

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Корчагин Никита Павлович

**Сложность проблемы сюръективного гомоморфизма
для циклов**

**Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Диссертация подготовлена на кафедре математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: **Жук Дмитрий Николаевич**,
кандидат физико-математических наук.

Официальные оппоненты: **Селезнева Светлана Николаевна**,
доктор физико-математических наук, доцент,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической кибернетики, профессор.

Тарасов Алексей Вячеславович,
доктор физико-математических наук, доцент,
Институт точной механики и вычислительной
техники имени С.А. Лебедева Российской академии наук, сотрудник.

Мастихина Анна Антоновна,
кандидат физико-математических наук,
Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет),
факультет фундаментальные науки, кафедра высшая математика, доцент.

Защита состоится «29» мая 2026 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3842/>

Автореферат разослан "___" апреля 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук

В. А. Кибкало

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация относится к областям теории алгоритмов и теории графов. Исследуется массовая задача о существовании сюръективного гомоморфизма, в которой для фиксированного графа \mathcal{H} по данному графу \mathcal{G} требуется определить, существует ли сюръективный гомоморфизм из \mathcal{G} на \mathcal{H} . Изучается случай, когда граф \mathcal{H} получается из неориентированного цикла путём ориентации некоторых рёбер и в котором каждая вершина содержит петлю. Также рассматривается связанная с ней сюръективная задача удовлетворения ограничениям, в которой для конечного набора ограничений из заданного набора отношений Γ на одном множестве A требуется определить, существует ли сюръективная подстановка значений неизвестных, удовлетворяющая всем ограничениям. В диссертационной работе предлагаются новые инструменты, позволяющие анализировать сложность сюръективной задачи удовлетворения ограничениям для различных Γ . Эти инструменты применяются для определения сложности задачи о существовании сюръективного гомоморфизма для всех рассматриваемых графов, кроме пяти циклов длины 4, 5 и 6.

Задачи, связанные с поиском гомоморфизма на граф, уже более полувека представляют большой интерес в областях теории графов и теории сложности алгоритмов. Самой естественной из них является задача $\text{Hom}(\mathcal{H})$, в которой для фиксированного графа \mathcal{H} по данному графу \mathcal{G} требуется определить, существует ли гомоморфизм из \mathcal{G} на \mathcal{H} . Эта задача имеет практические применения¹, тесно связана со многими другими массовыми задачами в области теории графов². Несложно видеть, что эта задача лежит в NP. Более того, была выдвинута гипотеза, согласно которой эта задача всегда решается за полиномиальное время либо является NP-полной³.

Задача Hom тесно связана с известной массовой задачей удовлетворения ограничениям (*constraint satisfaction problem*), которую обозначают

¹Garey M. R., Johnson D. S., So H. C. An application of graph coloring to printed circuit testing // Proceedings of the 16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. USA : IEEE Computer Society, 1975. С. 178—183 ; Maurer H., Salomaa A., Wood D. Colorings and interpretations: a connection between graphs and grammar forms // Discrete Applied Mathematics. 1981. Т. 3, № 2. С. 119—135 ; Ore O. Теория графов. Наука, 1980 ; М. Гэри Д. Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Мир, 1982.

²Hell P., Nesetril J. Graphs and Homomorphisms. Oxford University Press, 07.2004.

³Maurer H., Sudborough J., Welzl E. On the complexity of the general coloring problem // Information and Control. 1981. Т. 51, № 2. С. 128—145 ; Feder T., Vardi M. Y. The Computational Structure of Monotone Monadic SNP and Constraint Satisfaction: A Study through Datalog and Group Theory // SIAM Journal on Computing. 1998. Т. 28, № 1. С. 57—104 ; Feder T., Vardi M. Y. Monotone monadic SNP and constraint satisfaction // Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. San Diego, California, USA : Association for Computing Machinery, 1993. С. 612—622.

как CSP. В ней для фиксированного множества отношений Γ , заданных на одном и том же множестве A , на вход подаётся набор ограничений из Γ , и требуется определить, существует ли подстановка значений неизвестных, удовлетворяющая всем ограничениям из набора. Эта задача имеет огромную важность в области математической кибернетики. В частности, задача $\text{Hom}(\mathcal{H})$ эквивалентна $\text{CSP}(\Gamma)$, когда Γ состоит из одного двуместного отношения⁴. Первые результаты в изучении её сложности относятся к 1978 году⁵. С тех пор было получено множество результатов, посвящённых сложности самой CSP, связанных с ней массовых задач и различным методом, используемым для анализа сложности задачи⁶.

Вопрос определения сложности Hom для всех \mathcal{H} долгое время оставался открытым. В 1990 году он был решен для неориентированных графов: было доказано, что $\text{Hom}(\mathcal{H})$ решается за полиномиальное время, если \mathcal{H} является двудольным или содержит петлю, и является NP-полной иначе⁷. Для ориентированных графов же задача была решена лишь в

⁴*Bulatov A. A.* A Dichotomy Theorem for Nonuniform CSPs // 2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). 2017. С. 319–330 ; *Hell P., Nešetřil J.* On the complexity of H-coloring // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1990. Т. 48, № 1. С. 92–110.

⁵*Schaefer T. J.* The complexity of satisfiability problems // Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. San Diego, California, USA : Association for Computing Machinery, 1978. С. 216–226.

