

**ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук
Белозерова Глеба Владимировича на тему:
«Топология слоений Лиувилля интегрируемых биллиардов в
трехмерном евклидовом пространстве»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология**

Диссертация Г. В. Белозерова посвящена исследованию топологии слоений Лиувилля интегрируемых биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве. В своей работе докторант рассматривает два вида таких систем: софокусные геодезические биллиарды на квадриках, а также биллиарды внутри трехмерных софокусных областей, ограниченных софокусными квадриками. Последним посвящена большая часть докторандского исследования.

Качественный анализ интегрируемых гамильтоновых систем (далее ИГС) является одним из актуальных направлений современной дифференциальной геометрии и топологии. В последние десятилетия активно изучаются топологические и траекторные свойства ИГС, осуществляется поиск эквивалентных систем. Из всех ИГС, пожалуй, наибольшей наглядностью обладают биллиарды, ограниченные софокусными квадриками. Интегрируемость биллиарда, ограниченного эллипсом, была отмечена Дж.Д.Биркгофом. В.В.Козлов и Д.В.Трещев заметили, что биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик, также являются интегрируемыми. Слоения Лиувилля плоских софокусных биллиардов начали изучаться в работах В. Драговича и М.Раднович, а также В.В.Ведюшкиной. Согласно результатам В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой плоские софокусные биллиарды и их обобщения – биллиардные книжки – моделируют слоения Лиувилля многих важных интегрируемых систем двух степеней свободы из различных научных областей: физика, динамика твердого тела, геометрия. Поэтому исследование биллиардов на поверхностях ненулевой гауссовой кривизны (эллипсоид, однополостный и

двуполостный гиперболоиды), а также переход к биллиардам трех степеней свободы, осуществленный в работе диссертанта, является закономерным и естественным шагом при изучении связи биллиардов с интегрируемыми гамильтоновыми системами иной природы (физической, механической и др.). В связи с этим полезность и актуальность диссертационной работы Г.В.Белозерова не вызывает сомнений.

Диссертация соискателя состоит из введения, четырех глав основной части и заключения. Общий объем диссертационного исследования составляет 151 страницу. Библиография содержит 76 наименований, в том числе 3 статьи соискателя в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология и индексируемых базами цитирования Scopus, Web of Science, RSCI и РИНЦ.

Во введении и первой главе обоснована актуальность исследования, приведены основные определения и теоремы для дальнейшего изложения результатов диссертации. Описана динамика материальной точки софокусных геодезических биллиардов, а также трехмерных биллиардов, ограниченных софокусными квадриками. Определены конфигурационные и фазовые пространства этих систем, доказана интегрируемость, написаны формулы разделения переменных.

Вторая глава диссертации посвящена софокусным геодезическим биллиардам на квадриках. Конфигурационным пространством таких систем служат *билиардные столы*, т.е. компактные области на квадриках, ограниченные другими квадриками софокусными с данной, с углами излома границы, равными $\pi/2$. При этом частица движется внутри такой области по геодезическим с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. Дополнительным первым интегралом таких биллиардов является параметр софокусной квадрики, которой касаются все касательные прямые, проведенные к каждой точке гладкости траектории системы. В диссертации Белозеров

классифицировал все биллиардные столы на квадриках (эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды) относительно их комбинаторного устройства и для каждой серии эквивалентных областей вычислил инварианты Фоменко и Фоменко-Цишанга соответствующих биллиардов. В итоге оказалось, что на квадриках в R^3 существует в точности 10 лиувилево неэквивалентных софокусных геодезических биллиардов.

В третьей главе диссертации соискатель исследует слоения Лиувилля трехмерных софокусных биллиардов. Конфигурационное пространство таких систем представляет собой *трехмерный биллиардный стол*, т.е. компактную область в R^3 , ограниченную квадриками софокусного семейства, с двугранными углами излома границы, равными $\pi/2$. Дополнительные первые интегралы таких биллиардов – параметры двух софокусных квадрик, которых одновременно касаются все прямолинейные участки (или их продолжения) траектории-ломаной. Ранее трехмерные биллиарды как интегрируемые системы возникали в работе В.Драговича и М.Раднович, в которой они построили бифуркационную диаграмму, а также указали количество торов Лиувилля в ее камерах для биллиарда внутри трехосного эллипсоида. В настоящей диссертации Белозеровым классифицированы все трехмерные биллиардные столы относительно их комбинаторного устройства и для каждой области описаны полулокальный вид слоения Лиувилля соответствующего биллиарда. В результате была получена полная классификация трехмерных софокусных биллиардов относительно грубой лиувиллевой эквивалентности на изоэнергетических поверхностях. Как оказалось, существует в точности 24 грубо лиувилево неэквивалентных трехмерных софокусных биллиардов.

