МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Пряничников Алексей Михайлович

Полигоны с условиями на решётку конгруэнций

**Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика**

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2026

Диссертация подготовлена на кафедре теоретической информатики механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:	**Кожухов Игорь Борисович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Степанова Алёна Андреевна** доктор физико-математических наук, профессор, Дальневосточный федеральный университет, Институт математики и компьютерных технологий, Департамент математики, профессор
	Чермных Василий Владимирович доктор физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Институт точных наук и информационных технологий, главный научный сотрудник
	Усольцев Вадим Леонидович кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет, институт математики, информатики и физики, кафедра информатики и методики преподавания информатики, доцент

Защита диссертации состоится 29 мая 2026 г. в 18 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале https://dissovet.msu.ru/dissertation/3841/

Автореферат разослан «   » апреля 2026 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук **В.А. Кибкало**

Общая характеристика работы

Диссертационная работа относится к общей алгебре, а именно теории полигонов над полугруппами. В работе изучается строение полигонов с различными условиями на их решётку конгруэнций – модулярность, дистрибутивность, наличие тождества. Кроме того, изучается строение плоских и близких к ним унаров, рассматриваемых как полигоны над свободной циклической полугруппой.

Актуальность темы

Полигоны над полугруппой, т.е множества, на которых действует полугруппа, возникают в различных разделах алгебры и её приложениях. Понятие полигона является алгебраическим выражением понятия автомата, а именно автомата Мура, т.е. автомата без выхода[1]. Таким образом, все работы по алгебраической теории автоматов можно рассматривать как исследования, относящиеся к теории полигонов. Теория полигонов является довольно молодым разделом общей алгебры, имеющим гораздо менее богатую историю, чем многие другие её разделы, а теория конгруэнций полигонов вообще находится на начальной стадии развития, поэтому исследования в этих областях представляются актуальной математической задачей. В монографии[2] представлен обзор работ по разным вопросам теории полигонов.

Авдеевым А.Ю. и Кожуховым И.Б. в[3] получено описание полигонов над регулярными рисовскими матричными полугруппами $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, т.е. вполне 0-простыми полугруппами. Все правые конгруэнции на этих полугруппах были описаны в[4]. Это можно считать описанием конгруэнций свободного циклического полигона над вполне 0-простой полугруппой. Описание конгруэнций произвольных полигонов над вполне 0-простыми или вполне простыми полугруппами представляется довольно сложной математической задачей, поэтому естественно рассматривать частные случаи таких полугрупп. Конгруэнции полигонов над группами были описаны в[5], конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей – в[6]. Конгруэнции полигонов над полугруппами левых нулей описаны в[7].

[1] *Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С.* Введение в теорию автоматов. М. : Наука, 1985. 320 с. ; *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М. : Наука, 1985. 440 с.

[2] *Кожухов И. Б., Михалёв А. В., Тищенко А. В.* Избранные вопросы теории полугрупп: представления и многообразия полугрупп. М. : Интуит, 2021. 160 с.

[3] *Avdeyev A. Y., Kozhukhov I. B.* Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernetica. 2000. Vol. 14, № 4. pp. 523–531.

[4] *Oehmke R. H.* Right Congruences and Semisimplicity for rees matrix semigroups // Pacific Journal of Mathematics. 1974. Vol. 54, № 2. pp. 143–163.

[5] *Халиуллина А. Р.* Конгруэнции полигонов над группами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, 4(2). С. 133—137.

[6] *Халиуллина А. Р.* Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, № 3. С. 142—146.

[7] *Халиуллина А. Р.* Условия модулярности решётки конгруэнций полигонов над полугруппой правых

Решётка конгруэнций $\mathrm{Con}\, A$ универсальной алгебры A является важной характеристикой этой алгебры. Это полная решётка с наименьшим элементом $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ (отношение равенства), и наибольшим $\nabla_A = A \times A$ (универсальное отношение). Одним из направлений общей алгебры является изучение универсальных алгебр с теми или иными условиями на конгруэнции. Например, условие тривиальности решётки конгруэнций ($\mathrm{Con}\, A = \{\Delta_A, \nabla_A\}$) определяет простые алгебры (простые группы, кольца, конгруэнц-простые полугруппы и т.д.), условие максимальности или минимальности – соответственно нётеровы и артиновы алгебры. Большое количество работ посвящено подпрямо неразложимым алгебрам, т.е. таким алгебрам A, что либо $|A| = 1$, либо решётка $\mathrm{Con}\, A$ содержит наименьший отличный от Δ_A элемент.

Конгруэнции алгебры играют важную роль в структурной теории, поскольку конгруэнция – это то же самое, что ядро некоторого гомоморфизма алгебры. Решётка $\mathrm{Con}\, A$ является подрешёткой решётки $\mathrm{Eq}\, A$ всех отношений эквивалентности на множестве A. Кажется естественным изучение полигонов с заданными условиями на их решётку конгруэнций. Условиям дистрибутивности или модулярности решёток конгруэнций, а также условиям, когда конгруэнции образуют цепь, посвящено значительное количество статей. Цепные и дистрибутивные кольца и модули – это целое направление теории колец[8]. Унары с дистрибутивной, модулярной решёткой конгруэнций и с решёткой конгруэнций, являющейся цепью, полностью описаны в работе[9]. Группы с дистрибутивной решёткой нормальных подгрупп исследовались в[10] (как известно, конгруэнции группы – это в точности разбиения на смежные классы по нормальным подгруппам). В работе[11] приведён обзор исследований решётки конгруэнций полугруппы, включающий результаты по полугруппам с дистрибутивной и модулярной решёткой конгруэнций. В работе[12] были описаны полугруппы, у которых левые конгруэнции образуют цепь. В работе[13] приведены критерии модулярности и дистрибутивности решётки конгруэнций полигонов; в этой работе изучается дистрибутивность и модулярность решётки конгруэнций копроизведения связных полигонов, имеющих модулярную либо дистрибутивную решётку конгруэнций. В рабо-

---

или левых нулей // Дальневосточный математический журнал. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 102—120. теорема 2.

[8] *Tuganbaev A.* Distributive modules and related topics. Vol. 12. CRC Press, 1999. 274 p. ; *Туганбаев А. А.* Строение дистрибутивных колец // Матем. сб. 2002. Т. 193, вып. 5. С. 113—128 ; *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М. : МЦНМО, 2009. 472 с.