⁶*Feder T., Vardi M. Y.* Monotone monadic SNP and constraint satisfaction // Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. San Diego, California, USA : Association for Computing Machinery, 1993. С. 612–622 ; *Barto L., Krokhin A., Willard R.* Polymorphisms, and how to use them. 2017 ; EPrint Processing Status: Full text deposited in DRO ; *Kolaitis P. G., Vardi M. Y.* A Game-Theoretic Approach to Constraint Satisfaction // Proceedings of the Seventeenth National Conference on Artificial Intelligence and Twelfth Conference on Innovative Applications of Artificial Intelligence. AAAI Press, 2000. P. 175–181 ; *Kun G., Szegedy M.* A new line of attack on the dichotomy conjecture // European Journal of Combinatorics. 2016. Vol. 52. P. 338–367 ; Special Issue: Recent Advances in Graphs and Analysis ; *A. B. Тарасов.* Булевы биконктивные функции, графы 2-КНФ и их порядковые функции. Оценки веса биконктивной функции с заданным числом слоев // Матем. вопр. криптогр. 2021. Т. 12, № 1. С. 83–95 ; Algebraic Approach to Promise Constraint Satisfaction / L. Barto [et al.] // J. ACM. New York, NY, USA, 2021. July. Vol. 68, no. 4 ; *Dechter R.* Constraint processing. Morgan Kaufmann Publishers, 2003 ; *Barto L., Kozik M., Niven T.* The CSP Dichotomy Holds for Digraphs with No Sources and No Sinks (A Positive Answer to a Conjecture of Bang-Jensen and Hell) // SIAM Journal on Computing. 2009. Vol. 38, no. 5. P. 1782–1802 ; *Barto L.* Algebraic Theory of Promise Constraint Satisfaction Problems, First Steps. 07/2019. P. 3–17 ; *В. А. Тайманов.* О базисах замкнутых классов вектор-функций многозначной логики // Дискретная математика. 2016. Т. 28, № 2. С. 127–132 ; *В. А. Тайманов.* О некоторых свойствах вектор-функций алгебры логики // Дискретная математика. 2019. Т. 30, № 1. С. 114–128 ; *В. А. Тайманов.* О базисах замкнутых классов вектор-функций алгебры логики // Дискретная математика. 2019. Т. 31, № 3. С. 78–92 ; *В. А. Тайманов.* О базисах всех замкнутых классов вектор-функций алгебры логики // Дискретная математика. 2022. Т. 34, № 2. С. 106–119.

⁷*Hell P., Nešetřil J.* On the complexity of H-coloring // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1990. Т. 48, № 1. С. 92–110.

2017 году, когда была полностью классифицирована сложность CSP. Эта классификация формулируется в терминах *полиморфизмов* — функций, которые сохраняют отношения. Она формулируется следующим образом: если у набора отношений Γ на множестве A существует полиморфизм p такой, что $p(y, x, \dots, x) = p(x, y, x, \dots, x) = \dots = p(x, x, \dots, x, y)$ для всех $x, y \in A$, то CSP(Γ) решается за полиномиальное время. Иначе эта задача является NP-полной⁸.

Одним из самых естественных продолжений задачи Hom является *задача о существовании сюръективного гомоморфизма* Surj-Hom(\mathcal{H}). В ней по входному графу \mathcal{G} нужно определить, существует ли гомоморфизм из \mathcal{G} на \mathcal{H} , сюръективный по вершинам. Несложно заметить, что для каждого \mathcal{H} задача CSP(\mathcal{H}) сводится к SCSP(\mathcal{H}), поскольку к любому входному графу можно добавить произвольное количество вершин без рёбер, которые обеспечат сюръективность гомоморфизма. Отсюда, если CSP(\mathcal{H}) является NP-полной, то и SCSP(\mathcal{H}) также является NP-полной. Тем не менее, эти задачи имеют различную сложность. Первые результаты в области изучения сложности данной задачи относятся ещё к концу XX века⁹. С тех пор было получено множество результатов о сложности Surj-Hom для различных графов \mathcal{H} ¹⁰. Например, если \mathcal{H} — связный неориентированный граф без циклов, то задача решается за полиномиальное время, если вершины \mathcal{H} с петлями образуют связный подграф, и является NP-полной иначе¹¹. Также определена NP-полнота задачи, когда \mathcal{H} это связный неориентированный граф, содержащий ровно две вершины с петлями, которые не являются смежными¹². Известна сложность задачи, когда каждая вершина \mathcal{H} содержит петлю, а каждое ребро ориентировано ровно в одном направлении. В этом случае задача решается за полиномиальное время, если для

⁸Bulatov A. A. A Dichotomy Theorem for Nonuniform CSPs // 2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). 2017. С. 319–330 ; Zhuk D. A Proof of the CSP Dichotomy Conjecture // J. ACM. New York, NY, USA, 2020. Авг. Т. 67, № 5.

⁹Creignou N., Hebrard J.-J. On generating all solutions of generalized satisfiability problems // RAIRO - Theoretical Informatics and Applications - Informatique Théorique et Applications. 1997. Vol. 31, no. 6. P. 499—511.

¹⁰Finding Vertex-Surjective Graph Homomorphisms / P. A. Golovach [и др.] // Computer Science – Theory and Applications. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. С. 160—171 ; Feder T., Hell P., Huang J. Bi-arc graphs and the complexity of list homomorphisms // Journal of Graph Theory. 2003. Т. 42, № 1. С. 61—80 ; Bodirsky M., Kara J., Martin B. The Complexity of Surjective Homomorphism Problems – a Survey // Computing Research Repository - CORR. 2011. Апр. Т. 160, № 12. С. 1680—1690 ; Focke J., Goldberg L. A., Živný S. The Complexity of Counting Surjective Homomorphisms and Compactions // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 2019. Т. 33, № 2. С. 1006—1043.

