МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Белозеров Глеб Владимирович

Топология слоений Лиувилля интегрируемых биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве

1.1.3. Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Диссертация подготовлена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	**Фоменко Анатолий Тимофеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН.
Официальные оппоненты:	**Рябов Павел Евгеньевич,** доктор физико-математических наук, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, факультет информационных технологий и анализа больших данных, кафедра математики и анализа данных, профессор.
	Тюрин Николай Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор РАН, Международная неправительственная организация «Объединенный институт ядерных исследований» (Дубна), лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, начальник сектора.
	Цветкова Анна Валерьевна, кандидат физико-математических наук, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, лаборатория механики природных катастроф, старший научный сотрудник.

Защита диссертации состоится «7» ноября 2025 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 1408.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3561

Автореферат разослан «___» октября 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук **В. А. Кибкало**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к области дифференциальной геометрии и топологии и является исследованием на стыке двух актуальных направлений: теория интегрируемых гамильтоновых систем и теория математического биллиарда. Работа посвящена изучению софокусных биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве как интегрируемых систем. Более точно, изучается топология слоений Лиувилля двух видов биллиардов: геодезические биллиарды на квадриках внутри софокусных областей и трехмерные биллиарды, ограниченные софокусными квадриками. Для каждого из этих видов автором получена топологическая классификация.

В последние десятилетия активно развивается качественная теория интегрируемых гамильтоновых систем (далее ИГС). Наиболее геометрически наглядными ИГС являются интегрируемые биллиарды и их обобщения. Интегрируемость плоского биллиарда в области, ограниченной эллипсом, отмечена в работе Дж. Д. Биркгофа[1]. В книге В. В. Козлова и Д. В. Трещева[2], а также в книге С. Л. Табачникова[3] дан обзор современных и классических исследований, посвященных теории математического биллиарда.

Биллиарды внутри плоских областей, ограниченных дугами софокусных квадрик, также являются интегрируемыми. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности начали изучаться в работах В. Драговича, М. Раднович[4], а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой)[5,6]. В. В. Ведюшкина классифицировала все локально-плоские топологические биллиарды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол, а также области, полученные склейками элементарных областей вдоль выпуклых и невыпуклых сегментов границ. Ею была определена эквивалентность биллиардных столов[7,8] и для каждого класса эквивалентности вычислены инварианты Фоменко (грубые молекулы) и Фоменко-Цишанга (меченые молекулы).

Напомним, что в случае двух степеней свободы *грубой молекулой* называется

---

[1] Биркгоф Дж.Д. Динамические системы // Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск. – 1999.

[2] Козлов В. В., Трещев Д. В. Генетическое введение в динамику систем с ударами // Издательство МГУ, Москва. – 1991.

[3] Табачников С. Геометрия и биллиарды // Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», Москва – Ижевск. – 2011.

[4] Dragovich V., Radnovich M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regular and Chaotic Dynamics. – 2009. – Vol. 14, No. 4-5 – p. 479 – 494.

[5] Фокичева В.В. Описание особенностей системы «биллиард в эллипсе» // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2012. – №5. – С. 31 – 34.

[6] Фокичева В.В. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2014. – № 4. – С. 18 – 27.

[7] Ведюшкина В.В. Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов // Математический сборник. – 2019. – Т. 210, № 3. – С. 17 – 74.

[8] Фокичева В.В. Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Математический сборник. – 2015. – Т. 206, № 10. – С. 127 – 176.

тип базы слоения Лиувилля системы в ограничении на изоэнергетическую поверхность. Это граф Риба, вершины которого дополнительно оснащены символами бифуркаций (3-атомов Фоменко) торов Лиувилля. Они классифицируют интегрируемые системы в ограничении на инвариантное 3-подмногообразие с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности (гомеоморфизма баз слоений Лиувилля, поднимаемого в окрестности каждой точки базы до гомеоморфизма самих слоений Лиувилля).

Инвариант Фоменко-Цишанга получается из инварианта Фоменко добавлением числовых меток r, ε, n, вычисляемых по диффеоморфизмам склейки граничных торов 3-атомов[9]. Этот инвариант классифицирует системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности — послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля в ограничении на трехмерный уровень постоянной энергии (с условием ориентации критических окружностей 3-атомов[10]).

Инварианты Фоменко и Фоменко-Цишанга вычислены для широкого класса интегрируемых систем геометрии[11], механики [12,13] и их аналогов на алгебрах Ли[14,15]. При этом, в частности, были обнаружены нетривиальные эквивалентности между различными системами.

Метод инвариантов нашел широкое применение в теории интегрируемых биллиардов, которые, вообще говоря, являются лишь кусочно-гладкими интегрируемыми системами. В работах В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко биллиардами были реализованы инварианты Фоменко-Цишанга многих интегрируемых систем двух степеней свободы[16]. Активно изучается гипотеза А. Т. Фоменко о реализации интегрируемыми биллиардами произвольных слоений Лиувилля и их особенностей[17,18]. Для этого рассматриваются не только плоские интегрируемые биллиарды, но и их обобщения — биллиарды на клеточных комплексах (введенные В. В. Ведюшкиной топологические биллиарды и биллиардные

[9] Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1990. – Т. 54, № 3. – С. 546 – 575.

[10] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2 (Монография) // Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск. – 1999.

[11] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Fomenko A.T. Two-dimensional Riemannian metrics with integrable geodesic flows. Local and global geometry // Sbornik: Mathematics. – 1998. – Vol. 189, No. 10. – p. 1441 – 1466.

[12] Oshemkov A.A. Fomenko invariants for the main integrable cases of rigid body motion equations // Advances in Soviet Mathematics. – 1991. – Vol. 6. – p. 67 – 146.

