

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Иванов-Погодаев Илья Анатольевич

**ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ
НИЛЬПОЛУГРУППЫ**

**1.1.5 — Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика**

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научные консультанты:
академик РАН, доктор физико-математических наук,
профессор А. Л. Семенов
доктор физико-математических наук,
профессор А. Я. Белов

Москва – 2026

Оглавление

Глава 1. Введение	5
1. Общая характеристика работы	5
2. Актуальность темы	5
3. Цели и задачи работы	8
4. Основные результаты и научная новизна	8
5. Методология и методы исследования, новизна	9
6. Основное содержание работы	9
7. Содержание и структура диссертации	16
8. Результаты, выносимые на защиту	17
9. Апробация и доклады по теме диссертации	17
10. Заключение	18
11. Благодарности	19
Глава 2. Автоматный подход при построении конечно определенных объектов	21
1. Конечно определенная полугруппа, с бесконечным бесквадратным идеалом	22
2. Конечно определенные полугруппы с нецелой размерностью Гельфанда-Кириллова	27
3. Конечно определенные алгебры с конечным базисом Гребнера и неразрешимой проблемой делителей нуля	28
4. Универсальная машина Тьюринга	28
5. Техника интерпретации слова как конечного автомата	36
Глава 3. Геометрическая структура комплекса	39
1. Геометрическая часть построения	39
Глава 4. Слабая детерминированность	57
1. Определения	57
2. Слабая детерминированность	64
3. Цель введения слабой детерминированности	73
Глава 5. Полугруппа путей на семействе равномерно эллиптических комплексов	79
1. Приведение к канонической форме	79
2. Дальнейшие вопросы и соображения	94
Глава 6. Каноническая форма Рипса для второго ранга	95
1. Итеративная теория малых сокращений Э. Рипса	99
2. Немедленные результаты	114
3. План дальнейших исследований	118
Глава 7. Смежные идеи и перспективы	119
1. Коллектив автоматов в конечно-порождённых группах	119
2. Об эволюции, заданной клеточным автоматом	125
3. ПРИЛОЖЕНИЕ. Применение мозаик: Самозаклинивающиеся структуры	131
Литература	137

Введение

1. Общая характеристика работы

Работа посвящена исследованиям в области комбинаторной алгебры. В диссертации автор разработал новый метод построения конечно определенных алгебраических объектов. Метод позволил решить проблему Шеврина – Сапира о существовании бесконечно конечно определенной нильполугруппы, одного из вопросов бернсайдовского типа. В перспективе метод может быть применен для построения конечно определенных колец и групп.

2. Актуальность темы

2.1. Вопросы бернсайдовского типа. Одним из важнейших вопросов алгебры, в значительной степени определивший ее развитие, является проблема Бернсайда [62], поставленная в 1902 году.

«A still undecided point in the theory of discontinuous groups is whether the order of a group may be not finite, while the order of every operation it contains is finite.»

Проблема Бернсайда с неограниченной экспонентой. Пусть конечнопорожденная группа является периодической, то есть каждый элемент имеет конечный порядок, возможно эти порядки неограничены в совокупности. Верно ли, что группа является конечной?

Проблема Бернсайда с ограниченной экспонентой (ограниченная проблема Бернсайда). Пусть конечнопорожденная группа является периодической, и порядки элементов ограничены в совокупности. То есть, выполняется тождество $x^n = 1$ для некоторой константы n . Верно ли, что группа является конечной?

Помимо основной постановки в теории групп, подобные вопросы были поставлены и в других структурах, кольцах, полугруппах, алгебрах Ли и оказали огромное влияние на развитие современной алгебры. Эта проблематика значительно стимулировала алгебраические исследования.

Первый контрпример к неограниченной проблеме был найден Е. С. Голодом [23] в 1964 году на основе универсальной конструкции Е. С. Голода – И. Р. Шафаревича [24], которая позволила построить конечнопорожденные бесконечные периодические группы неограниченной экспоненты.

В ограниченном случае для маленькой экспоненты, вопрос решается положительно. Для экспоненты 2 это вытекает из коммутативности таких групп. Для групп с тождеством $x^3 = 1$ доказать конечность несколько труднее (и она была доказана самим Бернсайдом [62]). Вопрос о конечности конечно порожденных групп с тождеством $x^4 = 1$ стоял открытым чуть меньше 40 лет и был решен И.Н. Сановым [42], а с тождеством $x^6 = 1$ – свыше 50 и был решен М. Холлом [81]. Уже для экспоненты 5 вопрос является открытым.

Вопрос о конечности конечнопорожденных групп с тождеством $x^n = 1$ был решен отрицательно в знаменитых работах П. С. Новикова и С. И. Адяна [37], [18]: для любого

нечетного $n > 4381$ было доказано существование бесконечной группы с $m > 1$ образующими, удовлетворяющей тождеству $x^n = 1$. Эта оценка была улучшена до $n > 665$ С. И. Адяном [16]. А. И. Мальцев рассматривал результаты Новикова и Адяна как основное событие алгебры XX века.

Позднее были получены результаты в случае четной экспоненты. Для достаточно больших четных n примеры бесконечных 2-порожденных групп периода n были построены независимо С. В. Ивановым [78, 79] и И. Г. Лысенком [35, 36]. В условиях делимости на достаточно большую степень двойки, было исследовано строение свободных бернсайдовых групп.

Подробная библиография и история вопроса есть в обзоре С. И. Адяна [16].

Работы П. С. Новикова и С. И. Адяна оказали огромное влияние на творчество И. А. Рипса, который в дальнейшем разработал метод канонической формы и построил примеры бесконечных периодических групп, обладающих дополнительными свойствами. Позднее А. Ю. Ольшанский [38, 39] предложил геометрически наглядный вариант доказательства для нечетных $n > 10^{10}$.

Бернсайдова проблематика естественным образом переносится из теории групп в теорию колец. Аналог проблемы Бернсайда для ассоциативных алгебр был сформулирован А. Г. Курошем в 30х годах:

Вопрос (Курош[54]). Пусть все 1-порожденные подалгебры конечно-порожденной ассоциативной алгебры A конечномерны. Будет ли алгебра A конечномерна, как векторное пространство?

Отрицательный ответ на этот вопрос был получен Е. С. Голодом [23] в 1964 году.

Также интересны бернсайдовские вопросы для алгебраических алгебр.

Определение. Элемент ассоциативной алгебры называется алгебраическим, если порожденная им подалгебра является конечномерной, или, что равносильно, что элемент обладает аннулирующим многочленом из основного поля. Алгебра алгебраическая, если все ее элементы алгебраические.

Индексом алгебраической алгебры A называется супремум степеней минимальных аннулирующих многочленов элементов A .

Классом нильпотентности или ниль-индексом ассоциативной алгебры A называется минимальное натуральное число n такое, что $A^n = 0$.

Теорема (Курош[54], 1941.) Любая удовлетворяющая тождеству $x^2 = 0$ алгебра над полем характеристики ≥ 3 или 0 является нильпотентной класса 3.

Любая нильпотентная конечнопорожденная алгебра конечномерна.

В 1941 году А. Г. Курош [54] сформулировал аналог проблемы Бернсайда для алгебр конечного индекса:

1. Верно ли, что конечно-порожденная нильалгебра конечного ниль-индекса нильпотентна?

2. Верно ли, что конечно-порожденная алгебра конечного индекса конечномерна?

В 1946 году И. Капланский [49] и Д. Левицкий [52] ответили на эти вопросы положительным образом для алгебр с допустимым полиномиальным тождеством, где полиномиальное тождество называется *допустимым*, если один из его коэффициентов равен 1. Заметим, что в случае ассоциативных алгебр над полями любое полиномиальное тождество эквивалентно допустимому.

Дальнейшие результаты в этом направлении получил А. И. Ширшов [46] [47].

Используя линеаризацию, из теоремы Ширшова о высоте можно вывести следующее следствие:

Следствие. Конечно-порожденная алгебра с допустимым полиномиальным тождеством имеет ограниченную высоту над множеством слов над порождающими меньшей, чем n длины, где n – степень тождества.

Из теоремы о высоте вытекает решение ряда проблем теории колец. Проблемы бернсайдовского типа, связанные с теоремой о высоте, рассмотрены в обзоре Е. И. Зельманова. Многообразия ниль-алгебр исследовались А. Р. Кемером [53] и Л. М. Самойловым [50].

Теорема Ширшова о высоте также являлась и важной частью решения ОПБ. В юбилейной статье, посвященной 60-летию юбилею Е.И.Зельманова, отмечено, что «...штурмуя ОПБ, Ефим Исаакович был уверен в правильности своего пути и в положительном решении этой проблемы ввиду революционной для своего времени теоремы Ширшова о высоте для ассоциативных алгебр с тождествами (PI-алгебр)».

Е. И. Зельманов в середине 90х в Днестровской тетради поставил вопрос о экспоненциальной оценке в теореме Ширшова на высоту. А. Я. Белов и М. И. Харитонов установили что выполняется даже субэкспоненциальная оценка на высоту. Они установили, что индекс нильпотентности ℓ -порожденной алгебры с тождеством $x^n = 0$ не превосходит $\ell \cdot n^{100 \ln n}$ [31]. Недавно, оценка была улучшена М. Добринцевым (частное сообщение), публикация готовится.

Теореме Ширшова о высоте посвящена обширная библиография (см., например, работы [56], [82], [20], [21]).

Проблемы бернсайдовского типа для полугрупп рассматривались в монографии М. В. Сапира [89], с участием М. В. Волкова и В. С. Губы .

2.2. Проблемы конечной определенности. Все имеющиеся примеры бесконечных периодических групп бесконечно определены. Естественно задаться вопросом, можно ли достичь каких-либо бернсайдовских свойств с помощью конечного числа определяющих соотношений.

Из факта существования бесквадратных слов над трехбуквенным алфавитом, сразу следует, что в 3-порожденная полугруппа с тождеством x^2 может быть бесконечной, для этого достаточно ввести определяющие соотношения $W^2 = 0$ для всех слов W .

То есть существуют бесконечных нильполугруппы с тождеством $x^2 = 0$. (Аналогично можно построить 2-порожденную бесконечную нильполугруппу с тождеством $x^3 = 0$.)

Если же ограничиться конечным числом определяющих соотношений, но задать ограничение, что они все мономиальные, то есть вида $W = 0$, то ответ меняется. Всякая конечно порожденная нильполугруппа с конечным числом мономиальных соотношений является нильпотентной (конечной).

В настоящее время известно не так уж много конструкций конечно определенных объектов. Поэтому методы, дающие возможность построения таких объектов, особенно интересны.

Чрезвычайно глубоким и вдохновляющим является следующий открытый вопрос (входящий в список основных алгебраических проблем в теории групп):

Конечно определенная проблема Бернсайда.

Существует ли конечно определенная бесконечная периодическая группа?

В работе А. Ю. Ольшанского и М. В. Сапира [86] была построена конечно определенная группа являющаяся расширением конечно порожденной бесконечной периодической группы с помощью циклической.

На проблематику, связанную с построением разного рода экзотических объектов с помощью конечного числа определяющих соотношений обратил внимание В. Н. Латышев [84].

Им же была поставлена проблема существования конечно определенного нилькольца [26].

Проблема В. Н. Латышева. *Существует ли конечно определенное бесконечномерное нилькольцо?*

В качестве продвижения в решении этого вопроса можно рассматривать результаты Г. П. Кукина [83], В. Я. Беляева [60] о вложениях рекурсивно определенных объектов в конечно определенные. В. А. Уфнарским [45] был построен пример конечно определенной алгебры промежуточного роста. В работе В. В. Щиголева [51] была изучена связь между понятиями ниль и нильпотентности конечно определённых алгебр в зависимости от количества определяющих соотношений и порождающих. Также построен пример алгебр с малым количеством определяющих соотношений, у которых все слова длины два нильпотентны. Кроме того, построению конечно определенных объектов и автоматному подходу в алгебраических структурах посвящен ряд других результатов [30, 41, 40, 44, 45, 19, 63, 88].

3. Цели и задачи работы

Фундаментальную проблему существования конечно определенной нильполугруппы поставили Л. Н. Шеврин и М. В. Сапир [43] в Свердловской Тетради (3.616), а также вопрос 3.8 в обзоре [85].

Вопрос (Л. Н. Шеврин, М. В. Сапир). *Существует ли конечно определенная бесконечная нильполугруппа?*

Этот вопрос привлекал внимание автора диссертации в течение многих лет. Ряд результатов автора, таких как конструкция конечно определенной полугруппы с нецелой размерностью Гельфанда–Кириллова [58], построение алгебр с конечным базисом Гребнера, но неразрешимой проблемой делителей нуля и проблемой нильпотентности [8], возникли из работы над этой проблемой. Также был построен пример конечно определенной полугруппы, содержащий ненильпотентный ниль-идеал [9].

В диссертации проводится построение требуемой нильполугруппы, то есть автор доказывает следующую теорему.

Теорема 3.1. *Существует конечно определенная бесконечная нильполугруппа, удовлетворяющая тождеству $x^9 = 0$.*

Получение этого результата являлось основной целью исследований. В процессе работы над этой задачей был разработан метод контроля над соотношениями, который может быть использован для построения конечно определенных полугрупп. В перспективе этот метод может быть использован также для построений в конечно определенных кольцах и группах.

Этот результат интересен не только как решение важной проблемы бернсайдовского типа в алгебре, но и как возможный подход к алгоритмическим задачам: набором конечных локальных правил можно задавать свойства (в частности, апериодичность) бесконечной системы.

4. Основные результаты и научная новизна

Диссертация включает в себя следующие основные результаты:

1. (Геометрическая часть.) Автор разработал новый метод конструирования определяющих соотношений, как пар эквивалентных путей на специальном геометрическом комплексе. Слова в полугруппе соответствуют кратчайшим путям на комплексе, а пары эквивалентных путей соответствуют клеткам комплекса.

2. (Комбинаторная часть.) Автор доказал комбинаторную лемму: вершины и ребра последовательности комплексов (подходящая по геометрическим свойствам для задания определяющих соотношений) может быть раскрашена в конечное число цветов с соблюдением свойства детерминированности, когда раскраска пути по двум сторонам каждой четырехугольной клетки однозначно определяет раскраску пути по другим двум сторонам этой клетки.

3. (Основной результат.) Автор построил конечно определенную бесконечную нильполугруппу, где каждое слово в девятой степени равно нулю. Слова в полугруппе соответствуют кодировкам путей на последовательности комплексов. Определяющие соотношения делятся на мономиальные (запрещающие некоторые кодировки путей) и флиповые, приравнивающие эквивалентные пути для клетки каждого типа.

Таким образом, в диссертации решен вопрос существования конечно определенной нильполугруппы, поставленный Л. Н. Шевриным и М. В. Сапиром в Свердловской Тетради (3.616) [43].

Также диссертация содержит дополнительные результаты:

1. Конструкция алгебры с конечным базисом Гребнера и неразрешимой проблемой делителей нуля.

2. Конструкция алгебры с конечным базисом Гребнера и неразрешимой проблемой нильпотентности.

3. Конструкция конечно определенной полугруппы, содержащей бесконечный идеал, свободный от квадратов.

Все основные результаты диссертации являются новыми.

5. Методология и методы исследования, новизна

Диссертация использует методы комбинаторной алгебры и комбинаторики слов.

Основная часть посвящена новому методу построения конечно определенных полугрупп когда каждое вводимое соотношение рассматривается как клетка на геометрическом комплексе с заданным набором свойств. Элементы полугруппы при этом рассматриваются как кратчайшие пути на построенном геометрическом комплексе. Ниже кратко приводится основное содержание и идеи метода.

Результаты других авторов, указанных в тексте диссертации, снабжены соответствующими ссылками.

Работа имеет теоретический характер.

Все основные результаты диссертации являются новыми.

6. Основное содержание работы

6.1. Построение конечно определенных объектов и системы конечных автоматов. Обсудим трудности построения конечно определенных объектов и контроль над соотношениями. При построении алгебраических объектов основной задачей является контроль над следствиями из вводимых соотношений, в особенности тогда, когда нужно доказать, что некое соотношение не является следствием заданных.

Зачастую используются три метода контроля над соотношениями:

- (1) Базис Гребнера и бриллиантовая лемма;
- (2) Теория малых сокращений;
- (3) Реализация машины Тьюринга или машины Минского.

В конечно определенном случае вопросы, связанные с построением объектов, обладающих заданными свойствами, сильно усложняются и наибольшее значение приобретает третий метод. При этом буква интерпретируется как состояние конечного автомата, а слово

– как цепочка взаимодействующих конечных автоматов. Если число соотношений конечно, то это взаимодействие *локально* и мы получаем связь с задачами самоорганизации, типа задачи Майхилла о стрелках:

Задача синхронизации стрелков. Можно ли так запрограммировать конечную одномерную цепочку конечных автоматов, чтобы из стартового состояния все автоматы одновременно перешли в конечное состояние, независимо от длины цепочки, если состояние каждого автомата в следующий момент времени зависит от его состояния и состояния соседних клеток.

На этом пути автор ранее решил задачу о построении конечно определенных полугрупп с рекурсивной размерностью Гельфанда – Кириллова [27]. Отметим, что подобная техника довольно громоздка для построений, требующих малого роста. Например, не удалось пока построить конечно определенную полугруппу с размерностью Гельфанда – Кириллова равной 2.5.

Также автором ранее был получен ответ на известный открытый вопрос, поставленный В. Н. Латышевым – была построена алгебра с неразрешимой проблемой делителей нуля и конечным базисом Грёбнера [27], а также алгебра с неразрешимой проблемой нильпотентности и конечным базисом Грёбнера [8]. Отметим, что для автоматных мономиальных алгебр (в частности, конечно определенных) а также *алгебр с ограниченной переработкой* аналогичный вопрос, также поставленный В. Н. Латышевым, решается положительно [57, 19, 29].

Задача о построении конечно определенной бесконечной нильполугруппы имеет интерпретацию в этих терминах. Рассмотрим цепочку локально взаимодействующих конечных автоматов. У них есть цвета корпусов. Если автомат объявляет себя нулем (совершает самоубийство), то вся цепочка погибает. Мы задаем локальный закон взаимодействия, но начальные внутренние состояния автоматов могут быть любыми. Можно ли добиться того, чтобы преобразования были обратимы (если $u = v$, то $v = u$), при этом существовали сколь угодно длинные живые цепочки, и чтобы любая цепочка, у которой несколько раз подряд повторились цвета корпусов, погибала.

Хотя решение проблемы построения бесконечной нильполугруппы было достигнуто другими (геометрическими) методами, данная интерпретация демонстрирует связь с самоорганизующимися системами и может быть интересной с точки зрения получения результата в этой области. Иначе говоря, задание определяющих соотношений приводит к системе, обладающей интересными свойствами, сходными с самоорганизацией. Есть основания полагать что метод построения конечно определенной полугруппы может быть использован в качестве алгоритмического метода.

6.2. Идея подхода к конструированию. Мозаики. Пусть W – бесквадратное слово над алфавитом из трех букв. Если каждое его неподслово (т.е. антислово) объявить нулем, то естественно возникающая полугруппа слов обладает тождеством $x^2 = 0$. Однако естественная конструкция, связанная с заданием множества нулевых слов как подслов слов из некоторого семейства в конечно определенном случае работает плохо.

Невозможно задать конечно определенную нильпотентную нильполугруппу только *мономиальными* соотношениями, т.е. соотношениями типа $v = 0$. Ибо если есть конечный список запретов и бесконечное слово без запрещенных подслов, то есть и бесконечное *периодическое* слово также без запрещенных подслов.

Итак, в данном случае, не получается набором локальных правил-запретов добиться того, чтобы не было периодичности. Однако, существует подобная ситуация, в которой это возможно, и это - аперидические мозаики. Известно, что существуют конечные наборы многоугольников (плиток) которыми можно замостить плоскость лишь непериодически.

Впервые такой набор был построен Робертом Бергером [61]. В дальнейшем были построены более простые примеры, например, Рафаэлем Робинсоном [87]. Широко известна также мозаика Пенроуза. Итак, имеются контактные правила, для которых:

- Существует замощение всей плоскости, удовлетворяющее запретам.
- Однако таких периодических замощений не существует.

Итак, в двумерной ситуации набором локальных правил удастся задать отсутствие периодичности. Как использовать это при построении нильполугруппы? Если бы можно было бы умножать слева-справа-сверху-снизу, то такого рода объекты можно было бы построить.

Но как придать всему этому смысл? Будем интерпретировать элементы полугруппы как пути на мозаике (дальнейший анализ показывает, что удобно иметь дело с кратчайшими путями – иначе можно много раз проходить один и тот же цикл). Буквы кодируют плитки и переходы между ними. Если локальный непорядок (два символа плитки без символа перехода между ними и т.д.) – то произведение ноль. Кроме того, если локальный участок не располагается на мозаике, или не располагается как участок кратчайшего пути – то он также нулевой.

Если же любую пару узлов, соединяемую кратчайшим путем с кодом s_1 можно соединить кратчайшим путем с кодом s_2 и наоборот, то $s_1 = s_2$.

Итак, пусть есть периодическое слово $U = W^n$. Начинаем добавлять клетки к слову U , локально перебрасывая пути. Оно окружается мозаикой. Поскольку U периодично, то не может быть расположено на нашей мозаике. Поэтому в какой-то момент вставлять клетки не получится и мы доберемся до локального участка, несовместимого с мозаикой. Тем самым устанавливается равенство слова $U = W^n$ нулю.

Таким образом, возникает мозаика со своей глобальной структурой, которая и обеспечивает аperiodичность. Локальные правила задают эту самую структуру, и путь, «перекидывание» которого задает область на мозаике. Возникают три языка: геометрический язык, описывающий глобальное поведение комплекса, комбинаторно геометрический язык контактов (локальных правил) и полугрупповой язык соотношений – переброски путей. Для решения задачи следует научиться переводить с одного языка на другой и, главное, обеспечить саму эту возможность.

6.3. Аperiodические мозаики. Макет доказательства.

6.3.1. *Иерархия и аperiodичность.* Рассмотрим подстановочный способ получения неperiodических замощений. Пусть имеется конечное число типов плиток и мы задаем правила, по которым из нескольких маленьких плиток можно составлять большие макроплитки тех же типов.

Пример. *Плитки могут быть квадратами A и B , при этом, чтобы составить квадрат A второго уровня, нужно взять четыре квадрата A , A, A, B . А чтобы составить квадрат B , нужно взять четыре квадрата $B A B A$.*

Таким образом, получается иерархическая система. Каждую плитку можно разбить на требуемое число уровней иерархии. Можно показать, что получаемое замощение будет неperiodично. Аналогичный способ построения используется в подстановочных системах, например, с помощью подстановок $1 \rightarrow 10, 0 \rightarrow 01$ получается бескубное слово

1001011001101001 ...

Оказывается, язык граничных условий и язык иерархий схожи. А именно, частно иерархическую систему можно задать конечным числом граничных условий.

Пусть имеется конечное число типов плиток, причем заданы правила иерархии, по которым плитка уровня n составляется из нескольких плиток уровня $n - 1$. Тогда для начального набора плиток первого уровня можно задать конечную систему граничных условий так, чтобы задавалась мозаика, получаемая при иерархическом способе задания.

Иерархичность системы плиток гарантирует непериодичность замощения. Вследствие этого можно задавать с помощью граничных условий мозаики, которые будут с гарантией непериодическими.

6.3.2. *Демо-версия доказательства.* Рассмотрим одну из классических мозаик – знаменитую *мозаику Пенроуза* (см. рисунок 1).

Конструкция мозаики Пенроуза. Используются плитки двух видов – толстый и тонкий ромбы. Есть граничные условия: стороны каждого ромба раскрашены в две пары цветов. Соприкасаться два ромба могут только сторонами двух цветов, образующих пару. На рисунке 1 цвета обозначены внешними и внутренними насечками двух типов.

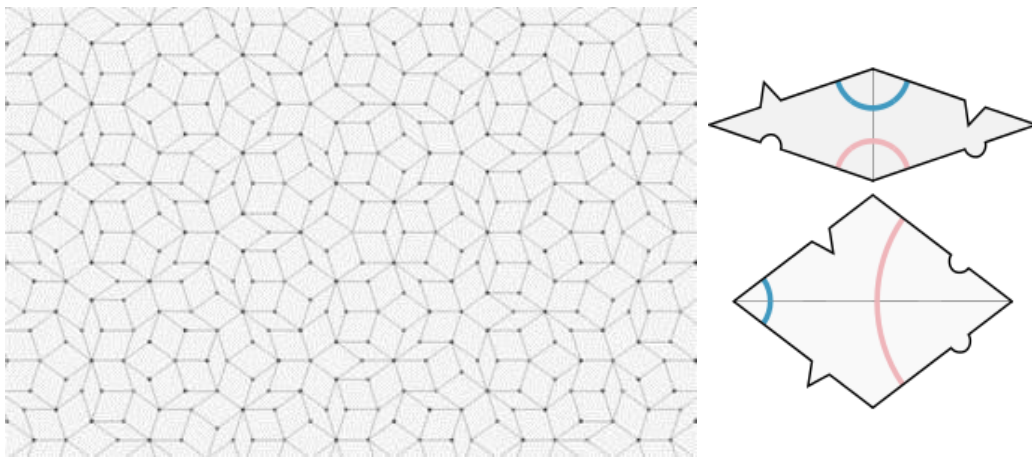


Рис. 1. Мозаика Пенроуза.

Конструкция полугруппы мозаики Пенроуза. Легко видеть, возможно конечное количество типов узлов-вершин где сходятся несколько плиток. Кроме того, ребра в мозаике могут иметь десять возможных направлений. Можно выписать все возможные типы узлов и обозначить их буквами алфавита. Теперь последовательность букв (слово) будет кодировать последовательность узлов, которые мы проходим вдоль пути.

Для каждого узла введем также два параметра: по какому ребру мы в него вошли и по какому ребру мы вышли (включая информацию о цветах ребер). Теперь можно расширить алфавит, добавив буквы для всевозможных сочетаний параметров для разных типов узлов. Некоторые последовательности букв с гарантией не смогут представлять путь на мозаике (например, если ребро, по которому мы пришли в узел не соответствует по цвету ребру, по которому мы вышли из предыдущего узла). Такие последовательности мы будем заносить в список запрещенных.

Некоторые пути на мозаике можно объявить *эквивалентными*: например путь по двум соседним ребрам ромба эквивалентен пути по другой паре сторон. Можно выписать все такие эквивалентности для разных вариантов получающихся узлов и получить полный конечный список. Тогда, с помощью локальных замен, можно переводить одни пути в другие.

Таким образом, с мозаикой Пенроуза можно связать конечно определенную полугруппу, где словам соответствуют пути. Запрещенные пути – это нулевые слова. Можно также запретить пути, которые не являются кратчайшими между двумя узлами. Для этого нужно сначала внести в список запрещенных короткие такие пути. После этого можно

показать что с помощью локальных замен любой не кратчайший путь приводится к виду содержащему запрещенный короткий подпуть.

В случае, если бы можно было бы показать, что любой путь, не вкладывающийся в мозаику, приводится к нулю с помощью указанных локальных правил, получающаяся полугруппа была бы нильполугруппой, так как на мозаике не лежит периодических путей.

Почему нужна другая мозаика. Проблема заключается в том, что на мозаике Периуза есть пути, которые недостаточно сильно меняются локальными заменами, то есть, недостаточно «извиваются». Это приводит к тому, что можно сконструировать путь, каждый локальный кусок которого может быть вложен в мозаику, но весь путь не может быть вложен. Локальные замены меняют его незначительно и преобразовать его в достаточной мере, чтобы диагностировать несоответствие мозаике, не получается.

В целом, каждый путь можно трактовать как массив информации о его окрестности. Когда мы производим локальные замены, происходит перенос информации вдоль пути. В случае, если пути можно шевелить незначительно, канал переноса информации будет ограничен, что не позволит выявить ситуацию, когда длинный кусок пути не может являться частью мозаики. (Например, когда путь – это степень разрешенного слова.)

6.4. Язык контактов vs язык соотношений. Подклейки. Итак, если осуществлять нашу программу на базе классических мозаик, то возникают трудности, связанные с тем, что в некоторых направлениях геодезические пути не поддаются изгибу и вокруг них ничего из переброски не наращивается. А именно достаточно протяженный в двух измерениях кусок мозаики обеспечивает вычислительный процесс.

Перевод с языка соотношений (т.е. движения геодезического пути) на язык контактов вещь более сложная и обеспечить его возможность не так просто. Чтобы локальное шевеление геодезической заполнило достаточную область, пространство должно быть *равномерно-эллиптическим*. Пространство называется *равномерно-эллиптическим*, если любые две точки A и B на расстоянии D соединяются системой геодезических, образующих диск ширины $\lambda \cdot D$ для некоторой глобальной константы $\lambda > 0$. (Априори не очевидно, что такое пространство существует.) Такое пространство следует собрать из мозаики и установить аналог теоремы Гудмана-Штраусса для этой сборки.

Равномерно-эллиптическое пространство строится из подстановочной системы, указанной на рисунке 2 при этом следует озаботиться тем, чтобы степени узлов были бы ограничены, что усложняет конструкцию, вынуждая сделать композицию разных подстановок.

Мы хотим добиться того, что никакой узел X на пути из A в B не являлся обязательным пунктом посещения (узким местом). Для этого вводятся *подклейки*. Для некоторых путей AXB мы будем вклеивать макроплитку $AXBZ$, где Z – новая создаваемая вершина, вне плоскости AXB . На дальнейших этапах разбиения проводятся подклейки к подклейкам. Если путь устроен так, что мы входим внутрь подклейки, а потом возвращаемся из нее, то участок на пути, находящийся вне базовой плоскости все время является односвязным.

Это, в частности, означает, что нельзя деформировать участок пути в подклейку так, чтобы он частично стал лежать в базовой плоскости. Кроме того, размеры подклеек к плиткам, подклеек к подклейкам и т.д. экспоненциально убывают достаточно быстро. Тем самым, помимо всего прочего, обеспечивается гомотопическая тривиальность комплекса, образованного «подклейками».

6.5. Последовательная канонизация. Завершение доказательства. Доказательство завершается так. Рассмотрим слово. Надо его либо привести к кодировке, соответствующей пути на комплексе (тем самым оно неперiodично), либо к нулю. Оно последовательно приводится к k -каноническому виду и при этом k растет, т.е. оно состоит из участков границ плиток k -го уровня иерархии, кроме начала и конца, целиком содержащихся в плитке уровня $k - 1$ (возможно в подклейке $(k - 1)$ -го уровня) и при этом являющихся $(k - 1)$ -каноническими.

Далее с помощью соотношений (в том числе отвечающих выходу в подклейку) проверяется согласование соседних участков пути, расположенных на границах плиток k -го уровня, их нахождение в $(k + 1)$ -ом уровне или возможность находиться в двух соседних плитках $(k + 1)$ -го уровня. Отсутствие согласования означает, что пути с такой кодировкой не существует на комплексе – т.е. в этом случае слово можно привести к нулю.

В начале рассматривается плоский процесс. Если имеются команды входа в подклейку и выхода из нее, то мы преобразуем слово между ними и производим сокращение – убирается один выход в подклейку.

Согласование означает возможность преобразования к $(k + 1)$ -каноническому виду, после чего процесс повторяется. Он заканчивается канонической формой слова. В нашем случае каноничность не означает однозначности, поскольку можно выбирать разные стороны плиток. Наверное, существует такой выбор – но он более сложен и ситуация похожа на теорию канонической формы элементов в гиперболических (или в более общем случае, в группах с неположительной кривизной) развитую И. А. Рипсом, когда вначале строится предканоническая форма (для данного уровня иерархии), потом осуществляется выбор.

6.6. Аперидические замощения в конструкции. Как уже говорилось, существуют конечные наборы многоугольников (плиток) которыми можно замостить плоскость лишь неперидически. Методы построения таких мозаик, как правило, опираются на иерархические правила построения: задаются универсальные правила построения плиток уровня $n + 1$ из плиток уровня n , для нескольких типов плиток A_1, \dots, A_k . Х. Гудман-Штраусс [80] показал, что иерархические мозаики можно получить, задав конечное число локальных правил. Таким образом, локальные условия (конечность набора) могут приводить к глобальному эффекту (неперидичности замощения).

Итак, основной задачей является конструирование мозаики, в которой указанные выше трудности были бы решены. Для этого она должна обладать несколькими свойствами:

- 1. Локальная конечность:** Речь идет о конечности числа возможных типов узлов, конечности изначально задаваемых пар эквивалентных путей, а также конечности списка запрещенных путей.
- 2. Возможность «шевеления» любого пути:** Любой достаточно длинный путь, соединяющий узлы A и B может быть переведен локальными заменами в другой путь, отличающийся достаточно сильно от начального.
 Более точно, пусть длина пути равна n и точка M – его середина (или такая точка, что расстояния вдоль путей AM и MB различаются на 1). Пусть $AM'B$ – эквивалентный путь, M' – соответствующая M точка. Пусть $R_{AMB}(n)$ – максимальное расстояние от M до M' по всем эквивалентным путям $AM'B$. Требуемое нами условие означает, что $R_{AMB}(n)$ является неограниченной возрастающей функцией от n .
- 3. Аперидичность:** На мозаике не должно быть путей, отвечающих перидическим словам.

Как уже говорилось, мы используем геометрическую интерпретацию для алгебраических построений. Запрет для двух (или более) плиток находиться рядом друг с другом

схож с запретом для двух букв стоять рядом в разрешенном слове. Возникает интерпретация слова как последовательности плиток на выложенной мозаике. Апериодичность мозаики приводит к непериодичному характеру таких «плиточных слов». В свою очередь, непериодических замощений можно добиться, если применять иерархический способ построения.

В связи с этим используются языки плиточных примыканий и иерархий. Эти языки во многом схожи, например, заданные правила иерархии, когда плитки A_1, \dots, A_k уровня $n + 1$ составляются из плиток A_1, \dots, A_k уровня n , можно выразить с помощью конечного множества локальных правил для набора A_1, \dots, A_k . Эти локальные правила будут порождать те же непериодические мозаики что и исходные правила иерархии.

Дальнейшее развитие этих языков приводит к появлению более универсального языка путей на графе. То есть плиточная мозаика рассматривается как граф, где вершины это узлы мозаики, а ребра – границы плиток. В этом смысле понятие плитки можно обобщить, рассматривая их уже как локальные подграфы из которых, с помощью локальных правил, можно составлять граф, покрывающий плоскость.