[9] *Егорова Д. П.* Структура конгруэнций унарной алгебры // Межвузовский научный сборник «Упорядоченные множества и решётки». Вып. 5. г. Саратов : Издательство Саратовского университета, 1978. С. 11—44.

[10] *Brandl R.* Groups whose lattice of normal subgroups are distributive // Glasgow Math. Journal. 1989. Vol. 31, issue 2. pp. 183–188.

[11] *Mitsch H.* Semigroups and their lattice of congruences // Semigroup Forum. 1983. Vol. 26. pp. 1–63.

[12] *Kozhukhov I. B.* Left chain semigroups // Semigroup Forum. 1981. Vol. 22, 2(225). pp. 1–8.

[13] *Птахов Д. О.*, *Степанова А. А.* Решётки конгруэнций полигонов // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, вып. 1. С. 107—115.

те[14] было получено описание полигонов над полугруппами правых или левых нулей, имеющих дистрибутивную, модулярную или линейно упорядоченную решётку конгруэнций. В своей диссертационной работе автор продолжает эти исследования, а именно: им получено полное описание полигонов над прямоугольными связками, имеющих модулярную, дистрибутивную или линейно упорядоченную решётку конгруэнций.

Кроме того, в диссертации автор затрагивает более широкий вопрос, а именно: как устроен полигон, на решётке конгруэнций которого выполняется хотя бы одно нетривиальное решёточное тождество? Получены необходимые и достаточные условия выполнения нетривиального тождества на решётке конгруэнций произвольного полигона, а также для частного случая полигона – унара найдены необходимые условия того, чтобы на решётке конгруэнций унара выполнялось нетривиальное решёточное тождество.

Понятие полигона над полугруппой аналогично понятию модуля над кольцом, ввиду чего теория полигонов развивалась под большим влиянием теории колец и модулей. Инъективные и проективные объекты категории – важная составная часть гомологической теории. Гомологической теории колец и модулей посвящено большое количество статей и монографий. Общие свойства инъективных и проективных полигонов, а также инъективных оболочек и проективных накрытий полигонов описаны в[15].

В работе[16] была построена инъективная оболочка произвольного полигона над полугруппой. Инъективные оболочки полигонов над клиффордовыми полугруппами были построены в[17]. В работах[18] описаны инъективные и проективные полигоны над вполне простой и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппами, что обобщает работы по полигонам над группами, полугруппами правых, левых нулей и т.д.

Тесно связанным с инъективностью и проективностью является понятие плоскостности. Хорошо известны понятия инъективных, проективных и плоских модулей и различные их обобщения. Промежуточное положение между модулями и полигонами занимают полумодули над полукольцами. Исследовение их плоскостности проводилось в[19]. А именно, было показано, что полумодуль ${}_RA$ над полукольцом R является плоским тогда и только тогда, когда ${}_RA$

[14] *Халиуллина А. Р.* Условия модулярности решётки конгруэнций полигонов над полугруппой правых или левых нулей.

[15] *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories. Berlin; New York : de Gruyter, 2000. 546 p. Главы III.1 и III.17.

[16] *Berthiaume P.* The injective envelope of S-sets // Canadian Mathematical Bulletin. 1967. Vol. 10, issue 2. pp. 261–273.

[17] *Kim J. P., Park Y. S.* Injective hulls of S-systems over a Clifford semigroup // Semigroup Forum. 1991. Vol. 43, № 1. pp. 19–24.

[18] *Кожухов И. Б., Петриков А. О.* Инъективные и проективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 4. С. 65—78 ; *Кожухов И. Б., Петриков А. О.* Проективные и инъективные полигоны над вполне простыми полугруппами // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, вып. 1. С. 123—133.

[19] *Katsov Y.* On flat semimodules over semirings // Algebra universalis. 2004. Vol. 51, issue 2. pp. 287–299.

является L-плоским (т.е. ${}_RA$ является фильтрованным копределом конечно порождённых свободных полумодулей). В монографии[20] подробно изучалось понятие плоского полигона над полугруппой. В общем случае описание этого класса полигонов затруднительно, поэтому автор рассмотрел интересный и важный частный случай полигона – унар. В монографии[21] дано систематическое изложение теории унаров с особым вниманием к решёткам ретрактов, произведениям, конгруэнциям, гомоморфизмам и многообразиям унаров. В работе[22] были описаны проективные, слабо проективные и псевдопроективные унары; инъективные, слабо, квази- и псевдоинъективные унары. В работе[23] – квазипроективные унары. В работах[24] было обобщено понятие сильной плоскостности полигона и установлена связь между плоскими полигонами и полигонами без кручения. В[25] было отмечено, что различные обобщения плоскостности будут распространяться на компоненты связности полигона. В диссертационной работе автором получено полное описание слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, уравнительно плоских, коуниверсально плоских, точных, строго точных, регулярных унаров и унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P). Оказалось, что коуниверсально плоские унары совпадают с уравнительно плоскими и являются копроизведением прямых и лучей; унары, удовлетворяющие условию (P), плоские, слабо плоские, главно слабо плоские и унары без кручения совпадают и являются в точности копроизведениями прямых, лучей и циклов; унары, удовлетворяющие условию (E), точные, строго точные и регулярные унары совпадают и являются унарами, не содержащими цикл.

В работе[26] получено полное описание конгруэнций свободного унара с произвольным множеством свободных образующих. Условия дистрибутивности решётки квазимногообразий унаров получены в[27]. В[28] приводятся ряд необходимых условий дистрибутивности и модулярности решёток конгруэнций произвольных коммутативных унарных алгебр.

---

[20] *Kilp M.*, *Knauer U.*, *Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories.

[21] *Jakubíková-Studenovská D.*, *Pócs J.* Monounary algebras. Košice : UPJŠ Košice, 2009.

[22] *Сахаров И. А.* Проективные и инъективные унары // Дальневост. матем. журн. 2024. Т. 24, № 1. С. 107—119.

[23] *Jungabel E.*, *Masulovic D.* Homomorphism-homogeneous monounary algebras // Mathematica Slovaca. 2013. Vol. 63, № 5. pp. 993–1000.