[13] Кудрявцева Е.А., Ошемков А.А. Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения // Чебышевский сборник. – 2020. – Т. 21, №2. – С. 244 – 265.

[14] Козлов И.К. Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ // Математический сборник. – 2014. – Т. 205, № 4. – С. 79 – 120.

[15] Kibkalo V.A. Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(3,1)$ // Topology and its Applications. – 2020. – Vol. 275. – pp. 13.

[16] Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы // Известия РАН. Серия математическая. – 2017. – Т. 81, № 4. – С. 20 – 67.

[17] Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 12. – С. 17 – 56.

[18] Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Биллиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем // Математический сборник. – 2021. – Т. 212, № 8. – С. 89 – 150.

книжки), биллиарды с потенциалом[19, 20], биллиарды в постоянном магнитном поле, биллиарды с проскальзыванием[21], а также биллиарды в пространстве с метрикой Минковского[22]. Отметим также недавнюю работу[23], где введенные А. Т. Фоменко эволюционные силовые биллиарды были применены для топологического моделирования систем Эйлера и Лагранжа сразу на всех классах их неособых уровней энергии.

Недавние результаты по доказательству гипотезы Биркгофа (А. А. Глуцюк[24], М. Бялый и А. Е. Миронов[25, 26], В. Ю. Калошин[27, 28]) показывают, что для интегрируемости плоского биллиарда без потенциала требуется принадлежность гладких дуг его границы концентрическим окружностям или софокусным квадрикам (с некоторыми уточнениями). Несмотря на конечность количества классов таких плоских биллиардов (как в смысле комбинаторного устройства границы, так и топологии их слоений Лиувилля), переход от плоских биллиардов к биллиардам на склеенных столах-комплексах позволил реализовать широкий класс слоений Лиувилля интегрируемых систем.

Диссертационная работа посвящена изучению топологии слоений Лиувилля двух видов биллиардов в евклидовом $\mathbb{R}^3$: геодезические биллиарды в софокусных областях на квадриках (эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды), а также трехмерные софокусные биллиарды.

Конфигурационное пространство софокусного геодезического биллиарда на квадрике E — компактная область $\mathcal{Z}^2$, ограниченная конечным числом квадрик, софокусных с E. Будем предполагать, что углы излома на границе $\mathcal{Z}^2$ равны $\pi/2$. Такие области будем называть *биллиардными столами на квадрике E*. Внутри биллиардного стола частица движется вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы $\mathcal{Z}^2$ абсолютно упруго. Софокусные геодезические биллиарды на квадриках являются интегрируемыми по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Касательные прямые, проведенные к каждой точке гладкости траектории такого биллиарда, касаются помимо E

[19] Кобцев И.Ф. Эллиптический биллиард в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ // Математический сборник. – 2020. – Т. 211, № 7. – С. 93 – 120.

[20] Пустовойтов С.Е. Топологический анализ биллиарда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле // Математический сборник. – 2021. – Т. 212, № 2. – С. 81 – 105.

[21] Fomenko A.T., Vedyushkina V.V., Zav'yalov V.N. Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2021. – Vol. 28. – p. 37 – 55.

[22] Каргинова Е.Е. Биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского // Математический сборник. – 2020. – Vol. 211, №1. – С. 3 – 31.

[23] Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Силовые эволюционные биллиарды и биллиардная эквивалентность случая Эйлера и случая Лагранжа // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2021. – Т. 496, № 1. – С. 5 – 9.

[24] Глуцюк А.А. О двумерных полиномиально интегрируемых бильярдах на поверхностях постоянной кривизны // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2018. – Т. 481, № 6. – С. 594 – 598.

[25] Bialy M., Mironov A.E. Angular billiard and algebraic Birkhoff conjecture // Advances in Mathematics. – 2017. – Vol. 313. – p. 102 – 126.

[26] Бялый М., Миронов А.Е. Полиномиальная неинтегрируемость магнитных бильярдов на сфере и гиперболической плоскости // Успехи математических наук. – 2019. – Vol. 74, № 2. – С. 3 – 26.

[27] Avila A., Simoi J.D., Kaloshin V. An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse // Annals of Mathematics. – 2016. – Vol. 184, No. 2. – p. 527 – 558.

[28] Kaloshin V., Sorrentino A. On the local Birkhoff conjecture for convex billiards // Annals of Mathematics. – 2018. – Vol. 188, No. 1. – p. 315 – 380.

еще одной квадрики, софокусной с ней и общей для всех точек гладкости траектории. Параметр этой квадрики является дополнительным первым интегралом системы. Отметим, что в отличие от плоских биллиардов, конфигурационное пространство софокусного геодезического биллиарда лежит на квадрике, т.е. на поверхности ненулевой гауссовой кривизны. Этот факт усложняет качественное исследование системы. Тем не менее, в работе диссертантом получена полная лиувиллева классификация софокусных геодезических биллиардов на квадриках при условии постоянства энергии.

Бóльшая часть диссертации посвящена интегрируемым биллиардам с тремя степенями свободы. Переход к ним — естественный следующий шаг при изучении биллиардов самих по себе и их связей с гладкими и вещественно-аналитическими интегрируемыми системами. Мы будем рассматривать движение материальной точки внутри компактной трехмерной области, ограниченной конечным числом софокусных квадрик и имеющей двугранные углы излома на границе, равные $\pi/2$. Такие области будем называть *трехмерными биллиардными столами*. Также мы будем считать, что на материальную точку не действуют никакие силы, то есть она движется по отрезкам прямых с постоянной по модулю скоростью. Оказывается, что такие системы обладают тремя независимыми первыми интегралами. Один из них — полная механическая энергия, два других — параметры софокусных квадрик, которых одновременно касаются все прямые, содержащие звенья данной траектории шара. Отметим, что биллиард внутри эллипсоида был рассмотрен В. Драговичем и М. Раднович в работе[29], где они описали прообразы точек отображения момента. В диссертации автором описаны все возможные трехмерные софокусные биллиардные столы и особенности отвечающих им биллиардов, проведена полная классификация всех трехмерных софокусных биллиардов относительно грубой лиувиллевой эквивалентности.

