

**ОТЗЫВ научного руководителя
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Белозерова Глеба Владимировича
на тему: «Топология слоений Лиувилля интегрируемых билиардов
в трехмерном евклидовом пространстве»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология**

Одним из актуальных направлений современной математики является качественное исследование интегрируемых гамильтоновых систем: изучение топологии слоения Лиувилля, описание и классификация особенностей, траекторный анализ, поиск эквивалентных систем. Наиболее наглядными интегрируемыми системами являются софокусные билиарды и их обобщения. Интегрируемость билиарда в области, ограниченной эллипсом, была замечена Дж.Д.Биркгофом. В.В.Козлов и Д.В.Трещев показали, что билиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик, тоже являются интегрируемыми. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности стали изучаться в работах В.Драговича, М.Раднович и В.В.Ведюшкиной. В.В.Ведюшкина ввела и рассмотрела новый класс интегрируемых билиардов – билиарды на столах книжка, т.е. на CW -комплексах, склеенных из элементарных плоских областей, ограниченных софокусными квадриками, вдоль изометричных участков границ. Согласно недавним результатам В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой билиардные книжки моделируют особенности всех интегрируемых гамильтоновых систем двух степеней свободы на компактных поверхностях постоянной энергии.

Диссертация Г.В.Белозерова посвящена интегрируемым билиардам в трехмерном евклидовом пространстве, а именно, софокусным геодезическим билиардам на квадриках, а также трехмерным билиардам, ограниченным софокусными квадриками. Интегрируемость этих систем следует из знаменитой теоремы Якоби-Шаля.

В отличие от плоских билиардов софокусные геодезические билиарды «живут» на квадриках (эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоид), т.е. на поверхностях ненулевой кривизны. Их конфигурационные

пространства – софокусные бильярдные столы – представляют собой компактные области на квадраках, ограниченные дугами софокусных квадрак. При этом предполагается, что углы излома на границе таких областей равны $\pi/2$. Сама же система задается так. Материальная точка движется внутри бильярдного стола вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. Г.В.Белозеровым в диссертации получена полная комбинаторная классификация бильярдных столов на всех квадраках софокусного семейства. Далее, для каждого типа столов им вычислены инварианты Фоменко-Цишанга соответствующих бильярдов. Оказалось, что на эллипсоиде есть ровно 7 лиувиллево неэквивалентных софокусных геодезических бильярдов, на однополостном гиперboloиде – тоже 7, на двуполостном – в точности 6. Некоторые бильярды на разных квадраках оказались лиувиллево эквивалентными. В итоге, на всех квадраках софокусного семейства имеется ровно 10 лиувиллево неэквивалентных софокусных бильярдов.

Большая часть диссертации посвящена изучению топологии слоения Лиувилля трехмерных софокусных бильярдов. Теперь материальная точка движется внутри компактной трехмерной области (трехмерный софокусный бильярдный стол), ограниченной софокусными квадраками, вдоль прямых с постоянной скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. Отмечу, что реальные интегрируемые системы с тремя и более степенями свободы, как правило, довольно трудно поддаются качественному анализу. Поэтому переход к трехмерным бильярдам – весьма нетривиальный шаг, тем не менее, вполне естественный. В своей диссертации Г.В.Белозеров ввел комбинаторное отношение эквивалентности на множестве трехмерных столов, сохраняющее грубую лиувиллеву эквивалентность соответствующих бильярдов, и доказал теорему классификации. Далее, для каждого типа неэквивалентных трехмерных столов им было описано локальное устройство слоения Лиувилля соответствующих бильярдов в ограничении на поверхности постоянной энергии. После чего доказана теорема классификации бильярдов. Оказалось,

что существует в точности 24 грубо Лиувиллево неэквивалентных трехмерных софокусных бильярда. При описании полулокального устройства особенностей Белозеровым предложен метод, позволяющий свести эту задачу к аналогичной, но с меньшим числом степеней свободы. Причем последняя система может качественно отличаться от исходной. Этот метод понижения степени свободы может быть применен к описанию слоения Лиувилля многомерных софокусных бильяров, а также других интегрируемых систем.

Одна из важных задач, возникающих при качественном исследовании любой динамической системы, заключается в определении классов гомотопности неособых поверхностей постоянной энергии. В диссертации Белозеров доказал, что ответ на эту задачу в случае трехмерных софокусных бильяров зависит лишь от класса гомотопности стола. Более того, оказалось, что изоэнергетическая поверхность любого трехмерного софокусного бильярда гомотопна либо пятимерной сфере, либо прямому произведению окружности и четырехмерной сферы, либо прямому произведению двумерной и трехмерной сфер. Отмечу, что при доказательстве этого факта интегрируемость задачи не использовалась. Далее, соискатель решил аналогичную задачу для трехмерного бильярда с потенциалом Гука, ограниченного эллипсоидом. В ответе снова фигурируют сферы и их прямые произведения.

Все результаты диссертации являются новыми, получены Белозеровым самостоятельно. Они докладывались на международных и всероссийских научных конференциях и семинарах.

Хочу отметить, что Г.В.Белозеров является исключительно талантливым математиком. Он получил яркие результаты в весьма нетривиальной области топологии, геометрии, интегрируемых динамических систем. Думаю, что его математическое творчество будет бурно развиваться и вскоре мы услышим о новых достижениях.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3 геометрия и топология (по

физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Белозерова Глеба Владимировича удовлетворяет всем требованиям “Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В.Ломоносова” и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 Геометрия и топология.

Научный руководитель:

академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой

дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета,

ФГБОУ ВО “Московский государственный университет им М.В.Ломоносова”

ФОМЕНКО Анатолий Тимофеевич



15 апреля 2025 г.

Контактные данные:

тел.: 8(916)907-71-80, email: atfomenko@mail.ru

Специальность, по которой научным руководителем
защищена диссертация:

01.01.04 геометрия и топология

Адрес места работы:

119991, Москва, Ленинские горы, д. 1,

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет

Тел.: 8(495)939-12-63; email: office@mech.math.msu.su

Подпись заведующего кафедрой механико-математического факультета МГУ
имени М.В.Ломоносова А.Т. Фоменко удостоверяю:



Декан механико-математического
факультета МГУ, член-корреспондент РАН
профессор А.И. Шафаревич