[24] *Laan V.* Pullbacks and flatness properties of acts I // Communications in Algebra. 2001. Vol. 29, issue 2. pp. 829–850 ; *Bulman-Fleming S.*, *Kilp M.*, *Laan V.* Pullbacks and flatness properties of acts II // Communications in Algebra. 2001. Vol. 29, issue 2. pp. 851–878.

[25] *Golchin A.* Flatness and coproducts // Semigroup Forum. 2006. Vol. 72, issue 3. pp. 433–440.

[26] *Будиянская К. В.*, *Кожухов И. Б.* Конгруэнции свободного унара // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 1. С. 15—26.

[27] *Карташов В. К.*, *Карташова А. В.* Характеризация дистрибутивных решеток квазимногообразий унаров // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 1. С. 177—187.

[28] *Карташов В. К.*, *Карташова А. В.*, *Пономарёв В. Н.* Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, 4, ч. 2. С. 52—57.

Объект и предмет исследования

В диссертации изучается решётка конгруэнций полигонов над различными полугруппами, а именно: выполняется ли на этой решётке тождество модулярности, дистрибутивности, является ли эта решётка конгруэнций цепью и в целом, выполняется ли на этой решётке какое-либо нетривиальное решёточное тождество.

Также изучаются плоские унары и близкие к ним: слабо плоские, главно слабо плоские унары, унары без кручения, уравнительно плоские, коуниверсально плоские, точные, строго точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (E) или (P).

Цели и задачи

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Описать полигоны над прямоугольной связкой, на решётке конгруэнций которых выполняется тождество модулярности, дистрибутивности или же когда решётка конгруэнций является цепью;

2. Получить условия, при которых на решётке конгруэнций полигона выполняется нетривиальное решёточное тождество;

3. Описать плоские унары и унары, принадлежащие к классам полигонов, близких к плоским: слабо плоские, главно слабо плоские унары, унары без кручения, уравнительно плоские унары, коуниверсально плоские, точные, строго точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (E) или (P).

Положения, выносимые на защиту

Следующие положения являются основными и выносятся на защиту.

1. Полное описание полигонов над прямоугольной связкой, имеющих модулярную, дистрибутивную либо линейно упорядоченную решётку конгруэнций;

2. Полное описание полигонов, на решётке конгруэнций которых выполняется нетривиальное решёточное тождество;

3. Необходимое условие того, чтобы на решётке конгруэнций унара выполнялось нетривиальное решёточное тождество;

4. Полное описание плоских, слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, уравнительно плоских, коуниверсально плоских, точных, строго точных, регулярных унаров и унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P).

Методология и методы исследования

В работе используются алгебраические методы, в частности, методы теории полугрупп, теории групп, теории колец, теории решёток и теории универсальных алгебр.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты состоят в следующем:

1. Показана конечность полигонов над прямоугольной связкой, имеющих модулярную, дистрибутивную либо линейно упорядоченную решётку конгруэнций. Доказано, что решётка конгруэнций таких полигонов конечна;

2. Разработан алгоритм построения решётки конгруэнций полигона и проверки выполнения в ней заданного решёточного тождества. Алгоритм реализован в виде компьютерной программы[29];

3. Получены условия, при которых на решётке конгруэнций полигона выполняется нетривиальное решёточное тождество;

4. Получено необходимое условие того, чтобы на решётке конгруэнций унара выполнялось нетривиальное решёточное тождество;

5. Доказано, что коуниверсально плоские унары совпадают с уравнительно плоскими и являются копроизведением прямых и лучей. Кроме того, совпадают классы унаров, удовлетворяющие условию (P), плоские, слабо плоские, главно слабо плоские и унары без кручения и являются в точности копроизведениями прямых, лучей и циклов. Унары, удовлетворяющие условию (E), точные, строго точные и регулярные унары совпадают и являются унарами, не содержащими цикл.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертационная работа имеет теоретический характер и может служить основой для дальнейших исследований полигонов и их специальных видов – унаров. Но, учитывая тот факт, что полигон можно рассматривать как автомат без выхода (автомат Мура), то результаты работы могут иметь применение в различных практических приложениях теории автоматов, в частности, в распознавании автоматных языков.

[29] Congruencer. Репозиторий GitHub. `https://github.com/pmalex/congruencer`.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность всех результатов работы обоснована строгими математическими доказательствами.

Основные результаты работы докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях и научных семинарах:

1. Международный молодёжный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2025», Москва, Россия, с 11 по 25 апреля 2025 г.;

2. Конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посвящённая 130-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского университета члена-корреспондента АН СССР Николая Григорьевича Чеботарёва и 80-летию со дня рождения заведующего кафедрой академика АН РТ Марата Мирзаевича Арсланова, Казань, Россия, с 27 июня по 1 июля 2024 г.;

3. VI Международная конференция «Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях» (СИТОНИ), Донецк, ДНР, 26 ноября 2019 г.;

4. V Международная научно-техническая конференция «Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях», Донецк, ДНР, 18 мая 2018 г.;

5. Всероссийская конференция «Алгебра и теория алгоритмов», Иваново, Россия, с 21 по 24 марта 2018 г.;

6. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, Москва, Россия, с 23 по 25 мая 2018 г.;

7. Научно-исследовательский семинар кафедры теоретической информатики механико-математического факультета МГУ (неоднократно);

8. Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, 2026.

Публикации по теме исследования

Результаты диссертационной работы изложены в 6 публикациях, из которых 5 (общим объёмом 6.125 п.л.) опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ имени М.В.Ломоносова по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Структура и объём

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, заключения, списка публикаций автора и списка литературы. Текст диссертации изложен на 109 страницах и содержит 22 иллюстрации. Список литературы включает 45 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** излагается информация об актуальности рассматриваемой темы, краткую историю вопроса, изложение цели работы, методов и основных результатов.

В первой главе диссертации получено описание полигонов над прямоугольными связками, имеющих модулярную, дистрибутивную или линейно упорядоченную решётку конгруэнций. В параграфе 1 приводятся основные определения.

Полигоном над полугруппой называется множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X,\ (x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X,\ s, t \in S$.[30] Полигон – это то же самое, что автомат, и то же самое, что унарная алгебра, т.е. алгебра, у которой все операции унарны (операциями полигона X над полугруппой S являются умножения на элементы полугруппы, т.е. $x \mapsto xs$ $(s \in S)$).