Одна из важных задач, возникающих при исследовании интегрируемых гамильтоновых систем — определить класс гомеоморфности неособой поверхности постоянной энергии. Для систем с двумя степенями свободы топологический тип изоэнергетического многообразия Q^3 (класс гомеоморфности многообразия без учета возникающего на нем слоения Лиувилля) можно вычислить по инварианту Фоменко-Цишанга. Отметим, что у биллиардных столов-книжек (клеточных комплексов с перестановками, задающими динамику шара при переходе с листа на лист) поверхность Q^3 является топологическим многообразием[30]. Однако для систем с тремя степенями свободы такой метод определения класса гомеоморфности Q^5 не подходит. Тем не менее, оказалось что тип Q^5 зависит лишь от класса гомеоморфности биллиардного стола. В работе автором доказано, что поверхность постоянной энергии произвольного трехмерного софокусного биллиарда гомеоморфна либо сфере S^5, либо произведению $S^1 \times S^4$,

[29] Драгович В., Раднович М. Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе // Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», Москва – Ижевск. – 2010.

[30] Харчева И.С. Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2020. – № 4. – С. 12 – 22.

либо произведению $S^2 \times S^3$.

Цели и задачи работы

- Описать все компактные области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах, ограниченные софокусными квадриками, с углами излома на границе, равными $\pi/2$.

- Вычислить инварианты Фоменко-Цишанга софокусных биллиардов на квадриках, получить их лиувиллеву классификацию.

- Описать все компактные области в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченные софокусными квадриками, с двугранными углами излома на границе, равными $\pi/2$.

- Классифицировать все трехмерные софокусные биллиарды относительно грубой лиувиллевой эквивалентности.

- Определить классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии трехмерных софокусных биллиардов, а также биллиарда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука.

Положения, выносимые на защиту

1. На эллипсоиде имеется 21 тип комбинаторно неэквивалентных областей, ограниченных софокусными квадриками, с углами излома границы, равными $\pi/2$, на однополостном гиперболоиде — 21 тип, на двуполостном гиперболоиде — 13 типов.

2. На эллипсоиде имеется в точности 7 лиувиллево неэквивалентных софокусных геодезических биллиардов, на однополостном гиперболоиде — 7, на двуполостном гиперболоиде — 6. Некоторые биллиарды на квадриках разного вида лиувиллево эквивалентны. Всего на квадриках существует в точности 10 лиувиллево неэквивалентных биллиардов.

3. Существует в точности 35 комбинаторно неэквивалентных трехмерных биллиардных областей, ограниченных софокусными квадриками, с двугранными углами излома границы, равными $\pi/2$.

4. Существует в точности 24 класса грубо лиувиллево неэквивалентных трехмерных софокусных биллиардов.

5. Если трехмерный софокусный биллиардный стол гомеоморфен трехмерному диску, сферическому слою или полноторию, то поверхность постоянной энергии Q^5 гомеоморфна S^5, $S^2 \times S^3$ или $S^1 \times S^4$ соответственно.

6. Если h — неособый уровень энергии биллиарда с потенциалом Гука внутри эллипсоида, то при $k > 0$ имеем $Q^5_h \cong S^5$. Если же $k < 0$, то Q^5_h — либо пятимерная сфера S^5, либо несвязное объединение двух пятимерных сфер, либо $S^1 \times S^4$, либо $S^2 \times S^3$.

Основные результаты диссертации

1. Классифицированы все компактные области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах, ограниченные софокусными квадриками и имеющие углы излома на границе, равные $\pi/2$, относительно их комбинаторного устройства. На эллипсоиде имеется 21 тип неэквивалентных областей, на однополостном гиперболоиде — 21 тип, на двуполостном гиперболоиде — 13 типов.

2. Для каждой софокусной области на квадриках вычислены инварианты Фоменко-Цишанга соответствующего биллиарда. В итоге, на эллипсоиде имеется 7 лиувиллево неэквивалентных биллиардов, на однополостном гиперболоиде — 7, на двуполостном гиперболоиде — 6. Некоторые биллиарды на квадриках разного вида оказались лиувиллево эквивалентными. Всего на квадриках существует в точности 10 лиувиллево неэквивалентных биллиардов. Все эти биллиарды оказались лиувиллево эквивалентны известным ИГС физики, механики и геометрии.

3. Классифицированы все компактные области в евклидовом трехмерном пространстве, ограниченные софокусными квадриками и имеющие двугранные углы излома на границе, равные $\pi/2$. Как оказалось, существует в точности 35 комбинаторно неэквивалентных трехмерных софокусных биллиардных областей. При этом, любая такая область гомеоморфна либо трехмерному диску, либо сферическому слою, либо полноторию.

4. Для каждой трехмерной софокусной области описано слоение Лиувилля соответствующего биллиарда вблизи произвольного слоя. Классифицированы все трехмерные софокусные биллиарды относительно грубой лиувиллевой эквивалентности. Показано, что существует в точности 24 класса грубо лиувиллево неэквивалентных трехмерных софокусных биллиардов.

5. Найдены классы гомеоморфности поверхностей постоянной энергии Q^5 трехмерных софокусных биллиардов. Как оказалось, ответ зависит лишь от класса гомеоморфности биллиардного стола. Если стол гомеоморфен трехмерному диску, то $Q^5 \cong S^5$. Если стол гомеоморфен сферическому слою, то $Q^5 \cong S^2 \times S^3$. Если стол гомеоморфен полноторию, то $Q^5 \cong S^1 \times S^4$. Более того, показано, что малая деформация биллиардной области не изменит класс гомеоморфности Q^5 соответствующего, вообще говоря, неинтегрируемого биллиарда.

