

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

ЩЕГОРЦОВА ОЛЬГА АЛЕКСАНДРОВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗОТРОПНЫХ МНОГООБРАЗИЙ И ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ,  
СООТВЕТСТВУЮЩИХ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИМ АСИМПТОТИКАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С  
ДЕЛЬТА-ОСОБЕННОСТЯМИ

Специальность 1.1.3. Геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
член-корреспондент РАН, профессор,  
Шафаревич Андрей Игоревич

Москва–2026 г.

# Оглавление

|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение</b>                                                                                 | <b>4</b>  |
| <b>1 Основные определения</b>                                                                   | <b>16</b> |
| 1.1 Стандартный метод ВКБ . . . . .                                                             | 16        |
| 1.2 Изотропные и лагранжевы многообразия . . . . .                                              | 18        |
| 1.2.1 Понятия изотропных и лагранжевых многообразий . . . . .                                   | 18        |
| 1.2.2 Производящая функция и каноническое преобразование . . . . .                              | 19        |
| 1.3 Оператор Шредингера с $\delta$ -потенциалом . . . . .                                       | 21        |
| <b>2 Квазиклассические асимптотики с вещественной фазой</b>                                     | <b>24</b> |
| 2.1 Постановка задачи . . . . .                                                                 | 24        |
| 2.2 Асимптотика задачи с гладким потенциалом . . . . .                                          | 25        |
| 2.2.1 Построение классической ВКБ-асимптотики . . . . .                                         | 25        |
| 2.2.2 Геометрическая интерпретация метода ВКБ . . . . .                                         | 27        |
| 2.2.3 Канонический оператор . . . . .                                                           | 29        |
| 2.3 Асимптотика задачи с $\delta$ -потенциалом . . . . .                                        | 30        |
| 2.3.1 Асимптотика в отсутствии фокальных точек . . . . .                                        | 31        |
| 2.3.2 Геометрическая интерпретация . . . . .                                                    | 39        |
| 2.3.3 Асимптотика при наличии фокальных точек . . . . .                                         | 40        |
| <b>3 Квазиклассические асимптотики с комплексной фазой, локализованной в окрестности кривой</b> | <b>46</b> |
| 3.1 Асимптотика задачи с гладким потенциалом . . . . .                                          | 48        |
| 3.1.1 Комплексный метод ВКБ . . . . .                                                           | 48        |
| 3.1.2 Геометрическая интерпретация комплексного метода ВКБ . . . . .                            | 52        |
| 3.2 Асимптотика задачи с $\delta$ -потенциалом . . . . .                                        | 53        |
| 3.2.1 Построение асимптотики . . . . .                                                          | 53        |
| 3.2.2 Геометрическая интерпретация . . . . .                                                    | 61        |

|          |                                                                                                       |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Квазиклассические асимптотики с комплексной фазой, локализованной в окрестности поверхности</b>    | <b>63</b>  |
| 4.1      | Асимптотика задачи с гладким потенциалом . . . . .                                                    | 65         |
| 4.1.1    | Построение фазы . . . . .                                                                             | 65         |
| 4.1.2    | Построение амплитуды . . . . .                                                                        | 71         |
| 4.1.3    | Решение задачи Коши с гладким потенциалом . . . . .                                                   | 71         |
| 4.1.4    | Геометрическая интерпретация . . . . .                                                                | 75         |
| 4.2      | Потенциал с особенностью типа дельта-функции . . . . .                                                | 76         |
| 4.2.1    | Геометрическая интерпретация . . . . .                                                                | 85         |
| <b>5</b> | <b>Квазиклассические асимптотики для трехмерной задачи с точечным <math>\delta</math>-потенциалом</b> | <b>87</b>  |
| 5.1      | Постановка задачи . . . . .                                                                           | 87         |
| 5.2      | Оператор с точечным потенциалом $\delta_{x_0}$ . . . . .                                              | 88         |
| 5.2.1    | Краевые условия . . . . .                                                                             | 89         |
| 5.3      | Асимптотика при наличии точечного потенциала . . . . .                                                | 91         |
| 5.3.1    | Условие взаимодействия с точечным потенциалом . . . . .                                               | 91         |
| 5.3.2    | Переход к сферическим координатам . . . . .                                                           | 92         |
| 5.3.3    | Формулировка результата . . . . .                                                                     | 94         |
| 5.4      | Отсутствие сходящейся волны в асимптотике решения . . . . .                                           | 102        |
| 5.4.1    | Геометрическая интерпретация . . . . .                                                                | 106        |
|          | <b>Заключение</b>                                                                                     | <b>107</b> |
|          | <b>Литература</b>                                                                                     | <b>109</b> |
|          | Список литературы . . . . .                                                                           | 109        |
|          | <b>Основные публикаций автора по теме диссертации</b>                                                 | <b>110</b> |
|          | Список публикаций автора по теме диссертации . . . . .                                                | 110        |

# Введение

## Актуальность темы исследования

Тема диссертации относится к области дифференциальной геометрии. Исследование диссертационной работы находится на стыке теории лагранжевых и изотропных многообразий в симплектических пространствах и математической физики. Автором рассматривается задача о построении квазиклассических асимптотик решений уравнения Шредингера с дельта-образными потенциалами (далее —  $\delta$ -потенциалами) и описании отвечающих им геометрических объектов в фазовом пространстве. Исследование посвящено четырем сюжетам, различающимся геометрией носителя сингулярности и типом начальных данных: 1) построению квазиклассической асимптотики с вещественной фазой для  $\delta$ -потенциала, локализованного на поверхности коразмерности 1 в  $\mathbb{R}^n$ , и описанию перестройки лагранжева многообразия при взаимодействии с носителем сингулярности; 2) построению асимптотики с комплексной фазой для того же класса  $\delta$ -потенциалов при начальных данных, локализованных в окрестности точки, и описанию соответствующих изотропных кривых и комплексных ростков над ними; 3) обобщению предыдущего результата на случай начальных данных, локализованных в окрестности подмногообразия положительной коразмерности, и описанию возникающих изотропных многообразий и комплексных векторных расслоений над ними; 4) построению асимптотики для точечного  $\delta$ -потенциала в  $\mathbb{R}^3$  и описанию лагранжевых многообразий, отвечающих падающей и рассеянной волнам. Результаты, полученные в работе, выражаются в терминах лагранжевых и изотропных многообразий, комплексных ростков и коэффициентов отражения и прохождения.

Под понятием оператора с  $\delta$ -потенциалом понимается обширный класс сингулярных возмущений оператора Лапласа, допускающих корректное описание в рамках теории самосопряженных расширений. Известные также как потенциалы нулевого радиуса, они возникают в задачах математической физики при моделировании систем с сильно локализованными взаимодействиями, когда радиус действия потенциала оказывается пренебрежимо мал по сравнению с другими характерными масштабами системы. Подобные модели применяются, в частности, при изучении рассеяния электронов на точечных дефектах кристаллической решетки, при описании сильно локализованных полей, порожденных примесями в кристаллах, а также в приложениях к низкоразмерным структурам. Одной из первых работ, в которых использовались такие потенциалы, стала модель Кронига-Пенни [7], в которой движение электрона в одномерной кристаллической

решетке описывается с помощью периодической последовательности прямоугольных потенциальных барьеров.

Математическое обоснование таких моделей было получено несколько позже. Строгое определение операторов с  $\delta$ -потенциалами впервые было дано в работе Ф. А. Березина и Л. Д. Фаддеева [3]. Используя теорию самосопряженных расширений и резольвентную формулу М. Г. Крейна, авторы показали, что оператор Лапласа, суженный на финитные гладкие функции, обращающиеся в нуль в окрестности особой точки, допускает однопараметрическое семейство самосопряженных расширений. Подробное изложение теории точечных взаимодействий, включая единое описание для размерностей 1, 2 и 3, а также классификацию граничных условий, представлено в монографиях [1, 2]. Дальнейшее развитие этот подход получил в работах Й. Брюнинга, В. Гейлера и К. Панкрашкина [5, 6], посвященных рассеянию на компактных многообразиях с присоединенными струнами и спектральным свойствам операторов на декорированных графах.

Наряду со спектральными задачами важный класс вопросов составляет построение асимптотических решений для уравнений с  $\delta$ -потенциалами. Хорошо известно, что уравнение Шредингера допускает точное аналитическое решение лишь для ограниченного класса потенциалов. Для исследования уравнений с гладкими коэффициентами широко применяется квазиклассический метод ВКБ, позволяющий строить асимптотики по малому параметру  $\hbar \rightarrow 0$ , устанавливающему связь между квантовой динамикой и классической механикой. В старшем порядке по  $\hbar$  эволюция волновой функции описывается движением вдоль классических траекторий в фазовом пространстве. Систематическое развитие этот метод получил в работах В. П. Маслова [8, 9, 10]. Им был разработан математический аппарат, позволяющий строить глобальные асимптотики, в том числе в окрестности каустик и точек поворота, где стандартный метод ВКБ теряет применимость. Однако в случае сингулярных операторов существующая теория, вообще говоря, неприменима, поскольку развитый В. П. Масловым аппарат, построен для уравнений с гладкими коэффициентами.

Центральное место в исследованиях В. П. Маслова занимает геометрический подход, основанный на теории лагранжевых и изотропных многообразий в фазовом пространстве. Лагранжевы многообразия, инвариантные относительно гамильтонова потока, используются для описания эволюции фазы волновой функции. В областях, где проекция лагранжева многообразия на конфигурационное пространство является диффеоморфизмом, асимптотика строится стандартным методом ВКБ. В окрестности каустик и точек поворота, где регулярность проекции нарушается, используется канонический оператор Маслова, позволяющий корректно согласовать локальные представления решения. При этом индекс Маслова отвечает за набег фазы при переходах между локальными картами и обходе каустик.

Наряду с каноническим оператором В. П. Масловым был разработан метод комплексного роста, предназначенный для описания решений, локализованных вблизи подмногообразий меньшей размерности (например, для гауссовых пучков или сжатых состояний, сосредоточен-

ных около отдельных траекторий). В отличие от обычного метода ВКБ, где фазовая функция вещественна, в методе комплексного роста фаза является комплекснозначной. Геометрически такие решения описываются при помощи построения комплексных векторных расслоений над изотропными многообразиями, слои которых представляют собой лагранжевы подпространства комплексифицированного касательного пространства.

В случае сингулярных операторов, содержащих дельта-особенности, условие гладкости нарушается. Сингулярный характер взаимодействия приводит к тому, что классическая частица, налетающая на дефект, испытывает мгновенное изменение импульса, что соответствует разрыву фазовой траектории. В результате стандартный аппарат оказывается напрямую неприменимым. Более того, каждый тип сингулярного потенциала требует отдельного определения оператора через соответствующие граничные условия, что делает невозможным прямое применение классического подхода и требует его отдельной модификации в каждом случае.

В диссертационной работе рассматриваются асимптотические решения нестационарного уравнения Шредингера с  $\delta$ -потенциалом, локализованным в окрестности поверхности коразмерности 1 или точки в трехмерном пространстве, при быстроосциллирующих начальных данных различных типов: волновых пакетах с вещественной фазой и гауссовых пучках, локализованных в окрестности точки или подмногообразия. Особое внимание уделяется геометрии соответствующих лагранжевых и изотропных многообразий, их эволюции и перестройке при взаимодействии волнового пакета с  $\delta$ -потенциалом.

Похожие задачи рассматривались в работах А.И. Шафаревича и его соавторов. В работе Т.А. Филатовой и А.И. Шафаревича [12] были исследованы квазиклассические спектральные серии оператора с точечным потенциалом

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x) + \alpha\delta(x - x_0)$$

на действительной прямой, а также на двумерной и трехмерной сферах. Далее этот подход был распространен на случай поверхностей вращения [14] и трехмерных сферически симметричных многообразий [13]. Показано, что возникающие лагранжевы многообразия оказываются некомпактными, а их геометрия отражает топологию носителя сингулярного потенциала. Близкие по методам задачи для операторов Шредингера на геометрических графах рассматривались в работе В.Л. Чернышева и А.И. Шафаревича [11].

Диссертационная работа продолжает исследования по развитию квазиклассического аппарата для сингулярных операторов с  $\delta$ -потенциалами. Теоретическая значимость работы заключается в необходимости обобщения методов ВКБ и геометрического анализа на случай сингулярных коэффициентов. Практическая ценность определяется возможностью изучать эволюцию волновых пакетов и узких пучков в сильно локализованных полях. Полученные результаты позволяют глубже понять геометрию и перестройку лагранжевых и изотропных многообразий при взаимодействии с сингулярными потенциалами и находят применение при моделировании квантовых систем с локализованными дефектами.

## Объект и предмет исследования

Объектом исследования является уравнение Шредингера с дельта-потенциалами двух типов: локализованным на гиперповерхности коразмерности 1 в  $\mathbb{R}^n$  и точечным в  $\mathbb{R}^3$ . Предметом исследования являются квазиклассические асимптотики решений задачи Коши для указанных уравнений в зависимости от типа начальных условий. Рассматриваются начальные данные с вещественной фазой и комплексной фазой, локализованной в окрестности точки или подмногообразия коразмерности  $k$ . Наряду с асимптотиками изучаются соответствующие геометрические объекты в фазовом пространстве — лагранжевы и изотропные многообразия, комплексные ростки и векторные расслоения над ними — и их перестройка при взаимодействии волнового пакета с носителем сингулярности.

## Цели и задачи диссертации

Основной целью диссертационной работы является разработка квазиклассических методов построения асимптотик решений нестационарного уравнения Шредингера с  $\delta$ -потенциалами и описание перестройки соответствующих геометрических объектов в фазовом пространстве (лагранжевых и изотропных многообразий и комплексных векторных расслоений над ними) при взаимодействии с носителем сингулярности.

Исследование охватывает два типа потенциалов: локализованный на поверхности коразмерности один в  $\mathbb{R}^n$  и точечный потенциал в  $\mathbb{R}^3$ . Рассматриваются различные типы начальных данных: быстро осциллирующие волновые пакеты с вещественной фазой и гауссовы пучки, локализованные в окрестности точки или подмногообразия.

Рассматриваются четыре блока задач.

1. **Блок 1.** Асимптотики с вещественной фазой для  $\delta$ -потенциала на поверхности коразмерности 1 в  $\mathbb{R}^n$ .
  - 1.1. Построение локальной квазиклассической асимптотики решения в областях свободных от каустик.
  - 1.2. Построение глобальной квазиклассической асимптотики с использованием канонического оператора Маслова.
  - 1.3. Описание лагранжевых многообразий падающей, отраженной и прошедшей волн и исследование их эволюции при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом.
  - 1.4. Вычисление квазиклассических аналогов коэффициентов отражения и прохождения.
  - 1.5. Оценка точности построенных асимптотик в норме  $L^2$ .
2. **Блок 2.** Асимптотики с комплексной фазой для  $\delta$ -потенциала на поверхности коразмерности 1 в  $\mathbb{R}^n$ : начальные данные, локализованные в окрестности точки.

- 2.1. Построение асимптотики решения на основе метода комплексного ростка Маслова.
  - 2.2. Описание изотропных многообразий и комплексных ростков и исследование их эволюции при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом.
  - 2.3. Вычисление квазиклассических аналогов коэффициентов отражения и прохождения.
  - 2.4. Оценка точности построенных асимптотик в норме  $L^2$ .
3. **Блок 3.** Асимптотики с комплексной фазой для  $\delta$ -потенциала на поверхности коразмерности 1 в  $\mathbb{R}^n$ : начальные данные, локализованные в окрестности подмногообразия коразмерности  $k$ .
- 3.1. Построение асимптотики решения на основе метода комплексного ростка Маслова.
  - 3.2. Описание изотропных многообразий и соответствующих комплексных ростков и исследование их эволюции при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом.
  - 3.3. Вычисление квазиклассических аналогов коэффициентов отражения и прохождения.
  - 3.4. Оценка точности построенных асимптотик в норме  $L^2$ .
4. **Блок 4.** Асимптотики с вещественной фазой для точечного  $\delta$ -потенциала в  $\mathbb{R}^3$ .
- 4.1. Построение квазиклассической асимптотики решения задачи Коши.
  - 4.2. Описание лагранжевых многообразий падающей и рассеянной волн и исследование их эволюции при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом.
  - 4.3. Исследование структуры рассеянной волны с выделением сходящейся и расходящейся компонент и описание соответствующих геометрических объектов в фазовом пространстве.
  - 4.4. Оценка точности построенных асимптотик в норме  $L^2$ .

## Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

- 1. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для уравнения Шредингера с  $\delta$ -потенциалом на гиперповерхности  $M \subset \mathbb{R}^n$  при начальных данных в виде быстро осциллирующего волнового пакета в виде суммы падающей, отраженной и прошедшей волн в областях без каустик в форме ВКБ-разложения (теорема 2.5). Глобальная асимптотика, справедливая как в областях без каустик, так и в окрестностях каустик, в виде суммы канонических операторов Маслова, задающих каждую из трех волн, с модификацией метода канонического оператора, учитывающей условия сшивки, задаваемые  $\delta$ -потенциалом (теорема 2.11). Оценки точности аппроксимации и невязки для обеих асимптотик. Расщепление

лагранжева многообразия падающей волны при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом, при котором лагранжево многообразие прошедшей волны совпадает с многообразием падающей, а лагранжево многообразие отраженной волны является образом падающего при преобразовании, меняющем знак нормальной компоненты импульса и сохраняющем касательную в точках поверхности-носителя сингулярности. Явный вид аналогов классических коэффициентов прохождения и отражения через нормальную компоненту импульса падающей волны и параметры  $\delta$ -потенциала, удовлетворяющих закону сохранения  $|R|^2 + |T|^2 = 1$ .

2. Квазиклассическая асимптотика решения той же задачи при начальных данных в виде гауссова пучка, локализованного в окрестности точки, в виде суммы падающего, отраженного и прошедшего пучков с квадратичными фазовыми функциями на основе модификации метода комплексного роста Маслова, учитывающей условия сшивки, задаваемые  $\delta$ -потенциалом (теорема 3.1). Оценки точности аппроксимации и невязки. Изотропные кривые падающего и отраженного пучков и комплексные ростки над ними, причем изотропная кривая отраженного пучка является зеркальным отражением падающей относительно поверхности-носителя сингулярности со сменой знака нормальной компоненты импульса при сохранении касательной, а изотропная кривая и росток прошедшего пучка совпадают с падающими. Сдвиг комплексного роста падающего пучка при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом, определяемый второй квадратичной формой поверхности-носителя сингулярности и параметрами системы. Явный вид аналогов классических коэффициентов прохождения и отражения через нормальную компоненту импульса падающего пучка и параметры  $\delta$ -потенциала.
3. Квазиклассическая асимптотика решения при начальных данных в виде гауссова пучка, локализованного в окрестности  $k$ -мерной поверхности ( $k < n$ ), в виде суммы падающего, отраженного и прошедшего пучков с квадратичными фазовыми функциями на основе модификации метода комплексного роста Маслова, учитывающей условия сшивки, задаваемые  $\delta$ -потенциалом (теорема 4.1). Оценки точности аппроксимации и невязки. Изотропные многообразия падающего и отраженного пучков и комплексные ростки над ними, причем изотропное многообразие отраженного пучка является зеркальным отражением падающего относительно поверхности-носителя сингулярности со сменой знака нормальной компоненты импульса при сохранении касательной. Сдвиг роста падающего пучка при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом вдоль каждой траектории, определяемый геометрией поверхности-носителя сингулярности в точке пересечения и параметрами системы. Явный вид аналогов классических коэффициентов прохождения и отражения через нормальную компоненту импульса падающего пучка и параметры  $\delta$ -потенциала.
4. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для уравнения Шредингера с точечным  $\delta$ -потенциалом в  $\mathbb{R}^3$  при начальных данных, локализованных в окрестности шара

$B$  достаточно малого радиуса, в виде суммы падающей и рассеянной волн (теорема 5.1). Оценки точности аппроксимации и невязки. Необходимое условие взаимодействия волнового пакета с точечным  $\delta$ -потенциалом. Отсутствие сходящейся компоненты рассеянной волны для рассматриваемого класса начальных данных и структура рассеянной волны как чисто расходящейся сферической волны, определяемой краевыми условиями в точке  $x_0$ . Лагранжевы многообразия падающей и рассеянной волн, причем лагранжево многообразие рассеянной волны образовано лучами, исходящими из точки рассеяния  $x_0$ , при падающей волне с единичным импульсом  $|p| = 1$  и радиальным направлением  $p \parallel (x_0 - x')$ ,  $x' \in B$ .

Строгие формулировки результатов и их доказательства приведены в соответствующих главах диссертации.

## Научная новизна

Все результаты диссертации являются оригинальными и получены автором самостоятельно.

Существующие квазиклассические методы построены для уравнений с гладкими коэффициентами, и сингулярный характер  $\delta$ -потенциала, приводящий к разрыву фазовой траектории на носителе сингулярности, делает стандартные методы непосредственно неприменимыми. В диссертации разработаны модификации метода канонического оператора и метода комплексного роста Маслова, учитывающие условия сшивки на носителе сингулярности.

Для задачи с  $\delta$ -потенциалом на гиперповерхности описано расщепление лагранжева многообразия на три компоненты и получены явные выражения для квазиклассических аналогов коэффициентов отражения и прохождения, удовлетворяющих закону сохранения  $|R|^2 + |T|^2 = 1$ . Для начальных данных с комплексной фазой, локализованных в окрестности точки, описана перестройка изотропной кривой и комплексного роста над ней при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом. В случае локализации вблизи подмногообразия коразмерности  $k$  возникают изотропные многообразия, над которыми строятся комплексные векторные расслоения с лагранжевыми слоями.

Для точечного дельта-потенциала в  $\mathbb{R}^3$  описана геометрия рассеянной волны — лагранжево многообразие задается семейством радиальных лучей из точки рассеяния. При этом сходящаяся компонента рассеянной волны тождественно равна нулю. Геометрически это объясняется тем, что все лучи, исходящие из носителя начального возмущения, расположенного в шаре на положительном расстоянии от  $x_0$ , приходят в точку рассеяния лишь в одном направлении, порождая чисто расходящуюся сферическую волну.

## Методология и методы исследования

В диссертационной работе применяются методы квазиклассического анализа, в том числе разработанные В.П. Масловым, а также методы теории дифференциальных уравнений в част-

ных производных.

Операторы с  $\delta$ -потенциалами рассматриваются в рамках теории самосопряженных расширений симметрических операторов.

Для построения асимптотик с вещественной фазой применяются теория лагранжевых многообразий и канонический оператор Маслова. В случае комплексной фазы используется метод комплексного роста, основанный на конструкции комплексных векторных расслоений над изотропными многообразиями.

## Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Разработанные модификации метода канонического оператора и метода комплексного роста Маслова могут быть использованы для дальнейшего изучения квазиклассических асимптотик уравнений с сингулярными коэффициентами, в том числе для других типов носителей сингулярности и более общих классов начальных данных. Важно отметить, что все рассмотренные задачи при различных особенностях и начальных данных допускают единое описание в терминах лагранжевых и изотропных многообразий, комплексных ростков и векторных расслоений над ними.

Построенные асимптотики и полученные квазиклассические аналоги коэффициентов отражения и прохождения, выраженные через геометрические характеристики фазового пространства, могут применяться при моделировании распространения волновых пакетов в средах с сильно локализованными неоднородностями. В частности, асимптотические формулы позволяют описывать рассеяние электронов на точечных дефектах кристаллической решетки и эволюцию узких пучков в средах с примесями.

Построенная асимптотика для точечного  $\delta$ -потенциала в  $\mathbb{R}^3$  может служить инструментом для изучения задач рассеяния в трехмерном пространстве, где точечное взаимодействие моделирует локализованный дефект или примесный атом.

## Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

## Апробация работы

Результаты диссертации опубликованы в четырех статьях в журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней МГУ, а также прошли апробацию на следующих международных и российских конференциях и школах:

- Акустический семинар им. Д.П. Коузова, Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук, Санкт-Петербург, Россия, 28 апреля 2026 с докладом “Квазиклассические асимптотики для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- Асимптотические, геометрические и качественные методы в приложении к механике и математической физике, Международный математический центр ”Сириус”, Россия, 13-17 апреля 2026 с докладом ”Геометрические асимптотики для уравнения Шредингера с дельта потенциалом, локализованном на поверхности коразмерности 1”
- 68-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 30 марта–4 апреля 2026 с докладом “Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для трехмерного уравнения Шредингера с точечным потенциалом”
- Days on Diffraction 2025, Санкт-Петербург, Россия, 16-20 июня 2025 с докладом “Isotropic surfaces and complex vector bundles corresponding to the Schrödinger equation with a delta potential”
- 67-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 31 марта–5 апреля 2025 с докладом “Асимптотические решения для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- School and Workshop “Mathematical Challenges in Quantum Mechanics”, GSSI, L’Aquila, Italy, 9-14 февраля 2025 с докладом “Geometric Asymptotics for the Schrödinger Equation with a Delta Potential Localized on the Surface of Codimension 1”
- Integrable Systems and Quantum Theory 2024, СПбГУ, Россия, 23-28 сентября 2024 с докладом “Semiclassical asymptotic solutions and isotropic manifolds corresponding to the Schrödinger equation with a delta potential”
- Всероссийская конференция “Асимптотические методы в математической физике”, Москва, Россия, 17-19 июня 2024 с докладом “Квазиклассические асимптотики для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- Days on Diffraction 2024, Санкт-Петербург, Россия, 10-14 июня 2024 с докладом “Isotropic surfaces and complex vector bundles corresponding to the Schrödinger equation with a delta potential”
- XXXI Международная конференция студентов и аспирантов “Ломоносов 2024”, Россия, 12-26 апреля 2024 с докладом “Комплексный росток Маслова и квазиклассические асимптотики для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”

- 66-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 1-6 апреля 2024 с докладом “Лагранжевы многообразия и комплексные векторные расслоения, отвечающие задаче Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- Школа-конференция “Современные геометрические методы и их приложения – 2023”, Москва, Россия, 29 октября - 4 ноября 2023 с докладом “Квазиклассические сжатые состояния в задаче Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- 4th International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics (ISND 2023), Ярославль, Россия, 25-29 сентября 2023 с докладом “Semiclassical asymptotic solutions of the Schrödinger Equation with a delta-potential and rapidly oscillating initial conditions”
- Days on Diffraction 2023, Санкт-Петербург, Россия, 5-9 июня 2023 с докладом “Maslov complex germ in the Cauchy problem for the Schrödinger equation with delta potential”
- XXX Международная научная конференция студентов и аспирантов “Ломоносов-2023”, Москва, Россия, 10-21 апреля 2023 с докладом “Асимптотические решения задачи Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом и быстро осциллирующими начальными условиями”
- 65-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 3 апреля - 3 мая 2023 с докладом “Комплексный росток Маслова в задаче Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- Dynamical Systems of Classical and Celestial Mechanics, Sirius Mathematics Center, Сочи, Россия, 19-23 сентября 2022 с докладом “Asymptotics for Gaussian beams of the Schrödinger equation with a delta potential”
- XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2022”, Москва, Россия, 11-22 апреля 2022 с докладом “Квазиклассическое рассеяние гауссовых пучков на дельта-потенциалах”
- 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 23 ноября - 3 декабря 2021 с докладом “Квазиклассические асимптотики с комплексными фазами для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом, локализованным на поверхности коразмерности 1”
- Spectral Theory and Mathematical Physics, Euler International Mathematical Institute, Санкт-Петербург, Россия, 20-30 июня 2021 с докладом “Gaussian beam solutions to the Cauchy problem for the Schrödinger equation with a delta potential”

- Days on Diffraction 2021, Санкт-Петербург, Россия, 31 мая-4 июня 2021 с докладом “Semi-classical asymptotics of the solution to the problem of scattering of Gaussian beams on a delta-potential”
- XXVIII Международная научная конференция студентов и аспирантов “Ломоносов 2021”, Москва, Россия, 12-23 апреля 2021 с докладом “Квазиклассически сосредоточенные состояния для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 23-29 ноября 2020 с докладом “Квазиклассическое рассеяние узких гауссовых пучков на дельта-потенциалах”

## Публикации автора по теме работы

Основные результаты по теме диссертации представлены в четырех статьях в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

## Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Текст работы изложен на 111 страницах. Список литературы содержит 14 наименований.

## Краткое содержание работы

Первая глава носит вводный характер и посвящена краткому изложению геометрического аппарата квазиклассического анализа, а также необходимых сведений об операторах с  $\delta$ -потенциалами. В ней закрепляются основные обозначения и формулируются ключевые результаты, на которые опирается дальнейшее изложение. Глава делится на две части.

Во второй главе рассматривается задача Коши для уравнения Шредингера с  $\delta$ -потенциалом, локализованным на поверхности коразмерности 1, и начальными данными в виде волновой функции с вещественной фазой.

В третьей главе исследуется квазиклассическая асимптотика решения уравнения Шредингера с  $\delta$ -потенциалом при начальных данных в виде гауссова пучка, локализованного в окрестности точки. Начальный гауссов пучок задается с помощью комплексной фазы и постоянной амплитуды, при этом мнимая часть фазы всюду положительна, за исключением одной точки.

В четвертой главе исследуются квазиклассические асимптотики для гауссовых пучков, локализованных на поверхностях положительной коразмерности, с учетом произвольной начальной амплитуды. В отличие от предыдущей главы, в этом случае мнимая часть фазовой функции

обращается в ноль на некоторой поверхности положительной коразмерности, что приводит к более сложной геометрической конфигурации.

В пятой главе рассматривается задача рассеяния в трехмерном пространстве на точечном потенциале —  $\delta$ -потенциале без регулярной части, локализованном в точке. Показано, что вид решения связан с выбором носителя начального возмущения.

## Благодарности

Автор выражает особую благодарность своему научному руководителю член-корр. РАН, доктору физ.-мат. наук, профессору Андрею Игоревичу Шафаревичу за постановку задач, ценные советы и полезные обсуждения.

# Глава 1

## Основные определения

В работе изучаются уравнения вида

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + V(x)\psi + q(y)\delta_M\psi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.0.1)$$

где  $V(x)$  – гладкая функция на  $\mathbb{R}^n$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  – гладкая поверхность,  $\delta_M$  – дельта-функция, локализованная на поверхности  $M$ , а  $q(y)$  – гладкая функция, заданная в локальных координатах  $y$  на поверхности  $M$ . Все величины предполагаются безразмерными и приведены к единому масштабу. Параметр  $h > 0$  понимается как малый квазиклассический параметр, при котором строятся асимптотические решения уравнений. Далее приводится ряд определений и терминов, связанных с теорией квазиклассических приближений и операторов с  $\delta$ -потенциалами.

### 1.1 Стандартный метод ВКБ

Метод ВКБ (Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна) появился в 1926 году как результат независимых исследований трех ученых. Почти одновременно Грегор Вентцель, Хендрик Крамерс и Леон Бриллюэн предложили аналогичные подходы к построению квазиклассических приближений в квантовой механике. Первоначально метод ВКБ был разработан для решения стационарных задач. Дальнейшее развитие позволило распространить этот подход на более широкий класс задач. Фундаментальное развитие метод ВКБ получил в работах В.П. Маслова в 1960-х годах. В рамках разработанной им теории были введены ключевые понятия: канонический оператор, связавший квазиклассические приближения с геометрией лагранжевых многообразий в фазовом пространстве; теория индекса Маслова для учета топологических особенностей траекторий; комплексный метод ВКБ, позволивший аналитически продолжить решения в комплексную плоскость и исследовать туннельные эффекты. Эти результаты позволили распространить метод для широкого класса дифференциальных уравнений в частных производных, включая нестационарные уравнения Шредингера, нелинейные волновые уравнения и задачи с переменными коэффициентами, а также разработать новые методы исследования спектральных свойств

операторов.

Всюду далее все методы и формулы, включая ВКБ-приближение и его обобщения, будут рассматриваться в контексте нестационарного уравнения Шредингера.

**Определение 1.1.** *Квазиклассический параметр  $\hbar$*  – малый безразмерный параметр  $\hbar > 0$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , возникающий при старших производных при переходе к безразмерным уравнениям и представляющий собой отношение характерных физических масштабов задачи.

**Определение 1.2.** *Метод ВКБ (Вентцеля - Крамерса - Бриллюэна)* – асимптотический метод построения приближенных решений линейных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений, содержащих квазиклассический параметр  $\hbar$  при старших производных. Решение уравнения ищется в виде быстро осциллирующей экспоненты и формального ряда по степеням  $\hbar$ :

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}S(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x, t) \hbar^k, \quad (1.1.1)$$

где фаза  $S(x, t) \in C^\infty$  – классическое действие, определяющее классическую геометрию системы,  $\varphi_k(x, t) \in C^\infty$  – амплитуды.

Квазиклассический параметр  $\hbar$  определяет масштаб и частоту осцилляций ВКБ-решения. При его стремлении к нулю ( $\hbar \rightarrow 0$ ) решение становится похожим на плоскую волну. При этом его фаза начинает меняться очень быстро ( $\sim 1/\hbar$ ), в то время как амплитуда меняется незначительно на масштабах порядка единицы.

Подстановка такого ряда в исходное уравнение и приравнивание членов при одинаковых степенях  $\hbar$  позволяет свести задачу к решению уравнений классической механики. В старшем порядке, при  $\hbar^0$ , возникает уравнение Гамильтона-Якоби для фазы  $S(x, t)$ , определяющее классическую динамику системы:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x} \right\rangle + V(x) = 0, \quad (1.1.2)$$

Приравнивание коэффициентов при следующей степени  $\hbar^1$  приводит к уравнению переноса для старшей части амплитуды  $\varphi_0(x, t)$ :

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S(x, t) \varphi_0 = 0. \quad (1.1.3)$$

Поправки более высоких порядков  $\varphi_k(x, t)$ ,  $k \geq 1$  определяются из аналогичных уравнений переноса, содержащих дополнительные слагаемые, зависящие от предыдущих амплитуд, и вычисляются рекуррентно.

Применимость стандартного ВКБ-подхода существенно зависит от разрешимости уравнения Гамильтона-Якоби и гладкости функции  $S(x, t)$ . Фаза  $S(x, t)$  определяется вдоль характеристик гамильтоновой системы:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (1.1.4)$$

Для нестационарного уравнения Шредингера гамильтониан  $H(p, x)$  имеет вид:

$$H(p, x) = \frac{|p|^2}{2} + V(x). \quad (1.1.5)$$

Метод ВКБ применим только в областях, где решение уравнения Гамильтона–Якоби остается гладким и не происходит пересечения характеристик. В точках, когда характеристики пересекаются и фаза  $S(x, t)$  перестает быть однозначной, а также в случаях, когда фаза является комплексной, стандартное ВКБ-разложение оказывается непригодным. В этих случаях для построения асимптотических решений требуется использование более сложных методов, основанных на геометрии изотропных и лагранжевых многообразий в фазовом пространстве.

## 1.2 Изотропные и лагранжевы многообразия

Понятие лагранжева многообразия является одним из центральных в симплектической геометрии и математической физике. Современная формулировка была дана в трудах В. П. Маслова в контексте асимптотического анализа линейных дифференциальных уравнений и построения метода канонического оператора. В монографии [10] лагранжево многообразие определяется как подмногообразие симплектического многообразия, на котором симплектическая форма обращается в нуль, причем размерность такого подмногообразия равна половине размерности объемлющего симплектического многообразия. Кроме того, Масловым был введен соответствующий топологический инвариант — индекс Маслова, характеризующий фазовые сдвиги при прохождении решения через каустики.

Введем основные понятия. Для этого рассмотрим конфигурационное пространство  $\mathbb{R}_x^n$  с координатами  $x = (x^1, \dots, x^n)$ .

### 1.2.1 Понятия изотропных и лагранжевых многообразий

**Определение 1.3.** *Фазовым пространством  $\mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$  будем называть кокасательное расслоение  $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$ , точки которого представляют собой пары  $(x, p)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$  — обобщенные координаты,  $p \in T_x^*\mathbb{R}^n$  — сопряженные импульсы.*

Наделим фазовое пространство  $\mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$  симплектической структурой, задав каноническую симплектическую форму

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dx^i. \quad (1.2.1)$$

**Определение 1.4.** Пара  $(\mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}, \omega)$  образует *симплектическое многообразие*, а переменные  $(x, p)$  называются *каноническими координатами*.

**Определение 1.5.** *Изотропным многообразием  $\Lambda^k$  называется  $k$ -мерное,  $k \leq n$ , подмногообразие в фазовом пространстве, на котором ограничение канонической симплектической формы тождественно равно нулю:*

$$\omega|_{\Lambda^k} = 0. \quad (1.2.2)$$

Если размерность  $k = n$  равна  $n$ , то подмногообразие  $\Lambda^n$  называется *лагранжевым*.

**Замечание 1.1.** *Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  – локальные координаты на  $\Lambda^k$ ,  $k \leq n$ . Условие  $\omega|_{\Lambda^k} = 0$  означает, что симплектическая форма обращается в нуль на любой паре касательных векторов к  $\Lambda^k$ . Подставляя*

$$dp_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j, \quad dq_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j, \quad (1.2.3)$$

*получим, что должно выполняться равенство*

$$\omega|_{\Lambda^k} = \sum_{j,l=1}^k \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_l} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_l} \right) \right) d\alpha_j \wedge \alpha_l = 0. \quad (1.2.4)$$

*Это выполняется тогда и только тогда, когда лагранжевы скобки обращаются в нуль:*

$$[p, q]_{j,l} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_l} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_l} \right) = 0, \quad \forall j, l = 1, \dots, n. \quad (1.2.5)$$

## 1.2.2 Производящая функция и каноническое преобразование

Введем дифференциальные формы:

$$\omega^1 = \langle p, dx \rangle \equiv \sum_{j=1}^n p_j dx_j, \quad \omega^2 = dp \wedge dx \equiv \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dx_j. \quad (1.2.6)$$

Заметим, что форма  $\omega^2$  замкнута:

$$\omega^2 = d\omega^1, \quad d\omega^2 = 0 \quad (1.2.7)$$

По построению форма  $\omega^2$  совпадает с канонической симплектической формой  $\omega$ , введенной выше. Тогда многообразие  $\Lambda^n$  является лагранжевым тогда и только тогда, когда  $\omega^1|_{\Lambda^n}$  замкнута.

**Определение 1.6.** Диффеоморфизм  $g : U \rightarrow V$ , где  $U, V \subset \mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$ , называется *каноническим преобразованием*, если он сохраняет симплектическую форму  $\omega^2$ :

$$g^* \omega^2 = \omega^2. \quad (1.2.8)$$

Обозначим  $(x', p') = g(x, p)$ , тогда

$$dp' \wedge dx' = dp \wedge dx. \quad (1.2.9)$$

Рассмотрим лагранжево многообразие  $\Lambda^n \subset \mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$ , диффеоморфно проектирующееся на  $\mathbb{R}_x^n$ .

**Теорема 1.2** (Теорема 4.20, [10]). Пусть многообразие  $\Lambda^n$  задается уравнением

$$p = p(x), \quad x \in U,$$

где  $U$  — односвязная область в  $\mathbb{R}_x^n$ . Тогда  $\Lambda^n$  является лагранжевым тогда и только тогда, когда существует функция  $S(x) \in C^\infty(U)$  такая, что

$$p = \frac{\partial S(x)}{\partial x}, \quad x \in U.$$

Теорема описывает лагранжево многообразие в невырожденной карте, когда  $\Lambda^n$  диффеоморфно проектируется на  $\mathbb{R}_x^n$ . В общем случае такая проекция может вырождаться, тогда и часть координат  $x_{(\alpha)}$  можно заменить соответствующими импульсами  $p_{(\alpha)}$ . Следующая теорема дает критерий лагранжевости в произвольной карте.

**Теорема 1.3** (Теорема 4.21, [10]). Пусть многообразие  $\Lambda^n$  задается уравнениями

$$x_{(\alpha)} = x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}), \quad p_{(\beta)} = p_{(\beta)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}), \quad (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) \in G,$$

где  $G$  — односвязная область в  $\mathbb{R}_{p_{(\alpha)}}^k \times \mathbb{R}_{x_{(\beta)}}^{n-k}$ . Для того чтобы  $\Lambda^n$  было лагранжевым, необходимо и достаточно существование такой функции  $S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) \in C^\infty(G)$ , что

$$x_{(\alpha)} = -\frac{\partial S}{\partial p_{(\alpha)}}, \quad p_{(\beta)} = \frac{\partial S}{\partial x_{(\beta)}}. \quad (1.2.10)$$

Таким образом, в каждой точке лагранжева многообразия  $\Lambda^n$  можно выбрать такие координаты  $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ , при котором многообразие локально задается функцией  $S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ .

**Определение 1.7.** Функция  $S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$  называется *производящей функцией* лагранжева многообразия  $\Lambda^n$  в соответствующей карте.

**Определение 1.8.** Канонической картой  $U_{(\alpha)} \subset \Lambda^n$  называется открытое подмножество  $\Lambda^n$ , на котором проекция

$$\pi_{(\alpha)}: \Lambda^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, p) \mapsto (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$$

является диффеоморфизмом. В том случае, если  $\Lambda^n$  диффеоморфно проектируется на  $\mathbb{R}_x^n$ , то есть  $(\alpha) = \emptyset$ , карта называется *невырожденной*. Точки, в которых невырожденная карта перестает быть диффеоморфизмом, образуют *каусты*.

Лагранжево многообразие  $\Lambda^n$  целиком покрывается каноническими картами. В каждой карте может быть построено асимптотическое решение соответствующего уравнения, имеющее вид быстроосциллирующей функции:

При переходе из одной карты в другую фаза асимптотического решения получает дополнительный фазовый сдвиг. Учет этого сдвига при обходе многообразия и согласовании решения в разных картах приводит к понятию индекса Маслова.

**Определение 1.9.** *Индексом Маслова* называется топологический инвариант  $\mu \in \mathbb{Z}$ , сопоставляемый замкнутому пути на  $\Lambda^n$  и равный числу пересечений каустики, с учетом кратности пересечений и знаками. При прохождении через каустику асимптотическое решение приобретает фазовый множитель  $e^{-i\pi\mu/2}$ .

**Определение 1.10.** *Предканоническим оператором*  $\hat{\mathcal{K}}_{U_{(\alpha)}}$  в канонической карте  $U_{(\alpha)} \subset \Lambda^n$  называется оператор, действующий на функцию  $a \in C^\infty(U_{(\alpha)})$  по формуле

$$\left(\hat{\mathcal{K}}_{U_{(\alpha)}} a\right)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^{|\alpha|/2}} \int e^{\frac{i}{h}(S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) + \langle p_{(\alpha)}, x_{(\alpha)} \rangle)} a(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) |\det B_{(\alpha)}|^{1/2} dp_{(\alpha)},$$

где  $S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$  — производящая функция многообразия в данной карте,  $|\alpha|$  — число координат, замененных импульсами, а  $B_{(\alpha)}$  — матрица Якоби соответствующего преобразования.

**Определение 1.11.** *Каноническим оператором Маслова*  $\mathcal{K}_\Lambda$  называется оператор, сопоставляющий функции  $a \in C^\infty(\Lambda^n)$  асимптотическое решение в конфигурационном пространстве:

$$\mathcal{K}_\Lambda a = \sum_{(\alpha)} e^{-\frac{i\pi}{2}\mu_{(\alpha)}} \cdot \hat{\mathcal{K}}_{U_{(\alpha)}}(\varphi_{(\alpha)} a),$$

где суммирование ведется по всем каноническим картам  $\{U_{(\alpha)}\}$ , покрывающим  $\Lambda^n$ ,  $\{\varphi_{(\alpha)}\}$  — подчиненное разбиение единицы, а  $\mu_{(\alpha)} \in \mathbb{Z}$  — индекс Маслова карты  $U_{(\alpha)}$ , учитывающий фазовые сдвиги при переходах между картами.

### 1.3 Оператор Шредингера с $\delta$ -потенциалом

Формальное определение оператора с  $\delta$ -потенциалами впервые было дано Ф.А. Березиным и Л.Д. Фаддеевым в работе [3] с использованием теории самосопряженных расширений симметрических операторов. В качестве носителя сингулярности рассмотрим компактное гладкое подмногообразие положительной коразмерности  $M \in \mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.12.** Под *оператором Шредингера с  $\delta$ -потенциалом*

$$H(x, p) = -\frac{h^2}{2}\Delta + V(x) + \frac{q(y)}{h}\delta_M \quad (1.3.1)$$

понимается самосопряженное расширение оператора Шредингера с гладким потенциалом

$$H_0(x, p) = -\frac{h^2}{2}\Delta + V(x), \quad (1.3.2)$$

ограниченного на функции, обращающиеся в ноль на поверхности  $M$ .

Область определения оператора с  $\delta$ -потенциалом состоит из функций, удовлетворяющих условиям сопряжения в точках носителя сингулярности  $M$ . Поскольку сингулярность потенциала влияет на поведение волновой функции в окрестности  $M$ , вид краевых условий зависит

от геометрической структуры носителя, в частности, от его размерности. В случае если поверхность  $M$  представляет собой гиперповерхность ( $\dim(M) = n - 1$ ) возникает условие на скачок нормальной производной, тогда как для многообразий большей коразмерности ( $\dim(M) \leq n - 2$ ) требуются специальные условия. Рассмотрим краевые условия в зависимости от коразмерности  $M$ .

### 1. Краевые условия на гиперповерхности

**Утверждение 1.3.1.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  — гладкая гиперповерхность с выбранными локальными координатами  $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ , заданная параметрическими уравнениями:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : x = r(y), y \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}\}, \quad (1.3.3)$$

где  $r : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое вложение. Тогда область определения оператора с  $\delta$ -потенциалом составляют функции  $\psi \in D(H) = L^2(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяющие краевым условиям на  $M$ :

$$\begin{cases} \psi|_{M^+} = \psi|_{M^-}, \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{M^+} - \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{M^-} = \frac{q(y)}{h} \psi|_M \end{cases} \quad (1.3.4)$$

где  $t = t(y)$  — ориентирующая единичная нормаль к  $M$ ; индексы  $M^\pm$  обозначают предельные значения с разных сторон поверхности:

$$\psi|_{M^\pm} := \lim \psi(r(y) \pm \epsilon t(y)), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{M^\pm} := \lim \frac{\partial \psi}{\partial t}(r(y) \pm \epsilon t(y)), \quad \epsilon > 0.$$

Первое условие представляет собой условие непрерывности функции при прохождении через поверхность  $M$ . Вероятность нахождения частицы остается одинаковой по обе стороны от поверхности. Второе условие описывает взаимодействие частицы с  $\delta$ -потенциалом: скачок нормальной производной оказывается пропорциональным силе  $\delta$ -потенциала  $q(y)$ .

Такие условия на область определения оператора  $H$  возникают из требования самосопряженности. Изначально оператор определяется на функциях, обращающихся в ноль на поверхности-носителе сингулярности  $M$ . Для расширения оператора до самосопряженного необходимо корректно доопределить его область определения до функций с особым поведением на  $M$ .

Доказательство того, что условия (1.3.4) являются необходимыми и достаточными, приведено в [3].

### 2. Точечный потенциал. Условия Брюнинга–Гейлера

Рассмотрим оператор Шредингера с точечным потенциалом

$$H = -\frac{h^2}{2} \Delta + \alpha \delta_{x_0}, \quad (1.3.5)$$

где  $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$  — дельта-функция Дирака. Вблизи точки  $x_0$  для функций  $f \in D(H)$  справедливо следующее разложение.

**Утверждение 1.3.2** ([5], р. 9). *Область определения оператора (1.3.5) с точечным потенциалом составляют функции  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , представимые в окрестности точки  $x_0$  в виде*

$$f(x, t) = a(f)F_0(x, x_0) + b(f) + R(x, x_0), \quad (1.3.6)$$

где  $F_0$  — сингулярная часть функции Грина оператора  $-\Delta$  в  $\mathbb{R}^k$ :

$$F_0(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{2}r(x, x_0), & k = 1, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln r(x, x_0), & k = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(x, x_0)}, & k = 3, \end{cases} \quad (1.3.7)$$

$a(f), b(f) \in \mathbb{C}$ , и  $r(x, x_0) = |x - x_0|$  — расстояние между точками  $x$  и  $x_0$  на  $M$ . При стремлении  $x \rightarrow x_0$  остаточный член  $R(x, x_0)$  ведет себя следующим образом:

$$|R(x, x_0)| = \begin{cases} o(|x - x_0|), & \dim M = 1, \\ o(1), & \dim M = 2, 3. \end{cases} \quad (1.3.8)$$

**Утверждение 1.3.3** ([5], р. 11). *Коэффициенты  $a(f)$  и  $b(f)$  связаны соотношением (краевыми условиями):*

$$a = \frac{2\alpha}{h^2} b. \quad (1.3.9)$$

## Глава 2

# Квазиклассические асимптотики с вещественной фазой

Рассматривается квазиклассическое рассеяние волнового пакета на сингулярном потенциале типа  $\delta$ -функции, сосредоточенном на поверхности коразмерности 1. Начальное состояние представляет собой быстроосциллирующий волновой пакет с компактным носителем и вещественной фазой. Эволюция системы описывается нестационарным уравнением Шредингера. Волновой пакет распространяется в пространстве и взаимодействует с локализованным потенциалом. При взаимодействии с поверхностью-носителем сингулярности волновой пакет разбивается на две части, одна из которых проходит дальше, а другая отражается.

### 2.1 Постановка задачи

Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  — гладкая регулярная ориентированная  $(n - 1)$ -мерная поверхность, заданная параметризацией  $x = r(y)$ , где  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$  — локальные координаты на  $M$ . Обозначим через  $m(y)$  единичную нормаль к  $M$  в точке  $r(y)$ , направленную в сторону носителя начальных данных, через  $\delta_M$  — дельта-функцию, сосредоточенную на поверхности  $M$ .

Задача Коши для нестационарного уравнения Шредингера имеет вид:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{h} \delta_M \psi, \\ \psi(x, 0) = e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x). \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Здесь  $h > 0$  — малый квазиклассический параметр;  $V(x)$  — гладкая вещественнозначная функция на  $\mathbb{R}^n$ ;  $q(y)$  — гладкая вещественнозначная функция на  $M$ , задающая интенсивность  $\delta$ -потенциала;  $S_0(x)$  и  $\varphi^0(x)$  — гладкие вещественнозначные функции на  $\mathbb{R}^n$ . Носитель  $\text{supp } \varphi^0$  компактен и расположен на положительном расстоянии от  $M$ .

Оператор Шредингера с  $\delta$ -потенциалом

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2} \Delta + V(x) + \frac{q(y)}{h} \delta_M.$$

понимается как самосопряженное расширение оператора Шредингера с гладким потенциалом, ограниченного на функции, обращающиеся в нуль на  $M$  (см. § 1.3). Область определения такого расширения для гиперповерхности коразмерности 1 задается граничными условиями на  $M$  (1.3.4):

$$\begin{cases} \psi(r(y) - 0, t) = \psi(r(y) + 0, t), \\ h \left( \frac{\partial \psi}{\partial m}(r(y) - 0, t) - \frac{\partial \psi}{\partial m}(r(y) + 0, t) \right) = q(y)\psi(r(y), t), \end{cases} \quad (2.1.2)$$

где  $\psi(r(y) \pm 0, t)$  обозначают предельные значения функции  $\psi(x, t)$  с противоположных сторон от  $M$ . Положительная сторона  $(+0)$  соответствует направлению внешней нормали  $m(y)$  к  $M$  в точке  $r(y)$ , отрицательная  $(-0)$  — противоположному направлению  $-m(y)$ .

## 2.2 Асимптотика задачи с гладким потенциалом

Напомним конструкцию решения задачи Коши для уравнения Шредингера с гладким потенциалом ( $q(y) \equiv 0$ ). Обозначения сохраняются прежними. Задача Коши имеет вид:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + V(x)\psi, \\ \psi(x, 0) = e^{\frac{i}{\hbar} S_0(x)} \varphi^0(x). \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Приближенное решение задачи (2.2.1) ищется в виде асимптотического разложения по малому квазиклассическому параметру  $\hbar > 0$ .

Классический метод ВКБ применим в областях, где фазовая функция не имеет особенностей, и неприменим в окрестности фокальных точек, каустик и точек поворота. В этих случаях используется метод канонического оператора В.П. Маслова, основанный на теории лагранжевых многообразий в фазовом пространстве и позволяющий согласованно склеивать локальные ВКБ-представления в разных канонических картах с учетом индекса Маслова.

### 2.2.1 Построение классической ВКБ-асимптотики

Решение задачи (2.2.1) ищется в виде формального асимптотического ряда по малому квазиклассическому параметру  $\hbar \rightarrow 0$ :

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x, t) \hbar^k, \quad (2.2.2)$$

где фаза  $S(x, t)$  — гладкая вещественнозначная функция на  $\mathbb{R}^n$ , определяющая быстроосциллирующую часть волновой функции, а  $\varphi_k(x, t)$ ,  $k \geq 0$ , — гладкие амплитуды, представляющие собой гладкие функции, описывающие огибающую.

Подставляя (2.2.2) в исходное уравнение (2.2.1) и группируя коэффициенты при одинаковых степенях  $\hbar$ , получаем, что решение задачи (2.2.1) сводится к решению уравнений Гамильтона–Якоби в старшем порядке  $\hbar^0$  и переноса при  $\hbar^k$ ,  $k > 0$ . Начальные условия для этих уравнений

определяются из сравнения анзаца (2.2.2) при  $t = 0$  с начальным условием задачи Коши (2.2.1):

$$S(x, 0) = S_0(x), \quad \varphi_0(x, 0) = \varphi^0(x), \quad \varphi_k(x, 0) = 0, \quad k \geq 1. \quad (2.2.3)$$

Фаза  $S(x, t)$  удовлетворяет задаче Коши для уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x} \rangle + V(x) = 0, \\ S(x, 0) = S_0(x), \end{cases} \quad (2.2.4)$$

с гамильтонианом

$$H(p, q) = \frac{1}{2} |p|^2 + V(q), \quad p = \nabla S. \quad (2.2.5)$$

Характеристики этого уравнения определяются как траектории гамильтоновой системы в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,p)}^{2n}$ :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}, \quad (2.2.6)$$

с начальными условиями:

$$q(0) = \alpha, \quad p(0) = \nabla S_0(\alpha), \quad \alpha \in \text{supp } \varphi^0. \quad (2.2.7)$$

Для каждой начальной точки  $\alpha$  система (2.2.6) определяет траекторию  $\{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$  в расширенном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,t,p,pt)}^{2n+2}$ . Якобиан отображения  $\alpha \rightarrow Q(\alpha, t)$  обозначим через

$$J(\alpha, t) = \det \left( \frac{\partial Q(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right). \quad (2.2.8)$$

Вдоль этой траектории фаза  $S(Q(\alpha, t), t)$  вычисляется по формуле действия:

$$S(\alpha, t) = S_0(\alpha) + \int_0^t \left( \langle P(\alpha, \tau), \dot{Q}(\alpha, \tau) \rangle - H(Q(\alpha, \tau), P(\alpha, \tau)) \right) d\tau. \quad (2.2.9)$$

Если  $J(\alpha, t) \neq 0$ , то отображение  $Q(\alpha, t)$  локально обратимо, и фаза выражается как функция координат и времени:

$$S(x, t) = S(\alpha, t) \Big|_{\alpha=Q(x,t)}. \quad (2.2.10)$$

В точках, где  $J(\alpha, t) = 0$ , отображение вырождается, и фаза  $S(x, t)$  перестает быть гладкой и однозначной функцией от  $x$ . Множества таких точек в конфигурационном пространстве называются каустиками семейства лучей  $\{Q(\alpha, t) : \alpha \in \text{supp } \varphi^0\}$ , а точки луча  $q = Q(t, \alpha^0)$ , в которых  $J(\alpha^0, t) = 0$ , — фокальными точками.

Собирая коэффициенты при следующих степенях  $h^k$  получаем уравнения для амплитуд  $\varphi_{k-1}(x, t)$ ,  $k \geq 1$ .

В порядке  $h^1$  возникает уравнения переноса вдоль характеристик гамильтоновой системы (2.2.6) на старшую часть амплитуды  $\varphi_0(x, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \rangle + \frac{1}{2} \Delta S \varphi_0 = 0, \\ \varphi_0(x, 0) = \varphi^0(x). \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Заметим, что для якобиана  $J(\alpha, t)$  справедлива формула Лиувилля:

$$\frac{d}{dt}J(\alpha, t) = \frac{d}{dt} \det \left( \frac{\partial Q(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right) = \Delta S(Q(\alpha, t), t) J(\alpha, t). \quad (2.2.12)$$

Решение уравнения переноса для старшей части амплитуды имеет вид

$$\varphi_0(x, t) = \varphi_0(\alpha) |J(\alpha, t)|^{-1/2} \Big|_{\alpha=\alpha(x, t)}. \quad (2.2.13)$$

В следующих порядках  $h^{k+1}$  получаются уравнения для  $\varphi_k(x, t)$ ,  $k \geq 1$ . Поправки  $\varphi_k(x, t)$ ,  $k \geq 1$ , удовлетворяют неоднородным уравнениям переноса:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S \varphi_k = \frac{i}{2} \Delta \varphi_{k-1}, \\ \varphi_k(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (2.2.14)$$

правые части которых выражаются рекуррентно через уже найденные поправки  $\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}$ .

Решения этих уравнений имеют вид:

$$\varphi_k(x, t) = \frac{i}{2} |J(\alpha, t)|^{-1/2} \int_0^t |J(\alpha, \tau)|^{1/2} \Delta \varphi_{k-1}(Q(\alpha, \tau), \tau) d\tau \Big|_{\alpha=\alpha(x, t)}. \quad (2.2.15)$$

**Утверждение 2.2.1** (Теорема 12.3, [8]). Пусть  $J(\alpha, t) \neq 0$ . Тогда решение задачи Коши (2.2.1) имеет вид

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \sum_{k=0}^N h^k \varphi_k(x, t) + w, \quad \|w\|_{L_2} = O(h^{N+1}),$$

где

$$S(x, t) = \left[ S_0(\alpha) + \int_0^t \left( \frac{|p|^2}{2} - V(x) \right) \Big|_{\substack{x=x(\alpha, \tau) \\ p=p(\alpha, \tau)}} d\tau \right]_{\alpha=\alpha(x, t)},$$

$$\varphi_0(x, t) = \varphi^0(\alpha) |J(\alpha, t)|^{-1/2} \Big|_{\alpha=\alpha(x, t)},$$

а функции  $\varphi_k(x, t)$ ,  $k \geq 1$ , являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_k(x, t) + \frac{1}{2} \Delta S(x, t) \varphi_k(x, t) - \frac{i}{2} \Delta \varphi_{k-1}(x, t) = 0, \\ \varphi_k(x, 0) = 0. \end{cases}$$

## 2.2.2 Геометрическая интерпретация метода ВКБ

С геометрической точки зрения решение задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби (2.2.4) интерпретируется как построение лагранжева многообразия в фазовом пространстве.

Начальные данные индуцируют в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,p)}^{2n}$  лагранжево многообразие:

$$\Lambda_0^n = \{(q, p) \in \mathbb{R}_{(q,p)}^{2n} : q = \alpha, p = \nabla S_0(\alpha)\}. \quad (2.2.16)$$

Для проверки лагранжевости  $\Lambda_0^n$  достаточно показать, что ограничение стандартной симплектической формы  $\omega = dp \wedge dq$  на  $\Lambda_0^n$  тождественно равно нулю. Поскольку на  $\Lambda_0^n$  выполняются соотношения  $q = \alpha$ ,  $p_i = \partial S_0 / \partial \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , дифференцирование дает:

$$dq = d\alpha, \quad dp_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S_0}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} d\alpha_j,$$

откуда следует

$$\omega|_{\Lambda_0^n} = \nabla^2 S_0(q) dq \wedge dq = 0.$$

Рассмотрим действие фазового потока на  $\Lambda_0^n$ . Обозначим через  $g_t$  фазовый поток гамильтоновой системы (2.2.6) с гамильтонианом (2.2.5). Для каждого момента  $t$  сдвиг  $\Lambda_0^n$  вдоль потока  $g_t$  определяет многообразие  $\Lambda_t^n$ :

$$\Lambda_t^n = g_t(\Lambda_0^n), \quad \Lambda_t^n = \{(q, p) \in \mathbb{R}_{(q,p)}^{2n} : q = Q(\alpha, t), p = P(\alpha, t)\}. \quad (2.2.17)$$

Поскольку фазовый поток гамильтоновой системы сохраняет симплектическую форму, то

$$g_t^* \omega|_{\Lambda_t^n} = \omega|_{\Lambda_0^n} = 0,$$

откуда следует лагранжевость  $\Lambda_t^n$  при всех  $t \in [0, T]$ .

Объединение многообразий  $\Lambda_t^n$  по времени образует лагранжево многообразие  $\Lambda^{n+1}$  в расширенном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,t,p,p_t)}^{2n+2}$  с симплектической формой  $\tilde{\omega} = dp \wedge dq + dp_t \wedge dt$ :

$$\Lambda^{n+1} = \bigcup_{t \in [0, T]} \Lambda_t^n = \bigcup_{t \in [0, T]} g_t(\Lambda_0^n). \quad (2.2.18)$$

В параметрических координатах  $\Lambda^{n+1}$  задается следующим образом:

$$\Lambda^{n+1} = \{(q, p, t, p_t) \in \mathbb{R}_{(q,t,p,p_t)}^{2n+2} : q = Q(\alpha, t), p = P(\alpha, t), p_t = -H(Q(\alpha, t), P(\alpha, t))\}. \quad (2.2.19)$$

Предположим, что  $T > 0$  конечно и таково, что  $\Lambda^{n+1}$  является гладким многообразием. Его лагранжевость сохраняется, поскольку ограничение симплектической формы  $\tilde{\omega}$  на  $\Lambda^{n+1}$  равно нулю:

$$\tilde{\omega}|_{\Lambda^{n+1}} = (dp \wedge dq - dH \wedge dt)|_{\Lambda^{n+1}} = \omega|_{\Lambda^{n+1}} - (dH \wedge dt)|_{\Lambda^{n+1}} = \omega|_{\Lambda_0^n} = 0.$$

Предположим, что  $T > 0$  конечно и таково, что  $\Lambda^{n+1}$  является гладким многообразием. На  $\Lambda^{n+1}$  выполнено  $p_t = -H(q, p)$ , поэтому  $dp_t = -dH$ , и

$$\tilde{\omega}|_{\Lambda^{n+1}} = (dp \wedge dq - dH \wedge dt)|_{\Lambda^{n+1}}.$$

Дифференциал гамильтониана в силу уравнений Гамильтона (2.2.6) имеет вид  $dH = -\dot{p} dq + \dot{q} dp$ , откуда

$$dH \wedge dt = -\dot{p} dq \wedge dt + \dot{q} dp \wedge dt.$$

С другой стороны, на  $\Lambda^{n+1}$  движение происходит как вдоль траекторий, так и поперек них. Тогда форма  $dp \wedge dq$  раскладывается как

$$dp \wedge dq = \omega|_{\Lambda_t^n} + \dot{q} dp \wedge dt - \dot{p} dq \wedge dt.$$

Слагаемые с  $dt$  совпадают и сокращаются:

$$\tilde{\omega}|_{\Lambda^{n+1}} = (dp \wedge dq - dH \wedge dt)|_{\Lambda^{n+1}} = \omega|_{\Lambda_t^n} = g_t^* \omega|_{\Lambda_0^n}.$$

Поскольку  $\Lambda_0^n$  лагранжево, а фазовый поток сохраняет симплектическую форму,

$$\tilde{\omega}|_{\Lambda^{n+1}} = \omega|_{\Lambda_0^n} = 0,$$

откуда следует лагранжевость  $\Lambda^{n+1}$ .

Таким образом, решение уравнения Гамильтона–Якоби геометрически описывается лагранжевым многообразием  $\Lambda^{n+1}$ , причем фаза  $S(x, t)$  служит производящей функцией для каждого сечения  $\Lambda_t^n$  и задает на нем импульс  $p = \partial S / \partial x$ .

### 2.2.3 Канонический оператор

В окрестности фокальных точек, где якобиан  $J(\alpha, t)$  (2.2.8) обращается в нуль, описанное выше ВКБ-представление неприменимо. Геометрически проекции характеристических траекторий на конфигурационное пространство  $\mathbb{R}_q^n$  пересекаются и проекция  $\Lambda^{n+1}$  перестает быть локально обратимой. В этом случае используется метод канонического оператора Маслова.

Лагранжево многообразие  $\Lambda^{n+1}$  покрывается конечным или локально конечным числом канонических карт, в каждой из которых вводятся свои локальные координаты и решение записывается в подходящей форме. В регулярных картах, где  $J(\alpha, t) \neq 0$ , решение имеет классическую ВКБ-форму:

$$\psi(x, t) \sim e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t)} A(x, t). \quad (2.2.20)$$

В сингулярных картах, где  $J(\alpha, t) = 0$ , часть пространственных координат  $q_I$ ,  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , заменяется сопряженными импульсами  $p_I$ , и решение выражается через частичное преобразование Фурье по переменным  $p_I$ :

$$\psi(q, t) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^{|I|/2}} \int e^{\frac{i}{\hbar} S_I(p_I, q_{\bar{I}}, t)} A_I(p_I, q_{\bar{I}}, t) dp_I. \quad (2.2.21)$$

Здесь  $S_I$  — производящая функция многообразия  $\Lambda^{n+1}$  в карте с локальными координатами  $(p_I, q_{\bar{I}}, t)$ ,  $A_I(p_I, q_{\bar{I}}, t)$  — амплитуда в этой карте. Через  $I$  и  $\bar{I}$  обозначены наборы дополняющих

друг друга индексов, таких, что  $I \cup \bar{I} = \{1, \dots, n\}$ , и  $\bar{I} = \{1, \dots, n\} \setminus I$ . Вклады от всех карт согласуются с помощью индекса Маслова.

Начальное условие задачи Коши (2.2.1) записывается через канонический оператор Маслова  $K_{\Lambda_0^n}$  на начальном многообразии  $\Lambda_0^n$ :

$$\psi(x, t)|_{t=0} = K_{\Lambda_0^n}[\varphi_0](x), \quad (2.2.22)$$

где  $K_{\Lambda_0^n}$  – канонический оператор Маслова на начальном многообразии  $\Lambda_0^n$ .

Аналогично, на расширенном многообразии  $\Lambda^{n+1}$  вводится функция

$$\Psi = K_{\Lambda^{n+1}}[\varphi], \quad \varphi(\alpha, t)|_{\Lambda_0^n} = \varphi_0(\alpha), \quad (2.2.23)$$

где  $K_{\Lambda^{n+1}}$  – канонический оператор Маслова на  $\Lambda^{n+1}$ . Как и раньше, через  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  обозначены параметры, задающие начальное многообразие  $\Lambda_0^n$ .

**Утверждение 2.2.2** (Теорема 10.5, предложение 10.6, [8]). *Решение задачи Коши имеет вид  $\psi = \Psi + w$ , где  $\|w\|_{L_2} = O(h)$ .*

## 2.3 Асимптотика задачи с $\delta$ -потенциалом

Перейдем к асимптотике решения задачи Коши (2.1.1) с  $\delta$ -потенциалом, локализованным на гиперповерхности  $M$ . Решение ищется в виде линейной комбинации трех волн: падающей, прошедшей и отраженной. Каждая из них связана с собственным лагранжевым многообразием. Решение для падающей волны сохраняет форму гладкого случая и эволюционирует вдоль классических траекторий до момента взаимодействия с  $M$ . Прошедшая волна движется вдоль тех же траекторий, и соответствующее лагранжево многообразие остается неизменным — различие проявляется лишь на уровне амплитуд. Для отраженной волны, напротив, требуется перестройка лагранжева многообразия.

До момента взаимодействия с поверхностью  $M$ , динамика системы совпадает с динамикой в гладком случае. Траектория падающей волны  $\{Q^+(\alpha, t), P^+(\alpha, t)\}$  определяется как решение гамильтоновой системы с гамильтонианом (2.2.5) и начальными условиями:

$$Q^+(\alpha, 0) = \alpha, \quad P^+(\alpha, 0) = \nabla S_0(\alpha), \quad \alpha \in \text{supp } \varphi^0. \quad (2.3.1)$$

Всюду далее будем считать, что проекция  $Q^+(\alpha, t)$  траектории на конфигурационное пространство для каждого  $\alpha \in \text{supp } \varphi^0$  и каждого  $t \in [0, T]$  пересекает поверхность  $M$  ровно один раз, причем пересечение трансверсально, и траектория переходит с отрицательной стороны поверхности  $M$  на положительную. Момент пересечения обозначим через  $t_0(\alpha)$ :

$$Q^+(\alpha, t) = r(y) \iff t = t_0(\alpha), \quad y = y_0(\alpha). \quad (2.3.2)$$

Условие трансверсальности означает, что в момент времени  $t_0(\alpha)$  вектор скорости траектории не лежит в касательной плоскости к  $M$  и направлен в сторону внешней нормали:

$$\langle \dot{Q}^+(\alpha, t_0(\alpha)), m(y_0(\alpha)) \rangle > 0, \quad (2.3.3)$$

где  $m(y_0(\alpha))$  – внешняя нормаль к поверхности  $M$  в точке  $r(y_0(\alpha))$ .

Траектория отраженной волны  $\{Q^-(\alpha, t), P^-(\alpha, t)\}$  определяется краевыми условиями на  $M$  в момент времени  $t_0(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} Q^-(\alpha, t_0(\alpha)) &= Q^+(\alpha, t_0(\alpha)), \\ P_n^-(\alpha, t_0(\alpha)) &= -P_n^+(\alpha, t_0(\alpha)), \quad P_\tau^-(\alpha, t_0(\alpha)) = P_\tau^+(\alpha, t_0(\alpha)), \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

где  $P_n^\pm$  и  $P_\tau^\pm$  – нормальная и касательная к  $M$  компоненты импульсов  $P^\pm$  в точке  $r(y_0(\alpha)) \in M$ . Нормальная компонента импульса меняет знак, что соответствует классическому закону отражения, в то время, как касательная сохраняется.

Якобианы падающей и отраженной волн обозначим через

$$J^+(\alpha, t) = \det \left( \frac{\partial Q^+(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right), \quad J^-(\alpha, t) = \det \left( \frac{\partial Q^-(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right). \quad (2.3.5)$$

Аналогично гладкому случаю исследуем асимптотику при отсутствии фокальных точек и при их наличии.

### 2.3.1 Асимптотика в отсутствии фокальных точек

Опишем решение в предположении отсутствия фокальных точек. Фазы падающей, отраженной и прошедшей волн  $S^+(x, t)$ ,  $S^-(x, t)$ ,  $\hat{S}(x, t)$  определяются как действия вдоль соответствующих траекторий системы Гамильтона:

$$\begin{aligned} S^+(x, t) &= \left[ S_0(\alpha) + \int_0^t \left( \frac{1}{2} \langle P^+(\alpha, \tau), P^+(\alpha, \tau) \rangle - V(Q^+(\alpha, \tau)) \right) d\tau \right]_{\alpha=\alpha^+(x, t)}, \\ S^-(x, t) &= \left[ S^+(Q^+(\alpha, t_0(\alpha))) + \int_{t_0(\alpha)}^t \left( \frac{1}{2} \langle P^-(\alpha, \tau), P^-(\alpha, \tau) \rangle - V(Q^-(\alpha, \tau)) \right) d\tau \right]_{\alpha=\alpha^-(x, t)}, \\ \hat{S}(x, t) &= S^+(x, t). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Параметры  $\alpha^\pm$  определяются как решения уравнений

$$Q^\pm(\alpha, t) = x \implies \alpha = \alpha^\pm(x, t). \quad (2.3.7)$$

Поскольку  $J^\pm(\alpha, t) \neq 0$ , отображения  $\alpha \mapsto Q^\pm(\alpha, t)$  являются локальными диффеоморфизмами, и обратные отображения  $\alpha^\pm(x, t)$  определены корректно. Для падающей волны  $\alpha^+(x, t)$  совпадает с параметром  $\alpha$ , задающим начальные данные.

По определению момента времени  $t_0(\alpha)$  (2.3.2) траектория падающей волны пересекает поверхность  $M$  в точке  $r(y_0(\alpha))$ :

$$Q^+(\alpha, t_0) = r(y_0). \quad (2.3.8)$$

Отраженная волна начинается в той же точке  $x = r(y_0)$ :

$$Q^-(\alpha^-, t_0(\alpha^-)) = r(y_0), \quad (2.3.9)$$

поэтому

$$\alpha^+(r(y_0), t_0) = \alpha^-(r(y_0), t_0). \quad (2.3.10)$$

Тогда для каждого  $x$  и  $t$  существует единственный параметр  $\alpha^\pm = \alpha^\pm(x, t)$ , такой что

$$Q^-(\alpha^-, t_0(\alpha^-)) = r(y_0) = Q^+(\alpha^+, t_0(\alpha^+)), \quad (2.3.11)$$

и, соответственно,

$$\alpha^+(r(y_0), t_0) = \alpha^-(r(y_0), t_0). \quad (2.3.12)$$

Таким образом, для каждой точки  $r(y) \in M$  существует единственный параметр  $\alpha$ , определяющий как падающую, так и отраженную траектории, пересекающиеся на  $M$  в момент  $t_0(\alpha)$ .

**Лемма 2.1.** *Функции  $S^+(x, t)$ ,  $S^-(x, t)$ ,  $\hat{S}(x, t)$  удовлетворяют уравнению Гамильтона–Якоби:*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x} \right\rangle + V(x) = 0.$$

*При этом на поверхности  $M$  выполняются условия:*

$$\begin{aligned} S^-|_M &= S^+|_M, & \hat{S}|_M &= S^+|_M, \\ \frac{\partial S^-}{\partial m}|_M &= -\frac{\partial S^+}{\partial m}|_M, & \frac{\partial \hat{S}}{\partial m}|_M &= \frac{\partial S^+}{\partial m}|_M. \end{aligned}$$

**Замечание 2.2.** *Функция  $S^+(x, t)$  определена по обе стороны от поверхности  $M$  при  $t \in [0, T]$ , функция  $S^-(x, t)$  — с отрицательной стороны от  $M$  при  $t \in [t_0(\alpha), T]$ . По построению для любого  $t \geq t_0(\alpha)$   $\hat{S}(x, t) = S^+(x, t)$ .*

*Доказательство леммы.* Докажем последовательно все утверждения леммы.

1. Все три функции  $S^+$ ,  $S^-$  и  $\hat{S}$  построены как действия вдоль классических траекторий:

$$\begin{aligned} S^+(\alpha, t) &= S_0(\alpha) + \int_0^t L(Q^+, P^+) d\tau, & \hat{S}(\alpha, t) &= S^+(\alpha, t), \\ S^-(\alpha, t) &= S^+(Q^+(\alpha, t_0)) + \int_{t_0}^t L(Q^-, P^-) d\tau, \end{aligned}$$

где  $L(Q, P) = \langle \dot{Q}, P \rangle - H(Q, P)$  — лагранжиан системы с гамильтонианом  $H(q, p)$  (2.2.5). По построению  $S^+$ ,  $S^-$  и  $\hat{S}$  удовлетворяют уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0.$$

В силу трансверсальности отображение  $\alpha \mapsto (y_0(\alpha), t_0(\alpha))$  обратимо (2.3.7). На  $M$  имеем:

$$S^- \Big|_M = S^-(\alpha, t) \Big|_{\alpha=\alpha(r(y), t)} = S^-(\alpha, t_0(\alpha)) \Big|_{\alpha=\alpha(r(y_0), t_0)} = S^+(\alpha, t_0(\alpha)) \Big|_{\alpha=\alpha(r(y_0), t_0)} = S^+ \Big|_M.$$

2. По определению нормальной компоненты импульса  $P_n^\pm = \langle P^\pm, m \rangle$ , где  $m(y)$  — вектор единичной нормали к поверхности  $M$  в точке  $x = r(y)$ . Из условий (2.3.4) следует:

$$\frac{\partial S^-}{\partial m} \Big|_M = \langle P^-, m \rangle \Big|_{\alpha=\alpha(r(y), t)} = \langle P^-, m \rangle \Big|_{\alpha=\alpha(r(y_0), t_0)} = -\langle P^+, m \rangle \Big|_{\alpha=\alpha(r(y_0), t_0)} = -\frac{\partial S^+}{\partial m} \Big|_M.$$

Для компактности записи опущено явное указание переменных. При этом подразумевается, что все функции зависят от параметров так же, как было указано выше.

3. Для прошедшей волны  $\hat{S} = S^+$  по определению, поэтому краевые условия выполняются автоматически, что завершает доказательство. □

Перейдем к построению амплитуд падающей, прошедшей и отраженной волн. В отсутствие фокальных точек амплитуды находятся из уравнений переноса. Старшие части амплитуд определяются формулами:

$$\begin{aligned} \varphi_0^+(x, t) &= \varphi^0(\alpha) (J^+(\alpha, t))^{-1/2} \Big|_{\alpha=\alpha^+(x, t)}, \\ \varphi_0^-(x, t) &= \frac{-q(y_0(\alpha))}{2iP_n^+(\alpha, t_0(\alpha)) + q(y_0(\alpha))} \varphi^0(\alpha) (J^-(\alpha, t))^{-1/2} \Big|_{\alpha=\alpha^-(x, t)}, \\ \hat{\varphi}_0(x, t) &= \frac{2iP_n^+(\alpha, t_0(\alpha))}{2iP_n^+(\alpha, t_0(\alpha)) + q(y_0(\alpha))} \varphi^0(\alpha) (J^+(\alpha, t))^{-1/2} \Big|_{\alpha=\alpha^+(x, t)}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Поправки к амплитудам  $\varphi_k^+$ ,  $\varphi_k^-$ ,  $\hat{\varphi}_k$ ,  $k \geq 1$ , определяются как решения неоднородных уравнений переноса:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}(x, t) + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x, t), \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}(x, t) \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S(x, t) \varphi_k(x, t) - \frac{i}{2} \Delta \varphi_{k-1}(x, t) = 0, \quad (2.3.14)$$

удовлетворяющие соответствующим начальным и краевым условиям на поверхности  $M$ :

$$\begin{aligned} \varphi_k^+(x, t) \Big|_{t=0} &= \varphi^0(x), \\ \varphi_k^-(x, t) \Big|_M &= \frac{-q(y) \varphi_0^+(x, t) + d_{k-1}(x, t)}{2i \frac{\partial S^+}{\partial m}(x, t) + q(y)} \Big|_M, \\ \hat{\varphi}_k(x, t) \Big|_M &= \frac{2i \frac{\partial S^+}{\partial m}(x, t) \varphi_0^+(x, t) + d_{k-1}(x, t)}{2i \frac{\partial S^+}{\partial m}(x, t) + q(y)} \Big|_M, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

где

$$d_k(x, t) = \frac{\partial \varphi_k^+}{\partial m}(x, t) + \frac{\partial \varphi_k^-}{\partial m}(x, t) - \frac{\partial \hat{\varphi}_k}{\partial m}(x, t). \quad (2.3.16)$$

**Лемма 2.3.** *Функции  $\varphi_0^+(x, t)$ ,  $\varphi_0^-(x, t)$ ,  $\hat{\varphi}_0(x, t)$  удовлетворяют уравнению переноса:*

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S \varphi_0 = 0.$$

При этом выполняются начальные и краевые условия на поверхности  $M$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0^+|_{t=0} &= \varphi^0(x), \\ \varphi_0^-|_M &= \frac{-q(y)}{2i \frac{\partial S^+}{\partial m} + q(y)} \varphi_0^+|_M, \\ \hat{\varphi}_0|_M &= \frac{2i \frac{\partial S^+}{\partial m}(x, t)}{2i \frac{\partial S^+}{\partial m}(x, t) + q(y)} \varphi_0^+|_M. \end{aligned}$$

**Замечание 2.4.** Амплитуда падающей волны  $\varphi_0^+(x, t)$  определена с отрицательной стороны от поверхности  $M$  при  $t \in [0, T]$ . При этом амплитуды отраженной  $\varphi_0^-(x, t)$  и прошедшей  $\hat{\varphi}_0(x, t)$  волн — при  $t \in [t_0(\alpha), T]$  с отрицательной и положительной сторон от  $M$  соответственно. Поправки  $\varphi_k^\pm$  и  $\hat{\varphi}_k$ ,  $k \geq 1$ , определены в тех же областях.

*Доказательство.* Докажем последовательно все утверждения леммы.