Полигон, определённый выше, ещё называют *правым полигоном. Левым полигоном над полугруппой* T называется множество X и отображение $S \times X \to X$, $(s, x) \mapsto sx$, удовлетворяющие условию $(st)x = s(tx)$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$.

Биполигоном ${}_TX_S$ над полугруппами T и S называется множество X с отображениями $T \times X \to X$ и $X \times S \to X$, удовлетворяющие условиям $x(s_1s_2) = (xs_1)s_2$, $(t_1t_2)x = t_1(t_2x)$ для любых $x \in X$, $s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in T$ а также условию $(tx)s = t(xs)$ для любых $x \in X$, $s \in S$, $t \in T$.

Если полигон X является объединением своих подполигонов X_i $(i \in I)$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то мы называем X *копроизведением* полигонов X_i и пишем $X = \coprod_{i \in I} X_i$. Для любой полугруппы S мы будем обозначать через S^1 наименьшую полугруппу с единицей, содержащую S, т.е.

$$S^1 = \begin{cases} S, & \text{если } S \text{ имеет единицу}, \\ S \cup \{1\}, & \text{если } S \text{ не имеет единицы}. \end{cases}$$

Элемент z полигона X_S называется *нулём*, если $zs = z$ для любых $s \in S$.

Полугруппа левых нулей L – это полугруппа, в которой выполняется тождество $xy = x$. *Полугруппа правых нулей* R – полугруппа с тождеством

[30] *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories.

$xy = y$. *Прямоугольная связка* – это прямое произведение $S = L \times R$, где L – полугруппа левых нулей, R – полугруппа правых нулей.

Пусть X – полигон над полугруппой S и Y – его подполигон. Конгруэнция $\rho_Y = (Y \times Y) \cup \Delta_X$ называется *конгруэнцией Риса*. Для фактор-полигона X/ρ_Y будем использовать также обозначение X/Y.

В параграфе 2 описываются общие свойства полигонов с модулярной решёткой конгруэнций.

Напомним, что решётка L называется *дистрибутивной*, если $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ для любых $x, y, z \in L$, и *модулярной*, если это равенство выполнено при $x \leq z$.

Конгруэнция ρ полигона X называется *сквозной*[31], если существует разложение $X = U \sqcup V$ полигона X в копроизведение и элементы $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$ такие, что $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \rho$, а $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \notin \rho$.

В работе[32] исследовались условия модулярности и дистрибутивности решёток конгруэнций полигонов. Была доказана теорема о связи модулярности (дистрибутивности) решёток конгруэнций полигона и его компонент связности.

В работе[33] были полностью описаны полигоны над вполне простой полугруппой и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой. Пусть X – полигон над вполне простой полугруппой S, тогда:

$$X = \underbrace{(X \setminus XS)}_{A} \cup \coprod_{i \in I} Y_i,$$

где Y_i – подполигоны, неразложимые в нетривиальное копроизведение. Более того, каждое Y_i – это простой[34] полигон.

Для элементов $i, j \in I$ таких, что $i \neq j$, введём в рассмотрение двудольный граф Γ_{ij}, у которого вершинами являются элементы множества $Y_i \cup Y_j$, а рёбрами – пары (y_{ir}, y_{jr}) при $r \in R$. Следующая лемма отмечает важное свойство графов Γ_{ij} в случае модулярности решётки конгруэнций.

Лемма 1.11. *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$. Пусть $Y = XS$, $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ – разложение полигона Y на компоненты связности. Если решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна, то графы Γ_{ij} связны.*

Свойство связности графа Γ_{ij}, играет существенную роль, как будет видно далее. Сформулируем один из основных результатов главы.

Теорема 1.2. *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой S. Тогда решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна в том и только том случае, если $|A| \leq 2$ и выполнены условия:*

[31] *Птахов Д. О., Степанова А. А.* Решётки конгруэнций полигонов. определение после леммы 2.1.

[32] Там же.

[33] *Avdeyev A. Y., Kozhukhov I. B.* Acts over completely 0-simple semigroups.

[34] Полигон X называется *простым*, если он не имеет подполигонов, отличных от X.

(i) $|I| \leq 3$, $|Y_i| \leq 3$ *при* $i \in I$ *и графы* Γ_{ij} *связны при* $i \neq j$;

при $A = \{a\}$ *выполнено условие (i), а также условие*

(ii) если $a\varphi_l = i$, *при некотором* $i \in I$ *и всех* $l \in L$, *то* $|Y_i| \leq 2$;

при $A = \{a, b\}$ *выполнено условие (i), а также условия:*

(iii) $a\varphi_l = b\varphi_{l'}$, *при некоторых* $l, l' \in L$;

(iv) если одно из множеств $\{a\varphi_l \mid l \in L\}$, $\{b\varphi_l \mid l \in L\}$ *состоит из одного элемента* i, *а в другом более одного элемента, то* $|Y_i| \leq 2$;

(v) если $\{a\varphi_l \mid l \in L\} = \{b\varphi_l \mid l \in L\} = \{i\}$, *то* $|Y_i| = 1$.

При доказательстве была применена написанная автором компьютерная программа[35], строящая решётку конгруэнций заданного полигона и проверяющая выполнение на ней тождеств модулярности и дистрибутивности. Самый большой полигон над прямоугольной связкой с модулярной решёткой конгруэнций содержит 11 элементов, а его решётка конгруэнций – 300 элементов.

Следующие две теоремы дают условия дистрибутивности и линейной упорядоченности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой.

Теорема 1.3. *Пусть* X *- полигон над прямоугольной связкой* $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$, $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ *– разложение в копрямое произведение копрямо неразложимых подполигонов. Решётка конгруэнций* $\mathrm{Con}X$ *дистрибутивна в том и только том случае, если* $|A| \leq 1$ *и выполнены условия:*
при $A = \emptyset$

(i) $|I| \leq 2$, $|Y_i| \leq 2$ *и граф* Γ_{ij} *связен при* $i \neq j$;

при $A = \{a\}$ *выполнено условие (i), а также условие:*

(ii) если $a\varphi_l = i$ *при некотором* $i \in I$ *и всех* $l \in L$, *то* $|Y_i| \leq 1$.