Поскольку биллиард является, вообще говоря, лишь кусочно-гладкой системой, соискатель самостоятельно вводит понятие критического значения системы первых интегралов, а именно, в зависимости от комбинаторного устройства области возможности движения. Точка – *критическая*, если в ее малой окрестности меняется вид ОВД. Такой подход был впервые применен в

работе С. Смела, а в дальнейшем – М.П. Харламовым и в настоящее время активно используется при исследовании интегрируемых систем, допускающих алгебраическое разделение переменных.

Оказывается, что биллиарды на комбинаторно эквивалентных столах могут обладать разной бифуркационной диаграммой (в отличие от бифуркационных комплексов), при этом диаграммы для некоторых неэквивалентных столов могут совпадать. Иными словами, по бифуркационной диаграмме, вообще говоря, нельзя восстановить биллиардный стол и наоборот.

При описании полулокального устройства слоения Лиувилля наиболее трудным для изучения оказался слой, соответствующий точке креста бифуркационной диаграммы, которой отвечает особенность типа седло-седло. Для того чтобы описать слоение Лиувилля вблизи этого слоя Белозеров разделил все биллиардные столы на два класса: отделимые хотя бы от одной фокальной кривой и неотделимые. В случае отделимых столов задачу удалось свести к исследованию особенностей одной или нескольких интегрируемых систем с меньшим числом степеней свободы. А для неотделимых столов была найдена сохраняющаяся при бифуркации переменная действия s , и с помощью однопараметрической группы диффеоморфизмов, отвечающей s , а также выбора подходящего сечения системы, удалось получить окончательный ответ. В итоге, для всех биллиардных столов слоение Лиувилля вблизи слоя точки креста было представлено в виде почти прямого произведения атомов и окружностей. При этом показано, что трехмерные софокусные биллиарды тесно связаны с биллиардами на квадриках в поле отталкивающего потенциала Гука.

Отмечу, что большая часть исследования в этой главе является аналитической. При описании слоения Лиувилля соискатель напрямую работал с формулами разделяющихся переменных, упрощал их явный вид и приводил систему к более простой форме.

Наконец, *четвертая глава* диссертации посвящена исследованию топологических типов изоэнергетических поверхностей трехмерных софокусных

билиардов. Такая задача чрезвычайно важна при исследовании любой динамической системы. В диссертационной работе соискатель доказал, что поверхность постоянной энергии любого трехмерного софокусного биллиарда гомеоморфна либо сфере S^5 , либо прямому произведению $S^1 \times S^4$, либо $S^2 \times S^3$. При этом ответ зависит лишь от класса гомеоморфности биллиардного стола. Более того, интегрируемость системы не важна и результат сохранится при малом возмущении границы биллиардной области.

Также в этой главе Г.В.Белозеров определил классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии биллиарда с потенциалом Гука внутри эллипсоида. Предполагается, что центр поля сил совпадает с центром эллипсоида. Оказалось, что в ответе снова фигурируют те же многообразия и их несвязные объединения. Помимо этого, соискатель выписал явные формулы первых интегралов биллиарда с потенциалом Гука внутри эллипса произвольной размерности.

Теперь о замечаниях работы.

- Как правило, определение критического значения системы первых интегралов через комбинаторное устройство области возможности движения и классическое определение через ранг системы дифференциалов совпадают. Однако диссертант не осуществил проверку согласованности этих определений для трехмерных софокусных биллиардов.
- К сожалению, соискатель не приводит полного списка бифуркационных диаграмм всех трехмерных софокусных биллиардов.
- Всюду в работе диссертант использует термин *область возможного движения* вместо классического *область возможности движения*.

Имеется ряд орфографических и стилистических ошибок по тексту диссертации:

- В формулировке предложения 1.4.3 «...уравнения движения материальной можно переписать...» пропущено слово «точки».
- В доказательстве теоремы 1.4.1 на странице 41 должно быть «...функционально независимыми...» вместо «... функционально независмыми...».
- В формулировке предложения 3.3.1 слово «стол» должно быть во множественном числе в родительном падеже, в тексте: «Существует в точности два класса неэквивалентных неотделимых биллиардных стола...».

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования.

Заключение. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, подтверждается прежде всего публикациями в высокорейтинговых журналах, выступлениями на престижных конференциях и семинарах. Все основные результаты диссертации являются новыми, снабженными строгими доказательствами. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите

диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Белозеров Глеб Владимирович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент,
профессор Кафедры математики и анализа данных
Факультета информационных технологий
и анализа больших данных
федерального государственного образовательного
бюджетного учреждения высшего образования
«Финансовый университет при
Правительстве Российской Федерации»,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.02.01 – Теоретическая механика,
доцент

Павел Евгеньевич Рябов

125167, г. Москва, Ленинградский просп., 49/2
E-mail: PERyabov@fa.ru