ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Солонкова Александра Алексеевича
на тему: «Свободные универсальные алгебры с непрерывными и раздельно непрерывными операциями»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

В диссертации А.А. Солонкова изучаются топологические и квазитопологические универсальные Σ-алгебры. Одним из создателей теории алгебраических систем является академик А.И. Мальцев, который посвятил этой теории большой цикл статей и докладов. В последние годы эта теория пополнилась новыми результатами, в частности, о свойствах топологических универсальных алгебр и многообразиях топологических универсальных алгебр. Особое место среди абстрактных топологических алгебр занимают мальцевские алгебры, то есть топологические пространства с непрерывной тернарной операцией, удовлетворяющей двум простым тождествам. Свойства таких пространств изучались в работах В.В Успенского, О.В. Сипачёвой, Е.А. Резниченко и др. В данной работе продолжается изучение таких пространств, получены новые интересные результаты в этом направлении, что свидетельствует об актуальности темы, выбранной диссертантом.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Во введении даны необходимые определения и сформулированы известные результаты о существовании свободных алгебр в данном многообразии.

В первой главе определяется свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ и доказано существование $F_{\mathcal{V}}(X)$ для произвольного топологического пространства X в данном многообразии топологических алгебр $\mathcal{V}$ и доказаны свойства алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$. Далее конструктивно описывается абсолютно свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{W}}(X)$. Эта алгебра построена из множества

X последовательным применением операций декартова произведения и суммы топологических пространств.

Во второй главе рассмотрены мальцевские алгебры, то есть алгебры с операцией Мальцева. Многообразие таких алгебр, как было доказано А.И .Мальцевым, является конгруэнц-перестановочным. Доказано, что для любой топологической алгебры из конгруэнц-перестановочного многообразия фактор алгебра $A/_{\sim}$ по любой конгруэнции $\sim$ является топологической алгеброй, то есть все операции на $A/_{\sim}$ непрерывны относительно фактор топологии. Приведён пример, показывающий, что в общем случае это неверно.

Кроме того, для топологической алгебры с непрерывной операцией Мальцева доказано, что из аксиомы отделимости T_0 следует хаусдорфовость, даже более сильное свойство, чем хаусдорфовость. Но регулярность, вообще говоря, не выполняется. Приведён соответствующий пример.

Доказана теорема о существовании свободной мальцевской алгебры $M(X)$ в многообразии мальцевских топологических алгебр для любого топологического пространства X. И в отличие от общего случая получается, что любая мальцевская алгебра M есть факторалгебра свободной топологической алгебры $M(M)$. Аналогичная теорема доказана для многообразия тихоновских мальцевских алгебр. Исследуются также свойства, касающиеся аксиом отделимости.

Далее рассматривается такой интересный объект: множество с тернарной операцией, удовлетворяющей условию ассоциативности. Показано, что в каждой свободной группе $F(X)$ можно определить подмножество $G(X)$, которое является топологической грудой, и кроме того, $G(X)$ является фактор пространством $M(X)$.

Самый поразительный и сложный параграф в этой главе – это явное описание свободной мальцевской алгебры $M(X)$: последовательно определяются слова, как «тройки троек», на них вводится некоторая операция сокращения рядом стоящих букв и проводится ювелирная работа по доказательству эквивалентности данного отношения. На факторпространстве определяется тернарная операция и доказывается, что получившаяся алгебра является свободной мальцевской алгеброй на пространстве X.

В главе 3 рассматриваются свободные топологические булевы группы $B(X)$, порождённые пространством X. Доказано, что для кружевного пространства X группа $B(X)$ является кружевным пространством (хотя не является метризуемым). Для свободных локально выпуклых пространств $L(X)$ такой результат был получен О.В. Сипачёвой в 2003 году. Это очень важное свойство, поскольку для кружевного пространства существует линейный оператор продолжения для пространства непрерывных функций, заданных на замкнутом подмножестве этого пространства, а это, в свою очередь, используется в функциональном анализе и является незаменимым инструментом при доказательстве линейной гомеоморфности пространств функций. Эта глава отличается от остальных четырёх глав диссертации методами доказательства: они являются более «тополого-метрическими». Основной факт, который доказывается в этой главе – это монотонная нормальность группы $B(X)$ для кружевного пространства X. Из монотонной нормальности, используя результаты Г. Грюнхаге и О.В. Сипачёвой, получена основная теорема.