Теорема 1.4. *Пусть* X_S *– полигон над прямоугольной связкой* $S = L \times R$, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$. $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ *– разложение в копроизведение копрямо неразложимых подполигонов. Решётка конгруэнций* $\mathrm{Con}X$ *является цепью в том и только том случае, если* $|I| \leq 2$ *(считаем, что* $I = \{1\}$ *или* $I = \{1, 2\}$*) и выполнено хотя бы одно из условий:*

(i) $A = \emptyset$, $|I| = 1$, $|Y| \leq 2$;

(ii) $A = \emptyset$, $|I| = 2$, $|Y_1|, |Y_2| \leq 2$, $|Y_1| + |Y_2| \leq 3$;

(iii) $|A| = 1$ *(скажем,* $A = \{a\}$*),* $|I| = 1$, $|Y| \leq 1$;

(iv) $|A| = 1$ *(скажем,* $A = \{a\}$*),* $|I| = 2$, $|Y_1|, |Y_2| \leq 2$, $|Y_1| + |Y_2| \leq 3$ *и* $aS = Y$.

Естественным представляется расширить вопрос, поставленный в этой главе, на более общий случай, а именно: когда хотя бы одно нетривиальное

[35] Congruencer.

решёточное тождество будет выполняться на решётке конгруэнций некоторого полигона, а когда нет? Именно этот вопрос исследуется **во второй главе** диссертационной работы.

Первая часть главы содержит краткий обзор работ различных авторов по тематике вопроса, а также некоторые общеизвестные факты, на которые опирается исследование.

Для дальнейшего нам потребуется понятие *вполне простой* и *вполне 0-простой* полугруппы. *Рисовская матричная полугруппа* $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ (здесь G – группа, I и Λ – множества, $P = \|p_{\lambda i}\|$ $(\lambda \in \Lambda, i \in I)$ – матрица с элементами из $G \cup \{0\}$) определяется как множество, состоящее из элемента 0 и элементов вида $(g)_{i\lambda}$, где $g \in G,\ i \in I,\ \lambda \in \Lambda$, с умножением

$$(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = \begin{cases} (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}, \text{ если } p_{\lambda j} \neq 0, \\ 0, \text{ если } p_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$

Рисовская матричная полугруппа $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, где G, I, Λ, P – такие же, как и выше, но $p_{\lambda i} \in G$ при всех $i \in I, \lambda \in \Lambda$ – это множество элементов вида $(g)_{i\lambda}$ с умножением

$$(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}.$$

Хорошо известная теорема Сушкевича – Риса утверждает, что вполне простые полугруппы — это в точности полугруппы, изморфные полугруппе $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, а вполне 0-простые — изоморфные регулярной рисовской матричной полугруппе $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, т.е. такой, у которой матрица P не содержит нулевых строк или столбцов[36].

Напомним, что дистрибутивные и модулярные решётки образуют многообразия, задаваемые соответственно тождеством $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ и тождеством $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (z \wedge (x \vee y))$[37]. Цепи образуют класс решёток, не являющийся многообразием, но замкнутым относительно подрешёток и гомоморфных образов.

Решёточное тождество называется *нетривиальным*, если оно выполняется не во всех решётках.

Основными результатами главы являются следующие утверждения.

Следствие 2.1. *Пусть X – полигон над конечной полугруппой. Тогда решётка конгруэнций* $\operatorname{Con} X$ *удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству в том и только том случае, если X конечен.*

Теорема 2.2. *Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ – вполне 0-простая полугруппа и $|G| < \infty$, $|I| < \infty$. Тогда для любого полигона X с нулём над полугруппой S выполняется следующее: решётка конгруэнций* $\operatorname{Con} X$ *удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству в том и только том случае, если X конечен.*

[36] *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. М. : Мир, 1972. 712 с. теорема 3.5 и замечания перед леммой 3.1.

[37] *Гретцер Г.* Общая теория решёток. М. : Мир, 1982. 452 с. глава 5, теорема 347.

Следствие 2.2. *Если* $|G|$, $|I| < \infty$, *то решётка* $\operatorname{Con} X$ *удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству тогда и только тогда, когда* X *конечен.*

Если опустить условие $|I| < \infty$, то утверждение теоремы 2.2 перестаёт быть верным. В главе 2 строятся два примера бесконечных полигонов X с тривиальной решёткой конгруэнций: $\operatorname{Con} X = \{\Delta, \nabla\}$. В обоих примерах X – бесконечный полигон, но решётка $\operatorname{Con} X$ конечна и, следовательно, удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству.

В главе 3 диссертации исследуются унары с тождествами в решётке конгруэнций. После того, как в предыдущей главе мы выяснили, в каком случае тождество будет выполняться на решётке конгруэнций полигона, естественным представляется получить конкретное описание таких полигонов. В главе 3 такое описание получено для важного частного случая полигона – унара, а именно: показано, что если решётка конгруэнций унара удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству, то унар является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей, а это, в свою очередь, равносильно тому, что унар имеет лишь конечное число компонент связности, узлов, начальных элементов и входная степень каждого элемента унара конечна.

Унар – это множество с одной унарной операцией $f : X \to X$. Его можно рассматривать как полигон над свободной циклической полугруппой $S = \langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, a^4, \ldots\}$ либо как унитарный полигон над свободным циклическим моноидом $S^1 = \{1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots\}$. Здесь $f(x) = xa$, $f(f(x)) = xa^2$ и т.д. Далее, букву a мы будем использовать для обозначения образующего элемента свободной циклической полугруппы $S = \langle a \rangle$.

Унар X называется *связным*, если для любых $x, y \in X$ существуют такие $k, l \geqslant 0$, что $xa^k = ya^l$. Для унара X и элемента $x \in X$ полагаем $xa^{-1} = \{y \mid ya = x\}$.

Приведём некоторые определения из теории графов. В ориентированном графе G с множеством вершин $V(G)$ и рёбер $E(G)$ для каждой вершины $x \in V(G)$ определяются понятия *входной степени*

$$\operatorname{indeg} x = |\{y \mid (y, x) \in E(G)\}|$$

и *выходной степени*

$$\operatorname{outdeg} x = |\{y \mid (x, y) \in E(G)\}|$$

вершины x. Понятно, что у унара X, рассматриваемого как граф, $\operatorname{outdeg} x = 1$ и $\operatorname{indeg} x = |xa^{-1}|$ для всех $x \in X$.