1. Уравнение переноса вдоль траекторий гамильтоновой системы можно записать в виде:

$$\frac{d\varphi_0}{dt}(Q(\alpha, t), t) + \frac{1}{2} \Delta S(Q(\alpha, t), t) \varphi_0(Q(\alpha, t), t) = 0.$$

Якобианы  $J^\pm(\alpha, t)$  удовлетворяют уравнению Лиувилля (2.2.12) вдоль траекторий гамильтоновой системы:

$$\frac{d}{dt} J^\pm(\alpha, t) = \Delta S(Q^\pm(\alpha, t), t) J^\pm(\alpha, t).$$

Покажем, что  $\varphi_0^+$  удовлетворяет уравнению переноса. Дифференцируя  $\varphi_0^+$  вдоль траектории, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0^+}{dt}(Q^+(\alpha, t), t) &= -\frac{1}{2} (J^+(\alpha, t))^{-1/2} \frac{d}{dt} J^+(\alpha, t) \varphi_0^0(\alpha) + (J^+(\alpha, t))^{-1/2} \frac{d\varphi_0^0(\alpha)}{dt} = \\ &= -\frac{1}{2} (J^+(\alpha, t))^{-1/2} \Delta S^+(Q^+(\alpha, t), t) \varphi_0^0(\alpha) \end{aligned}$$

Подстановка полученного выражения в уравнение переноса подтверждает его выполнение для  $\varphi_0^+$ :

$$\frac{d\varphi_0^+}{dt}(Q^+(\alpha, t), t) + \frac{1}{2} (J^+(\alpha, t))^{-1/2} \Delta S^+(Q^+(\alpha, t), t) = 0,$$

Покажем, что уравнение переноса выполняется и для прошедшей и отраженных волн. По построению старшие части амплитуд определяются формулами (2.3.13) и имеют общий вид:

$$\varphi_0(x, t) = A(\alpha, t_0(\alpha))\varphi^0(\alpha)J^{-1/2}\Big|_{\alpha=\alpha(x,t)},$$

где множитель  $A(\alpha, t_0(\alpha))$  свой для отраженной и прошедшей волн и зависит только от параметра  $\alpha$ , момента  $t_0(\alpha)$  и точки отражения  $y_0(\alpha)$ , но не зависит от времени  $t$  вдоль характеристик. В частности,

$$A^-(\alpha) = \frac{-q(y_0(\alpha))}{2iP_n^+(\alpha, t_0(\alpha)) + q(y_0(\alpha))}, \quad \hat{A}(\alpha) = \frac{2iP_n^+(\alpha, t_0(\alpha))}{2iP_n^+(\alpha, t_0(\alpha)) + q(y_0(\alpha))}.$$

Поскольку множители  $A^-(\alpha)$  и  $\hat{A}(\alpha)$  постоянны вдоль характеристики, дифференцирование дает:

$$\frac{d\varphi_0}{dt}(Q^+(\alpha, t), t) = -\frac{A(\alpha)}{2}J^{-1/2}(\alpha, t)\Delta S(Q(\alpha, t), t)\varphi^0(\alpha),$$

что гарантирует выполнение уравнений переноса.

2. Проверим выполнение начальных условий. Для падающей волны при  $t = 0$  имеем:

$$J^+(\alpha, 0) = 1, \quad \alpha^+(x, 0) = x.$$

Таким образом, падающая волна удовлетворяет начальным условиям:

$$\varphi_0^+(x, 0) = \varphi^0(\alpha)(J^+(\alpha, 0))^{-1/2}\Big|_{\alpha=\alpha^+(x,0)} = \varphi^0(\alpha) \cdot 1\Big|_{\alpha=\alpha^+(x,0)} = \varphi^0(x).$$

3. Прошедшая и отраженная волны определяются на  $M$ . Отображение  $\alpha \mapsto (y_0(\alpha), t_0(\alpha))$  взаимно однозначно. Тогда для падающей и отраженной волн справедливо:

$$\varphi_0(x, t)\Big|_M = \varphi_0(r(y_0(\alpha)), t_0(\alpha)) = A(\alpha)\varphi^0(\alpha)J^{-1/2}(\alpha, t_0(\alpha)) = A(\alpha)\varphi_0(\alpha, t_0(\alpha)),$$

откуда краевые условия выполняются в силу определения коэффициентов  $A^-$  и  $\hat{A}$  для отраженной и прошедшей волн, что завершает доказательство. □

Обозначим через  $t_0 = \min_{\alpha \in \text{supp } \varphi^0} t_0(\alpha)$  минимальный момент пересечения траекторий с поверхностью  $M$ .

Введем функцию

$$\Psi(x, t, h) = \begin{cases} e^{\frac{i}{h}S^+(x,t)} \left( \sum_{k=0}^N \varphi_k^+(x, t)h^k + v_1h^N \right) + e^{\frac{i}{h}S^-(x,t)} \left( \sum_{k=0}^N \varphi_k^-(x, t)h^k + v_2h^N \right), & \text{с отрицательной стороны от } M, \\ e^{\frac{i}{h}\hat{S}(x,t)} \sum_{k=0}^N \hat{\varphi}_k(x, t)h^k, & \text{с положительной стороны от } M, \end{cases} \quad (2.3.17)$$

где  $\|v_i\|_{L_2} = O(1)$ ,  $i = 1, 2$ , определены ниже (см. доказательство теоремы).

**Теорема 2.5.** Пусть  $T > t_0$  таково, что  $J^+(\alpha, t) \neq 0$ ,  $J^-(\alpha^-, t) \neq 0$  при  $t \in [0, T]$  и  $\alpha \in \text{supp } \varphi^0(x)$ . Решение задачи Коши (2.1.1) представимо в виде  $\psi = \Psi + w(t, x, h)$ , где  $\|w\|_{L_2} = O(h^N)$ .

**Замечание 2.6.** Построенная функция  $\Psi(x, t)$  является асимптотическим приближенным решением задачи Коши (2.1.1) и удовлетворяет уравнению Шредингера с точностью до слагаемого порядка  $O(h^{N+1})$ :

$$\|\hat{L}\Psi\|_{L_2} = O(h^{N+1}) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (2.3.18)$$

где оператор  $\hat{L}$  определен при доказательстве теоремы.

*Доказательство.* Обозначим через  $\hat{L}$  нестационарный оператор Шредингера с гладким потенциалом:

$$\hat{L} = -ih \frac{\partial}{\partial t} - \frac{h^2}{2} \Delta + V(x).$$

1. Положим  $v^1 = v^2 = 0$  и покажем, что  $\|\hat{L}\Psi\|_{L_2} = O(h^{N+1})$ . Подставляя  $\Psi(x, t, h)$  в уравнение Шредингера, получаем:

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi(x, t, h) &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right\rangle + V(x) \right) \varphi_k^\alpha h^k - \\ &- ih \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left( \frac{\partial \varphi_k^\alpha}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_k^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S^\alpha \varphi_k^\alpha - \frac{ih}{2} \Delta \varphi_k^\alpha \right) h^{k+1}. \end{aligned}$$

Для краткости записи опущена зависимость от переменных  $(x, t)$  и введены обозначения:

$$S^+(x, t) = S^1, \quad S^-(x, t) = S^2, \quad \hat{S}(x, t) = S^3.$$

Группируя по степеням  $h$ , в нулевом порядке получаем выражение, содержащее уравнение Гамильтона–Якоби, в порядках  $h^k$ ,  $k \geq 1$ , — уравнения переноса:

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi(x, t, h) &= \sum_{\alpha=1}^3 e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right|^2 + V(x) \right) \varphi_0^\alpha + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^3 e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left[ \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right|^2 + V(x) \right) \varphi_1^\alpha - i \left( \frac{\partial \varphi_0^\alpha}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_0^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S^\alpha \varphi_0^\alpha \right) \right] h + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=2}^N e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left[ \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right|^2 + V(x) \right) \varphi_k^\alpha - i \left( \frac{\partial \varphi_{k-1}^\alpha}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{k-1}^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S^\alpha \varphi_{k-1}^\alpha \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \Delta \varphi_{k-2}^\alpha \right] h^k - i \sum_{\alpha=1}^3 e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left[ \frac{\partial \varphi_N^\alpha}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_N^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S^\alpha \varphi_N^\alpha - \frac{i}{2} \Delta \varphi_{N-1}^\alpha \right] h^{N+1} - \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^3 e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \frac{1}{2} \Delta \varphi_N^\alpha h^{N+2}. \end{aligned}$$

Поскольку функции  $S^\alpha$  удовлетворяют уравнению Гамильтона–Якоби, а амплитуды  $\varphi_k^\alpha$  – уравнениям переноса, все коэффициенты при степенях  $h^k$ ,  $k = 0, \dots, N+1$ , обращаются в нуль, и справедлива оценка:

$$\|\hat{L}\Psi\|_{L_2} = O(h^{N+1}).$$

2. Проверим выполнение краевых условий (2.1.2). Их выполнение необходимо для того, чтобы решение лежало в области определения оператора с  $\delta$ -потенциалом. Для фазовых функций  $S^+(x, t)$ ,  $S^-(x, t)$ ,  $\hat{S}(x, t)$  на поверхности  $M$  выполняются равенства:

$$S^+|_M = S^-|_M = \hat{S}|_M,$$

$$\frac{\partial S^+}{\partial m}|_M = -\frac{\partial S^-}{\partial m}|_M = \frac{\partial \hat{S}}{\partial m}|_M.$$

Из определения амплитуд следует, что на  $M$  выполнены условия:

$$\varphi_k^+|_M + \varphi_k^-|_M = \hat{\varphi}_k|_M, \quad k = 0, \dots, N.$$

Тогда первое краевое условие на  $M$  выполняется точно:

$$\Psi(r(y) - 0, t) = \Psi(r(y) + 0, t).$$

Рассмотрим второе краевое условие:

$$h \left( \frac{\partial \Psi}{\partial m}(r(y) - 0, t) - \frac{\partial \Psi}{\partial m}(r(y) + 0, t) \right) = q(y) \Psi(r(y), t).$$

Оно выполняется с точностью до слагаемого порядка  $h^{N+1}$ . Соответствующая невязка имеет вид:

$$\omega_{N+1} = e^{i \frac{S^+(x, t)}{h}} h^{N+1} \left( \frac{\partial \varphi_N^+(x, t)}{\partial m} + \frac{\partial \varphi_N^-(x, t)}{\partial m} - \frac{\partial \hat{\varphi}_N(x, t)}{\partial m} \right) \Big|_M.$$

Для точного выполнения краевых условий поправим функцию  $\Psi$ . Определим функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  по разные стороны от поверхности  $M$ :

$$\omega_1(x, t, h) = e^{\frac{i}{h} S^+(x, t)} v_1(x, t) h^N, \quad \omega_2(x, t, h) = e^{\frac{i}{h} S^-(x, t)} v_2(x, t) h^N,$$

где  $v_1, v_2$  удовлетворяют условиям:

$$v_1|_M = v_2|_M = 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial m} \Big|_M - \frac{\partial v_2}{\partial m} \Big|_M = \left( \frac{\partial \varphi_N^+(x, t)}{\partial m} + \frac{\partial \varphi_N^-(x, t)}{\partial m} - \frac{\partial \hat{\varphi}_N(x, t)}{\partial m} \right) \Big|_M.$$

Переопределим функцию  $\Psi(x, t) := \Psi(x, t) + \omega_1(x, t, h) + \omega_2(x, t, h)$ . Построенная функция точно удовлетворяет краевым условиям (2.1.2).

Применим оператор  $\hat{L}$  к функциям  $w_1(x, t, h)$  и  $w_2(x, t, h)$ . Поскольку функции  $S^+(x, t)$  и  $S^-(x, t)$  удовлетворяют уравнению Гамильтона–Якоби, собрав коэффициенты при  $h^N$ , получим, что они обращаются в нуль. Тогда

$$\|\hat{L}w_1 + \hat{L}w_2\|_{L_2} = O(h^{N+1}).$$

Таким образом, оценка  $\|\hat{L}\Psi\|_{L_2} = O(h^{N+1})$  сохраняется.

3. При  $t = 0$  выполнено  $S^+(x, 0) = S_0(x)$ ,  $\varphi_0^+(x, 0) = \varphi^0(x)$ ,  $\varphi_k^+(x, 0) = 0$  при  $k \geq 1$ . С отрицательной стороны от  $M$  при  $t = 0$  отраженная волна отсутствует, поэтому

$$\Psi|_{t=0} = e^{\frac{i}{h}S_0(x)}(\varphi^0(x) + h^N v_1(x, 0)).$$

Полагая  $v_1(x, 0) = 0$ , получаем, что начальное условие выполняется точно.

4. Функция  $\Psi(x, t, h)$  удовлетворяет уравнению:

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi + f,$$

где  $\hat{H}$  – оператор Шредингера с  $\delta$ -потенциалом (1.3.1),  $\|f\|_{L_2} = O(h^{N+1})$ . Пусть  $\psi$  – точное решение задачи Коши (2.1.1), и  $w = \Psi - \psi$ . Для функции  $w$  выполнено:

$$ih \frac{\partial w}{\partial t} = \hat{H}w + f.$$

В силу самосопряженности оператора  $\hat{H}$  имеем:

$$\begin{aligned} ih \langle \frac{\partial w}{\partial t}, w \rangle &= \langle \hat{H}w, w \rangle + \langle f, w \rangle, \\ -ih \langle w, \frac{\partial w}{\partial t} \rangle &= \langle \hat{H}w, w \rangle + \langle w, f \rangle. \end{aligned}$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем:

$$h \frac{\partial}{\partial t} \|w\|^2 = 2 \operatorname{Im} \langle f, w \rangle.$$

Здесь и далее  $\|w\| = \|w\|_{L_2}$ . Поскольку  $|\operatorname{Im} \langle f, w \rangle| \leq \|w\| \|f\|$ , имеем  $h \frac{\partial}{\partial t} \|w\| \leq \|f\|$ , откуда

$$\|w\| \leq \frac{1}{h} \int_0^t \|f\| d\tau = O(h^N),$$

что завершает доказательство. □

**Замечание 2.7.** Три суммы, входящие в выражение для  $\Psi(x, t, h)$ , описывают падающую, отраженную и прошедшую волны. Пока волновой пакет не дошел до поверхности  $M$ , решение совпадает с решением задачи с гладким потенциалом ( $q \equiv 0$ ). Затем волновой пакет разбивается на два – часть волны отражается от поверхности  $M$ , а часть проходит через нее.

**Замечание 2.8.** На поверхности  $M$  амплитуды прошедшей и отраженной волн делятся следующим образом:

$$\frac{|\varphi_0^-(x, t)|_M}{|\varphi_0(x, t)|_M} = \frac{|q(y)|}{2 \left| \frac{\partial S^+(x, t)}{\partial m} \right|_M + q(y)}.$$

**Замечание 2.9.** Обозначим

$$R = \frac{-q(y)}{2i \frac{\partial S^+}{\partial m} \Big|_M + q(y)}, \quad T = \frac{2i \frac{\partial S^+}{\partial m} \Big|_M}{2i \frac{\partial S^+}{\partial m} \Big|_M + q(y)}.$$

Величины  $|R|^2$  и  $|T|^2$  являются квазиклассическими аналогами классических коэффициентов отражения и прохождения и удовлетворяют закону сохранения  $|R|^2 + |T|^2 = 1$ .

### 2.3.2 Геометрическая интерпретация

С геометрической точки зрения построение асимптотического решения в случае наличия  $\delta$ -потенциала на поверхности  $M$  сводится к построению двух лагранжевых многообразий в расширенном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q, t, p, p_t)}^{2n+2}$ , отвечающих падающей и отраженной волнам.

Лагранжево многообразие  $\Lambda^+$ , несущее падающую волну, строится так же, как в гладком случае. Начальные данные индуцируют лагранжево многообразие  $\Lambda_0^n$ :

$$\Lambda_0^n = \{(q, p) \in \mathbb{R}_{(q, p)}^{2n} : q = \alpha, p = \nabla S_0(\alpha)\}.$$

Его сдвиг вдоль траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом (2.2.5) дает  $n+1$ -мерное многообразие

$$\Lambda^+ = \Lambda^{n+1} = \bigcup_{t \in [0, T]} g_t(\Lambda_0^n). \quad (2.3.19)$$

Лагранжевость  $\Lambda^+$  сохраняется, поскольку фазовый поток сохраняет симплектическую форму. Прошедшей волне отвечает то же многообразие  $\Lambda^+$ , что и падающей: траектории прошедшей волны продолжают движение вдоль тех же характеристик гамильтоновой системы, не меняя направления при прохождении через  $M$ . Различие между падающей и прошедшей волнами проявляется лишь на уровне амплитуд.

Введем в окрестности поверхности  $M$  локальные координаты  $x = (z, y_1, \dots, y_{n-1})$ , где  $|z|$  — расстояние до  $M$  по нормали, причем  $M$  задается уравнением  $z = 0$ , то есть

$$x = (0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in M.$$

Для построения многообразия  $\Lambda^-$ , отвечающего отраженной волне, рассмотрим поднятие поверхности  $M$  в расширенное фазовое пространство:

$$Q^{2n+1} = \{(x, p, t, p_t) \in \mathbb{R}^{2n+2} : x = (0, y_1, \dots, y_{n-1}), y \in \mathbb{R}^{n-1}, p \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, p_t \in \mathbb{R}\}.$$

Определим сечение

$$\Lambda_1^n = \Lambda^+ \cap Q^{2n+1}.$$

Построенная поверхность может рассматриваться как набор траекторий, падающих на поверхность  $M$  в расширенном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,t,p,p_t)}^{2n+2}$ . Определим

$$\Lambda_2^n = \Phi(\Lambda_1^n),$$

где  $\Phi$  — отображение, меняющее нормальную к  $M$  компоненту импульса  $p_m$  на противоположную  $(-p_m)$  и сохраняющее остальные координаты:

$$\Phi : (x, p_m, p_\tau, t) \rightarrow (x, -p_m, p_\tau, t).$$

Многообразие  $\Lambda_2^n$  служит начальным многообразием для отраженных траекторий. Лагранжевость  $\Lambda_2^n$  следует из лагранжевости  $\Lambda_1^n$ . Поскольку  $\Phi$  меняет только  $p_m \rightarrow -p_m$ , имеем:

$$\Phi^* \tilde{\omega} = -dp_m \wedge dq_m + dp_\tau \wedge dq_\tau + dp_t \wedge dt,$$

поэтому на  $\Lambda_1^n$  выполнено:

$$\tilde{\omega}|_{\Lambda_2^n} = (\Phi^{-1})^* \tilde{\omega}|_{\Lambda_1^n} = 0.$$

Сдвигая  $\Lambda_2^n$  вдоль траекторий гамильтоновой системы, получим лагранжево многообразие для отраженной волны:

$$\Lambda^- = \bigcup_{\tau \in [t_0(\alpha), T]} g_\tau(\Lambda_2^n), \quad (2.3.20)$$

где  $T$  выбирается так, что  $\Lambda^-$  — гладкое многообразие, причем  $\dim \Lambda^- = n + 1$ . Лагранжевость  $\Lambda^-$  сохраняется, поскольку фазовый поток сохраняет симплектическую форму.

Таким образом, для каждого момента времени  $t \in [0, T]$  фазы  $S^+$  и  $\hat{S}$  падающей и прошедшей волн определяются многообразием  $\Lambda^+$ , причем градиент  $\nabla S^+$  задает импульс на  $\Lambda^+$ . При достижении поверхности  $M$  часть волны отражается, и фаза  $S^-$  отраженной волны определяется многообразием  $\Lambda^-$ , а градиент  $\nabla S^-$  задает импульс на  $\Lambda^-$  для каждого момента времени  $t \in [t_0(\alpha), T]$ . Геометрически влияние  $\delta$ -потенциала проявляется в возникновении отраженной волны, причем многообразие  $\Lambda^-$  порождается из  $\Lambda^+$  посредством отображения отражения  $\Phi$ . Тем самым построенная пара многообразий  $(\Lambda^+, \Lambda^-)$  полностью описывает эволюцию волнового пакета во всем интервале  $t \in [0, T]$ .

### 2.3.3 Асимптотика при наличии фокальных точек

Перейдем к описанию асимптотики при наличии фокальных точек. Опишем структуру канонических карт на  $\Lambda^+$  вблизи поверхности  $M$  и построение многообразия  $\Lambda^-$ .

В введенных в § 2.3.2 локальных координатах  $x = (z, y_1, \dots, y_{n-1})$  в окрестности  $M$  канонические карты на  $\Lambda^+$  выбираются так, чтобы в каждой карте, проекция которой на  $\mathbb{R}_x^n$  пересекает  $M$ , одной из координат служила  $z$ . Координаты в  $j$ -й канонической карте обозначим как

$$(z, y_{\bar{I}_j}, p_{I_j}, t),$$

где  $I_j \cup \bar{I}_j = \{1, \dots, n-1\}$ ,  $y_{\bar{I}_j}$  — касательные координаты к  $M$ ,  $p_{I_j}$  — сопряженные импульсы. Разбиения  $I_j$  и  $\bar{I}_j$  зависят от карты ( $j$ ) и могут различаться.

Сечение  $\Lambda_1^n = \Lambda^+ \cap Q^{2n+1}$  локально в каждой карте задается параметрически:

$$\Lambda_1^n = \left\{ (x, p, t, p_t) \in \mathbb{R}_{(x,p,t,p_t)}^{2n+2} : x = (0, y_I(0, y_{\bar{I}}, p_I), y_{\bar{I}}), p = (0, p_I, p_{\bar{I}}(0, y_{\bar{I}}, p_I)), t \in \mathbb{R}, p_t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Многообразие  $\Lambda_2^n = \Phi(\Lambda_1^n)$  задается аналогично, где нормальная компонента импульса заменяется на противоположную, а касательная сохраняется:

$$\Lambda_2^n = \left\{ (x, p, t, p_t) \in \mathbb{R}_{(x,p,t,p_t)}^{2n+2} : x = (0, y_I(0, y_{\bar{I}}, p_I), y_{\bar{I}}), p = (0, \tilde{p}_m, \tilde{p}_\tau(0, y_{\bar{I}}, p_I)), t \in \mathbb{R}, p_t \in \mathbb{R} \right\},$$

где  $\tilde{p}_m = -p_m(0, y_{\bar{I}}, p_I)$ ,  $\tilde{p}_\tau = p_\tau(0, y_{\bar{I}}, p_I)$ . Если  $\Omega_1$  — карта на  $\Lambda_1^n$ , то  $\Omega_2 = \Phi(\Omega_1)$  — соответствующая карта на  $\Lambda_2^n$  с теми же координатами.

На этих многообразиях естественным образом задаются формы объема. На  $\Lambda_1^n$  введем форму объема:

$$d\sigma_1 = dy_{\bar{I}} \wedge dp_I \wedge dt.$$

Соответствующую форму на  $\Lambda_2^n$  определим через отображение  $\Phi$ :

$$d\sigma_2 = \Phi_*^{-1}(d\sigma_1).$$

Зафиксируем атласы и разбиения единицы на многообразиях  $\Lambda^\pm$ . Форму объема на  $\Lambda^+$  выберем так же, как в гладком случае:

$$d\sigma^+ = d\sigma_1 \wedge dz, \quad \Lambda_1^n = \Lambda^+ \cap Q,$$

На  $\Lambda^-$  форму объема зададим на сечении  $\Lambda_2^n \subset \Lambda^-$  как

$$d\sigma^- = d\sigma_2 \wedge dz, \quad d\sigma_2 = \Phi_*^{-1}(d\sigma_1), \quad \Lambda_2^n = \Lambda^- \cap Q = \Phi(\Lambda_1^n),$$

и распространим ее на  $\Lambda^-$  гамильтоновым потоком.

Определив на многообразиях  $\Lambda^\pm$  фиксированные атласы, формы объема и согласованные разбиения единицы, можно построить соответствующие канонические операторы. Пусть  $K_{\Lambda^\pm}$  — канонические операторы Маслова на многообразиях  $\Lambda^\pm$  с указанными формами объема, фиксированными каноническими картами и разбиениями единицы. Пусть  $\chi$  — гладкая конечная функция на  $\Lambda^+$  или  $\Lambda^-$ .

**Утверждение 2.3.1** (Теорема 12.4, [8]). Для любого натурального  $N$  справедлива формула коммутации:

$$\hat{L}K_\Lambda[\chi] = K_\Lambda \left[ -ih\dot{\chi} + \sum_{k=2}^N h^k R_k(\chi) \right] + u.$$

Здесь  $R_k$  — дифференциальные операторы порядка  $k$ ,  $\dot{\chi} = d\chi/dt$ ,  $d/dt$  — производная в силу системы Гамильтона,  $\|u\|_{L_2} = O(h^{N+1})$ .

На построенных многообразиях  $\Lambda^\pm$  определим функции

$$\begin{aligned} \varphi_0^+(\alpha) &= \varphi_0(g_t \alpha^0), \\ \hat{\varphi}_0(\alpha) &= \frac{2ip_m^+}{2ip_m^+ + q(y)} \Big|_{\Lambda_1^n} \varphi_0^+(\alpha) \quad \alpha \in \Lambda^+, \alpha^0 \in \Lambda_0^n, \\ \varphi_0^-(\alpha') &= \frac{-q(y)}{2ip_m^+ + q(y)} \Big|_{\Lambda_2^n} \varphi_0^+(g_t \Phi^{-1}(\alpha^1)), \quad \alpha' \in \Lambda^-, \alpha^1 \in \Lambda_1^n. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Эти функции определены вдоль траекторий гамильтоновой системы и тем самым удовлетворяют уравнению переноса для старшего члена асимптотики. Для  $k \geq 1$  функции  $\varphi_k^\pm, \hat{\varphi}_k$  определяются как решения соответствующих уравнений переноса:

$$\begin{cases} -i \frac{d}{dt} \varphi_k^+ + \sum_{j=0}^{k-1} R_{2+j}(\varphi_{k-1-j}^+) = 0, \\ \varphi_k^+|_{\Lambda_0^n} = 0, \\ -i \frac{d}{dt} \hat{\varphi}_k + \sum_{j=0}^{k-1} R_{2+j}(\varphi_{k-1-j}^-) = 0, \\ \hat{\varphi}_k = \frac{2ip_m^+}{2ip_m^+ + q(y)} \Big|_{\Lambda_1^n} \varphi_k^+ + \frac{d_{k-1}}{q(y) + 2ip_m^+} \Big|_{\Lambda_2^n}, \\ -i \frac{d}{dt} \varphi_k^- + \sum_{j=0}^{k-1} R_{2+j}(\varphi_{k-1-j}^-) = 0, \\ \varphi_k^-(\alpha') = \frac{-q(y)}{q(y) + 2ip_m^+} \Big|_{\Lambda_2^n} \varphi_k^+(g_t \Phi^{-1}(\alpha^1)) + \frac{d_{k-1}}{q(y) + 2ip_m^+} \Big|_{\Lambda_2^n}, \end{cases} \quad (2.3.22)$$

где

$$d_k(x, t) = \frac{\partial \varphi_k^+(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_k^-(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\varphi}_k(x, t)}{\partial t},$$

и  $R_k$  — дифференциальные операторы порядка  $k$ .

Введем функцию

$$\Psi(x, t, h) = \begin{cases} K_{\Lambda^+} \left[ \sum_{k=0}^N h^k \varphi_k^+ + h^N \omega_1 \right] + K_{\Lambda^-} \left[ \sum_{k=0}^N h^k \varphi_k^- + h^N \omega_2 \right], & \text{с отрицательной стороны от } M, \\ K_{\Lambda^+} \left[ \sum_{k=0}^N h^k \hat{\varphi}_k \right], & \text{с положительной стороны от } M, \end{cases} \quad (2.3.23)$$

где  $\|\omega_j\|_{L_2} = O(1)$ ,  $i = 1, 2$ , определены ниже (см. доказательство теоремы).

**Утверждение 2.3.2.** *Справедливы формулы коммутации:*

$$\begin{aligned} \hat{L}K_{\Lambda^+} \left[ \sum_{k=0}^N h^k \varphi_k^+ \right] &= K_{\Lambda^+} \left[ \sum_{j=0}^N \left( -ih^{j+1} \dot{\varphi}_j^+ + \sum_{k=2+j}^{N+1} h^k R_{k-j}(\varphi_j^+) \right) \right] + \chi^1, \\ \hat{L}K_{\Lambda^-} \left[ \sum_{k=0}^N h^k \varphi_k^- \right] &= K_{\Lambda^-} \left[ \sum_{j=0}^N \left( -ih^{j+1} \dot{\varphi}_j^- + \sum_{k=2+j}^{N+1} h^k R_{k-j}(\varphi_j^-) \right) \right] + \chi^2, \\ \hat{L}K_{\hat{\Lambda}} \left[ \sum_{k=0}^N h^k \hat{\varphi}_k \right] &= K_{\hat{\Lambda}} \left[ \sum_{j=0}^N \left( -ih^{j+1} \dot{\hat{\varphi}}_j + \sum_{k=2+j}^{N+1} h^k R_{k-j}(\hat{\varphi}_j) \right) \right] + \chi^3, \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

где  $\|\chi_i\|_{L_2} = O(h^{N+2})$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Доказательство утверждения следует напрямую из формулы коммутации.

Пусть  $t_0 = \min_{\alpha \in \text{supp } \varphi^0} t_0(\alpha)$  и  $T > t_0$ .

**Теорема 2.10.** *Решение задачи Коши (2.1.1) при  $t \in [t_0, T]$  представимо в виде  $\psi = \Psi + w$ , где  $\|w\|_{L_2} = O(h^N)$ .*

**Замечание 2.11.** *В локальной канонической карте  $\Omega^{I_j}$  канонический оператор Маслова имеет вид частичного преобразования Фурье по координатам  $p_{I_j}$ :*

$$K^{I_j}(\Omega^{I_j}, r^0)[a] = e^{-\frac{i\pi}{2}\gamma(r^0, r)} \mathbb{F}_{p_{I_j} \rightarrow x_{I_j}}^{-h} \left[ a(x_{I_j}, p_{I_j}, t) \sqrt{\left| \frac{d\sigma(r)}{dp_I \wedge dx_{\bar{I}} \wedge dt \wedge dp_t} \right|} e^{\frac{i}{h} \int_{r^0}^r \langle p, dx \rangle - \langle x_{I_j}, p_{I_j} \rangle} \right]. \quad (2.3.25)$$

Глобальные операторы на многообразиях  $\Lambda^\pm$  строятся как суммы локальных вкладов:

$$K_{\Lambda^+, r^1}[\varphi^+](x, t) = e^{-\frac{i\pi}{2}\gamma(r^0, r^1) + \frac{i}{h} \int_{r^0}^{r^1} \langle p, dx \rangle} \sum_j K^{I_j}(\Omega^{I_j}, r^1)[e_j \varphi^+](x, t), \quad (2.3.26)$$

$$K_{\Lambda^-, r^1}[\varphi^-](x, t) = e^{-\frac{i\pi}{2}\gamma(r^0, r^1) + \frac{i}{h} \int_{r^0}^{r^1} \langle p, dx \rangle} \sum_j K^{I_j}(\Omega^{I_j}, r^1)[e_j \varphi^-](x, t). \quad (2.3.27)$$

Здесь  $r^0$  и  $r^1$  — начальные точки интегрирования вдоль траектории на многообразиях  $\Lambda^+$  и  $\Lambda^-$  соответственно;  $\Omega^{I_j}$  — цепочка карт, содержащая путь  $l(r^0, r)$  с  $r^0 \in \Omega^{I_0}$ ;  $\gamma(r^0, r)$  — индекс Маслова вдоль пути. Эти формулы обеспечивают согласование локальных амплитуд и фазового сдвига, необходимое для построения асимптотических решений гамильтоновой системы и для определения старших членов асимптотики на многообразиях  $\Lambda^\pm$ .

*Доказательство.*

1. Покажем, что  $\Psi$  удовлетворяет уравнению Шредингера с точностью до  $O(h^{N+1})$ . Положим сначала  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Используя формулы коммутации (2.3.24) и тот факт, что функции  $\varphi_k^+$ ,  $\varphi_k^-$ ,  $\hat{\varphi}$  удовлетворяют уравнениям переноса (2.3.21), (2.3.22), получим:

$$\hat{L}K_{\Lambda^+} \left[ \sum_{k=0}^N h^k \varphi_k^+ \right] + \hat{L}K_{\Lambda^-} \left[ \sum_{k=0}^N h^k \varphi_k^- \right] + \hat{L}K_{\Lambda^+} \left[ \sum_{k=0}^N h^k \hat{\varphi}_k \right] = \chi,$$

где  $\|\chi\|_{L_2} = O(h^{N+2})$ . Таким образом, при  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ :

$$\hat{L}\Psi = \chi + \hat{L}K_{\Lambda^+} [h^N w_1] + \hat{L}K_{\Lambda^-} [h^N w_2],$$

$$\|\hat{L}\Psi\|_{L_2} = O(h^{N+2}).$$

2. Проверим выполнение краевых условий (2.1.2). Как и ранее, полагаем добавки  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Первое краевое условие на  $M$  имеет вид:

$$K_{\Lambda^+} [\varphi^+] \Big|_M + K_{\Lambda^-} [\varphi^-] \Big|_M = K_{\Lambda^+} [\hat{\varphi}] \Big|_M,$$

где  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  и  $\hat{\varphi}$  — соответствующие суммы  $\sum_{k=0}^N h^k \varphi_k^\pm$ ,  $\sum_{k=0}^N h^k \hat{\varphi}_k$ . При  $x \in M$  в каждой карте, содержащей координату  $z$ , имеем  $z = 0$  и  $dz$  обращается в нуль, а отображение  $\Phi$  сохраняет оставшиеся координаты, формы объема и фазовые множители на сечениях  $\Lambda_1^n$  и  $\Lambda_2^n$ . Поэтому условие эквивалентно равенству амплитуд:

$$\varphi^+|_{\Lambda_1^n} + \varphi^-|_{\Lambda_2^n} = \hat{\varphi}|_{\Lambda_1^n}, \quad k = 0, \dots, N.$$

Это условие выполняется точно в силу определения функций  $\varphi_k^+$ ,  $\varphi_k^-$ ,  $\hat{\varphi}_k$ ,  $k = 0, \dots, N$ .

Рассмотрим второе краевое условие:

$$h \left( \frac{\partial \Psi}{\partial m}(y - 0, t) - \frac{\partial \Psi}{\partial m}(y + 0, t) \right) = q(y) \Psi(y, t).$$

Подстановка  $\Psi$  дает выражение через канонические операторы:

$$\frac{\partial}{\partial m} K_{\Lambda^+, r^0} [\varphi_N^+] \Big|_M + \frac{\partial}{\partial m} K_{\Lambda^-, r^1} [\varphi_N^-] \Big|_M - \frac{\partial}{\partial m} K_{\Lambda^+, r^0} [\hat{\varphi}_N] \Big|_M = q(y) K_{\Lambda^+, r^0} [\hat{\varphi}_N] \Big|_M.$$

На многообразиях  $\Lambda^+$  и  $\Lambda^-$  одной из координат выбрана  $z$ , поэтому в канонических операторах отсутствует интегрирование по  $z$ , и проверка второго краевого условия сводится к дифференцированию по  $z$  фазового множителя и функций  $\varphi_k^+, \varphi_k^-, \hat{\varphi}_k$ . Амплитуды и поправки к ним удовлетворяют уравнениям переноса, а на многообразиях  $\Lambda_1^n$  и  $\Lambda_2^n$  выполнено  $e_1(\Omega_1) = e_2(\Omega_2)$ , поэтому, как и в случае без фокальных точек, второе условие выполняется с точностью до слагаемого порядка  $h^{N+1}$ :

$$h^{N+1} \left( K_{\Lambda^+, r^0} \left[ \frac{\partial \varphi_N^+}{\partial m} \right] + K_{\Lambda^-, r^1} \left[ \frac{\partial \varphi_N^-}{\partial m} \right] - K_{\Lambda^+, r^0} \left[ \frac{\partial \hat{\varphi}_N}{\partial m} \right] \right) \Big|_M$$

Подправим функцию  $\Psi := \Psi + K_{\Lambda_1^n} [h^N \omega_1] + K_{\Lambda_2^n} [h^N \omega_2]$ . Функции  $w_1$  и  $w_2$  определены из условий:

$$\begin{aligned} \omega_1|_{\Lambda_1^n} = \omega_2|_{\Lambda_2^n} = 0, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial m} \Big|_{\Lambda_1^n} - \frac{\partial \omega_2}{\partial m} \Big|_{\Lambda_2^n} = \frac{\partial \varphi_N^+}{\partial m} \Big|_{\Lambda_1^n} + \frac{\partial \varphi_N^-}{\partial m} \Big|_{\Lambda_2^n} - \frac{\partial \hat{\varphi}_N}{\partial m} \Big|_{\Lambda_1^n}. \end{aligned}$$

Для подправленной функции краевые условия выполняются точно.

Действие оператора  $\hat{L}$  на поправки  $K_{\Lambda^+} [h^N \omega_1]$  и  $K_{\Lambda^-} [h^N \omega_2]$  дает нулевой коэффициент при  $h^N$  в силу инвариантности многообразий  $\Lambda^\pm$ , поэтому

$$\|\hat{L}K_{\Lambda^+} [h^N \omega_1] + \hat{L}K_{\Lambda^-} [h^N \omega_2]\|_{L_2} = O(h^{N+1}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi &= f, \\ \|f\|_{L_2} &= O(h^{N+1}). \end{aligned}$$

3. При  $t = 0$  построенное решение удовлетворяет начальному условию с точностью до  $O(h^{N+1})$ . Действительно, при  $t = 0$  имеем:

$$\Psi(x, 0) = K_{\Lambda^+} [\varphi^+](x, 0) + K_{\Lambda^+} [h^N \omega_1](x, 0). \quad (2.3.28)$$

По построению  $\Lambda^+ = \bigcup_t \Lambda_t^n = \bigcup_t g_t \Lambda_0^n$ , тогда

$$\Psi(x, 0) = e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi_0(x) + f_0(x, 0, h), \quad \|f_0\|_{L_2} = O(h^N).$$

Для точного выполнения начального условия достаточно положить

$$\omega_1|_{\Lambda_0^n} = 0. \quad (2.3.29)$$

4. Пусть  $\psi$  — точное решение и  $\omega = \Psi - \psi$ . В силу самосопряженности оператора  $\hat{H}$  справедлива оценка:

$$\|\omega\| \leq \frac{1}{h} \int_0^t \|f\| d\tau + \|f_0\| = O(h^N),$$

что завершает доказательство. □

## Глава 3

# Квазиклассические асимптотики с комплексной фазой, локализованной в окрестности кривой

Рассматриваются асимптотические решения нестационарного уравнения Шредингера с комплексной фазой. В отличие от предыдущей главы начальная фаза является комплекснозначной функцией, и решение локализуется в окрестности некоторой кривой или поверхности в конфигурационном пространстве, а амплитуда волновой функции быстро убывает при удалении от центра локализации. Физически такие состояния называются гауссовыми пучками или сжатыми состояниями и описывают приближенные квантовые состояния, энергия которых сосредоточена вблизи выбранной гамильтоновой траектории.

В настоящей главе рассматривается более простой случай, когда начальная волновая функция локализована в окрестности одной точки  $x_0$ . Геометрия возникающих объектов оказывается существенно проще в этом случае, что позволяет описать механизм взаимодействия гауссова пучка с  $\delta$ -потенциалом и выяснить, как геометрия поверхности-носителя сингулярности влияет на комплексный росток отраженной волны. Для построения асимптотики используется метод комплексного роста Маслова, обобщающий конструкцию канонического оператора на случай комплексной фазы. Более общий случай, когда начальные данные локализованы в окрестности подмногообразия положительной коразмерности, рассмотрен в следующей главе.

## Постановка задачи

Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  — гладкая ориентированная гиперповерхность коразмерности 1, заданная параметризацией  $x = r(y)$ , где  $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$  — локальные координаты на  $M$ . Обозначим через  $m(y)$  единичную нормаль к  $M$  в точке  $r(y)$ , направленную в сторону носителя начальных данных, через  $\delta_M$  — дельта-функцию, сосредоточенную на поверхности  $M$ .

Рассмотрим задачу Коши для нестационарного уравнения Шредингера с  $\delta$ -потенциалом:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{\hbar} \delta_M \psi, \\ \psi(x, 0) = \tilde{A} e^{\frac{i}{\hbar} S_0(x)}. \end{cases} \quad (3.0.1)$$

Здесь  $\hbar > 0$  — малый квазиклассический параметр;  $V(x)$  — гладкая вещественнозначная функция на  $\mathbb{R}^n$ ;  $q(y)$  — гладкая вещественнозначная функция на  $M$ ;  $\tilde{A} = \hbar^{-n/4} A$ ,  $A \in \mathbb{R}$  — начальная амплитуда, нормировочный множитель  $\hbar^{-n/4}$  обеспечивает оценку  $\|\psi(x, 0)\|_{L^2} = O(1)$ .

