

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Овсянников Евгений Алексеевич

**Разрушение решений нелинейных уравнений теории
волн в плазме**

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2026

Диссертация подготовлена на кафедре математики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Корпусов Максим Олегович**, доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Коньков Андрей Александрович**, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет, кафедра дифференциальных уравнений, профессор

Галахов Евгений Игоревич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», факультет физико-математических и естественных наук, Математический институт имени С.М. Никольского, доцент

Гарганц Лидия Владимировна, кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», научно-учебный комплекс «Фундаментальные науки», кафедра прикладной математики, доцент

Защита диссертации состоится «...» 2026 г. в ... часов ... минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.8 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория ...

E-mail: ast.diffiety@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:

<https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.8/> .

Автореферат разослан «...» ... 2026 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.011.8,

доктор физико-математических наук,

профессор

Г.А. Чечкин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к области нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и является исследованием математических проблем электродинамики. Работа посвящена аналитическому исследованию разрушений решений задач Коши для уравнений ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, а также аналитическому и численному исследованиям разрушений решений начально-краевой задачи для уравнения сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме. Разрушение решения с физической точки зрения в рассматриваемых задачах может означать взрыв плазмы, или опрокидывание ионно-звуковых или дрейфовых волн в плазме, или эффект «black hole», при котором потенциал электрического поля ионно-звуковых или дрейфовых волн в плазме в момент разрушения ограничен, но имеет бесконечную скорость. С математической точки зрения разрушение решения понимается в том смысле, что решение задачи принадлежит некоторому функциональному классу, зависящему от времени, и в момент разрушения решение перестаёт принадлежать этому классу. Как правило, это проявляется в нарушении гладкости решения.

В последние десятилетия активно проводятся исследования в области магнитного удержания плазмы в установках термоядерного синтеза (токамаках) (см., например, G. McCracken, P. Stott¹). Для конструирования таких установок необходимо подробное изучение физических свойств самой плазмы, в том числе распространяющихся в ней разных типов волн (см. А.И. Ахиезер²). Объектом исследования в диссертации являются ионно-звуковые и дрейфовые волны в плазме. Ионно-звуковые волны — это продольные квазиэлектростатические волны в плазме, связанные с колебанием ионов. Они возникают в неравновесной плазме, в которой температура электронов T_e значительно выше, чем температура ионов T_i ($T_i \sim 10^2$ К, $T_e \sim 10^4$ К). Дрейфовые волны возникают в той же неравновесной плазме, но помещённой во

¹McCracken G., Stott P. Fusion: The Energy of the Universe. — Academic Press, 2012. — P. 248.

²Ахиезер А.И. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974. — С. 720.

внешнее магнитное поле. Они вызваны градиентом давления в намагниченной плазме, распространяются поперёк градиента давления и перпендикулярно внешнему магнитному полю.

В диссертации проводится исследование разрушений решений задач для нижеперечисленных уравнений ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, являющихся нелинейными уравнениями типа Соболева:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial |D_x u|^2(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

причём

$$\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 > 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

В случае $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 > 0$ мы сталкиваемся с уравнениями из теории ионно-звуковых волн, а когда $\omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 > 0$, мы имеем уравнения из теории дрейфовых волн в плазме. В обоих случаях функция u прямо пропорциональна потенциалу φ электрического поля ионно-звуковых или дрейфовых волн в плазме.

Изучение новых задач для уравнений типа С.Л. Соболева является интенсивно развивающимся направлением современной математической физики. В диссертационной работе доказывается, что с точки зрения математики происходит разрушение решений рассматриваемых задач, причём с точки зрения физики подобные «разрушения» означают разные физические процессы. В частности, удалось обнаружить взрыв плазмы высокой плотности. Также обнаружен эффект опрокидывания ионно-звуковых/дрейфовых волн в плазме. Кроме того, обнаружен эффект «black hole» для потенциала, при котором потенциал электрического поля ионно-звуковых волн в плазме является огра-

ниченным, имея при этом бесконечную скорость.

В 1978 г. в работе японских математиков N. Yajima, M. Oikawa, J. Satsuma³ было предложено уравнение (2) в случае ионно-звуковых волн. Оно относится к уравнениям типа Ядзимы–Ойкавы–Сацумы, описывающим слабо нелинейные ионно-звуковые волны. Для уравнения (2) в случае ионно-звуковых волн в работах N. Yajima, M. Oikawa, J. Satsuma, F. Kako⁴ были изучены автомодельные солитонные решения. В частности, в указанных работах использовались аналитический и численный подходы для исследования взаимодействия солитонов (см. также работу E. Infeld, G. Rowlands⁵).

В дальнейшем в работах С.А. Габова, Б.Б. Оразова, А.Г. Свешникова^{6,7,8} было рассмотрено линейное уравнение ионно-звуковых волн в плазме

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u - u) + \Delta u = 0.$$

В этих работах (см. также работу Ю.Д. Плетнера⁹) развивалась теория потенциала для указанного выше линейного уравнения для 1 + 1-мерных и 3 + 1-мерных задач (в том числе и в сферически-симметричном случае). Уравнения (1) – (3) относятся к соболевскому типу, поэтому уточним, что впервые теория потенциала для уравнений такого типа рассматривалась в статье Б.В. Капитонова¹⁰.

Отметим, что автором в диссертации продолжены исследования, начатые в работах М.О. Корпусова, Д.В. Лукьяненко, А.А. Панина, Г.И. Шляпугина,

³Interaction of ion-acoustic solitons in three-dimensional space // J. Phys. Soc. Japan. – 1978. – Vol. 44., no. 5. – P. 1711–1714.

⁴Interaction of ion-acoustic solitons in two-dimensional space // J. Phys. Soc. Japan. – 1980. – Vol. 49., no. 5. – P. 2063–2071.

⁵Infeld E., Rowlands G. Nonlinear waves, solitons and chaos. Second edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

⁶Габов С.А., Оразов Б.Б. Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - u) + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задачах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26., №1. – С. 92–102.

⁷Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. – М.: Наука, 1990. – С. 344.

⁸Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. – М.: Физматлит, 1998. – С. 448.

⁹Плетнер Ю.Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32., №12. – С. 1885–1899.