6. Определены классы гомеоморфности неособых изоэнергетических поверхностей Q^5_h трехмерного биллиарда с потенциалом Гука внутри эллипсоида. Если h — неособый уровень энергии такого биллиарда, то при $k > 0$ имеем $Q^5_h \cong S^5$. Если же $k < 0$, то Q^5_h — либо пятимерная сфера S^5, либо несвязное объединение двух пятимерных сфер, либо $S^1 \times S^4$, либо $S^2 \times S^3$.

Научная новизна

Автором получены новые результаты, которые заключаются в следующем.

Описаны всевозможные софокусные области на квадриках (эллипсоиды и гиперболоиды) в трехмерном евклидовом пространстве, вычислены инварианты Фоменко-Цишанга соответствующих геодезических биллиардов. Получена лиувиллева классификация таких систем, найдены лиувиллево эквивалентные им известные интегрируемые системы механики и геометрии.

Представлен полный список комбинаторно неэквивалентных трехмерных областей, ограниченных софокусными квадриками. Описано полулокальное устройство слоения Лиувилля соответствующих биллиардных систем. Проведена классификация таких биллиардов относительно грубой лиувиллевой эквивалентности.

Найдены классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии трехмерных биллиардов, ограниченных софокусными квадриками, а также биллиарда с потенциалом Гука внутри трехосного эллипсоида.

Теоретическая и практическая значимость

Предлагаемая работа имеет теоретический характер.

Результаты классификации софокусных геодезических биллиардов на квадриках, а также биллиардов в трехмерных софокусных областях могут быть использованы для установления изоморфизмов (по крайней мере локальных) слоений Лиувилля с другими интегрируемыми системами двух и трех степеней свободы.

Метод понижения степени свободы, описанный в диссертации и использованный для описания полулокального вида особенностей трехмерных биллиардов, может быть обобщен на многомерный случай. Этот метод применим не только к интегрируемым биллиардам, но и к другим ИГС. С помощью него можно весьма наглядно описать полулокальное устройство особенностей некоторых довольно сложных ИГС.

Конструкция, описывающая топологические типы изоэнергетических поверхностей трехмерных софокусных биллиардов, (представлена в четвертой главе) никак не использует интегрируемость и может быть обобщена на многомерные биллиардные столы, не обязательно софокусные.

Степень достоверности

Достоверность результатов автора подтверждена строгими математическими доказательствами. Научные результаты автора опубликованы в открытой печати, прошли апробацию на научных семинарах.

Все результаты, выносимые автором на защиту, получены самостоятельно.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 3 печатных работах (общим объемом 5,188 п.л.), в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология и индексируемых базами цитирования Scopus, Web of Science, RSCI и РИНЦ.

Методы исследования

В работе используются методы топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем, построенная А. Т. Фоменко, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым, Н. Т. Зунгом и др. Применяются методы исследования слоений Лиувилля интегрируемых локально-плоских биллиардов двух степеней свободы, описанные В. В. Ведюшкиной. Используются алгебраические методы работы с интегрируемыми системами, разработанные М. П. Харламовым.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях и семинарах.

- XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2019», Москва, Россия, с 8 по 12 апреля 2019.
- Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020», Воронеж, Россия, с 27 по 4 февраля 2020.
- Всероссийская конференция «Ломоносовские чтения – 2020», Москва, Россия, с 17 по 29 октября 2020.
- IV-ая международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», посвященная 90-летию со дня рождения профессора Ю. Г. Борисовича, Воронеж, Россия, с 9 по 11 ноября 2020.
- XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2020», Москва, Россия, с 10 по 27 ноября 2020.

- Международная конференция «Dynamics in Siberia – 2021», Новосибирск, Россия, с 1 по 7 марта 2021.
- Всероссийская студенческая школа-конференция «Математическая весна – 2021», Нижний Новгород, Россия, с 30 марта по 2 апреля 2021.
- XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2021», Москва, Россия, с 12 по 23 апреля 2021.
- Третья международная конференция «International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics», Ярославль, Россия, с 4 по 8 октября 2021
- Международная конференция «Классическая и современная геометрия», посвященная 100-летию со дня рождения Левона Сергеевича Атанасяна, Москва, Россия, с 1 по 4 ноября 2021.
- V-ая международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», посвященная 90-летию ВГПУ, Воронеж, Россия, с 15 по 17 ноября 2021.
- Всероссийская конференция «Ломоносовские чтения – 2022», Москва, Россия, с 14 по 22 апреля 2022.
- International conference «XXI geometrical seminar», Belgrade, Serbia, с 26 июня по 2 июля 2022.
- Семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений под рук. акад. А. Т. Фоменко, 22 марта 2022, 18 апреля 2022, 16 сентября 2024.
- Семинар «Современные геометрические методы» под рук. акад. А. Т. Фоменко, проф. А. В. Болсинова, проф. А. С. Мищенко, проф. Е. А. Кудрявцевой, доц. И. М. Никонова, доц. А. Ю. Коняева, асс. В. А. Кибкало, 20 октября 2021.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст диссертации изложен на 151 странице. Список литературы содержит 76 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** представлены краткая история вопроса, актуальность темы, цели и задачи работы, описание используемых методов и основных результатов.

Первая глава диссертационной работы является вводной. Она посвящена основам теории интегрируемых гамильтоных систем, напоминанию метода топологических инвариантов ИГС, постановке задачи и доказательству ее интегрируемости.

В разделе 1.1 приведены центральные теоремы и определения теории интегрируемых гамильтоновых систем, перечислены основные виды эквивалентностей ИГС, описан метод топологических инвариантов, предложенный А. Т. Фоменко для качественного исследования таких систем.