Начальная фаза  $S_0(x)$  имеет вид:

$$S_0(x) = s_0 + \langle p_0, x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle x - x_0, B_0(x - x_0) \rangle, \quad (3.0.2)$$

где  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0$  — симметричная  $n \times n$  матрица с комплексными элементами, причем  $\text{Im } B_0 > 0$ .

Мнимая часть начальной фазы  $S_0(x)$  обращается в нуль только в точке  $x_0$ . Условие  $\text{Im } B_0 > 0$  обеспечивает экспоненциальное затухание волновой функции во всех точках  $x \neq x_0$  и локализацию волнового пакета в малой окрестности  $x_0$ . Поскольку мнимая часть начальной фазы определяет поведение модуля волновой функции:

$$|\psi(x, 0)| \sim \hbar^{-n/4} |A| e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Im } S_0(x)},$$

и  $\text{Im } S_0 > 0$  вне точки  $x_0$ , выполняется оценка

$$|\psi(x, 0)| \leq C e^{-\frac{\alpha}{\hbar} |x - x_0|^2}, \quad C > 0, \alpha > 0.$$

В этом случае  $\|\psi(x, 0)\|_{L^2} < \infty$ . При  $\text{Im } B_0 < 0$  возникает экспоненциальный рост модуля, и норма  $\|\psi(x, 0)\|_{L^2}$  оказывается бесконечной:

$$|\psi(x, 0)| \geq C e^{\frac{\alpha}{\hbar} |x - x_0|^2}, \quad C > 0, \alpha > 0.$$

Покажем, что без потери общности можно ограничиться рассмотрением квадратичной начальной фазы (3.0.2). Пусть  $S_0(x)$  — произвольная гладкая функция с  $\text{Im } S_0(x) > 0$ . Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$ :

$$S_0(x) = S_0(x_0) + \langle \nabla S_0(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle x - x_0, H_0(x_0)(x - x_0) \rangle + O(|x - x_0|^3),$$

где  $H_0(x) = \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_i \partial x_j}(x)$  — гессиан начальной фазы  $S_0(x)$ . Слагаемое нулевого порядка  $S_0(x_0)$  входит в общий множитель  $e^{\frac{i}{\hbar} S_0(x_0)}$ , его мнимая часть задает постоянный множитель, влияющий только на нормировку. Линейный член  $\langle \nabla S_0(x_0), x - x_0 \rangle$  определяет положение центра пучка и начальный импульс. Ненулевая мнимая часть градиента  $\nabla S_0(x_0)$  приводит к возникновению множителя вида  $e^{-\frac{1}{\hbar} \langle \text{Im } \nabla S_0(x_0), x - x_0 \rangle}$ , дающего экспоненциальный рост в одном направлении и затухание в противоположном. Такое решение не локализовано и не принадлежит  $L_2(\mathbb{R}^n)$ , поэтому

мнимые слагаемые в линейном члене исключаются. Члены третьего и более высоких порядков дают лишь поправки к амплитуде порядка  $O(h^{1/2})$  и учитываются в старших членах асимптотики. Квадратичный член с положительно определенной мнимой частью дает множитель  $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{h}\langle x-x_0, \text{Im } H_0(x_0)(x-x_0) \rangle}$ , обеспечивающий  $L_2$ -интегрируемость начального условия и отвечающий физической картине гауссова пучка.

Область определения оператора с  $\delta$ -потенциалом (1.3.1), локализованным на поверхности  $M$  коразмерности 1, задается граничными условиями на  $M$  (1.3.4):

$$\begin{cases} \psi(r(y) - 0, t) = \psi(r(y) + 0, t), \\ h\left(\frac{\partial\psi}{\partial m}(r(y) - 0, t) - \frac{\partial\psi}{\partial m}(r(y) + 0, t)\right) = q(y)\psi(r(y), t), \end{cases} \quad (3.0.3)$$

где  $\psi(r(y) \pm 0, t)$  — пределы функции  $\psi(x, t)$  с противоположных сторон от  $M$ .

### 3.1 Асимптотика задачи с гладким потенциалом

Рассматривается асимптотика задачи Коши для уравнения Шредингера с гладким потенциалом ( $q \equiv 0$ ):

$$\begin{cases} ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + V(x)\psi, \\ \psi(x, 0) = Ae^{\frac{i}{h}S_0(x)}, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Обозначения сохраняются из постановки (3.0.1):  $V(x)$  — гладкая вещественная функция,  $S_0(x)$  — гладкая комплекснозначная функция вида (3.0.2).

#### 3.1.1 Комплексный метод ВКБ

Для построения асимптотики используется метод комплексного ростка Маслова [9]. Классический метод ВКБ оказывается недостаточным для узких пучков. Траектории в нем строятся как решения гамильтоновой системы, исходящие из точек с вещественной начальной фазой и заданным градиентом, однако вещественные траектории не обеспечивают затухания решения вне центра пучка. Для устранения этой трудности в методе комплексного ростка Маслова траектории и фаза продолжают в комплексное фазовое пространство.

Асимптотическое решение задачи (3.1.1) ищется в виде:

$$\begin{aligned} \psi(x, t, h) &= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}S(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k\left(\frac{x - Q(t)}{h^{1/2}}, t\right) h^{k/2}, \\ S(x, t) &= \sigma(t) + \langle P(t), x - Q(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - Q(t), BC^{-1}(t)(x - Q(t)) \rangle, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

где  $\sigma(t)$  — гладкая вещественная функция;  $Q(t)$  и  $P(t)$  — гладкие вещественные вектор-функции размерности  $n$ ;  $B(t)$  и  $C(t)$  — гладкие матричные  $n \times n$  функции, причем  $\text{Im } BC^{-1} > 0$ . Множитель  $h^{-n/4}$  обеспечивает нормировку решения в  $L_2$ .

Введем обозначения:

$$\phi_k(x, t) = \varphi_k \left( \frac{x - Q(t)}{h^{1/2}}, t \right), \quad k = 0, \dots, N. \quad (3.1.3)$$

Подставляя ряд (3.1.2) в уравнение (3.1.1) и группируя члены одинакового порядка по  $h$ , получаем:

$$\begin{aligned} \hat{L}\psi = & \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \left( \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x, t), \frac{\partial S}{\partial x}(x, t) \right\rangle + V(x) \right) \phi_k(x, t) h^{k/2} - \\ & - i h \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \left( \frac{\partial \phi_k}{\partial t}(x, t) + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x, t), \frac{\partial \phi_k}{\partial x}(x, t) \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S(x, t) \phi_k(x, t) - \frac{i h}{2} \Delta \phi_k(x, t) \right) h^{k/2} = 0 \end{aligned}$$

Как и в классическом методе ВКБ, можно было бы потребовать, чтобы фазовая функция удовлетворяла уравнению Гамильтона—Якоби, а старшая часть амплитуды и поправки к ней — уравнениям переноса вдоль соответствующих траекторий. Однако, поскольку  $\text{Im } S(x, t) > 0$  вне траектории  $Q(t)$ , множитель  $e^{-\frac{1}{h} \text{Im } S(x, t)}$  экспоненциально мал при удалении от  $Q(t)$ , и существенный вклад дают лишь точки вблизи  $Q(t)$ . Достаточно, чтобы уравнение Гамильтона—Якоби выполнялось вдоль траектории  $Q(t)$ , а не во всем пространстве. Для построения фазы потенциал  $V(x)$  разлагается в ряд Тейлора в окрестности  $Q(t)$ :

$$\begin{aligned} V(x) = & V(Q(t)) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(Q(t)), x - Q(t) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle x - Q(t), \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(Q(t))(x - Q(t)) \right\rangle + \\ & + \sum_{s \geq 3} \frac{1}{s!} \sum_{|m|=s} \left. \frac{\partial^s V}{\partial x^m} \right|_{x=Q(t)} (x - Q(t))^m. \end{aligned}$$

Поскольку фаза ищется как квадратичная функция относительно  $(x - Q(t))$  и учитывает лишь члены до второго порядка по  $(x - Q(t))$ , для ее построения оставим линейные и квадратичные слагаемые, а члены более высоких порядков  $s \geq 3$  отнесем в амплитуду. После перегруппировки слагаемых получаем:

$$\begin{aligned} \hat{L}\psi = & \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x, t), \frac{\partial S}{\partial x}(x, t) \right\rangle + V(Q(t)) + \right. \right. \\ & + \left. \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(Q(t)), x - Q(t) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle x - Q(t), \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(Q(t))(x - Q(t)) \right\rangle \right) \phi_k(x, t) h^{k/2} \\ & - i h \left( \frac{\partial \phi_k}{\partial t}(x, t) + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x, t), \frac{\partial \phi_k}{\partial x}(x, t) \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S(x, t) \phi_k(x, t) - \frac{i h}{2} \Delta \phi_k(x, t) + F_k(x, t) \right) h^{k/2} \Big] + \\ & + e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \tilde{F}_{N+1}(x, t, h) = 0, \end{aligned}$$

где  $F_k$  и  $\tilde{F}_{N+1}$  определены ниже в (3.1.13). При такой группировке видно, что фаза  $S(x, t)$  удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби лишь приближенно, с точностью до членов более

высокого порядка по  $(x - Q(t))$ , отнесенных в  $F_k$ . В отличие от вещественного случая фаза  $S(x, t)$  не может быть определена как действие вдоль характеристик на лагранжевом многообразии.

Подставляя квадратичную фазу  $S(x, t)$  и собирая слагаемые порядка  $h^0$  по степеням  $(x - Q(t))$ , получаем уравнения на  $Q(t)$ ,  $P(t)$ ,  $\sigma(t)$  и  $\Omega(t) := BC^{-1}(t)$ . Подстановка  $S(x, t)$  в начальные условия дает значения этих функций при  $t = 0$ . Слагаемые нулевого порядка приводят к уравнению для действия вдоль траектории  $\{Q(t), P(t)\}$ :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = \frac{|P(t)|^2}{2} - V(Q(t)), \\ \sigma(0) = s_0, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

где точкой обозначена производная  $d/dt$ . Гамильтониан системы:

$$H(p, q) = \frac{|p|^2}{2} + V(q). \quad (3.1.5)$$

Слагаемые первого порядка по  $(x - Q(t))$  приводят к уравнениям движения вдоль классической траектории:

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = P(t), \\ \dot{P}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}(Q(t)), \\ Q(0) = x_0, \\ P(0) = p_0. \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Слагаемые второго порядка приводят к уравнению Риккати на гессиан фазы  $\Omega(t) = BC^{-1}(t)$ :

$$\dot{\Omega}(t) + \Omega^T \Omega(t) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(Q(t)) = 0. \quad (3.1.7)$$

Его решение соответствует решению линейной системы вариаций и выражается через матрицы  $B(t)$  и  $C(t)$  при условии обратимости  $C(t)$ . Пара  $\{C(t), B(t)\}$  задает траекторию системы в вариациях вдоль классической траектории  $\{Q(t), P(t)\}$ , где  $C(t)$  отвечает вариации координат  $\delta q(t)$  относительно  $\delta q(0)$ ,  $B(t)$  — вариации импульсов  $\delta p(t)$  относительно  $\delta p(0)$ :

$$\begin{cases} \dot{C}(t) = H_{pq}C + H_{pp}B = B(t), \\ \dot{B}(t) = -H_{qq}C - H_{qp}B = -\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(Q(t))C(t), \\ C(0) = I, \\ B(0) = B_0. \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Оставшиеся слагаемые при  $h^k$ ,  $k \geq 1$ , приводят к уравнениям переноса для старшей части амплитуды  $\varphi_0$  и поправкам к ней  $\varphi_k$ :

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t}(x, t) + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x, t), \frac{\partial \phi_k}{\partial x}(x, t) \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S(x, t) \phi_k(x, t) - \frac{i\hbar}{2} \Delta \phi_k(x, t) + F_k(x, t) = 0. \quad (3.1.9)$$

Введем новую переменную

$$z = \frac{x - Q(t)}{h^{1/2}}.$$

Тогда амплитуды переписывается как

$$\phi_k(x, t) = \varphi_k(z, t), \quad k = 0, \dots, N.$$

Производные по  $x$  выражаются через  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_k}{\partial x}(x, t) &= h^{-1/2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}(z, t), \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}(z, t) - h^{-1/2} \left\langle \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}(z, t), \dot{Q}(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

В новых переменных фаза  $S(x, t)$  принимает вид:

$$S(x, t) = S(h^{1/2}z + Q(t), t) = \sigma(t) + h^{1/2} \langle P(t), z \rangle + \frac{h}{2} \langle z, BC^{-1}(t)z \rangle.$$

Подставляя эти выражения в уравнение переноса, получаем, что  $\varphi_k(z, t)$  удовлетворяют уравнениям переноса в новых координатах:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}(z, t) + \left\langle \dot{Q}(t)z, \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}(z, t) \right\rangle + \frac{1}{2} \operatorname{tr} BC^{-1}(t) \varphi_k(z, t) - \frac{i}{2} \Delta \varphi_k(z, t) + \Phi_k(z, t) = 0, \quad (3.1.10)$$

с начальными условиями:

$$\varphi_0(x, 0) = A, \quad \varphi_k(x, 0) = 0, \quad k > 0. \quad (3.1.11)$$

Здесь функции  $\Phi_k(z, t)$  представляют собой многочлены по  $z$  и выражаются через предыдущие поправки  $\varphi_j$ ,  $j < k$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0 &\equiv 0, \\ \Phi_k(z, t) &= i \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\varphi_l(z, t)}{(k+2-l)!} \sum_{|m|=k+2-l} \frac{\partial^{|m|} V}{\partial x^m}(Q(t)) z^m. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Тогда  $F_k(x, t)$  и  $\tilde{F}_{N+1}$  определяются как:

$$F_k(x, t) = \Phi_k(z, t) \Big|_{z=z(x,t)}, \quad \tilde{F}_{N+1} = -ih \sum_{k=N+1}^{\infty} \Phi_k(z, t) \Big|_{z=z(x,t)}. \quad (3.1.13)$$

**Утверждение 3.1.1** (см. [9], лемма 3.12). *Построенная функция  $\psi(x, t, h)$  (3.1.2) удовлетворяет уравнению (3.1.1) с точностью до  $\omega$ , где  $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+1}{2}})$ .*

Доказательство утверждения приведено в следующей главе для более общего случая.

### 3.1.2 Геометрическая интерпретация комплексного метода ВКБ

С геометрической точки зрения решение уравнения Гамильтона—Якоби меняется по сравнению с вещественным случаем. Начальное многообразие, индуцированное начальными данными

$$\Lambda_0 = \{(q, p) \in \mathbb{R}_{(q,p)}^{2n} : q = x_0, p = \nabla S_0(x_0)\}, \quad (3.1.14)$$

не является лагранжевым, а лишь изотропно в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,p)}^{2n}$ . Если начальный гауссов пучок локализован в окрестности точки  $x_0$ , множество  $\Lambda_0$  сводится к одной точке,  $\dim \Lambda_0 = 0$ . Для точки условие изотропности выполняется автоматически, поскольку ограничение симплектической формы автоматически обращается в нуль:

$$\dim T_{(x_0, \nabla S_0(x_0))} \Lambda_0 = 0, \quad \rightarrow \quad \omega|_{\Lambda_0} = (dp \wedge dq)|_{\Lambda_0} = 0.$$

Обозначим через  $g_t$  фазовый поток гамильтоновой системы с гамильтонианом  $H(p, q)$  (3.1.5). Многообразие  $\Lambda_t$ , полученное из  $\Lambda_0$  действием потока  $g_t$ , имеет вид:

$$\Lambda_t = g_t(\Lambda_0), \quad \Lambda_t = \{(q, p) \in \mathbb{R}_{(q,p)}^{2n} : q = Q(t), p = P(t)\}. \quad (3.1.15)$$

Поскольку гамильтонов поток сохраняет симплектическую форму,  $\Lambda_t$  остается изотропным:

$$g_t^* \omega|_{\Lambda_t} = \omega|_{\Lambda_0} = 0.$$

В расширенном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,t,p,p_t)}^{2n+2}$  с заданной стандартной симплектической формой  $\tilde{\omega} = dp \wedge dq + dp_t \wedge dt$  объединение подмногообразий  $\Lambda_t$  образует одномерную кривую  $\Lambda^1$ :

$$\begin{aligned} \Lambda^1 &= \bigcup_{t \in [0, T]} \Lambda_t = \bigcup_{t \in [0, T]} g_t(\Lambda_0) \\ \Lambda^1 &= \{(q, p, t, p_t) \in \mathbb{R}_{(q,t,p,p_t)}^{2n+2} : q = Q(t), p = P(t), t = t, p_t = -H(Q(t), P(t))\}. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Ограничение формы  $\tilde{\omega}$  на подмногообразие  $\Lambda^1$  обращается в нуль:

$$\tilde{\omega}|_{\Lambda^1} = (dp \wedge dq - dH \wedge dt)|_{\Lambda^1} = 0.$$

Вдоль изотропной кривой  $\Lambda^1$  строится функция действия  $\sigma(t)$ :

$$\sigma(t) = \sigma(0) + \int_0^t \left( \langle P(\tau), \dot{Q}(\tau) \rangle - H(Q(\tau), P(\tau)) \right) d\tau. \quad (3.1.17)$$

В отличие от вещественного случая, построение действия вдоль изотропной кривой  $\Lambda^1$  недостаточно для решения уравнения Гамильтона—Якоби с комплексной фазой. Построенная траектория  $\{Q(t), P(t)\}$  описывает лишь эволюцию центра локализации начального гауссова пучка  $(x_0, p_0)$ . Для построения асимптотики необходимо «продолжить» построенное многообразие до лагранжева. Для этого необходимо дополнить изотропную кривую новым геометрическим объектом — комплексным векторным расслоением над ней, отвечающим за комплексную часть фазы, или комплексным ростком.

Каждой точке кривой  $\Lambda^1$  сопоставим  $n$ -мерную плоскость  $r_t^n$  в комплексном фазовом пространстве  $\mathbb{C}_{(z,w)}^{2n}$  с комплексными координатами, индуцированными координатами  $(q, p)$ . Комплексную плоскость выберем так, чтобы при  $t = 0$  она содержала комплексифицированную касательную плоскость  $T^{\mathbb{C}}\Lambda_0$ , причем  $T^{\mathbb{C}}\Lambda_0 \cap \mathbb{R}^{2n} = T\Lambda_0$ . Для начального многообразия-точки росток  $r_0^n(\sigma)$  может быть параметризован следующим образом:

$$r_0^n(\sigma) = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : z_i = \alpha_i, w_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_j \right\}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.1.18)$$

Здесь  $\sigma \in \Lambda_0$ ; комплексные переменные  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  параметризуют направления роста из исходной точки  $(x_0, p_0)$ , а матрица вторых производных  $\frac{\partial^2 S_0}{\partial x_i \partial x_j}$  связывает направления в конфигурационном и импульсном пространствах, задавая структуру ростка. При этом движение касательных векторов под действием потока  $g_t$  описывается системой в вариациях: описывается системой в вариациях:

$$\begin{cases} \dot{w}(\alpha, t) = -H_{qq}z - H_{qp}w, \\ \dot{z}(\alpha, t) = H_{pq}z + H_{pp}w. \end{cases} \quad (3.1.19)$$

Ее решение с начальным условием на  $r_0^n(\sigma)$  представляет собой пару гладких  $n$ -мерных комплексных вектор-функций  $(z(\alpha, t), w(\alpha, t))$  и называется комплексным ростком  $r_t^n$ . В силу линейности уравнений (3.1.19) и (3.1.18) по  $\alpha$  достаточно рассмотреть систему (3.1.8).

Таким образом, для описания эволюции гауссова пучка требуется не только изотропное семейство  $\Lambda^1$ , но и более общая структура — семейство изотропных многообразий с комплексным ростком  $[\Lambda_t^1, r_t^n]$ . Росток представляет собой  $n$ -мерное комплексное подпространство касательного пространства, определяющее рост фазы в направлениях, ортогональных к изотропной кривой.

## 3.2 Асимптотика задачи с $\delta$ -потенциалом

### 3.2.1 Построение асимптотики

Рассматривается задача с  $\delta$ -потенциалом, локализованным на поверхности  $M$ . Так же, как и в предыдущей главе, решение задачи ищется в виде линейной комбинации трех волн: падающей, прошедшей и отраженной, каждая из которых связана с собственным изотропным многообразием и комплексным ростком. До момента взаимодействия с поверхностью  $M$  эволюция падающей волны совпадает с гладким случаем. Соответствующая геометрическая конструкция эволюционирует по классическим траекториям без изменений вплоть до момента взаимодействия с поверхностью  $M$ . Фаза и амплитуда определяются стандартными формулами комплексного метода ВКБ, как для гладкого случая. Прошедший пучок продолжает движение вдоль той же классической траектории, что и падающий. Для отраженного волнового пучка строится новое изотропное многообразие с комплексным ростком.

Рассмотрим траекторию падающего гауссова пучка  $\{Q^+(t), P^+(t)\}$  гамильтоновой системы с гамильтонианом  $H(x, p) = p^2/2 + V(x)$ , заданную начальными условиями:

$$Q^+(0) = x_0, \quad P^+(0) = p_0. \quad (3.2.1)$$

Начальным данным соответствует единственная траектория  $\{Q^+(t), P^+(t)\}$ . Всюду далее будем считать, что луч  $Q^+(t)$  пересекает поверхность  $M$  ровно один раз, причем пересечение трансверсально. Обозначим момент пересечения через  $t_0$ , а точку пересечения — через  $r(y_0) \in M$ , так что  $Q^+(t_0) = r(y_0)$ .

Условия отражения для траектории системы Гамильтона имеют вид:

$$Q^-(t_0) = Q^+(t_0), \quad P_n^-(t_0) = -P_n^+(t_0), \quad P_\tau^-(t_0) = P_\tau^+(t_0), \quad (3.2.2)$$

где  $P_n^+(t_0)$  и  $P_\tau^+(t_0)$  — нормальная и касательная к поверхности  $M$  компоненты вектора импульса  $P^+(t_0)$  в точке  $x = r(y_0)$ . Эти соотношения, как в случае вещественной фазы, отражают физический смысл классического закона отражения: нормальная компонента импульса изменяет знак, что соответствует изменению направления движения в нормальном к поверхности направлении, тогда как касательная компонента сохраняется, что соответствует закону сохранения касательного импульса при упругом отражении.

Аналогично гладкому случаю рассмотрим решения гамильтоновой системы в вариациях:

$$\dot{C} = H_{pp}B + H_{pq}C = B, \quad \dot{B} = -H_{qq}C - H_{qp}B = -\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(Q(t))C. \quad (3.2.3)$$

Определим симметричные матричные функции  $B^+(t)$  и  $C^+(t)$  размера  $n \times n$ , составленные из вектор-столбцов решений системы в вариациях (3.2.3) и заданные начальными условиями:

$$C^+(0) = I, \quad B^+(0) = B_0.$$

Обозначим  $\Omega^+(t) = B^+(t)(C^+(t))^{-1}$ . Определим новую  $n \times n$  матрицу  $\Omega^-$ , заданную уравнениями:

$$\begin{cases} \langle r_i, \Omega^- r_i \rangle = \langle r_i, \Omega^+(t_0) r_i \rangle + \langle r_{ij}, p^+ - p^- \rangle, \\ \langle p^-, \Omega^- p^- \rangle = \langle p^+, \Omega^+(t_0) p^+ \rangle + \langle \frac{\partial V}{\partial x}(r(y_0)), p^+ - p^- \rangle, \\ \langle p^-, \Omega^- r_i \rangle = \langle p^+, \Omega^+(t_0) r_i \rangle, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

где  $r_i = \frac{\partial r}{\partial y^i}(y_0)$ ,  $r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial y^i \partial y^j}(y_0)$  — элементы первой и второй квадратичной форм поверхности  $M$  соответственно, и  $p^\pm = P^\pm(t_0)$ . В силу симметрии матрицы  $B^+(t_0)$  матрица  $\Omega^-$  также симметрична, а ограничения накладываются на ее компоненты в естественном базисе  $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, m(y_0))$ . Разложение векторов  $P^+(t_0)$  и  $P^-(t_0)$  на нормальные и касательные компоненты и подстановка их в систему (3.2.4) дают  $n^2$  скалярных уравнений для компонентов  $\Omega^-$  в этом базисе. Здесь первое уравнение учитывает касательные направления и кривизну поверхности через вторую

квадратичную форму  $r_{ij}$ , второе задает компоненты вдоль нормали, а третье фиксирует смешанные компоненты, связывая нормальные и касательные направления. В силу линейной независимости базиса и симметрии матрицы  $B^+(t_0)$  система однозначно определяет симметричную матрицу  $\Omega^-$ .

Теперь определим матричные функции  $B^-(t)$  и  $C^-(t)$  как решения системы в вариациях (3.2.3), удовлетворяющие условиям:

$$B^-(t_0) = \Omega^-, \quad C^-(t_0) = I. \quad (3.2.5)$$

Построим функции  $S^+$ ,  $S^-$  и  $\hat{S}$  — фазы падающей, отраженной и прошедшей волн. Для этого введем функции  $\sigma^+(t_0)$ ,  $\sigma^-(t_0)$ ,  $\hat{\sigma}(t)$ :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(t) = \sigma^+(t) &= S_0(x_0) + \int_0^t \left( \frac{1}{2} \langle P^+(\tau), P^+(\tau) \rangle - V(Q^+(\tau)) \right) d\tau, \\ \sigma^-(t) &= \sigma^+(t_0) + \int_{t_0}^t \left( \frac{1}{2} \langle P^-(\tau), P^-(\tau) \rangle - V(Q^-(\tau)) \right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Определим функции  $S^+$ ,  $S^-$  и  $\hat{S}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} S^+(x, t) &= \sigma^+(t) + \langle P^+(t), x - Q^+(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - Q^+(t), B^+(C^+)^{-1}(t)(x - Q^+(t)) \rangle, \\ S^-(x, t) &= \sigma^-(t) + \langle P^-(t), x - Q^-(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - Q^-(t), B^-(C^-)^{-1}(t)(x - Q^-(t)) \rangle, \\ \hat{S}(x, t) &= S^+(x, t). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Перейдем к описанию амплитуд. Для этого введем новые переменные

$$z^+ = \frac{x - Q^+(t)}{h^{1/2}}, \quad z^- = \frac{x - Q^-(t)}{h^{1/2}}, \quad (3.2.8)$$

Рассмотрим уравнение переноса:

$$\dot{\varphi}_k + \left\langle \dot{Q}(t)z, \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right\rangle + \text{tr } BC^{-1}(t)\varphi_k - \frac{i}{2}\Delta\varphi_k + \Phi_k = 0, \quad (3.2.9)$$

где функции  $\Phi_k(z, t)$  представляют собой многочлены по  $z$  и выражаются через предыдущие поправки  $\varphi_l$ ,  $l < k$ :

$$\Phi_0(z, t) \equiv 0, \quad (3.2.10)$$

$$\Phi_k(z, t) = i \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\varphi_l}{(k+2-l)!} \sum_{|m|=k+2-l} \frac{\partial^{|m|} V}{\partial x^m}(Q(t)) z^m. \quad (3.2.11)$$

Здесь  $k = 0, \dots, N$ . Решения уравнений переноса  $\varphi_k(z, t)$  представляют собой многочлены от переменной  $z$  степени  $3k$ . Для падающего пучка в начальный момент времени  $t = 0$  амплитуда определяется начальными условиями:

$$\varphi_0^+(z^+, 0) = A, \quad \varphi_k^+(z^+, 0) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.2.12)$$

Амплитуды отраженного и прошедшего пучков определяются из краевых условий на поверхности  $M$ . Для их записи введем  $n$ -мерный вектор  $\xi = (y - y_0, \dots, t - t_0)h^{-1/2}$ . Тогда на поверхности  $M$  выполняется разложение:

$$z^\pm|_M = z_1(\xi) + \sum_{i=2}^{\infty} z_k(\xi)h^{\frac{k-1}{2}}, \quad \xi = (y - y_0, \dots, t - t_0)h^{-1/2}, \quad (3.2.13)$$

где  $z_k$  - однородные многочлены от  $\xi$  степени  $k$ . Потребуем от  $\varphi_k^+(z^+, t)$ ,  $\varphi_k^-(z^-, t)$ ,  $\hat{\varphi}_k(z^+, t)$  выполнения следующих краевых условий, устанавливающих связь между амплитудой падающего пучка и амплитудами отраженного и прошедшего пучков:

$$\begin{aligned} \varphi_k^-(z_1, t_0) &= \frac{-q(y_0)\varphi_k^+(z_1, t_0) + u_k(\xi)}{2iP_n^+(t_0) + q(y_0)}, \\ \hat{\varphi}_k(z_1, t_0) &= \frac{2iP_n^+(t_0)\varphi_k^+(z_1, t_0) + v_k(\xi)}{2iP_n^+(t_0) + q(y_0)}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Здесь  $u_k(\xi)$  и  $v_k(\xi)$ ,  $k = 0, \dots, N$ , — многочлены от  $\xi$ , коэффициенты которых зависят от предыдущих поправок к амплитудам с номерами  $0, \dots, k-1$ , причем  $u_0(\xi) \equiv v_0(\xi) \equiv 0$ . Они будут определены далее при доказательстве теоремы.

Введем функцию

$$\Psi(x, t, h) = \begin{cases} h^{-n/4}e^{\frac{i}{h}S^+(x,t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k^+\left(\frac{x-Q^+(t)}{h^{1/2}}, t\right)h^{k/2} + \\ + h^{-n/4}e^{\frac{i}{h}S^-(x,t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k^-\left(\frac{x-Q^-(t)}{h^{1/2}}, t\right)h^{k/2} + \omega_1, & \text{с отрицательной стороны от } M, \\ h^{-n/4}e^{\frac{i}{h}\hat{S}(x,t)} \sum_{k=0}^N \hat{\varphi}_k\left(\frac{x-Q^+(t)}{h^{1/2}}, t\right)h^{k/2} + \omega_2, & \text{с положительной стороны от } M, \end{cases} \quad (3.2.15)$$

где  $\|\omega_i\|_{L_2} = O(h^{N/2})$ ,  $i = 1, 2$ , определены ниже (см. доказательство теоремы).

**Теорема 3.1.** *Решение задачи Коши (3.0.1) при  $t \in [t_0, T]$  представимо в виде  $\psi = \Psi + \omega$ , где  $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{N/2-1})$ .*

**Замечание 3.2.** *Построенная функция  $\Psi(x, t, h)$  является асимптотическим приближенным решением задачи Коши (3.0.1) и удовлетворяет уравнению Шредингера с точностью до слагаемого порядка  $O(h^{\frac{N+3}{2}})$ :*

$$\|\hat{L}\Psi\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+3}{2}}) \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad (3.2.16)$$

где оператор  $\hat{L}$  определен при доказательстве теоремы.

*Доказательство.* Обозначим через  $\hat{L}$  нестационарный оператор Шредингера с гладким потенциалом:

$$\hat{L} = -ih\frac{\partial}{\partial t} - \frac{h^2}{2}\Delta + V(x).$$

1. Положим  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  и покажем, что выполняется оценка  $\|\hat{L}\Psi\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+3}{2}})$ .

Сделаем замену переменных

$$z^j = (x - Q^j(t))h^{-1/2}.$$

Здесь и далее индексом  $j = \{1, 2, 3\}$  переобозначены символы  $\{+, -, \wedge\}$ . В новых переменных оператор  $\hat{L}$  принимает вид:

$$\hat{L} = -ih\frac{\partial}{\partial t} + ih^{1/2}\left\langle \dot{Q}(t), \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle - \frac{h}{2}\Delta + V(Q(t) + h^{1/2}z).$$

Рассмотрим действие оператора  $\hat{L}$  на функцию  $\Psi(z, t, h)$ . Получим:

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi = & h^{-n/4} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left[ \left( \dot{\sigma}^\alpha - \langle \dot{Q}^\alpha, P^\alpha \rangle + \frac{1}{2} \langle P^\alpha, P^\alpha \rangle + V(Q^\alpha) \right) \varphi_k^\alpha + \right. \\ & + h^{1/2} \left( \langle \dot{P}^\alpha, z^\alpha \rangle - \langle \dot{Q}^\alpha, \Omega^\alpha z^\alpha \rangle + \langle P^\alpha, \Omega^\alpha z^\alpha \rangle + \langle \nabla_x V(Q^\alpha), z^\alpha \rangle \right) \varphi_k^\alpha + \\ & + ih^{1/2} \langle \dot{Q}^\alpha - P^\alpha, \frac{\partial \varphi_k^\alpha}{\partial z} \rangle + \frac{h}{2} \left( \langle z, \dot{\Omega}^\alpha z \rangle + \langle \Omega^\alpha z, \Omega^\alpha z \rangle + \langle z, \Delta_x V(Q^\alpha) z \rangle \right) \varphi_k^\alpha - \\ & - ih \left( \frac{\partial \varphi_k^\alpha}{\partial t} + \left\langle \Omega^\alpha z, \frac{\partial \varphi_k^\alpha}{\partial z} \right\rangle + \text{tr } \Omega^\alpha \varphi_k^\alpha - \frac{i}{2} \Delta \varphi_k^\alpha \right) \Big] h^{k/2} + \\ & + h^{-n/4} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} \sum_{|m|=k} h^{k/2} \frac{\partial^k V}{\partial x^m}(Q^\alpha) z^m \sum_{l=0}^N \varphi_l^\alpha h^{l/2}, \end{aligned}$$

где  $\Omega^\pm = B^\pm(C^\pm)^{-1}$ . Здесь и далее индексы при переменных  $z^\alpha$  и аргументы функций опущены для упрощения записи. В новых переменных фазовые функции принимают вид:

$$S^\pm(z, t) = \sigma^\pm(t) + h^{1/2} \langle P^\pm(t), z \rangle + \frac{h}{2} \langle z, \Omega^\pm(t) z \rangle.$$

Поскольку по построению  $\{Q^\pm, P^\pm\}$  — траектории системы Гамильтона,  $\{B^\pm, C^\pm\}$  — решения системы в вариациях (3.2.3), а  $\sigma^\alpha$  определены формулами (3.2.6), то соответствующие слагаемые обращаются в нуль, и действие оператора  $\hat{L}\Psi$  переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi = & h^{-n/4} \sum_{\alpha=1}^3 e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left[ -ih \sum_{k=0}^N \left( \frac{\partial \varphi_k^\alpha}{\partial t} + \left\langle \Omega z, \frac{\partial \varphi_k^\alpha}{\partial z} \right\rangle + \text{tr } \Omega^\alpha \varphi_k^\alpha - \frac{i}{2} \Delta \varphi_k^\alpha \right) h^{k/2} + \right. \\ & \left. + h^{-n/4} \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} \sum_{|m|=k} h^{k/2} \frac{\partial^k V}{\partial x^m}(Q^\alpha) z^m \sum_{l=0}^N \varphi_l^\alpha h^{l/2} \right]. \end{aligned}$$

В силу того, что  $\varphi_k^\alpha$  — решения соответствующих уравнений переноса, получаем:

$$\hat{L}\Psi = h^{-n/4} h \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=N+1}^{\infty} h^{\frac{k}{2}} \sum_{j=0}^k \frac{\varphi_j^\alpha}{(k-j+2)!} \sum_{|m|=k-j+2} \frac{\partial^{|m|} V}{\partial x^m}(Q^\alpha(t)) z^m,$$

$$\|\hat{L}\Psi\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+3}{2}}).$$

2. Покажем, что  $\omega_1, \omega_2$  можно выбрать таким образом, чтобы решение  $\Psi$  лежало в области определения оператора  $\hat{L}$ . Для этого должны выполняться краевые условия (3.0.3). Предположим, что  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . По построению  $\Psi$  представимо в виде линейной комбинации падающей, прошедшей и отраженной волн. Рассмотрим каждую из них в точках поверхности  $M$ , заданной уравнением  $x = r(y)$ . Определим вектор  $\xi = (y - y_0, t - t_0)h^{-1/2}$ , тогда

$$z|_M = z_1(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(\xi) h^{\frac{k-1}{2}},$$

где  $z_k$  - однородные многочлены от  $\xi$  степени  $k$ . Сделаем линейную замену  $z \rightarrow z_1$ . После этого фазы  $S^+$  и  $S^-$  можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} S^{\pm}(z_1(\xi), t) &= \sum_{m=0}^{\infty} S_m^{\pm}(\xi) h^{m/2} = \sigma^{\pm}(t_0) + (\dot{\sigma}^{\pm}(t_0) \xi^n + \langle P^{\pm}, z_1(\xi) \rangle) h^{1/2} + \\ &+ \left( \frac{1}{2} \ddot{\sigma}^{\pm}(\xi^n)^2 + \langle \dot{P}^{\pm}(t_0), z_1(\xi) \rangle \xi^n + \langle P^{\pm}(t_0), z_2(\xi) \rangle + \frac{1}{2} \langle Q^{\pm}(t_0) z_1(\xi), z_1(\xi) \rangle \right) h + \\ &+ \sum_{m=3}^{\infty} S_m^{\pm}(\xi) h^{m/2}, \end{aligned}$$

где  $S_m^{\pm}$  - однородные многочлены от  $\xi$  степени  $m$ . Тогда

$$\frac{i}{h} S^{\pm} = \frac{i}{h} (S_0 + S_1 h^{1/2} + S_2 h) + \sum_{m=3}^{\infty} S_m h^{\frac{m-2}{2}}.$$

Для функций действия  $\sigma^{\pm}$  из построения известно, что их производные выражаются как

$$\dot{\sigma}^{\pm}(t) = \frac{1}{2} \langle P^{\pm}(t), P^{\pm}(t) \rangle - V(Q^{\pm}(t)), \quad \ddot{\sigma}^{\pm}(t) = 2 \langle P^{\pm}(t), \dot{P}^{\pm}(t) \rangle.$$

Далее заметим, что первые два члена разложения вектора  $z$  на поверхности  $M$  имеют вид:

$$z_1(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial r}{\partial y^i} \xi^i - P(t_0) \xi^n, \quad z_2(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 r}{\partial y^i \partial y^j} \xi^i \xi^j - \dot{P}(t_0) (\xi^n)^2.$$

Тогда, учитывая выполнение условий (3.2.2) и (3.2.4), следует, что фазы падающей и отраженной волн на поверхности  $M$  совпадают вплоть до квадратичных по  $\xi$  слагаемых:

$$S_0^+(\xi) = S_0^-(\xi), \quad S_1^+(\xi) = S_1^-(\xi), \quad S_2^+(\xi) = S_2^-(\xi).$$

Разложим амплитуды по переменной  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \varphi_k^{\pm}(z(\xi), t) &= \varphi_k^{\pm}(z_1(\xi), t_0) + \sum_{s \geq 1} \varphi_k^{\pm s}(\xi) h^{s/2}, \\ \hat{\varphi}_k(z(\xi), t) &= \hat{\varphi}_k(z_1(\xi), t_0) + \sum_{s \geq 1} \hat{\varphi}_k^s(\xi) h^{s/2}, \end{aligned}$$

где  $\varphi_k^{\pm s}(\xi)$  и  $\hat{\varphi}_k^s(\xi)$  представляют собой многочлены от переменной  $\xi$ .