В следующих двух главах рассматривается естественное обобщение топологических алгебр – это квазитопологические алгебры, в которых раздельно непрерывны все операции сигнатуры Σ. Доказана теорема о существовании свободной квазитопологической алгебры $F_{\mathcal{V}}^{q}(X)$. Далее конструктивно строится абсолютно свободная квазитопологическая алгебра $W^{q}(X)$, используя операции топологической суммы и декартового произведения, но топология в произведении меняется на более тонкую. Доказано, что любая свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}^{q}(X)$ в полном многообразии есть фактор пространство относительно естественного гомоморфизма Q:

$W^q(X) \to F_{\mathscr{V}}^q(X)$ и топология пространства $F_{\mathscr{V}}^q(X)$ – это топология индуктивного предела. Также рассмотрены условия, при которых пространство $F_{\mathscr{V}}^q(X)$ является хаусдорфовым или функционально хаусдорфовым, хотя даже для $X = [0,1]$ $F_{\mathscr{V}}^q(X)$ не является регулярным.

В главе 5 рассмотрены многообразия квазимальцевских алгебр сигнатуры $\{\mu\}$ с квазинепрерывной операцией Мальцева μ. Явно описаны абсолютно свободная квазитопологическая $\{\mu\}$-алгебра $W^q(X)$ и отношение эквивалентности $\sim$ на $W^q(X)$, такое, что $W^q(X)/\sim = M^q(X)$ – свободная квазимальцевская алгебра, которая имеет топологию индуктивного предела. Доказано, что в квазимальцевских алгебрах аксиома отделимости T_0 влечёт аксиому T_1 и T_1- пространство X является замкнутым подпространством в $F_{\mathscr{V}}^q(X)$ для полного многообразия $\mathscr{V}$, и что любое квазимальцевское пространство X является ретрактом своей свободной квазитопологической группы $F^q(X)$. Для топологических групп такой факт не имеет место. Доказано также, что для замкнутого вложения пространства Y в X алгебра $M^q(Y)$ замкнуто вложена в $M^q(X)$.

Все приведённые выше результаты имеют полные и строгие доказательства. Следует отметить продуманный стиль изложения: всё очень тщательно и подробно изложено, почти нет фраз «легко видеть», «нетрудно доказать». Результаты других авторов, использованные в диссертации, отмечены соответствующими ссылками. Тем не менее, имеют место досадные опечатки, которые затрудняют понимание доказательств. Например:

1. В лемме 0.1 вместо $F_{\mathscr{V}}(Y)$ написано $F_{\mathscr{V}}(X)$.
2. В лемме 0.2 нужно поменять местами операции $\sim$ и $\wedge$. И также в лемме 5.1
3. В теореме 1.1 видимо рассматривается Александровский куб, а не Тихоновский. Там же, в доказательстве, нужно $E^{2^{|X|+|\Sigma|}}$, а не $E^{|X|+|\Sigma|}$.

4. Стр. 79. В определении W_n^q нужно k_j, а не k_n
5. Формулировка теоремы 4.5: нужно $f \circ \Phi$ вместо $\Phi \circ f$.
6. В доказательстве теоремы 5.5 ссылка на теорему 4.5, вместо теоремы 5.4.

Данные замечания не влияют на справедливость и ценность полученных результатов. Все результаты диссертации являются новыми, опубликованы в ведущих рецензируемых научных изданиях из списка ВАК и прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах. Опираясь на исследования О.В. Сипачёвой, Г. Грюнхаге, В.В. Успенского и др. автором получены новые интересные результаты о строении и свойствах топологических и квазитопологических Σ-алгебр. Полученные результаты не вызывают сомнений. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в области топологии и функционального анализа, а также в спецкурсах для студентов и аспирантов математических факультетов.

Учитывая солидный объём диссертации, широкий спектр рассматриваемых вопросов, методов доказательств и полученные результаты, считаю. что диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Александр Алексеевич Солонков несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:
доцент кафедры математического анализа и теории функций
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский
Томский государственный университет»
(634050, г. Томск, пр. Ленина 36; (3822)52-98-52;
rector@tsu.ru; http://www.tsu.ru),
кандидат физико-математических наук
(01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ),
доцент

12.11.2025 Хмылева Татьяна Евгеньевна