¹⁰Капитонов Б.В. Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. – 1979. – Т. 109(151), №4(8). – С. 607–628.

Е.В. Юшкова^{11,12,13,14,15,16,17,18}. Особо стоит отметить работу автора диссертации в соавторстве с М.О. Корпусовым¹⁹, в которой, в частности, были изучены задачи Коши для $1+1$ -мерных нелинейных уравнений ионно-звуковых волн в плазме следующего вида:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{xx}(x, t) - u(x, t)) + \omega^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial(|u|^q u)(x, t)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{xx}(x, t) - u(x, t)) + \omega^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $q > 0$, $\omega > 0$.

В этой работе изучались вопросы локальной разрешимости и разрушения классических решений задач Коши за конечное время.

Дрейфовые волны в плазме изучались в работах М.О. Корпусова, Ю.Д. Плетнера, А.Г. Свешникова²⁰, В.Р. Кудашева, А.Б. Михайловского, С.Е. Шарапова, Ф.Ф. Каменца, В.П. Лахина^{21,22}, А.П. Ситенко, П.П. Со-

¹¹Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Shlyapugin G.I. On the blow-up phenomena for a one-dimensional equation of ion-sound waves in a plasma: analytical and numerical investigation // MMAS. – 2018. – Vol. 41., no. 8. – P. 2906–2929.

¹²Korpusov M.O., Lukyanenko D.V. Instantaneous blow-up versus local solvability for one problem of propagation of nonlinear waves in semiconductors // J. Math. Anal. Appl. – 2018. – Vol. 459., no. 1. – P. 159–181.

¹³Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Панин А.А., Юшков Е.В. О разрушении решений одного полного нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме с некоэрцитивными нелинейностями // Изв. РАН. Сер. матем. – 2018. – Т. 82., №2. – С. 43–78.

¹⁴Панин А.А., Шляпугин Г.И. О локальной разрешимости и разрушении решений одномерных уравнений типа Ядзимы–Ойкавы–Сацумы // ТМФ. – 2017. – Т. 193., №2. – С. 179–192.

¹⁵Корпусов М.О., Панин А.А. О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Матем. заметки. – 2017. – Т. 102., №3. – С. 383–395.

¹⁶Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. Blow-up phenomena in the model of a space charge stratification in semiconductors: analytical and numerical analysis // MMAS. – 2017. – Vol. 40., no. 7. – P. 2336–2346.

¹⁷Лукьяненко Д.В., Панин А.А. Разрушение решения уравнения стратификации объемного заряда в полупроводниках: численный анализ при сведении исходного уравнения к дифференциально-алгебраической системе // Выч. мет. программирование. – 2016. – Т. 17., №1. – С. 437–446.

¹⁸Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. Blow-up for one Sobolev problem: theoretical approach and numerical analysis // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – Vol. 442., no. 2. – P. 451–468.

¹⁹Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Взрывная неустойчивость в нелинейных волновых моделях с распределенными параметрами // Изв. РАН. Сер. матем. – 2020. – Т. 84., №3. – С. 15–70.

²⁰Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39., №6. – С. 1006–1022.

²¹Кудашев В.Р., Михайловский А.Б., Шарапов С.Е. К нелинейной теории дрейфовой моды, индуцированной тороидальностью // Физ. плазмы. – 1987. – Т. 13., №4. – С. 417–421.

²²Каменец Ф.Ф., Лахин В.П., Михайловский А.Б. Нелинейные электронные градиентные волны // Физ. плазмы. – 1987. – Т. 13., №4. – С. 412–416.

сенко²³, причём нелинейные задачи для дрейфовых волн в плазме ранее не рассматривались в литературе по математической физике.

Стоит отметить, что при исследовании разрушений нелинейных задач Коши и начально-краевой задачи в диссертации использовались такие методы из теории разрушений, как метод Х.А. Левина (см. Н.А. Levine^{24,25}, М.О. Корпусов, А.Б. Альшин, А.В. Овчинников, А.Г. Свешников, Е.В. Юшков^{26,27,28,29}, метод нелинейной ёмкости С.И. Похожаева (см. С.И. Похожаев, Э. Митидиери³⁰) и метод пробных функций (см. В.А. Галактионов, Э. Митидиери, С.И. Похожаев³¹).

В диссертации автором последовательно развивается теория потенциала для линейной части уравнений (1) — (3). Как уже было отмечено, уравнения (1) — (3) относятся к нелинейным уравнениям соболевского типа. Отметим, что для такого класса уравнений стандартным является подход, при котором проводится полное обращение линейного оператора, содержащегося в уравнении соболевского типа (см., например, Е.И. Кайкина, П.И. Наумкин, И.А. Шишмарев³²). Кроме того, в работах Г.А. Свиридюка, С.А. Загребинной,

²³Ситенко А.П., Сосенко П.П. О коротковолновой конвективной турбулентности и аномальной электронной теплопроводности плазмы // Физ. плазмы. — 1987. — Т. 13., №4. — С. 456–462.

²⁴Levine H.A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Archive Rat. Mech. Anal. — 1973. — Vol. 51. — P. 371–386.

²⁵Levine H.A. Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equation of the form $Pu_{tt} = Au + F(u)$ // Trans. Amer. Math. — 1974. — Vol. 192. — P. 1–21.

²⁶Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. — De Gruyter: Ser. Nonlinear Anal. Appl., 2011.

²⁷Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Sveshnikov A.G., Yushkov E.V. Blow-Up in Nonlinear Equations of Mathematical Physics: Theory and Methods. — De Gruyter: Ser. Nonlinear Anal. Appl., 2018.

²⁸Корпусов М.О. Разрушение решений неклассических нелокальных нелинейных модельных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2019. — Т. 59., №4. — С. 621–648.

²⁹Корпусов М.О. Разрушение и глобальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши для формально гиперболического уравнения с некоэрцитивным источником // Изв. РАН. Сер. матем. — 2020. — Т. 84., №5. — С. 119–150.

³⁰Похожаев С.И., Митидиери Э. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. — 2001. — Т. 234. — С. 3–383.