Пусть X – унар. Элемент $x \in X$ назовём *узлом*, если существуют элементы $y, z \in X$ такие, что $y \neq z$ и $y \cdot a = z \cdot a = x$. Элементы $x \in X \setminus XS$ будем называть *начальными*.

Прямой называется унар, изоморфный унару $\mathbb{Z}$ с операцией $i \cdot a = i + 1$ при $i \in \mathbb{Z}$ (см. рисунок 3.1, слева).

Лучом называется унар, изоморфный унару $\mathbb{N}$ с операцией $i \cdot a = i + 1$ при $i \in \mathbb{N}$ (см. рисунок 3.1, по центру).

Циклом $C_n = \{c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ длины n называется унар, изоморфный унару $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ с операцией $i \cdot a = i + 1 \pmod{n}$ (см. рисунок 3.1, справа).

Основными результатами главы 3 являются следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Если X – унар, у которого решётка конгруэнций* $\operatorname{Con} X$ *удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству, то X удовлетворяет условиям:*

(i) *X имеет лишь конечное число компонент связности;*

(ii) *X имеет лишь конечное число начальных элементов;*

(iii) *X имеет лишь конечное число узлов;*

(iv) $\operatorname{indeg} x < \infty$ *для каждого $x \in X$.*

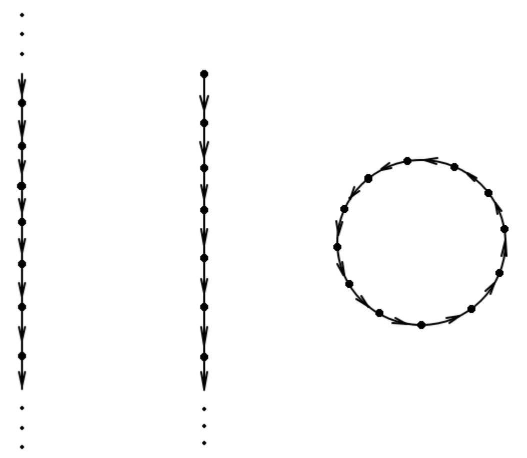

Рисунок 3.1: Прямая (слева), луч (в центре) и цикл (справа).

Теорема 3.2. *Унар X удовлетворяет условиям (i)-(iv), сформулированным в теореме 3.1, в том и только том случае, если X является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей.*

Из теорем 3.1 и 3.2 непосредственно получается

Следствие 3.1. *Если решётка конгруэнций* $\operatorname{Con} X$ *унара X удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству, то X является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей.*

Глава 4 диссертационного исследования посвящена условию плоскостности полигона и близким к нему. Рассматриваются унары – полигоны над бесконечной циклической полугруппой. В этой главе получено полное описание коуниверсально плоских, уравнительно плоских, плоских, слабо плоских, главно слабо плоских, точных, строго точных, регулярных унаров, унаров без кручения и унаров, для которых выполняются условия (E) или (P).

Пусть X и Y – соответственно правый и левый полигоны над полугруппой S. Через $X \otimes Y$ будем обозначать их тензорное произведение[38].

Если X_S – правый S-полигон, ${}_SY_T$ – (S,T)-биполигон, то $X \otimes Y$ является правым T-полигоном относительно операции[39]

$$(x \otimes y)t = x \otimes yt \quad (x \in X,\ y \in Y,\ t \in T).$$

Пусть S – свободная циклическая полугруппа. Так как она коммутативна, то нет разницы между правыми и левыми полигонами над S. Поэтому для унаров X и Y тензорное произведение $X \otimes Y$ – тоже унар. При этом, для $x \in X$, $y \in Y$ имеют место равенства

$$(x \otimes y)a = x \otimes ya = x \otimes ay = xa \otimes y = ax \otimes y = a(x \otimes y).$$

Свободный унар с множеством свободных образующих $\{u_i \mid i \in I\}$ – это копроизведение лучей (см. рис. 4.1).

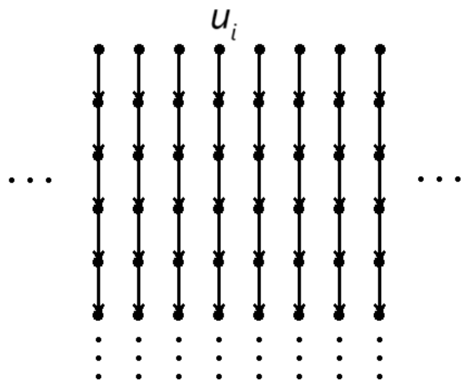

Рисунок 4.1: Свободный унар с множеством свободных образующих $\{u_i \mid i \in I\}$.

Как и всякий полигон, унар разлагается в копроизведение своих компонент связности. Примеры связных унаров изображены на рисунке 4.2. В первом случае (рис. 4.2, (A)) унар имеет бесконечную убывающую цепь, во втором (рис. 4.2, (B)) унар содержит цикл C_n.

Основным результатом этой главы является следующая теорема.

[38] *Kilp M.*, *Knauer U.*, *Mikhalev A. V.* Op. cit. Определение II.5.2.

[39] Ibid. Предложение II.5.12.