¹¹Golovach P. A., Paulusma D., Song J. Computing vertex-surjective homomorphisms to partially reflexive trees // Theoretical Computer Science. 2012. Т. 457. С. 86—100.

¹²Surjective H-colouring : new hardness results. / P. Golovach [и др.] // Computability. 2019. Т. 8, № 1. С. 27—42.

каждой пары рёбер $v \rightarrow w \rightarrow u$ в графе есть ребро $v \rightarrow u$, и является NP-полной иначе¹³.

Для некоторых даже очень простых графов вопрос определения сложности Surj-Ном оставался открытым долгое время. Так, для неориентированного цикла C длины 6 без петель задача была впервые сформулирована в 1999 году¹⁴, но NP-полнота $\text{Surj-Nom}(C)$ была определена лишь в 2017 году¹⁵. Также большое внимание получила задача о существовании сюръективного гомоморфизма на неориентированный цикл длины 4 с петлями, также известная как *disconnected cut*¹⁶. Неоднократно предпринимались попытки классификации её сложности ввиду практического значения и тесной связи со многими массовыми задачами на графах¹⁷. Спустя более пяти лет после того, как эта задача была сформулирована, в 2011 году Мартином и Полусмой была наконец определена NP-полнота этой задачи¹⁸.

Одним из самых простых классов графов, для которых сложность задачи не определена, являются неориентированные циклы длины n . Задача является NP-полной для циклов нечётной длины без петель (поскольку для них Ном является NP-полной). Также задача является NP-полной для цикла длины 6 без петель, цикла длины 4 с петлями и решается за полиномиальное время для цикла длины 4 без петель. Известна сложность задачи,

¹³Larose B., Martin B., Paulusma D. Surjective H-Colouring over Reflexive Digraphs // ACM Trans. Comput. Theory. New York, NY, USA, 2018. Ноябрь. Т. 11, № 1.

¹⁴Vikas N. Computational complexity of compaction to cycles // Proceedings of the Tenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Baltimore, Maryland, USA : Society for Industrial, Applied Mathematics, 1999. С. 977–978.

¹⁵Vikas N. Computational Complexity of Graph Partition under Vertex-Compaction to an Irreflexive Hexagon // 42nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2017). Т. 83. Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2017. 69:1–69:14.

¹⁶Bodirsky M., Kara J., Martin B. The Complexity of Surjective Homomorphism Problems – a Survey // Computing Research Repository - CORR. 2011. Апрель. Т. 160, № 12. С. 1680–1690.

¹⁷Finding H-partitions efficiently / Dantas, Simone [и др.] // RAIRO-Theor. Inf. Appl. 2005. Т. 39, № 1. С. 133–144 ; Covering graphs with few complete bipartite subgraphs / H. Fleischner [и др.] // Theoretical Computer Science. 2009. Т. 410, № 21. С. 2045–2053 ; Parameterizing cut sets in a graph by the number of their components / T. Ito [и др.] // Theoretical Computer Science. 2011. Т. 412, № 45. С. 6340–6350 ; On disconnected cuts and separators / T. Ito [и др.] // Discrete Applied Mathematics. 2011. Т. 159, № 13. С. 1345–1351 ; 2K2 vertex-set partition into nonempty parts / K. Cook [и др.] // Discrete Mathematics. 2010. Т. 310, № 6. С. 1259–1264 ; Dantas S., Maffray F., Silva A. 2K2-partition of some classes of graphs // Discrete Applied Mathematics. 2012. Т. 160, № 18. С. 2662–2668 ; V Latin American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium – Gramado, Brazil, 2009.

¹⁸Martin B., Paulusma D. The Computational Complexity of Disconnected Cut and 2K2-Partition // Principles and Practice of Constraint Programming – CP 2011. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011. P. 561–575 ; Martin B., Paulusma D. The computational complexity of disconnected cut and 2K2-partition // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 2015. Т. 111. С. 17–37.

если цикл содержит ровно две петли у несмежных вершин. В остальных случаях сложность задачи неизвестна.

В диссертационной работе мы будем рассматривать графы, которые получаются из неориентированных циклов путём произвольной ориентации некоторых рёбер. Для удобства будем называть их просто *циклами*. Для циклов с ориентированными рёбрами сложность задачи известна только при $n = 3$ или когда каждое ребро цикла ориентировано ровно в одну сторону, а каждая вершина содержит петлю.

В *сюрьективной задаче удовлетворения ограничениям*, которая обозначается как SCSP, на вход подаётся набор ограничений из фиксированного множества отношений Γ на одном множестве A . Однако, в отличие от CSP, в SCSP требуется определить, существует ли сюрьективная подстановка значений неизвестных, которая удовлетворяет всем ограничениям. Задача Surj-Ном является частным случаем задачи SCSP(Γ) в случае, когда Γ состоит из единственного двуместного отношения¹⁹. Эта задача лежит в NP и существует общепринятая гипотеза, согласно которой эта задача всегда решается за полиномиальное время либо является NP-полной²⁰. В связи с этим представляет большой интерес вопрос определения сложности SCSP(Γ) для всех различных Γ .

