y_n a = x$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим унар $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} y_n S$ и фактор-унар $\overline{Y} = Y/xS^1$. Так как решётка $\operatorname{Con} X$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, то по лемме 1.1 решётка $\operatorname{Con} \overline{Y}$ удовлетворяет тому же тождеству. Но это невозможно, так как унар Y является унаром с нулевым умножением, а значит, $\operatorname{Con} \overline{Y} = \operatorname{Eq} \overline{Y}$, что противоречит лемме 2.2 ввиду того, что множество $\overline{Y}$ бесконечно. □

Лемма 3.3 ([3, лемма 6]). *Если решётка* $\operatorname{Con} X$ *унара* X *удовлетворяет нетривиальному тождеству, то* X *имеет лишь конечное число узлов.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что все узлы делятся на два типа (см. рисунок 3.3): где $x \notin \{y, z\}$ и где $x \in \{y, z\}$. Очевидно, что узлов второго типа

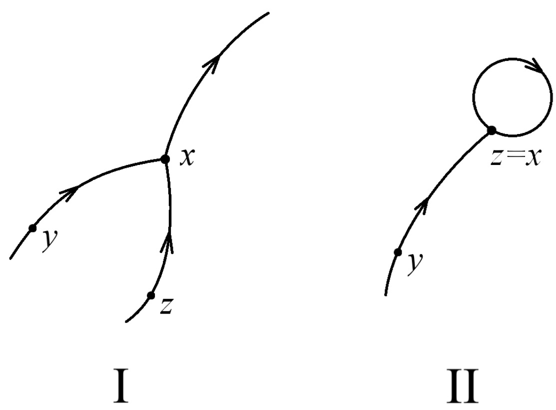


Рисунок 3.3: Типы узлов.

в одной компоненте связности может быть не более одного (см. лемму 3.1(3)). Так как по лемме 3.1(1) компонент связности конечное число, то и число таких узлов тоже конечно.

Осталось показать, что узлов первого типа лишь конечное число. Пусть это не так, т.е. их бесконечно много. Так как по лемме 3.1(1) число компонент связности конечно, то узлов первого типа бесконечно много в какой-либо компоненте. Рассмотрим эту компоненту связности, обозначим её через Y, возьмём в ней какой-нибудь узел u_0 и разберём два случая.

Случай 1: среди элементов $u_0a, u_0a^2, u_0a^3, \ldots$ бесконечно много узлов. Тогда $u_0, u_0a^{i_1}, u_0a^{i_2}, \ldots$ – узлы, где $0 < i_1 < i_2 < \ldots$. Положим $u_k = u_0a^{i_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Так как u_k – узел, то существует $v_k \neq u_0a^{i_k-1}$ такое, что $v_ka = u_k$ (см. рисунок 3.4). Так как подунар u_0S^1 бесконечен, то $v_k \notin u_0S^1$. Положим

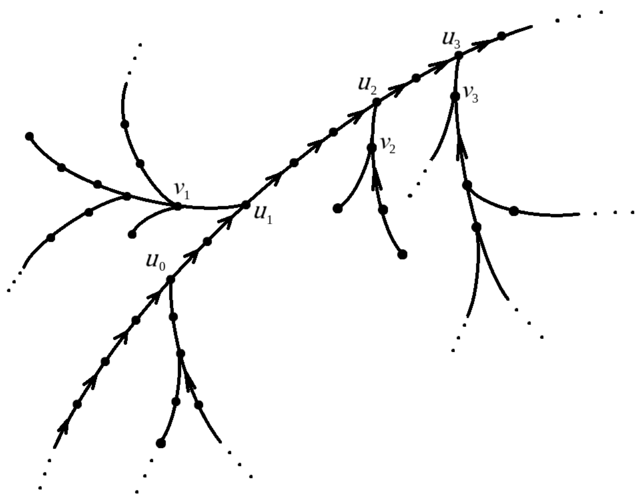


Рисунок 3.4: Узлы $u_0, u_1, u_2, \ldots$.

$\overline{Y} = Y/u_0S^1$ и обозначим через z нуль этого унара (см. рисунок 3.5). Очевидно,

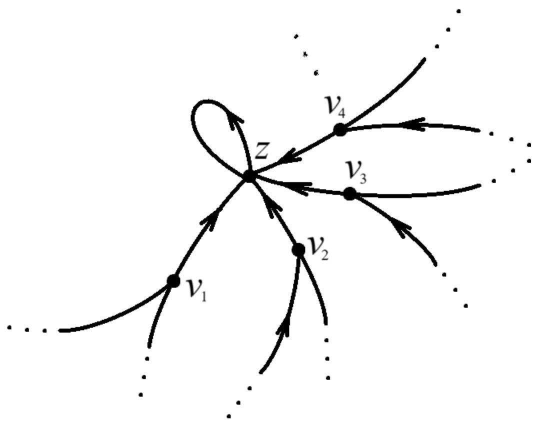


Рисунок 3.5: Фактор-унар $\overline{Y} = Y/u_0S^1$.

элементов $v_1, v_2, \ldots$ бесконечное число, все они различны в унаре $\overline{Y}$, поэтому $\operatorname{indeg} z = \infty$, что противоречит лемме 3.2.

Случай 2: среди элементов $u_0a, u_0a^2, u_0a^3, \ldots$ лишь конечное число узлов унара X. Здесь возможны две ситуации: либо последовательность $u_0, u_0a, u_0a^2, \ldots$ заканчивается циклом длины m: $\{u_0a^r, u_0a^{r+1}, \ldots, u_0a^{r+m-1}\}$ $(u_0a^{r+m} = u_0a^r)$, либо элементы $u_0, u_0a, u_0a^2, \ldots$ различны, и тогда есть последний узел u_0a^k, т.е.

такой узел, что элементы u_0a^t при $t > k$ не являются узлами. И в той, и в другой ситуации мы имеем, что все узлы унара Y лежат в множестве $\{y_0\} \cup y_0S^{-1}$ для некоторого $y_0 \in Y$, который можно считать узлом. По лемме 3.2 множество y_0a^{-1} конечно. Пусть $y_0a^{-1} = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Очевидно, в каком-либо из множеств x_iS^{-1} лежит бесконечно много узлов. Можно считать, что множество x_1S^{-1} содержит бесконечно много узлов. Если x_1 – узел, то положим $y_1 = x_1$ и перейдём к множеству y_1a^{-1}, поступая с ним так же, как с множеством y_0a^{-1}. Если же x_1 – не узел, то множество x_1a^{-1} состоит из одного элемента. Так как $x_1S^{-1} = \{x_1\} \cup x_1a^{-1} \cup x_1a^{-1}S^{-1}$ и x_1S^{-1} содержит бесконечно много узлов, то при каком-то t мы получим узел x_1a^{-t}, причём можно считать, что элементы $x_1, x_1a^{-1}, \ldots, x_1a^{-(t-1)}$ не являются узлами. Положим $y_1 = x_1a^{-t}$ и поступим с элементом y_1 так же, как поступили с элементом y_0. Продолжая этот процесс, мы получим узлы $y_1, y_2, \ldots$ такие, что $y_ka^{j_k} = y_{k-1}$ при подходящих $j_k > 0$ ($k = 1, 2, \ldots$). Так как y_k – узлы, то существуют $z_k \in Y$ такие, что $z_ka = y_k$ и $z_k \notin y_{k+1}S$ (см. рисунок 3.6). Очевидно, что так как узлов y_k бесконечно много, то и элементов z_k тоже. Пусть $Y' = \bigcup_{k=1}^{\infty} y_kS$ и $\overline{Y} = Y/Y'$. По лемме 1.1

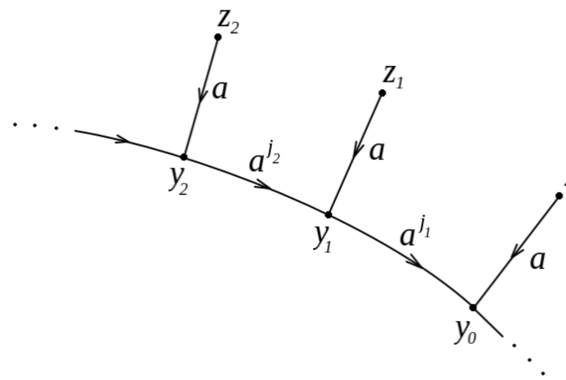


Рисунок 3.6: Узлы $y_0, y_1, y_2, \ldots$.

решётка $\operatorname{Con} \overline{Y}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству. Однако, в унаре $\overline{Y}$ выполняется равенство $z_ka = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, где 0 обозначает нулевой элемент унара $\overline{Y}$. Поэтому $\operatorname{indeg} 0 = \infty$, а это противоречит лемме 3.2. $\square$

3.3 Основные результаты

Теперь мы можем сформулировать первый из основных результатов главы.

Теорема 3.1 ([3, теорема 1]). *Если X – унар, у которого решётка конгруэнций $\operatorname{Con} X$ удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству, то X удовлетворяет условиям:*

(i) X имеет лишь конечное число компонент связности;

(ii) X имеет лишь конечное число начальных элементов;

(iii) X имеет лишь конечное число узлов;

(iv) $\operatorname{indeg} x < \infty$ *для каждого* $x \in X$.

Доказательство. Утверждение *(i)* следует из леммы 3.1(1), *(ii)* – из леммы 3.1(2), *(iii)* – из леммы 3.3, *(iv)* – из леммы 3.2. □

Автору неизвестно, верно ли утверждение, обратное к теореме 3.1, т.е. следует ли из условий *(i)–(iv)* выполнение нетривиального тождества в решётке $\operatorname{Con} X$. В работе [18] для некоторых унаров, удовлетворяющих *(i)–(iv)*, доказана дистрибутивность или модулярность решётки $\operatorname{Con} X$, т.е. выполнение нетривиального тождества.

Выясним теперь строение унаров, удовлетворяющих условиям *(i)-(iv)* только что доказанной теоремы. Следующая лемма является несложным упражнением по теории полигонов.

Лемма 3.4 ([3, лемма 7]). *Пусть* X *– полигон над полугруппой* S *такой, что* $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, *где* X_i *– подполигоны. Тогда* X *является гомоморфным образом копроизведения* $X' = \coprod_{i \in I} X_i$.

Доказательство. Отображение $\pi : X' \to X$, $x \mapsto x$ является гомоморфизмом таким, что $\pi(X') = X$. □

Для доказательства второго основного утверждения нам понадобится понятие множества $M(x)$. Пусть x – элемент унара. Будем строить по нему множество $M(x)$ следующим образом. Если x – начальный элемент или узел, то $M(x) = \{x\}$. Если $|xa^{-1}| = 1$, то рассмотрим элемент $x' \in xa^{-1}$. Если x' – начальный элемент или узел, то $M(x) = \{x, x'\}$. Если $|x'a^{-1}| = 1$, то рассматриваем элемент $x'' \in x'a^{-1}$ и в случае, если x'' – начальный элемент или узел, полагаем $M(x) = \{x, x', x''\}$. И так далее. Кроме того, построение множества $M(x)$ заканчиваем, если элементы начнут повторяться. Очевидно, что $|M(x)| < \infty$ тогда и только тогда, когда либо x принадлежит циклу без хвостов, либо $M(x)$ содержит ровно один начальный элемент, либо $M(x)$ содержит ровно один узел.