Аналогом буквы будет тип вершины графа, аналогом слова – путь, проходящий через несколько вершин. Аналогом соотношения будет эквивалентность между путями с общими концами: например, в простом 4-цикле $ABCD$ выполнено соотношение $ABC = ADC$. Помимо таких, есть также мономиальные соотношения, выражающие идею о невозможности существования какого-то пути на мозаике. Также, для обеспечения необходимого контроля над множеством ненулевых слов, вводятся мономиальные соотношения, обнуляющие слова, соответствующие некрайчайшим путям. Оказывается, что при этом можно обойтись конечным числом соотношений. Немонмиальные соотношения, при этом, не меняют длины слова.

Язык путей на мозаике-графе позволяет выразить те же концепции и определить те же мозаики, что и языки иерархических плиток или граничных условий. Таким образом возникает связанная с мозаикой конечно определенная полугруппа с набором свойств, индуцированных мозаикой.

Для построения нильполугруппы используется мозаика сгенерированная с помощью следующего иерархического правила разбиения (рисунок 2).

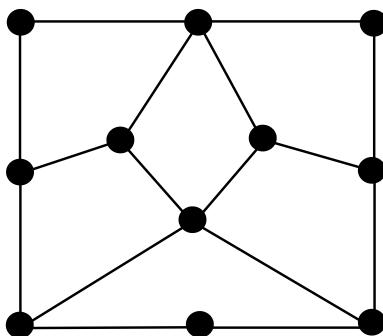


Рис. 2. Правило разбиения.

От мозаики нужно потребовать ряд дополнительных свойств. В частности, любой длинный путь должен допускать возможность «шевеления» то есть, локальных преобразований над ним, позволяющих в достаточной мере менять его. Для достижения этого свойства к плоской мозаике производятся «подклейки», представляющие собой небольшие плоские подграфы, не лежащие в исходной плоскости, и позволяющие обходить «узкие места» на исходном плоском графе. Структура подклеек также имеет иерархическую природу и так же может быть задана на языке преобразований путей конечным образом.

В итоге мы получаем граф, обладающий набором важных для нас свойств, в котором любой путь, соединяющий произвольные точки A и B , является членом семейства геодезических эквивалентных друг другу путей, соединяющих эти точки. Причем эквивалентность двух путей из этого семейства может быть получена путем цепочки локальных преобразований переводящих один путь в другой. «Шевеление» пути играет роль передачи информации по пути. Фактически, определяющие соотношения задают правила передачи информации по пути. Если задан произвольный длинный путь, мы можем начать работать над ним, совершая локальные преобразования. При этом возможна альтернатива:

- (1) В результате этой работы можно получить внутри не кратчайший подпуть, либо подпуть указанный в числе запрещенных. В этом случае наш путь представляет нулевое слово.
- (2) В результате этой работы мы восстанавливаем некоторый кусок мозаики, внутри которого лежит пучок геодезических путей, эквивалентных нашему.

Мозаика не может содержать в себе путей, выражаемых периодическим словом. То есть, все периодические слова могут быть приведены к нулю локальными преобразованиями. При этом геодезические пути, лежащие на мозаике не приводятся к нулю, и могут иметь любую длину. Таким образом полугруппа, соответствующая построенному графу-мозаике, будет конечно определенной нильполугруппой.

7. Содержание и структура диссертации

Диссертация состоит из семи глав, включая введение, и списка литературы.

Во введении, первой главе, проводится обзор результатов комбинаторной алгебры, относящихся к проблемам бернсайдовского типа, а также результатов, посвященных конечно определенному случаю.

Во второй главе обсуждаются методы построений в конечно определенном случае, использующие автоматные методы, в частности реализации машины Тьюринга в конечно определенных объектах. В частности, такими методами получаются результаты автора: о построении алгебры с конечным базисом Гребнера, но с неразрешимой проблемой делителей нуля, а также о построении алгебры с конечным базисом Гребнера, но с неразрешимой проблемой нильпотентности.

третья, четвертая и пятая главы посвящены изложению основного результата диссертации, построения бесконечной конечно определенной нильполугруппы.

В третьей главе проводится геометрическая часть построения. Строится последовательность комплексов со свойствами равномерной эллиптичности. В дальнейшем эта геометрическая структура используется как пространство путей. Каждый путь на комплексе (точнее, его кодировка) будет отвечать полугрупповому слову.

В четвертой главе проводится комбинаторная часть построения. Доказывается основное свойство построенной последовательности комплексов – слабая детерминированность. Слабая детерминированность доказывает взаимно однозначное соответствие между кодировками путей, проходящим по двум смежным сторонам клетки двумя различными способами. Это свойство позволяет корректно ввести определяющие соотношения на полугруппе путей: теперь пути (и слова, сопоставленные их кодировкам) являются эквивалентными. Что в свою очередь позволяет приводить кодировки путей к каноническому виду и вообще дает контроль над определяющими соотношениями и следствиями.

В пятой главе проводится финализация построения. Описывается алгоритм приведения каждого слова к канонической форме. Доказывается, что девятая степень каждого слова приводится к нулю.

В шестой главе обсуждается метод канонической формы Рипса: геометрический подход к построению бернсайдовской группы. Геометрические методы в группах во многом перекликаются с мозаичными идеями в полугруппах, обсуждаемых в 3-5 главах.

В седьмой главе обсуждаются смежные вопросы к идеям основной части диссертации. Одна часть посвящена поведению автоматов при обходе лабиринта, заданного бернсайдовской группой. Далее обсуждаются вопросы, связанные с эволюцией клеточного автомата на регулярной решетке. Третья часть (Приложение) – применение мозаик в геометрии при построении самозаклинивающихся структур.

8. Результаты, выносимые на защиту

1. Метод построения конечно определенных объектов с контролем над следствиями из определяющих отношений. Каждое слово представляется в виде пути на геометрическом комплексе с набором свойств.

2. Конструкция бесконечной конечно определенной полугруппы с тождеством $x^9 = 0$ (решение проблемы Шеврина-Сапира о существовании бесконечной конечно определенной нильполугруппы).

3. Конструкция алгебры с конечным базисом Гребнера, но неразрешимой проблемой делителей нуля.

4. Конструкция алгебры с конечным базисом Гребнера, но неразрешимой проблемой нильпотентности.

5. Конструкция конечно определенной полугруппы, содержащей бесконечный идеал, свободный от квадратов.

9. Апробация и доклады по теме диссертации

Основные результаты диссертации многократно докладывались на семинарах С. И. Адяна, С. П. Новикова, а также на следующих семинарах и конференциях:

- (1) International Conference on Algebra and Related Topics (ICCA), The Center of Combinatorial Algebra, South China Normal University. Гуаньчжоу, 23-27 июня 2009.
- (2) Special session dedicated to prof. V. Plotkin, International Conference "Modern Algebra and Its Applications" Батуми, 19-25 сентября 2010.
- (3) Межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике, Долгопрудный, 17 октября 2012.
- (4) CIRM, Marseille, 2013, SubTile 2013 Pavages : systemes dynamiques, combinatoire, theorie des nombres, decidabilite, geometrie discrete, geometrie non-commutative. Марсель, Франция, 14-18 января 2013.
- (5) Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory, Stefan Banach International Mathematical Center, 2013, 14. Бедлево, Польша, 14-20 июля 2013
- (6) Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, XII межд. конф., посв. 80-летию проф. В. Н. Латышева, Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, Тула, 21–25 апреля 2014.
- (7) Дискретная и вычислительная геометрия, Москва, ИППИ РАН 23 сентября 2014.
- (8) Geometric and Combinatorial Group Theory In honor of Eliyahu Rips, Givat-Ram (invited talk) Einstein Institute of Mathematics, Jerusalem. 14-19 декабря 2014.
- (9) Алгоритмические вопросы алгебры и логики, Москва, ГЗ МГУ, 14 апреля 2015.
- (10) Growth, Symbolic Dynamics and Combinatorics of Words in Groups, Ecole normale superieure, Париж, 1-5 июня 2015.

- (11) Groups and Rings, Theory and Applications, GRiTA2015, Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences, София, Болгария, 15-22 июля, 2015.
- (12) First Joint International Meeting of the Israel Mathematical Union and the Mexican Mathematical Society , Instituto Tecnológico de Oaxaca, 2015, 13 Оаксака, 7-11 сентября 2015.
- (13) *Ivanov-Pogodaev Ilya*, Groups, Algebras and Identities, Honoring Boris Plotkin's 90th Birthday, Jerusalem Hebrew University, Jerusalem, Bar Ilan University, Tel-Aviv, Иерусалим, 20-24 марта 2016.
- (14) Transversal Aspects of Tilings, Олерон, Франция, 6-10 июня 2016.
- (15) Мальцевские чтения, Новосибирск, Россия 16–20 ноября 2020 года
- (16) Новосибирск, Мальцевские чтения, Россия 13-17 ноября 2023 года
- (17) Polynomial Computer Algebra 2025 (September 29 - October 4, 2025, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia)

Кроме того, по смежным с данной диссертацией темам были проведены проекты со школьниками и студентами.

1. Летняя школа «Современная Математика» им Виталия Арнольда, Июль 2019 года. «Апериодические замощения и алгебраические конструкции и computer-science» был прочитан мини-курс из 4 лекций.

<https://old.mccme.ru//dubna//2019/courses/ivanov-kanel.html>

2. Проектная смена в образовательном центре Сириус, Май 2022. Был проведен проект по математической логике.

3. Проектная смена в образовательном центре Сириус, Май 2023. Был проведен проект по апериодическим мозаикам и подстановочным системам.

4. Проектная смена в образовательном центре Сириус, Май 2024. Был проведен проект по комбинаторной теории групп и проблеме Бернсайда.

5. Летняя конференция Турнира Городов, август 2018. Был проведен проект по апериодическим мозаикам и подстановочным системам.

10. Заключение

Диссертация открыла новый путь к построению конечно определенных алгебраических объектов. Возможность представлять слова в качестве кодировок путей на геометрических комплексах позволяет получить эффективный метод контроля определяющих соотношений. Этот метод позволил решить крупную алгебраическую проблему Шеврина-Сапира о существовании конечно определенной бесконечной нильполугруппы. В перспективе развитие этого метода может привести к прогрессу в других проблемах, связанных с построением конечно определенных объектов - проблеме Латышева о конечно определенном нилькольце и проблеме Бернсайда в конечно определенном случае.

Помимо решения проблемы Шеврина-Сапира, диссертация содержит решение ряда вопросов конструктивного характера, связанных с конечно определенными построениями и алгоритмическими методами. В частности, построены алгебра с конечным базисом Гребнера и неразрешимой проблемой делителей нуля и алгебра с конечным базисом Гребнера и неразрешимой проблемой нильпотентности, это вопросы, поставленные В. Н. Латышевым.

Диссертация также содержит обзор перспективных направлений, связанных с алгоритмическими методами и применением мозаик.

11. Благодарности

Автор глубоко благодарен своим научным консультантам — академику РАН, профессору Алексею Львовичу Семенову и доктору физико-математических наук, профессору Алексею Яковлевичу Белову за обсуждение результатов, постоянное внимание к работе и поддержку.

Автор также благодарен доктору физико-математических наук, профессору Николаю Константиновичу Верещагину, кандидату физико-математических наук, Александру Ханиевичу Шеню, доктору физико-математических наук, профессору Анне Геннадьевне Эршлер за обсуждения различных математических вопросов, связанных с этой работой.

Диссертация посвящается памяти Виктора Николаевича Латышева и

Александра Васильевича Михалёва, многолетним руководителям научного семинара, создавшим уникальную атмосферу на кафедре Высшей алгебры механико-математического факультета МГУ.