Рассмотрим разложения по  $\xi$  для функций, входящих в краевые условия (3.0.3):

$$\begin{aligned}\Psi^+|_M &= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N (\varphi_k^+(z_1, t_0) + \chi_k^+(\xi)) h^{k/2} + \phi^+, \\ h \frac{\partial \Psi^+}{\partial m} \Big|_M &= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N (iP_n(t_0)\varphi_k^+(z_1, t_0) + \mu_k^+(\xi)) h^{k/2} + \phi_m^+, \\ q(y)\Psi|_M &= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} (q(y_0) \sum_{k=0}^N \varphi_k^+(z_1, t_0) + \gamma_k^+(\xi)) h^{k/2} + \phi_q^+, \end{aligned}$$

Здесь  $P_n(t_0) = \langle P^+(t_0), m(y_0) \rangle$ ;  $\chi_k^+(\xi)$ ,  $\mu_k^+(\xi)$  и  $\gamma_k^+(\xi)$  — многочлены от  $\xi$ , выражающиеся через линейные комбинации функций  $\varphi_k^+(z_1(\xi), t_0)$  с номерами  $k = 1, \dots, N$ , при этом  $\chi_0^+(\xi) \equiv \mu_0^+(\xi) \equiv \gamma_0^+(\xi) \equiv 0$ . Остаточные функции  $\phi^+(\xi)$ ,  $\phi_m^+(\xi)$  и  $\phi_q^+(\xi)$  имеют порядок  $O(h^{\frac{N+1}{2}})$  и не влияют на построение ведущей асимптотики. Аналогично устроены разложения для отраженной и прошедшей волн. Подставляя полученные разложения в краевые условия (3.0.3), из первого условия получим:

$$\begin{aligned}h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N (\varphi_k^+(z_1, t_0) + \varphi_k^-(z_1(\xi), t_0)) h^{k/2} = \\ = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N (\hat{\varphi}_k(z_1, t_0) + \chi_k(\xi)) h^{k/2} + \phi. \end{aligned}$$

Второе краевое условие перепишем в виде:

$$\begin{aligned}ih^{-n/4} P_n^+(t_0) e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N (\varphi_k^+(z_1, t_0) - \varphi_k^-(z_1, t_0) - \hat{\varphi}_k(z_1, t_0)) h^{k/2} = \\ = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N (q(y_0)\varphi_k(z_1, t_0) + \gamma_k(\xi) + \mu_k(\xi)) h^{k/2} + \phi_m. \end{aligned}$$

Для компактности введены обозначения:

$$\chi_k(\xi) = \hat{\chi}_k - \chi_k^+ - \chi_k^-, \quad \mu_k(\xi) = \hat{\mu}_k - \mu_k^+ - \mu_k^-, \quad \gamma_k(\xi) = \hat{\gamma}_k - \gamma_k^+ - \gamma_k^-,$$

где  $k = 0, \dots, N$ , и определены дополнительные функции:

$$\phi(\xi) = \hat{\phi} - \phi^+ - \phi^-, \quad \phi_m(\xi) = \hat{\phi}_q - \phi_q^+ - \phi_q^- + \hat{\phi}_m - \phi_m^+ - \phi_m^-,$$

Остаточные функции  $\phi(\xi)$ ,  $\phi_m(\xi)$  имеют порядок  $O(h^{\frac{N+1}{2}})$ .

Принимая во внимание условия на амплитуды (3.2.14), получим, что первое краевое условие (3.0.3) — непрерывности функции на поверхности  $M$  — выполняется с точностью

до слагаемого  $\phi$ , второе краевое условие — с точностью до слагаемого  $\phi_m$ . Функция  $\Psi^0 = \Psi|_{\omega=0}$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \Psi^0(r(y) - 0, t) - \Psi^0(r(y) + 0, t) = \phi, \\ h \left( \frac{\partial \Psi^0}{\partial \nu}(r(y) - 0, t) - \frac{\partial \Psi^0}{\partial \nu}(r(y) + 0, t) \right) - q(y)\Psi^0(r(y), t) = \phi_\nu. \end{cases} \quad (3.2.17)$$

Отметим свойства функций  $\phi$ ,  $\phi_\nu$ . Каждая из этих функций представляется в виде:

$$h^{\frac{N+1}{2} - \frac{n}{4}} e^{-\frac{i}{h}s} g(\xi, y, t, h), \quad (3.2.18)$$

где  $s$  — квадратичная по  $\xi$  часть функции  $S^+|_M$ ,  $g(\xi, y, t, h)$  — гладкая функция своих аргументов, растущая при  $|\xi| \rightarrow \infty$  не быстрее многочлена. Нормы функций  $\phi$  и  $\phi_\nu$  удовлетворяют оценкам:

$$\|\phi\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+1}{2}}), \quad \left\| h \frac{\partial}{\partial y_j} \phi \right\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+1}{2}}), \quad \left\| h \frac{\partial}{\partial t} \phi \right\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+1}{2}}),$$

кроме того, эти функции локализованы в малой окрестности точки  $r(y_0)$ , и экспоненциально малы на конечном, не зависящем от  $h$ , расстоянии от этой точки.

Введем в окрестности точки  $r(y_0)$  координаты  $(y, \rho)$ , где  $\rho$  — ориентированное расстояние до  $M$  по нормали. Определим функцию  $\omega$  с положительной стороны от  $M$  в этой окрестности по формуле

$$\omega = e^{-\frac{\rho^2}{h}} \left( \phi + \frac{\rho}{h} (\phi_\nu - q\phi) \right) \quad (3.2.19)$$

и продолжим ее во все пространство при помощи гладкой не зависящей от  $h$  функции, равной нулю вне некоторой большей окрестности. Построенная функция  $\Psi$  точно удовлетворяет краевым условиям (3.0.3) и лежит в области определения оператора Шредингера с  $\delta$ -потенциалом. Кроме того, выполнены оценки:

$$\|\omega\|_{L_2} = O(h^{\frac{N}{2}}), \quad \left\| h \frac{\partial}{\partial x_j} \omega \right\|_{L_2} = O(h^{\frac{N}{2}}), \quad \left\| h \frac{\partial}{\partial t} \omega \right\|_{L_2} = O(h^{\frac{N}{2}}), \quad (3.2.20)$$

и

$$\hat{L}\Psi = O(h^{\frac{N}{2}}). \quad (3.2.21)$$

Определим функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  по разные стороны от поверхности  $M$ :

$$\omega_1(z, t) \equiv 0, \quad \omega_2(z, t) = \omega(z, t). \quad (3.2.22)$$

Переопределим функцию  $\Psi : \Psi \rightarrow \Psi + \omega_1 + \omega_2$ . Построенная функция точно удовлетворяет краевым условиям (3.0.3). При этом справедлива оценка

$$\|\hat{L}(\omega_1 + \omega_2)\|_{L_2} = O(h^{\frac{N}{2}}). \quad (3.2.23)$$

3. При  $t = 0$  носитель начальных данных  $\varphi^0$  компактен и расположен на положительном расстоянии от  $M$ , поэтому отраженная и прошедшая волны при  $t = 0$  отсутствуют. Полагая  $\omega_1|_{t=0} = 0$ , получаем

$$\Psi|_{t=0} = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi_0^+(z^+, 0) = h^{-n/4} A e^{\frac{i}{h} S_0(x)} = \psi(x, 0),$$

то есть начальное условие выполняется точно.

4. Построенная функция  $\Psi$  удовлетворяет уравнению:

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi + f,$$

где  $\hat{H}$  — оператор Шредингера с  $\delta$ -потенциалом, причем  $\|f\|_{L_2} = O(h^{\frac{N}{2}})$ . Пусть  $\psi$  — истинное решение. Рассмотрим  $w = \Psi - \psi$ . Для функции  $w$  верно:

$$ih \frac{\partial w}{\partial t} = \hat{H} w + f. \quad (3.2.24)$$

Тогда в силу самосопряженности оператора  $\hat{H}$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} ih \langle \frac{\partial w}{\partial t}, w \rangle &= \langle \hat{H} w, w \rangle + \langle f, w \rangle, \\ -ih \langle w, \frac{\partial w}{\partial t} \rangle &= \langle \hat{H} w, w \rangle + \langle w, f \rangle. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем:

$$h \frac{\partial}{\partial t} \|w\|_{L_2}^2 = 2 \operatorname{Im} \langle f, w \rangle.$$

Поскольку  $\operatorname{Im} \langle f, w \rangle \leq \|w\|_{L_2} \|f\|_{L_2}$ , то  $h \frac{\partial}{\partial t} \|w\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}$ . Тогда выполняется оценка

$$\|w\|_{L_2} \leq \frac{1}{h} \int_0^t \|f\|_{L_2} d\tau.$$

$$\|w\|_{L_2} \leq O(h^{N/2-1}), \quad (3.2.25)$$

что завершает доказательство. □

### 3.2.2 Геометрическая интерпретация

С геометрической точки зрения взаимодействие гауссова пучка с  $\delta$ -потенциалом описывается отражением изотропного многообразия и модификацией комплексного ростка. Падающей и прошедшей волнам соответствует пара  $[\Lambda^{1,+}, r_t^{n,+}]$ , отраженной — пара  $[\Lambda^{1,-}, r_t^{n,-}]$ .

Изотропные кривые определяются как

$$\Lambda^{1,\pm} = \{(q, p, t, p_t) \in \mathbb{R}^{2n+2} : q = Q^\pm(t), p = P^\pm(t), p_t = -H(Q^\pm(t), P^\pm(t))\}, \quad (3.2.26)$$

и на каждой из них задана форма объема  $d\sigma^\pm = dt$ , согласованная с параметризацией по времени вдоль траектории. Многообразие  $\Lambda^{1,-}$  получается из  $\Lambda^{1,+}$  заменой нормальной компоненты импульса на противоположную в точке пересечения с  $M$ :

$$Q^-(t_0) = Q^+(t_0), \quad P_n^-(t_0) = -P_n^+(t_0), \quad P_\tau^-(t_0) = P_\tau^+(t_0), \quad (3.2.27)$$

после чего  $\Lambda^{1,-}$  продолжается сдвигом вдоль траекторий гамильтоновой системы при  $t > t_0$ .

Ростки определяются следующим образом. Для падающей волны конструкция полностью совпадает с гладким случаем: начальный росток  $r_0^{n,+}$  определяется из начальных условий (3.0.2). Поскольку начальная фаза  $S_0(x)$  является квадратичной функцией с матрицей  $B_0$ , начальный росток задается матрицей вторых производных  $S_0$ :

$$r_0^{n,+} = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : z_i = \alpha_i, w_i = \sum_{j=1}^n (B_0)_{ij} \alpha_j \right\}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n. \quad (3.2.28)$$

Условие  $\text{Im } B_0 > 0$  обеспечивает невырожденность ростка и экспоненциальное затухание решения при удалении от траектории  $Q^+(t)$ . Росток эволюционирует по системе в вариациях (3.2.3), и матрица  $\Omega^+(t) = B^+(t)(C^+(t))^{-1}$  сохраняет положительно определенную мнимую часть при всех  $t \in [0, T]$ , что гарантирует локализацию решения вдоль траектории. Прошедшей волне отвечает тот же начальный росток  $r_0^{n,+}$ , что и падающей.

Начальный росток отраженной волны  $r_{t_0}^{n,-}$  определяется матрицей  $\Omega^-$  из системы (3.2.4):

$$r_{t_0}^{n,-} = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : z_i = \alpha_i, w_i = \sum_{j=1}^n \Omega_{ij}^- \alpha_j \right\}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n. \quad (3.2.29)$$

Матрица  $\Omega^-$  определяется из условия согласования ростка с геометрией поверхности  $M$ . Ограничения на касательные направления к  $M$  приводят к сдвигу  $\Omega^-$  относительно  $\Omega^+(t_0)$  на слагаемые, содержащие вторую квадратичную форму поверхности  $r_{ij}$ . Нормальное направление к  $M$  фиксируется законом отражения, а смешанные компоненты — условием согласования нормальных и касательных направлений. Условие  $\text{Im } \Omega^- > 0$  сохраняется в силу системы (3.2.4) и обеспечивает локализацию отраженного пучка вдоль траектории  $Q^-(t)$ .

При  $t > t_0$  пара  $[\Lambda^{1,-}, r_t^{n,-}]$  эволюционирует по той же гамильтоновой системе, а форма объема  $d\sigma^-$  переносится потоком с момента  $t_0$ .

Таким образом, влияние  $\delta$ -потенциала сводится к отражению изотропного многообразия и модификации ростка на поверхности  $M$  — пара  $[\Lambda^{1,-}, r_{t_0}^{n,-}]$  порождается из  $[\Lambda^{1,+}, r_{t_0}^{n,+}]$  заменой нормальной компоненты импульса на противоположную, а росток претерпевает дополнительный сдвиг, определяемый кривизной поверхности  $M$ .

## Глава 4

# Квазиклассические асимптотики с комплексной фазой, локализованной в окрестности поверхности

В предыдущей главе рассматривалась задача Коши для уравнения Шредингера с начальными данными, локализованными в малой окрестности точки. Были изложены основные идеи метода комплексного ростка Маслова и описана его модификация для задачи с  $\delta$ -потенциалом на поверхности коразмерности 1.

В настоящей главе изучается более общий случай, когда начальные данные локализованы в окрестности подмногообразия положительной коразмерности. Начальное многообразие перестает быть точкой и становится изотропным подмногообразием положительной размерности, а комплексный росток определяется над ним как векторное расслоение. Утверждения теории комплексного ростка Маслова формулируются и доказываются применительно к уравнению Шредингера, включая построение комплексной фазы, асимптотического решения и сопутствующих геометрических объектов. Строится асимптотика и исследуется перестройка изотропного многообразия с комплексным ростком при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом.

## Постановка задачи

Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  — гладкая ориентированная гиперповерхность коразмерности 1, заданная параметризацией  $x = r(y)$ , где  $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$  — локальные координаты на  $M$ . Обозначим через  $m(y)$  единичную нормаль к  $M$  в точке  $r(y)$ , направленную в сторону носителя начальных данных, через  $\delta_M$  — дельта-функцию, сосредоточенную на поверхности  $M$ .

Рассмотрим задачу Коши для нестационарного уравнения Шредингера с  $\delta$ -потенциалом:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{h} \delta_M \psi, \\ \psi(x, 0) = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x). \end{cases} \quad (4.0.1)$$

Здесь  $h > 0$  — малый квазиклассический параметр;  $V(x)$  — гладкая вещественнозначная функция на  $\mathbb{R}^n$ ;  $q(y)$  — гладкая вещественнозначная функция на  $M$ ; нормировочный множитель  $h^{-n/4}$  обеспечивает оценку  $\|\psi(x, 0)\|_{L_2} = O(1)$ .

В отличие от предыдущей главы начальные данные задаются в виде гауссова пучка, локализованного в окрестности  $k$ -мерной гладкой односвязной поверхности  $\gamma_0^k \subset \mathbb{R}^n$ . Начальная фаза  $S_0(x)$  — гладкая комплекснозначная функция такая, что  $\text{Im } S_0(x) \geq 0$ , причем  $\text{Im } S_0(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x \in \gamma_0^k$ . Поверхность  $\gamma_0^k$  определяется равенством

$$\gamma_0^k = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{Im } S_0(x) = 0\}, \quad (4.0.2)$$

причем

$$\text{rang} \left( \text{Im} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\gamma_0^k} \right) = n - k, \quad (4.0.3)$$

и задается параметрически:

$$\gamma_0^k = \{x \in \mathbb{R}^n : x = q_0(\tau)\}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_k) \in \gamma_0^k. \quad (4.0.4)$$

Поскольку  $\text{Im } S_0 \Big|_{\gamma_0^k} = 0$ , функция  $\frac{\partial S_0}{\partial x} \Big|_{\gamma_0^k}$  вещественна. Без ограничения общности определим начальную фазу  $S_0$  в виде:

$$S_0(x) = s_0 + \langle p_0, x - q_0(\tau) \rangle + \frac{1}{2} \langle B_0(x - q_0(\tau)), x - q_0(\tau) \rangle \Big|_{\tau=\tau(x)}, \quad (4.0.5)$$

где  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0$  — симметричная  $n \times n$  матрица с элементами из  $\mathbb{C}$ , причем  $\text{Im}(B_0) > 0$ .

Начальную амплитуду  $\varphi^0(x)$  будем считать заданной в виде ряда, содержащего конечное число слагаемых  $N_0$ :

$$\varphi^0(x) = \sum_{m=0}^{N_0} \varphi_m^0 \left( \frac{x - q_0(\tau)}{h^{1/2}} \right) \Big|_{\tau=\tau(x)} h^{m/2}, \quad (4.0.6)$$

где  $\varphi_m^0(z)$  — однородные многочлены по «быстрым» переменным  $z$  степени  $m$ . Такое представление не ограничивает общности, поскольку члены с  $m > N_0$  дают вклад порядка  $O(h^{(N_0+1)/2})$  и не влияют на построение асимптотики до заданного порядка  $N$ .

Область определения оператора с  $\delta$ -потенциалом (1.3.1), локализованным на поверхности  $M$  коразмерности 1, задается граничными условиями на  $M$  (1.3.4):

$$\begin{cases} \psi(r(y) - 0, t) = \psi(r(y) + 0, t), \\ h \left( \frac{\partial \psi}{\partial m}(r(y) - 0, t) - \frac{\partial \psi}{\partial m}(r(y) + 0, t) \right) = q(y) \psi(r(y), t), \end{cases} \quad (4.0.7)$$

где  $\psi(r(y) \pm 0, t)$  — пределы функции  $\psi(x, t)$  с противоположных сторон от  $M$ .

## 4.1 Асимптотика задачи с гладким потенциалом

Напомним конструкцию решения задачи Коши для гладкого потенциала ( $q \equiv 0$ ). Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x), \\ \psi(x, 0) = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x). \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Будем считать, что все функции, входящие в уравнение и начальное условие, определены так же, как и для исходной задачи (4.0.1).

Асимптотическое решение задачи Коши (4.1.1) при  $h \rightarrow 0$  представляется в виде асимптотического ряда:

$$\Psi(x, t, h) = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k \left( \frac{x - Q(\tau, t)}{h^{1/2}}, t \right) \Big|_{\tau=\tau(x, t)} h^{k/2}. \quad (4.1.2)$$

Здесь  $S(x, t)$  — гладкая комплекснозначная функция вида

$$S(x, t) = \sigma(\tau, t) + \langle P(\tau, t), x - Q(\tau, t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - Q(\tau, t), BC^{-1}(\tau, t)(x - Q(\tau, t)) \rangle \Big|_{\tau=\tau(x, t)}. \quad (4.1.3)$$

Гладкая вектор-функция  $\tau(x, t) = (\tau_1(x, t), \dots, \tau_k(x, t))$  является решением системы

$$\langle x - Q(\tau, t), \frac{\partial Q}{\partial \tau_i}(\tau, t) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.1.4)$$

Для построения асимптотики используется метод комплексного ростка Маслова, основные идеи которого изложены в предыдущей главе. В случае начальных данных, локализованных в окрестности поверхности положительной коразмерности, геометрия задачи существенно усложняется и требует более детального рассмотрения.

### 4.1.1 Построение фазы

Для построения фазовой функции (4.0.5) рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x, t), \frac{\partial S}{\partial x}(x, t) \right\rangle + V(x) = 0, \\ S(x, 0) = S_0(x). \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Рассмотрим фазовое пространство  $\mathbb{R}_{(q,p)}^{2n}$  с координатами  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , оснащенное стандартной симплектической формой  $\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i$ . Начальные данные задачи Коши (4.1.5) индуцируют в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,p)}^{2n}$  изотропное  $k$ -мерное многообразие

$$\Lambda_0^k = \{(q, p) : p = \frac{\partial S}{\partial x}(q, t), \quad q = q_0(\tau) \in \gamma_0^k\}. \quad (4.1.6)$$

Уравнение  $x = q_0(\tau)$  задает поверхность  $\gamma_0^k$ , где  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$  — координаты на  $\gamma_0^k$ .

Гамильтониан системы имеет вид:

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} + V(q), \quad (4.1.7)$$

соответствующая гамильтонова система записывается как

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}(q). \quad (4.1.8)$$

Пусть  $\{Q(\tau, t), P(\tau, t)\}$  — траектория гамильтоновой системы (4.1.8), заданная начальными условиями:

$$Q(\tau, 0) = q_0(\tau), \quad P(\tau, 0) = \frac{\partial S_0}{\partial x}(q_0(\tau)). \quad (4.1.9)$$

В каждый момент времени  $t \in [0, T]$  рассмотрим в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,p)}^{2n}$  многообразие  $\Lambda_t^k$ . Она представляет собой изотропное  $k$ -мерное многообразие и получается из исходного многообразия  $\Lambda_0^k$  сдвигом за время  $t$  вдоль траекторий системы Гамильтона (4.1.8). Тогда при каждом  $t$  многообразие  $\Lambda_t^k$  параметризовано координатами  $(\tau_1, \dots, \tau_k)$  и задается следующим образом:

$$\Lambda_t^k = \{(q, p) : q = Q(\tau, t), p = P(\tau, t)\}. \quad (4.1.10)$$

Будем считать, что при всех  $t \in [0, T]$  проекция  $\gamma_t^k = \{x \in \mathbb{R}^n : x = Q(\tau, t)\}$  представляет собой гладкую односвязную поверхность, причем  $\text{rang} \left( \frac{\partial Q}{\partial \tau} \right) = k$ , и многообразие  $\gamma_t^k$  диффеоморфно области в  $\mathbb{R}^k$ . Многообразие  $\Lambda_t^k$  диффеоморфно проектируется на  $q$ -плоскость в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,p)}^{2n}$ . Тогда в некоторой окрестности  $U_{q,t}$  поверхности  $\gamma_t^k$  система уравнений

$$\left\langle x - Q(\tau, t), \frac{\partial Q}{\partial \tau_j}(\tau, t) \right\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (4.1.11)$$

однозначно и гладко разрешима относительно  $\tau$ :

$$\tau_j = \tau_j(x, t), \quad x \in \gamma_t^k, \quad t \in [0, T], \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.1.12)$$

Таким образом, определено семейство изотропных многообразий  $\Lambda_t^k$  размерности  $k < n$ .

Однако при построении квазиклассических асимптотик в случае  $k < n$  семейства изотропных многообразий  $\Lambda_t^k$  недостаточно. Необходимо дополнительно определить комплексное векторное расслоение над изотропной поверхностью, отвечающее за комплексную часть фазы, — комплексный росток. Каждой точке  $\sigma(\tau)$  многообразия  $\Lambda_0^k$  (4.1.6) сопоставим  $n$ -мерную плоскость  $r_0^n(\sigma)$  в комплексном фазовом пространстве  $\mathbb{C}_{(z,w)}^{2n}$  с комплексными координатами, индуцированными координатами  $(q, p)$  фазового пространства. Плоскость  $r_0^n(\sigma)$  выбирается так, чтобы она содержала комплексифицированную касательную плоскость  $T^{\mathbb{C}}\Lambda_0^k$ , то есть

$$T^{\mathbb{C}}\Lambda_0^k(\sigma) \cap \mathbb{R}^{2n} = T\Lambda_0^k(\sigma),$$

и представима в виде:

$$r_0^n(\sigma) = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : z_i = \alpha_i, \quad w_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_j \right\}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.1.13)$$

Касательная плоскость  $T\Lambda_0^k(\sigma)$  принадлежит комплексифицированной плоскости  $r_0^n(\sigma)$  по построению, причем  $\alpha_i = \frac{\partial Q_0}{\partial \tau_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , на  $T\Lambda_0^k(\sigma)$ .

Движение касательных векторов под действием потока гамильтоновой системы (4.1.8) описывается системой в вариациях вдоль ее траекторий:

$$\dot{w} = -H_{qq}z - H_{qp}w, \quad \dot{z} = H_{pq}z + H_{pp}w. \quad (4.1.14)$$

Решение этой системы с начальным условием на  $r_0^n(t)$  представляет собой пару гладких  $n$ -мерных комплексных вектор-функций  $(z(\alpha, t), w(\alpha, t))$  и называется комплексным ростком  $r_t^n$ . В силу линейности уравнений (4.1.13) и (4.1.14) по  $\alpha$  достаточно рассмотреть систему

$$\dot{B} = -H_{qq}C - H_{qp}B, \quad \dot{C} = H_{pq}C + H_{pp}B \quad (4.1.15)$$

с заданными начальными условиями:

$$B = \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_i \partial x_j}, \quad C = I, \quad (4.1.16)$$

где  $B = \partial w / \partial \alpha$  и  $C = \partial z / \partial \alpha$  — комплексные  $n \times n$ -матрицы. Таким образом, пара матричных функций  $\{B(\tau, t), C(\tau, t)\}$  — комплексные матричные решения системы в вариациях (4.1.15) — для каждого момента времени  $t$  определяет  $k$ -комплексномерную плоскость  $r_t^n(\sigma)$  такую, что  $T\Lambda_t^k(\sigma) \subset r_t^n(\sigma)$ . Всюду далее под комплексным ростком понимается пара матричных функций  $\{B(\tau, t), C(\tau, t)\}$ .

Рассмотрим семейство  $[\Lambda_t^k, r_t^n]$  при  $t \in [0, T]$ . Действие на этом семействе имеет вид:

$$\begin{aligned} S(x, t) = s_0(\tau) + \int_0^t [\langle P(\tau, t_1), H_p(Q(\tau, t_1), P(\tau, t_1)) \rangle - H(Q(\tau, t_1), P(\tau, t_1))] dt_1 \\ + \langle P(\tau, t), x - Q(\tau, t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - Q(\tau, t), BC^{-1}(\tau, t)(x - Q(\tau, t)) \rangle \Big|_{\tau=\tau(x, t)}. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

где  $s_0(\tau) = S_0(Q_0(\tau))$ .

**Определение 4.1.** Функция  $S(x, t)$  называется приближенным решением задачи Коши (4.1.5), если

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x, t\right) = \omega_s, \quad \|\omega_s\|_{L_2} = O(h^{3/2}), \quad (4.1.18)$$

и при  $t = 0$ :

$$S(x, 0) = S_0(x) + \omega_{0s}, \quad \|\omega_{0s}\|_{L_2} = O(h^{3/2}). \quad (4.1.19)$$

**Утверждение 4.1.1** (Теорема 2.3, [9]). *При приведенных выше условиях действие  $S(x, t)$  (4.1.17) на семействе  $[\Lambda_t^k, r_t^n]$  на конечном отрезке времени  $t \in [0, T]$  является приближенным решением уравнения Гамильтона-Якоби (4.1.5).*

Покажем, что это действительно так. Ограничимся рассмотрением уравнения Шредингера с гамильтонианом (4.1.7).

*Доказательство.* Построим действие  $S(x, t)$  (4.1.17), отвечающее уравнению Шредингера с гамильтонианом (4.1.7):

$$S(x, t) = S_0(Q_0(\tau)) + \int_0^t \left[ \frac{1}{2} \langle P(\tau, t_1), P(\tau, t_1) \rangle - V(Q(\tau, t_1)) \right] dt_1 \\ + \langle P(\tau, t), x - Q(\tau, t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - Q(\tau, t), B(\tau, t) C^{-1}(\tau, t) (x - Q(\tau, t)) \rangle \Big|_{\tau=\tau(x, t)}. \quad (4.1.20)$$

Получим вспомогательные выражения, используемые в дальнейшем. Представим  $B = (BC^{-1})C$ . Выполняется равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau_j}(\tau, t) = BC^{-1}(\tau, t) \frac{\partial Q}{\partial \tau_j}(\tau, t), \quad j = 1, \dots, k.$$

Производная  $BC^{-1}$  по времени  $t$  имеет вид:

$$\frac{\partial BC^{-1}}{\partial t}(\tau, t) = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(Q(\tau, t)) + BC^{-1}(\tau, t) BC^{-1}(\tau, t), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Дифференцируя систему (4.1.11) по  $t$  и по  $x_l$ ,  $l = 1, \dots, n$ , получим две группы уравнений. Первая группа соответствует дифференцированию по времени  $t$  и описывает эволюцию параметров  $\tau_j$  вдоль траектории гамильтоновой системы:

$$-\langle \dot{Q}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_j} \rangle - \sum_{i=1}^k \left( \langle x - Q, \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \rangle - \langle \frac{\partial Q}{\partial \tau_i}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_j} \rangle \right) \frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \langle x - Q, \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \tau_j} \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.1.21a)$$

Вторая группа возникает при дифференцировании по  $x_l$ :

$$\langle e_l, \frac{\partial Q}{\partial \tau_j} \rangle - \sum_{i=1}^k \left( \langle x - Q, \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \rangle - \langle \frac{\partial Q}{\partial \tau_i}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_j} \rangle \right) \frac{\partial \tau_i}{\partial x_l} = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad l = 1, \dots, n, \quad (4.1.21b)$$

где  $e_j$  — вектор с единицей на  $j$ -м месте и нулями на остальных позициях. Аргументы  $\frac{\partial \tau_i}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \tau_i}{\partial x_l}$  опущены для краткости. Для каждого  $l$  умножим уравнение (4.1.21b) на  $P_l$  и просуммируем по  $l = 1, \dots, n$ :

$$\langle P, \frac{\partial Q}{\partial \tau_j} \rangle - \sum_{i=1}^k \left( \langle x - Q, \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \rangle - \langle \frac{\partial Q}{\partial \tau_i}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_j} \rangle \right) \langle P, \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.1.22)$$

Складывая (4.1.21a) и (4.1.22) и суммируя по  $i = 1, \dots, k$ , получим систему уравнений относительно  $v^i = \frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \langle P, \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \rangle$ :

$$\sum_{i=1}^k \left( \langle x - Q, \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \rangle - \langle \frac{\partial Q}{\partial \tau_i}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_j} \rangle \right) \left( \frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \langle P, \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \rangle \right) = \langle x - Q, \frac{\partial P}{\partial \tau_j} \rangle, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.1.23)$$

Рассмотрим поверхность  $\gamma_t^k = \{x = Q(\tau, t)\}$ , полученную из  $\gamma_0^k$  сдвигом вдоль классических траекторий. Ее первая и вторая квадратичные формы определяются матричными функциями  $G_{ij}(\tau, t)$  и  $B_{ij}(\tau, t)$ :

$$G_{ij} = \left\langle \frac{\partial Q}{\partial \tau_i}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_j} \right\rangle, \quad B_{ij} = \left\langle n, \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right\rangle,$$

где  $n(\tau)$  — вектор единичной нормали к поверхности  $\gamma_t^k$  в точке с координатами  $\tau$ . Заметим, что векторы  $n(\tau)$  и  $(x - Q(\tau, t))$  параллельны (см. (4.1.11)), в качестве вектора единичной нормали удобно выбрать  $n(\tau) = \frac{(x - Q(\tau, t))}{|x - Q(\tau, t)|}$ . Перепишем систему (4.1.23) в виде:

$$(|x - Q|B - G)v = |x - Q|a. \quad (4.1.24)$$

где  $v = (v^1, \dots, v^k)^T$ ,  $v^i = \frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \langle P, \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \rangle$  и  $a = (a^1, \dots, a^k)^T$ ,  $a^i = \langle n, \frac{\partial P}{\partial \tau_i} \rangle$ . Будем искать решение уравнения (4.1.24) в виде ряда по  $|x - Q(\tau, t)|$ :

$$v(x, \tau, t) = v_0(\tau, t) + v_1(\tau, t)|x - Q(\tau, t)| + v_2(\tau, t)|x - Q(\tau, t)|^2 + \dots,$$

где  $v_j(\tau, t)$  — гладкие  $k$ -мерные вектор-функции, подлежащие определению. Подставляя выражение для  $v(x, \tau, t)$  в уравнение (4.1.23) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $|x - Q(\tau, t)|$ , получим следующие выражения для коэффициентов  $v_m(\tau, t)$ ,  $m \geq 0$ :

$$v_0 \equiv 0, \quad v_1 = -G^{-1}a, \quad v_j = -(G^{-1}B)^{j-1}G^{-1}a, \quad j \geq 1.$$

Введем новую переменную

$$z = \frac{x - Q(\tau, t)}{h^{1/2}} \Big|_{\tau = \tau(x, t)}. \quad (4.1.25)$$

Перепишем функцию  $v(x, \tau, t)$  в виде ряда по новой переменной:

$$v(z, \tau, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{v}_j(z, \tau, t) h^{j/2},$$

где  $\tilde{v}_j(z, \tau, t) = v_j(\tau, t)|z|^j$  — многочлены степени  $j$  по  $z$ . Тогда справедлива оценка:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \left\langle P, \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \right\rangle = - \sum_{j=1}^k (G^{-1})_{ij} \left\langle z, \frac{\partial P}{\partial \tau_j} \right\rangle h^{1/2} + \omega_1 = \omega_{1/2}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (4.1.26)$$

где  $\omega_1^i = \sum_{j=2}^{\infty} \tilde{v}_j^i(z, \tau, t) h^{j/2}$ , причем  $\|\omega_1^i\|_{L_2} = O(h)$  и  $\|\omega_{1/2}\|_{L_2} = O(h^{1/2})$ .

Вычислим производные фазовой функции  $S(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) &= -H(Q, P) + \langle \dot{P}, x - Q \rangle - \langle BC^{-1} \dot{Q}, x - Q \rangle - \frac{1}{2} \langle BC^{-1}(x - Q), BC^{-1}(x - Q) \rangle - \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle x - Q, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(Q)(x - Q) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle x - Q, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_i}(x - Q) \rangle \frac{\partial \tau_i}{\partial t}, \\ \frac{\partial S}{\partial x}(x, t) &= P + BC^{-1}(x - Q) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle x - Q, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_i}(x - Q) \rangle \frac{\partial \tau_i}{\partial x}, \end{aligned}$$

где  $Q = Q(\tau, t)$ ,  $P = P(\tau, t)$ ,  $BC^{-1} = BC^{-1}(\tau, t)$ . Подставляя  $S(x, t)$  в уравнение (4.1.5) и используя полученные выражения и оценки, получим разложение по степеням  $(x - Q)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x, t), \frac{\partial S}{\partial x}(x, t) \right\rangle + V(x) = & -H(P, Q) + \langle \dot{P}, x - Q \rangle - \langle BC^{-1} \dot{Q}, x - Q \rangle - \\ & - \frac{1}{2} \langle BC^{-1}(x - Q), BC^{-1}(x - Q) \rangle - \frac{1}{2} \langle x - Q, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(Q)(x - Q) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle x - Q, \frac{\partial BC^{-1}}{\partial \tau_i}(x - Q) \rangle \frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \\ & + \frac{1}{2} \left( P + BC^{-1}(x - Q) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle x - Q, \frac{\partial BC^{-1}}{\partial \tau_i}(x - Q) \rangle \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \right)^2 + V(Q) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(Q), x - Q \right\rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle x - Q, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(Q)(x - Q) \rangle + \sum_{i \geq 3} \frac{1}{i!} \sum_{|m|=i} \frac{\partial^i V}{\partial x^m}(Q)(x - Q)^m + \frac{1}{8} \left( \sum_{i=1}^k \langle x - Q, \frac{\partial BC^{-1}}{\partial \tau_i}(x - Q) \rangle \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

Используя оценки (4.1.26) для  $\partial \tau_i / \partial t$  и  $\partial \tau_i / \partial x$ , перепишем выражение в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x, t), \frac{\partial S}{\partial x}(x, t) \right\rangle + V(x) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{(x - Q)}{h^{1/2}}, \frac{\partial BC^{-1}}{\partial \tau_i} \frac{(x - Q)}{h^{1/2}} \right\rangle \left( \frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \left\langle P, \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \right\rangle \right) h + \\ & + \frac{1}{8} \left( \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{(x - Q)}{h^{1/2}}, \frac{\partial (BC^{-1})}{\partial \tau_i} \frac{(x - Q)}{h^{1/2}} \right\rangle \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \right)^2 h^2 + \sum_{i \geq 3} \frac{1}{i!} \sum_{|m|=i} \frac{\partial^i V}{\partial x^m}(Q) \frac{(x - Q)^m}{h^{i/2}} h^{i/2} = \omega_s, \end{aligned}$$

где  $\|\omega_s\|_{L_2} = O(h^{3/2})$ .

Покажем, что начальные условия (4.1.5) выполняются с точностью до слагаемых порядка  $O(h^{3/2})$ . При  $t = 0$  фаза  $S(x, t)$  (4.1.17) принимает вид:

$$S(x, 0) = S_0(q_0(\tau)) + \left\langle \frac{\partial S_0}{\partial x}(q_0(\tau)), x - q_0(\tau) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle x - q_0(\tau), \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(q_0(\tau))(x - q_0(\tau)) \right\rangle \Big|_{\tau=\tau(x,0)}.$$

Отсюда в силу формулы Тейлора для  $S_0(x)$  в окрестности точки  $x = Q_0(\tau)$  получим:

$$S(x, 0) = S_0(x) + \omega_{0s}, \quad \|\omega_{0s}\|_{L_2} = O(h^{3/2}).$$

Таким образом, утверждение 4.1.1 доказано. □

**Замечание 4.1.** При приведенных выше условиях действие  $S(x, t)$  (4.1.17) на семействе  $[\Lambda_t^k, r_t^n]$  на конечном отрезке времени  $t \in [0, T]$  является решением уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(x, t), \frac{\partial S}{\partial x}(x, t) \right\rangle + V(Q) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(Q), x - Q \right\rangle + \frac{1}{2} \langle x - Q, \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(Q)(x - Q) \rangle - \\ - \frac{1}{2} \langle x - Q, \frac{\partial BC^{-1}}{\partial \tau_j}(x - Q) \rangle \left( \frac{\partial \tau_j}{\partial t} + \left\langle P, \frac{\partial \tau_j}{\partial x} \right\rangle \right) - \frac{1}{8} \left( \langle x - Q, \frac{\partial BC^{-1}}{\partial \tau_j}(x - Q) \rangle \frac{\partial \tau_j}{\partial x} \right)^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

### 4.1.2 Построение амплитуды

Рассмотрим построение старшей части амплитуды  $\varphi_0$  и поправок  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Для этого перейдем к переменным  $z$ . Рассмотрим уравнения переноса относительно функций  $\varphi_j(z, t)$ :

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{tr}(BC^{-1})\varphi_j + \langle BC^{-1}z, \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \rangle - \sum_{m=1}^k \langle \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_m} \rangle \left( \langle BC^{-1}z, \frac{\partial \tau_m}{\partial x} \rangle + \tilde{v}_1^m \right) - \frac{i}{2} \Delta_z \varphi_j + \Phi_j = 0. \quad (4.1.28)$$

Функции  $\Phi_j(z, \tau, t)$  представляют собой многочлены по  $z$  и выражаются через предыдущие поправки к амплитуде  $\varphi_m(z, t)$ ,  $m < j$ , для единообразия записи полагаем  $\varphi_{-1} \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0(z, t) &\equiv 0, \\ \Phi_j(z, t) &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^k \langle z, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l} z \rangle \left( \langle \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial z}, \frac{\partial \tau_l}{\partial z} \rangle - \sum_{m=1}^k \langle \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_m} \rangle \langle \frac{\partial \tau_l}{\partial x}, \frac{\partial \tau_m}{\partial x} \rangle \right) \\ &+ \sum_{l=1}^k \left( \langle \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l} z, \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \rangle - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k \langle \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l} z, \frac{\partial Q}{\partial \tau_m} \rangle \langle \frac{\partial \tau_l}{\partial x}, \frac{\partial \tau_m}{\partial x} \rangle \right) \varphi_{j-1} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^k \left( \sum_{m=1}^k \langle z, \frac{\partial^2(BC^{-1})}{\partial \tau_l \partial \tau_m} z \rangle \langle \frac{\partial \tau_l}{\partial x}, \frac{\partial \tau_m}{\partial x} \rangle + \langle z, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l} z \rangle \Delta \tau_l \right) \varphi_{j-2} - \\ &- \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k \langle \frac{\partial \varphi_{j-l}}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_m} \rangle \tilde{v}_{j+2-l}^m + i \sum_{l=0}^{j-1} \frac{\varphi_l}{(j+2-l)!} \sum_{|m|=j+2-l} \frac{\partial^{|m|} V}{\partial x^m}(Q) z^m - \\ &+ \frac{i}{2} \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k \langle z, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_m} z \rangle \tilde{v}_{j+1-l}^m \varphi_{j-l} + \frac{i}{8} \left( \sum_{l=1}^k \langle z, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l} z \rangle \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \right)^2 \varphi_{j-2}, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

Функции  $B(\tau, t)$ ,  $C(\tau, t)$ ,  $Q(\tau, t)$ ,  $\frac{\partial \tau_j}{\partial x}(x, t)$  и  $\tilde{v}_j(z, \tau, t)$  определены выше; через  $\tilde{v}_j^m(z, \tau, t)$  обозначена  $m$ -ая компонента вектора  $\tilde{v}_j(z, \tau, t)$ . Для упрощения записи у функций опущены аргументы.

Определим начальные условия для амплитуд:

$$\begin{aligned} \varphi_k(z, 0) &= \varphi_k^0(z), \quad k \leq N_0, \\ \varphi_k(z, 0) &= 0, \quad k > N_0. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Построим старшую часть амплитуды  $\varphi_0(z, t)$  и поправки к ней  $\varphi_k$ ,  $k \geq 1$ , как решения соответствующих уравнений переноса (4.1.28) с выбранными начальными условиями (4.1.30). Решения этих уравнений являются многочленами по переменной  $z$ .

Обоснование уравнений переноса (4.1.28) для амплитуд приводится при доказательстве более общего утверждения.

### 4.1.3 Решение задачи Коши с гладким потенциалом

После построения фазовой функции  $S(x, t)$ , старшей части амплитуды  $\varphi_0(x, t)$  и последующих поправок  $\varphi_k(x, t)$ ,  $k \geq 1$ , траекторий гамильтоновой системы  $Q(\tau, t)$ ,  $P(\tau, t)$  и матричных

решений  $B(\tau, t)$  и  $C(\tau, t)$  системы в вариациях, перейдем к построению приближенного решения задачи Коши с гладким потенциалом (4.1.1).

