

ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук
Белозерова Глеба Владимировича на тему:
«Топология слоений Лиувилля интегрируемых билиардов в
трехмерном евклидовом пространстве»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Диссертация Г. В. Белозерова посвящена исследованию топологии слоений Лиувилля интегрируемых билиардов в трехмерном евклидовом пространстве. В своей работе диссертант рассматривает два вида таких систем: софокусные геодезические билиарды на квадраках, а также билиарды внутри трехмерных софокусных областей, ограниченных софокусными квадраками. Последним посвящена бóльшая часть диссертационного исследования.

Качественный анализ интегрируемых гамильтоновых систем (далее ИГС) является одним из актуальных направлений современной дифференциальной геометрии и топологии. В последние десятилетия активно изучаются топологические и траекторные свойства ИГС, осуществляется поиск эквивалентных систем. Из всех ИГС, пожалуй, наибольшей наглядностью обладают билиарды, ограниченные софокусными квадраками. Интегрируемость билиарда, ограниченного эллипсом, была отмечена Дж.Д.Биркогофом. В.В.Козлов и Д.В.Трещев заметили, что билиарды, ограниченные дугами софокусных квадраков, также являются интегрируемыми. Слоения Луивилля плоских софокусных билиардов начали изучаться в работах В. Драговича и М.Раднович, а также В.В.Ведюшкиной. Согласно результатам В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой плоские софокусные билиарды и их обобщения – билиардные книжки – моделируют слоения Лиувилля многих важных интегрируемых систем двух степеней свободы из различных научных областей: физика, динамика твердого тела, геометрия. Поэтому исследование билиардов на поверхностях ненулевой гауссовой кривизны (эллипсоид, однополостный и

двуполостный гиперboloиды), а также переход к билиардам трех степеней свободы, осуществленный в работе диссертанта, является закономерным и естественным шагом при изучении связи билиардов с интегрируемыми гамильтоновыми системами иной природы (физической, механической и др.). В связи с этим полезность и актуальность диссертационной работы Г.В.Белозерова не вызывает сомнений.

Диссертация соискателя состоит из введения, четырех глав основной части и заключения. Общий объем диссертационного исследования составляет 151 страницу. Библиография содержит 76 наименований, в том числе 3 статьи соискателя в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология и индексируемых базами цитирования Scopus, Web of Science, RSCI и РИНЦ.

Во введении и первой главе обоснована актуальность исследования, приведены основные определения и теоремы для дальнейшего изложения результатов диссертации. Описана динамика материальной точки софокусных геодезических билиардов, а также трехмерных билиардов, ограниченных софокусными квадраками. Определены конфигурационные и фазовые пространства этих систем, доказана интегрируемость, написаны формулы разделения переменных.

Вторая глава диссертации посвящена софокусным геодезическим билиардам на квадраках. Конфигурационным пространством таких систем служат *билиардные столы*, т.е. компактные области на квадраках, ограниченные другими квадраками софокусными с данной, с углами излома границы, равными $\pi/2$. При этом частица движется внутри такой области по геодезическим с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. Дополнительным первым интегралом таких билиардов является параметр софокусной квадраки, которой касаются все касательные прямые, проведенные к каждой точке гладкости траектории системы. В диссертации Белозеров

классифицировал все бильярдные столы на квадраках (эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды) относительно их комбинаторного устройства и для каждой серии эквивалентных областей вычислил инварианты Фоменко и Фоменко-Цишанга соответствующих бильярдов. В итоге оказалось, что на квадраках в R^3 существует в точности 10 лиувиллево неэквивалентных софокусных геодезических бильярдов.

В третьей главе диссертации соискатель исследует слоения Лиувилля трехмерных софокусных бильярдов. Конфигурационное пространство таких систем представляет собой *трехмерный бильярдный стол*, т.е. компактную область в R^3 , ограниченную квадраками софокусного семейства, с двугранными углами излома границы, равными $\pi/2$. Дополнительные первые интегралы таких бильярдов – параметры двух софокусных квадрак, которых одновременно касаются все прямолинейные участки (или их продолжения) траектории-ломаной. Ранее трехмерные бильярды как интегрируемые системы возникали в работе В.Драговича и М.Раднович, в которой они построили бифуркационную диаграмму, а также указали количество торов Лиувилля в ее камерах для бильярда внутри трехосного эллипсоида. В настоящей диссертации Белозеровым классифицированы все трехмерные бильярдные столы относительно их комбинаторного устройства и для каждой области описаны полулокальный вид слоения Лиувилля соответствующего бильярда. В результате была получена полная классификация трехмерных софокусных бильярдов относительно грубой лиувиллевой эквивалентности на изоэнергетических поверхностях. Как оказалось, существует в точности 24 грубо лиувиллево неэквивалентных трехмерных софокусных бильярдов.