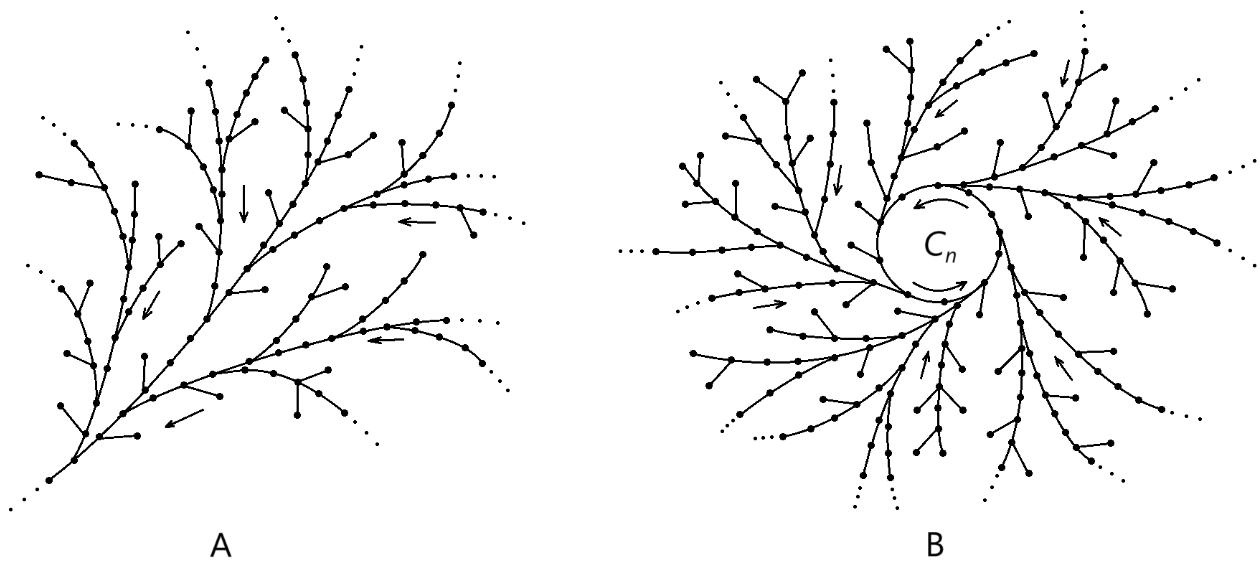

Рисунок 4.2: Связные унары.

Теорема 4.1. *Унар X является плоским в том и только том случае, если X – копроизведение унаров, являющихся прямыми, лучами или циклами.*

Далее описываются унары, тесно связанные с плоскими, а именно: коуниверсально плоские, уравнительно плоские, слабо плоские, главно слабо плоские, точные, строго точные, регулярные унары, унары без кручения и унары, удовлетворяющие условию (E) или (P). Выбор именно этих классов унаров основан на[40].

Дадим определение этих типов плоских унаров.

Определение 4.7. *Унар X называется коуниверсально плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет коуниверсальный квадрат;*

уравнительно плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет уравнители;

сильно плоским, если он является коуниверсально плоским и уравнительно плоским;

плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет мономорфизмы;

слабо плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет все вложения левых идеалов в S;

главно слабо плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет все вложения главных левых идеалов в S;

унаром без кручения, если $\forall x, x' \in X$, $\forall s \in S$ $xs = x's \to x = x'$.

Приведём известное утверждение о рассматриваемых классах.

[40] Ibid. Table III.2.

Лемма 4.6. *Для любого унара X верны следующие импликации:*

$$\begin{aligned} &\textit{сильно плоский} \Rightarrow \textit{коуниверсально плоский} \\ &\textit{сильно плоский} \Rightarrow \textit{уравнительно плоский} \Rightarrow \textit{плоский} \\ &\qquad \Rightarrow \textit{слабо плоский} \Rightarrow \textit{главно слабо плоский.} \end{aligned}$$

Будем говорить, что полигон X над полугруппой S *удовлетворяет условию (P)*, если для него выполняется импликация: если $xs = x's'$ для $x, x' \in X$, $s, s' \in S$, то существуют $x'' \in X$, $u, v \in S$ такие, что $x = x''u$, $x' = x''v$, $us = vs'$ (см. рис. 4.5).

Полигон X над полугруппой S *удовлетворяет условию (E)*, если для него выполняется импликация: если $xs = xs'$ для $x \in X$, $s, s' \in S$, то существуют $x' \in X$, $u \in S$ такие, что $x = x'u$, $us = us'$.

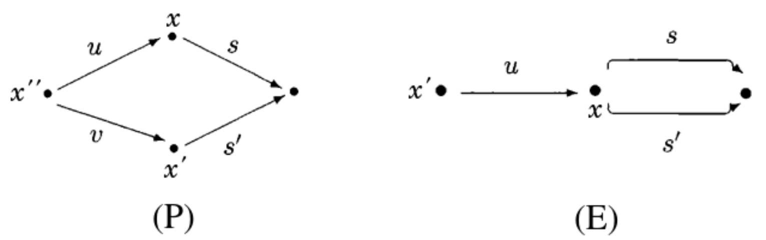

Рисунок 4.5: Условия (P) и (E).

Теперь приведём определение точных, строго точных и регулярных полигонов. "Точное действие" на языке автоматов означает, что разные входные слова по-разному воздействуют хотя бы на одно из состояний автомата. Действие является строго точным, если разные входные слова по разному воздействуют на все состояния автомата.

Полигон X_S называется *точным*, если для $s, t \in S$ выполняется импликация: $(\forall x \in X\ xs = xt) \to s = t$. Полигон X_S называется *строго точным*, если для $s, t \in S$ выполняется импликация: $(\exists x\ xs = xt) \to s = t$[41].

Очевидно, что если полигон является строго точным, то он является точным. Также нетрудно увидеть, что если X – связный унар с циклом (рис. 4.2, (B)), то он не будет являться точным, а значит, не будет и строго точным.

Пусть X – полигон над моноидом S^1. Элемент $x \in S$ называется *регулярным*, если существует гомоморфизм $\varphi : xS^1 \to S^1$ такой, что $x\varphi(x) = x$. Полигон X над моноидом S^1 называется *регулярным* полигоном, если каждый его элемент является регулярным[42].

Основными результатами главы являются следующие утверждения.

Следствие 4.6. *Для любого унара X верны следующие эквивалентности:*

$$\textit{(P)} \Leftrightarrow \textit{плоский} \Leftrightarrow \textit{слабо плоский} \Leftrightarrow \textit{главно слабо плоский} \Leftrightarrow \textit{без кручения.}$$

[41] Ibid. Определение I.4.8.

[42] Ibid. Определение III.19.1.

Следствие 4.7. *Для любого унара X верны следующие импликации:*

$$\text{коуниверсально плоский} \Leftrightarrow \text{уравнительно плоский} \Rightarrow (E)$$
$$\Leftrightarrow \text{строго точный} \Leftrightarrow \text{точный} \Leftrightarrow \text{регулярный}.$$

Таким образом, в этой главе диссертационного исследования автором полностью описаны коуниверсально плоские, уравнительно плоские, плоские, слабо плоские, главно слабо плоские унары, унары без кручения, унары, удовлетворяющие условию (E) или (P), точные, строго точные и регулярные унары. На рисунке 4.8 схематично изображены все вышеописанные классы унаров, а также замечание И.А. Сахарова[43] о том, что проективные унары являются копроизведениями лучей.