Теорема 3.2 ([3, теорема 2]). *Унар* X *удовлетворяет условиям (i)-(iv), сформулированным в теореме 3.1, в том и только том случае, если* X *является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняются условия *(i)-(iv)*. Определим подунары K_i, V_i и U_{ij}. Рассмотрим компоненты связности унара X, являющиеся прямыми, лучами или циклами. По условию *(i)* их конечное число, обозначим из через $K_1, K_2, \ldots, K_r$. Это компоненты связности без узлов, остальные компоненты имеют узлы.

По условию *(ii)* начальных элементов лишь конечное число, обозначим их через $v_1, \ldots, v_n$. Для каждого начального элемента пусть $V_i = v_i S^1$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, V_i – луч или цикл с конечным хвостом.

Перейдём теперь к узлам. По условию *(iii)* узлов лишь конечное число, обозначим их через $u_1, \ldots, u_m$. Для произвольного узла u_i опеределим подунар U_{ij} следующим образом. Так как из условия *(iv)* следует, что множество $u_i a^{-1}$ конечно, то пусть $u_i a^{-1} = \{x_1, \ldots, x_{t_i}\}$. Для каждого $x_j \in u_i a^{-1}$ положим:

$$U_{ij} = \begin{cases} u_i S^1, & \text{если } M(x_j) \text{ содержит начальный элемент или узел;} \\ u_i S^1 \cup M(x_j), & \text{если } M(x_j) \text{ не содержит узлов и начальных элементов.} \end{cases}$$

Докажем, что

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} K_i \cup \bigcup_{i=1}^{n} V_i \cup \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{t_i} U_{ij}. \qquad (*)$$

Пусть $x \in X$ – произвольный элемент. Если x лежит в компоненте связности без узлов, то $x \in \bigcup_{i=1}^{r} K_i$; Пусть x лежит в компоненте связности с узлами. Если x – узел, то $x \in U_{ij}$ при некоторых i, j. Далее считаем, что x – не узел, но лежит в компоненте связности с узлами. Рассмотрим множество $M(x)$ и разберём несколько случаев. Если $|M(x)| < \infty$ и $M(x)$ не содержит узлов и начальных элементов, то x лежит в цикле, в котором нет ни одного узла унара X (цикл без хвостов). Тогда $x \in \bigcup_{i=1}^{r} K_i$, а это противоречит требованию к элементу x. Если $M(x)$ содержит начальный элемент, то $x \in V_i$ при некотором i. Если $M(x)$ содержит узел u_k, то $x \in U_{kj}$ для некоторого j. Пусть теперь $|M(x)| = \infty$. Тогда рассмотрим множество xS. Если ни один из элементов множества xS не является узлом, то x лежит в компоненте связности $M(x) \cup xS$, являющейся прямой, т.е. $x \in \bigcup_{i=1}^{r} K_i$, что противоречит требованию к x. Пусть какой-либо элемент из множества xS является узлом. То есть $xa^k = u_i$ при некоторых i, k и $x, xa, \ldots, xa^{k-1}$ – не узлы. Так как множество $M(xa^{k-1})$ не содержит ни узлов, ни начальных элементов (т.е. $|M(xa^{k-1})| = \infty$), то $x \in U_{ij}$ при некоторых i, j. Таким образом, равенство $(*)$ доказано.

Заметим, что гомоморфный образ прямой – это прямая, или цикл, или цикл с бесконечным хвостом, а гомоморфный образ луча – луч, или цикл, или цикл с конечным хвостом. Поэтому из равенства $(*)$, а также из леммы 3.4 следует, что X является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей.

Достаточность. Пусть $X = \varphi(\coprod_{i=1}^{n} L_i)$, где $\varphi : \coprod_{i=1}^{n} L_i \to X$ – сюръективный гомоморфизм, L_i – прямая или луч. Пусть $c(X)$ – мощность множества компонент связности, $b(X)$ – множества начальных элементов, $k(X)$ – множества узлов унара X. Так как при гомоморфизме число компонент связности увеличиться не может, то $c(X) \leqslant n$. Далее, нетрудно увидеть, что при переходе к гомоморфному образу элемент, не являющийся начальным, не может перейти в начальный, поэтому $b(X)$ не превышает количества лучей среди L_i, а следовательно, $b(X) \leqslant n$.

Осталось доказать выполнение условий *(iii)* и *(iv)*. Нетрудно видеть, что унар можно представить как объединение подунаров (возможно, пересекающихся), являющихся прямыми, лучами либо циклами (с хвостами либо без):

$$X = \varphi(\coprod_{i=1}^{n} L_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(L_i).$$

Прямые и лучи не имеют узлов, а циклы с хвостами имеют по одному узлу. Входные степени вершин у всех этих унаров не превосходят числа 2. Удалим все вершины и рёбра графа, определяющего унар X, и будем восстанавливать его, добавляя эти подунары по одному к построенным ранее. Очередной подунар Y можно добавлять в виде новой компоненты связности или добавлять в уже построенную. Если в виде новой, то количество узлов увеличится не более, чем на 1, и $\max\limits_{x} \operatorname{indeg} x$ также может увеличиться не более, чем на 1. Если добавлять в уже построенную компоненту, то возможны два случая. Понятно, что в компоненту связности, содержащую прямую или луч, нельзя добавить цикл (с хвостом или без), а можно добавить лишь прямую или луч. При этом количество узлов может возрасти не более, чем на 1, а входные степени вершин либо останутся неизменными, либо у одной из вершин входная степень увеличится на 1. К компоненте связности, содержащей цикл, нельзя добавить прямую или луч, а можно лишь ещё один цикл такой же длины с хвостом или без. При этом также количество узлов увеличится не более, чем на 1, а $\operatorname{indeg} x$ может возрасти ровно у одной вершины не более, чем на 1. Таким образом, $k(X) \leqslant n$ и $\max\limits_{x \in X} \operatorname{indeg} x \leqslant n + 1$. □

Из теорем 3.1 и 3.2 непосредственно получается

Следствие 3.1 ([3, следствие 1])**.** *Если решётка конгруэнций* $\operatorname{Con} X$ *унара* X *удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству, то* X *является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей.*

Автору неизвестно, является ли это необходимое условие также достаточным.

4 Плоские унары и классы унаров, близкие к плоским

Как мы увидели, выполнение нетривиального тождества на решётке конгруэнций полигона над заданной полугруппой позволяет получить связь между нетривиальным тождеством, решёткой конгруэнций, полигоном и полугруппой. То есть, если мы знаем некоторую информацию о каком-либо объекте из этой цепочки, то мы можем сделать некоторые выводы о соседних элементах этой цепочки. Другим способом получать подобные связи является изучение полигонов, на которых выполняются условия специального вида. Примерами таких условий является плоскостность и условия, близкие к нему, а именно: коуниверсальная плоскостность, уравнительная плоскостность, слабая плоскостность, главно слабая плоскостность, точность, строгая точность, регулярность, свойство полигона «быть без кручения» и условия (E) и (P).

К сожалению, описание полигонов, для которых выполняются вышеперечисленные свойства является довольно сложной математической задачей ввиду разнообразия устройства самих полигонов. Поэтому, в качестве первого шага на этом пути было решено взять известный частный случай полигона – унар. Таким образом, учитывая вышесказанное, эта глава диссертационного исследования посвящена полному описанию коуниверсально плоских, уравнительно плоских, плоских, слабо плоских, главно слабо плоских, точных, строго точных, регулярных унаров, унаров без кручения и унаров, для которых выполняются условия (E) или (P).

Так как плоскостность является наиболее фундаментальным понятием среди вышеперечисленных, то сначала мы приведём описание плоских унаров.

4.1 Плоские унары

4.1.1 Определение плоскостности

Для дальнейшего нам понадобится понятие тензорного произведения полигонов.

Пусть X и Y – соответственно правый и левый полигоны над полугруппой S. *Тензорное произведение* $X_S{\otimes}_SY$ (или просто $X{\otimes}Y$) – это фактор-множество $(X \times Y)/\rho$, где ρ – наименьшее отношение эквивалентности, содержащее все пары вида $((xs, y), (x, sy))$ для $x \in X$, $y \in Y$, $s \in S$. Из определения следует, что для любого элемента $x \otimes y \in X \otimes Y$ и любого $s \in S$ выполняется равенство $xs \otimes y = x \otimes sy$.

Пусть X_S – правый S-полигон, ${}_SY_T$ – (S, T)-биполигон, тогда $X \otimes Y$ является правым T-полигоном с операцией

$$(x \otimes y)t = x \otimes yt \quad (x \in X,\ y \in Y,\ t \in S)$$

(см. [23, предложение II.5.12]).

Пусть **Act**-S – категория правых полигонов над полугруппой S. Для $X_S \in$ **Act**-S определим функтор $F : S$-**Act** $\to$ **Set**, действующий следующим образом:

$$F({}_SY) = X_S \otimes {}_SY, \quad F(\varphi) = \mathrm{id}_X \otimes \varphi,$$

где ${}_SY$ – левый S-полигон, φ – гомоморфизм левых S-полигонов. Будем обозначать функтор F для фиксированного полигона X_S и тождественного морфизма id_X как $X_S \otimes {}_S-$.

Определение 4.1 ([23, определение III.9.1]). *Полигон X_S называется плоским, если функтор $X_S \otimes {}_S-$ сохраняет мономорфизмы, то есть для всякого инъективного гомоморфизма $\varphi : {}_SA \to {}_SB$ левых S-полигонов ${}_SA, {}_SB$ отображение*

$$\mathrm{id}_X \otimes \varphi : X_S \otimes {}_SA \to X_S \otimes {}_SB, \quad x \otimes a \mapsto x \otimes \varphi(a),$$

где $a \in {}_SA$, $x \in X_S$, является инъективным.

Это определение можно переформулировать:

Определение 4.2 ([23, лемма III.12.1]). *Полигон X_S называется плоским, если для любых двух левых S-полигонов ${}_SA$ и ${}_SB$ таких, что ${}_SA \subseteq {}_SB$ (т.е. ${}_SA$ – подполигон полигона ${}_SB$) верно, что если для некоторых $a_1, a_2 \in {}_SA$, $x_1, x_2 \in X$ имеет место равенство $x_1 \otimes a_1 = x_2 \otimes a_2$ в $X_S \otimes {}_SB$, то также $x_1 \otimes a_1 = x_2 \otimes a_2$ в $X_S \otimes {}_SA$.*

4.1.2 Тензорное произведение унаров

Пусть S – свободная циклическая полугруппа. Так как она коммутативна, то нет разницы между правыми и левыми полигонами над S (см. [23, замечание I.4.3(2)]). Учитывая [23, предложение II.5.12], X и Y можно считать биполигонами над S, поэтому для унаров X и Y тензорное произведение $X \otimes Y$ – тоже унар. При этом, для любого $x \otimes y \in X \otimes Y$

$$(x \otimes y)a = x \otimes ya = x \otimes ay = xa \otimes y = ax \otimes y = a(x \otimes y).$$

Свободный унар с множеством свободных образующих $\{u_i \mid i \in I\}$ – это копроизведение лучей (см. Рис. 4.1).

Как и всякий полигон, унар разлагается в копроизведение своих компонент связности. Примеры связных унаров изображены на рисунке 4.2. В первом случае (рис. 4.2, (A)) унар имеет бесконечную убывающую цепь, во втором (рис. 4.2, (B)) унар содержит цикл C_n.

Если у связного унара есть цикл C_1 (состоящий из одного элемента), то унар называется *ниль-унаром.* То есть он имеет нуль z_0 и для каждого $x \in X$ существует такое $k \geqslant 0$, что $xa^k = z_0$.

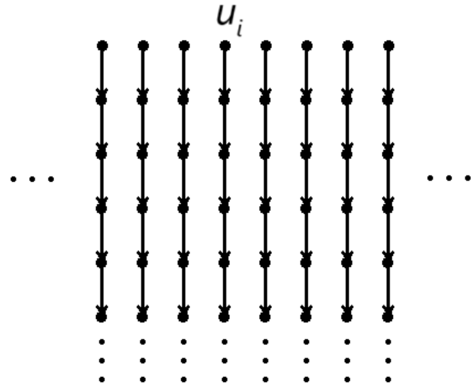


Рисунок 4.1: Свободный унар с множеством свободных образующих $\{u_i \mid i \in I\}$.

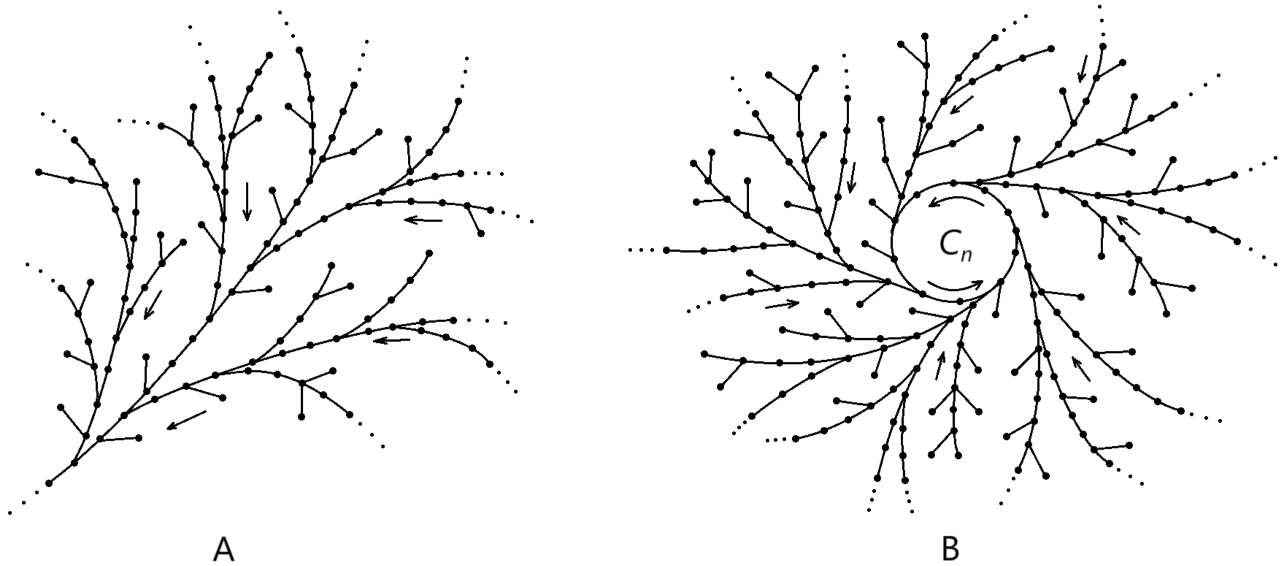


Рисунок 4.2: Связные унары.

4.1.3 Плоскостность луча и прямой

Предложение 4.1 ([4, предложение 1]). *Пусть X – унар. Если x_1, x_2 – различные элементы из X такие, что $x_1 a = x_2 a$, то унар X не плоский.*

Доказательство. От противного. Пусть X – плоский унар. Тогда, по [23, утверждение III.10.3] унар X является унаром без кручения. Тогда, по [23, определение III.8.1] если $x_1 a = x_2 a$, то $x_1 = x_2$ – противоречие, так как по условию $x_1 \neq x_2$. □

Следствие 4.1 ([4, следствие 1]). *Если X – плоский унар, то его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи и циклы.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Это означает, что унар X плоский и обладает компонентой связности, которая не является ни прямой, ни лучом, ни циклом. Это означает, что в такой компоненте X_i будет выполняться

$x_1a = x_2a$, при некоторых $x_1 \neq x_2$ из X_i. Тогда, по предложению 4.1 унар X не плоский – противоречие. $\square$

Предложение 4.2 ([4, предложение 2]). *Свободный полигон является плоским.*

Доказательство. Известно, что свободный полигон является проективным ([23, предложение II.3.4]), а любой проективный полигон является плоским ([23, предложение III.17.5 и лемма III.9.2]). $\square$

Следствие 4.2 ([4, следствие 2]). *Луч является плоским унаром.*

Доказательство. Так как луч является свободным унаром, то по предложению 4.2 он плоский. $\square$

Теперь докажем аналогичный результат для прямой.

Предложение 4.3 ([4, предложение 3]). *Пусть X – полигон, $\{X_i\}_{i\in I}$ – цепь его подполигонов, т.е. $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ и для всяких $i, j \in I$ либо $X_i \subseteq X_j$, либо $X_j \subseteq X_i$. Если каждый полигон X_i плоский, то X плоский.*

Доказательство. Пусть X не плоский. Тогда существуют левые полигоны A, B и инъективный гомоморфизм $\varphi : A \to B$ такие, что отображение $X \otimes A \to X \otimes B$ не является инъективным. Это означает, что существуют такие $x_1, x_2 \in X$ и $a_1, a_2 \in A$, что $x_1 \otimes \varphi(a_1) = x_2 \otimes \varphi(a_2)$, но $x_1 \otimes a_1 \neq x_2 \otimes a_2$.

Так как $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ и все X_i линейно упорядочены по включению, то существует такое $j \in I$, что $x_1, x_2 \in X_j$. Полигон X_j по условию плоский, а значит, отображение $X_j \otimes A \to X_j \otimes B$ является инъективным. Это означает, что если $x_1 \otimes \varphi(a_1) = x_2 \otimes \varphi(a_2)$, то $x_1 \otimes a_1 = x_2 \otimes a_2$, а это противоречит тому, что $x_1 \otimes a_1 \neq x_2 \otimes a_2$. $\square$

Следствие 4.3 ([4, следствие 3]). *Прямая – плоский унар.*

Доказательство. Так как прямая является объединением возрастающей последовательности лучей, которые по следствию 4.2 являются плоскими унарами, то по предложению 4.3 прямая – плоский унар. $\square$

4.1.4 Индекс элемента унара

Далее будем доказывать обратное, а именно что цикл – плоский унар. Для этого нам понадобится ввести понятие индекса элемента унара.

Определение 4.3 ([4, определение 3]). *Пусть X – связный унар без циклов и пусть $x, y \in X$. Так как X связный, то существуют такие $i, j \geqslant 0$, что $xa^i = ya^j$. Тогда индексом элемента y относительно элемента x назовём число*

$$\operatorname{ind}_x y = i - j.$$

Лемма 4.1 ([4, лемма 1]). *Понятие индекса в определении 4.3 определено корректно.*

Доказательство. Пусть $x, y \in X$, $xa^i = ya^j$ и $xa^k = ya^l$. Без ограничения общности можно считать, что $i \leqslant k$. Положим $t = k - i$. Получим:

$$ya^l = xa^k = xa^i a^t = ya^j a^t = ya^{j+t}.$$

По условию X не имеет циклов, поэтому $l = j + t$. Отсюда $l = j + \underbrace{k - i}_{t}$, поэтому $i - j = k - l$. □

Отметим некоторые свойства индекса.

Лемма 4.2 ([4, лемма 2]). *Пусть $x, y, z \in X$, тогда:*

1. $\operatorname{ind}_x x = 0$;
2. $\operatorname{ind}_y x = -\operatorname{ind}_x y$;
3. $\operatorname{ind}_x z = \operatorname{ind}_x y + \operatorname{ind}_y z$;
4. $\operatorname{ind}_y xa^i = \operatorname{ind}_y x + i$ *для* $i \geqslant 0$.

Доказательство. Равенства (1) и (2) очевидны.

Докажем равенство (3). Рассмотрим правую часть: $\operatorname{ind}_x y + \operatorname{ind}_y z$. Пусть $xa^i = ya^j$ и $ya^k = za^l$. Без ограничения общности можем считать, что $j \geqslant k$. Обозначим $t = j - k$, тогда

$$xa^i = ya^j = ya^{k+t} = (ya^k)a^t = za^l a^t = za^{l+t}.$$

Получаем, что $\operatorname{ind}_x z = i - (l + t) = i - l - t$. С другой стороны, $\operatorname{ind}_x y + \operatorname{ind}_y z = (i - j) + (k - l) = i - \underbrace{(j - k)}_{t} - l = i - t - l$. Таким образом, $\operatorname{ind}_x z = \operatorname{ind}_x y + \operatorname{ind}_y z$.

Докажем равенство (4). Пусть $(xa^i)a^t = ya^l$ для некоторых $i, t, l \geqslant 0$. Тогда $\operatorname{ind}_y xa^i = l - t$. С другой стороны,

$$(xa^i)a^t = xa^{i+t} = ya^l,$$

откуда следует, что $\operatorname{ind}_y x = l - (i + t) = l - i - t$. Прибавляя к обеим сторонам этого равенства i, получаем, что $\operatorname{ind}_y x + i = l - t$, откуда $\operatorname{ind}_y xa^i = \operatorname{ind}_y x + i$. □

Теперь обобщим понятие индекса на случай связного полигона *с циклом.*

Определение 4.4 ([4, определение 4]). *Пусть X – связный унар с циклом $C_m = \{c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}\}$. Если $x, y \in X$, то $xa^i = ya^j = c_0$ при некоторых i, j. Индексом $\operatorname{ind}_y x$ называется разность $i - j$, приведённая по модулю m.*

Нетрудно проверить, что сформулированными ранее свойствами 1.– 4. индекса элемента в связном унаре без циклов обладает также индекс элемента в связном унаре с циклом C_m, если операции осуществлять по модулю m.

4.1.5 Тензорное произведение цикла и произвольного унара

Основная идея доказательства того, что цикл является плоским унаром, заключается в непосредственной проверке того, что цикл удовлетворяет определению 4.2. Так как в этом определении используется тензорное произведение цикла с произвольным унаром, то для начала нам необходимо понять, как оно устроено.

Покажем, что вместо рассмотрения тензорного произведения цикла с произвольным унаром можно ограничиться тензорным произведением цикла со связным унаром.

Утверждение 4.1 ([23, предложение II.5.14]). *Пусть* $M \in S$-$\mathbf{Act}$, $A = \coprod_{i \in I} A_i \in \mathbf{Act}$-$S$ *и* $u_i : A_i \to A$ *– вложения, где* $A_i \in \mathbf{Act}$-S *для каждого* $i \in I$*. Тогда*
$$\left(\coprod_{i \in I} A_i\right) \otimes M \cong \coprod_{i \in I} (A_i \otimes M),$$
где вложениями являются отображения $u_i \otimes \mathrm{id}_M$, $i \in I$.

Пусть $C_n = \{c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ – цикл длины n, а X – произвольный унар. Разложим X в копроизведение компонент связности: $X = \coprod_{i \in I} X_i$. Так как из предложения 4.1 следует, что
$$C_n \otimes \coprod_{i \in I} X_i \cong \coprod_{i \in I} (C_n \otimes X_i),$$
то для выяснения строения тензорного произведения $C_n \otimes X$ можно ограничиться случаем связного унара X.

Следующие два предложения дают описание тензорного произведения $C_n \otimes X$ в случае, когда X – связный унар. Для того, чтобы доказать первое из них, нам необходимо дать ещё одно определение тензорного произведения полигонов, эквивалентное данному ранее.

Определение 4.5 ([23, определение II.5.1]). *Пусть* A_S, ${}_SM$ *– полигоны над полугруппой* S *и* Y *– множество. Отображение* $\beta : A_S \times {}_SM \to Y$ *называется сбалансированным по полугруппе* S *(или просто* S*-сбалансированным), если* $\beta(as, m) = \beta(a, sm)$ *для всех* $a \in A$, $m \in M$, $s \in S$.

Определение 4.6 ([23, определение II.5.2]). *Пусть* A_S, ${}_SM$ *– полигоны над полугруппой* S*. Множество* T *вместе со сбалансированным по* S *отображением* $\tau : A \times M \to T$ *называется тензорным произведением полигонов* A *и* M*, если для любого множества* Y *и любого* S*-сбалансированного отображения* $\beta : A \times M \to Y$ *существует отображение* $\overline{\beta}$ *такое, что* $\tau\overline{\beta} = \beta$*, то есть* *которое делает следующую диаграмму коммутативной*

$$\begin{tikzcd} A \times M \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\tau"'] & & Y \\ & T. \arrow[ur, dashed, "\overline{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

Предложение 4.4 ([4, предложение 5]). *Пусть X – связный унар без цикла, C_n – цикл длины n. Тогда*

$$C_n \otimes X \cong C_n.$$

Доказательство. Зафиксируем какой-либо элемент $y \in X$. Изоморфизм $\varphi : C_n \otimes X \to C_n$ можно взять таковым:

$$\varphi(c_i \otimes x) = c_j, \text{ где } j = i + \operatorname{ind}_y x \pmod n.$$

Вначале проверим корректность определения отображения φ. Для этого необходимо убедиться в том, что если $c_i \otimes x = c_j \otimes y$, то $\varphi(c_i \otimes x) = \varphi(c_j \otimes y)$ для всех $c_i, c_j \in C_n$, $x, y \in X$. Мы сделаем это исходя из определения тензорного произведения $C_n \otimes X$. В обозначениях определения 4.6 в качестве множества Y мы возьмём унар C_n, а в качестве отображения β – отображение $\psi : C_n \times X \to C_n$, определённое по формуле

$$\psi(c_i, x) = c_j, \text{ где } j = i + \operatorname{ind}_y x \pmod n.$$

Тогда коммутативная диаграмма в определении тензорного произведения примет следующий вид:

$$\begin{tikzcd} C_n \times X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\tau"'] & & C_n \\ & C_n \otimes X. \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Следовательно, существует единственное отображение $\varphi : C_n \otimes X \to C_n$ такое, что $\tau\varphi = \psi$, а именно $\varphi(\tau(c_i, x)) = \varphi(c_i \otimes x) = \psi(c_i, x)$ для любых $c_i \in C_n$, $x \in X$. Иначе говоря, если ψ является корректно определённым S-сбалансированным отображением, то тем самым будет доказана корректность определения отображения φ.

Корректность определения ψ следует из того, что если $(c_i, x) = (c_j, y)$, то $c_i = c_j$ и $x = y$, а значит, $\psi(c_i, x) = \psi(c_j, y)$ для $c_i, c_j \in C_n$, $x, y \in X$. Остаётся убедиться, что ψ обладает свойством $\psi(c_i a, x) = \psi(c_i, ax)$ для $c_i \in C_n$, $x \in X$. Имеем:

$$\psi(c_i a, x) = \psi(c_{i+1}, x) = c_j, \text{ где } j = (i+1) + \operatorname{ind}_y x,$$
$$\psi(c_i, ax) = c_k, \text{ где } k = i + \operatorname{ind}_y(ax) = i + \operatorname{ind}_y x + 1 = j.$$

Таким образом, $c_k = c_j$ и ψ действительно является S-сбалансированным, а значит, отображение φ определено корректно.

Теперь докажем, что φ – гомоморфизм. Имеем:

$$\varphi(a(c_i \otimes x)) = \varphi(c_i a \otimes x) = c_t, \text{ где } t = (i+1) + \operatorname{ind}_y x,$$
$$a \cdot \varphi(c_i \otimes x) = ac_k = c_{k+1}, \text{ где } k = i + \operatorname{ind}_y x.$$

Получаем, что $k+1 = t$, $c_{k+1} = c_t$ и, следовательно, $\varphi(a \cdot (c_i \otimes x)) = a \cdot \varphi(c_i \otimes x)$.

Осталось доказать, что φ взаимно однозначно.

Инъективность. Пусть $\varphi(c_i \otimes x) = \varphi(c_j \otimes z)$ для $c_i, c_j \in C_n$, $x, z \in X$. Тогда $i + \operatorname{ind}_y x = j + \operatorname{ind}_y z \pmod{n}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $j \geqslant i$. Положим $l = j - i$. Имеем:

$$\varphi(c_i \otimes x) = \varphi(c_j \otimes z) = \varphi(c_i a^l \otimes z) = \varphi(c_i \otimes a^l z).$$

Положим $z' = a^l z$. Так как $\varphi(c_i \otimes x) = \varphi(c_i \otimes z')$, то $\operatorname{ind}_y x \equiv \operatorname{ind}_y z' \pmod{n}$. Так как X по условию связный, то $xa^u = z'a^v$ при некоторых $u, v \geqslant 0$, причём $u \equiv v \pmod{n}$ (по свойству индекса 3 и 2). Пусть, например, $u \geqslant v$. Возьмём такое q, что $qn \geqslant v$. Получим:

$$\begin{gathered} c_j \otimes z = c_i a^l \otimes z = c_i \otimes a^l z = c_i \otimes z' = c_i a^{qn} \otimes z' = \\ = c_i a^{qn-v} \otimes a^v z' = c_i a^{qn-v} \otimes a^u x = c_i a^{qn} \otimes a^{u-v} x = \\ = c_i a^{u-v} \otimes x = c_i \otimes x. \end{gathered}$$

Сюръективность отображения φ очевидна: прообразом элемента c_j будет являться элемент $c_j \otimes y$, то есть $\varphi(c_j \otimes y) = c_j$. Таким образом, φ – изоморфизм.

$\square$

Предложение 4.5 ([4, предложение 6])**.** *Пусть X – связный унар с циклом $Z_m = \{z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}\}$ длины m, а $C_n = \{c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ – цикл длины n. Положим $d = \text{НОД}(m, n)$, тогда*

$$C_n \otimes X = \{c_0 \otimes z_0, c_1 \otimes z_1, \ldots, c_0 \otimes z_{d-1}\} \cong C_d.$$

Доказательство. Для начала покажем, что $c \otimes x = c_0 \otimes z_j$ при некотором $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Действительно, $c = c_i$ при некотором $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, а $a^k x = z_0$ при некотором $k > 0$. Следовательно, для любого $t > 0$ мы имеем:

$$\begin{gathered} c \otimes x = c_i \otimes x = c_i a^{nt} \otimes x = c_i \otimes a^{nt} x = \\ = c_o a^i \otimes a^{nt} x = c_0 \otimes a^{nt+i} x. \end{gathered}$$

Возьмём t настолько большим, чтобы $nt + i \geqslant k$ (чтобы попасть внутрь цикла Z_m) и пусть $j = nt + i - k$. Тогда:

$$c_0 \otimes a^{nt+i} x = c_0 \otimes a^{k+j} x = c_0 \otimes a^j z_0 = c_0 \otimes z_j,$$

где $j < m$.

Теперь докажем, что $c \otimes z_d = c \otimes z_0$ при любом $c \in C_n$. Действительно, так как $d = \text{НОД}(m, n)$, то $d = mu + nv$ при некоторых $u, v \in \mathbb{Z}$. Без ограничения общности можно считать, что $u > 0$, $v < 0$. Тогда обозначим $w = -v > 0$. Имеем:

$$c \otimes z_0 = c \otimes a^{mu} z_0 = ca^{mu} \otimes z_0 = ca^{nw+d} \otimes z_0 =$$
$$= ca^{nw} a^d \otimes z_0 = ca^{nw} \otimes a^d z_0 = c \otimes z_d.$$

Теперь покажем, что $c_0 \otimes z_0, \ldots, c_0 \otimes z_{d-1}$ различны. Пусть $i, j, s, t \geqslant 0$. По лемме [23, p. II.5.5] $c_i \otimes z_j = c_s \otimes z_t$ тогда и только тогда, когда можно из $c_i \otimes z_j$ получить $c_s \otimes z_t$ преобразованиями вида

$$c \otimes z = c' a^k \otimes z = c' \otimes a^k z \text{ или}$$
$$c \otimes z = c \otimes a^l z' = ca^l \otimes z',$$

за конечное количество шагов (здесь $c, c' \in C_n$, $z, z' \in Z_m$, $k, l \geqslant 0$). Так как ранее мы показали, что $c \otimes x = c_0 \otimes z_j$, где $c \in C_n$, $x \in X$, $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, то без ограничения общности возьмём элемент $c_i \otimes z_j$ для некоторых $0 \leqslant i < n$, $0 \leqslant j < m$ и проведём один шаг преобразования:

$$c_i \otimes z_j = c_{i-1} a \otimes z_j = c_{i-1} \otimes a z_j = c_{i-1} \otimes z_{j+1} = c_{i'} \otimes z_{j'},$$

где $i' = i-1$, $j' = j+1$. Здесь вычитание $i-1$ делается по модулю n, а сложение $j+1$ – по модулю m. Можно заметить, что сумма индексов (взятая по модулю $d = \text{НОД}(n, m)$) после шага преобразования не меняется, а именно:

$$i + j \equiv i' + j' \pmod{d}.$$

Это следует из того, что m и n делятся на d.

А так как у элементов $c_0 \otimes z_0, c_0 \otimes z_1, \ldots, c_0 \otimes z_{d-1}$ суммы индексов $i + j$ не сравнимы друг с другом по модулю d, то они не могут быть получены друг из друга. □

4.1.6 Доказательство плоскостности цикла

Теперь мы можем приступить к доказательству одного из основных результатов главы.

Лемма 4.3 ([4, лемма 3]). *Цикл – плоский унар.*

Доказательство. Просто удостоверимся, что цикл удовлетворяет определению 4.2. Пусть C_n – цикл длины n и пусть A и B – унары такие, что $A \subseteq B$ (A – подунар унара B). По предложению 4.1 мы можем считать, что B – связный унар с циклом либо без (см. рис. 4.2), а A – его подунар. В случае, если B

– связный унар без цикла, то любой его подунар A тоже будет связным без цикла. По предложению 4.4 имеем:

$$\begin{array}{ccc} C_n \otimes A & \cong & C_n \\ \big\downarrow & & \\ C_n \otimes B & \cong & C_n. \end{array}$$

Так как A – подунар унара B, то $C_n \otimes A$ – подунар унара $C_n \otimes B$. Но, так как любой подунар цикла это тот же самый цикл и $C_n \otimes A \cong C_n$, $C_n \otimes B \cong C_n$, то получается, что $C_n \otimes A \to C_n \otimes B$ – биекция, а потому является инъективным отображением.

Теперь пусть B – связный унар с циклом Z_m длины m. Любой его подунар A тоже будет связным унаром с тем же циклом. По предложению 4.5 имеем:

$$\begin{array}{ccc} C_n \otimes A & \cong & C_d \\ \big\downarrow & & \\ C_n \otimes B & \cong & C_d, \end{array}$$

где $d = \text{НОД}(m, n)$. Как и в ранее разобранном случае, отображение $C_n \otimes A \to C_n \otimes B$ будет биекцией, а потому инъективно. $\square$

Лемма 4.4 ([23, лемма III.9.3]). *Пусть X – правый S-полигон и $X = \sqcup_i X_i$, где каждый X_i – правый S-полигон, тогда $X = \coprod_i X_i$ плоский в том и только том случае, если X_i плоский для любого i.*

Теорема 4.1 ([4, теорема]). *Унар X является плоским в том и только том случае, если X – копроизведение унаров, являющихся прямыми, лучами или циклами.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X – плоский унар, тогда по следствию 4.1 его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи либо циклы.

Достаточность. Пусть X – унар и $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где X_i – прямая, луч либо цикл для каждого $i \in I$. В случае, если X_i – луч, по следствию 4.2 унар X_i – плоский. В случае, если X_i – прямая, то X_i является плоским ввиду следствия 4.3. В случае, если X_i – цикл, по лемме 4.3 унар X_i – плоский. Наконец, по лемме 4.4 получаем, что X – плоский унар. $\square$

4.2 Классы унаров, близкие к плоским

Кроме непосредственно плоских полигонов, существует множество тесно связанных с ними классов. Выбор классов полигонов, которые описываются в главе основан на [23, таблица III.2](см. рисунок 4.3). Стрелки на этом рисунке

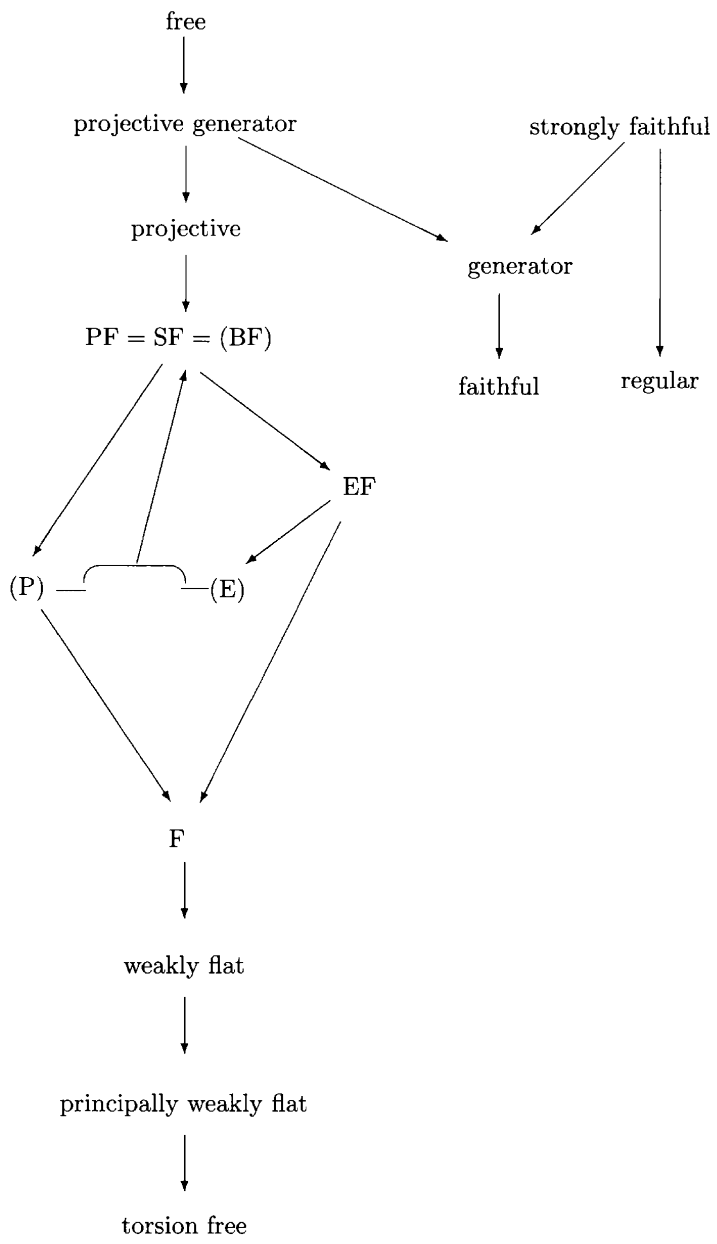


Рисунок 4.3: [23, таблица III.2]

обозначают следствия (импликации). Например, стрелка от (P) к F означает, что если унар удовлетворяет условию (P), то он является плоским. Отдельно поясним «ребро» между (E) и (P) на рисунке. Оно означает, что если для полигона одновременно выполняются условия (E) и (P), то он является сильно плоским (SF). Определения полигонов, указанные на рисунке 4.3, мы дадим далее по тексту. Подчеркнём, что этот рисунок приведён именно для полигонов, и обратные импликации, вообще говоря, неверны. То есть, для полигонов неверно, что например из плоскостности следует свойство (P). В случае же унаров некоторые классы полигонов будут совпадать, как мы увидим далее.

Утверждения и определения из [23], на которые мы будем ссылаться сейчас и в дальнейшем, приведены в [23] для полигонов над произвольными моноидами. При ссылке на них мы будем приводить их для унаров. Для начала приведём определения унаров, близких к плоским, которые мы будем в дальнейшем описывать.

Определение 4.7 ([23, определения III.9.1 и III.8.1]). *Унар X называется коуниверсально плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет коуниверсальный квадрат;*

уравнительно плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет уравнители;

сильно плоским, если он является коуниверсально плоским и уравнительно плоским;

плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет мономорфизмы;

слабо плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет все вложения левых идеалов в S;

главно слабо плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет все вложения главных левых идеалов в S;

унаром без кручения, если $\forall x, x' \in X$, $\forall s \in S$ $xs = x's \to x = x'$.[4]

Приведём некоторые известные утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 4.5 ([23, лемма III.9.3 и утверждение III.8.2]). *Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где X_i, $i \in I$ – унары. Тогда X обладет каким-либо свойством из определения 4.7, если и только если для каждого $i \in I$ унар X_i обладает этим свойством.*

Следствие 4.4 ([23, следствие III.16.4]). *Коуниверсально плоский унар является уравнительно плоским.*

Лемма 4.6 ([23, лемма III.9.2]). *Для любого унара X верны следующие импликации:*

$$\begin{aligned}
&\textit{сильно плоский} \Rightarrow \textit{коуниверсально плоский}\\
&\textit{сильно плоский} \Rightarrow \textit{уравнительно плоский} \Rightarrow \textit{плоский}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \textit{слабо плоский} \Rightarrow \textit{главно слабо плоский.}
\end{aligned}$$

Утверждение 4.2 ([23, утверждение III.10.3]). *Главно слабо плоский унар является унаром без кручения.*

Разделим описание вышеперечисленных унаров на несколько подразделов. В подразделе 4.2.1 описываются слабо плоские, главно слабо плоские унары и унары без кручения, в подразделе 4.2.2 - уравнительно плоские унары, в подразделе 4.2.4 – точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (E), в подразделе 4.2.3 – коуниверсально плоские унары, в подразделе 4.3 приведём описание унаров, для которых выполняется условие (P) и сформулируем главный результат главы.

[4] В оригинальном определении сказано, что эта импликация выполняется для всех сократимых справа элементов полугруппы S. Но, как нетрудно проверить, в свободной циклической полугруппе любой элемент сократим справа, поэтому мы записываем определение унара без кручения в таком упрощённом виде.

4.2.1 Слабо плоские, главно слабо плоские унары и унары без кручения

Лемма 4.7 ([5, лемма 3])**.** *Пусть X – унар. Если x_1, x_2 – различные элементы из X такие, что $x_1a = x_2a$, то унар X не является унаром без кручения.*

Доказательство. От противного. Пусть X – унар без кручения. Тогда, по определению, если $x_1a = x_2a$, то $x_1 = x_2$ – противоречие, так как по условию $x_1 \neq x_2$. □

Следствие 4.5 ([5, следствие 2])**.** *Если X – унар без кручения, то его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи и циклы.*

Доказательство. В начале отметим, что перенос свойства "без кручения" с компонент связности на весь унар и обратно мы получаем из леммы 4.5.

Теперь предположим, что утверждение следствия не выполнено. Это означает, что унар X – без кручения и при этом обладает компонентой связности X_i, которая не является ни прямой, ни лучом, ни циклом. Это означает, что в такой компоненте X_i будет выполняться $x_1a = x_2a$ при некоторых $x_1 \neq x_2$ из X_i. Тогда по лемме 4.7 унар X не является унаром без кручения – противоречие. □

Предложение 4.6 ([5, предложение 1])**.** *Если X – главно слабо плоский, слабо плоский, плоский, уравнительно плоский либо коуниверсально плоский унар, то его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи и циклы.*

Доказательство. Из леммы 4.6, следствия 4.4 и утверждения 4.2 мы имеем:

коуниверсально плоский ⇒ уравнительно плоский ⇒ плоский ⇒ слабо плоский ⇒ главно слабо плоский ⇒ без кручения.

Поэтому, если X – один из унаров, перечисленных в условии, то он является унаром без кручения. По следствию 4.5 мы получаем, что компонентами связности X могут быть лишь прямые, лучи и циклы. □

Теорема 4.2 ([5, теорема 1])**.** *Для любого унара X верны следующие эквивалентности:*

плоский ⇔ слабо плоский ⇔ главно слабо плоский ⇔ без кручения.

Доказательство. Из леммы 4.6 и утверждения 4.2 следует, что в этой цепочке эквивалентностей верны импликации ⇒. Осталось доказать, что унар без кручения является плоским.

Пусть X – унар без кручения. По следствию 4.5 его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи и циклы. По теореме 4.1 прямая, луч и цикл являются плоскими унарами, а значит, из леммы 4.5 мы заключаем, что X – плоский. □

Для наглядности изобразим результат этого подраздела на рисунке 4.4. Областью выделены четыре вышеописанных совпадающих класса унаров, а справа от неё нарисованы прямая, луч и цикл. Это означает, что эти классы унаров являются копроизведениями прямых, лучей и циклов (это следует из теремы 4.1).

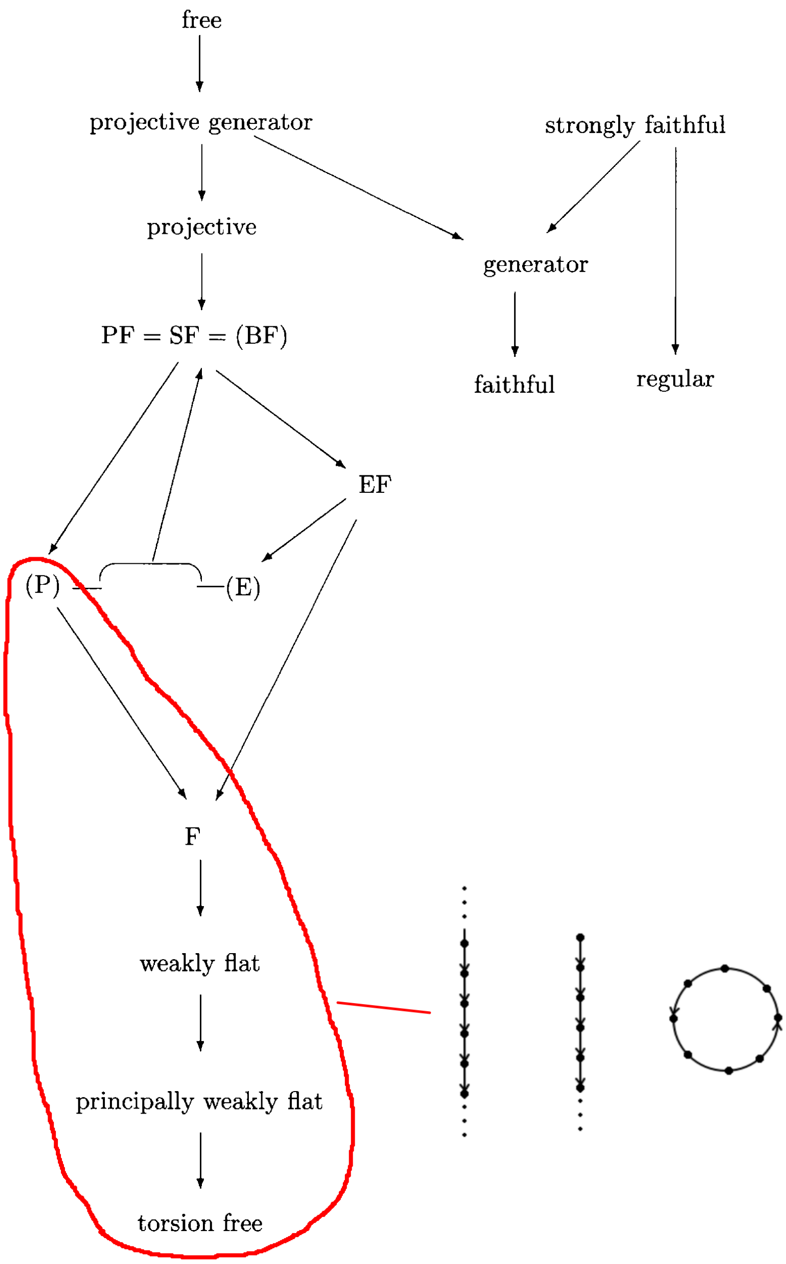


Рисунок 4.4: Классы унаров, близкие к плоским

4.2.2 Уравнительно плоские унары

Следующие условия играют важную роль при исследовании различных типов плоских полигонов.

Определение 4.8 ([23, определение III.9.4]). *Будем говорить, что полигон X над полугруппой S удовлетворяет условию (P), если для него выполняется импликация: если $xs = x's'$ для $x, x' \in X$, $s, s' \in S$, то существуют $x'' \in X$, $u, v \in S$ такие, что $x = x''u$, $x' = x''v$, $us = vs'$ (см. Рис. 4.5).*

Полигон X над полугруппой S удовлетворяет условию (E), если для него выполняется импликация: если $xs = xs'$ для $x \in X$, $s, s' \in S$, то существуют $x' \in X$, $u \in S$ такие, что $x = x'u$, $us = us'$.

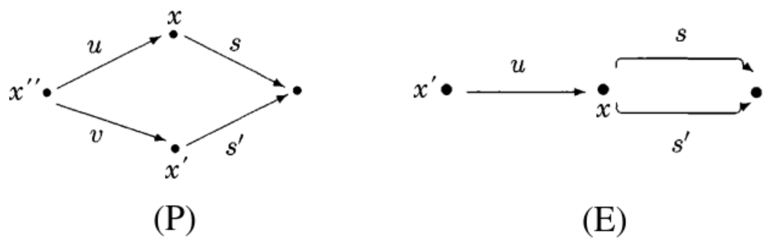


Рисунок 4.5: Условия (P) и (E).

Для описания уравнительно плоских унаров воспользуемся следующим критерием.

Теорема 4.3 ([23, теорема III.15.8]). *Если унар удовлетворяет условиям (E) и (P), то он является уравнительно плоским.*

Предложение 4.7 ([5, предложение 2]). *Луч и прямая удовлетворяют условию (E).*

Доказательство. Пусть X – луч и будем считать его унитарным полигоном над свободным циклическим моноидом $S^1 = \{1, a, a^2, a^3, \ldots\}$. Очевидно, что если $xa^k = xa^m$ для $x \in X$, то $k = m$. Отсюда, если в определении 4.8 взять $x' = x$ и $u = 1$, то условие (E) будет выполнено.

Так как прямую можно представить как объединение возрастающей последовательности лучей, то для неё тоже будет выполняться условие (E)[5]. □

Оказывается, что цикл условию (E) не удовлетворяет, как показывает следующее предложение.

Предложение 4.8 ([5, предложение 3]). *Цикл не удовлетворяет условию (E).*

Доказательство. Пусть C_n – цикл длины n. Тогда $xa^k = xa^{k+n}$ при всех $x \in C_n$ и некотором $a^k \in S$. Предположим, что цикл удовлетворяет условию (E). Это значит, что существуют такие $x' \in C_n$ и $a^m \in S$, что $x = x'a^m$ и $a^m \cdot a^k = a^m \cdot a^{k+n}$. Тогда $m+k = m+k+n$, откуда следует, что $n = 0$ – противоречие. □

[5] В этом можно также убедиться, если рассматривать прямую как полигон над свободной циклической полугруппой и проверить для неё выполнение условия (E).

Предложение 4.9 ([5, предложение 4]). *Луч, прямая и цикл удовлетворяют условию (P).*

Доказательство. Пусть X – прямая либо цикл и $xa^n = x'a^m$ для $x, x' \in X$, $a^n, a^m \in S$. Без ограничения общности будем считать, что $n \geqslant m$. Возьмём такой $x'' \in X$, что $x = x''a^k$, $x' = x''a^{k+n-m}$ при некотором $k \geqslant 0$. Тогда, очевидно, что равенство $a^k \cdot a^n = a^{k+n-m} \cdot a^m$ будет выполняться.

В случае, когда X – луч, то рассуждения выше применимы и к нему, если рассматривать X как полигон над свободным циклическим моноидом. Уточнения требует случай, когда один из элементов $x, x' \in X$ совпадает с образующим элементом полигона X. Если $x, x' \in X$ и x совпадает с образующим элементом X, тогда в качестве x'' можно взять x, а в качестве u – единицу моноида S. Тогда нетрудно увидеть, что условие (P) будет выполняться. □

Теорема 4.4 ([5, теорема 3]). *Унар является уравнительно плоским тогда и только тогда, когда он является копроизведением унаров, являющихся прямыми либо лучами.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – уравнительно плоский унар. Тогда, по лемме 4.6 он является плоским, откуда, по предложению 4.6 X является копроизведением унаров, являющихся прямыми, лучами либо циклами. Если X_i – цикл, тогда, по [23, утверждение III.15.3] X_i удовлетворяет условию (E), что противоречит предложению 4.8. Отсюда получаем, что X является копроизведением унаров, являющихся прямыми либо лучами.

Достаточность. Пусть X – унар и $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где X_i – луч либо прямая. По предложениям 4.7 и 4.9 X_i удовлетворяет условиям (P) и (E), откуда, по теореме 4.3 X_i является уравнительно плоским унаром. Наконец, по лемме 4.5 получаем, что X – уравнительно плоский унар. □

4.2.3 Коуниверсально плоские унары

Для описания коуниверсально плоских унаров воспользуемся следующим критерием.

Теорема 4.5 ([23, теорема III.16.3]). *Унар является коуниверсально плоским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям (E) и (P).*

Теорема 4.6 ([5, теорема 7]). *Унар является коуниверсально плоским тогда и только тогда, когда он является уравнительно плоским (т.е. является копроизведением прямых и лучей).*

Доказательство. Необходимость. Пусть X – коуниверсально плоский унар. Тогда, по следствию 4.4 он является уравнительно плоским.

Достаточность. Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – уравнительно плоский унар. Из предложения 4.6 мы получаем, что компоненты связности X_i являются прямыми, лучами либо циклами. Если X_i – цикл, тогда по [23, утверждение III.15.3]

X_i удовлетворяет условию (E), что противоречит предложению 4.8. Значит, X_i может быть лишь прямой либо лучом. По предложениям 4.7 и 4.9 X_i удовлетворяет условиям (P) и (E), откуда по теореме 4.5 X_i является коуниверсально плоским унаром. Наконец, по лемме 4.5 получаем, что X – коуниверсально плоский. □

Для наглядности изобразим результаты этого и предыдущего подразделов на рисунке 4.6. Перевод обозначений: PF (Pullback Flat): коуниверсально плоский унар, SF (Strongly Flat): сильно плоский, EF (Equalizer Flat): уравнительно плоский.

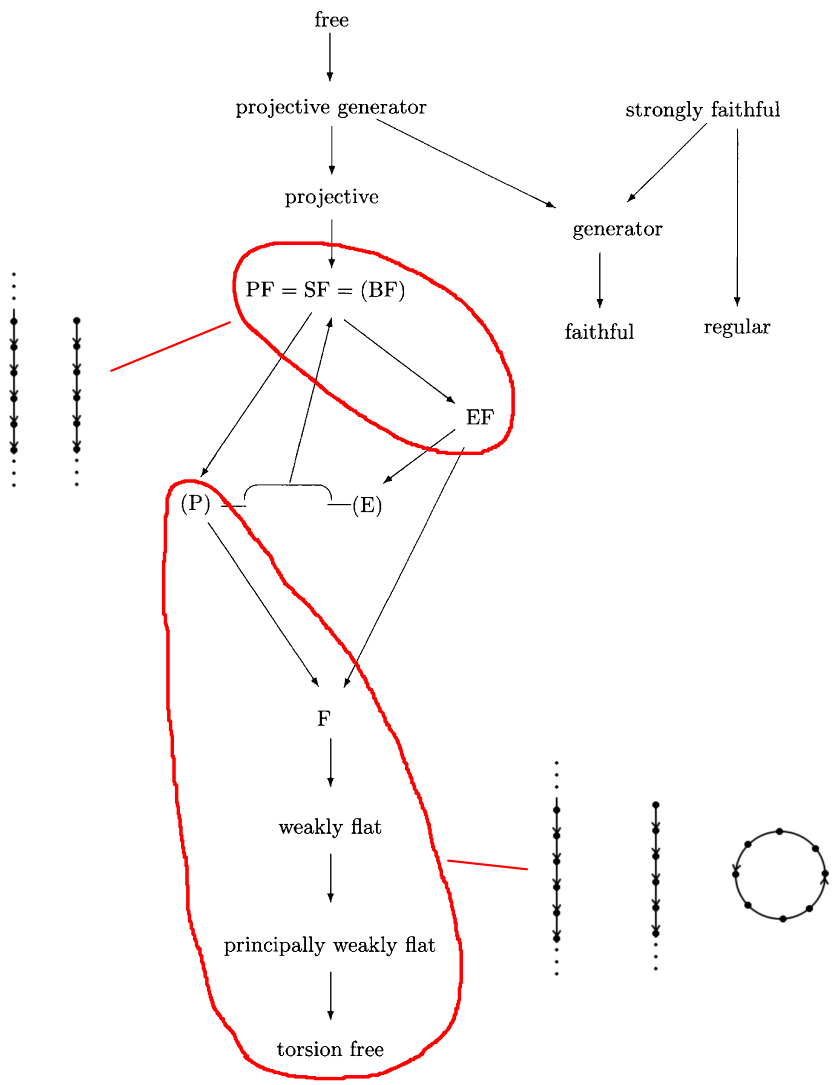


Рисунок 4.6: Классы унаров, близкие к плоским

4.2.4 Точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (E)

Лемма 4.8 ([5, лемма 4]). *Связный унар без цикла удовлетворяет условию (E).*

Доказательство. Пусть X – связный унар без цикла (см. Рис. 4.2, A) и будем рассматривать его как полигон над свободным циклическим моноидом $S^1 = \{1, a, a^2, a^3, \ldots\}$. Пусть $xa^k = xa^m$ для некоторых $a^k, a^m \in S$, $x \in X$. В силу отсутствия циклов $k = m$. Отсюда, если в определении 4.8 взять $x' = x$ и $u = 1$ ($x' \in X$, $1 \in S$), то условие (E) будет выполняться. $\square$

Теорема 4.7 ([5, теорема 4]). *Унар удовлетворяет условию (E) тогда и только тогда, когда он не содержит циклов.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – унар, удовлетворяющий условию (E). Связный унар X_i может либо содержать цикл, либо нет (см. Рис. 4.2). Так как по предложению 4.8 цикл не удовлетворяет условию (E), то X_i является связным унаром, не содержащим цикл. Из [23, лемма III.9.5] получаем, что X не содержит циклов.