**Утверждение 4.1.2** (Лемма 3.5, [9]). *При приведенных выше условиях на любом конечном отрезке времени  $t \in [0, T]$  функция*

$$\Psi_N(x, t, h) = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k \left( \frac{x - Q(\tau, t)}{h^{1/2}}, t \right) \Big|_{\tau=\tau(x, t)} h^{k/2} \quad (4.1.31)$$

удовлетворяет уравнению (4.1.1) с точностью до функции  $\omega$ , причем  $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+1}{2}})$ .

Покажем, что это действительно так. Воспользуемся полученными выше формулами и оценками. Во всех последующих выкладках функции  $Q, P, B, C, S, \phi_j, j = 0, \dots, N$ , а также их производные рассматриваются как зависящие от своих естественных аргументов  $x \in \mathbb{R}^n, \tau \in \gamma_t^k, t \in [0, T]$ . Для краткости записи эта зависимость далее опускается.

*Доказательство.* Обозначим через  $\hat{L}$  нестационарный оператор Шредингера с гладким потенциалом  $V(x)$ :

$$\hat{L} = -ih \frac{\partial}{\partial t} - \frac{h^2}{2} \Delta + V(x).$$

Тогда уравнение (4.1.1) можно переписать в виде

$$\hat{L}\psi = 0.$$

Рассмотрим действие оператора  $\hat{L}$  на функцию  $\Psi_N(x, t, h)$ , определенную выше (4.1.31):

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi_N(x, t, h) &= \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x} \right\rangle + V(x) \right) \phi_j(x, t) h^{j/2} - \\ &- ih \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S \phi_j - \frac{ih}{2} \Delta \phi_j \right) h^{j/2}. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение  $\phi_j(x, t) = \varphi_j \left( \frac{x - Q(\tau, t)}{h^{1/2}}, t \right) \Big|_{\tau=\tau(x, t)}, j = 0, \dots, N$ . Перегруппируем слагаемые и воспользуемся разложением потенциала в окрестности точки  $x = Q(\tau, t)$ . Получим:

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi_N(x, t, h) &= \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h} S} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x} \right\rangle + V(Q) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(Q), x - Q \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle x - Q, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(Q)(x - Q) \right\rangle - \right. \\ &- \frac{1}{2} \sum_{l=1}^k \left\langle x - Q, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l}(x - Q) \right\rangle \left( \frac{\partial \tau_l}{\partial t} + \left\langle P, \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \right\rangle \right) - \frac{1}{8} \left( \sum_{l=1}^k \left\langle x - Q, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l}(x - Q) \right\rangle \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \right)^2 \Big] \phi_j h^{j/2} - \\ &- ih \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h} S} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S \phi_j - \frac{ih}{2} \Delta \phi_j + F_j \right) h^{j/2} + e^{\frac{i}{h} S} \tilde{F}_{N+1}. \end{aligned}$$

Функции  $F_j(x, t)$  зависят от предыдущих поправок к амплитуде  $\phi_i(x, t)$  с номерами  $i < j$  и определяются следующим образом:

$$F_0(x, t) \equiv 0,$$

$$\tilde{F}_{N+1}(x, t, h) = -ih \sum_{j=N+1}^{\infty} F_j(x, t) h^{j/2},$$

$$F_j(x, t) = \frac{i}{2h} \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k \langle x - Q, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_m}(x - Q) \rangle \tilde{v}_{j+1-l}^m \phi_{j-l} + \\ + \frac{i}{8h} \left( \sum_{l=1}^k \langle x - Q, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l}(x - Q) \rangle \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \right)^2 \phi_{j-2} + i \sum_{l=0}^{j-1} \frac{\varphi_l}{(j+2-l)!} \sum_{|m|=j+2-l} \frac{\partial^{|m|} V}{\partial x^m}(Q) \frac{(x - Q)^m}{h^{|m|/2}},$$

где  $j = 1, \dots, N$ . В силу того, что функция  $S(x, t)$  удовлетворяет уравнению (4.1.27), соответствующие слагаемые обращаются в нуль. Остается рассмотреть следующее выражение:

$$\hat{L}\Psi_N(x, t, h) = -ih \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h}S(x, t)} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2}(\Delta S) \phi_j - \frac{ih}{2} \Delta \phi_j + F_j \right) h^{j/2} + e^{\frac{i}{h}S} \tilde{F}_{N+1}.$$

Перейдем к переменной  $z$  (4.1.25). Тогда  $\phi_k(x, t) = \varphi_k(z, t)$ , а производные по  $x$  и  $t$  выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, t) = h^{-1/2} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}(z, t) - \sum_{l=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}(z, t), \frac{\partial Q}{\partial \tau_l}(\tau, t) \right\rangle \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(z, t) - h^{-1/2} \left( \left\langle \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}(z, t), \dot{Q}(\tau, t) \right\rangle + \sum_{l=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}(z, t), \frac{\partial Q}{\partial \tau_l}(\tau, t) \right\rangle \frac{\partial \tau_l}{\partial t} \right).$$

Раскладывая фазу  $S(x, t)$  (4.1.17) по  $z$ , получим:

$$S(x, t) = S(h^{1/2}z + Q(\tau, t), t) = \sigma(\tau, t) + h^{1/2} \langle P(\tau, t), z \rangle + \frac{h}{2} \langle z, BC^{-1}(\tau, t)z \rangle, \quad \tau = \tau(x, t).$$

Для ее производных, входящих в выражение выше, имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, t) = P + h^{1/2} BC^{-1}z + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^k \left\langle z, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_i} z \right\rangle \frac{\partial \tau_i}{\partial x}.$$

Здесь выражение для градиента  $\partial S / \partial x$  учитывает линейную и квадратичную зависимости от  $z$  и параметров  $\tau_i$ . Для лапласиана функции  $S(x, t)$  получим:

$$\Delta S(x, t) = \text{tr}(BC^{-1}) + 2h^{1/2} \sum_{i=1}^k \left( \left\langle \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_i} z, \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left\langle \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_i} z, \frac{\partial Q}{\partial \tau_j} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \tau_i}{\partial x}, \frac{\partial \tau_j}{\partial x} \right\rangle \right) + \\ + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left\langle z, \frac{\partial^2(BC^{-1})}{\partial \tau_i \partial \tau_j} z \right\rangle \left\langle \frac{\partial \tau_i}{\partial x}, \frac{\partial \tau_j}{\partial x} \right\rangle + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^k \left\langle z, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_i} z \right\rangle \Delta \tau_i.$$

Рассмотрим скалярное произведение градиента  $S$  и производной  $\varphi_j$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right\rangle &= h^{-1/2} \left( \left\langle P, \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right\rangle - \sum_{l=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_l} \right\rangle \left\langle P, \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \right\rangle \right) + \\ &+ \left( \left\langle BC^{-1}z, \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right\rangle - \sum_{l=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_l} \right\rangle \left\langle BC^{-1}, \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \right\rangle \right) + \\ &+ \frac{h}{2} \sum_{l=1}^k \left\langle z, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l} z \right\rangle \left( \left\langle \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}, \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \right\rangle - \sum_{m=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_m} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \tau_l}{\partial x}, \frac{\partial \tau_m}{\partial x} \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Следующим шагом рассмотрим выражение для лапласиана  $S$ , умноженного на  $\varphi_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta S \varphi_j &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(BC^{-1}) \varphi_j + h^{1/2} \sum_{l=1}^k \left( \left\langle \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l} z, \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k \left\langle \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l} z, \frac{\partial Q}{\partial \tau_m} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \tau_l}{\partial x}, \frac{\partial \tau_m}{\partial x} \right\rangle \right) \varphi_j + \\ &+ \frac{h}{4} \sum_{l,m=1}^k \left\langle z, \frac{\partial^2(BC^{-1})}{\partial \tau_l \partial \tau_m} z \right\rangle \left\langle \frac{\partial \tau_l}{\partial x}, \frac{\partial \tau_m}{\partial x} \right\rangle \varphi_j + \frac{h}{4} \sum_{l=1}^k \left\langle z, \frac{\partial(BC^{-1})}{\partial \tau_l} z \right\rangle \Delta \tau_l \varphi_j. \end{aligned}$$

Подставим функции от  $z$  в выражение для действия оператора  $\hat{L}$ . Используя ранее полученные оценки и выражения, в том числе (4.1.26), получим:

$$\begin{aligned} \hat{L} \Psi_N(x, t, h) &= -ih \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h} S} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(BC^{-1}) \varphi_j + \left\langle BC^{-1}z, \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right\rangle - \right. \\ &\left. - \sum_{l=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial \tau_l} \right\rangle \left( \left\langle BC^{-1}z, \frac{\partial \tau_l}{\partial x} \right\rangle + \tilde{v}_1^l \right) - \frac{i}{2} \Delta_z \varphi_j + \Phi_j(z, t) \right) h^{j/2} + \tilde{\Phi}_{N+1}. \end{aligned}$$

Поправки для уравнения переноса  $\Phi_j$  представимы в виде (4.1.29). Определим

$$\tilde{\Phi}_{N+1}(x, t, h) = -ih \sum_{j=N+1}^{\infty} \Phi_j(z, t) \Big|_{z=z(x,t)} h^{j/2}$$

Поскольку  $\varphi_k$  определены как решения уравнений переноса (4.1.28), получим:

$$\hat{L} \Psi_N(x, t, h) = \tilde{\Phi}_{N+1}(x, t, h), \quad \|\hat{L} \Psi_N\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+3}{2}}).$$

Заметим, что для  $\Psi_N(x, t, h)$  выполняются начальные условия (4.1.1):

$$\Psi_N(x, 0, h) = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x).$$

Пусть  $\Psi(x, t, h)$  — точное решение задачи Коши (4.1.1). Введем  $\omega = \Psi_N(x, t, h) - \Psi(x, t, h)$ , причем  $\omega|_{t=0} = 0$ . Для функции  $\omega$  справедливо:

$$ih \frac{\partial \omega}{\partial t} = \hat{H} \omega + \tilde{\Phi}_{N+1}(x, t, h),$$

где  $\hat{H}$  — оператор Шредингера с гладким потенциалом (4.1.7). В силу самосопряженности оператора  $\hat{H}$  имеем:

$$\begin{aligned} ih \langle \frac{\partial \omega}{\partial t}, \omega \rangle_{L_2} &= \langle \hat{H} \omega, \omega \rangle_{L_2} + \langle \tilde{\Phi}_{N+1}, \omega \rangle_{L_2}, \\ -ih \langle \omega, \frac{\partial \omega}{\partial t} \rangle_{L_2} &= \langle \hat{H} \omega, \omega \rangle_{L_2} + \langle \omega, \tilde{\Phi}_{N+1} \rangle_{L_2}. \end{aligned}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получим:

$$h \frac{\partial}{\partial t} \|\omega\|_{L_2}^2 = 2 \operatorname{Im} \langle \omega, \tilde{\Phi}_{N+1} \rangle_{L_2}.$$

Поскольку  $|\operatorname{Im} \langle \omega, \tilde{\Phi}_{N+1} \rangle_{L_2}| \leq \|\omega\|_{L_2} \|\tilde{\Phi}_{N+1}\|_{L_2}$ , то

$$h \frac{\partial}{\partial t} \|\omega\|_{L_2} \leq \|\tilde{\Phi}_{N+1}\|_{L_2}.$$

Проинтегрировав неравенство по  $t$ , получим оценку

$$\|\omega\|_{L_2} \leq \frac{1}{h} \int_0^t \|\tilde{\Phi}_{N+1}\|_{L_2} d\tau + \|\omega|_{t=0}\|_{L_2} = O(h^{(N+1)/2}).$$

Таким образом, утверждение доказано. □

#### 4.1.4 Геометрическая интерпретация

С геометрической точки зрения построение асимптотики задачи Коши (4.1.1) с гладким потенциалом опирается на те же идеи, что и в предыдущей главе, однако усложняется в связи с тем, что начальные данные локализованы вдоль  $k$ -мерного многообразия  $\gamma_0^k$ , а не в окрестности точки.

Начальные данные индуцируют в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,p)}^{2n}$  изотропное  $k$ -мерное многообразие:

$$\Lambda_0^k = \{(q, p) \in \mathbb{R}_{(q,p)}^{2n} : q = q_0(\tau) \in \gamma_0^k, p = \frac{\partial S_0}{\partial x}(q_0(\tau))\}.$$

Под действием фазового потока  $g_t$  гамильтоновой системы (4.1.8) это многообразие эволюционирует в семейство  $\Lambda_t^k = g_t(\Lambda_0^k)$ , которое остается изотропным в силу сохранения симплектической формы. В расширенном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(q,t,p,p_t)}^{2n+2}$  объединение подмногообразий  $\Lambda_t^k$  образует  $(k+1)$ -мерное изотропное многообразие

$$\Lambda^{k+1} = \bigcup_{t \in [0, T]} \Lambda_t^k = \{(q, p, t, p_t) : q = Q(\tau, t), p = P(\tau, t), p_t = -H(Q(\tau, t), P(\tau, t))\}.$$

Вдоль траекторий  $\{Q(\tau, t), P(\tau, t)\}$  строится функция действия

$$\sigma(\tau, t) = S_0(q_0(\tau)) + \int_0^t \left[ \frac{1}{2} |P(\tau, t_1)|^2 - V(Q(\tau, t_1)) \right] dt_1.$$

Поскольку  $\dim \Lambda_t^k \leq n$ , изотропного семейства недостаточно для построения асимптотики с комплексной фазой. Над каждой точкой  $\sigma(\tau) \in \Lambda_0^k$  строится  $n$ -мерная комплексная плоскость  $r_0^n(\sigma)$  в  $\mathbb{C}_{(z,w)}^{2n}$ , содержащая комплексификацию касательного пространства  $T\Lambda_0^k$ :

$$r_0^n(\sigma) = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : z_i = \alpha_i, w_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_j \right\}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n.$$

При этом  $\alpha_i = \frac{\partial Q_0}{\partial \tau_i}$  для  $i = 1, \dots, k$  на  $T\Lambda_0^k(\sigma)$ .

Эволюция плоскости  $r_0^n(\sigma)$  задается системой в вариациях (4.1.15), решение которой — пара матричных функций  $\{B(\tau, t), C(\tau, t)\}$  — определяет для каждого  $t \in [0, T]$  комплексную плоскость:

$$r_t^n(\sigma) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : w = BC^{-1}(\tau, t) z\}$$

такую, что  $T\Lambda_t^k(\sigma) \subset r_t^n(\sigma)$  и  $\text{Im } BC^{-1}(\tau, t) > 0$  при всех  $t \in [0, T]$ .

Таким образом, геометрическим объектом, определяющим асимптотическое решение, является семейство пар  $[\Lambda_t^k, r_t^n]$ . Положительная определенность  $\text{Im } BC^{-1}$  гарантирует локализацию гауссова пучка вдоль проекции  $\gamma_t^k$ , а фазовая функция  $S(x, t)$  (4.1.17) строится как действие на этом семействе.

## 4.2 Потенциал с особенностью типа дельта-функции

Перейдем к построению асимптотики задачи Коши (4.0.1) при наличии у потенциала особенности типа  $\delta$ -функции. До достижения поверхности  $M$  — носителя  $\delta$ -функции — решение совпадает с решением задачи с гладким потенциалом (4.1.1). При взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом исходный гауссов пучок расщепляется на две части — прошедшую и отраженную от поверхности  $M$ . Таким образом, решение задачи строится в виде суммы трех функций, отвечающих падающей, прошедшей и отраженной волнам. Обозначим их  $\{+, \hat{\phantom{x}}, -\}$  соответственно. Поверхность  $M$  разделяет пространство на две части: падающая и отраженная волны определяются с отрицательной стороны от  $M$ , прошедшая — с положительной.

Всюду далее будем считать выполненными следующие условия. Рассмотрим траекторию гамильтоновой системы  $\{Q^+(\tau, t), P^+(\tau, t)\}$  с гамильтонианом (4.1.7):

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial x}(q), \quad (4.2.1)$$

выпущенную из точки  $\{Q^+(\tau, 0), P^+(\tau, 0)\}$ :

$$Q^+(\tau, 0) = q_0(\tau), \quad P^+(\tau, 0) = \frac{\partial S_0}{\partial x}(q_0(\tau)). \quad (4.2.2)$$

Пусть проекция  $Q^+(\tau, t)$  траектории системы пересекает поверхность  $M$  ровно один раз, причем пересечение трансверсально и траектория переходит с отрицательной стороны поверхности  $M$

на положительную. Момент пересечения обозначим через  $t_0(\tau)$ , точку на поверхности  $M$  через  $y_0 = y_0(\tau)$ , где параметр  $\tau = \tau(r(y), t)$  и определяется из уравнений (4.1.12) на поверхности  $M$ :

$$Q^+(\tau, t) = r(y) \rightarrow y = y_0(\tau, t), \quad t = t_0(\tau). \quad (4.2.3)$$

Обозначим через  $\{Q^-(\tau, t), P^-(\tau, t)\}$  отраженную траекторию той же системы. Она определяется краевыми условиями:

$$\begin{aligned} Q^-(\tau, t_0(\tau)) &= Q^+(\tau, t_0(\tau)), \\ P_n^-(\tau, t_0(\tau)) &= -P_n^+(\tau, t_0(\tau)), \quad P_\tau^-(\tau, t_0(\tau)) = P_\tau^+(\tau, t_0(\tau)), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

где  $P_n^+(\tau, t_0(\tau))$  и  $P_\tau^+(\tau, t_0(\tau))$  — нормальная и касательная к поверхности  $M$  компоненты вектора  $P^+(\tau, t_0(\tau))$  в точке  $x = r(y_0(\tau))$ .

Рассмотрим систему в вариациях:

$$\dot{B} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} C, \quad \dot{C} = B. \quad (4.2.5)$$

Определим матричные  $n \times n$  функции  $B^+(\tau, t)$  и  $C^+(\tau, t)$ , заданные начальными условиями:

$$B^+(\tau, 0) = \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(q(\tau)), \quad C^+(\tau, 0) = I. \quad (4.2.6)$$

Пусть  $\Omega^+(\tau) = B^+(C^+)^{-1}(\tau, t_0(\tau))$ . Симметричная  $n \times n$  матрица  $\Omega^-(\tau)$  задается равенствами:

$$\begin{cases} \langle r_i(\tau), \Omega^-(\tau) r_j(\tau) \rangle = \langle r_i(\tau), \Omega^+(\tau) r_j(\tau) \rangle + \langle r_{ij}(\tau), p^+(\tau) - p^-(\tau) \rangle, \\ \langle p^-(\tau), \Omega^-(\tau) p^-(\tau) \rangle = \langle p^+(\tau), \Omega^+(\tau) p^+(\tau) \rangle + \langle V_x(r(y_0(\tau))), p^+(\tau) - p^-(\tau) \rangle, \\ \langle p^-(\tau), \Omega^-(\tau) r_i(\tau) \rangle = \langle p^+(\tau), \Omega^+(\tau) r_i(\tau) \rangle, \end{cases} \quad (4.2.7)$$

где  $r_i(\tau) = \frac{\partial r}{\partial y^i}(y_0(\tau))$ ,  $r_{ij}(\tau) = \frac{\partial^2 r}{\partial y^i \partial y^j}(y_0(\tau))$  и  $p^\pm(\tau) = P^\pm(\tau, t_0(\tau))$ . Функции  $B^-(\tau, t)$  и  $C^-(\tau, t)$  определяются как решения системы в вариациях (4.2.5), заданные условиями:

$$B^-(\tau, t_0(\tau)) = \Omega^-(\tau), \quad C^-(\tau, t_0(\tau)) = I. \quad (4.2.8)$$

Построим функции  $S^+(x, t)$ ,  $\hat{S}(x, t)$ ,  $S^-(x, t)$  — фазы падающей, прошедшей и отраженной волн. Для этого введем новые функции

$$\begin{aligned} \sigma^+(\tau, t) &= S_0(Q_0(\tau)) + \int_0^t \left[ \frac{1}{2} \langle P^+(\tau, t_1), P^+(\tau, t_1) \rangle - V(Q^+(\tau, t_1)) \right] dt_1 \\ \sigma^-(\tau, t) &= \sigma^+(\tau, t_0(\tau)) + \int_{t_0(\tau)}^t \left[ \frac{1}{2} \langle P^-(\tau, t_1), P^-(\tau, t_1) \rangle - V(Q^-(\tau, t_1)) \right] dt_1. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Определим фазовые функции  $S^+(x, t)$ ,  $\hat{S}(x, t)$ ,  $S^-(x, t)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} S^+(x, t) &= \sigma^+(\tau, t) + \langle P^+(\tau, t), x - Q^+(\tau, t) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle x - Q^+(\tau, t), B^+(C^+)^{-1}(\tau, t) (x - Q^+(\tau, t)) \right\rangle \Big|_{\tau=\tau(x, t)}, \\ S^-(x, t) &= \sigma^-(\tau, t) + \langle P^-(\tau, t), x - Q^-(\tau, t) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle x - Q^-(\tau, t), B^-(C^-)^{-1}(\tau, t) (x - Q^-(\tau, t)) \right\rangle \Big|_{\tau=\tau(x, t)}, \\ \hat{S}(x, t) &= S^+(x, t). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Введем новые переменные

$$z^+ = \frac{x - Q^+(\tau, t)}{h^{1/2}}, \quad z^- = \frac{x - Q^-(\tau, t)}{h^{1/2}}. \quad (4.2.11)$$

Зададим функции  $\varphi_k^+(z^+, t)$ ,  $\varphi_k^-(z^-, t)$ ,  $\hat{\varphi}_k(z^+, t)$ ,  $k = 0, \dots, N$ , как решения уравнений переноса (4.1.28), удовлетворяющие начальными и краевым условиям. Для падающего пучка в начальный момент времени  $t = 0$  амплитуда совпадает с начальным условием на амплитуду для задачи с гладким потенциалом (4.1.30):

$$\varphi_k(z^+, 0) = \varphi_k^0(z^+), \quad k \leq N_0 \text{ и } \varphi_k(z^+, 0) = 0, \quad k > N_0. \quad (4.2.12)$$

Прошедший и отраженный пучки определяются исходя из краевых условий на поверхности  $M$  (4.0.7) в момент пересечения этой поверхности проекцией  $Q^+(\tau, t)$  траектории падающего пучка:

$$\varphi_0^- \Big|_M = \frac{-q(y)}{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle + q(\tau)} \varphi_0^+ \Big|_M, \quad \hat{\varphi}_0 \Big|_M = \frac{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle}{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle + q(\tau)} \varphi_0^+ \Big|_M, \quad (4.2.13)$$

для  $k \geq 1$ :

$$\varphi_k^- \Big|_M = \frac{-q(y)\varphi_k^+ + u_k}{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle + q(\tau)} \Big|_M, \quad \hat{\varphi}_k \Big|_M = \frac{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle \varphi_k^+ + v_k}{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle + q(\tau)} \Big|_M. \quad (4.2.14)$$

Введем функцию

$$\Psi(x, t, h) = \begin{cases} h^{-n/4} e^{iS^+(x, t)/h} \varphi_k^+\left(\frac{x - Q^+(t, \tau^+)}{h^{1/2}}, t\right) h^{k/2} + \\ \quad + h^{-n/4} e^{iS^-(x, t)/h} \varphi_k^-\left(\frac{x - Q^-(t, \tau^-)}{h^{1/2}}, t\right) h^{k/2}, & \text{с отрицательной стороны от } M, \\ h^{-n/4} e^{iS^+(x, t)/h} \hat{\varphi}_k\left(\frac{x - Q^+(t, \tau^+)}{h^{1/2}}, t\right) h^{k/2} + \omega, & \text{с положительной стороны от } M, \end{cases} \quad (4.2.15)$$

где параметры  $\tau^i = \tau^i(x, t)$ ,  $i \in \{+, -\}$ , находятся из уравнений:

$$\langle x - Q^i(\tau, t), \frac{\partial Q^i}{\partial \tau_j}(\tau, t) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.2.16)$$

Поправка к решению  $\omega(x, t, h)$  определена ниже (см. доказательство теоремы) и удовлетворяет оценке  $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{N/2})$ .

**Теорема 4.2.** *Решение задачи Коши (4.0.1) при  $t \in [t_0, T]$  представимо в виде  $\psi = \Psi_N + \chi$ , где  $\|\chi\|_{L_2} = O(h^{N/2-1})$ .*

*Доказательство.* Все оценки понимаются в норме пространства  $L_2$ . Доказательство разбивается на три шага.

На первом шаге покажем, что функция  $\Psi$  (4.2.15) при  $\omega = 0$  является приближенным решением уравнения Шредингера с обеих сторон от поверхности  $M$ , то есть  $\|\hat{L}\Psi_N\|_{L_2} = O(h^{(N+3)/2})$ .

На втором шаге покажем, что решение  $\Psi$  лежит в области определения оператора Шредингера с  $\delta$ -потенциалом и удовлетворяет начальным условиям задачи Коши (4.0.1).

На третьем шаге покажем, что решение задачи Коши представимо в виде  $\psi = \Psi_N + \chi$ , где  $\|\chi\|_{L_2} = O(h^{N/2-1})$ .

1. Обозначим через  $\hat{L}$  нестационарный оператор Шредингера с гладким потенциалом:

$$\hat{L} = -ih \frac{\partial}{\partial t} - \frac{h^2}{2} \Delta + V(x).$$

Покажем, что в предположении  $\omega = 0$  справедлива оценка  $\hat{L}\psi = O(h^{\frac{N+3}{2}})$ . Переобозначим индексы  $\{+, -, \wedge\}$  как  $\{1, 2, 3\}$ . Будем считать, что  $Q^3 \equiv Q^1$ ,  $P^3 \equiv P^1$ ,  $B^3 \equiv B^1$ ,  $C^3 \equiv C^1$  и, соответственно,  $S^3 \equiv S^1$ . Аналогично доказательству для гладкого случая рассмотрим действие оператора  $\hat{L}$  на  $\Psi_N(x, t, h)$ :

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi_N(x, t, h) &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right\rangle + V(x) \right) \phi_j^\alpha h^{j/2} - \\ &- ih \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left( \frac{\partial \phi_j^\alpha}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S^\alpha \phi_j^\alpha - \frac{ih}{2} \Delta \phi_j^\alpha \right) h^{j/2}, \end{aligned}$$

где введены обозначения  $\phi_j^\alpha(x, t) = \varphi_j^\alpha \left( \frac{x - Q^\alpha(\tau, t)}{h^{1/2}}, t \right) \Big|_{\tau=\tau(x, t)}$ . Перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi_N(x, t, h) &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h}S^\alpha} \left[ \frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right\rangle + V(Q^\alpha) + \right. \\ &+ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(Q^\alpha), x - Q^\alpha \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle x - Q^\alpha, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(Q^\alpha)(x - Q^\alpha) \right\rangle - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{l=1}^k \left\langle x - Q^\alpha, \frac{\partial B^\alpha(C^\alpha)^{-1}}{\partial \tau_l^\alpha}(x - Q^\alpha) \right\rangle \left( \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial t} + \left\langle P^\alpha, \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x} \right\rangle \right) - \\ &- \frac{1}{8} \left( \sum_{l=1}^k \left\langle x - Q^\alpha, \frac{\partial B^\alpha(C^\alpha)^{-1}}{\partial \tau_l^\alpha}(x - Q^\alpha) \right\rangle \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x} \right)^2 \Big] \phi_j^\alpha h^{j/2} - \\ &- ih \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h}S^\alpha(x, t)} \left( \frac{\partial \phi_j^\alpha}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S^\alpha \phi_j^\alpha - \frac{ih}{2} \Delta \phi_j^\alpha + F_j^\alpha \right) h^{j/2} + \tilde{F}_{N+1}(x, t, h). \end{aligned}$$

Функции  $F_j^\alpha(x, t)$  и  $\tilde{F}_{N+1}(x, t, h)$  зависят от предыдущих поправок  $\phi_i^\alpha(x, t)$ ,  $i < j$ . Полагая  $F_0^\alpha \equiv 0$ , определим:

$$\tilde{F}_{N+1}(x, t, h) = -ih \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=N+1}^{\infty} F_j^\alpha(x, t) h^{j/2},$$

$$\begin{aligned}
F_j^\alpha(x, t) &= \frac{i}{2h} \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^k \langle x - Q^\alpha, \frac{\partial B^\alpha(C^\alpha)^{-1}}{\partial \tau_m} (x - Q^\alpha) \rangle \tilde{v}_{j+1-l}^{\alpha, m} \phi_{j-l}^\alpha + \\
&+ \frac{i}{8h} \left( \sum_{l=1}^k \langle x - Q^\alpha, \frac{\partial B^\alpha(C^\alpha)^{-1}}{\partial \tau_l^\alpha} (x - Q^\alpha) \rangle \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x} \right)^2 \phi_{j-2}^\alpha + \\
&+ i \sum_{l=0}^{j-1} \frac{\varphi_l^\alpha}{(j+2-l)!} \sum_{|m|=j+2-l} \frac{\partial^{|m|} V}{\partial x^m} (Q^\alpha) \frac{(x - Q^\alpha)^m}{h^{m/2}}, \quad j \geq 1.
\end{aligned}$$

В силу того, что функции  $S^\alpha(x, t)$  определены как (4.2.10) и удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби с поправкой (4.1.27), все соответствующие слагаемые в рассматриваемом выражении обращаются в нуль. Таким образом, остается рассмотреть следующее выражение:

$$\hat{L}\Psi_N(x, t, h) = -ih \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h} S^\alpha} \left( \frac{\partial \phi_j^\alpha}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S^\alpha \phi_j^\alpha - \frac{ih}{2} \Delta \phi_j^\alpha + F_j^\alpha \right) h^{j/2} + \tilde{F}_{N+1}.$$

Рассмотрим переменные  $z^\alpha$  (4.2.11). В новых переменных функции  $\phi_k^\alpha(x, t)$  принимают вид:

$$\phi_k^\alpha(x, t) = \varphi_k^\alpha(z, t), \quad k = 0, \dots, N.$$

Выразим производные по  $x$  и  $t$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_j^\alpha}{\partial x}(x, t) &= h^{-1/2} \left( \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha}(z^\alpha, t) - \sum_{l=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha}(z^\alpha, t), \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \tau_l^\alpha}(\tau^\alpha, t) \right\rangle \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x} \right), \\
\frac{\partial \phi_j^\alpha}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial t}(z^\alpha, t) - h^{-1/2} \left( \left\langle \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha}(z^\alpha, t), \dot{Q}^\alpha(\tau, t) \right\rangle + \sum_{l=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha}(z^\alpha, t), \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \tau_l^\alpha}(\tau^\alpha, t) \right\rangle \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial t} \right).
\end{aligned}$$

Перепишем фазовые функции  $S^\alpha(x, t)$  (4.2.10) в переменных  $z^\alpha$ :

$$S^\alpha(x, t) = S^\alpha(h^{1/2} z^\alpha + Q^\alpha(\tau, t), t) = \sigma^\alpha(\tau, t) + h^{1/2} \langle P^\alpha(\tau, t), z^\alpha \rangle + \frac{h}{2} \langle z^\alpha, B^\alpha(C^\alpha)^{-1}(\tau, t) z^\alpha \rangle,$$

где  $\tau = \tau^\alpha(x, t)$ . Для производных  $S^\alpha$ , входящих в (1), получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S^\alpha}{\partial x}(x, t) &= P^\alpha + h^{1/2} B^\alpha(C^\alpha)^{-1} z^\alpha + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^k \langle z^\alpha, \frac{\partial (B^\alpha(C^\alpha)^{-1})}{\partial \tau_i^\alpha} z^\alpha \rangle \frac{\partial \tau_i^\alpha}{\partial x}, \\
\Delta S^\alpha(x, t) &= \text{tr}(B^\alpha(C^\alpha)^{-1}) + 2h^{1/2} \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{\partial (B^\alpha(C^\alpha)^{-1})}{\partial \tau_i^\alpha} z^\alpha, \frac{\partial \tau_i^\alpha}{\partial x} \right\rangle - \\
&- h^{1/2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left\langle \frac{\partial (B^\alpha(C^\alpha)^{-1})}{\partial \tau_i^\alpha} z^\alpha, \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \tau_j^\alpha} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \tau_i^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \tau_j^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle z^\alpha, \frac{\partial^2 (B^\alpha(C^\alpha)^{-1})}{\partial \tau_i^\alpha \partial \tau_j^\alpha} z^\alpha \rangle \left\langle \frac{\partial \tau_i^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \tau_j^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \\
&+ \frac{h}{2} \sum_{i=1}^k \langle z^\alpha, \frac{\partial (B^\alpha(C^\alpha)^{-1})}{\partial \tau_i^\alpha} z^\alpha \rangle \Delta \tau_i^\alpha.
\end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемые, содержащие вычисленные выше производные:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial S^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial x} \right\rangle &= h^{-1/2} \left( \left\langle P^\alpha, \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z} \right\rangle - \sum_{l=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \tau_l^\alpha} \right\rangle \left\langle P^\alpha, \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x} \right\rangle \right) + \\
&+ \left( \left\langle B^\alpha (C^\alpha)^{-1} z^\alpha, \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha} \right\rangle - \sum_{l=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \tau_l^\alpha} \right\rangle \left\langle B^\alpha (C^\alpha)^{-1}, \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x} \right\rangle \right) + \\
&+ \frac{h}{2} \sum_{l=1}^k \left\langle z^\alpha, \frac{\partial (B^\alpha (C^\alpha)^{-1})}{\partial \tau_l^\alpha} z^\alpha \right\rangle \left( \left\langle \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x} \right\rangle - \sum_{m=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \tau_m^\alpha} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \tau_m^\alpha}{\partial x} \right\rangle \right), \\
\frac{1}{2} \Delta S^\alpha \varphi_j^\alpha &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} (B^\alpha (C^\alpha)^{-1}) \varphi_j^\alpha + \\
&+ h^{1/2} \sum_{l=1}^k \left( \left\langle \frac{\partial (B^\alpha (C^\alpha)^{-1})}{\partial \tau_l^\alpha} z^\alpha, \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x} \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k \left\langle \frac{\partial (B^\alpha (C^\alpha)^{-1})}{\partial \tau_l^\alpha} z^\alpha, \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \tau_m^\alpha} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \tau_m^\alpha}{\partial x} \right\rangle \right) \varphi_j^\alpha + \\
&+ \frac{h}{4} \sum_{l=1}^k \left( \sum_{m=1}^k \left\langle z^\alpha, \frac{\partial^2 (B^\alpha (C^\alpha)^{-1})}{\partial \tau_l^\alpha \partial \tau_m^\alpha} z^\alpha \right\rangle \left\langle \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \tau_m^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \left\langle z^\alpha, \frac{\partial (B^\alpha (C^\alpha)^{-1})}{\partial \tau_l^\alpha} z^\alpha \right\rangle \Delta \tau_l^\alpha \right) \varphi_j^\alpha.
\end{aligned}$$

Используя оценки и выражения аналогичные гладкому случаю, получаем:

$$\begin{aligned}
\hat{L} \Psi_N(x, t, h) &= -ih \sum_{j=0}^N e^{i S^\alpha} \left( \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{tr} (B^\alpha (C^\alpha)^{-1}) \varphi_j^\alpha + \left\langle B^\alpha (C^\alpha)^{-1} z^\alpha, \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha} \right\rangle - \right. \\
&- \sum_{l=1}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_j^\alpha}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \tau_l^\alpha} \right\rangle \left( \left\langle B^\alpha (C^\alpha)^{-1} z^\alpha, \frac{\partial \tau_l^\alpha}{\partial x} \right\rangle + \tilde{v}_1^{\alpha, l} \right) - \frac{i}{2} \Delta_z^\alpha \varphi_j^\alpha + \Phi_j^\alpha(z, t, \tau) \Big) h^{j/2} + \tilde{\Phi}_{N+1}(x, t, h).
\end{aligned}$$

Здесь  $\Phi_j^\alpha$  определяются аналогично (4.1.29) для каждого  $\alpha$ . Рассмотрим

$$\tilde{\Phi}(x, t, h) = -ih \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=N+1}^{\infty} \Phi_j^\alpha(z, t) h^{j/2} \Big|_{z=z^\alpha(x, t)}$$

Поскольку  $\varphi_k^\alpha$  для каждого  $\alpha$  определены как решения уравнений переноса (4.1.28), получим, что

$$\hat{L} \Psi_N(x, t, h) = \tilde{\Phi}_{N+1}(x, t, h), \quad \|\hat{L} \Psi_N\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+3}{2}}).$$

- Покажем, что решение  $\Psi_N$  лежит в области определения оператора Шредингера с  $\delta$ -потенциалом. Для этого поправим решение  $\Psi_N$  на некоторую функцию  $\omega$  таким образом, чтобы выполнялись краевые условия (4.0.7). Поверхность  $M$  задана уравнением  $x = r(y)$ , где  $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$  — координаты. Рассмотрим проекцию  $Q^+(\tau)$  траектории падающего пучка. По построению она пересекает поверхность  $M$  ровно один раз, причем пересечение трансверсально. Точка, в которой  $Q^+(\tau, t)$  пересекает поверхность  $M$ , зависит от точки поверхности  $\gamma_0^k = \{x \in \mathbb{R}^n : x = q_0(\tau)\}$ , то есть от параметра  $\tau$ . Точка пересечения  $y_0(\tau)$  проекции  $Q^+(\tau, t)$  с поверхностью  $M$  и момент пересечения  $t_0(\tau)$  зависят от параметра  $\tau$  на поверхности  $\gamma_0^k$ .

Обозначим точку пересечения как  $y = y_0(\tau)$ ; момент времени, отвечающий пересечению как  $t = t_0(\tau)$ , где  $\tau$  — параметр на поверхности  $x = q_0(\tau)$ . Определим вектор  $\xi(\tau) = (y - y_0(\tau), t - t_0(\tau))h^{-1/2}$ . Тогда  $z^\alpha|_M = (x - Q^\alpha(\tau^\alpha(r(y), t), t))/h^{1/2} = z_1^\alpha(\xi(\tau)) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k^\alpha(\xi(\tau))h^{\frac{k-1}{2}}$ , где  $z_k^\alpha(\tau)$  — однородные многочлены степени  $k$  по  $\xi(\tau)$ . Для упрощения записи индексы для переменных  $z^\alpha$  опущены.

Поскольку фаза прошедшего пучка совпадает с фазой падающего по определению ( $S^3 \equiv S^1$ ), ограничимся рассмотрением  $S^1$  и  $S^2$ . Фазовые функции в переменных  $z$  принимают вид (1). Тогда в точках поверхности  $M$  их можно переписать в виде:

$$S^\alpha(z, t) \Big|_M = \sum_{m=0}^{\infty} S_m^\alpha(\xi(\tau))h^{m/2},$$

где  $S_m^\alpha(\xi)$  — однородные многочлены по  $\xi(\tau)$  степени  $m$ . Выпишем в явном виде  $S_0^\alpha$ ,  $S_1^\alpha$ ,  $S_2^\alpha$ :

$$\begin{aligned} S_0^\alpha(\xi(\tau)) &= \sigma_0^\alpha(\xi(\tau)), \\ S_1^\alpha(\xi(\tau)) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle P^\alpha(\tau, t_0(\tau)), \frac{\partial r(y_0(\tau))}{\partial y^i} \rangle \xi^i(\tau) - \left( \frac{|P^\alpha(\tau, t_0(\tau))|^2}{2} + V(Q^\alpha(\tau, t_0(\tau))) \right) \xi^0(\tau), \\ S_2^\alpha(\xi(\tau)) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} \langle \frac{\partial r(y_0(\tau))}{\partial y^i}, B^\alpha(C^\alpha)^{-1}(\tau, t_0(\tau)) \frac{\partial r(y_0(\tau))}{\partial y^j} \rangle \xi^i(\tau) \xi^j(\tau) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \langle \dot{P}^\alpha(\tau, t_0(\tau)) - B^\alpha(C^\alpha)^{-1}(\tau, t_0(\tau)) P^\alpha(\tau, t_0(\tau)), \frac{\partial r(y_0(\tau))}{\partial y^i} \rangle \xi^0(\tau) \xi^i(\tau) - \\ &- \frac{1}{2} \left( \langle \dot{P}^\alpha(\tau, t_0(\tau)), P^\alpha(\tau, t_0(\tau)) \rangle + \langle B^\alpha(C^\alpha)^{-1}(\tau, t_0(\tau)) P^\alpha(\tau, t_0(\tau)), P^\alpha(\tau, t_0(\tau)) \rangle \right) \xi^0(\tau) \xi^0(\tau). \end{aligned}$$

Заметим, что  $S_0^+(\xi(\tau)) = S_0^-(\xi(\tau))$ ,  $S_1^+(\xi(\tau)) = S_1^-(\xi(\tau))$ ,  $S_2^+(\xi(\tau)) = S_2^-(\xi(\tau))$ .