Раздел 1.2 посвящен софокусным квадрикам в $\mathbb{R}^3$, их основным свойствам, а также эллиптическим координатам.

В разделе 1.3 представлено подробное описание двух видов биллиардов — центральных объектов диссертационной работы. Приведены основные характеристики этих систем: задано движение материальной точки, описаны фазовые и конфигурационные пространства.

В разделе 1.4 приведено авторское доказательство интегрируемости софокусных биллиардов в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) вполне интегрируемую по Лиувиллю гамильтонову систему $v = \operatorname{sgrad} H$ с соответствующими первыми интегралами $f_1, \ldots, f_n$. Совокупность связных компонент поверхностей совместного уровня этих функций задает *слоение Лиувилля* на M^{2n}. Напомним следующие отношения эквивалентности на множестве ИГС.

Определение (1.1.7)**.** Две вполне интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 на симплектических многообразиях M_1^{2n} и M_2^{2n} называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : M_1^{2n} \to M_2^{2n}$ слоений Лиувилля этих систем.

Определение (1.1.8)**.** Две вполне интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 на симплектических многообразиях M_1^{2n} и M_2^{2n} называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между базами слоений Лиувилля этих систем, который локально (т.е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послойного гомеоморфизма самих слоений.

Аналогичные определения можно сформулировать для ограничений ИГС на поверхности постоянной энергии. В случае двух степеней свободы для ИГС на компактных изоэнергетических поверхностях с дополнительным боттовским первым интегралом А. Т. Фоменко и Х. Цишангом были предложены инварианты, классифицирующие такие системы с точностью до лиувиллевой и грубой лиувиллевой эквивалентностей.

Пусть Q^3 — неособая компактная поверхность постоянной энергии ИГС на многообразии M^4. В таком случае база слоения Лиувилля на Q^3 представляет собой *граф Риба*, ребрам которого отвечают однопараметрические семейства 2-торов Лиувилля, а вершинам — их бифуркации. Такие бифуркации торов Лиувилля, рассматриваемые с точностью до послойного гомеоморфизма, называют 3-*атомами*. На рисунке 1 приведено несколько примеров 3-атомов.

Оснастим вершины графа Риба символами соответствующим атомов. Полученный в результате граф называется *инвариантом Фоменко* (или *грубой молекулой*).

Теорема (1.1.3)**.** (А. Т. Фоменко) *Пусть v_1 и v_2 — две интегрируемые систе-*

мы на изоэнергетических поверхностях Q_1^3 и Q_2^3, а W_1 и W_2 — отвечающие им грубые молекулы. Тогда системы v_1 и v_2 грубо лиувиллево эквивалентны (с учетом ориентации) тогда и только тогда, когда молекулы W_1 и W_2 совпадают.

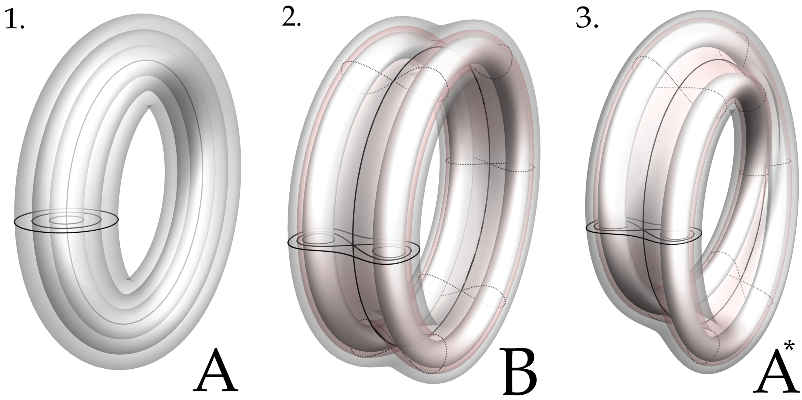


Рисунок 1 – примеры 3-атомов.

Грубая молекула не содержит информации о том, как склеены между собой соседние 3-атомы. Разрежем ребра грубой молекулы. В таком случае молекула распадется в объединение 3-атомов. Выберем на их граничных торах Лиувилля допустимые базисы, а затем склеим обратно. В результате, на каждом ребре молекулы образуется целочисленная матрица, описывающая вид слейки соседних 3-атомов по соответствующим граничным торам. Вычислим по этим матрицам числовые метки r, ε, n. Грубая молекула, оснащенная этими величинами называется *инвариантом Фоменко-Цишанга* (или *меченой молекулой*).

Теорема (1.1.5). (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг) *Две интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 | H_1(x) = h_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 | H_2(x) = h_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Теперь рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ *семейство софокусных квадрик*

$$(b-\lambda)(c-\lambda)x^2 + (a-\lambda)(c-\lambda)y^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)z^2 = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda).$$

Здесь $a > b > c$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр. По этому семейству можно определить 2 различных вида биллиардов: софокусные биллиарды на квадриках и трехмерные биллиарды, ограниченные софокусными квадриками.

Определение (1.3.1). Рассмотрим на невырожденной квадрике E связную область с компактным замыканием, ограниченную конечным числом софокусных с E квадрик и имеющую углы излома на границе, равные $\pi/2$. Замыкание $\mathcal{Z}^2$ этой области будем называть *биллиардным столом на квадрике E*.

Определение (1.3.2)**.** *Трехмерным биллиардным столом* $\mathcal{Z}^3$ будем называть замыкание связной ограниченной области в $\mathbb{R}^3$, граница которой состоит из конечного числа гладких граней, лежащих на софокусных квадриках. Будем предполагать, что двугранные углы излома на границе $\mathcal{Z}^3$ равны $\pi/2$.

Зададим динамику материальной точки для каждого вида столов.

