ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Солонкова Александра Алексеевича
на тему: «Свободные универсальные алгебры с непрерывными и раздельно непрерывными операциями»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

В 1954 году Анатолий Иванович Мальцев доказал, что *перестановочность всех конгруэнций на всех универсальных алгебрах из заданного многообразия эквивалентна наличию в сигнатуре этого многообразия специального тернарного терма*, называемого теперь операцией Мальцева. Если операция Мальцева непрерывна в топологическом пространстве, то такое пространство называют мальцевским. Мальцевские пространства достаточно хорошо изучены и продолжают быть предметом исследования. Например, мальцевские компакты обладают свойством Суслина и являются компактами Дугунджи. В 1991 году Ольгой Викторовной Сипачевой был доказан замечательный результат, что *мальцевские компакты являются ретрактами топологических групп.*

Диссертационная работа Александра Алексеевича Солонкова в основном посвящена универсальным топологическим и квазитопологическим алгебрам, т.е. универсальным алгебрам с топологией, относительно которой все операции непрерывны и, соответственно, раздельно непрерывны. Также в работе исследуются свободные топологические и квазитопологические универсальные алгебры.

Диссертация состоит из введения, раздела «Основные понятия и предварительные сведения», пяти глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора.

Во введении приводится краткая история вопроса, определяется область исследования, формулируются основные результаты диссертации. В разделе «Основные понятия и предварительные сведения» содержатся основные определения, а также формулируются и доказываются некоторые необходимые в дальнейшем общие факты.

Глава 1 посвящена основным свойствам свободных топологических алгебр, свободных мальцевских алгебр, свободных мальцевских тихоновских алгебр, абсолютно свободных топологических алгебр. Приводится явное описание абсолютно свободной мальцевской алгебры. В первом разделе главы 1 доказывается Теорема 1.1 о существовании свободной топологической алгебры $F_V(X)$ для произвольного многообразия V топологических алгебр и топологического пространства X. В Теореме 1.3 накладывается условие на многообразие V (быть полным) при котором свободная топологическая алгебра $F_V(X)$ является функционально хаусдорфовым пространством. Второй раздел первой главы посвящён абсолютно свободным топологическим алгебрам.

Глава 2 посвящена мальцевским алгебрам, их строению и свойствам. В первом разделе приводятся основные определения и свойства абстрактных и топологических мальцевских алгебр. Второй раздел второй главы посвящён свободным топологическим мальцевским алгебрам. Необходимо отметить Теорему 2.4 из которой следует, что *каждая топологическая мальцевская алгебра является факторалгеброй некоторой свободной топологической мальцевской алгебры.*

Вместе с многообразием мальцевских алгебр в диссертации рассматривается многообразие тихоновских мальцевских алгебр, которое состоит из всех топологических мальцевских алгебр, являющихся тихоновскими пространствами. В Теореме 2.5 определяется свободная тихоновская мальцевская алгебра и доказывается единственность с точностью до топологического изоморфизма. Более того, получается, что каждая тихоновская топологическая мальцевская алгебра является факторпространством свободной тихоновской мальцевской алгебры.

Накладывая на операцию Мальцева естественное условие ассоциативно сти, в третем разделе второй главы диссертации исследуются топологические груды. Можно выделить Теорему 2.7 и Предложение 2.6.

Теорема 2.7. Пусть V — полное топологическое подмногообразие многообразия M, т.е. класс топологических мальцевских алгебр сигнатуры $\{\mu\}$, являющийся полным топологическим многообразием. Тогда для каждого топологического пространства X свободная топологическая алгебра $F_V(X)$ является топологической факторалгеброй алгебры $M(X)$. В частности, для тихоновского пространства X топологическая груда $G(X)$ — факторпространство пространства $M(X)$.

Предложение 2.6. Топологическое пространство X является ретрактом топологической группы тогда и только тогда, когда X является ретрактом груды $G(X)$.

В последнем разделе второй главы приводится явное описание свободной мальцевской алгебры.