³¹Galaktionov V.A., Mitidieri E., Pokhozhaev S.I. On global solutions and blow-up for Kuramoto-Sivashinsky-type models, and well-posed Burnett equations // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. — 2009. — Vol. 70., no. 8. — P. 2930–2952.

³²Кайкина Е.И., Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Асимптотическое разложение решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева // Изв. РАН. Сер. матем. — 2013. — Т. 77., №2. — С. 97–108.

А.А. Замышляевой^{33,34,35} были исследованы разнообразные задачи для уравнений соболевского типа с помощью применения полугруппового подхода.

Цели и задачи работы

1. Исследовать задачи Коши для уравнений (1) — (3) и начально-краевую задачу для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме на факт разрушения решений, при этом определить условия, при которых происходят разрушения решений этих задач.

2. Доказать локальную разрешимость рассматриваемых в работе нелинейных задач.

3. Найти достаточные условия разрушений решений указанных задач.

4. В тех задачах, где это возможно, доказать результаты о непродолжаемом решении, а также в частных случаях результаты об отсутствии даже локальных решений.

Положения, выносимые на защиту

1. Локальная разрешимость в классическом смысле задач Коши для уравнений (1) — (3) и начально-краевой задачи для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме.

2. Существование непродолжаемых классических решений задач Коши для уравнений (1) и (2).

3. Оценка снизу для скорости разрушения сильного решения задачи Коши для уравнения (1) и оценка сверху для времени существования этого решения.

4. Оценка сверху для времени существования слабого решения задачи Коши для уравнения (1).

5. Результаты об отсутствии локальных во времени слабых решений задачи Коши для уравнения (3), а также априорные верхние оценки для времени

³³Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. — 1994. — Т. 49., №4. — С. 47–74.

³⁴Загребина С.А. Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L, p) -радиальным оператором // Мат. заметки ЯГУ. — 2012. — Т. 19., №2. — С. 39–48.

³⁵Zamyshlyayeva A.A., Sviridyuk G.A. Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. Мех. Физ. — 2016. — Vol. 8., no. 4. — P. 5–16.

существования этих решений.

6. Априорная оценка сверху для времени существования решения начально-краевой задачи для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме.

7. Пример с точным аналитическим решением начально-краевой задачи для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме, причём это решение разрушается за конечное время.

8. Примеры численных решений начально-краевой задачи для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме, причём разрушение решений этих задач диагностируется численно.

Научная новизна

Автором получены новые результаты, которые заключаются в следующем.

1. Впервые были получены результаты о разрушении решений и верхние оценки для времени существования решений задач Коши для нелинейных уравнений ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, линейная часть которых содержит анизотропию относительно плазменных частот электронов, причём нелинейные задачи для уравнений дрейфовых волн в плазме ранее не изучались в литературе по математической физике.

2. Впервые получен результат о разрушении решения и верхняя оценка для времени существования решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме, в то время как в литературе по математической физике ранее изучались только задачи для линейного уравнения сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме.

3. Автором диссертации развит метод теории разрушений Х.А. Левина для исследования одной из задач Коши, в которой имеется нестандартная для метода Х.А. Левина нелинейность.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Результаты работы могут быть применены в исследовании других задач для уравнений соболевского типа. Практической значимостью работы является применение полученных результатов в физике плазмы. В частности, результаты работы могут быть применены при проведении экспериментов с электронно-ионной неравновесной плазмой и конструировании токамаков для магнитного удержания плазмы.

Методы исследования

В диссертации используются методы функционального анализа и теории разрушений нелинейных уравнений: энергетический метод Х.А. Левина, метод нелинейной ёмкости С.И. Похожаева, метод пробных функций.

Степень достоверности

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в диссертации, обеспечена

- использованием строгих аналитических методов исследования;
- сравнением полученных результатов с полученными ранее при использовании тех же аналитических методов исследования.

Все результаты диссертационной работы получены автором лично, опубликованы в открытой печати и прошли апробацию на научных конференциях и семинарах. Результаты других авторов, упомянутые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались автором на международных, всероссийских конференциях и научных семинарах:

1. IX Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛаПлаз-2023», НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, с 28 по 31 марта 2023 г.

2. X Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛаПлаз-2024», НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, с 26 по 29 марта 2024 г.

3. Научный семинар кафедры высшей математики НИЯУ МИФИ под руководством проф. А.Б. Костина, проф. О.В. Нагорнова, проф. В.Б. Шерстюкова, НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, 1 марта 2024 г., 11 октября 2024 г.

4. Научный семинар по нелинейным задачам уравнений в частных производных и математической физики под руководством проф. А.Е. Шишкова, Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Математический институт имени С.М. Никольского, Москва, Россия, 19 марта 2024 г.

5. Научный семинар кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ под руководством проф. Н.А. Кудряшова, НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, 19 февраля 2025 г., 3 апреля 2025 г.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы изложены в 6 работах, которые опубликованы в центральных рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Структура и объём диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 11 глав, заключения, списка литературы и приложения. Объём работы составляет 221 страницу текста, включая 14 иллюстраций. Список цитируемой литературы содержит 58 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** приводятся основные уравнения (1) – (3), для которых в дальнейшем в диссертации будут поставлены задачи Коши и начально-краевая задача для исследований на факт разрушения их решений, указываются актуальность темы исследования, степень её разработанности, цели и задачи работы, положения, выносимые на защиту, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методы исследования, степень достоверности, информация об апробации работы и публикациях автора по теме диссертации, а также структура и объём диссертации.

В **главе 1** описываются математические модели, на основе которых выводятся уравнения (1) – (3) для дрейфовых (раздел 1.1) и ионно-звуковых (раздел 1.2) волн в плазме.

В **главе 2** описана система обозначений, принятая в диссертации. В частности, описываются функциональные пространства, которые используются в работе. Особо стоит отметить весовые аналоги пространств Гёльдера $C^{k+\alpha}((1+|x|^2)^{\gamma/2}; \mathbb{R}^3)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma \geq 0$, которые задают классы гладких (классических) решений задач Коши 1 – 3. Кроме того, в данной главе даётся определение разрушения.