Результатов по сложности этой задачи для различных Γ на данный момент существует совсем немного. Несложно заметить, что CSP(Γ) сводится к SCSP(Γ) добавлением новых неограниченных переменных, которые обеспечивают сюрьективность. Также, если Γ определено на множестве A , то существует сведение по Тьюрингу SCSP(Γ) к CSP($\Gamma \cup \{x = a \mid a \in A\}$). В связи с этим, было выдвинуто предположение, что для любого Γ задачи SCSP(Γ) и CSP($\Gamma \cup \{x = a \mid a \in A\}$) имеют одну сложность. Однако, в 2021 году было показано, что это предположение неверно. Известно, что если все полиморфизмы Γ существенно зависят не более, чем от одной переменной, то SCSP(Γ) является NP-полной²¹. Тем не менее, сложность SCSP(Γ) нельзя определить с помощью полиморфизмов Γ .

Диссертационная работа посвящена изучению сложности Surj-Ном для циклов, в которых каждая вершина содержит петлю. Поскольку для циклов с тремя вершинами сложность задачи полностью определена, в рамках диссертации мы ограничиваемся рассмотрением только циклов длины $n > 3$. Исследуются сюрьективные полиморфизмы отношений смежности подобных циклов. Известно, что все они существенно зависят ровно от

¹⁹ *Zhuk D.* No-Rainbow Problem and the Surjective Constraint Satisfaction Problem // 2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS). 2021. С. 1–7.

²⁰ *Bulatov A., Jeavons P., Krokhin A.* Classifying the Complexity of Constraints Using Finite Algebras // SIAM Journal on Computing. 2005. Т. 34, № 3. С. 720–742.

²¹ *Chen H.* An algebraic hardness criterion for surjective constraint satisfaction // Algebra universalis. 2014. Т. 72. С. 393–401.

одной переменной²², но в диссертации мы приведём независимое доказательство этого факта, поскольку наша техника существенно отличается от используемой в приведённой статье.

Крупная часть диссертации посвящена формулировке новых инструментов, позволяющих анализировать SCSP для различных Γ . Данный результат является актуальным, потому что на данный момент способов анализировать SCSP существует совсем немного. В частности, мы получаем новые результаты о связи SCSP(Γ) со структурой полиморфизмов Γ . Полученные инструменты используются для определения сложности Surj-Nom для всех циклов с петлями, кроме двух неориентированных циклов длины 5, 6 и трёх циклов с петлями длины 4, 5, 6, содержащих ровно одно ориентированное ребро.

Целью диссертационной работы является исследование сложности задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на циклы, в которых каждая вершина содержит петлю, исследование связи сложности сюръективной задачи удовлетворения ограничениям из набора Γ со структурой полиморфизмов Γ . Для получения основных результатов необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получение новых свойств, позволяющих анализировать сложность задачи SCSP(Γ) с помощью полиморфизмов Γ , сведения.
2. Описание структуры сюръективных полиморфизмов отношений смежности циклов длины $n > 3$ с петлями.
3. Применение введённых свойств для анализа сложности задачи Surj-Nom в классе неориентированных циклов длины $n > 3$ с петлями.
4. Применение введённых свойств для анализа сложности задачи Surj-Nom в классе циклов длины $n > 3$ с петлями, в которых каждое ребро ориентировано ровно в одну сторону.
5. Применение введённых свойств для анализа сложности задачи Surj-Nom в классе циклов длины $n > 3$ с петлями, в которых часть ребер ориентированы в одну сторону, а часть являются неориентированными.

Научная новизна.

1. Установлена сложность задачи Surj-Nom для всех неориентированных циклов с петлями, содержащих больше шести вершин.
2. Установлена сложность задачи Surj-Nom для всех циклов с петлями, содержащих неориентированные рёбра, больше одного ориентированного ребра и больше трёх вершин.
3. Установлена сложность задачи Surj-Nom для всех циклов с петлями, содержащих неориентированные рёбра, одно ориентированное ребро и больше шести вершин.

²²Larivière I., Larose B., Pullas D. Surjective polymorphisms of directed reflexive cycles // Algebra universalis. 2023. Ноябрь. Т. 85.

4. Предложено новое свойство, связывающее сложность задачи SCSP для множества отношений Γ со структурой полиморфизмов Γ .

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы теории графов, теории алгоритмов, алгебры, дискретной математики.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для всех неориентированных циклов \mathcal{C} с петлями, содержащих больше трёх вершин, кроме циклов длины 5, 6 (см. Рис. 1, г, д) задача $\text{Surj-Hom}(\mathcal{C})$ является NP-полной.
2. Для всех ориентированных циклов \mathcal{C} с петлями, содержащих больше трёх вершин, кроме трёх циклов длины 4, 5, 6, содержащих ровно одно ориентированное ребро (см. Рис. 1, а, б, в), задача $\text{Surj-Hom}(\mathcal{C})$ является NP-полной.
3. Пусть Γ — конечное множество отношений, определённых на множестве A , обладающее следующими свойствами:
 - а) все сюръективные полиморфизмы Γ существенно зависят ровно от одной переменной,
 - б) для любого $k \geq 1$ и любого набора p_1, \dots, p_k трёхместных полиморфизмов Γ , в котором функции совпадают на диагонали и принимают в совокупности все значения из A , хотя бы один из полиморфизмов в наборе будет сюръективным.

Тогда $\text{SCSP}(\Gamma)$ является NP-полной.

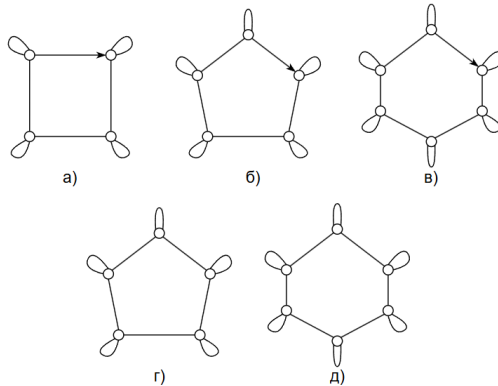


Рисунок 1 — Циклы с петлями, для которых не определена сложность задачи Surj-Hom .

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в области теории сложности алгоритмов и теории графов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами. Результаты автора докладывались на научных семинарах и международных конференциях, опубликованы в рецензируемых научных журналах и находятся в строгом соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Результаты работы были доложены на следующих международных и всероссийских конференциях:

1. XXXI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2024», Москва, Россия, с 12 по 26 апреля.
2. XXXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2025», Москва, Россия, с 11 по 25 апреля.
3. XX Международная научная конференция «Проблемы теоретической кибернетики», Москва, Россия, с 5 по 8 декабря 2024 г.

Результаты работы докладывались и обсуждались на заседаниях семинара «Теория автоматов» кафедры Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ под руководством профессора Э.Э.Гасанова, 29 марта 2023 г., 15 февраля 2026 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 3 работах общим объемом 4,4375 п.л. в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 118 страниц, включая 33 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 49 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** представлена краткая история вопроса, обосновывается актуальность темы, приводится описание целей и задач, описываются основные результаты и положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена основным определениям и формулировкам, которые используются на протяжении всей работы. В разделах 1.1 и 1.2 вводятся центральные понятия из области теории графов. *Граф* $\mathcal{H} = (V, E)$ — это пара из множества V и множества $E \subseteq V \times V$ упорядоченных пар из V . Множество V называется *множеством вершин*, а множество E — *множеством рёбер* \mathcal{H} . Двуместное отношение, задаваемое

E , называется также *отношением смежности* \mathcal{H} . Элементы множества E называются *рёбрами* и обозначаются как $u \rightarrow v$ или $u \leftarrow v$ для $(u, v) \in E$ и как $u \leftrightarrow v$, если $(u, v) \in E$ и $(v, u) \in E$. Также вводится понятие *цикла длины* $n \geq 3$ — графа с множеством вершин $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, в котором для каждой вершины $v \in Z_n$ есть ребро $ve(v+1 \pmod{n})$, $e \in \{\leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Также определяется ряд других терминов из области теории графов. Для графа $\mathcal{H} = (V, E)$ ребро $(u, v) \in E$ называется *ориентированным*, если $(v, u) \notin E$. Иначе ребро называется *неориентированным*. *Петлёй* называется ребро вида (v, v) . Граф называется *рефлексивным*, если каждая его вершина содержит петлю. Граф называется *неориентированным*, если каждое его ребро является неориентированным, *строго ориентированным*, если каждое его ребро ориентировано ровно в одну сторону, и *смешанно-ориентированным* иначе. *Гомоморфизм графа* $\mathcal{G} = (V', E')$ на граф $\mathcal{H} = (V, E)$ это отображение $f : V' \rightarrow V$ такое, что для каждого ребра $(u, v) \in E'$ верно $(f(u), f(v)) \in E$. Гомоморфизм называется *сюръективным*, если f сюръективно.

После этого в разделе 1.3 вводятся ключевые массовые задачи, которым посвящена диссертационная работа, вместе с некоторыми вспомогательными понятиями. В *задаче о существовании сюръективного гомоморфизма* $\text{Surj-Hom}(\mathcal{H})$ по данному графу \mathcal{G} требуется определить, существует ли сюръективный гомоморфизм из \mathcal{G} на \mathcal{H} . *Конъюнктивная формула над множеством отношений* Γ , *определённых на одном множестве* A — это формула, в которую входят отношения из Γ , свободные переменные из X и конъюнкции, где X — множество переменных. Конъюнктивная формула над Γ имеет следующий вид:

$$\mathcal{I} : R_1(x_{i_{1,1}}, \dots, x_{i_{1,n_1}}) \wedge \dots \wedge R_s(x_{i_{s,1}}, \dots, x_{i_{s,n_s}}),$$

где R_1, \dots, R_s — отношения из Γ и $i_{1,1}, \dots, i_{1,n_1}, \dots, i_{s,1}, \dots, i_{s,n_s} \in \{1, \dots, n\}$. *Решение конъюнктивной формулы* \mathcal{I} — это подстановка $f : X \rightarrow A$ в переменные этой формулы, которая выполняет её. Решение называется *сюръективным*, если $f(X) = A$.

В *сюръективной задаче удовлетворения ограничениям* для множества отношений Γ на вход подаются набор переменных X и конъюнктивная формула \mathcal{I} над Γ и требуется определить, существует ли у неё сюръективное решение. Формула \mathcal{I} вместе с набором переменных называется *экземпляром* задачи $\text{SCSP}(\Gamma)$, а сюръективное решение f этой формулы — *решением* экземпляра.

Также вводится понятие *полиморфизмов отношений*. Пусть A — конечное множество, Γ — конечное множество отношений на A . n -местная функция $p : A^n \rightarrow A$ является *полиморфизмом* Γ , если для каждого m -местного $R \in \Gamma$ и любых n наборов $(a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, (a_1^m, \dots, a_n^m)$ из R верно, что набор $(p(a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, p(a_1^m, \dots, a_n^m))$ также из R . Полиморфизм называется *существенно унарным*, если он существенно зависит не

более, чем от одной переменной. Множество полиморфизмов Γ обозначается как $\text{Pol}(\Gamma)$, а множество сюръективных полиморфизмов — как $\text{SPol}(\Gamma)$. Также в этом разделе показывается, что для графа $\mathcal{H} = (V, E)$ задача $\text{Surj-Hom}(\mathcal{H})$ эквивалентна $\text{SCSP}(E)$.