Пусть $\mathcal{Z}^2$ — биллиардный стол на квадрике из софокусного семейства. Рассмотрим следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри $\mathcal{Z}^2$ вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы стола абсолютно упруго. Такую систему будем называть *софокусным геодезическим биллиардом.*

Пусть $\mathcal{Z}^3$ — трехмерный биллиардный стол. Рассмотрим движение материальной точки единичной массы внутри $\mathcal{Z}^3$ по прямым с постоянной по модулю скоростью. Отражение от границы $\mathcal{Z}^3$ считаем абсолютно упругим. Такую систему мы будем называть *трехмерным софокусным биллиардом.*

Благодаря тому, что углы излома границы равны $\pi/2$, динамику частицы, попавшей в угловые точки, можно доопределить по непрерывности. Фазовые многообразия этих систем ввиду отражения являются, вообще говоря, лишь кусочно-гладкими. Тем не менее, эти биллиарды являются интегрируемыми по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле.

Оказывается, *все касательные линии к произвольной траектории софокусного геодезического биллиарда на квадрике E касается помимо E еще одной общей квадрики, софокусной с E.* Параметр Λ этой квадрики является дополнительным первым интегралом такого биллиарда.

Все звенья произвольной траектории-ломаной (или их продолжения) трехмерного софокусного биллиарда касаются двух общих квадрик, софокусных с границей стола. Параметры этих квадрик Λ_1 и Λ_2 являются первыми интегралами трехмерного софокусного биллиарда.

Вторая глава диссертации посвящена лиувиллевой классификации геодезических софокусных биллиардов на поверхностях постоянной энергии. В силу того, что движение материальной точки происходит в отсутствии внешних сил, слоение Лиувилля на Q^3_h не зависит от h. Поэтому такие биллиардные системы рассматриваются в работе в ограничении на Q^3.

В разделе 2.1 автор вводит отношение комбинаторной эквивалентности софокусных биллиардных столов, лежащих на квадриках, и доказывает теорему классификации.

Определение (2.1.1)**.** Будем говорить, что софокусные биллиардные столы $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ на квадрике E *комбинаторно эквивалентны*, если и только если $\mathcal{Z}_2$ можно получить из $\mathcal{Z}_1$ применением нескольких преобразований следующего вида:

- последовательным изменением сегментов границы путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик, так, чтобы параметр λ изменяемого сегмента границы не принимал значения b, если E — эллипсоид, значения c, если E — двуполостный гиперболоид, и значений b, c, если E — однополостный гиперболоид;

- симметрией относительно координатных плоскостей.

Теорема (2.1.1). *Пусть E — невырожденная квадрика из софокусного семейства, тогда (с точностью до комбинаторной эквивалентности):*

1. *Если E — эллипсоид, то на нем существует ровно* 21 *тип неэквивалентных биллиардных столов;*
2. *Если E — однополостный гиперболоид, то на нем существует ровно* 21 *тип неэквивалентных;*
3. *Если E — двуполостный гиперболоид, то на нем существует ровно* 13 *типов неэквивалентных.*

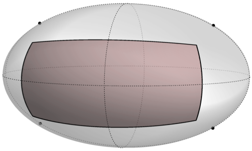
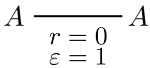
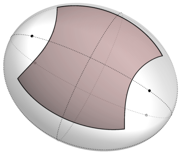
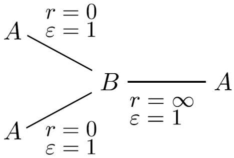
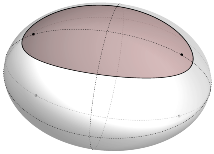
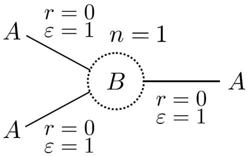
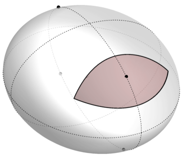
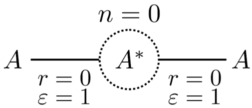
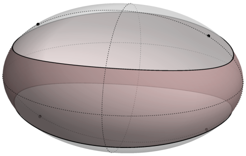
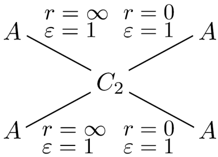
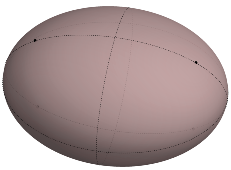
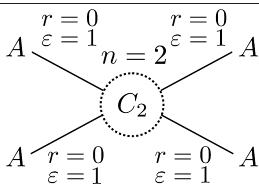
Введенное отношение комбинаторной эквивалентности сохраняет лиувиллеву эквивалентность соответствующих биллиардов. Поэтому далее в разделах 2.2 и 2.3 автором были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга биллиардов на неэквивалентных столах, и, тем самым, была получена лиувиллева классификация софокусных биллиардов на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах.

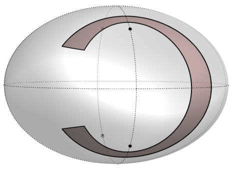
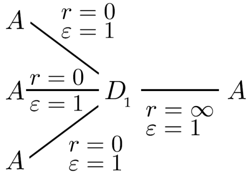
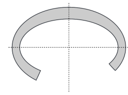
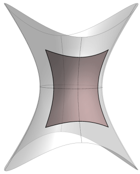
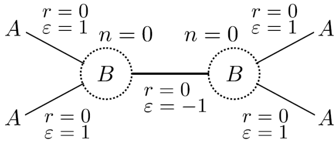
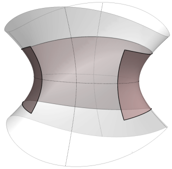
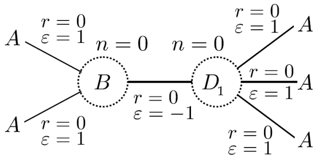
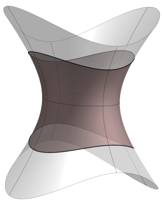
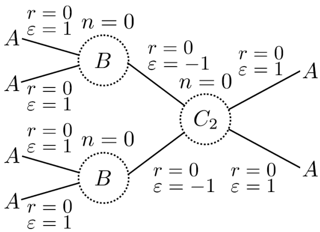
Теорема (2.4.1). *Пусть E — невырожденная квадрика из софокусного семейства, тогда (с точностью до лиувиллевой эквивалентности):*