Далее, как и раньше,  $\alpha = \{1, 2, 3\} = \{+, -, \cdot\}$ . Рассмотрим старшие части амплитуд  $\varphi_0^\alpha$  и поправки к ним  $\varphi_j^\alpha$ ,  $j \geq 1$ . В точках поверхности  $M$  они представимы в виде:

$$\varphi_j^\alpha(z, t) \Big|_M = \varphi_j^\alpha(z(\xi(\tau)), t) = \varphi_j^\alpha(z_1(\xi(\tau)), t_0(\tau)) + \sum_{s \geq 2} \varphi_j^{\alpha, s}(\xi(\tau), t_0(\tau))h^{s/2},$$

где  $\varphi_j^{\alpha, s}(\xi(\tau), t_0(\tau))$  — многочлены степени  $s$  от  $\xi(\tau)$ .

Введем обозначение:

$$\Psi_N^\alpha = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S^\alpha(x, t)} \sum_{j=0}^N \varphi_j^\alpha \left( \frac{x - Q^\alpha(\tau, t)}{h^{1/2}}, t \right) h^{j/2} \Big|_{\tau=\tau^\alpha(x, t)}.$$

Тогда на поверхности  $M$  для  $\Psi_N^\alpha(x, t, h)$  справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\Psi^\alpha(x, t, h) \Big|_M &= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S^\alpha(r(y), t)} \sum_{j=0}^N \varphi_j^\alpha(z(\xi(\tau)), t) h^{j/2} = \\
&= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} (S_0^\alpha(\xi(\tau)) + S_1^\alpha(\xi(\tau)) h^{1/2} + S_2^\alpha(\xi(\tau)) h)} \sum_{j=0}^N e^{\frac{i}{h} \sum_{m=3}^{\infty} S_m^\alpha(\xi(\tau)) h^{m/2}} \varphi_j^\alpha(z(\xi(\tau)), t) h^{j/2} = \\
&= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} (S_0^\alpha(\xi(\tau)) + S_1^\alpha(\xi(\tau)) h^{1/2} + S_2^\alpha(\xi(\tau)) h)} \sum_{j=0}^N (\varphi_j^\alpha(z_1(\xi(\tau)), t_0(\tau)) + \chi_j^\alpha(\xi(\tau)) h^{j/2} + \rho^\alpha(\xi(\tau), h), \\
h \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial m}(x, t, h) \Big|_M &= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} (S_0^\alpha(\xi(\tau)) + S_1^\alpha(\xi(\tau)) h^{1/2} + S_2^\alpha(\xi(\tau)) h)} \sum_{j=0}^N (i \langle P^\alpha(\tau, t_0(\tau)), m \rangle \varphi_j^\alpha(z_1(\xi(\tau)), t_0(\tau)) + \\
&+ \mu_j(\xi(\tau)) h^{j/2} + \rho_1^\alpha(\xi(\tau), h), \\
q(y) \Psi^\alpha(x, t, h) \Big|_M &= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S^\alpha(r(y), t)} \sum_{j=0}^N \varphi_j^\alpha(z(\xi(\tau)), t) h^{j/2} = \\
&= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} (S_0^\alpha(\xi(\tau)) + S_1^\alpha(\xi(\tau)) h^{1/2} + S_2^\alpha(\xi(\tau)) h)} q(y_0) \sum_{j=0}^N (\varphi_j^\alpha(z_1(\xi(\tau)), t_0(\tau)) + \gamma_j(\xi(\tau)) h^{j/2} + \rho_2^\alpha(\xi(\tau), h),
\end{aligned}$$

где  $\chi_0^\alpha \equiv \mu_0^\alpha \equiv \gamma_0^\alpha \equiv 0$ ;  $\chi_j^\alpha, \mu_j^\alpha, \gamma_j^\alpha$  ( $j > 0$ ) — многочлены от  $\xi(\tau)$ , которые выражаются через более старшие слагаемые  $\varphi_0^\alpha, \dots, \varphi_{j-1}^\alpha$ ,  $j = 1, \dots, N$ ; через  $\rho^\alpha, \rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha$  обозначены функции порядка  $O(h^{\frac{N+1}{2}})$ .

Используя полученные выражения, перейдем к рассмотрению краевых условий (4.0.7). Для краткости записи введем обозначения:

$$\mathcal{E}^+(\tau) = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} (S_0^+(\xi(\tau)) + S_1^+(\xi(\tau)) h^{1/2} + S_2^+(\xi(\tau)) h)}, \quad z_* = z_1(\xi(\tau)), \quad t_* = t_0(\tau).$$

Первое краевое условие принимает вид:

$$\mathcal{E}^+(\tau) \sum_{j=0}^N (\varphi_j^+(z_*, t_*) + \varphi_j^-(z_*, t_*)) h^{j/2} = \mathcal{E}^+(\tau) \sum_{j=0}^N (\hat{\varphi}_j(z_*, t_*) + \chi_j(\xi(\tau))) h^{j/2} + \rho(\xi(\tau), h).$$

Рассмотрим второе краевое условие:

$$\begin{aligned}
i \mathcal{E}^+(\tau) \langle P^+(\xi(\tau), t_*), m(y_0(\tau)) \rangle \sum_{j=0}^N (\varphi_j^+(z_*, t_*) - \varphi_j^-(z_*, t_*) - \hat{\varphi}_j(z_*, t_*)) h^{j/2} = \\
= \mathcal{E}^+(\tau) \sum_{j=0}^N (q(y_0) \hat{\varphi}_j(z_*, t_*) + \gamma_j(\xi(\tau)) + \mu_j(\xi(\tau))) h^{j/2} + \rho_1(\xi(\tau), h).
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}\rho(\xi(\tau), h) &= \hat{\rho}(\xi(\tau), h) - \rho^+(\xi(\tau), h) - \rho^-(\xi(\tau), h), \\ \rho_1(\xi(\tau), h) &= \hat{\rho}_1(\xi(\tau), h) - \rho_1^+(\xi(\tau), h) - \rho_1^-(\xi(\tau), h) + \rho_2^+(\xi(\tau), h), \\ \chi_j(\xi(\tau), h) &= \hat{\chi}_j(\xi(\tau), h) - \chi_j^+(\xi(\tau), h) - \chi_j^-(\xi(\tau), h), \\ \mu_j(\xi(\tau), h) &= \hat{\mu}_j(\xi(\tau), h) - \mu_j^+(\xi(\tau), h) - \mu_j^-(\xi(\tau), h), \\ \gamma_j(\xi(\tau), h) &= \hat{\gamma}_j(\xi(\tau), h).\end{aligned}$$

Исходя из полученных равенств для краевых условий определим функции  $u_j(\xi(\tau))$ ,  $v_j(\xi(\tau))$ , входящие в краевые условия для амплитуд отраженного и прошедшего пучков (4.2.13):

$$\begin{aligned}u_j(\xi(\tau)) &= -(\mu_j(\xi(\tau)) + \gamma_j(\xi(\tau))) - i\langle P^+(\tau(\xi)), m(y_0(\tau))\chi_j(\tau(\xi)) \rangle, \\ v_j(\xi(\tau)) &= -(\mu_j(\xi(\tau)) + \gamma_j(\xi(\tau))) - i\langle P^+(\tau(\xi)), m(y_0(\tau))\chi_j(\tau(\xi)) \rangle.\end{aligned}$$

Положим  $\omega \equiv 0$  и рассмотрим решение  $\Psi_N|_{\omega \equiv 0} = \Psi_N^0$ . Заметим, что для такой функции краевые условия (4.0.7) выполняются с точностью до функций  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ :

$$\begin{cases} \Psi_N^0(r(y) - 0, t) - \Psi_N^0(r(y) + 0, t) = \omega_1, \\ h \left( \frac{\partial \Psi_N^0}{\partial m}(r(y) - 0, t) - \frac{\partial \Psi_N^0}{\partial m}(r(y) + 0, t) \right) - q(y)\Psi_N^0(r(y), t) = \omega_2. \end{cases}$$

Каждая из функций  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  представима в виде:

$$h^{\frac{N+1}{2} - \frac{n}{4}} e^{\frac{i}{h}(S_0^+(\xi(\tau)) + S_1^+(\xi(\tau))h^{1/2} + S_2^+(\xi(\tau))h)} g(\xi(\tau), y_0(\tau), t_0(\tau), h)$$

где  $g$  — гладкая функция своих аргументов, растущая при  $\xi(\tau) \rightarrow \infty$  не быстрее многочлена. Для каждой из функций  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  справедливы следующие оценки:

$$\|\omega_i\|_{L_2(M \times [0, T])} = O(h^{\frac{N+1}{2}}), \quad \|h \frac{\partial}{\partial y_j} \omega_i\|_{L_2(M \times [0, T])} = O(h^{\frac{N+1}{2}}), \quad \|h \frac{\partial}{\partial t} \omega_i\|_{L_2(M \times [0, T])} = O(h^{\frac{N+1}{2}}).$$

Для того, чтобы краевые условия выполнялись точно, поправим  $\Psi_N$  следующим образом. Введем в окрестности точки  $r(y_0(\tau))$  координаты  $(y, \rho)$ , где  $\rho$  — ориентированное расстояние до  $M$  по нормали. Определим функцию  $\omega$  с положительной стороны от  $M$  в этой окрестности по формуле

$$\omega = e^{\frac{-\rho^2}{h}} (\omega_1 + \frac{\rho}{h} (\omega_2 - q\omega_1)),$$

и продолжим ее во все пространство при помощи гладкой не зависящей от  $h$  функции, равной нулю вне некоторой большей окрестности. Переопределим  $\Psi_N \rightarrow \Psi_N + \omega$ . Теперь функция  $\Psi_N$  в точности удовлетворяет краевым условиям (4.0.7). Поскольку  $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{N/2})$ ,  $\|h \frac{\partial \omega}{\partial x_j}\|_{L_2} = O(h^{N/2})$ ,  $\|h \frac{\partial \omega}{\partial t}\|_{L_2} = O(h^{N/2})$ , справедлива оценка  $\|\hat{L}\Psi_N\|_{L_2} = O(h^{N/2})$ .

3. Построенная функция  $\Psi$  удовлетворяет уравнению

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi + f, \quad \|f\|_{L_2} = O(h^{\frac{N}{2}}).$$

Пусть  $\Psi(x, t, h)$  — точное решение задачи Коши (4.1.1). Введем  $\chi = \Psi_N(x, t, h) - \Psi(x, t, h)$ , причем  $\chi|_{t=0} = 0$ . Из самосопряженности оператора  $\hat{H}$  оценка  $\|\chi\|_{L_2} = O(h^{N/2-1})$  следует аналогично гладкому случаю, что завершает доказательство.  $\square$

## 4.2.1 Геометрическая интерпретация

С геометрической точки зрения взаимодействие гауссова пучка с  $\delta$ -потенциалом на поверхности  $M$  описывается расщеплением изотропного многообразия и согласованной модификацией комплексных ростков. Падающей волне соответствует пара  $[\Lambda^{n,+}, r_t^{n,+}]$ , отраженной —  $[\Lambda^{n,-}, r_t^{n,-}]$ , прошедшей —  $[\Lambda^{n,\hat{}}, r_t^{n,\hat{}}]$ .

Изотропные поверхности определяются траекториями гамильтоновой системы (4.1.8):

$$\begin{aligned} \Lambda^{n,+} &= \{(q, p, t, p_t) \in \mathbb{R}^{2n+2} : q = Q^+(\tau, t), p = P^+(\tau, t), p_t = -H(Q^+, P^+)\}, \\ \Lambda^{n,-} &= \{(q, p, t, p_t) \in \mathbb{R}^{2n+2} : q = Q^-(\tau, t), p = P^-(\tau, t), p_t = -H(Q^-, P^-)\}, \\ \Lambda^{n,\hat{}} &= \{(q, p, t, p_t) \in \mathbb{R}^{2n+2} : q = \hat{Q}(\tau, t), p = \hat{P}(\tau, t), p_t = -H(\hat{Q}, \hat{P})\}, \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

с формой объема  $d\sigma^+ = d\sigma^- = d\hat{\sigma} = d\tau d\mu$ , согласованной с параметризацией вдоль траектории. До момента пересечения с поверхностью  $M$  все три многообразия совпадают при  $t < t_0(\tau)$ .

В момент  $t_* = t_0(\tau)$  проекция  $Q^+(\tau, t)$  пересекает поверхность  $M$  трансверсально в точке  $y_0(\tau)$ . Изотропные поверхности  $\Lambda^{n,-}$  и  $\Lambda^{n,\hat{}}$  порождаются из  $\Lambda^{n,+}$  заменой нормальной компоненты импульса согласно краевым условиям (4.2.18):

$$Q^-(t_*) = Q^+(t_*) = \hat{Q}(t_*), \quad P_n^-(t_*) = -P_n^+(t_*), \quad P_\tau^-(t_*) = \hat{P}_\tau(t_*) = P_\tau^+(t_*), \quad (4.2.18)$$

после чего каждая из поверхностей продолжается сдвигом вдоль траекторий гамильтоновой системы при  $t > t_*$ .

Ростки падающей и прошедшей волн определяются одной и той же матрицей  $\Omega^+(\tau) = B^+(C^+)^{-1}(\tau, t_*)$ , эволюционирующей по системе в вариациях (4.2.19):

$$r_{t_*}^{n,+} = r_{t_*}^{n,\hat{}} = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : w_i = \sum_{j=1}^n \Omega_{ij}^+(\tau) z_j \right\}. \quad (4.2.19)$$

Положительная определенность  $\text{Im } \Omega^+ > 0$  сохраняется при всех  $t \in [0, T]$  и обеспечивает экспоненциальную локализацию пучков вдоль траекторий  $Q^+(\tau, t)$  и  $\hat{Q}(\tau, t)$ .

Росток отраженной волны задается матрицей  $\Omega^-(\tau)$  из системы (4.2.20):

$$r_{t_*}^{n,-} = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : w_i = \sum_{j=1}^n \Omega_{ij}^-(\tau) z_j \right\}. \quad (4.2.20)$$

Матрица  $\Omega^-$  отличается от  $\Omega^+(t_*)$  на слагаемые, содержащие вторые производные  $r_{ij}(\tau) = \frac{\partial^2 r}{\partial y^i \partial y^j}(y_0(\tau))$ , и определяется кривизной поверхности  $M$  в точке  $y_0(\tau)$ . Нормальное направление

фиксируется законом отражения, касательные компоненты — условием согласования (4.2.18).  
Условие  $\text{Im } \Omega^- > 0$  гарантирует локализацию отраженного пучка вдоль  $Q^-(\tau, t)$ .

Таким образом, влияние  $\delta$ -потенциала сводится к двум эффектам на поверхности  $M$ : расщеплению изотропной поверхности  $\Lambda^{n,+}$  на тройку  $\Lambda^{n,+}$ ,  $\Lambda^{n,-}$ ,  $\Lambda^{n,\hat{}}$  и модификации комплексного ростка при переходе от  $r_{t_*}^{n,+}$  к  $r_{t_*}^{n,-}$ . Кривизна поверхности  $M$  входит в  $\Omega^-$  через  $r_{ij}(\tau)$ , тогда как прошедший пучок наследует росток падающего:  $r_{t_*}^{n,\hat{}} = r_{t_*}^{n,+}$ .

## Глава 5

# Квазиклассические асимптотики для трехмерной задачи с точечным $\delta$ -потенциалом

### 5.1 Постановка задачи

Пусть  $x \in \mathbb{R}^3$ . Рассмотрим задачу Коши для нестационарного уравнения Шредингера с точечным  $\delta$ -потенциалом в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + \alpha \delta_{x_0} \psi, \\ \psi(x, 0) = e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x). \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Здесь  $\alpha \in \mathbb{R}$  — коэффициент перед  $\delta$ -потенциалом;  $h > 0$  — малый квазиклассический параметр. Начальные данные задаются в виде быстроосциллирующего волнового пакета с гладкой вещественной фазой  $S_0(x)$  и гладкой амплитудой  $\varphi^0$ . Носитель функции  $\varphi^0$  компактен и не содержит точку  $x_0$ . Будем считать, что носитель  $\varphi^0$  содержится в шаре

$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\} \quad (5.1.2)$$

с центром в точке  $x = 0$  и радиусом  $R = \varepsilon > 0$ .

Без ограничения общности можно считать, что центр носителя  $\varphi^0$  помещен в начало координат в силу инвариантности уравнения (5.1.1) относительно сдвигов

$$x \rightarrow x + a, \quad a \in \mathbb{R}^3.$$

В общем случае уравнение Шредингера с  $\delta$ -потенциалом включает как точечное взаимодействие, так и произвольный внешний потенциал  $V(x)$ :

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \alpha \delta_{x_0} \psi.$$

В настоящей главе рассматривается задача рассеяния свободной частицы на точечном потенциале при отсутствии внешнего поля ( $V(x) = 0$ ). В задачах рассеяния на  $\delta$ -потенциале могут возникать как сходящиеся, так и расходящиеся волны. Расходящиеся описывают частицы, удаляющиеся от рассеивающего центра, сходящиеся — частицы, приближающиеся к точке рассеяния. Наличие сходящейся волны в решении зависит от формы носителя начальных данных.

Ниже построена асимптотика при  $h \rightarrow 0$  решения задачи Коши (5.1.1) и показано, что для носителя  $B$  (5.1.2) в виде  $\varepsilon$ -шара с центром в точке  $x = 0$ , не содержащего точку  $x_0$ , сходящаяся волна отсутствует.

Решение ищется в виде суперпозиции падающей и рассеянной компонент:

$$\psi(x, t, h) = \psi_1(x, t, h) + \frac{1}{r(x, x_0)} \psi_2(x, t, h), \quad (5.1.3)$$

где  $\psi_1$  — падающая волна, описывающая распространение начального волнового пакета, а слагаемое  $\frac{1}{r(x, x_0)} \psi_2$  — рассеянная компонента, обусловленная взаимодействием с  $\delta$ -потенциалом в точке  $x_0$ . Такой вид решения следует из краевых условий на область определения оператора с точечным потенциалом: в окрестности точки  $x_0$  решение представляется в виде суммы сингулярной компоненты, пропорциональной  $\frac{1}{r(x, x_0)}$ , и регулярной составляющей.

## 5.2 Оператор с точечным потенциалом $\delta_{x_0}$

В отличие от предыдущих глав, где носителем  $\delta$ -потенциала служила гиперповерхность  $M$  коразмерности 1, в настоящей главе носитель — точка  $x_0$ . Это приводит к качественным изменениям в структуре задачи. Краевые условия задаются не на скачок нормальной производной на  $M$ , а на коэффициенты разложения решения в окрестности точки  $x_0$ .

Рассмотрим оператор Шредингера с точечным потенциалом:

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2} \Delta + \alpha \delta_{x_0}. \quad (5.2.1)$$

Строгое определение и свойства оператора (5.2.1) изложены в Главе 1. Область определения оператора (5.2.1) состоит из функций  $f \in D(\hat{H}) \subset W_2^2(M)$ , представимых в окрестности точки  $x_0$  в виде (1.3.6):

$$f(x, t) = a(f) F_0(x, x_0) + b(f) + R(x, x_0), \quad (5.2.2)$$

где  $a(f), b(f) \in \mathbb{C}$ ,

$$F_0(x, x_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(x, x_0)}, \quad \dim M = 3,$$

где  $r(x, x_0) = |x - x_0|$  — евклидово расстояние между точками  $x$  и  $x_0$  на многообразии  $M$ . Коэффициенты  $a(f)$  и  $b(f)$  связаны краевыми условиями:

$$a(f) = \frac{2\alpha}{h^2} b(f).$$

При стремлении  $x \rightarrow x_0$  остаточный член  $R(x, x_0)$  удовлетворяет оценке

$$|R(x, x_0)| = o(1) \quad \text{при } x \rightarrow x_0.$$

Кроме того,

$$\|R(\cdot, x_0)\|_{L_2(B_\varepsilon(x_0))} = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

### 5.2.1 Краевые условия

В силу разложения (5.2.2) решение задачи (5.1.1)  $\psi \in D(\hat{H})$  в окрестности точки  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  представимо в виде:

$$\psi = \frac{a(\psi)}{4\pi r(x, x_0)} + b(\psi) + R(x, x_0), \quad (5.2.3)$$

где  $|R(x, x_0)| = o(1)$ . Коэффициенты  $a(\psi)$  и  $b(\psi)$  связаны краевым условием:

$$a(\psi) = \frac{2\alpha}{h^2} b(\psi). \quad (5.2.4)$$

**Предложение 5.1.** Пусть функция  $\psi(x, t, h) \in W_2^2(\mathbb{R}^3)$  представима в виде (5.1.3), причем

$$\psi_1(x, t, h) = e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k(x, t) h^k, \quad \psi_2(x, t, h) = e^{\frac{i}{h}S(r,t)} \sum_{k=0}^N \chi_k(r, t) h^k \Big|_{r=r(x,x_0)}. \quad (5.2.5)$$

Тогда для того, чтобы  $\psi(x, t, h)$  принадлежала области определения оператора  $\hat{H}$  с точечным потенциалом, необходимо и достаточно выполнение следующих краевых условий:

$$\begin{aligned} 2\alpha i e^{\frac{i}{h}S(0,t)} \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \chi_0(0, t) &= 0, \\ 2\alpha i \left( e^{\frac{i}{h}S(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \chi_1(0, t) - i \frac{\partial \chi_0}{\partial r}(0, t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_0(x_0, t) \right) &= 0, \\ 2\alpha i \left( e^{\frac{i}{h}S(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \chi_2(0, t) - i \frac{\partial \chi_1}{\partial r}(0, t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_1(x_0, t) \right) &= 0, \\ 2\alpha i \left( e^{\frac{i}{h}S(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \chi_m(0, t) - i \frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial r}(0, t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_{m-1}(x_0, t) \right) + \\ &+ 4\pi e^{\frac{i}{h}S(0,t)} \chi_{m-3}(0, t) = 0, \quad m \geq 3. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

*Доказательство.* Разложим функции  $\psi_1(x, t, h)$  и  $\psi_2(x, t, h)$  в окрестности точки  $x_0$  в ряд по степеням  $|x - x_0|$ . Для  $\psi_1$  получим:

$$\psi_1(x, t, h) = \psi_1(x_0, t, h) + \omega_1(x, t, h), \quad \|\omega_1\|_{L_2} = o(1),$$

Обозначим  $f_k(r, t) = e^{\frac{i}{h}S(r,t)} \chi_k(r, t)$ . Разложив  $f_k$  по степеням  $r = |x - x_0|$ , получим:

$$\begin{aligned} \psi_2(r, t, h) &= \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}S(r,t)} \chi_k(r, t) h^k = \sum_{k=0}^N f_k(r, t) h^k, \quad r = |x - x_0|, \\ \psi_2(r, t, h) &= \sum_{k=0}^N f_k(0, t) h^k + r \sum_{k=0}^N \frac{\partial f_k}{\partial r}(0, t) h^k + r \omega_2(r, t, h), \quad \|\omega_2\|_{L_2} = o(1). \end{aligned}$$

Тогда в окрестности точки  $x_0$ :

$$\psi(r, t, h) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^N f_k(0, t) h^k + \psi_1(x_0, t, h) + \sum_{k=0}^N \frac{\partial f_k}{\partial r}(0, t) h^k + \omega(r, t, h), \quad \|\omega\|_{L_2} = o(1).$$

Сравнивая с (5.2.3), получим выражения для коэффициентов  $a(\psi)$  и  $b(\psi)$ :

$$\begin{aligned} a(\psi) &= 4\pi \sum_{k=0}^N f_k(0, t) h^k = 4\pi \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \chi_k(0, t) h^k, \\ b(\psi) &= \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \left( \frac{i}{h} \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \chi_k(0, t) h^k + \frac{\partial \chi_k}{\partial r}(0, t) h^k \right) + \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_k(x_0, t) h^k. \end{aligned}$$

Если  $\psi \in D(\hat{H})$ , то выполнено (5.2.4). Перепишем условие в виде:

$$h^3 a = 2h\alpha b.$$

Подставляя выражения для  $a(\psi)$  и  $b(\psi)$ , получим:

$$\begin{aligned} 4\pi e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \sum_{k=0}^N \chi_k(0, t) h^{k+3} &= 2\alpha e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \sum_{k=0}^N \left( i \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \chi_k(0, t) h^k + \frac{\partial \chi_k}{\partial r}(0, t) h^{k+1} \right) + \\ &\quad + 2\alpha e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k(x_0, t) h^{k+1}. \end{aligned}$$

Для выполнения этого равенства при всех значениях малого параметра  $h$  необходимо, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях  $h$  в левой и правой частях совпадали. Приравнявая коэффициенты при  $h^0$ ,  $h^1$ ,  $h^2$  и  $h^m$ ,  $m \geq 3$ , получим:

$$\begin{aligned} h^0 : \quad & 2\alpha i e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \chi_0(0, t) = 0, \\ h^1 : \quad & 2\alpha i \left( e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \chi_1(0, t) - i \frac{\partial \chi_0}{\partial r}(0, t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_0(x_0, t) \right) = 0, \\ h^2 : \quad & 2\alpha i \left( e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \chi_2(0, t) - i \frac{\partial \chi_1}{\partial r}(0, t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_1(x_0, t) \right) = 0, \\ h^m, \quad m \geq 3 : \quad & 2\alpha i \left( e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \chi_m(0, t) - i \frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial r}(0, t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_{m-1}(x_0, t) \right) + \\ & + 4\pi e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \chi_{m-3}(0, t) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условия (5.2.6) в точности получены.

Обратно, если (5.2.6) выполнено, то  $\psi$  удовлетворяет (5.2.4) и принадлежит  $D(\hat{H})$ .  $\square$

**Замечание 5.2.** Условия (5.2.6) обеспечивают принадлежность функции  $\psi$  области определения  $D(\hat{H})$  и обеспечивают корректность применения оператора к функции. Однако для того, чтобы  $\psi$  являлась решением уравнения

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + \alpha \delta_{x_0} \psi,$$

дополнительно требуется, чтобы вне точки  $x_0$  выполнялось уравнение Шредингера без потенциала:

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi.$$

## 5.3 Асимптотика при наличии точечного потенциала

### 5.3.1 Условие взаимодействия с точечным потенциалом

В общем случае падающая волна строится в виде ВКБ-асимптотики:

$$\psi_1(x, t, h) = e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k(x, t) h^k,$$

где фазовая функция  $S(x, t)$  удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби, а амплитудные функции  $\varphi_k(x, t)$  определяются из уравнений переноса. Начальные данные для падающей волны имеют вид:

$$\psi_1(x, 0, h) = e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x),$$

где  $S_0(x)$  — начальная фазовая функция, а  $\varphi^0(x)$  — начальная амплитуда с компактным носителем  $B$ , не содержащим точку  $x_0$ .

Рассмотрим траекторию падающей волны. Она определяется как характеристика задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x} \right\rangle + V(x) = 0, \\ S(x, 0) = S_0(x). \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Соответствующий гамильтониан имеет вид:

$$H(x, p) = \frac{|p|^2}{2} + V(x). \quad (5.3.2)$$

Характеристики этого уравнения задаются гамильтоновой системой с начальными условиями:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p, & \begin{cases} x(0) = y, & y \in B, \\ p(0) = \nabla S_0(y). \end{cases} \\ \dot{p} = -H_x, \end{cases} \quad (5.3.3)$$

В случае  $V(x) = 0$  классическая траектория представляет собой прямолинейное движение:

$$X(t) = y + \nabla S_0(y)t, \quad P(t) = \nabla S_0(y). \quad (5.3.4)$$

Рассмотрим условие, гарантирующее, что падающая волна достигнет точку  $x_0$ . Для этого необходимо существование такого момента времени  $t_0$ , при котором

$$x' = x_0 - \nabla S_0(y)t_0 \in B,$$

где  $B$  — носитель начального возмущения  $\varphi^0(x)$ . Другими словами, необходимо, чтобы  $t_0$  лежало в «конусе лучей», исходящих из точек носителя. Направление падающей волны определяется через произвольную точку  $x' \in B$  как:

$$\nabla S_0(y) = \frac{x_0 - x'}{t_0}, \quad x' \in B.$$

Поскольку распространение волны, а значит, и ее траектория, определяются только направлением вектора  $x_0 - x'$  и не зависят от его длины, то без ограничения общности вектор  $\nabla S_0(y)$  можно считать единичным:

$$\nabla S_0(y) = \frac{x_0 - x'}{|x_0 - x'|}, \quad x' \in B.$$

Такой выбор эквивалентен перенормировке временного параметра  $t_0$ , сохраняющей физический смысл задачи.

Для исключения краевых эффектов, связанных с формой носителя и возможными отражениями волн от его границы, носитель начального возмущения выбирается в виде шара радиуса  $\varepsilon$ :

$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < \varepsilon\}, \quad (5.3.5)$$

то есть  $\text{supp } \varphi^0 \subset B$ .

На Рис. 5.1 показана геометрическая интерпретация условия:

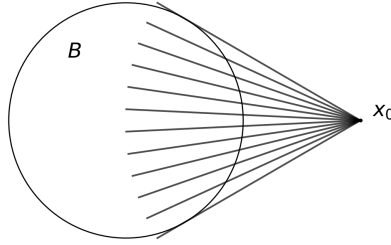


Рис. 5.1: «Конус лучей» из точек носителя  $B$

### 5.3.2 Переход к сферическим координатам

Поскольку в окрестности точки  $x_0$  решение представимо в виде (5.2.3), для его изучения вблизи точки  $x_0$  перейдем к сферическим координатам с центром в  $x_0$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\theta) \cos(\phi), & x_2 &= r \cos(\theta) \sin(\phi), & x_3 &= r \sin(\theta), \\ r &> 0, & \theta &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \phi &\in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

В сферических координатах гамильтониан (5.3.2) принимает вид

$$H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2 \cos^2 \theta}.$$

Гамильтонова система в сферических координатах записывается как

$$\begin{cases} \dot{r} = p_r, \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}, \\ \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{r^2 \cos^2 \theta}, \\ \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{r^3} + \frac{p_\phi^2}{r^3 \cos^2 \theta}, \\ \dot{p}_\theta = -\frac{p_\phi^2 \operatorname{tg} \theta}{r^2 \cos^2 \theta}, \\ \dot{p}_\phi = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим краевые условия (5.2.6), возникающие из требования принадлежности решения области определения оператора. Будем считать, что фазы падающей и рассеянной волн совпадают в точке  $x_0$ :

$$\sigma(0, \phi, \theta, t) = S(x_0, t). \quad (5.3.6)$$

Выполнение этого условия обеспечивает непрерывность фазы волновой функции в точке  $x_0$ , характерную для упругого рассеяния. Покажем, что условие (5.3.6) связывает траектории падающей и рассеянной волн в точке  $x_0$ .

Поскольку (5.3.6) выполняется для всех  $(\theta, \phi)$ , и, следовательно, при  $r \rightarrow 0$  функция  $\sigma$  не зависит от углов. Определим угловые производные в точке  $r = 0$  как пределы:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(0, \theta, \phi, t) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(r, \theta, \phi, t) = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \phi}(0, \theta, \phi, t) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma}{\partial \phi}(r, \theta, \phi, t) = 0.$$

Продифференцировав равенство (5.3.6) по  $t$ , получим:

$$\frac{\partial \sigma(0, \theta, \phi, t)}{\partial t} = \frac{\partial S(x_0, t)}{\partial t}.$$

Таким образом, угловые компоненты импульса рассеянной волны равны нулю в точке  $x_0$ :

$$p_\theta(0) = \frac{\partial \sigma(0, \theta, \phi, t)}{\partial \theta} = 0, \quad p_\phi(0) = \frac{\partial \sigma(0, \theta, \phi, t)}{\partial \phi} = 0.$$

В силу этих условий фаза  $\sigma(r, t)$  не зависит от угловых переменных  $\theta$  и  $\phi$ . Таким образом,  $\sigma = \sigma(r, t)$ . Следовательно, гамильтониан, отвечающий рассеянной волне, упрощается и принимает вид:

$$H(p_r, r) = \frac{p_r^2}{2}. \quad (5.3.7)$$

Соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби записывается как

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}(r, t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(r, t) \right)^2 = 0. \quad (5.3.8)$$

В силу уравнений Гамильтона-Якоби для падающей и рассеянной волн в точке  $x_0$  и полученных условий на производные фазовых функций в точке  $x_0$ , получим условие на радиальную компоненту фазы:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) = \pm |\nabla S(x_0, t)|. \quad (5.3.9)$$

С физической точки зрения «плюс» соответствует расходящейся волне (частицы удаляются от  $x_0$ ), знак «минус» — сходящейся волне (частицы приближаются к  $x_0$ ). Далее будет показано, что для выбранных начальных данных сходящаяся волна отсутствует.

### 5.3.3 Формулировка результата

Для формулировки основного результата введем функции, описывающие классические траектории падающей волны:

$$X(y, t) = \nabla S_0(y)t + y, \quad P(y, t) = \nabla S_0(y), \quad y \in B. \quad (5.3.10)$$

**Замечание 5.3.** Построенные функции являются траекторией  $\{X(y, t), P(y, t)\}$  гамильтоновой системы с заданными начальными данными:

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = 0, \\ x(0) = y, \\ p(0) = \nabla S_0(y). \end{cases} \quad (5.3.11)$$

Предположим, что эта траектория продолжается на бесконечный промежуток времени. Всюду дальше будем считать, что выполняется условие взаимодействия с точечным потенциалом, то есть необходимо существование такого момента времени  $t_0(y)$ , что луч  $X(y, t)$  достигнет точки  $x_0$ :

$$\exists t_0, \quad 0 < t_0 < T : \quad x_0 = y + \nabla S_0(y)t_0 \quad \forall y \in B, \quad (5.3.12)$$

и направление падающей волны определяется через произвольную точку  $x' \in B$ :

$$\nabla S_0(y) = \frac{x_0 - x'}{t_0}, \quad x' \in B. \quad (5.3.13)$$

Обозначим  $t_{\min} = \min_{y \in B} t_0(y)$  — минимальное время достижения точки  $x_0$ .

При условии  $J^1(y, t) = \det(\partial X(y, t)/\partial y) \neq 0$  для любого  $t \in [0, T]$ , определим фазу падающей волны:

$$S(x, t) = S_0(y) + \frac{|x - y|^2}{2t} \Big|_{y=y(x, t)}. \quad (5.3.14)$$

Для описания фазы расходящейся волны введем функции:

$$R(t_0(y), t) = |\nabla S(x_0, t_0(y))|(t - t_0(y)), \quad P_r(t_0(y), t) = |\nabla S(x_0, t_0(y))|. \quad (5.3.15)$$

**Замечание 5.4.** Построенные функции являются траекторией  $\{R(t_0(y), t), P_r(t_0(y), t)\}$  гамильтоновой системы с заданными условиями:

$$\begin{cases} \dot{r} = p_r, \\ \dot{p}_r = 0, \\ r(t_0) = 0, \\ p_r(t_0) = |\nabla S(x_0, t_0(y))|. \end{cases} \quad (5.3.16)$$

Определим фазу расходящейся волны следующим образом:

$$\sigma(r, t) = S(x_0, t_0(y)) + |\nabla S(x_0, t)| \frac{r}{2} \Big|_{t_0(y)=t_0(r, t)}, \quad t_0 = t - \frac{r}{|\nabla S(x_0, t_0)|}, \quad (5.3.17)$$

где  $t = t_0(y)$  — момент пересечения лучом  $X(y, t)$  точки  $x_0$ , то есть  $X(y, t_0) = x_0$ , или  $R(y, t_0) = 0$ . Заметим, функцию  $R$  можно рассматривать как через  $y$ , так и через  $t_0$ :  $R(y, t) \equiv R(t_0(y), t)$ . Определим функцию  $J^2(t_0, t) = \partial R(t_0, t) / \partial t_0$ . Для нее справедливо равенство:

$$\frac{d}{dt} J^2(t_0, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial R(t_0, t)}{\partial t_0} = \frac{\partial P_r(t_0, t)}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{\partial \sigma}{\partial r}(R(t_0, t), t) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}(R(y, t), t) J^2(t_0, t). \quad (5.3.18)$$

Существование фазы расходящейся волны требует, чтобы функция  $t_0(y)$  была определена и выполнялись условия (5.3.12) и  $J^1(y, t) \neq 0$ ,  $J^2(t_0, t) \neq 0$  при  $t \in [0, T]$ .

**Замечание 5.5.** Построенные функции  $S(x, t)$  и  $\sigma(r, t)$  удовлетворяют уравнениям Гамильтона-Якоби с соответствующими начальными и краевыми условиями.

Для  $S(x, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x} \right\rangle = 0, \\ S(x, 0) = S_0(x). \end{cases} \quad (5.3.19)$$

Для  $\sigma(r, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)^2 = 0, \\ \sigma(0, t) = S(x_0). \end{cases} \quad (5.3.20)$$

Построим функции  $\varphi_k(x, t)$  и  $\chi_k(r, t)$  — старшие части амплитуд падающей и расходящейся волн ( $k = 0$ ) и следующие поправки к ним ( $k > 0$ ). Для падающей волны амплитуды определяются следующим образом:

$$\varphi_0(x, t) = \frac{\varphi^0(y)}{\sqrt{|J^1(y, t)|}} \Big|_{y=y(x, t)}, \quad (5.3.21)$$

$$\varphi_k(x, t) = \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{|J^1(y, t)|}} \int_0^t \sqrt{|J^1(y, \tau)|} \Delta \varphi_{k-1}(X(y, \tau), \tau) d\tau \Big|_{y=y(x, t)}, \quad (5.3.22)$$

где  $k \in \mathbb{N}$  и  $1 \leq k \leq N$ .

**Замечание 5.6.** Построенные функции  $\varphi_0(x, t)$  и  $\varphi_k(x, t)$ ,  $1 \leq k \leq N$  удовлетворяют уравнениям переноса с соответствующими начальными условиями.

Для  $\varphi_0(x, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \langle \nabla S, \nabla \varphi_0 \rangle + \frac{1}{2} \Delta S \varphi_0 = 0, \\ \varphi_0(0, x) = \varphi^0(x). \end{cases} \quad (5.3.23)$$

Для  $\varphi_k(r, t)$ ,  $1 \leq k \leq N$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \langle \nabla S, \nabla \varphi_k \rangle + \frac{1}{2} \Delta S \varphi_k - \frac{i}{2} \Delta \varphi_{k-1} = 0, \\ \varphi_k(0, x) = 0. \end{cases} \quad (5.3.24)$$

Для расходящейся волны определим функции:

$$\chi_0(r, t) = 0, \quad (5.3.25)$$

$$\begin{aligned} \chi_1(r, t) &= \frac{i \varphi_0(x_0, t_0)}{|\nabla S_0(x_0, t_0)| \sqrt{|J^2(t_0, t)|}} \Big|_{t_0=t_0(r, t)} = \\ &= i \frac{\varphi_0(x_0, t_0)}{|\nabla S_0(x_0, t_0)|} \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}(R(t_0, s), s) ds \right) \Big|_{t_0=t_0(r, t)}. \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

**Замечание 5.7.** Построенные функции  $\chi_0(r, t)$  и  $\chi_1(r, t)$  удовлетворяют уравнениям переноса с соответствующими краевыми условиями при  $r = 0$ .

Для  $\chi_0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi_0}{\partial t}(r, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}(r, t) \chi_0(r, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial r}(r, t) \frac{\partial \chi_0}{\partial r}(r, t) = 0, \\ \chi_0(0, t) = 0. \end{cases} \quad (5.3.27)$$

Для  $\chi_1$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi_1}{\partial t}(r, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}(r, t) \chi_1(r, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial r}(r, t) \frac{\partial \chi_1}{\partial r}(r, t) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial r^2}(r, t) = 0, \\ \chi_1(0, t) = i \frac{\varphi_0(x_0, t)}{|\nabla S_0(x_0, t)|}. \end{cases} \quad (5.3.28)$$

Следующие поправки к амплитуде расходящейся волны ( $2 \leq k \leq N$ ) определяются как решения уравнений переноса:

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t}(r, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}(r, t) \chi_k(r, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial r}(r, t) \frac{\partial \chi_k}{\partial r}(r, t) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \chi_{k-1}}{\partial r^2}(r, t) = 0, \quad (5.3.29)$$

при выполнении краевых условий в точке  $r = 0$ :

$$\begin{aligned} \chi_k(0, t) &= i \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \right)^{-1} \left( \varphi_{k-1}(x_0, t) + \frac{\partial \chi_{k-1}}{\partial r}(0, t) + \Phi_k(t) \right), \\ \Phi_2(t) &= 0, \quad \Phi_k(t) = \frac{2\pi}{\alpha} \varphi_{k-3}(x_0, t), \quad 3 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

Введем функцию

$$\Psi_N(x, t, h) = e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k(x, t) h^k + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h} \sigma(r, t)} \chi_k(r, t) h^k \Big|_{r=|x-x_0|} + \omega(x, t, h), \quad (5.3.31)$$

где функция  $\omega(x, t, h)$  определена ниже (см. доказательство) и  $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{N-2})$ .