Автоматный подход при построении конечно определенных объектов

При построении разного рода объектов трудности вызывает контроль над следствиями из вводимых соотношений, в особенности тогда, когда следует доказать, что некое соотношение не является следствием заданных. Зачастую используются три метода контроля над соотношениями:

- (1) Базис Гребнера и бриллиантовая лемма;
- (2) Теория малых сокращений;
- (3) Реализация машины Тьюринга или машины Минского.

В конечно определенном случае вопросы, связанные с построением объектов, обладающих заданными свойствами, сильно усложняются и наибольшее значение приобретает третий метод. При этом буква интерпретируется как состояние конечного автомата, а слово – как цепочка взаимодействующих конечных автоматов. Если число соотношений конечно, то это взаимодействие *локально* и мы получаем связь с задачами самоорганизации, типа задачи Майхилла о стрелках.

Задача Майхилла о стрелках

n роботов (конечных автоматов) шеренгой. У каждого автомата есть ружье, их задача произвести выстрел одновременно. У них, как минимум, три состояния, исходное, командир и выстрел. Также может быть сколько угодно много промежуточных состояний (но глобально ограниченное количество). Действует несколько условий:

1. Роботы действуют независимо по одной программе и общаются только по цепочке: по сигналам барабана (синхронизатора) в зависимости от своего состояния в момент $t - 1$ и состояния двух соседей переходят в новое состояние. Исключение — крайние роботы, у которых только один сосед; у них собственные программы.

2. Все три программы, если робот и его соседи в исходном состоянии, ничего не должны делать. В момент $t = 0$ крайнего левого переводят в состояние «командир».

Существуют ли такие три программы (набор состояний и три комплекта правил перехода — для командира, замыкающего и остальных роботов), чтобы при любом n они одновременно (на одном ударе барабана) перешли в состояние «выстрел»?

Первое решение этой задачи было найдено Джоном Маккарти и Марвином Минским. В 1962 году Эйити Гото нашел оптимальное решение, позволяющее сделать выстрел за $2n - 2$ хода, минимальное возможное число ходов.

На этой задаче в самом простом виде видно реализацию автоматного подхода. Простейшее решение состоит в том, чтобы реализовать прохождение двух типов сигналов, один с максимальной скоростью (принял, на следующем ходу передал), а второй со скоростью втрое меньшей (принял, подождал два такта и потом передал). В состоянии командир эти сигналы выпускаются с левого края, автомат на противоположном краю отражает сигналы в обратную сторону. Из-за соотношения скоростей, сигналы встретятся на середине (либо почти на середине). Автомат, получивший одновременно два эти два сигнала, переходит в состояние командир и опять рассылает новые два сигнала тех же типов влево и вправо, что обеспечивает индуктивный переход (синхронизированное протекание процесса двух одинаковых частей слева и справа).

Оптимальное решение большое число состояний, но все равно остается в рамках передачи сигналов нескольких типов.

Данная модель, несколько автоматов в ряду, соседние из которых могут взаимодействовать, является типичной в алгебре. Аналогом автомата является буква, несколько букв подряд можно менять на другую комбинацию букв - это соответствует определяющему соотношению. С помощью автоматного подхода можно реализовать несколько конструкций конечно определенных структур с интересными свойствами.

Например, при условии, что в слове есть фиксированная буква, конечного числа соотношений хватает, чтобы обеспечить отсутствие квадратов в слове.

1. Конечно определенная полугруппа, с бесконечным бесквадратным идеалом

ТЕОРЕМА 2.1. *Существует конечно определенная бесконечная полугруппа H с нулем, алфавит которой состоит из 14 букв, включающих a_1, a_2, a_3 и L , такая, что $LW = 0$ для любого слова W в алфавите a_1, a_2, a_3 , содержащего квадрат.*

План построения. Построение такой полугруппы проводится с помощью конструирования некоторой цепочки сигналов, порождаемых буквой L . Сигналы реализуются как коммутирующие буквы. Сначала устанавливаются три «головки», причем вторая и третья сначала находятся рядом. Между первой и третьей головкой бегают коммутирующая буква, имеющая два состояния по пути туда и обратно. В случае, если справа от головок находится одинаковые буквы a_i , происходит продвижение направо первой и третьей головки. В случае, если первая головка встречает вторую, применяется мономиальное соотношение и происходит обнуление слова.

Подробно про эту конструкцию можно прочитать в [9].

Рассмотрим алфавит Φ :

$$\{L, M, P, Q, R, g, s_1, s_2, t_1, t_2, t_3, a_1, a_2, a_3, 0\}.$$

Рассмотрим полугруппу \mathcal{H} с нулем, порожденную множеством слов из Φ . Наша цель построить конечное множество определяющих соотношений, задающих необходимую структуру на \mathcal{H} .

Рассмотрим следующий набор соотношений:

- (1) $xL = xM = 0$, где x любая буква из Φ ;
- (2) $L = MPg$,
- (3) $ga_i = a_i g$, $i = 1 \dots 3$
- (4) $gx = 0$, где x любая буква из Φ кроме a_1, a_2, a_3 ;
- (5) $a_i g a_j = a_i R s_1 Q a_j$, $i, j = 1 \dots 3$;
- (6) $t_i x = x t_i$, где $x \in \{R, a_1, a_2, a_3\}$, $i = 1 \dots 3$;
- (7) $P a_i t_i = a_i P s_1$;
- (8) $P a_j t_i = a_j P s_2$, $i, j = 1 \dots 3$, $i \neq j$;
- (9) $s_j a_i = a_i s_j$, $i = 1 \dots 3$, $j = 1, 2$;
- (10) $s_1 R = R s_1$;
- (11) $s_1 Q a_i = t_i a_i Q$, $i = 1 \dots 3$;
- (12) $P R s_1 = 0$;
- (13) $s_2 R a_i = a_i s_2 R$, $i = 1 \dots 3$;
- (14) $s_2 R Q a_i = R t_i a_i Q$, $i = 1 \dots 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если слово W содержит букву L тогда $W = LA$ для некоторого $A \in \{a_1, a_2, a_3\}^*$ или $W = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W содержит L . Как мы знаем, $xL = 0$, для любой буквы x (соотношение (1)), тогда L может быть только первой буквой слова W . Предположим $W = LU$, где $U \in \Phi^*$.

Имеем $LU \stackrel{(2)}{=} MPgU$. Мы использовали соотношение (2). Заметим, что $ga_i = a_i g$ и $gx = 0$ для $x \neq a_1, a_2, a_3$ (соотношения (3) и (4)). Таким образом если любая буква, кроме a_1, a_2 и a_3 есть в слове U , то W приводится к нулю.

Следующие три леммы нужны только для доказательства предложения 2.2.

ЛЕММА 2.1. Для любого слова $U \in \{a_1, a_2, a_3\}^*$ мы имеем $Pa_iURt_i = a_iPURs_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $Pa_iURt_i \stackrel{(6)}{=} Pa_it_iUR \stackrel{(7)}{=} a_iPs_1UR \stackrel{(9)}{=} a_iPU_s1R \stackrel{(10)}{=} a_iPURs_1$. □

ЛЕММА 2.2. Для любого слова $X \in \{a_1, a_2, a_3\}^*$ мы имеем $PXR_s1QX = XPR_s1XQ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = a_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_n}$. Тогда

$$\begin{aligned} PXR_s1QX &\equiv Pa_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_n}Rs_1Qa_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_n} \stackrel{(11)}{=} \\ Pa_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_n}Rt_{i_1}a_{i_1}Qa_{i_2}a_{i_3} \dots a_{i_n} &\stackrel{Lemma2.1}{=} a_{i_1}Pa_{i_2}a_{i_3} \dots a_{i_n}Rs_1a_{i_1}Qa_{i_2}a_{i_3} \dots a_{i_n} \stackrel{(9)}{=} \\ a_{i_1}Pa_{i_2}a_{i_3} \dots a_{i_n}Ra_{i_1}s_1Qa_{i_2}a_{i_3} \dots a_{i_n} &\stackrel{(11)}{=} a_{i_1}Pa_{i_2}a_{i_3} \dots a_{i_n}Ra_{i_1}t_{i_2}a_{i_2}Qa_{i_3} \dots a_{i_n} \stackrel{(6)}{=} \\ a_{i_1}Pa_{i_2}a_{i_3} \dots a_{i_n}Rt_{i_2}a_{i_1}a_{i_2}Qa_{i_3} \dots a_{i_n} &\stackrel{Lemma2.1}{=} a_{i_1}a_{i_2}Pa_{i_3}a_{i_4} \dots a_{i_n}Rs_1a_{i_1}a_{i_2}Qa_{i_3} \dots a_{i_n} \stackrel{(9)}{=} \\ a_{i_1}a_{i_2}Pa_{i_3}a_{i_4} \dots a_{i_n}Ra_{i_1}a_{i_2}s_1Qa_{i_3} \dots a_{i_n} &\stackrel{(11)}{=} a_{i_1}a_{i_2}Pa_{i_3}a_{i_4} \dots a_{i_n}Ra_{i_1}a_{i_2}t_{i_3}a_{i_3}Qa_{i_4} \dots a_{i_n} \stackrel{(6)}{=} \\ a_{i_1}a_{i_2}Pa_{i_3}a_{i_4} \dots a_{i_n}Rt_{i_3}a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}Qa_{i_4} \dots a_{i_n} &\stackrel{Lemma2.1}{=} \dots \equiv XPR_s1XQ. \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 2.3. Пусть $i, j, k \in \{1 \dots 3\}$ и $i \neq j$. Тогда $Pga_i a_j a_k = a_i Pga_j a_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $Pga_i a_j a_k \stackrel{(3)}{=} Pa_i g a_j a_k \stackrel{(5)}{=} Pa_i Rs_1 Q a_j a_k \stackrel{(11)}{=} Pa_i Rt_j a_j Q a_k \stackrel{(6)}{=} Pa_i t_j Ra_j Q a_k \stackrel{(8)}{=} a_i Ps_2 Ra_j Q a_k \stackrel{(13)}{=} a_i Pa_j s_2 R Q a_k \stackrel{(14)}{=} a_i Pa_j Rt_k a_k Q \stackrel{(11)}{=} a_i Pa_j Rs_1 Q a_k \stackrel{(5)}{=} a_i Pa_j g a_k \stackrel{(3)}{=} a_i Pga_j a_k$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $X, Z \in \Phi^*$ и $Y \in \Phi^+$. (Y – непустое слово. Тогда $LXYYZ = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.1, мы можем считать, что слова X, Y, Z состоят из букв a_1, a_2, a_3 .

$LXYYZ \stackrel{(1)}{=} MPgXYYZ \stackrel{Lemma2.3}{=} MXPgYYZ \stackrel{(3)}{=} MXPYgY \stackrel{(5)}{=} MXPYRs_1QY \stackrel{Lemma2.2}{=} MXYPR_s1YQ \stackrel{(12)}{=} 0$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть ненулевое слово W содержит букву $contain L$. Тогда для слова U эквивалентного W с учетом определяющих соотношений \mathcal{H} , есть три возможности:

- (i) $U \equiv LA$ для некоторого $A \in \{a_1, a_2, a_3\}^*$;
- (ii) $U \equiv MA_1PA_2gA_3$, где $A_1A_2A_3 \in \{a_1, a_2, a_3\}^*$;
- (iii) $U \equiv MA_1PA_2RA_3QA_4$, где $A_1A_2A_3A_4 \in \{a_1, a_2, a_3\}^*x\{a_1, a_2, a_3\}^*$ для некоторого $x \in \{t_1, t_2, t_3, s_1, s_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого ненулевого слова W введем следующие обозначения:

$I_0(W)$ – количество букв L и M в слове W .

$I_1(W)$ – количество букв L и P в слове W .

$I_2(W)$ – количество букв L, g, R в слове W .

$I_3(W)$ – количество букв L, g, Q в слове W .

$I_4(W)$ – количество букв $L, g, t_1, t_2, t_3, s_1, s_2$ в слове W .

Заметим, что числа I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 равны для левых и правых чатей для любого определяющего соотношения.

Таким образом, эти числа являются инвариантами относительно эквивалентности слов.

Согласно предложению 2.1, W может быть преобразовано к LA , где A произведение букв a_1, a_2, a_3 . Заметим, что $I_0(LA) = I_1(LA) = I_2(LA) = I_3(LA) = I_4(LA) = 1$. Значит, для любого ненулевого слова все пять инвариантов равны 1.

Если U содержит букву L , тогда оно не содержит букв $M, P, g, R, Q, t_1, t_2, t_3, s_1$ и s_2 . В этом случае реализуется возможность (i).

Допустим, U не содержит L . Тогда оно содержит M ($I_0 = 1$), и M может быть только первой буквой слева, так как у нас есть только одно соотношение содержащее L и M : это $L = MPg$. Следовательно, только одна буква P в слове, так как $I_1 = 1$. Рассмотрим два случая.

Пусть слово U содержит g . Тогда она там единственная и U не содержит R, Q, t_1, t_2, t_3, s_1 и s_2 так как $I_2 = I_3 = I_4 = 1$. Тогда реализуется возможность (ii).

Пусть теперь U не содержит g . Так как $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 1$, слово U содержит ровно одну P , одну R , одну Q и одну букву из множества $\{t_1, t_2, t_3, s_1, s_2\}$. Согласно предложению 2.1 все слова могут быть приведены к типу LA , который может быть приведен к виду содержащему буквы P, R и Q . У нас нет соотношений, которые могут поменять этот порядок. В этом случае у нас реализуется возможность (iii). \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Если $U \in \{a_1, a_2, a_3\}^+$ свободно от квадратов Тогда $LU \neq 0$.

Предположим, что $LU = 0$. Тогда существует цепочка равных слов, начинающаяся с LU и заканчивающаяся нулем. Переход от одного слова до другого в цепочке использует некоторое соотношение. Последний такой переход должен использовать одно из следующих соотношений: $xL = 0$, $xM = 0$, $gx = 0$, $PRs_1 = 0$. Разберем все возможности и проверим, что ни одна из них не может реализоваться.

Это не могут быть соотношения $xL = 0$ и $xM = 0$, так как буквы L и M должны быть только первыми в слове.

Также это не может быть соотношение $gx = 0$ так как если слово содержит g , то согласно Предложению 2.3 оно должно иметь вид $MA_1PA_2gA_3$, где $A_1A_2A_3$ состоит из a_1, a_2, a_3 .

Рассмотрим соотношение $PRs_1 = 0$.

Предположим, что существует цепочка эквивалентных слов, начинающаяся со слова $LU \equiv La_{i_1} \dots a_{i_s}$, и заканчивающаяся словом, содержащим PRs_1 в качестве подслова.

Пусть $Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_m$ минимальная такая цепочка, где $Z_1 = La_{i_1} \dots a_{i_s}$ and Z_m содержит подслово PRs_1 .

С учетом Предложения 2.3, каждое слово Z_i в цепочке удовлетворяет уникальному свойству из следующего списка:

1. Слово Z_i содержит одну букву L , а все остальные буквы в Z_i это a_i .
2. Слово Z_i содержит одну букву M , одну P , одну g , а все остальные буквы в слове Z_i это a_i .
3. Слово Z_i содержит одну букву M , одну P , одну R , одну Q , одну s_2 а все остальные буквы в слове Z_i это a_i .
4. Слово Z_i содержит одну букву M , одну P , одну R , одну Q , одну s_1 а все остальные буквы в слове Z_i это a_i .

5. Слово Z_i содержит одну букву M , одну P , одну R , одну Q , одну t_j (где $j = 1 \dots 3$) а все остальные буквы в слове Z_i это a_i .

Будем считать, что словам Z_i присвоен тип, от одного до пяти, в соответствии с указанными пятью возможностями. Первое слово имеет тип 1, а последнее слово имеет тип 4.

Выберем из Z_i слово первого типа с максимальным номером i_1 . Заметим, что изменение $Z_{i_1} \rightarrow Z_{i_1+1}$ может быть сделано лишь с помощью одного соотношения: $L = MPg$. Значит, Z_{i_1+1} принадлежит типу 2.

Пусть $i = i_2 > i_1$ максимальное число, такое что слово Z_i типа 2 следует за Z_{i_1} в цепочке. Заметим, что изменение $Z_{i_2} \rightarrow Z_{i_2+1}$ может быть сделано лишь с помощью одного соотношения: $a_i g a_j = a_i R s_1 Q a_j$. Значит, $Z_{i_2+1} \equiv M A_1 P A_2 R s_1 Q A_3$ для некоторого $A_1 \in \{a_1, a_2, a_3\}^*$, $A_2 \in \{a_1, a_2, a_3\}^+$, $A_3 \in \{a_1, a_2, a_3\}^+$. В частности, Z_{i_2+1} будет иметь тип 4. Заметим, что все слова после Z_{i_2} будут иметь тип 3, 4 или 5.

Раскрасим в белый цвет все слова типа 4 и в черный цвет все слова типа 5. Обозначим как $D_x(u)$ слова полученные удалением вхождений буквы x в u .

ЛЕММА 2.4. Пусть $j > i_2$ и $Z_j = \dots = Z_{j+k}$ цепочки преобразований. Где все слова имеют одинаковый цвет. Тогда для некоторого $x \in \{s_1, t_1, t_2, t_3\}$ мы получим:

$D_x(Z_j) \equiv \dots \equiv D_x(Z_{j+k})$, где $x = s_1$ если все слова белые или $x = t_i$ для некоторого фиксированного $i \in \{1, 2, 3\}$ если все слова черные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для белых слов мы используем только соотношения $s_1 a_i = a_i s_1$ and $s_1 R = R s_1$. Для черных слов мы используем только соотношения $t_i a_i = a_i t_i$ and $t_i R = R t_i$. В любом случае порядок букв a_1, a_2, a_3, M, P, R и Q будет одинаковый для все слов в цепочке. \square

Рассмотрим три случая.

Случай 1:

Если все слова после Z_{i_2} имеют тип 4, тогда с учетом факта 2.4,

мы получаем $D_{s_1}(Z_{i_2+1}) \equiv \dots \equiv D_{s_1}(Z_m) = M A_1 P A_2 R Q A_3$.

Так как слово $A_2 \in \{a_1, a_2, a_3\}^+$ непустое, невозможно преобразовать наше слово к слову, где P и R соседи, то есть получаем противоречие.

Случай 2: Предположим, все слова Z_i для $i > i_2$ имеют тип 4 и 5 (нет слова вида 3 в этом сегменте цепочки).

В этом случае все переходы используют соотношения $t_i a_i = a_i t_i$, $t_i R = R t_i$, $s_1 a_i = a_i s_1$, $s_1 R = R s_1$, $s_1 Q a_i = t_i a_i Q$ and $P a_i t_i = a_i P s_1$.

(Остальные соотношения используют буквы, которые не могут появиться в цепочке.)

Заметим, что соотношения $t_i x = x t_i$, $s_1 a_i = a_i s_1$, $s_1 R = R s_1$ не меняют цвет слова.

Соотношение $P a_i t_i = a_i P s_1$ меняет цвет с черного на белый, а соотношение $s_1 Q a_i = t_i a_i Q$ меняет цвет с белого на черный.

ЛЕММА 2.5. Допустим, что для некоторого $j > i_2$ слова Z_j и Z_{j+k+1} имеют одинаковый цвет, а все слова между ними: Z_{j+1}, \dots, Z_{j+k} имеют противоположный цвет. Если одно и то же соотношение используется для перехода от Z_j к Z_{j+1} и от Z_{j+k} к Z_{j+k+1} , тогда мы получаем $Z_j \equiv Z_{j+k+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что слова Z_j and Z_{j+k+1} черные, а все слова между ними – белые. Тогда соотношение $P a_i t_i = a_i P s_1$ использовано при переходе Z_j к Z_{j+1} и обратное соотношение $a_i P s_1 = P a_i t_i$ при переходе от Z_{j+k} к Z_{j+k+1} .

Учитывая 2.4 мы имеем $D_{s_1}(Z_{j+1}) \equiv D_{s_1}(Z_{j+k})$. Так как соотношение $P a_i t_i = a_i P s_1$ используется при переходе от Z_j к Z_{j+1} , буква s_1 является соседней справа к букве P в Z_{j+1} .

Учитывая, что то же соотношение используется при переходе от Z_{j+k} к Z_{j+k+1} , буква s_1 является соседней справа с буквой P в Z_{j+k} . Значит, $Z_{j+1} \equiv Z_{j+k}$. В итоге, $Z_j \equiv Z_{j+k+1}$.

Другой случай может быть проверен аналогичным способом. □

Рассмотрим последовательность соотношений, которые меняют цвет.

С учетом 2.5 и того, что цепочка выбрана минимально возможной, соотношения $Pa_it_i = a_iPs_1$ и $s_1Qa_i = t_ia_iQ$ применяются поочередно.

Пусть $A_3 \equiv a_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_k}$. Так как мы начинаем с белого слова $Z_{i_2+1} \equiv MA_1PA_2Rs_1QA_3$, для того, чтобы поменять цвет на черный мы можем использовать лишь соотношение $s_1Qa_{i_1} = t_{i_1}a_{i_1}Q$ которое продвигает Q через первую букву в A_3 . Чтобы поменять цвет с черного на белый следующий раз, нам нужно применить соотношение $Pa_{i_1}t_{i_1} = a_{i_1}Ps_1$ которое продвигает P через первую букву A_2 только если эта та же буква как и в слове A_3 . Далее аналогично. В итоге мы получим слово, содержащее PRs_1 в качестве подслова, только если слово A_2 является префиксом A_3 .

Случай 3: Теперь рассмотрим случай, когда есть слово типа 3 после Z_{i_2} в цепочке.

Пусть Z_{i_3} это последнее слово типа 3.

Переход $Z_{i_3} \rightarrow Z_{i_3+1}$ может быть проведен двумя способами: с помощью соотношения $Pa_it_i = a_jPs_2$, справа налево, или с помощью соотношения $s_2RQa_i = Rt_ia_iQ$ слева направо.

Заметим, что в обоих случаях слово Z_{i_3+1} черное (типа 5). Учитывая Предложение 2.3, для каждого $j > i_2$ слово Z_j переходит в $MPRQ$. Также, учитывая, что соотношения (1)–(14) не меняют порядок букв a_1, a_2 и a_3 в слове, Z_j преобразуется в $A_1A_2A_3$.

В первом случае мы имеем $Z_{i_3+1} \equiv MB_1Pa_it_iB_2RB_3QB_4$, где $B_k \in \{a_1, a_2, a_3\}^*$, and $B_1a_jB_2B_3B_4 \equiv A_1A_2A_3$.

Рассмотрим переходы меняющие тип слова. Мы можем использовать при этих переходах только соотношения $Pa_it_i = a_iPs_1$ и $s_1Qa_i = t_ia_iQ$. Рассмотрим первый такой переход.

Мы не можем использовать соотношение $Pa_it_i = a_iPs_1$ (так как $i \neq j$). Поэтому мы можем использовать только соотношение $s_1Qa_i = t_ia_iQ$, справа налево. Если мы используем $s_1Qa_i = t_ia_iQ$ слева направо, мы могли бы укоротить цепочку преобразований.