В главе 3 рассматривается важный частный случай топологических алгебр, а именно, булевы топологические группы или, что то же самое, топологические векторные пространства над полем F_2. Третья глава целиком посвящена доказательству того, что *свободные булевы группы кружевных пространств являются кружевными*, а значит, на них распространяется знаменитая теорема Дугунджи о существовании оператора продолжения.

Глава 4 посвящена изучению квазитопологических алгебр, то есть универсальных алгебр с раздельно непрерывными операциями. Теорема 4.1 показывает, что квазитопологические алгебры выгодно отличаются от топологических.

Теорема 4.1. Пусть A — квазитопологическая алгебра, $\sim$ — конгруэнция на A и B — факторалгебра $A/\sim$ с фактортопологией относительно канонического гомоморфизма. Тогда B является квазитопологической алгеброй, то есть операции на B раздельно непрерывны.

В Теореме 4.2 доказывается существование свободной квазитопологической алгебры для произвольного (нетривиального) многообразия квазитопологических алгебр и доказана единственность такой алгебры с точностью до топологического изоморфизма.

Во втором разделе главы 4 описана конструкция абсолютно свободной квазитопологической алгебры Wq(X) топологического пространства X: она совершенно аналогична конструкции абсолютно свободной топологической алгебры, единственное отличие состоит в том, что обычные произведения пространств заменяются на кросс-произведения.

Следующая теорема указывает ещё на одно отличие квазитопологических алгебр от топологических:

Теорема 4.4. Для любого топологического пространства X и любого полного многообразия V квазитопологических алгебр топология свободной квазитопологической алгебры $F_V(X)$ является фактортопологией относительно естественного гомоморфизма Q алгебры Wq(X) на F_V (X).

Четвертый раздел четвёртой главы посвящён аксиомам отделимости в квазитопологических алгебрах.

Глава 5 посвящена изучению квазитопологических алгебр, то есть квазитопологических алгебр, среди производных операций которых найдётся раздельно непрерывная операция Мальцева. В первом разделе содержится описание конструкции абсолютно свободной квазимальцевской алгебры Wq(X) (т.е. абсолютно свободной квазитопологической алгебры сигнатуры {μ}, где μ — тернарная операция). Она представляет собой частный случай конструкции абсолютно свободной квазитопологической алгебры произвольной сигнатуры. Во втором разделе рассматриваются аксиомы отделимости в квазимальцевских алгебрах.

Предложение 5.1. Все T_0-пространства, допускающие раздельно непре рывные операции Мальцева, являются T_1-пространствами.

В третьем разделе рассматриваются ретракты квазитопологических групп. Можно выделить две теоремы 5.5 и 5.6.

Теорема 5.5. Всякое квазимальцевское пространство X является ретрактом своей свободной квазитопологической группы Fq(X).

Теорема 5.6. Всякое тихоновское квазимальцевское пространство X гомеоморфно ретракту тихоновской квазитопологической группы.

Публикации основных результатов диссертации А.А. Солонкова представлены в четырех работах, все работы опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Диссертация аккуратно оформлена. Имеются мелкие стилистические погрешности (например, на стр. 26 ссылка на лемму 1, а должна быть ссылка на лемму 0.1) и небольшое число опечаток (например, на стр 25. вместо *Его* записано *Есго*). Возможно, что к замечанию можно отнести отсутствие в ссылках на монографии страниц или номеров утверждений (или теорем) из этих монографий. Это значительно затрудняет прочтение.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Полученные в работе результаты не вызывают сомнений. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Солонков Александр Алексеевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук
заведующий сектором топологии
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук»

ОСИПОВ Александр Владимирович

Контактные данные: тел.: , e-mail:

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация: 01.01.04 – геометрия и топология

Адрес места работы:

620077, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16, к. 803
Тел.: +7(343)374-83-32; e-mail: dir-info@imm.uran.ru

Подпись сотрудника А.В. Осипова удостоверяю
Ученый секретарь ИММ УрО РАН им. Н.Н. Красовского,
Кандидат физ.-мат. наук О.Н. Ульянов