1. *Если E — эллипсоид, то на нем существуют ровно 7 неэквивалентных биллиардов;*
2. *Если E — однополостный гиперболоид, то на нем существуют ровно 7 неэквивалентных биллиардов;*
3. *Если E — двуполостный гиперболоид, то на нем существуют ровно 6 неэквивалентных биллиардов.*
4. *Оказывается, что некоторые геодезические биллиарды, "живущие" на разных софокусных квадриках, являются лиувиллево эквивалентными. В итоге, на всех софокусных квадриках имеется ровно 10 лиувиллево не эквивалентных геодезических биллиардов.*

В разделе 2.4 приведена полная классификация софокусных биллиардов сразу на всех квадриках, найдены лиувиллево эквивалентные им интегрируемые системы физики, механики и геометрии.

Таблица 1. Лиувиллева классификация софокусных геодезических биллиардов на квадриках

	Пример области	Меченая молекула	Лиувиллево эквивалентная система
1			Лагранж, Эйлер
2			Жуковский
3			Клебш, Соколов, Ковалевская - Яхья
4			Горячев - Чаплыгин - Сретенский
5			Эйлер, Клебш
6			Эйлер, Клебш, Соколов

7			Плоский софокусный биллиард на столе: 
8			Биллиард на эллипсоиде в пространстве Минковского
9			Топологический биллиард с невыпуклыми склейками границ
10			Топологический биллиард с невыпуклыми склейками границ

В **третьей главе** диссертации изучается слоение Лиувилля трехмерных софокусных биллиардов на поверхностях постоянной энергии. Как уже отмечалось, при различных $h > 0$ слоение Лиувилля на Q^5_h будет одинаковым. Поскольку не существует удобных классификационных инвариантов лиувиллевой эквивалентности для ИГС с тремя и выше степенями свободы, трехмерные биллиарды рассматриваются в работе с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

В разделе 3.1 автором введено отношение комбинаторной эквивалентности трехмерных софокусных столов, доказана теорема классификации.

Определение (3.1.1). Будем говорить, что трехмерные биллиардные столы $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ *комбинаторно эквивалентны*, если один из них может быть получен из другого последовательностью следующих преобразований:

- изменением сегмента границы путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик, при этом, значение изменяемого параметра λ при каждой деформации может равняться b или c только либо в начале, если объем стола уменьшается, либо в конце, если — увеличивается;

- симметрией относительно координатных плоскостей.

Теорема (3.1.1)**.** *Существует в точности* 35 *классов комбинаторно неэквивалентных трехмерных биллиардных столов.*

В разделе 3.2 изучается образ отображения момента и его стратификация по видам областей возможного движения. Автором описаны регулярные слои систем и их 1-перестройки.

Рассмотрим отображение момента $\mathcal{F} : Q^5_h \mapsto \mathbb{R}^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$, где $\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2$ — параметры софокусных квадрик-каустик к соответствующей траектории материальной точки. Оказывается, образ этого отображения — пятиугольник. Комбинаторное устройство областей возможного движения определяет стратификацию этого пятиугольника на нульмерные, одномерные и двумерные страты. Далее изучается устройство слоения Лиувилля в окрестности слоев, отвечающих точкам определенных стратов. Например, слои, отвечающие точкам двумерных стратов, гомеоморфны трехмерному тору, а слоение Лиувилля в их малой окрестности тривиально. Иными словами, для трехмерных софокусных биллиардов выполнен кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля.

Раздел 3.3 посвящен особенностям, отвечающих точкам 0-стратов. Слоение Лиувилля вблизи таких слоев наиболее трудно поддается изучению. Тем не менее, эту задачу удается свести к описанию слоения Лиувилля ИГС меньшего числа степеней свободы. В частности, к геодезическим биллиардам на квадриках в поле отталкивающего потенциала Гука. Этот прием описан автором в пункте 3.3.1 и назван *методом понижения степени свободы.* Он успешно сработал для всех трехмерных софокусных биллиардов.

В разделе 3.4 сформулирована итоговая теорема классификации трехмерных биллиардов, приведена подробная классификационная таблица.

Теорема (3.4.1)**.**

1. *Трехмерные софокусные биллиарды на комбинаторно эквивалентных столах грубо лиувиллево эквивалентны.*

2. *Относительно грубой лиувиллевой эквивалентности существует в точности* 24 *класса трехмерных софокусных биллиардов в* $\mathbb{R}^3$.

Четвертая глава диссертационной работы посвящена топологии изоэнергетических поверхностей трехмерных софокусных биллиардов, а также биллиарда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука.

В разделе 4.1 исследуются топологические свойства Q^5 трехмерных биллиардов (не только софокусных). Автором найдены классы гомеоморфности Q^5 всех трехмерных софокусных биллиардов.

Из теоремы классификации трехмерных софокусных столов можно доказать, что любой такой стол гомеоморфен либо трехмерному замкнутому диску $\overline{D}^3$, либо сферическому слою $S^2 \times \overline{D}^1$, либо полноторию $S^1 \times \overline{D}^2$. Оказалось, класс гомеоморфности Q^5 соответствующего биллиарда зависит лишь от формы стола.