Определение 2.1. Пусть у нас имеется некоторый функциональный класс $B[0, T]$ при $T > 0$. Предположим, что существует такое $T_0 > 0$, что решение некоторой задачи $u \in B[0, T]$ для любого $T \in (0, T_0)$, а при $T \geq T_0$ имеем $u \notin B[0, T]$. В этой ситуации мы говорим, что решение u разрушается и T_0 называется точкой (временем) разрушения решения u .

Глава 3 посвящена фундаментальному решению $\mathcal{E}(x, t)$ линейного оператора $\mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 u_{x_j x_j}(x, t)$, содержащегося в уравнениях (1) – (3). В разделе 3.1 с помощью преобразования Лапласа приводится вывод фундаментального решения $\mathcal{E}(x, t)$, в разделе 3.2 изучаются его свойства: гладкость, начальные условия, а также выводятся оценки для фундаментального решения в окрестности точки $x = (0, 0, 0)$ и в окрестности бесконечно удалённой точки.

В главе 4 выводятся аналоги второй и третьей формул Грина для линейного оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$. В разделе 4.1 доказывается вторая формула Грина, из которой в разделе 4.2 выводится третья формула Грина в ограниченном цилиндре. В разделе 4.3 доказывается третья формула Грина во всём пространстве. Стоит отметить, что с помощью третьей формулы Грина находится вид оператора, обратного оператору $\mathfrak{M}_{x,t}$. В последующих главах эта методика обращения строго обосновывается через построение теории потенциала и проведение оценок типа Шаудера.

Глава 5 является вспомогательной. В ней доказываются свойства интегралов, которые использовались при выводе третьей формулы Грина во всём пространстве.

В главе 6 рассматриваются объёмный и поверхностный потенциалы с весами и изучаются их свойства: гладкость, начальные условия, а также уравнения, которым удовлетворяют данные потенциалы.

Глава 7 посвящена оценкам типа Шаудера. В разделе 7.1 приводится оценка типа Шаудера, которая следует из третьей формулы Грина. В разделе 7.2 доказываются оценки типа Шаудера для весовых потенциалов с помощью методов исследований, предложенных в работах Д. Гилбарга, М. Трудингера³⁶, М.О. Корпусова, Д.К. Яблочкина³⁷ и Е.М. Ландиса³⁸.

Эти оценки в дальнейшем используются для доказательств локальной разрешимости рассматриваемых в диссертации задач Коши. Доказательством оценок типа Шаудера на основании построенной теории потенциала из главы 6 завершается строгое обоснование методики обращения оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$.

Глава 8 является вспомогательной. В ней подробно исследуется гладкость одного из весовых потенциалов главы 7.

В главах 9 – 11 диссертации получены основные результаты о разрушении решений задач Коши для уравнений (1) – (3) и начально-краевой задачи для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн

³⁶Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – С. 464.

³⁷Корпусов М.О., Яблочкин Д.К. Теория потенциала и оценка Шаудера в гильбертовых пространствах для 3 + 1-мерного уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргера // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2021. – Т. 61., №8. – С. 1289–1314.

³⁸Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М.: Наука, 1971. – С. 288.

в плазме.

Глава 9 посвящена исследованию разрушений решений задач Коши для уравнений (1) – (3). В разделе 9.1 рассматривается **задача Коши 1**:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (9.1)$$

для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (9.2)$$

Определение 9.1. Функция $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3))$ при $\beta_1 \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$, которая удовлетворяет задаче (9.1), (9.2) поточечно, называется классическим решением задачи Коши 1.

Эта задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению на основании методики полного обращения оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$. С учётом свойств потенциалов, оценок типа Шаудера и метода сжимающих отображений доказываются локальная разрешимость интегрального уравнения. Применяя алгоритм продолжения решения этого уравнения (см., например, А.А. Панин³⁹), получается результат о непродолжаемом классическом (гладком) решении интегрального уравнения и, соответственно, задачи Коши 1. Справедливо вложение $C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)) \subset C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ для любого $T \in (0, T_0)$ при $\beta_1 > \frac{3}{2}$. В связи с этим, помимо классического решения, для задачи Коши 1 рассматривается сильное решение.

Определение 9.2. Функция $u \in C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ называется локальным во времени сильным решением задачи Коши 1 для некоторого $T > 0$, если

³⁹Панин А.А. О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97., №6. – С. 884–903.

для любой функции $\psi \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(D_x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, D_x \psi(x, t) \right) + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \psi(x, t) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x_j} - \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t} \psi(x, t) \right] dx dt = 0, \end{aligned}$$

причём $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$, где $u_0, u_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

В классе сильных решений $u \in C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ при $t \in [0, T]$ вводится следующий функционал:

$$\Phi(t) := \frac{1}{2} \|D_x u\|_2^2(t) + \frac{1}{2} \|u\|_2^2(t), \quad \|\cdot\|_2 - \text{стандартная норма в } L^2(\mathbb{R}^3).$$

Определение 9.3. Будем говорить, что функционал $\Phi \in C^{(2)}[0, T]$ удовлетворяет условиям (Blowup), если

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi'(0) > 0$$

и существуют такие константы $\lambda > 1$, $\beta \geq 0$, $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, что

$$\begin{aligned} & \frac{2\gamma_1 \Phi(0)}{2\lambda - 1} + \frac{\beta(\Phi(0))^2}{\lambda - 1} - (\Phi'(0))^2 < 0, \\ & \left(\frac{2\gamma_1 \Phi(0)}{2\lambda - 1} + \frac{\beta(\Phi(0))^2}{\lambda - 1} - (\Phi'(0))^2 \right)^2 - \frac{4\gamma_2(\Phi(0))^4}{(\lambda - 1)^3} \geq 0. \end{aligned}$$

Лемма 9.5. При условиях (Blowup) существует T_1 — наименьший положительный корень уравнения

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\lambda - 1)^2} (\Phi(0))^2 + \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\lambda - 1} (\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\lambda - 1} \Phi(0). \quad (9.50)$$

Далее предполагается, что функция u_1 является решением уравнения

$$\Delta u_1(x) - u_1(x) = -u_0^2(x) + f(x), \quad (9.75)$$

которое имеет единственное решение в классе $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ для любых $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Методом Х.А. Левина получена нижняя оценка для скорости разрушения и верхняя оценка для времени существования сильного решения задачи.

Теорема 9.5. *Если $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, а $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ — единственное решение уравнения (9.75), то при «большой» u_0 для сильного решения $u \in C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ задачи Коши 1 имеет место следующая оценка снизу на скорость разрушения:*

$$\left(\|u\|_2^2(t) + \|D_x u\|_2^2(t) \right) \geq \left(\|u_0\|_2^2 + \|D_x u_0\|_2^2 \right) \left(\frac{T_1}{T_1 - t} \right)^{1/(\lambda-1)} \quad \text{для } t \in [0, T],$$

где $T < T_1$, T_1 — наименьший положительный корень уравнения (9.50).

Также для задачи Коши 1 рассматривается слабое решение.

Определение 9.4. *Функция $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ называется локальным во времени слабым решением задачи Коши 1 для некоторого $T > 0$, если для любой функции $\phi \in C^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ такой, что $\phi(x, T) = \phi'(x, T) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $\text{supp}_x \phi(x, t)$ — компакт в $\mathbb{R}^3$ для каждого $t \in [0, T]$, выполнено равенство*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x_j^2} \right] dx dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x) \Delta_x \phi'(x, 0) - u_1(x) \Delta_x \phi(x, 0) - u_0(x) \phi'(x, 0) + u_1(x) \phi(x, 0)] dx - \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} u_0^2(x) \phi(x, 0) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(x, t) \phi'(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

причём $u_0 \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$.

Определение 9.5. *Будем говорить, что пара функций $(u_0, u_1) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3) \times L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ удовлетворяет условию $(Blowup_w)$, если найдётся такая нетри-*

виальная функция $\phi_1 \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, $\phi_1 \geq 0$, что для всех $T > 0$ конечна ёмкость

$$c_1(T) = \frac{T^2}{3} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| (\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)) \frac{6}{T^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{1x_j x_j}(x) (1-s)^2 \right|^2}{\phi_1(x)} dx ds$$

и существует $T_2 > 0$ такое, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{3}{T_2} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) u_0^2(x) dx + \frac{1}{2} c_1(T_2) < 0.$$

Показывается, что класс функций (u_0, u_1) , удовлетворяющих условию $(Blowir_w)$, не пуст. Далее применяется метод нелинейной ёмкости С.И. Похожаева для определения верхней оценки времени существования слабого решения.

Теорема 9.7. *Если пара функций (u_0, u_1) удовлетворяет условию $(Blowir_w)$, то для времени T существования локального во времени слабого нетривиального решения задачи Коши 1 в смысле определения 9.4 выполнено неравенство $T < T_2$.*

Стоит отметить, что классическое (гладкое) решение является как сильным, так и слабым решением, однако сильное решение не является слабым, поэтому результаты теорем 9.5 и 9.7, вообще говоря, не зависимы друг от друга.

В разделе 9.2 рассматривается **задача Коши 2**:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial |D_x u(x, t)|^2}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \quad (9.86)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (9.87)$$

Определение 9.6. *Классическим решением задачи Коши 2 называется функция $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, $\alpha \in (0, 1)$, удовлетворяющая поточечно равенствам (9.86), (9.87).*

Задача Коши 2 сводится к эквивалентному интегральному уравнению, локальная разрешимость которого показывается методом сжимающих отображений. Далее доказывается результат о непродолжаемом классическом (гладком) решении этой задачи, причём если время существования решения конечно, то имеет место разрушение решения задачи за конечное время.

В разделе 9.3 рассматривается **задача Коши 3**:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \quad (9.101)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (9.102)$$

Определение 9.7. *Классическим решением задачи Коши 3 называется функция $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, $\alpha \in (0, 1)$, удовлетворяющая поточечно равенствам (9.101), (9.102).*

Как и для предыдущих задач, эта задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению, локальная разрешимость которого доказывается методом сжимающих отображений. Далее рассматривается слабое решение задачи.

Определение 9.8. *Функция $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ называется локальным во времени слабым решением задачи Коши 3 для некоторого $T > 0$, если для любой функции $\phi \in C^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ такой, что $\phi(x, T) = \phi'(x, T) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $\text{supp}_x \phi(x, t)$ — компакт в $\mathbb{R}^3$ для каждого $t \in [0, T]$, выполнено равенство*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x_j^2} \right] dx dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x) \Delta_x \phi'(x, 0) - u_1(x) \Delta_x \phi(x, 0) - u_0(x) \phi'(x, 0) + u_1(x) \phi(x, 0)] dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [2u_0(x) u_1(x) \phi(x, 0) - u_0^2(x) \phi'(x, 0)] dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(x, t) \phi''(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

причём $u_0, u_1 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

Определение 9.9. Будем говорить, что пара функций $(u_0, u_1) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ удовлетворяет условию $(Blowir_w)$, если найдётся такая нетривиальная функция $\phi_1 \in C^{(2)}_0(\mathbb{R}^3)$, $\phi_1 \geq 0$, что для всех $T > 0$ конечна ёмкость

$$c_1(T) = \frac{T^3}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| (\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)) \frac{2}{T^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{1x_j x_j}(x) (1-s)^2 \right|^2}{\phi_1(x)} dx ds$$

и существует $T_1 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T_1} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + \\ & + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x) u_1(x) + \frac{1}{T_1} u_0^2(x) \right] dx + \frac{1}{2} c_1(T_1) < 0. \end{aligned}$$

Показывается, что класс функций (u_0, u_1) , удовлетворяющих условию $(Blowir_w)$, не пуст. Методом нелинейной ёмкости С.И. Похожаева доказана верхняя оценка для времени существования слабого решения.

Теорема 9.12. Если пара функций (u_0, u_1) удовлетворяет условию $(Blowir_w)$, то для времени T существования локального во времени слабого нетривиального решения задачи Коши 3 в смысле определения 9.8 выполнено неравенство $T < T_1$.

Далее определяется класс (B) .

Определение 9.10. Будем говорить, что функция u_1 принадлежит классу (B) , если найдётся такой шар $O(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^3$, что $u_1 \in H^2(O(x_0, R_0))$ и

$$\mu \{x \in O(x_0, R_0) : \Delta_x u_1(x) \neq 0\} > 0,$$

где μ — стандартная мера Лебега в $\mathbb{R}^3$.