Достаточность. Пусть X – унар и $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где X_i – связный унар, не содержащий цикл. По лемме 4.8 унар X_i удовлетворяет условию (E). Из [23, лемма III.9.5] получаем, что X удовлетворяет условию (E). $\square$

"Точное действие" на языке автоматов означает, что разные входные слова по-разному воздействуют хотя бы на одно из состояний автомата. Действие является строго точным, если разные входные слова по разному воздействуют на все состояния автомата.

Полигон X_S называется *точным*, если для $s, t \in S$ выполняется импликация: если $xs = xt$ для всех $x \in X$, то $s = t$. Полигон X_S называется *строго точным*, если для $s, t \in S$ выполняется импликация: если $xs = xt$ для некоторого $x \in X$, то $s = t$ (см. [23, определение I.4.8]).

Очевидно, что если полигон является строго точным, то он является точным.

Лемма 4.9 ([5, лемма 5]). *Если X – унар без цикла (см. Рис. 4.2, (A)), то он является строго точным.*

Доказательство. Пусть $a^n, a^m \in S$ и пусть $xa^n = xa^m$ для некоторого $x \in X$. В силу отсутствия цикла $n = m$ и $a^n = a^m$. $\square$

Нетрудно увидеть, что если X – связный унар с циклом (Рис. 4.2, (B)), то он не будет являться точным, а значит, не будет и строго точным.

Пусть X – полигон над моноидом S^1. Элемент $x \in X$ называется *регулярным*, если существует гомоморфизм $\varphi : xS^1 \to S^1$ такой, что $x\varphi(x) = x$. Полигон X над моноидом S^1 называется *регулярным* полигоном, если каждый его элемент является регулярным (см. [23, определение III.19.1]).

Лемма 4.10 ([5, лемма 6]). *Унар без цикла является регулярным.*

Доказательство. Будем рассматривать унар как полигон над свободным циклическим моноидом S^1. Пусть X – унар без цикла и возьмём $x \in X$. Очевидно, что унар xS^1 является лучом, как и полигон $S^1{}_{S^1}$. Построим между ними отображение $\varphi : xS^1 \to S^1$, а именно: положим $\varphi(x) = 1$ $(1 \in S^1)$. Тогда получим, что $xS^1 \cong S^1$ (как полигоны). Теперь нетрудно видеть, что $x\varphi(x) = x \cdot 1 = x$, откуда следует, что x – регулярный элемент полигона S. Так как элемент x выбран произвольно, то заключаем, что X – регулярный унар. □

Нетрудно увидеть, что если X – связный унар с циклом, то он не будет являться регулярным в силу того, что построить требуемый изоморфизм невозможно.

Теорема 4.8 ([5, теорема 5]). *Для любого унара X верны следующие эквивалентности:*

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \text{строго точный} \Leftrightarrow \text{точный} \Leftrightarrow \text{регулярный.}$$

Доказательство. Пусть X – унар, удовлетворяющий условию (E). Из теоремы 4.7 следует, что он является унаром, не содержащим цикл. Тогда, из леммы 4.9 следует, что X является строго точным. Если X является строго точным, то он является точным. Из леммы 4.10 следует, что X является регулярным.

Пусть X – регулярный унар. X может либо содержать цикл, либо нет (см. Рис. 4.2). Так как из определения нетрудно увидеть, что унар, содержащий цикл не является регулярным, то заключаем, что X – унар, не содержащий цикл. Из теоремы 4.7 заключаем, что X удовлетворяет условию (E). □

Для наглядности изобразим результаты этого и предыдущего подразделов на рисунке 4.7. «Faithful» на рисунке обозначает «точный», «strongly faithful» – «строго точный».

4.3 Следствия

Таким образом, мы можем собрать результаты всех подразделов главы воедино и сформулировать следующие утверждения.

Следствие 4.6 ([5, следствие 3]). *Для любого унара X верны следующие эквивалентности:*

$$\text{(P)} \Leftrightarrow \text{плоский} \Leftrightarrow \text{слабо плоский} \Leftrightarrow \text{главно слабо плоский} \Leftrightarrow \text{без кручения.}$$

Доказательство. Докажем первую эквивалентность. Пусть X – унар, удовлетворяющий условию (P). Тогда, по [23, утверждение III.13.3] X является плоским унаром. Наоборот, пусть X – плоский унар. Тогда, по предложению 4.6 его компонентами связности могут быть прямые, лучи либо циклы. По предложению 4.9 луч, прямая и цикл удовлетворяют условию (P).

Все остальные эквивалентности следуют из теоремы 4.2. □

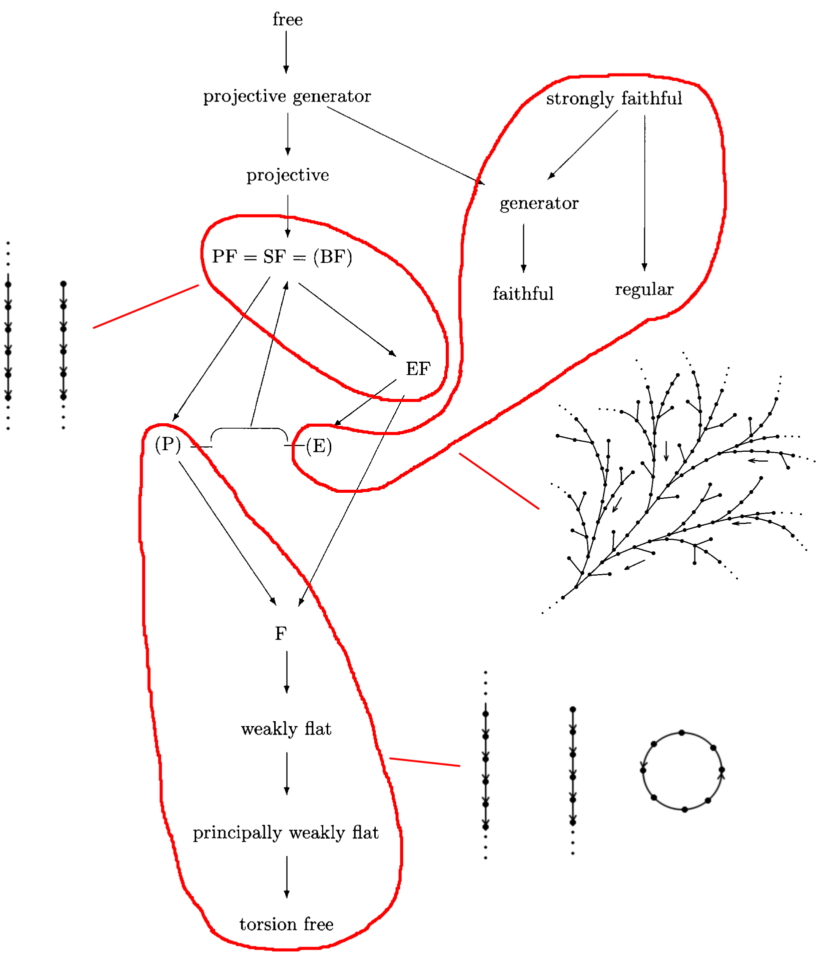


Рисунок 4.7: Классы унаров, близкие к плоским

Следствие 4.7 ([5, следствие 4]). *Для любого унара X верны следующие импликации:*

$$\textit{коуниверсально плоский} \Leftrightarrow \textit{уравнительно плоский} \Rightarrow (E)$$
$$\Leftrightarrow \textit{строго точный} \Leftrightarrow \textit{точный} \Leftrightarrow \textit{регулярный.}$$

Доказательство. Первая эквивалентность следует из теоремы 4.6.

Если X – уравнительно плоский унар, то по [23, предложение III.15.3] он удовлетворяет условию (E). В обратную сторону эта импликация выполняться не будет, как можно видеть из теоремы 4.7. Остальные импликации следуют из теоремы 4.8. □

Таким образом, в этой главе диссертационного исследования автором полностью описаны коуниверсально плоские, уравнительно плоские, плоские, слабо плоские, главно слабо плоские унары, унары без кручения, унары, удовлетворяющие условию (E) или (P), точные, строго точные и регулярные унары. На рисунке 4.8 схематично изображены все вышеописанные классы унаров, а также результат И. Сахарова [30, теорема 1] о том, что проективные унары являются копроизведением лучей. Доказано, что коуниверсально плоские унары совпадают с уравнительно плоскими и являются копроизведением прямых и

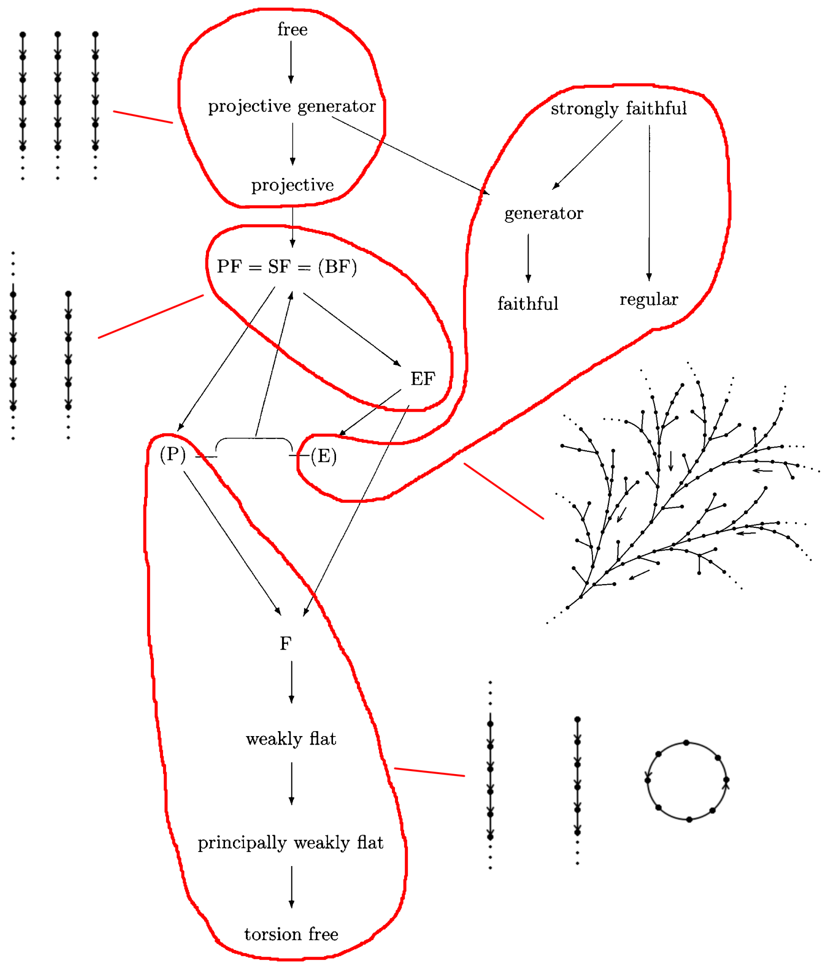


Рисунок 4.8: Классы унаров, близкие к плоским

лучей. Унары, удовлетворяющие условию (P), плоские, слабо плоские, главно слабо плоские и унары без кручения совпадают и являются копроизведением прямых, лучей и циклов. Унары, удовлетворяющие условию (E), точные, строго точные и регулярные унары совпадают и являются унарами, не содержащими цикл.