Теорема (4.1.1)**.** *Пусть трехмерный софокусный биллиардный стол $\mathcal{Z}$ гомеоморфен трехмерному замкнутому диску $\overline{D}^3$, или сферическому слою $\overline{D}^1 \times S^2$, или полноторию $\overline{D}^2 \times S^1$. Тогда изоэнергетическая поверхность Q^5 соответствующего биллиарда гомеоморфна сфере S^5, произведению $S^2 \times S^3$ или произведению $S^1 \times S^4$ соответственно.*

Этот результат не использует интегрируемость биллиардов. Более того, показано, что если $\overline{G}^3$ — замкнутая область, диффеоморфная замкнутому единичному трехмерному шару $\overline{D}^3$, то изоэнергетические поверхности биллиардов внутри $\overline{G}^3$ и $\overline{D}^3$ гомеоморфны.

В разделе 4.2 решена аналогичная задача для биллиарда с потенциалом Гука внутри трехосного эллипсоида. Рассмотрим биллиард внутри трехосного эллипсоида E в потенциальном поле силы Гука. Предполагается, что центр поля сил совпадает с центром E. Такая динамическая система является интегрируемой по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Этот факт следует из интегрируемости геодезического потока на эллипсоиде в поле упругой силы. С помощью метода В. В. Козлова найдены первые интегралы этой задачи. Далее были определены классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии этой системы. В ответе снова присутствуют сферы и их прямые произведения.

Теорема (4.2.1)**.** *Пусть h — небифуркационное значение энергии H биллиарда внутри эллипсоида с потенциалом Гука коэффициента k, тогда:*

1. *если $k > 0$, то изоэнергетическая поверхность Q^5_h гомеоморфна сфере S^5,*
2. *если $k < 0$, то изоэнергетическая поверхность Q^5_h гомеоморфна*
   - *несвязному объединению двух пятимерных сфер S^5 при $h \in \left(\frac{ka}{2}, \frac{kb}{2}\right)$;*
   - *прямому произведению окружности и четырехмерной сферы $S^1 \times S^4$ при $h \in \left(\frac{kb}{2}, \frac{kc}{2}\right)$;*
   - *прямому произведению двумерной и трехмерной сфер $S^2 \times S^3$ при $h \in \left(\frac{kc}{2}, 0\right)$;*
   - *пятимерной сфере S^5 при $h \in (0, +\infty)$.*

Заключение

В диссертации получена комбинаторная классификация софокусных биллиардных столов на квадриках (эллипсоид, пара гиперболоидов) в трехмерном евклидовом пространстве, а также лиувиллева классификация соответствующих биллиардов. Все такие системы оказались лиувиллево эквивалентны другим известным ИГС из физики, механики и геометрии на подходящих уровнях энергии.

Также в работе проведена классификация трехмерных софокусных биллиардных столов. Для биддиардов внутри таких областей изучено локальное устройство слоения Лиувилля (т.е. вблизи каждого слоя), в результате чего получена полная классификация трехмерных софокусных биллиардов относительно грубой лиувиллевой эквивалентности на поверхностях постоянной энергии. Для описания полулокального устройства особенностей таких систем был описан и использован метод понижения степени свободы. Оказалось, что трехмерные софокусные биллиарды тесно связаны с геодезическими биллиардами на квадриках в поле силы Гука.

Для трехмерных софокусных биллиардов, а также биллиарда внутри эллипсоида в поле силы Гука определены классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии. Оказалось, что связная компонента такой поверхности гомеоморфна либо сфере S^5, либо $S^4 \times S^1$, либо $S^3 \times S^2$. Метод, используемый при доказательстве этого факта, никак не использовал интегрируемость систем.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам в интегрируемых задачах классической механики, гидромеханики и физики.

Благодарности

Автор выражает особую благодарность своему научному руководителю академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор искренне благодарен профессору Виктории Викторовне Ведюшкиной, профессору Андрею Александровичу Ошемкову и доценту Владиславу Александровичу Кибкало за поддержку и внимание, а также всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений за создание плодотворной научной атмосферы.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топлогия

1. Белозеров Г.В. Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов на квадриках в трехмерном евклидовом пространстве // Математический сборник. – 2020. – Т. 211, №11. – С. 3–40.

   Перевод: Belozerov G.V. Topological classification of integrable geodesic billiards on quadrics in three-dimensional Euclidean space // Sbornik: Mathematics. – 2020. – Vol. 211, No. 11. – p. 1503–1538.

   Индексируется в Scopus, Web of Science, RSCI, РИНЦ.

   EDN: JIAWXG. Импакт фактор 0,611 (РИНЦ), 0,8 (JIF). Объем 2,375 п.л.

2. Белозеров Г.В. Топологическая классификация биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадриками // Математический сборник. – 2022. – Т. 213, №2. – С. 3–36.

   Перевод: Belozerov G.V. Topological classification of billiards bounded by confocal quadrics in three-dimensional Euclidean space // Sbornik: Mathematics. – 2022. – Vol. 213, No. 2. – p. 129–160.

   Индексируется в Scopus, Web of Science, RSCI, РИНЦ.

   EDN: JHIMUG. Импакт фактор 0,611 (РИНЦ), 0,8 (JIF). Объем 2,125 п.л.

3. Белозеров Г.В. Топология изоэнергетических 5-поверхностей трехмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2022. – №6 – С. 21–31.

   Перевод: Belozerov G.V. Topology of 5-surfaces of a 3D billiard inside a triaxial ellipsoid with Hooke's potential // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2022. – Vol. 77, No. 6. – p. 277–289.

   Индексируется в Scopus, Web of Science, RSCI, РИНЦ.

   EDN: PPAXKQ. Импакт фактор 0,211 (РИНЦ), 0,2 (JIF). Объем 0,688 п.л.