Поскольку бильярд является, вообще говоря, лишь кусочно-гладкой системой, соискатель самостоятельно вводит понятие критического значения системы первых интегралов, а именно, в зависимости от комбинаторного устройства области возможности движения. Точка – *критическая*, если в ее малой окрестности меняется вид ОВД. Такой подход был впервые применен в

работе С. Смела, а в дальнейшем – М.П. Харламовым и в настоящее время активно используется при исследовании интегрируемых систем, допускающих алгебраическое разделение переменных.

Оказывается, что бильярды на комбинаторно эквивалентных столах могут обладать разной бифуркационной диаграммой (в отличие от бифуркационных комплексов), при этом диаграммы для некоторых неэквивалентных столов могут совпадать. Иными словами, по бифуркационной диаграмме, вообще говоря, нельзя восстановить бильярдный стол и наоборот.

При описании полулокального устройства слоения Лиувилля наиболее трудным для изучения оказался слой, соответствующий точке креста бифуркационной диаграммы, которой отвечает особенность типа седло-седло. Для того чтобы описать слоение Лиувилля вблизи этого слоя Белозеров разделил все бильярдные столы на два класса: отделимые хотя бы от одной фокальной кривой и неотделимые. В случае отделимых столов задачу удалось свести к исследованию особенностей одной или нескольких интегрируемых систем с меньшим числом степеней свободы. А для неотделимых столов была найдена сохраняющаяся при бифуркации переменная действия s , и с помощью однопараметрической группы диффеоморфизмов, отвечающей s , а также выбора подходящего сечения системы, удалось получить окончательный ответ. В итоге, для всех бильярдных столов слоение Лиувилля вблизи слоя точки креста было представлено в виде почти прямого произведения атомов и окружностей. При этом показано, что трехмерные софокусные бильярды тесно связаны с бильярдами на квадраках в поле отталкивающего потенциала Гука.

Отмечу, что бóльшая часть исследования в этой главе является аналитической. При описании слоения Лиувилля соискатель напрямую работал с формулами разделяющихся переменных, упрощал их явный вид и приводил систему к более простой форме.

Наконец, *четвертая глава* диссертации посвящена исследованию топологических типов изоэнергетических поверхностей трехмерных софокусных

бильярдов. Такая задача чрезвычайно важна при исследовании любой динамической системы. В диссертационной работе соискатель доказал, что поверхность постоянной энергии любого трехмерного софокусного бильярда гомеоморфна либо сфере S^5 , либо прямому произведению $S^1 \times S^4$, либо $S^2 \times S^3$. При этом ответ зависит лишь от класса гомеоморфности бильярдного стола. Более того, интегрируемость системы не важна и результат сохранится при малом возмущении границы бильярдной области.

Также в этой главе Г.В.Белозеров определил классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии бильярда с потенциалом Гука внутри эллипсоида. Предполагается, что центр поля сил совпадает с центром эллипсоида. Оказалось, что в ответе снова фигурируют те же многообразия и их несвязные объединения. Помимо этого, соискатель выписал явные формулы первых интегралов бильярда с потенциалом Гука внутри эллипсоида произвольной размерности.

Теперь о замечаниях работы.

- Как правило, определение критического значения системы первых интегралов через комбинаторное устройство области возможности движения и классическое определение через ранг системы дифференциалов совпадают. Однако диссертант не осуществил проверку согласованности этих определений для трехмерных софокусных бильярдов.
- К сожалению, соискатель не приводит полного списка бифуркационных диаграмм всех трехмерных софокусных бильярдов.
- Всюду в работе диссертант использует термин *область возможного движения* вместо классического *область возможности движения*.

Имеется ряд орфографических и стилистических ошибок по тексту диссертации:

- В формулировке предложения 1.4.3 «...уравнения движения материальной можно переписать...» пропущено слово «точки».
- В доказательстве теоремы 1.4.1 на странице 41 должно быть «...функционально независимыми...» вместо «... функционально независимыми...».
- В формулировке предложения 3.3.1 слово «стол» должно быть во множественном числе в родительном падеже, в тексте: «Существует в точности два класса неэквивалентных неотделимых бильярдных стола...».

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования.

Заключение. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, подтверждается прежде всего публикациями в высокорейтинговых журналах, выступлениями на престижных конференциях и семинарах. Все основные результаты диссертации являются новыми, снабженными строгими доказательствами. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите

диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Белозеров Глеб Владимирович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент,
профессор Кафедры математики и анализа данных
Факультета информационных технологий
и анализа больших данных
федерального государственного образовательного
бюджетного учреждения высшего образования
«Финансовый университет при
Правительстве Российской Федерации»,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.02.01 – Теоретическая механика,
доцент

Павел Евгеньевич Рябов

125167, г. Москва, Ленинградский просп., 49/2
E-mail: **PERyabov@fa.ru**