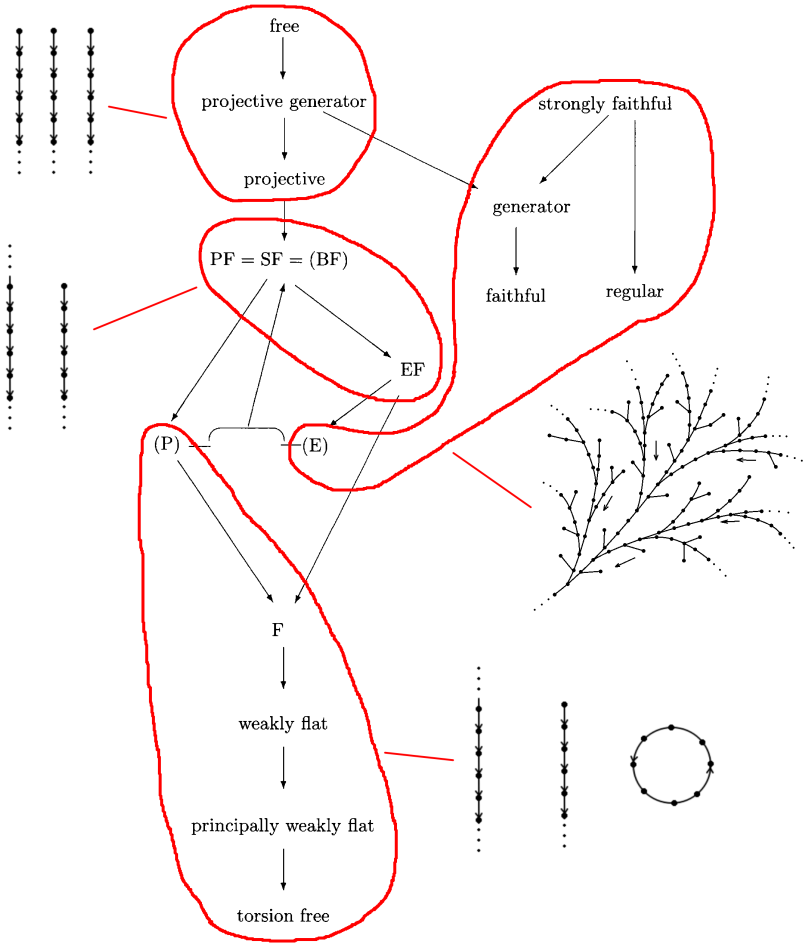

Рисунок 4.8: Классы унаров, близкие к плоским

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Игорю Борисовичу Кожухову за постановку задач и многократные обсуждения. Автор искренне

[43] *Сахаров И. А.* Проективные и инъективные унары. теорема 1.

благодарит коллектив кафедры теоретической информатики за дружелюбную атмосферу, а также за предоставленные возможности реализации творческой деятельности.

Заключение

В диссертационной работе проведено исследование полигонов, на решётке конгруэнций которых выполняется нетривиальное решёточное тождество. Описаны полигоны над прямоугольными связками, решётка конгруэнций которых удовлетворяет тождеству модулярности, дистрибутивности или же является цепью. Разработан и реализован алгоритм, позволяющий строить решётку конгруэнций заданного полигона и проверять различные тождества на ней. Установлены общие свойства полигонов, на решётке конгруэнций которых выполняется хотя бы одно нетривиальное тождество. Получены необходимые условия того, когда на решётке конгруэнций унара выполняется нетривиальное решёточное тождество. Получено полное описание плоских, слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, уравнительно плоских, коуниверсально плоских, точных, строго точных, регулярных унаров и унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P). Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в областях общей алгебры и дискретной математики.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В.Ломоносова по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

1. *Кожухов И. Б.*, *Пряничников А. М.* Об унарах с тождествами в решётке конгруэнций, II // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, № 3. С. 125—135 ;

   EDN: PNQGSN. Импакт-фактор 0.262 (SJR). Объем 0.625 п.л.

   Общая доля диссертанта составляет 50%

2. *Пряничников А. М.* Классы унаров, близкие к плоским // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, № 1. С. 76—87 ;

   EDN: WFHVJT. Импакт-фактор 0.262 (SJR). Объем 0.687 п.л.

3. *Пряничников А. М.* Плоские унары // Известия высших учебных заведений. Математика. 2025. № 9. С. 70—80 ;

EDN: SDEXDJ. Импакт-фактор 0.198 (РИНЦ). Объем 0.625 п.л.

Перевод: *Pryanichnikov A.M.* Flat unars // Russian Mathematics. 2025. Vol. 69, № 9. pp. 51–59

EDN: SDEXDJ. Импакт-фактор 0.6 (JIF). Объем 0.5 п.л.

4. *Kozhuhov I. B., Pryanichnikov A. M.* Acts with identities in the congruence Lattice // Algebra universalis. 2022. Vol. 83, № 2. pp. 291–323 ;

   EDN: SRQQDK. Импакт-фактор 0.6 (JIF). Объем 2 п.л.

   Общая доля диссертанта составляет 50%

5. *Кожухов И. Б., Пряничников А. М., Симакова А. Р.* Условия модулярности решетки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2020. Т. 84, № 2. С. 90—125 ;

   EDN: BIURKF. Импакт-фактор 0.821 (РИНЦ). Объем 2.187 п.л.

   Перевод: *Kozhukhov I. B., Pryanichnikov A. M., Simakova A. R.* Conditions of modularity of the congruence lattice of an act over a rectangular band // Izvestiya: Mathematics. 2020. Vol. 84, №2. pp. 291–323

   EDN: QXLLSW. Импакт-фактор 0.9 (JIF). Объем 2 п.л.

   Общая доля диссертанта составляет 50%

Публикации в прочих изданиях

6. *Кожухов И. Б., Пряничников А. М.* О конгруэнциях полигонов над прямоугольными связками // Информатика и кибернетика. 2018. Т. 11, № 1. С. 49—53 ;

   EDN: ZAWXWP. Импакт-фактор 0.015 (РИНЦ). Объем 0.25 п.л.

Пряничников Алексей Михайлович

Полигоны с условиями на решётку конгруэнций

Автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Подписано в печать ____.____.________. Заказ № ________________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ____________________________________