Методом нелинейной ёмкости С.И. Похожаева получена также ещё одна верхняя оценка для времени существования слабого решения.

Теорема 9.13. *Если $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $u_0 + 1/2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и выполнено условие*

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) u_1(x) dx < 0,$$

то время существования T слабого решения задачи Коши 3 в смысле определения 9.8 конечно и имеет место верхняя оценка

$$T \leqslant - \frac{\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2)^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) u_1(x) dx}.$$

Если же $u_0 = -1/2$ и $u_1 \in (B)$, то слабое решение задачи Коши 3 в смысле определения 9.8 отсутствует для любого $T > 0$.

В разделе 9.4 даётся физический смысл разрушений решений задач Коши 1 — 3 на основании физических моделей, с помощью которых были выведены уравнения (1) — (3): в задаче Коши 1 это взрыв плазмы высокой плотности, в задаче Коши 2 это опрокидывание ионно-звуковых/дрейфовых волн в плазме, в задаче Коши 3 это эффект «black hole» для потенциала ионно-звуковых/дрейфовых волн в плазме.

В **главе 10** изучается разрушение решений начально-краевой задачи для сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме (в модели, где отсутствуют свободные электроны в плазме), причём плазма локализована внутри сферического слоя, что на практике соответствует модели сферического токамака. В разделе 10.1 описана постановка задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta_r u(r, t) - u(r, t)) + \omega^2 \Delta_r u(r, t) = \frac{\partial^2 u^2(r, t)}{\partial t^2}, & (r, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ u(r, 0) = u_0(r), \quad u_t(r, 0) = u_1(r), & r \in [a, b], \\ u_r(a, t) = u_r(b, t) = 0, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (10.4)$$

где $0 < a < b$, оператор Δ_r является радиальной частью оператора Лапласа и частные производные функции в граничных точках понимаются в смысле односторонних. Решение задачи (10.4) рассматривается классическое: $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$. Кроме того, необходимо потребовать согласование начального и граничного условий:

$$u_{0r}(a) = u_{0r}(b) = u_{1r}(a) = u_{1r}(b) = 0.$$

В разделе 10.2 задача (10.4) сводится к эквивалентной задаче в интегро-дифференциальном виде, а в разделе 10.3 устанавливается локальная разрешимость задачи (10.4) методом сжимающих отображений. В разделе 10.4 с помощью метода пробных функций получена верхняя оценка для времени существования классического решения.

Теорема 10.3. *Если $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$ — единственное классическое решение задачи (10.4), то при выполнении достаточного условия*

$$\int_a^b r^2 u_1(r) \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) dr < 0$$

время T существования классического решения задачи (10.4) конечно и имеет место следующая априорная оценка сверху:

$$T \leqslant - \frac{\int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr}{2 \int_a^b r^2 u_1(r) \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) dr}.$$

В разделе 10.5 приведён пример для начально-краевой задачи (10.4), имеющий точное аналитическое решение, которое разрушается за конечное время. С точки зрения физики в упомянутом примере обнаружен эффект «black hole», при котором потенциал электрического поля ионно-звуковых волн в плазме является ограниченным, имея при этом бесконечную скорость.

Глава 11 посвящена численной диагностике разрушения решения началь-

но-краевой задачи (10.4). В разделе 11.1 эта задача сводится к системе дифференциально-алгебраических уравнений, которая решается численно при помощи метода прямых, описанном в разделе 11.2, и одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS1), описанной в разделе 11.3. В разделе 11.4 изложена методика Ричардсона по вычислению апостериорной асимптотически точной оценки погрешности,^{40,41,42} с помощью которой находится численная оценка времени разрушения решения. В разделе 11.5 приведены три примера, где решение было найдено численно, найдены численные оценки времени разрушения решений в каждом из примеров, а также численно получено, что разрушения во всех примерах идут по типу «black hole».

Приведём результаты примера 2 из раздела 11.5, в котором рассматривалась задача (10.4) со следующим набором входных данных:

$$\begin{aligned} u_{init_0}(r) &= 2 \cos r, \\ u_{init_1}(r) &= -\cos r, \\ a &= \pi, \quad b = 2\pi, \quad \omega = 0.1. \end{aligned}$$

Отметим, что начальные функции u_0 и u_1 здесь переобозначены через u_{init_0} и u_{init_1} соответственно, а верхняя оценка времени существования решения, согласно теореме 10.3, равна $T_{up} \approx 1.222$. Численное решение $u^{N,M}$ рассматривается на сетке с количеством интервалов $N = 50$ и $M = 50$ по переменным r и t соответственно. Узлы каждой сетки индексируются с нуля. Сетка по t обозначается через $\mathcal{T}_M$. С помощью конечно-разностной аппроксимации, имея численное решение $u^{N,M}$, нетрудно вычислить частную производную $u_t^{N,M}$. Кроме того, для численного решения вводится сеточная норма

$$\|u^{N,M}\|_h(t) := \max_{n \in \{0, \dots, N\}} |u^{N,M}(r_n, t)|, \quad t \in \mathcal{T}_M.$$

⁴⁰Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2005. – Т. 45., №10. – С. 1837–1847.

⁴¹Al'shin A.B., Al'shina E.A. Numerical diagnosis of blow-up of solutions of pseudoparabolic equations // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – Vol. 148., no. 1. – P. 143–162.

⁴²Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В. Вычисления на квазиравномерных сетках. – М.: Физматлит, 2005. – С. 224.

Аналогичная норма вводится и для частной производной $u_t^{N,M}$.