После этого в разделе 1.4 рассматриваются *минорные условия* — множества тождеств, в которых с каждой стороны находится функциональный символ и переменные.

В разделе 1.5 определяются многоосновные отношения. Пусть A_1, \dots, A_m — множества. *n -местное m -основное отношение* (которое также называется *n -местным многоосновным отношением*) — это подмножество $R \subseteq A_{\text{sr}^R(1)} \times \dots \times A_{\text{sr}^R(n)}$, дополненное функцией $\text{sr}^R : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Функция sr^R называется *функцией сорта* R , а значение $\text{sr}^R(i), i \in \{1, \dots, n\}$ — *сортом i -ой переменной* R . В отличие от обычных отношений, каждая переменная многоосновного отношения, заданного на множествах A_1, \dots, A_m , принимает значения ровно из одного из этих множеств. Формулируется понятие полиморфизма многоосновного отношения и аналог задачи SCSP для многоосновных отношений. Пусть A_1, \dots, A_m — множества, $k \geq 1$. Набор $\bar{f} = (f^1, \dots, f^m)$, где f^1, \dots, f^m — k -местные функции вида $f^i : A_i^k \rightarrow A_i$, называется *k -местной вектор-функцией, определённой на A_1, \dots, A_m* .

- \bar{f} является *существенно-унарной*, если существует $i \in \{1, \dots, k\}$ такое, что каждая функция из \bar{f} константна или существенно зависит только от своей i -ой переменной.
- \bar{f} *сюръективна*, если каждая функция из этого набора сюръективна.

Пусть R — n -местное m -основное отношение, определённое на множествах A_1, \dots, A_m . k -местная вектор-функция $\bar{p} = (p^1, \dots, p^m)$, где $p^i : A_i^k \rightarrow A_i$, называется *порморфизмом* отношения R , если для любых k наборов $(a_1^1, \dots, a_1^n), \dots, (a_k^1, \dots, a_k^n)$ из R верно:

$$(p^{\text{sr}^R(1)}(a_1^1, \dots, a_k^1), \dots, p^{\text{sr}^R(n)}(a_1^n, \dots, a_k^n)) \in R.$$

Во **второй главе** вводятся два ключевых свойства, которые используются для определения сложности задачи SCSP в диссертационной работе. Раздел 2.1. посвящен свойству сюръективного интерпретирования. Пусть A, B — множества, $|A| > 1$ $|B| > 1$. Пусть R — n -местное отношение на множестве A , S — n -местное отношение на множестве B . Будем говорить, что R *сюръективно интерпретирует* S , если существуют отображения $\varphi : A \rightarrow B$, $\psi : B \rightarrow A$ и $(n+k)$ -местное отношение Q , задающееся конъюнктивной формулой над R , для которых выполняются следующие условия:

1. $\forall b \in B : \varphi(\psi(b)) = b$.
2. $\forall (b_1, \dots, b_n) \in S \exists c_1, \dots, c_k \in A$:

$$(\psi(b_1), \dots, \psi(b_n), c_1, \dots, c_k) \in Q$$

- и $\{\psi(b_1), \dots, \psi(b_n), c_1, \dots, c_k\} = \varphi^{-1}(\{b_1, \dots, b_n\})$.
 3. $\forall (a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k) \in Q$:

$$(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \in S,$$

$$\text{и } \varphi(\{a_1, \dots, a_n\}) = \varphi(\{a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k\}).$$

Иными словами, первые n переменных отношения Q моделируют отношение S . Ключевой результат раздела формулируется в следующей теореме:

Теорема (2.1). Пусть R — n -местное отношение на множестве A . Пусть S — n -местное отношение на множестве B такое, что R сюръективно интерпретирует S . Тогда $\text{SCSP}(S)$ полиномиально сводится к $\text{SCSP}(R)$.

Раздел 2.2 посвящён свойству наследования сюръективности. Пусть Γ — конечное множество отношений, определённых на множестве A , $|A| > 1$. Пусть p_1, \dots, p_k — набор трёхместных полиморфизмов Γ .

- Набор p_1, \dots, p_k называется *совместно сюръективным*, если для каждого $a \in A$ существует $i \in \{1, \dots, k\}$, $b_1, b_2, b_3 \in A$ такие, что $p_i(b_1, b_2, b_3) = a$.
- Набор p_1, \dots, p_k называется *диагонально-согласованным*, если для всех $i, j \in \{1, \dots, k\}$ и всех $a \in A$ верно $p_i(a, a, a) = p_j(a, a, a)$.

Полиморфизмы Γ наследуют сюръективность, если в каждом совместно сюръективном диагонально согласованном наборе его трёхместных полиморфизмов найдётся сюръективная функция.

Пусть p_1, \dots, p_k — набор трёхместных полиморфизмов Γ . p_1, \dots, p_k *имитирует проекции*, если для каждого:

- n -местного отношения $R \in \Gamma$,
- отображения $h : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ и
- набора векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in A^3$ такого, что для всех $j_1, \dots, j_k \in \{1, 2, 3\}$ верно $R(a_1^{j_{h(1)}}, a_2^{j_{h(2)}}, \dots, a_n^{j_{h(n)}})$, выполняется

$$R(p_{h(1)}(\bar{a}_1), p_{h(2)}(\bar{a}_2), \dots, p_{h(n)}(\bar{a}_n)). \quad (1)$$

Полиморфизмы Γ наследуют сюръективность в слабой форме, если в каждом совместно сюръективном диагонально согласованном наборе его трёхместных полиморфизмов, который имитирует проекции, найдётся сюръективная функция. Верно, что если полиморфизмы Γ наследуют сюръективность, то они наследуют сюръективность в слабой форме.

