

**ОТЗЫВ официального оппонента**  
**о диссертации на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук**  
**Бровкина Вадима Вадимовича**  
**на тему «О разрешимости второй краевой задачи для**  
 **$p$ -лапласиана на римановых многообразиях»**  
**по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и**  
**математическая физика**

Диссертационная работа Бровкина В.В. посвящена изучению второй краевой задачи для  $p$ -лапласиана в областях на римановых многообразиях. Целью работы является получение необходимых и достаточных условий существования решений рассматриваемой задачи.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений на римановых многообразиях традиционно привлекают внимание математиков и, в частности, исследовались такими авторами как М.Т. Anderson, S.Y. Cheng, L. Karp, T. Lyons, D. Sullivan, S.T. Yau, А.А. Григорьян, С.А. Корольков, А.Г. Лосев и многими другими. Интерес исследователей к этой тематике не убывает, о чем можно судить по количеству публикаций разных авторов, а истоки ее восходят к работам, посвященным классификации некомпактных римановых многообразий в зависимости от их геометрических характеристик. Одним из основных вопросов данного направления является выделение многообразий гиперболического и параболического типа, для которых поведение решений эллиптических уравнений имеют существенное различие. Эта тема нашла широкое развитие в работах А.А. Григорьяна, С.А. Королькова, А.Г. Лосева, посвященных исследованию существования решений краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, а также вопросам об оценке размерности пространств решений. Таким образом, тема диссертационной работы является актуальной и представляет несомненный интерес.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации составляет 123 страницы.

**Во введении** автором дан краткий обзор работ, посвященных исследованиям краевых задач на римановых многообразиях, приведены основные определения и обозначения, обоснована актуальность темы и перечислены положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** изучаются необходимые и достаточные условия существования решений второй краевой задачи для  $p$ -лапласиана в областях на римановых многообразиях общего вида. В первом параграфе приводятся необходимые обозначения, а также получен общий критерий разрешимости рассматриваемой задачи. Во втором параграфе введено понятие гиперболических и параболических областей, доказаны некоторые вспомогательные утверждения. В третьем параграфе рассмотрен случай, когда функционал правой части имеет компактный носитель. В четвертом параграфе получены основные результаты диссертации, которые используются в последующих главах, а именно, доказаны необходимые и достаточные условия существования решений в случае функционала правой части общего вида. Подробно рассмотрен случай гиперболических и параболических областей. Исследование вопроса существования решений сведено к исследованию сходимости рядов. Доказательства основных результатов опираются на неравенство Харди, достаточные условия выполнения которого также приведены в этом параграфе.

**Во второй главе** рассматривается случай многообразий, имеющих модельные концы. В первом параграфе дано определение модельного конца многообразия, приведен критерий его параболичности и гиперболичности в терминах сходимости интегралов. Во втором параграфе доказаны необходимые и достаточные условия существования решений рассматриваемой задачи на многообразиях с модельными концами. Приведены примеры применения основных результатов параграфа к краевым задачам на плоскости Лобачевского.

**В третьей главе** исследуется задача Неймана в областях вращения в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Получены необходимые и достаточные условия существования решений. В качестве примера рассмотрена задача Неймана в области, образованной вращением графика степенной функции.

Результаты диссертации являются новыми, имеют теоретический характер с возможными практическими приложениями и вносят существенный вклад в качественную теорию дифференциальных уравнений и теорию римановых многообразий.

Все полученные в диссертации результаты сформулированы в виде теорем и обоснованы подробными доказательствами. Результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 4 – в научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ. Автореферат соответствует требованиям и правильно отражает содержание диссертации. Результаты исследований докладывались на международных научных конференциях и научных семинарах.

### **Замечания**

1. Нет обоснования поиска решения, зависящего только от  $r$  (с.34).
2. В доказательстве утверждения 2.1 ( с. 61) следует пояснить выбор функция  $\varphi = u_1 - u_2$ , где  $u_i$  – обобщенные решения, тогда как  $\varphi$  должна быть бесконечно дифференцируемой.
3. Опечатка в [14] списка литературы.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена согласно требова-

ниям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Бровкин Вадим Вадимович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,

профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления механико-математического факультета ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва»

Пулькина Людмила Степановна

«30» апреля 2026 г.

Контактные данные:

тел.: +7 (917) 165-85-55, e-mail: ludmila.pulkina@gmail.com

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:

01.01.02 – Дифференциальные уравнения.

Адрес места работы:

443086 Самара, Московское шоссе 34,

ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва», механико-математический факультет, кафедра дифференциальных уравнений и теории управления

Тел.: 8 (846) 334-54-38; e-mail: pulkina.ls@ssau.ru

Подпись сотрудника ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва»  
Пулькиной Л.С. удостоверяю: