ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Белозерова Глеба Владимировича
на тему: «Топология слоений Лиувилля интегрируемых биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Диссертация Глеба Владимировича Белозерова посвящена качественно новому этапу исследований интегрируемых систем, проводимых в школе А.Т. Фоменко. На протяжении нескольких лет самим руководителем школы и его учениками были получены важные результаты, касающиеся классификации интегрируемых систем с двумя степенями свободы: гипотезы, получившие известность как гипотезы A, B, C и D, были разрешены и или превращены в теоремы, или были дополнены необходимыми деталями (например, магнитным полем или потенциалом).

Однако системы инвариантов, предложенные А.Т. Фоменко, конечно не предполагали никаких ограничений на число степеней свободы, что было реализовано в работах Харламова и Рябова в применении к системе Ковалевской, и в других работах. Однако та степень развития предмета, которая имеет место в случае двух степеней свободы, требует покорения новой высоты: случая трех степеней свободы. Эта высота покорена в обсуждаемой диссертационной работе Г.В. Белозерова. Более того, замечательным является тот факт, что методы, используемые диссертантом, могут быть продолжены и на большее число степеней свободы, что позволяет надеяться на появление в ближайшем будущем нового ряда результатов.

Г.В. Белозеров выбором самого названия диссертации очертил круг задач, связанных с переходом от плоского случая, рассматриваемого как для математического биллиарда, так и для топологического биллиарда, введенного В.В. Ведюшкиной в виде биллиардных книжек, к случаю криволинейных областей в трехмерном евклидовом пространстве, лежащих на квадратичных поверхностях, а также трехмерных подобластей того же пространства. При этом переход к криволинейным областям сразу же выводит задачу о биллиардных траекториях на качественно новый уровень сложности, поскольку речь идет уже не о прямых траекториях движения, а о геодезических линиях. Кроме того, в качестве первого шага необходимо описать и классифицировать сами "биллиардные столы", выделяемые условиями равенства всех углов при вершинах $\pi/2$, как в случае двумерной криволинейной области, так и в трехмерном случае. И уже затем возможно переходить к вычислениям инвариантов соответствующих интегрируемых систем – насколько хватит сил и средств. И, как показывает набор результатов, выносимых Г.В. Белозеровым на защиту, и сил, и технических средств хватило на весьма впечатляющее продвижение в исследованиях интегрируемых гамильтоновых систем.

Прежде всего были классифицированы все компактные области на невырожденных квадриках, подходящих для обобщения понятия математического биллиарда; были классифицированы все компактные области в трехмерном пространстве, подходящие для обобщения понятия математического биллиарда на случай трех степеней свободы.

Затем, создав необходимый базис, диссертантом были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга для первого случая; для второго случая с тремя степенями свободы классифицированы все трехмерные софокусные биллиарды относительно грубой лиувиллевой эквивалентности. Кроме того, и в более объемном случае – трехмерного биллиарда с потенциалом Гука – диссертантом определены классы гомеоморфности неособых изоэнергетических поверхностей.

Первая глава диссертации – вводная. В ней представлены основные определения и теоремы теории интегрируемых гамильтоновых систем (ИГС), описан метод топологических инвариантов, введенный А.Т. Фоменко для качественного анализа ИГС. Также в этом разделе приведены описания биллиардов, исследуемых диссертантом: софокусные геодезические биллиарды на квадриках и трехмерные биллиарды внутри компактных областей, ограниченных софокусными квадриками. Доказана интегрируемость этих систем.

Вторая глава посвящена топологической классификации софокусных геодезических биллиардов на квадриках. Рассматривается следующая задача. Биллиардный шар (материальная точка единичной массы) движется свободно внутри биллиардного стола – области на квадрике, ограниченной дугами квадрик, софокусной с данной, отражаясь от границы абсолютно упруго. Предполагается, что углы излома границы равны 90°. Такая система является интегрируемой по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Соискатель классифицирует слоения Лиувилля таких биллиардов на поверхностях постоянной энергии. Для этого он вводит отношение комбинаторной эквивалентности биллиардных столов, сохраняющее лиувиллеву эквивалентность (послойный гомеоморфизм слоений) соответствующих биллиардов. Оказалось, что на эллипсоиде имеется в точности 21 тип неэквивалентных биллиардных столов, на однополостном гиперболоиде – снова 21 тип, а на двуполостном – в точности 13. Затем для каждого неэквивалентного стола диссертант вычисляет инварианты Фоменко (грубая молекула) и Фоменко-Цишанга (меченая молекула) отвечающего биллиарда. Напомню, что меченая молекула является полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности слоений. В итоге получилось, что на эллипсоиде имеется 7 лиувиллево неэквивалентных софокусных геодезических биллиардов, на однополостном гиперболоиде – снова 7, а на двуполостном – 6. Некоторые биллиарды на разных квадриках оказались лиувиллево эквивалентными, поэтому суммарно на квадриках имеется в точности 10 неэквивалентных софокусных геодезических биллиардов.

В третьей главе диссертации Белозеров исследует слоения Лиувилля трехмерных софокусных биллиардов. Теперь предполагается, что биллиардный шар движется внутри компактной трехмерной области (трехмерный биллиардный стол), ограниченной гладкими гранями квадрик софокусного семейства, при этом двугранные углы излома границы стола равны 90°. Такая система снова является интегрируемой в кусочно-гладком смысле. Соискатель классифицирует слоения Лиувилля таких биллиардов с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности (гомеоморфизм баз слоений, который локально поднимается до гомеоморфизма самих слоений). Для этого, на множестве трехмерных биллиардных столов он снова вводит отношение комбинаторной эквивалентности и доказывает теорему классификации. Это отношение сохраняет грубую лиувиллеву эквивалентность соответствующих биллиардов. Оказалось, что существует в точности 35 типов неэквивалентных трехмерных биллиардных столов. Далее, для каждого неэквивалентного стола диссертант рассматривает отображение момента на изоэнергетических поверхностях и строит бифуркационную диаграмму. Эта диаграмма задает разбиение образа отображения момента на 0,1,2-страты (точки, дуги и диски соответственно). Для каждой точки каждой страты Белозеров описывает слоение Лиувилля в прообразе малой окрестности этой точки. Изучив таким образом полулокальное устройство слоения Лиувилля, диссертантом было доказано, что в трехмерном евклидовом пространстве существует в точности 24 класса грубо лиувиллево неэквивалентных софокусных биллиардов.

Наиболее трудными в работе оказались точки, отвечающие 0-стратам: (b,c), (b,b),(c,c). Последние две отвечают вырожденным особенностям, в то время как первая – особенности типа седло-седло. Для почти всех столов слоение Лиувилля вблизи особенности, отвечающей точке (b,c), диссертанту удалось описать в виде почти прямого произведения 2-атомов и окружностей.

Четвертая глава посвящена исследованию топологических типов поверхностей постоянной энергии трехмерных софокусных биллиардов. Согласно теореме классификации биллиардных столов, доказанной диссертантом, произвольный трехмерный софокусный биллиардный стол гомеоморфен либо трехмерному диску, либо сферическому слою, либо полноторию. Оказалось, что класс гомеоморфности изоэнергетической поверхности Q^5 зависит только от класса гомеоморфности биллиардного стола. При этом, если стол – трехмерный диск, полнотории или сферический слой, то Q^5 – в точности S^5, $S^1 \times S^4$ или $S^2 \times S^3$ соответственно. Более того, результат останется верным, если возмутить границу стола, т.е. интегрируемость биллиардной системы не нужна.

Также в этой главе соискатель описывает топологические типы неособых изоэнергетических поверхностей биллиарда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука коэффициента k. Предполагается, что центр сил сосредоточен в центре эллипсоида. Оказалось, что в притягивающем случае ($k > 0$) все неособые поверхности постоянной энергии гомеоморфны сфере S^5. В отталкивающем случае ($k < 0$) возможны следующие типы Q^5 и только они: $2\,S^5$, $S^1 \times S^4$, $S^2 \times S^3$, S^5.

Диссертация Г. В. Белозерова является научным исследованием высокого уровня, вызывающим интерес у специалистов как в области динамических систем и математической физики, так и в дифференциальной топологии и геометрии симплектических многообразий. При этом поставленные задачи были полностью решены.

Необходимо отметить, что рецензируемая диссертационная работа являет пример сбалансированного исследования, где четкие теоретические методы и идеи дополняются сложными конкретными вычислениями, что показывает как высокую теоретическую подготовку диссертанта, так и его умение производить технически сложные выкладки.

Сам текст диссертации очень хорошо продуман, что позволило на небольшом объеме достаточно подробно и выпукло показать геометрию и технику вычислений.

Текст достаточно хорошо проработан, и мной было замечено не большое число опечаток (среди них курьезные: например, на странице 6 Вадим Калошин потерял свои настоящие инициалы), которые не мешают чтению и не снижают высокой оценки текста диссертации.

Все результаты диссертации являются новыми, оригинальными, своевременно опубликованными в трех статьях в математических журналах, индексируемых WoS и Scopus или входящих в список научных журналов, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ, а также представленными автором на различных конференциях.

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физикоматематическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Белозеров Глеб Владимирович несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор РАН,
начальник сектора лаборатории теоретической физики
имени Н.Н. Боголюбова
ММНИО «Объединенный институт ядерных исследований»

ТЮРИН Николай Андреевич

Контактные данные:
тел.: , e-mail: ntyurin@theor.jinr.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.06 (математическая логика, алгебра и теория чисел)

Адрес места работы:
141980, Московская область, г. Дубна, ул. Жолио - Кюри, д. 6,
Объединенный институт ядерных исследований,
Лаборатория теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова
Тел.: +7(496) 216-23-40; e-mail: bltp@theor.jinr.ru

Подпись сотрудника
ЛТФ ОИЯИ Н.А. Тюрина удостоверяю:
Ученый секретарь ЛТФ ОИЯИ А.В. Андреев