Поэтому мы можем использовать лишь соотношение $Pa_it_i = a_iPs_1$ справа налево. Далее мы опять можем использовать $Pa_it_i = a_iPs_1$ справа налево и так далее. Заметим, что буква R остается справа от P , и количество букв a_i между P и R увеличивается, поэтому они никогда не станут соседями.

Во втором случае мы применяем соотношение $s_2RQa_i = Rt_ia_iQ$ слева направо. Обозначим как PQ -расстояние количество букв a_i и s_j между P и Q . Можно проверить что PQ -расстояние не меняется при применении соотношений (6)–(14). Поэтому PQ -расстояние не меняется при переходе вдоль нашей цепочки, начинающейся с Z_{i_2} и будет не меньше 2.

После использования $s_2RQa_i = Rt_ia_iQ$ слева направо, мы имеем $Z_{i_3+1} \equiv MB_1PB_2Rt_ia_iQB_3$, где $B_k \in \{a_1, a_2, a_3\}^*$, and $B_1B_2a_iB_3 \equiv A_1A_2A_3$. Так как PQ расстояние больше или равно 2, слово B_2 не может быть пустым.

В остальной части цепочки мы можем использовать лишь соотношения $t_ia_iQ = s_1Qa_i$ и $a_iPs_1 = Pa_it_i$. Применяя аналогичные аргументы в Случае 2, можно показать что слово B_2 должно быть префиксом a_iB_3 .

Следовательно, если слово может быть приведено к нулю, оно содержит квадрат в качестве подслова. □

Теперь докажем основную теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2.1 Соотношения(1)–(14) Не меняют порядок букв a_1, a_2 and a_3 в слове. Используя теорему Туэ [25], мы можем получить, что идеал $L\mathcal{H}$ бесконечный, так как он содержит бесконечно много попарно различных слов вида $La_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}$. Значит, Theorem 2.1 следует из Предложения 2.2 и Предложения 2.4. \square

2. Конечно определенные полугруппы с нецелой размерностью Гельфанда-Кириллова

Подобная техника также может быть применена для построения конечно определенных полугрупп с нецелой размерностью Гельфанда-Кириллова.

ТЕОРЕМА 2.2. *Существует конечно определенная полугруппа с размерностью Гельфанда-Кириллова 10, 5.*

План построения. Размерность Гельфанда-Кириллова по сути является степенью функции роста полугруппы. А именно, пусть количество различных слов, кратчайшая форма которых содержит не более n букв выражается как $F(n)$. Если рост $F(n)$ эквивалентен n^α , то считается, что полугруппа имеет размерность α .

Для того чтобы функция роста имела нецелую степень, достаточно добиться того, чтобы «больше всего» в полугруппе было слов вида La^nQb^kR , где $n < k^2$. Фактически построение состоит из двух частей. Сначала реализуются нужные свойства стандартной формы La^nQb^kR . Это делается с помощью комбинации нескольких сигналов организуется движение двух головок от L и от Q направо, причем левая головка движется линейно (каждый раз на один), а правая сдвигается каждый раз на один больше чем предыдущий (фактически сдвигается на расстояние от Q . То есть, с квадратичной скоростью. В случае, если вторая головка достигнет R , применяется мономиальное соотношение. Поэтому получается нужно соотношение на длину, которое влечет нецелый порядок роста слов такого вида.

Вторая часть построения - добиться того, чтобы слов стандартного вида было достаточно много (так как, например, в некоторых словах могут вообще отсутствовать буквы R или L или даже b). Это достигается с помощью «дополнительных краев». А именно, организуется несколько букв L_i и несколько R_i , для того, чтобы стандартный вид слова был $L_1a^nL_2a^n\dots L_i a^n Q b^k R_i b^k Q_{i-1}\dots Q_1$. Это позволяет добиться того, чтобы больше всего слов давала именно стандартная форма, и именно количество слов стандартного вида определяет рост.

Таким образом, по сути это аналогичный прием применения автоматной техники.

Этот результат может быть существенно усилен, так как можно реализовать не просто пару головок с соотношением скоростей, а полноценную вычислительную машину, что позволяет уже сделать конечно определенную полугруппу с рекурсивной размерностью Гельфанда-Кириллова.

ТЕОРЕМА 2.3. *Для заданного рекурсивного числа α , существует натуральное N , такое, что, существует конечно определенная полугруппа с размерностью Гельфанда-Кириллова равной $N + \alpha$.*

Полное доказательство приведено в [27].

Отметим, что подобная техника довольно громоздка для построений, требующих малого роста. Например, не удалось пока построить конечно определенную полугруппу с размерностью Гельфанда-Кириллова равной 2.5.

3. Конечно определенные алгебры с конечным базисом Гребнера и неразрешимой проблемой делителей нуля

В подобных конструкциях идея автоматного подхода соприкасается с алгоритмическими вопросами, связанными с алгебраическими структурами. Подобные вопросы активно изучались, начиная с 40-50-ых годов.

Проблема равенства слов в конечно представленных полугруппах (и в алгебрах) не может быть решена алгоритмически. Это было доказано в 1947 году Марковым ([66]) и независимо Постом ([70]). В 1952 году Новиков сконструировал первый пример группы с неразрешимой проблемой равенства слов (см. [68] и [69]).

В 1962 году Ширшов доказал разрешимость задачи равенства для алгебр Ли с одним соотношением и поднял вопрос о конечно определенных алгебрах Ли (см. [75]).

В 1972 году Бокуть решил эту проблему. В частности, он показал существование конечно определенной алгебры Ли над произвольным полем с алгоритмически неразрешимой задачей равенства единице ([64]).

Подробный обзор алгоритмически неразрешимых задач можно найти в [63].

В противном случае некоторые проблемы становятся разрешимыми, если конечный базис Гребнера определяет идеал отношений. В этом случае легко определить, равны ли два элемента алгебры или нет (см. [65]). Основы для различных конструкций исследуются школой Бокутья в Гуанчжоу.

В своей работе Пионтковский расширил концепцию препятствия, введенную Латышевым (см. [40], [72], [73], [74]). Латышев поднял вопрос о существовании алгоритма, который может определить, является ли данный элемент либо нулевым делителем, либо нильпотентным элементом, когда идеал отношений в алгебре определяется конечным базисом Гребнера. Аналогичные вопросы для одночленных алгебр автоматов могут быть решены. В этом случае существование алгоритма для нильпотентного элемента или нулевого делителя было доказано Канелем-Беловым, Борисенко и Латышевым [57]. Важно, что эти алгебры не являются нетеровыми и не являются слабыми нетеровыми. Июуду показала, что свойство элемента быть односторонним делителем нуля распознаваемо в классе алгебр с односторонней ограниченной обработкой (см. [[29], [30]). Это также следует из разрешимости системы линейных рекуррентных соотношений на дереве (см. [19]).

Идея реализации вычислительной машины в полугрупповой структуре позволяет эффективно работать с вопросами алгоритмической разрешимости. В частности, соотношения в полугруппе могут быть заданы так, чтобы слово соответствовало состоянию машины Тьюринга или машины Минского. При этом, можно реализовать универсальную машину Тьюринга, связав остановку машины с мономиальным соотношением. В этом случае остановка машины означает обнуление слова. Это позволяет связать некоторые свойства полугруппы с остановкой машины, и тогда распознавание свойства будет алгоритмически неразрешимым.

Это позволило решить вопросы, поставленные Латышевым.

ТЕОРЕМА 2.4. *Существует алгебра с конечным базисом Гребнера, и алгоритмически неразрешимой проблемой делителей нуля.*

ТЕОРЕМА 2.5. *Существует алгебра с конечным базисом Гребнера, и алгоритмически неразрешимой проблемой нильпотентности.*

4. Универсальная машина Тьюринга

Мы используем универсальную машину Тьюринга, построенную Минским. Эта машина задаётся следующими инструкциями:

$(0, 0) \rightarrow (L, 4, 1)$ $(0, 1) \rightarrow (L, 1, 3)$ $(0, 2) \rightarrow (R, 0, 0)$ $(0, 3) \rightarrow (R, 0, 1)$
 $(1, 0) \rightarrow (L, 1, 2)$ $(1, 1) \rightarrow (L, 1, 3)$ $(1, 2) \rightarrow (R, 0, 0)$ $(1, 3) \rightarrow (L, 1, 3)$
 $(2, 0) \rightarrow (R, 2, 2)$ $(2, 1) \rightarrow (R, 2, 1)$ $(2, 2) \rightarrow (R, 2, 0)$ $(2, 3) \rightarrow (L, 4, 1)$
 $(3, 0) \rightarrow (R, 3, 2)$ $(3, 1) \rightarrow (R, 3, 1)$ $(3, 2) \rightarrow (R, 3, 0)$ $(3, 3) \rightarrow (L, 4, 0)$
 $(4, 0) \rightarrow (L, 5, 2)$ $(4, 1) \rightarrow (L, 4, 1)$ $(4, 2) \rightarrow (L, 4, 0)$ $(4, 3) \rightarrow \text{STOP}$
 $(5, 0) \rightarrow (L, 5, 2)$ $(5, 1) \rightarrow (L, 5, 1)$ $(5, 2) \rightarrow (L, 6, 2)$ $(5, 3) \rightarrow (R, 2, 1)$
 $(6, 0) \rightarrow (R, 0, 3)$ $(6, 1) \rightarrow (R, 6, 3)$ $(6, 2) \rightarrow (R, 6, 2)$ $(6, 3) \rightarrow (R, 3, 1)$

Мы используем следующий алфавит: $\{t, a_0, \dots, a_3, Q_0, \dots, Q_6, P_0, \dots, P_3, R\}$

Для каждой пары, кроме $(4, 3)$, определены следующие функции: $q(i, j)$ — новое состояние, $p(i, j)$ — новый цвет текущей клетки (головка её покидает).

4.1. Алгебра с алгоритмически неразрешимой проблемой делителей нуля.

Для случая делителей нуля, основная идея построения заключается в следующем. Некоторое подслово стандартной формы RUQ_iP_jVR реализует состояние универсальной машины Тьюринга. Умножение слева на букву t реализует переход к следующему состоянию машины. Это обеспечивает комплекс определяющих соотношений, меняющих параметры под слова. В случае, если машина останавливается, слово превращается в ноль. То есть, если некоторое состояние машины в итоге приводит к остановке, то соответствующее под слово $t^n RUQ_iP_jVR$ равно нулю, а под слово RUQ_iP_jVR является делителем нуля в алгебре.

Мы используем следующий алфавит:

$$\Psi = \{t, s, a_0, \dots, a_3, Q_0, \dots, Q_6, P_0, \dots, P_3, L, R\}.$$

Для любой пары, кроме $(4, 3)$ определим следующие функции: $q(i, j)$ — новое состояние машины, $p(i, j)$ — новый цвет ячейки, которую головка машины покидает.

Рассмотрим следующие соотношения:

$$(15) \quad tLa_k = Lta_k; \quad 0 \leq k \leq 3$$

$$(16) \quad ta_k a_l = a_k ta_l; \quad 0 \leq k, l \leq 3$$

$$(17) \quad sR = Rs;$$

$$(18) \quad sa_k = a_k s; \quad 0 \leq k \leq 3$$

$$(19) \quad ta_k Q_i P_j = Q_{q(i,j)} P_k a_{p(i,j)} s; \text{ for left pairs } (i, j) \text{ and } 0 \leq k \leq 3$$

$$(20) \quad tLQ_i P_j = LQ_{q(i,j)} P_0 a_{p(i,j)} s; \text{ for left pairs } (i, j)$$

$$(21) \quad ta_l Q_i P_j a_k = a_l a_{p(i,j)} Q_{q(i,j)} P_k s; \text{ for right pairs } (i, j) \text{ and } 0 \leq k, l \leq 3$$

$$(22) \quad tLQ_i P_j a_k = L a_{p(i,j)} Q_{q(i,j)} P_k s; \text{ for right pairs } (i, j) \text{ and } 0 \leq k \leq 3$$

$$(23) \quad ta_l Q_i P_j R = a_l a_{p(i,j)} Q_{q(i,j)} P_0 R s; \text{ for right pairs } (i, j) \text{ and } 0 \leq l \leq 3$$

$$(24) \quad tLQ_i P_j R = L a_{p(i,j)} Q_{q(i,j)} P_0 R s; \text{ for right pairs } (i, j)$$

$$(25) \quad Q_4 P_3 = 0;$$

Соотношения (15)–(16) используются чтобы продвигать t с левого края к буквам Q_i, P_j которые реализуют головку машины. Соотношения (17)–(18) используются чтобы перемещать s от букв Q_i, P_j к правому краю. Соотношения (19)–(23) реализуют вычислительный процесс. В них мы используем соотношения вида $tU = Vs$.