**Теорема 5.8.** Пусть  $T > t_{\min}$  такое, что  $J^1(y, t) \neq 0$ ,  $J^2(t_0, t) \neq 0$  при  $t \in [t_{\min}, T]$  и  $y \in B$ . Тогда решение задачи Коши (5.1.1) при  $t \in [t_{\min}, T]$  представимо в виде  $\psi = \Psi_N + v(x, t, h)$ , где  $\|v\|_{L_2} = O(h^{N-3})$ .

**Следствие 5.9.** При выполнении условий теоремы 5.8 построенная функция  $\Psi_N(x, t, h)$  является асимптотическим решением задачи Коши (5.1.1) с точностью до  $O(h^{N-3})$  в норме  $L_2$ .

**Замечание 5.10.** Построенное асимптотическое решение  $\Psi_N(x, t, h)$ , вообще говоря, не принадлежит области определения  $D(\hat{H})$  оператора с  $\delta$ -потенциалом, так как его разложение в окрестности  $x_0$  не удовлетворяет краевым условиям (5.2.4). Для обеспечения  $\Psi_N \in D(\hat{H})$  вводится поправка  $\omega(x, t, h)$ . При этом невязка сохраняет порядок  $O(h^{N-2})$ .

*Доказательство.* Обозначим приближенные решения задачи Коши в декартовых и сферических координатах соответственно:

$$\psi_1(x, t, h) = e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k(x, t) h^k, \quad \psi_2(r, t, h) = \frac{1}{r} e^{\frac{i}{h}\sigma(r,t)} \sum_{k=0}^N \chi_k(r, t) h^k.$$

Тогда полное приближенное решение представляется в виде:

$$\Psi_N(x, t, h) = \psi_1(x, t, h) + \psi_2(|x - x_0|, t, h) + \omega(x, t, h).$$

Рассмотрим свободный нестационарный оператор Шредингера без  $\delta$ -потенциала:

$$\hat{L} = -ih \frac{\partial}{\partial t} - \frac{h^2}{2} \Delta.$$

В случае, когда функция  $\psi_2(r, t)$  зависит только от радиальной координаты  $r$ , оператор  $\hat{L}$  в сферических координатах принимает вид:

$$\hat{L}_{sph} = -ih \frac{\partial}{\partial t} - \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Разобьем доказательство на четыре части:

1. Покажем, что функция  $\Psi(x, t, h)$  при  $\omega = 0$  удовлетворяет уравнению Шредингера. Рассмотрим действие оператора  $\hat{L}$  на  $\psi_1(x, t, h)$ :

$$\hat{L}\psi_1 = -ih \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k(x, t) h^k \right) - \frac{h^2}{2} \Delta \left( e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k(x, t) h^k \right).$$

Вычислим производные по времени и пространственным переменным. Производная по времени:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \sum_{k=0}^N \left( \frac{i}{h} \frac{\partial S}{\partial t} \varphi_k + \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \right) h^k.$$

Действие лапласиана на  $\psi_1$  дает:

$$\Delta\psi_1 = e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \sum_{k=0}^N \left( -\frac{1}{h^2} |\nabla S|^2 \varphi_k + \frac{i}{h} \Delta S \varphi_k + \frac{2i}{h} \langle \nabla S, \nabla \varphi_k \rangle + \Delta \varphi_k \right) h^k.$$

Подставляя полученные выражения в оператор  $\hat{L}$ , сгруппируем члены по степеням  $h$ :

$$\begin{aligned} \hat{L}\psi_1 = e^{\frac{i}{h}S(x,t)} & \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla S|^2 \right) \sum_{k=0}^N \varphi_k h^k - ih \sum_{k=0}^N \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \langle \nabla S, \nabla \varphi_0 \rangle + \frac{1}{2} \Delta S \varphi_0 \right) - \right. \\ & \left. - ih \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \langle \nabla S, \nabla \varphi_k \rangle + \frac{1}{2} \Delta S \varphi_k - \frac{i}{2} \Delta \varphi_{k-1} \right) h^k - \frac{h^{N+2}}{2} \Delta \varphi_N \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\|\Delta \varphi_N h^{N+2}\|_{L^2} = O(h^{N+1})$ . В силу уравнений Гамильтона–Якоби (5.3.19) и уравнений переноса (5.3.23), (5.3.24), слагаемые при  $h^k$ ,  $k = 0, \dots, N+1$ , равны нулю. Получаем

$$\|\hat{L}\psi_1\|_{L_2} \leq Ch^{N+1}.$$

Рассмотрим действие оператора  $\hat{L}$  на  $\psi_2(x, t, h)$ :

$$\hat{L}_{sph}\psi_2 = -ih \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} e^{\frac{i}{h}\sigma(r,t)} \sum_{k=0}^N \chi_k(r, t) h^k \right) - \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{1}{r} e^{\frac{i}{h}\sigma(r,t)} \sum_{k=0}^N \chi_k(r, t) h^k \right).$$

Вычислим производные по времени и радиусу. Производная по времени:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{1}{r} e^{\frac{i}{h}\sigma(r,t)} \sum_{k=0}^N \left( \frac{i}{h} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \chi_k + \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \right) h^k$$

Действие лапласиана на  $\psi_2$  дает:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi_2 = \frac{1}{r} e^{\frac{i}{h}\sigma(r,t)} \sum_{k=0}^N \left( -\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)^2 \chi_k + \frac{i}{h} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \chi_k + \frac{2i}{h} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{\partial \chi_k}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi_k}{\partial r^2} \right) h^k.$$

Подставляя полученные выражения в оператор  $\hat{L}_{sph}$ , сгруппируем члены по степеням  $h$ :

$$\begin{aligned} \hat{L}_{sph}\psi_2 = \frac{1}{r} e^{\frac{i}{h}\sigma(r,t)} & \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)^2 \right) \sum_{k=0}^N \chi_k h^k - ih \sum_{k=0}^N \left( \frac{\partial \chi_0}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{\partial \chi_0}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \chi_0 \right) - \right. \\ & \left. - ih \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{\partial \chi_k}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \chi_k - i \frac{\partial^2 \chi_{k-1}}{\partial r^2} \right) h^k - \frac{h^{N+2}}{2} \frac{\partial^2 \chi_N}{\partial r^2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\|\frac{\partial^2 \chi_N}{\partial r^2} h^{N+2}\|_{L^2} = O(h^{N+1})$ . В силу уравнений Гамильтона–Якоби (5.3.20) и уравнений переноса (5.3.27), (5.3.28), (5.3.29) слагаемые при  $h^k$ ,  $k = 0, \dots, N+1$ , равны нулю. Получаем

$$\|\hat{L}_{sph}\psi_2\|_{L_2} \leq Ch^{N+1}.$$

Таким образом, для функции  $\Psi_N = \psi_1 + \psi_2 + \omega$  в силу линейности оператора  $\hat{L}$  имеем:

$$\hat{L}\Psi_N = \hat{L}\psi_1 + \hat{L}_{sph}\psi_2 + \hat{L}\omega, \quad \|\hat{L}\Psi_N\|_{w=0} \leq Ch^{N+1}.$$

2. Покажем, что функция  $\Psi_N(x, t, h)$  лежит в области определения оператора с  $\delta$ -потенциалом. Для этого покажем, что функция  $\omega$  может быть выбрана таким образом, чтобы краевые условия (5.2.4) выполнялись точно. Выше было указано, что в точке  $x_0$  должны выполняться равенства (5.2.6):

$$\begin{aligned} 2\alpha i e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0,t) \chi_0(0,t) &= 0, \\ 2\alpha i \left( e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0,t) \chi_1(0,t) - i \frac{\partial \chi_0}{\partial r}(0,t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_0(x_0,t) \right) &= 0, \\ 2\alpha i \left( e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0,t) \chi_2(0,t) - i \frac{\partial \chi_1}{\partial r}(0,t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_1(x_0,t) \right) &= 0, \\ 2\alpha i \left( e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0,t) \chi_m(0,t) - i \frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial r}(0,t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_{m-1}(x_0,t) \right) + \\ &+ 4\pi e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \chi_{m-3}(0,t) = 0, \quad m \geq 3. \end{aligned}$$

По построению

$$\begin{aligned} \chi_0(0,t) &= 0, \quad \chi_1(0,t) = i \frac{\varphi_0(x_0, t_0)}{|\nabla S_0(x_0, t_0)|}, \\ \chi_k(0,t) &= i \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0,t) \right)^{-1} \left( \varphi_{k-1}(x_0, t) + \frac{\partial \chi_{k-1}}{\partial r}(0,t) + \Phi_k(t) \right), \\ \Phi_2(t) &= 0, \quad \Phi_k(t) = \frac{2\pi}{\alpha} \varphi_{k-3}(x_0, t), \quad 3 \leq k \leq N, \end{aligned}$$

и  $S(x_0, t) = \sigma(0, t)$ . Тогда краевые условия (5.2.4) выполняются с точностью до слагаемого

$$\begin{aligned} \Phi_k(t) &= 2\alpha i \left( -i e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \frac{\partial \chi_N}{\partial r}(0,t) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_N(x_0, t) \right) h^{N+1} + \\ &+ 4\pi e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} (\chi_{N-2}(0,t) + h\chi_{N-1}(0,t) + h^2\chi_N(0,t)) h^{N+1}. \end{aligned}$$

Для того чтобы краевые условия (5.2.4) выполнялись точно, поправим решение  $\psi_2(r, t, h)$  на некоторую функцию  $\omega(r, t, h) = e^{\frac{i}{h}\sigma(r,t)} f(r, t, h)$ . Тогда коэффициенты  $b(\Psi_N)$ , входящие в разложение (5.2.3) будут переписаны в виде:

$$\begin{aligned} a(\psi) &= -4\pi \sum_{k=0}^N f_k(0,t) h^k = -4\pi e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \left( \sum_{k=0}^N \chi_k(0,t) h^k + f(0,t,h) \right), \\ b(\psi) &= e^{\frac{i}{h}\sigma(0,t)} \left( \sum_{k=0}^N \left( \frac{i}{h} \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0,t) \chi_k(0,t) + \frac{\partial \chi_k}{\partial r}(0,t) \right) h^k + \left( \frac{i}{h} \frac{\partial \sigma}{\partial r}(0,t) f(0,t) + \frac{\partial f}{\partial r}(0,t) \right) \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_k(x_0, t) h^k. \end{aligned}$$

Пусть  $f(r, t, h)$  представима в виде:

$$f(r, t, h) = f_{N-2}(r, t)h^{N-2} + f_{N-1}(r, t)h^{N-1} + f_N(r, t)h^N.$$

Тогда чтобы краевые условия выполнялись точно, положим

$$\begin{aligned} f_{N-2}(0, t) &= -\chi_{N-2}(0, t), & f_{N-1}(0, t) &= -\chi_{N-1}(0, t), & f_N(0, t) &= -\chi_N(0, t), \\ \frac{\partial f_{N-2}}{\partial r}(0, t) &= 0, & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial r}(0, t) &= 0, & \frac{\partial f_N}{\partial r}(0, t) &= -\frac{\partial \chi_N}{\partial r}(0, t). \end{aligned}$$

Определим функции  $f_{N-2}$ ,  $f_{N-1}$ ,  $f_N$  следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{N-2}(r, t) &= -\chi_{N-2}(0, t) \eta(r) \zeta(t), \\ f_{N-1}(r, t) &= -\chi_{N-1}(0, t) \eta(r) \zeta(t), \\ f_N(r, t) &= \left( -\chi_N(0, t) - \frac{\partial \chi_N}{\partial r}(0, t) \cdot r \right) \eta(r) \zeta(t), \end{aligned}$$

где  $\eta(r)$  — гладкая срезающая функция, равная 1 в окрестности  $r = 0$  и равная 0 при  $r > R/2$ , а  $\zeta(t)$  — гладкая функция времени, равная 0 при  $t = 0$  и равная 1 при  $t \geq \delta > 0$ .

Определим функцию  $\omega$  по формуле:

$$\omega(r, t, h) = e^{\frac{i}{h}\sigma(r, t)} (f_{N-2}(r, t)h^{N-2} + f_{N-1}(r, t)h^{N-1} + f_N(r, t)h^N).$$

Поскольку  $\eta(r) \equiv 1$  в окрестности точки  $r = 0$ , краевые условия выполняются точно. При этом  $\omega \in W_2^2(\mathbb{R}^3)$  и справедливы оценки:

$$\|\omega\|_{L_2} = O(h^{N-2}), \quad \left\| h \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\|_{L_2} = O(h^{N-2}), \quad \|h^2 \Delta \omega\|_{L_2} = O(h^{N-2}),$$

а также  $\omega(x, 0, h) = 0$  в силу условия  $\zeta(0) = 0$ .

Теперь функция  $\Psi_N$  в точности удовлетворяет краевым условиям. Поскольку

$$\|\hat{L}\omega\|_{L_2} = O(h^{N-2}),$$

то вне точки  $x_0$  выполняется оценка:

$$\|\hat{L}\Psi_N\|_{L_2} = O(h^{N-2}).$$

3. Покажем, что функция  $\Psi_N(x, t, h)$  удовлетворяет начальным условиям. Рассмотрим  $\Psi_N$  в момент времени  $t = 0$ :

$$\Psi_N(x, 0, h) = \psi_1(x, 0, h) + \psi_2(x, 0, h) + \omega(x, 0, h).$$

Падающая волна  $\psi_1$  в точности удовлетворяет начальным условиям:

$$\psi_1(x, 0, h) = e^{\frac{i}{h}S_0(x)} \varphi^0(x).$$

Рассмотрим расходящуюся волну  $\psi_2$  в начальный момент времени. Все  $\chi_k(x, t)$  выражаются через  $\varphi_{k-1}(x_0, t_0)$ , и, соответственно, через  $\varphi_0(x_0, t_0)$  и  $\Delta^k \varphi_0(x_0, t_0)$ . В частности, для лапласиана функции  $\varphi_0$  в точке  $(x_0, t_0)$  имеем:

$$\Delta \varphi_0(x_0, t_0) = \Delta \varphi^0(y, t_0) A(x_0, t_0) + \varphi^0(y, t_0) \Delta A(x_0, t_0) \Big|_{y=y(x_0, t_0)}, \quad A(x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{|J^1(y, t)|}}.$$

Аналогично все функции  $\chi_k$  выражаются через  $\varphi^0(y)$  и  $\Delta^m \varphi^0(y)$ , причем носитель  $\Delta^m \varphi^0(y)$  остается в исходном шаре  $B$  (5.1.2) в силу гладкости  $\varphi^0(x)$  и компактности ее носителя.

Если  $y \notin B$ , то  $\varphi^0(y) = 0$  и  $\Delta^m \varphi^0(y) = 0$  для всех  $m \in \mathbb{N}$ . В этом случае все функции  $\chi_k(x, t)$  равны нулю. Покажем, что при  $t = 0$  параметр  $y$  находится вне шара  $B$ :

$$y(r(x, x_0), t) = x - \nabla S_0(y) \left( t - \frac{|x - x_0|}{|\nabla S(x_0, t_0)|} \right), \quad \rightarrow \quad y(r, 0) = x_0 + \frac{\nabla S_0(y)}{|\nabla S(x_0, t_0)|} |x - x_0|.$$

Введем обозначение  $k(y) = \frac{\nabla S_0(y)}{|\nabla S(x_0, t_0)|}$ . Покажем, что

$$|y| = |x_0 + k(y)| |x - x_0| \geq R.$$

Для этого рассмотрим

$$|x_0 + k(y)| |x - x_0|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle + 2 \langle k(y), x_0 \rangle |x - x_0| + \langle k(y), k(y) \rangle |x - x_0|^2.$$

Пусть  $x' \in B$ . Заметим, что

$$\langle k(y), x_0 \rangle = \left\langle \frac{x_0 - x'}{|x_0 - x'|}, x_0 \right\rangle = \frac{\langle x_0, x_0 \rangle - \langle x_0, x' \rangle}{|x_0 - x'|}.$$

Поскольку  $|x'| < R$  и  $|x_0| > R$ , то  $\langle x_0, x' \rangle \leq |x_0| |x'| < |x_0| R$  и  $\langle x_0, x_0 \rangle - \langle x_0, x' \rangle \geq |x_0| (|x_0| - R) > 0$ .

Таким образом, справедлива оценка:

$$|x_0 + k(y)| |x - x_0|^2 \geq |x_0|^2 + |k(y)|^2 |x - x_0|^2 \geq R^2 \quad \rightarrow \quad |x_0 + k(y)| |x - x_0| > R.$$

Тогда, поскольку  $|y| > R$  и  $\varphi^0(y(x_0, 0)) = 0$ ,  $\Delta^k \varphi^0(y(x_0, 0)) = 0$ , получим

$$\chi_k(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Следовательно,  $\psi_2(x, 0, h) = 0$  и  $\omega(x, 0, h) = 0$ , откуда

$$\Psi_N(x, 0, h) = \psi_1(x, 0, h) = e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x).$$

4. *Условие самосопряженности оператора.* Построенная функция  $\Psi_N$  удовлетворяет уравнению

$$ih \frac{\partial \Psi_N}{\partial t} = \hat{H} \Psi_N + f, \quad \|f\|_{L_2} = O(h^{N-2}).$$

Пусть  $\psi$  точное решение. Рассмотрим  $v = \Psi_N - \psi$ . Для функции  $v$  верно равенство

$$ih \frac{\partial v}{\partial t} = \hat{H} v + f.$$

Тогда в силу самосопряженности оператора  $\hat{H}$  следует

$$\begin{aligned} ih \left\langle \frac{\partial v}{\partial t}, v \right\rangle &= \langle \hat{H}v, v \rangle + \langle f, v \rangle, \\ -ih \left\langle v, \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle &= \langle \hat{H}v, v \rangle + \langle v, f \rangle. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$h \frac{\partial}{\partial t} \|v\|^2 = 2 \operatorname{Im} \langle f, v \rangle.$$

Поскольку  $|\operatorname{Im} \langle f, v \rangle| \leq \|v\| \cdot \|f\|$ , имеем  $h \partial \|v\| / \partial t \leq \|f\|$ . Следовательно,

$$\|v\| \leq \frac{1}{h} \int_0^t \|f\| d\tau + \|v(0)\| = O(h^{N-3}),$$

что завершает доказательство теоремы. □

## 5.4 Отсутствие сходящейся волны в асимптотике решения

Как было показано выше, при построении квазиклассической асимптотики решения задачи рассеяния на  $\delta$ -потенциале естественным образом возникает вопрос о возможности существования сходящейся волны в асимптотическом разложении. Покажем, что в рассматриваемой задаче при выполнении необходимых условий на начальные данные и при выборе носителя в форме (5.3.5) сходящаяся волна не может присутствовать.

Предположим, что в асимптотическом разложении присутствует дополнительный член, отвечающий сходящейся волне:

$$\psi_3(r, t, h) = \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h} \sigma^-(r, t)} \chi_k^-(r, t) h^k, \quad r = |x - x_0|. \quad (5.4.1)$$

Исследуем поведение старшего члена и первой поправки асимптотического разложения. Для удобства в дальнейшем будем обозначать знаком «+» расходящуюся волну. Теперь асимптотика представима в виде суммы трех волн:

$$\Psi_N(x, t, h) = \psi_1(x, t, h) + \psi_2(r, t, h) + \psi_3(r, t, h) + \omega, \quad r = |x - x_0|. \quad (5.4.2)$$

Для простоты положим  $\omega = 0$ . Каждая из трех волн в асимптотическом представлении является собственным квазиклассическим разложением по степеням параметра  $h$ . Падающая волна определяется теми же соотношениями, что и ранее. Для определения расходящейся и сходящейся волн рассмотрим краевые условия (5.2.4) в окрестности точки  $x_0$ . Легко заметить, что утверждение 5.1 может быть переписано в следующей форме:

**Предложение 5.11.** Пусть функция  $\psi(x, t, h) \in W_2^2(\mathbb{R}^3)$  представима в виде:

$$\Psi_N(x, t, h) = \psi_1(x, t, h) + \psi_2(r, t, h) + \psi_3(r, t, h), \quad (5.4.3)$$

причем

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t, h) &= e^{\frac{i}{h}S(x,t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k(x, t) h^k, \\ \psi_2(x, t, h) &= e^{\frac{i}{h}\sigma^+(r,t)} \sum_{k=0}^N \chi_k^+(r, t) h^k \Big|_{r=r(x,x_0)}, \\ \psi_3(x, t, h) &= e^{\frac{i}{h}\sigma^-(r,t)} \sum_{k=0}^N \chi_k^-(r, t) h^k \Big|_{r=r(x,x_0)}. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Тогда для того, чтобы  $\psi(x, t, h)$  принадлежала области определения оператора  $\hat{H}$  с точечным потенциалом, необходимо и достаточно выполнение следующих краевых условий:

$$\begin{aligned} 2\alpha i \left( e^{\frac{i}{h}\sigma^+(0,t)} \frac{\partial \sigma^+}{\partial r}(0, t) \chi_0^+(0, t) + e^{\frac{i}{h}\sigma^-(0,t)} \frac{\partial \sigma^-}{\partial r}(0, t) \chi_0^-(0, t) \right) &= 0, \\ 2\alpha i \left( \sum_{j=\{+,-\}} e^{\frac{i}{h}\sigma^j(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma^j}{\partial r}(0, t) \chi_1^j(0, t) - i \frac{\partial \chi_0^j}{\partial r}(0, t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_0(x_0, t) \right) &= 0, \\ 2\alpha i \left( \sum_{j=\{+,-\}} e^{\frac{i}{h}\sigma^j(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma^j}{\partial r}(0, t) \chi_2^j(0, t) - i \frac{\partial \chi_1^j}{\partial r}(0, t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_1(x_0, t) \right) &= 0, \\ 2\alpha i \left( \sum_{j=\{+,-\}} e^{\frac{i}{h}\sigma^j(0,t)} \left( \frac{\partial \sigma^j}{\partial r}(0, t) \chi_m^j(0, t) - i \frac{\partial \chi_{m-1}^j}{\partial r}(0, t) \right) - i e^{\frac{i}{h}S(x_0,t)} \varphi_{m-1}(x_0, t) \right) &= 0, \\ + 4\pi \sum_{j=\{+,-\}} e^{\frac{i}{h}\sigma^j(0,t)} \chi_{m-3}^j(0, t) &= 0, \quad m \geq 3. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Пусть фазы всех волн совпадают в точке  $x_0$ , т.е.

$$\sigma^+(0, t) = \sigma^-(0, t) = S(x_0, t). \quad (5.4.6)$$

Тогда, как было показано выше (5.3.9), расходящаяся и сходящаяся волны однозначно определяются знаком радиальной производной фазы, или, эквивалентно, направлением радиального импульса в точке  $x_0$ . В частности, положительная радиальная производная соответствует расходящейся волне, а отрицательная — сходящейся:

$$\frac{\partial \sigma^+}{\partial r}(0, t) = |\nabla S(x_0, t)|, \quad \frac{\partial \sigma^-}{\partial r}(0, t) = -|\nabla S(x_0, t)|. \quad (5.4.7)$$

Фазы расходящейся и сходящейся волн удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби (5.3.8) и

задаются следующими формулами:

$$\sigma^+(r, t) = S(x_0, t_0) + |\nabla S(x_0, t)| \frac{r}{2} \Big|_{t_0=t_0^+(r, t)}, \quad t_0^+ = t - \frac{r}{|\nabla S(x_0, t_0)|}, \quad (5.4.8)$$

$$\sigma^-(r, t) = S(x_0, t_0) - |\nabla S(x_0, t)| \frac{r}{2} \Big|_{t_0=t_0^-(r, t)}, \quad t_0^- = t + \frac{r}{|\nabla S(x_0, t_0)|}. \quad (5.4.9)$$

Каждая старшая амплитуда  $\chi_0^\pm(r, t)$  удовлетворяет своему уравнению переноса:

$$\frac{\partial \chi_0^\pm}{\partial t}(r, t) + \frac{\partial \sigma^\pm}{\partial r}(r, t) \frac{\partial \chi_0^\pm}{\partial r}(r, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^\pm}{\partial r^2}(r, t) \chi_0^\pm(r, t) = 0. \quad (5.4.10)$$

Заметим, что в силу краевых условий в точке  $x_0$  должны выполняться равенства

$$\chi_0^+(0, t) = \chi_0^-(0, t). \quad (5.4.11)$$

Пусть  $\chi_0^\pm(0, t) = c(t)$ , где  $c(t)$  — произвольная гладкая функция времени. Тогда старшие амплитуды расходящейся и сходящейся волн имеют вид:

$$\chi_0^\pm(r, t) = c(t) \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{t_0^\pm(r, t)}^t \frac{\partial^2 \sigma^\pm}{\partial r^2}(R^\pm(s), s) ds \right].$$

Тогда

$$\psi_2(0, t) + \psi_3(0, t) = 2c(0),$$

и, в общем случае, эта сумма не равна нулю. Следовательно, начальные условия на  $\psi(t, 0)$  не выполняются. Таким образом, для старших амплитуд выберем:

$$\chi_0^\pm(0, t) = 0, \quad (5.4.12)$$

что отражает физическую идею: в точке источника амплитуда основной волны минимальна, и от этой точки начинаются распространяющиеся волны. Соответственно, старшие амплитуды  $\chi_0^\pm$  равны нулю как решения уравнений переноса:

$$\chi_0^\pm(r, t) \equiv 0. \quad (5.4.13)$$

Рассмотрим первые поправки к амплитудам; они удовлетворяют соответствующим уравнениям переноса:

$$\frac{\partial \chi_1^\pm}{\partial t}(r, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^\pm}{\partial r^2}(r, t) \chi_1^\pm(r, t) + \frac{\partial \sigma^\pm}{\partial r}(r, t) \frac{\partial \chi_1^\pm}{\partial r}(r, t) = 0 \quad (5.4.14)$$

и краевым условиям:

$$\chi_1^+(0, t) - \chi_1^-(0, t) = i \frac{\varphi_0(x_0, t)}{|\nabla S(x_0, t)|}. \quad (5.4.15)$$

Тогда каждую из поправок можно записать как

$$\chi_1^\pm(0, t) = iA^\pm \frac{\varphi_0(x_0, t)}{|\nabla S(x_0, t)|}, \quad (5.4.16)$$

где  $A^+$  и  $A^-$  — произвольные числа, удовлетворяющие

$$A^+ - A^- = 1. \quad (5.4.17)$$

Решения имеют вид:

$$\chi_1^\pm(r, t) = iA^\pm \frac{\varphi_0(x_0, t_0)}{|\nabla S(x_0, t_0)|} \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 \sigma^\pm}{\partial r^2}(R^\pm(t_0, s), s) ds \right) \Big|_{t_0=t_0^\pm(r, t)}. \quad (5.4.18)$$

Заметим, что все функции  $\chi_k^\pm(x, t)$  выражаются через  $\varphi_0(x_0, t_0)$  и, соответственно, через  $\varphi_0(x_0, t_0)$ , и, следовательно, через  $\varphi^0(y)$ . Носитель  $\varphi^0(y)$  находится в шаре  $B$  (5.1.2). Если  $y \notin B$ , то  $\varphi^0(y) = 0$ . Для расходящейся волны при доказательстве Теоремы 5.8 было показано, что при  $t = 0$  параметр  $y^+$  лежит вне шара  $B$ . Таким образом, получим

$$\chi_1^+(r, 0) = 0, \quad r = |x - x_0|. \quad (5.4.19)$$

**Предложение 5.12.** *При приведенных выше условиях при  $t = 0$  сходящаяся волна может находиться внутри носителя функции  $\varphi^0$ , то есть существуют такие  $x \in \mathbb{R}^3$ , что*

$$\left| y^-(r(x, x_0), 0) \right| = \left| x_0 - \frac{\nabla S_0(y^-)}{|\nabla S(x_0, t_0)|} |x - x_0| \right| < R, \quad (5.4.20)$$

и, в общем случае, ее амплитуда не равна нулю:

$$\chi_1^-(r, 0) \neq 0, \quad r(x, x_0) = |x - x_0|. \quad (5.4.21)$$

*Доказательство.* Введем обозначение  $k(y) = \frac{\nabla S_0(y)}{|\nabla S(x_0, t_0)|}$ . Покажем, что существуют такие  $x \in \mathbb{R}^3$ , что выполняется оценка:

$$|y^-| = |x_0 - k(y^-)| |x - x_0| < R.$$

Выберем точку  $x' \in B$ . Заметим, что неравенство можно переписать в виде:

$$|y^-| = |x_0 - k| |x - x_0| = |x' + (x_0 - x') - kr| \leq |x'| + |k|d|1 - r/d|,$$

где  $d = |x' - x_0|$ . Тогда достаточно, чтобы выполнялась оценка

$$|x'| + |k|d|1 - r/d| < R.$$

Отсюда при  $|x'| < R$  и  $|k| \neq 0$  получаем

$$d - \frac{R - |x'|}{|k|} < r < d + \frac{R - |x'|}{|k|}.$$

Покажем, что интервал не пуст. Длина интервала

$$|I| = 2 \frac{R - |x'|}{|k|} > 0,$$

поэтому  $I$  непустой. Тогда

$$\chi_1^-(r, 0) \neq 0, \quad r(x, x_0) = |x - x_0|,$$

что завершает доказательство. □

**Предложение 5.13.** Пусть для сходящейся волны  $\psi_3(x, t, h)$  выполняются начальные условия

$$\chi_k^-(r, 0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad \text{для всех } r = |x - x_0| \text{ вне носителя функции } \varphi^0(x). \quad (5.4.22)$$

Тогда, чтобы начальные условия были выполнены во всем пространстве, амплитуда сходящейся волны должна быть тождественно равна нулю:

$$\chi_k^-(r, t) \equiv 0, \quad r = |x - x_0|. \quad (5.4.23)$$

**Следствие 5.14.** Таким образом, существование сходящейся волны становится невозможным, так как ее амплитуда должна равняться нулю везде.

### 5.4.1 Геометрическая интерпретация

С геометрической точки зрения падающей волне соответствует лагранжево многообразие

$$\Lambda_t^3 = \{(x, p) \in \mathbb{R}^6 : x = y + \nabla S_0(y)t, p = \nabla S_0(y), y \in B\} \quad (5.4.24)$$

в расширенном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{x,t,p,p_t}^8$ , представляющее собой семейство прямых, параметризованных временем  $t \in [0, T]$ .

В момент  $t_0(y)$  луч  $X(y, t)$  достигает точки  $x_0$ . В отличие от случая  $\delta$ -потенциала на гиперповерхности (Главы 2-4), где лагранжево многообразие расщепляется на три ветви при пересечении с  $M$ , здесь расщепления не происходит. В точке  $x_0$  порождается новое лагранжево многообразие расходящейся волны

$$\Lambda_{t,\text{sc}}^3 = \{(r, p_r) \in \mathbb{R}^2 : r = |\nabla S(x_0, t_0)|(t - t_0), p_r = |\nabla S(x_0, t_0)|, t > t_0\}, \quad (5.4.25)$$

параметризованное моментом взаимодействия  $t_0 = t_0(y)$  и описывающее сферически расходящуюся волну с центром в  $x_0$ .

Сходящаяся волна в асимптотике отсутствует. Геометрически это объясняется выбором носителя начальных данных. Шар  $B$  (5.1.2) не содержит точку  $x_0$  и расположен по одну сторону от нее, поэтому все лучи  $X(y, t)$ ,  $y \in B$ , приходят в  $x_0$  с одного направления. Начальные данные не задают импульс, направленный к  $x_0$ , поэтому лагранжево многообразие сходящейся волны не порождается.

# Заключение

В диссертационной работе построены квазиклассические асимптотики решений задачи Коши для уравнения Шредингера с  $\delta$ -потенциалами двух типов — локализованным на гиперповерхности коразмерности 1 в  $\mathbb{R}^n$  и точечным в  $\mathbb{R}^3$  — и описана перестройка соответствующих лагранжевых и изотропных многообразий, комплексных ростков и векторных расслоений над ними при взаимодействии волнового пакета с носителем сингулярности. Во всех рассмотренных случаях получены оценки точности построенных асимптотик в норме  $L^2$ .

Для начальных данных с вещественной фазой построена квазиклассическая асимптотика решения в виде суммы падающей, отраженной и прошедшей волн и описано расщепление лагранжева многообразия, отвечающего падающей волне, при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом на гиперповерхности  $M$ . Показано, что отраженная волна определяется лагранжевым многообразием, полученным из падающего преобразованием, меняющим знак нормальной компоненты импульса в точках поверхности  $M$  при сохранении касательной компоненты. Разработана модификация метода канонического оператора Маслова, учитывающая условия сшивки, задаваемые  $\delta$ -потенциалом, и позволяющая строить глобальную асимптотику, корректную в том числе в окрестности каустик. Получены явные выражения для квазиклассических аналогов коэффициентов отражения и прохождения через нормальную компоненту импульса падающей волны и параметры  $\delta$ -потенциала.

Для начальных данных в виде гауссова пучка, локализованного в окрестности точки, квазиклассическая асимптотика построена на основе метода комплексного ростка Маслова, модифицированного с учетом условий сшивки на носителе сингулярности. Геометрическое описание строится в терминах изотропных кривых и комплексных ростков над ними. Мнимая часть фазовой функции положительна всюду, кроме одной точки, и изотропные кривые падающей и отраженной волн связаны зеркальным отражением относительно  $M$  с изменением нормальной компоненты импульса. Установлено, что при взаимодействии с  $\delta$ -потенциалом росток, отвечающий падающей волне, испытывает сдвиг, определяемый геометрией поверхности  $M$ .

Этот результат обобщен на случай начальных данных, локализованных в окрестности подмногообразия коразмерности  $k \geq 0$ . Мнимая часть фазовой функции обращается в ноль на поверхности положительной коразмерности, что приводит к более сложной геометрической конфигурации. В этом случае вместо изотропных кривых возникают изотропные многообразия с

комплексными векторными расслоениями над ними, слои которых являются лагранжевыми подпространствами комплексифицированного касательного пространства. Структура отраженного многообразия и соответствующего ростка определяется теми же геометрическими правилами, что и в предыдущем случае.

Для точечного  $\delta$ -потенциала в  $\mathbb{R}^3$  построена квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для начальных данных с носителем вне шара вокруг точки рассеяния  $x_0$ . Лагранжево многообразие рассеянной волны задается семейством радиальных лучей, исходящих из  $x_0$ , с условием  $p \parallel (x_0 - x')$ ,  $|p| = 1$ , и геометрически принципиально отличается от случая гиперповерхности. Показано, что сходящаяся компонента рассеянной волны отсутствует, поскольку ее амплитуда тождественно равна нулю, и рассеянная волна является чисто расходящейся сферической.

Полученные результаты дополняют известные работы по квазиклассическому анализу, расширяя аппарат лагранжевых многообразий и метод комплексного ростка Маслова на операторы с сингулярными коэффициентами. Показано, что перестройка геометрических объектов в фазовом пространстве при взаимодействии с носителем сингулярности полностью определяется условиями сшивки, задаваемыми  $\delta$ -потенциалом. В случае вещественной фазы взаимодействие с  $\delta$ -потенциалом на гиперповерхности приводит к расщеплению лагранжева многообразия на три компоненты с изменением нормальной компоненты импульса. В случае комплексной фазы над возникающими изотропными многообразиями строятся комплексные векторные расслоения, слои которых являются лагранжевыми подпространствами комплексифицированного касательного пространства. В случае точечного потенциала рассеянная волна определяется семейством радиальных лучей, исходящих из точки рассеяния. Во всех рассмотренных случаях структура асимптотического решения определяется геометрией соответствующих объектов в фазовом пространстве, что позволяет описывать взаимодействие волновой функции с особенностью вида  $\delta$ -функции в единых геометрических терминах.

# Литература

## Список литературы

- [1] *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable models in quantum mechanics.* – Providence: AMS Chelsea Publishing. – 2005.
- [2] *Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators.* – Cambridge: Cambridge University Press. – 2000.
- [3] *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом* // ДАН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5 – С. 1011–1014.
- [4] *Брюнинг Й., Гейлер В. А. Спектральные свойства оператора Шрёдингера на многообразиях с коническими точками* // ТМФ. – 1999. – Т. 119, № 3 – С. 368–380.
- [5] *Brüning J., Geyler V. Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns* // J. Math. Phys. – 2003. – Vol. 44, № 2 – pp. 371–405.
- [6] *Brüning J., Geyler V., Pankrashkin K. Spectral properties of Schrödinger operators on decorated graphs* // Rev. Math. Phys. – 2008. – Vol. 20, № 1 – pp. 1–70.
- [7] *Kronig R. de L., Penney W. G. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices* // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. – 1931. – Vol. 130 – pp. 499–513.
- [8] *Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.* – М.: Наука. – 1976.
- [9] *Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.* – М.: Наука. – 1977.
- [10] *Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.* – М.: Изд. МГУ. – 1965.
- [11] *Чернышев В. Л., Шафаревич А. И. Квазиклассический спектр оператора Шрёдингера на геометрическом графе* // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82, № 4 – С. 606–620.

- [12] *Филатова Т. А., Шафаревич А. И. Квазиклассические спектральные серии оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом на прямой и на сфере // ТМФ. – 2010. – Т. 164, № 2 – С. 279–298.*
- [13] *Ratiu T. S., Suleimanova A. A., Shafarevich A. I. Spectral series of the Schrödinger operator with delta-potential on a three-dimensional spherically symmetric manifold // Russ. J. Math. Phys. – 2013. – Vol. 20, № 3 – pp. 326–335.*
- [14] *Ратью Т., Филатова Т. А., Шафаревич А. И. Некомпактные лагранжесвы многообразия, соответствующие спектральным сериям оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом на поверхности вращения // ДАН. – 2012. – Т. 446, № 6 – С. 618–620.*

## Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

- [15] *Shchegortsova O. A. Semiclassical Asymptotics of the Solution to the Cauchy Problem for the Three-Dimensional Schrödinger Equation with a Point Potential // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2026. – Vol. 33, № 1 – pp. 163–179.*  
EDN: PEFPVK. Импакт-фактор 0.561 (SRJ). Объем 1.06 п.л.
- [16] *Shafarevich A. I., Shchegortsova O. A. Reconstruction of Maslov's Complex Germ in the Cauchy Problem for the Schrödinger Equation with a Delta Potential Localized on a Hypersurface // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2024. – Vol. 31, № 3 – pp. 526–543.*  
EDN: LVQKCK. Импакт-фактор 0.561 (SRJ). Объем 1.06 п.л.  
А.И. Шафаревичу принадлежат постановки задач, О.А.Щегорцовой принадлежат точные формулировки и доказательства утверждений. Общая доля диссертанта составляет 0.848 п.л.
- [17] *Shafarevich A. I., Shchegortsova O. A. Maslov Complex Germ and Semiclassical Contracted States in the Cauchy Problem for the Schrödinger Equation with Delta Potential // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 283, № 1 – pp. 139–149.*  
EDN: KGNTQC. Импакт-фактор 0.253 (SRJ). Объем 0.68 п.л.  
А.И. Шафаревичу принадлежат постановки задач, О.А.Щегорцовой принадлежат точные формулировки и доказательства утверждений. Общая доля диссертанта составляет 0.544 п.л.

- [18] *Шафаревич А. И., Щегорцова О. А. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом, локализованным на поверхности коразмерности 1* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. – 2020. – Т. 310. – С. 322–331.

EDN: ASPQXV. Импакт-фактор 0.524 (РИНЦ). Объем 0.68 п.л.

*Английский перевод:*

Shafarevich A. I., Shchegortsova O. A. Semiclassical Asymptotics of the Solution to the Cauchy Problem for the Schrödinger Equation with a Delta Potential Localized on a Codimension 1 Surface // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2020. – Vol. 310. — pp. 304–313.

EDN: ASPQXV. Импакт-фактор 0.324 (SRJ). Объем 0.68 п.л.

А.И. Шафаревичу принадлежат постановки задач, О.А.Щегорцовой принадлежат точные формулировки и доказательства утверждений. Общая доля диссертанта составляет 0.544 п.л.