Свойство наследования сюръективности используется для определения сложности задачи SCSP благодаря следующей теореме:

Теорема (2.4). Пусть Γ — конечное множество отношений, определённое на множестве A , $|A| > 1$. Пусть выполняются следующие условия:

- Все трёхместные сюръективные полиморфизмы Γ являются существенно унарными.
- Полиморфизмы Γ наследуют сюръективность в слабой форме.

Тогда задача SCSP(Γ) является NP-полной.

Идея доказательства теоремы 2.4 состоит в следующем: рассматривается экземпляр \mathcal{I} NP-полной задачи CSP(1IN3). По нему строится минорное условие $\psi(\mathcal{I})$ такое, что \mathcal{I} обладает решением тогда и только тогда, когда в $\psi(\mathcal{I})$ можно подставить проекции на произвольном множестве так, чтобы каждое тождество выполнялось при любой подстановке переменных. После этого для некоторого множества отношений Γ по $\psi(\mathcal{I})$ строится экземпляр \mathcal{J} задачи SCSP(Γ) и показывается, что если полиморфизмы Γ наследуют сюръективность в слабой форме, то \mathcal{I} имеет решение тогда и только тогда, когда \mathcal{J} обладает сюръективным решением, что завершает сведение CSP(1IN3) к SCSP(Γ) и показывает NP-полноту этой задачи.

Также в разделе 2.2.3 формулируется аналог свойства наследования сюръективности для многоосновных отношений. Пусть Γ — конечное множество многоосновных отношений, определённое на множествах A_1, \dots, A_m , $|A_i| > 1$. Пусть $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k$ — набор трёхместных полиморфизмов Γ .

- Набор p_1, \dots, p_k называется *совместно-сюръективным*, если для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ и для каждого $a \in A_i$ существуют $j \in \{1, \dots, k\}$, $b_1, b_2, b_3 \in A_i$ такие, что $p_j^i(b_1, b_2, b_3) = a$.
- Набор p_1, \dots, p_k называется *диагонально-согласованным*, если для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ и для всех $a \in A_i$, $j, h \in \{1, \dots, k\}$ верно $p_j^i(a, a, a) = p_h^i(a, a, a)$.
- Набор $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k$ *имитирует проекции*, если для каждого:
 - n -местного отношения $R \in \Gamma$,
 - отображения $h : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$,
 - набора векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{a}_i \in A_{\text{sr}^R(i)}^3$, такого, что для всех $j_1, \dots, j_k \in \{1, 2, 3\}$ верно $R(a_1^{j_{h(1)}}, a_2^{j_{h(2)}}, \dots, a_n^{j_{h(n)}})$, выполняется

$$R(p_{h(1)}^{\text{sr}^R(1)}(\bar{a}_1), p_{h(2)}^{\text{sr}^R(2)}(\bar{a}_2), \dots, p_{h(n)}^{\text{sr}^R(n)}(\bar{a}_n)).$$

Полиморфизмы Γ наследуют сюръективность в слабой форме, если в каждом совместно сюръективном диагонально согласованном наборе его трёхместных полиморфизмов, который имитирует проекции, найдётся сюръективная функция.

Теорема (2.5). Пусть Γ — конечное множество многоосновных отношений, определённых на множествах A_1, \dots, A_m , $|A_i| > 1$. Пусть выполняются следующие условия:

- Все сюръективные полиморфизмы Γ являются существенно унарными.
- Полиморфизмы Γ наследуют сюръективность в слабой форме

Тогда задача SCSP(Γ) является NP-полной.

В третьей главе рассматривается структура рефлексивных циклов и их полиморфизмов. Доказывается следующая теорема:

Теорема (3.1). Пусть \mathcal{C} — рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин, p — сюръективный полиморфизм \mathcal{C} . Тогда p существенно-унарен.

Заметим, что этот результат уже доказан Ларивьер, Лароз и Пулласом в 2023 году. Тем не менее, в третьей главе мы приводим оригинальное доказательство этого факта, которое опирается в первую очередь на топологические свойства графов. Для этого в разделе 3.1 рассматриваются неориентированные рефлексивные циклы, в разделе 3.2 — строго ориентированные рефлексивные циклы и в разделе 3.3 — смешанно-ориентированные рефлексивные циклы. Для каждого из рассматриваемых типов циклов описывается структура их сюръективных полиморфизмов (Леммы 3.9, 3.12, 3.27), приводятся общие свойства этих графов и их полиморфизмов для использования в четвёртой главе.

Четвёртая глава посвящена анализу сложности задачи Surj-Hom для рефлексивных циклов. Доказывается ключевая теорема диссертационной работы:

Теорема (4.1). Пусть \mathcal{C} — рефлексивный цикл, не изоморфный ни одному циклу, изображённому на Рис. 1. Если \mathcal{C} изоморфен циклу, изображённому на Рис. 2, то Surj-Hom(\mathcal{C}) лежит в P. Иначе Surj-Hom(\mathcal{C}) является NP-полной.

Для доказательства теоремы 4.1 используются результаты, приведённые во второй и третьей главах. Так, в разделе 4.1 с помощью свойства наследования сюръективности определяется сложность задачи для всех неориентированных циклов длины $n > 6$.