5 Заключение

В диссертационной работе проведено исследование полигонов, на решётке конгруэнций которых выполняется нетривиальное решёточное тождество. Описаны полигоны над прямоугольными связками, решётка конгруэнций которых удовлетворяет тождеству модулярности, дистрибутивности или же является цепью. Разработан и реализован алгоритм, позволяющий строить решётку конгруэнций заданного полигона и проверять различные тождества на ней. Установлены общие свойства полигонов, на решётке конгруэнций которых выполняется хотя бы одно нетривиальное тождество. Получены необходимые условия того, когда на решётке конгруэнций унара выполняется нетривиальное решёточное тождество. Получено полное описание плоских, слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, уравнительно плоских, ко-универсально плоских, точных, строго точных, регулярных унаров и унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P). Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в областях общей алгебры и дискретной математики.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. *Кожухов И. Б.*, *Пряничников А. М.*, *Симакова А. Р.* Условия модулярности решетки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой [Текст] // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2020. — Т. 84, № 2. — С. 90—125. —
EDN: BIURKF. Импакт-фактор 0.821 (РИНЦ). Объем 2.187 п.л.
Перевод: *Kozhukhov I. B., Pryanichnikov A. M., Simakova A. R.* Conditions of modularity of the congruence lattice of an act over a rectangular band // Izvestiya: Mathematics. 2020. Vol. 84, №2. pp. 291–323
EDN: QXLLSW. Импакт-фактор 0.9 (JIF). Объем 2 п.л.
Общая доля диссертанта составляет 50%.
2. *Kozhuhov I. B.*, *Pryanichnikov A. M.* Acts with identities in the congruence Lattice [Текст] // Algebra universalis. — 2022. — Vol. 83, № 2. — pp. 291–323. —
EDN: SRQQDK. Импакт-фактор 0.6 (JIF). Объем 2 п.л.
Общая доля диссертанта составляет 50%.
3. *Кожухов И. Б.*, *Пряничников А. М.* Об унарах с тождествами в решётке конгруэнций, II [Текст] // Чебышевский сборник. — 2025. — Т. 26, № 3. — С. 125—135. —
EDN: PNQGSN. Импакт-фактор 0.262 (SJR). Объем 0.625 п.л.
Общая доля диссертанта составляет 50%.
4. *Пряничников А. М.* Плоские унары [Текст] // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2025. — № 9. — С. 70—80. —
EDN: SDEXDJ. Импакт-фактор 0.198 (РИНЦ). Объем 0.625 п.л.
Перевод: *Pryanichnikov A.M.* Flat unars // Russian Mathematics. 2025. Vol. 69, № 9. pp. 51–59
EDN: SDEXDJ. Импакт-фактор 0.6 (JIF). Объем 0.5 п.л.
5. *Пряничников А. М.* Классы унаров, близкие к плоским [Текст] // Чебышевский сборник. — 2025. — Т. 26, № 1. — С. 76—87. —
EDN: WFHVJT. Импакт-фактор 0.262 (SJR). Объем 0.687 п.л.

Выступления на конференциях

6. *Кожухов И. Б.*, *Пряничников А. М.* Об унарах с тождествами в решётке конгруэнций [Текст] // Материалы VI Международной конференции «Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях» (СИТОНИ). — г. Донецк : Издательство ДонНТУ, 2019. — С. 64—69.

Список литературы

7. *Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С.* Введение в теорию автоматов [Текст]. — М. : Наука, 1985. — 320 с.
8. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения [Текст] / под ред. Л. Н. Шеврина ; пер. с англ. И. О. Корякова. — М. : Наука, 1985. — 440 с.
9. *Кожухов И. Б., Михалёв А. В., Тищенко А. В.* Избранные вопросы теории полугрупп: представления и многообразия полугрупп [Текст]. — М. : Интуит, 2021. — 160 с.
10. *Avdeyev A. Y., Kozhukhov I. B.* Acts over completely 0-simple semigroups [Текст] // Acta Cybernetica. — 2000. — Vol. 14, № 4. — pp. 523–531.
11. *Oehmke R. H.* Right Congruences and Semisimplicity for rees matrix semigroups [Текст] // Pacific Journal of Mathematics. — 1974. — Vol. 54, № 2. — pp. 143–163.
12. *Халиуллина А. Р.* Конгруэнции полигонов над группами [Текст] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, 4(2). — С. 133—137.
13. *Халиуллина А. Р.* Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей [Текст] // Чебышевский сборник. — 2013. — Т. 14, № 3. — С. 142—146.
14. *Халиуллина А. Р.* Условия модулярности решётки конгруэнций полигонов над полугруппой правых или левых нулей [Текст] // Дальневосточный математический журнал. — 2015. — Т. 15, вып. 1. — С. 102—120.
15. *Tuganbaev A.* Distributive modules and related topics [Текст]. Vol. 12. — CRC Press, 1999. — 274 p. — (Algebra, Logic and Applications Series).
16. *Туганбаев А. А.* Строение дистрибутивных колец [Текст] // Матем. сб. — 2002. — Т. 193, вып. 5. — С. 113—128.
17. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М. : МЦНМО, 2009. — 472 с.
18. *Егорова Д. П.* Структура конгруэнций унарной алгебры [Текст] // Межвузовский научный сборник «Упорядоченные множества и решётки». Вып. 5. — г. Саратов : Издательство Саратовского университета, 1978. — С. 11—44.
19. *Brandl R.* Groups whose lattice of normal subgroups are distributive [Текст] // Glasgow Math. Journal. — 1989. — Vol. 31, issue 2. — pp. 183–188.
20. *Mitsch H.* Semigroups and their lattice of congruences [Текст] // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 26. — pp. 1–63.

21. *Kozhukhov I. B.* Left chain semigroups [Текст] // Semigroup Forum. — 1981. — Vol. 22, 2(225). — pp. 1–8.
22. *Птахов Д. О.*, *Степанова А. А.* Решётки конгруэнций полигонов [Текст] // Дальневосточный математический журнал. — 2013. — Т. 13, вып. 1. — С. 107—115.
23. *Kilp M.*, *Knauer U.*, *Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories [Текст]. — Berlin; New York : de Gruyter, 2000. — 546 p. — (De Gruyter expositions in mathematics; 29).
24. *Berthiaume P.* The injective envelope of S-sets [Текст] // Canadian Mathematical Bulletin. — 1967. — Vol. 10, issue 2. — pp. 261–273.
25. *Kim J. P.*, *Park Y. S.* Injective hulls of S-systems over a Clifford semigroup [Текст] // Semigroup Forum. — 1991. — Vol. 43, № 1. — pp. 19–24.
26. *Кожухов И. Б.*, *Петриков А. О.* Инъективные и проективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой [Текст] // Чебышевский сборник. — 2016. — Т. 17, вып. 4. — С. 65—78.
27. *Кожухов И. Б.*, *Петриков А. О.* Проективные и инъективные полигоны над вполне простыми полугруппами [Текст] // Фундаментальная и прикладная математика. — 2016. — Т. 21, вып. 1. — С. 123—133.
28. *Katsov Y.* On flat semimodules over semirings [Текст] // Algebra universalis. — 2004. — Vol. 51, issue 2. — pp. 287–299.
29. *Jakubíková-Studenovská D.*, *Pócs J.* Monounary algebras [Текст]. — Košice : UPJŠ Košice, 2009.
30. *Сахаров И. А.* Проективные и инъективные унары [Текст] // Дальневост. матем. журн. — 2024. — Т. 24, № 1. — С. 107—119.
31. *Jungabel E.*, *Masulovic D.* Homomorphism-homogeneous monounary algebras [Текст] // Mathematica Slovaca. — 2013. — Vol. 63, № 5. — pp. 993–1000.
32. *Laan V.* Pullbacks and flatness properties of acts I [Текст] // Communications in Algebra. — 2001. — Vol. 29, issue 2. — pp. 829–850.
33. *Bulman-Fleming S.*, *Kilp M.*, *Laan V.* Pullbacks and flatness properties of acts II [Текст] // Communications in Algebra. — 2001. — Vol. 29, issue 2. — pp. 851–878.
34. *Golchin A.* Flatness and coproducts [Текст] // Semigroup Forum. — 2006. — Vol. 72, issue 3. — pp. 433–440.
35. *Будиянская К. В.*, *Кожухов И. Б.* Конгруэнции свободного унара [Текст] // Чебышевский сборник. — 2023. — Т. 24, вып. 1. — С. 15—26.
36. *Карташов В. К.*, *Карташова А. В.* Характеризация дистрибутивных решеток квазимногообразий унаров [Текст] // Чебышевский сборник. — 2021. — Т. 22, вып. 1. — С. 177—187.

37. *Карташов В. К.*, *Карташова А. В.*, *Пономарёв В. Н.* Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр [Текст] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, 4, ч. 2. — С. 52—57.

38. Congruencer [Электронный ресурс]. — Репозиторий GitHub. `https://github.com/pmalex/congruencer`.

39. *Клиффорд А.*, *Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп [Текст] : в 2 т. / под ред. Л. Н. Шеврина ; пер. с англ. В. А. Баранского, В. Г. Житомирского. — М. : Мир, 1972. — 712 с.

40. *Гретцер Г.* Общая теория решёток [Текст] / под ред. Д. М. Смирнова ; пер. с англ. А. Д. Больбота, В. А. Горбунова, В. И. Туманова. — М. : Мир, 1982. — 452 с.

41. *Биркгоф Г.* Теория решёток [Текст] / под ред. Л. А. Скорнякова ; пер. с англ. В. Н. Салий. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 568 с.

42. *Burris S.*, *Sankappanavar H. P.* A course in universal algebra [Текст]. — NY : Springer New York, 1981. — 276 p. — (GTM, volume 78).

43. *Кон П.* Универсальная алгебра [Текст] / под ред. А. Г. Куроша ; пер. с англ. Т. М. Баранович. — М. : Мир, 1974. — 352 с.

44. *Freeze R.*, *Ježek J.*, *Nation J. B.* Free lattices [Текст]. Vol. 42. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1995. — 293 p. — (Mathematical Surveys and Monographs).

45. *Sachs D.* Identities in finite partition lattices [Текст] // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1961. — Vol. 12, № 6. — pp. 944–945.