Результаты численных экспериментов представлены на следующих рисунках:

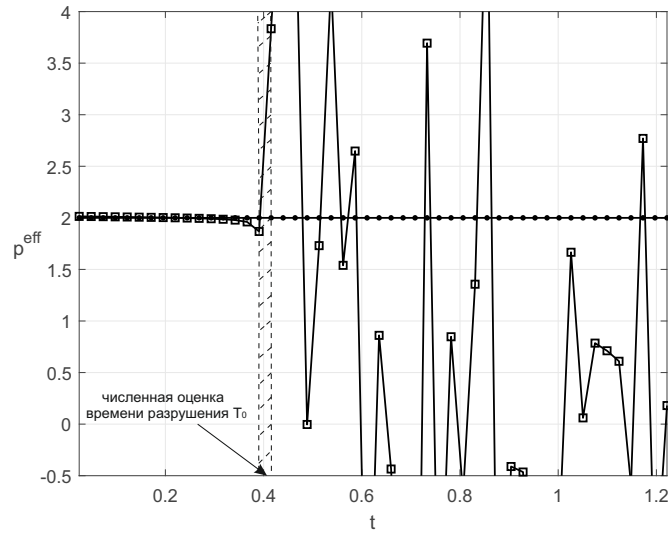


Рис. 1. Эффективный порядок точности для каждого временного слоя в примере 2.

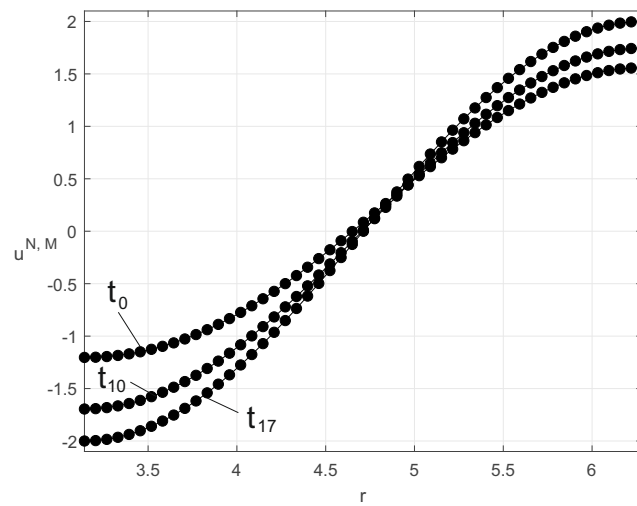


Рис. 2. Численное решение задачи (10.4) в примере 2 в моменты времени t_0 , t_{10} , t_{17} .

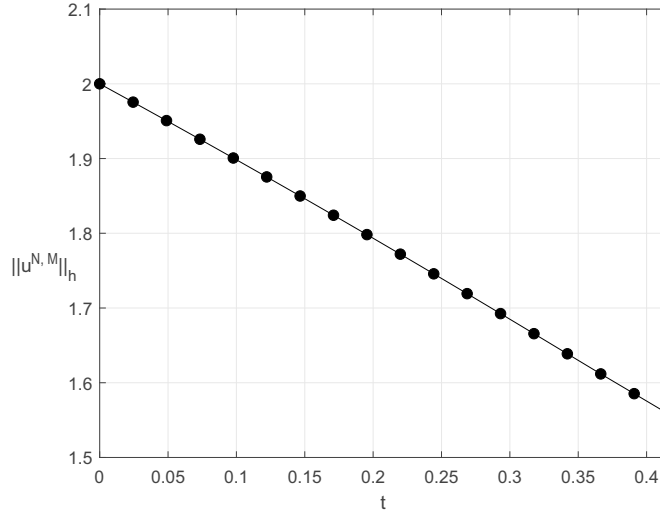


Рис. 3. Норма численного решения для каждого временного слоя (до момента разрушения включительно) в примере 2.

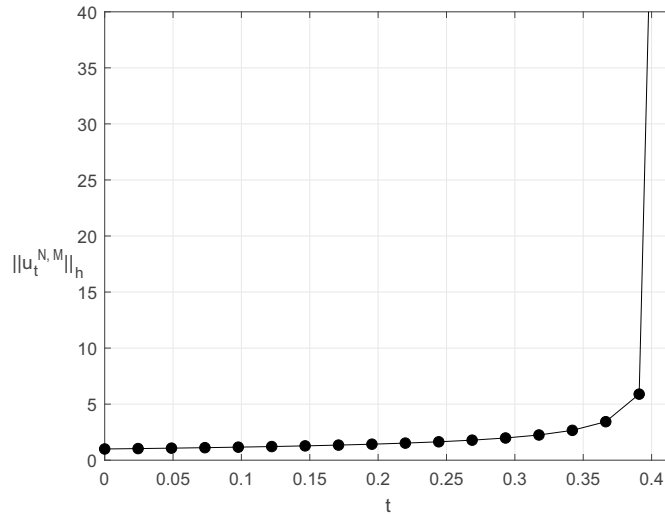


Рис. 4. Норма частной производной численного решения по t для каждого временного слоя (до момента разрушения включительно) в примере 2.

Согласно рисункам 1 – 4, время разрушения $T_0 \in (t_{16}, t_{17}] \equiv (0.391, 0.415]$. Кроме того, разрушение идёт по типу «black hole», так как при $t_{17} = 0.415$ $\|u^{N,M}\|_h(t_{17}) = 1.559$ и $\|u_t^{N,M}\|_h(t_{17}) = 127.478$, а по рисунку 2 визуально определяем, что решение задачи в момент разрушения является непрерывно дифференцируемым по r .

Заключение

В диссертационной работе проведено исследование разрушений решений задач Коши 1 – 3 и начально-краевой задачи (10.4) для нелинейных уравнений, возникающих в теории ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме. С точки зрения физики разрушение решения в рассматриваемых задачах означает взрыв плазмы (задача Коши 1), или опрокидывание ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме (задача Коши 2), или эффект «black hole» для потенциала электрического поля ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме (задача Коши 3, начально-краевая задача (10.4)). С точки зрения математики разрушение решения означает то, что решение задачи принадлежит некоторому функциональному классу, зависящему от времени, и в момент разрушения решение перестаёт принадлежать этому классу.

Приведём основные результаты, которые были получены в диссертационной работе для задач Коши 1 – 3 и начально-краевой задачи (10.4).

Для задачи Коши 1

- 1) была доказана локальная разрешимость и результат о непродолжаемом классическом решении;
- 2) с помощью метода Х.А. Левина была получена оценка снизу на скорость разрушения (с точки зрения физики это взрыв плазмы), из которой найдена оценка сверху для времени существования сильного решения;
- 3) с помощью метода нелинейной ёмкости С.И. Похожаева были найдены достаточные условия отсутствия глобальных слабых решений задачи, а также получена верхняя оценка для времени существования слабого решения.