Раздел 4.2 посвящён строго ориентированным циклам. Несмотря на то, что сложность задачи для подобных циклов уже определена, ввиду того, что предложенный автором диссертации подход существенно отличается от описанного Лароз, Маргином и Полусмой, в данном разделе приводится независимое доказательство NP-полноты для всех строго ориентированных рефлексивных циклов длины $n > 3$ кроме единственного цикла длины 6. Такие графы рассматриваются относительно своих *особых точек* — вершин, в которые не входят рёбра или из которых не выходит рёбер, кроме петель. В разделе 4.2.1 и 4.2.2 через свойство наследования сюръективности определяется сложность задачи для циклов, содержащих

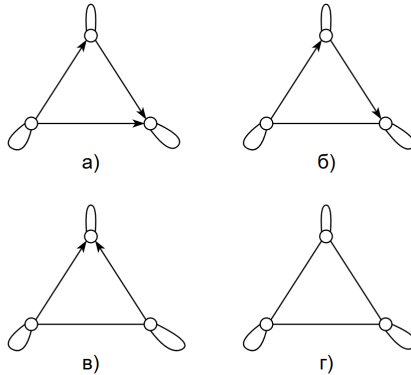


Рисунок 2 — Циклы, для которых Surj-Hom решается за полиномиальное время.

более шести или менее четырёх особых точек. В разделе 4.2.3 рассматриваются строго ориентированные рефлексивные циклы C_4 с четырьмя особыми точками. Они не обладают свойством наследования сюръективности в слабой форме, поэтому теорема 2.4 к ним не применима. Для них определяется 2-основное 4-местное отношение $R(x_1, x_2, y_1, y_2)$:

$$R_4(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 = x_2) \vee (y_1 = y_2),$$

где x_1, x_2 определены на множестве $\{0, 0'\}$, а y_1, y_2 на множестве $\{1, 1'\}$. Показывается, что $\text{SCSP}(R_4)$ сводится к $\text{Surj-Hom}(C_4)$. После этого показывается, что все сюръективные полиморфизмы R_4 являются существенно унарными и полиморфизмы R_4 наследуют сюръективность в слабой форме, после чего с помощью теоремы 2.5 доказывается NP-полнота $\text{Surj-Hom}(C_4)$. В разделе 4.2.3 свойство наследования сюръективности используется, чтобы определить сложность задачи для строго ориентированных циклов, содержащих шесть особых точек и больше шести вершин.

В разделе 4.3 исследуется сложность задачи для смешанно-ориентированных рефлексивных циклов. В разделе 4.3.1 с помощью сюръективного интерпретирования показывается, что если ориентированные рёбра цикла C образуют строго ориентированный рефлексивный цикл C^s , для которого $\text{Surj-Hom}(C^s)$ является NP-полной, то $\text{Surj-Hom}(C)$ является NP-полной. После этого в разделе 4.3.2 рассматриваются остальные смешанно-ориентированные циклы.

Наконец, раздел 4.4 посвящён циклам, изображённым на Рис. 1. Для них доказывается, что полиморфизмы их отношения их смежности не наследуют сюръективность в слабой форме, что показывает, что Теорема 2.4 к ним неприменима.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Для неориентированных рефлексивных циклов длины $n > 6$ была доказана NP-полнота задачи $\text{Surj-Hom}(C)$.
2. Для строго ориентированных рефлексивных циклов длины $n > 3$, кроме единственного цикла длины 6, было предложено оригинальное доказательство NP-полноты задачи $\text{Surj-Hom}(C)$.
3. Для смешанно-ориентированных рефлексивных циклов длины $n > 3$, кроме трёх смешанно-ориентированных циклов длины $n \in \{4, 5, 6\}$, содержащих ровно одно ориентированное ребро, была доказана NP-полнота задачи $\text{Surj-Hom}(C)$.
4. Было предложено оригинальное доказательство того, что сюръективные полиморфизмы отношения смежности рефлексивных циклов, содержащих больше трёх вершин, существенно зависят ровно от одной переменной.
5. Были предложены свойство наследования сюръективности, которое для множества отношений Γ позволяет определять сложность $\text{SCSP}(\Gamma)$ с помощью анализа полиморфизмов Γ и свойство сюръективного интерпретирования, которое позволяет определять сложность SCSP с помощью сведения.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н. Дмитрию Николаевичу Жуку за постановку задачи, постоянное внимание и поддержку в работе. Автор также выражает благодарность д.ф.-м.н. профессору Эльяру Эльдаровичу Гасанову, к.ф.-м.н. Алексею Владимировичу Галатенко за внимание и поддержку, а также коллективу кафедры Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова за тёплую и плодотворную научную атмосферу.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1. Корчагин Н.П. Сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на ориентированные рефлексивные циклы // Дискретная математика. – 2025. – Т.37, №4. – С. 54-88.

Индексируется в RSCI, входит в ядро РИНЦ.

EDN: TLDGPO

Импакт-фактор 0,385 (РИНЦ), Объем 2.125 п.л.

2. Корчагин Н.П. Сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на рефлексивные циклы // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. – 2023. – Т.27, №4. – С. 40-61.

Индексируется в РИНЦ.

EDN:LAWHQI.

Импакт фактор 0,0023 (РИНЦ). Объем 1.3125 п.л.

3. Корчагин Н.П. Сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на смешанно-ориентированные рефлексивные циклы // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. – 2025. – Т.29, №4. – С. 102-134.

Индексируется в РИНЦ.

EDN:WPGIFM.

Импакт фактор 0,0023 (РИНЦ). Объем 2 п.л.

Корчагин Никита Павлович

Сложность проблемы сюръективного гомоморфизма для циклов

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ____ . ____ . ____ . Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____