Для задачи Коши 2 была доказана локальная разрешимость и результат о непродолжаемом классическом решении. В случае, когда время существования решения конечно, имеет место разрушение решения задачи за конечное время, причём с точки зрения физики это опрокидывание ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме.

Для задачи Коши 3

- 1) была доказана локальная разрешимость;
- 2) с помощью метода нелинейной ёмкости С.И. Похожаева были найдены

достаточные условия отсутствия глобальных слабых решений задачи, а также получены верхние оценки для времени существования слабого решения в двух случаях (с точки зрения физики здесь возникает эффект «black hole» для потенциала электрического поля);

3) с помощью метода нелинейной ёмкости С.И. Похожаева для слабого решения был получен результат об отсутствии локальных слабых решений.

Для начально-краевой задачи (10.4)

1) была доказана локальная разрешимость;

2) с помощью метода пробных функций было найдено достаточное условие отсутствия глобальных решений задачи и получена верхняя оценка для времени существования решения;

3) приведён пример, имеющий точное аналитическое решение, в котором имеет место разрушение решения задачи (эффект «black hole» для потенциала электрического поля) за конечное время;

4) приведены примеры, где решения были найдены численно и была проведена численная диагностика разрушения решений (эффект «black hole» для потенциала электрического поля) за конечное время.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в областях математической физики и физики плазмы.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, доценту М.О. Корпусову за постановки задач, ценные советы и постоянное внимание к работе. Благодарю профессорско-преподавательский состав физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за полученное физико-математическое образование. Благодарю заведующего кафедрой математики, профессора Д.Д. Соколова, и всех сотрудников кафедры математики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за доброжелательное отношение и поддержку.

Основные публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы изложены в работах, которые опубликованы в центральных научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты из списка МГУ.

1. Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Овсянников Е.А., Панин А.А. Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2017. – Т. 10, №2. – С. 107–123.
Индексируется в Scopus, Web of Science, RSCI, РИНЦ.
EDN: YQQCYH. Двухлетний импакт-фактор 0,357 (РИНЦ, без самоцитирования), 0,3 (JIF). Объем 1,063 п.л.
Вклад автора — 85% работы.
2. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Взрывная неустойчивость в нелинейных волновых моделях с распределенными параметрами // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2020. – Т. 84., №3. – С. 15–70.
Индексируется в RSCI, РИНЦ.
EDN: DZPNBY. Двухлетний импакт-фактор 0,585 (РИНЦ, без самоцитирования). Объем 3,5 п.л.
Перевод: Korpusov M.O., Ovsyannikov E.A. Blow-up instability in nonlinear wave models with distributed parameters // Izvestiya: Mathematics. – 2020. – Vol. 84, no. 3. – P. 449–501.
Индексируется в Scopus, Web of Science.
EDN: HNNAEF. Импакт-фактор 0,9 (JIF). Объем 3,313 п.л.
Вклад автора — 90% работы.
3. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для

нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2022. – Т. 62., №10. – С. 1639–1661.

Индексируется в RSCI, РИНЦ.

EDN: MFWGAE. Двухлетний импакт-фактор 0,628 (РИНЦ, без самоцитирования). Объем 1,438 п.л.

Перевод: Korpusov M.O., Ovsyannikov E.A. Local solvability, blow-up, and Hölder regularity of solutions to some Cauchy problems for nonlinear plasma wave equations: I. Green formulas // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2022. – Vol. 62, no. 10. – P. 1609–1631.

Индексируется в Scopus, Web of Science.

EDN: KCBWBW. Импакт-фактор 0,7 (JIF). Объем 1,438 п.л.

Вклад автора — 90% работы.

4. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. II. Теория потенциала // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2023. – Т. 63., №2. – С. 282–316.

Индексируется в RSCI, РИНЦ.

EDN: BOJJQG. Двухлетний импакт-фактор 0,628 (РИНЦ, без самоцитирования). Объем 2,188 п.л.

Перевод: Korpusov M.O., Ovsyannikov E.A. Local solvability, blow-up, and Hölder regularity of solutions to some Cauchy problems for nonlinear plasma wave equations: II. Potential theory // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2023. – Vol. 63, no. 2. – P. 250–284.

Индексируется в Scopus, Web of Science.

EDN: CLVMVU. Импакт-фактор 0,7 (JIF). Объем 2,188 п.л.

Вклад автора — 90% работы.

5. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для

нелинейных уравнений теории волн в плазме. III. Задачи Коши // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2023. – Т. 63., №7. – С. 1109–1127.

Индексируется в RSCI, РИНЦ.

EDN: VSVMLH. Двухлетний импакт-фактор 0,628 (РИНЦ, без самоцитирования). Объем 1,188 п.л.

Перевод: Korpusov M.O., Ovsyannikov E.A. Local solvability, blow-up, and Hölder regularity of solutions to some Cauchy problems for nonlinear plasma wave equations: III. Cauchy problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2023. – Vol. 63, no. 7. – P. 1218–1236.

Индексируется в Scopus, Web of Science.

DOI: 10.1134/S0965542523070072.

Импакт-фактор 0,7 (JIF). Объем 1,125 п.л.

Вклад автора — 90% работы.

6. Овсянников Е.А. Локальная разрешимость и разрушение классического решения одной начально-краевой задачи для нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2024. – Т. 64., №10. – С. 1915–1930.

Индексируется в RSCI, РИНЦ.

EDN: JZNBUS. Двухлетний импакт-фактор 0,628 (РИНЦ, без самоцитирования). Объем 1 п.л.

Перевод: Ovsyannikov E.A. Local solvability and blow-up of classical solution to some initial-boundary value problem for a nonlinear equation governing ion-acoustic waves in a plasma // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2024. – Vol. 64, no. 10. – P. 2305–2319.

Индексируется в Scopus, Web of Science.

EDN: EFLZZQ. Импакт-фактор 0,7 (JIF). Объем 0,938 п.л.

Научное издание

Овсянников Евгений Алексеевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Разрушение решений нелинейных уравнений теории волн в плазме