Наконец соотношение (25) останавливает машину.

Назовем слово $La_{u_1} a_{u_2} \dots a_{u_k} Q_i P_j a_{v_1} a_{v_2} \dots a_{v_l} R$ *главным словом*. Основная цель — доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2.6. *Машина останавливается тогда и только тогда, когда главное слово является делителем нуля в алгебре, заданной определяющими соотношениями (15)–(25).*

Рассмотрим полное состояние нашей машины Тьюринга, представленное словом $La_{u_1}a_{u_2}\dots a_{u_k}Q_iP_ja_{v_1}a_{v_2}\dots a_{v_l}R$. Предположим, что $U = a_{u_1}a_{u_2}\dots a_{u_k}$ и $V = a_{v_1}a_{v_2}\dots a_{v_l}$. Таким образом, U и V представляют цвета всех ячеек на ленте машины Тьюринга. Мы обозначаем полное состояние этой машины как $T(i, j, U, V)$. Предположим, что $T(i', j', U', V')$ – следующее состояние ($T(i, j, U, V) \rightarrow T(i', j', U', V')$).

Рассмотрим полугруппу S , заданную определяющими соотношениями (15)–(25). Предположим, что $F(i, j, U, V)$ – это слово в S , соответствующее состоянию машины $T(i, j, U, V)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Перенесем все слова из соотношений (15)–(25) в левую часть. Рассмотрим полу-DEGLEX порядок: $\{t, s, a_0, \dots, a_3, Q_0, \dots, Q_6, P_0, \dots, P_3, L, R\}$.*

Левые части полученных равенств образуют базис Грёбнера в идеале, порожденном ими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать взвешенную степень вместо обычной: каждая буква алфавита (кроме t) будет иметь степень 1, однако степень t равна 2. (Например, $\deg(tRL) = 4$)

Заметим, что каждая левая часть содержит старший моном. Не существует такого слова, которое начинается с некоторого старшего монома в базисе и заканчивается каким-то другим старшим мономом. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Если $i = 4$ и $j = 3$ то $tF(i, j, U, V) = 0$. В противном случае выполняется следующее условие: $tF(i, j, U, V) = F(i', j', U', V')s$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим слово $tF(i, j, U, V) = tLUQ_iP_jVR$. Если $i = 4$ и $j = 3$, то мы можем применить соотношение (25). В противном случае предположим, что (i, j) – левая пара.

Если U – это пустое слово, то $tF(i, j, U, V) = tLQ_iP_jVR$. Следовательно, мы можем применить соотношение (20) и получить $tLQ_iP_jVR = LQ_{q(i,j)}P_0a_jsVR$. Используя (17) и (18), окончательно получаем $tLQ_iP_jVR = LQ_{q(i,j)}P_0a_jsVR = LQ_{q(i,j)}P_0a_jVRs$.

Согласно определению $q(i, j)$ и $p(i, j)$, слово $LQ_{q(i,j)}P_0a_jVR$ соответствует следующему состоянию машины. Если U не является пустым словом, то можно записать $U = U_1a_k$ для некоторого k . Используем соотношения (15) и (16) и получаем $tLUQ_iP_jVR = LU_1ta_kQ_iP_jVR$.

Далее применяем соотношение (19): $LU_1ta_kQ_iP_jVR = LU_1Q_{q(i,j)}P_ka_{p(i,j)}VRs$.

Слово $LU_1Q_{q(i,j)}P_ka_{p(i,j)}VR$ соответствует следующему состоянию машины.

Предположим, что (i, j) – правая пара. Если U и V – пустые слова, то используем соотношение (24).

Если U пусто, а $V = a_k\tilde{V}$ – непусто, то применяем соотношение (22) и получаем $tLQ_iP_ja_k\tilde{V}R = La_{p(i,j)}Q_{q(i,j)}P_ks\tilde{V}R$. После этого используем (18) и (17) и переносим s вправо.

Предположим, что $U = \tilde{U}a_k$ – непусто. В этом случае применяем соотношение (16) столько раз, какова длина \tilde{U} , и получаем $t\tilde{U}a_k = \tilde{U}ta_k$. Если V пусто, можно применить соотношение (23). Если $V = a_l\tilde{V}$ – непусто, то применяем соотношение (21), после чего используем (18) и (17) и переносим s вправо. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) *Описанная выше машина Тьюринга начинает работу в состоянии $T(i, j, U, V)$ и останавливается через несколько шагов.*

(ii) Существует такое положительное целое число N , что $t^N LUQ_i P_j VR = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что второе утверждение вытекает из первого.

Предположим, что $T(i, j, U, V)$ преобразуется в $T(4, 3, U', V')$ за один шаг. Согласно утверждению 2.6, имеем $tF(i, j, U, V) = F(4, 3, U', V')s$. Тогда можем применить $Q_4 P_3 = 0$ из (25) и получить ноль.

Предположим, что утверждение верно для m шагов (и меньшего числа шагов). Пусть машина начинает работу в состоянии $T(i, j, k, n)$ и останавливается после $m + 1$ шага. Рассмотрим первый шаг цепочки. Пусть это переход от $T(i, j, U, V)$ к $T(i', j', U', V')$. Применим утверждение 2.6 для этого шага. Тогда $tLUQ_i P_j VR = LU'Q_{i'} P_{j'} V' R s$.

Машина стартовала в состоянии $T(i', j', U', V')$ и останавливается за m шагов. Используя индукцию, завершаем доказательство.

Теперь докажем, что первое утверждение вытекает из второго.

Если $t^N LUQ_i P_j VR = 0$, то существует цепочка эквивалентных слов, начинающаяся с $t^N LUQ_i P_j VR$ и заканчивающаяся 0. Единственный способ получить 0 — использовать соотношение $Q_4 P_3 = 0$. Следовательно, слово перед 0 в цепочке содержит $Q_4 P_3$.

Обозначим через *структуру слова* W , $S(W)$, слово W , в котором удалены все буквы t и s . Каждое слово в цепочке будет иметь структуру $LU_k Q_{i_k} P_{j_k} V_k R$, потому что единственное соотношение, нарушающее эту структуру, — это $Q_4 P_3 = 0$, и оно будет использовано только один раз, в конце цепочки. Заметим, что каждая структура соответствует состоянию машины Тьюринга. Единственный способ получить 0 в этой цепочке — изменить индексы у Q и P в структуре. Это можно сделать, перемещая t .

Согласно утверждению 2.6, перемещение t слева направо и его преобразование в s соответствует одному шагу машины Тьюринга. Заметим, что в нашей алгебре существует базис Грёбнера, поэтому можно считать, что слова в цепочке убывают. В частности, перемещение s справа налево с преобразованием в t невозможно.

Следовательно, мы можем получить $Q_4 P_3$, только перемещая t слева направо с преобразованием в s , и существует $k \leq N$ такое, что $t^N LUQ_i P_j VR = t^{N-k} \tilde{L} \tilde{U} Q_4 P_3 \tilde{V} R t^k$.

Таким образом, машина останавливается через k шагов. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Если $Xt = 0$ в S , то $X = 0$. Если $sX = 0$ в S , то $X = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что мы применяем некоторые соотношения и преобразуем Xt в ноль.

Будем говорить, что буква t является *почти последней*, если слово имеет вид $Y_1 t Y_2$, и Y_2 содержит только буквы a_k и L . Заметим, что если почти последняя буква t встречается в некотором соотношении, то это соотношение (15) или (16). Следовательно, эта буква t всегда остаётся почти последней. Ясно, что почти последняя буква t существует в каждом слове, эквивалентном Xt . Поскольку почти последняя буква t никогда не участвует в соотношениях (17)–(25), мы можем разместить её на правом краю слова Xt , используя наши соотношения. Мы не использовали букву t , и поэтому можем проделать то же самое со словом X .

Аналогично можно доказать, что если $sX = 0$, то $X = 0$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Если $Xt^n = 0$ в S , то $X = 0$. Если $s^n X = 0$ в S , то $X = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это можно доказать по индукции. □

Теперь мы готовы доказать приведённую выше теорему 2.6.

Рассмотрим алгебру H , заданную определяющими соотношениями (15)–(25).

Слово $LUQ_i P_j VR$ является делителем нуля в алгебре H тогда и только тогда, когда машина $T(i, j, U, V)$ останавливается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, машина $T(i, j, U, V)$ остановилась. Используя предложение 2.7, получаем $t^N LUQ_i P_j VR = 0$ для некоторого натурального числа N . Следовательно, слово $LUQ_i P_j VR$ является делителем нуля.

Пусть $XLUQ_i P_j VRY = 0$ для некоторых элементов алгебры $X, Y \neq 0$. Предположим, что X и Y – это некоторые слова.

Заметим, что буквы L и R не могут исчезнуть из слова. Отсюда можно разбить наше слово на три части: слева от L , справа от R и между L и R . Существует только одно соотношение, способное обратить слово $XLUQ_i P_j VRY$ в ноль: $Q_4 P_3 = 0$. Таким образом, этот подслово $Q_4 P_3$ может появиться в одной из трёх возможных частей слова. Обратите внимание, что только буквы t могут проходить через L , а только буквы s – через R . Любое соотношение не может изменить ничего в области слева от L и справа от R , кроме появления или исчезновения букв t и s . Поэтому, если $Q_4 P_3$ появляется слева от L , то $Xs^n = 0$. Используя предложение 2.9, получаем противоречие: $X = 0$. Аналогично, если $Q_4 P_3$ появляется справа от R , то $Y = 0$. Таким образом, $Q_4 P_3$ появляется между L и R .

Рассмотрим *структуру* слова $LUQ_i P_j VR$. Для любой структуры слова, эквивалентной $LUQ_i P_j VR$, существует соответствующее состояние машины. Поскольку только буквы t могут проходить через L , а только буквы s – через R , можно менять структуру слова $LUQ_i P_j VR$, переходя к следующему или предыдущему состоянию машины. Если $Q_4 P_3$ появляется между L и R , тогда получается состояние СТОП. Следовательно, машина $T(i, j, U, V)$ останавливается.

Теперь рассмотрим общий случай: X, Y – некоторые элементы алгебры. Предположим, что $X = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n$, $Y = d_1 Y_1 + \dots + d_m Y_m$, где X_k, Y_l – слова, а c_k и d_l – элементы поля. Без ограничения общности, можно считать, что n выбрано минимально возможным, а для этого n значение m тоже минимально. Можно также полагать, что X_k, Y_l записаны в приведённой форме. Будем считать, что либо $n > 1$, либо $m > 1$.

Рассмотрим функцию $\tilde{h} : \Psi^* \rightarrow \mathbb{N}_0$: для любого слова w положим $\tilde{h}(w) = \deg_t(w) + \deg_s(w)$.

Заметим, что соотношения (15)-(24) не меняют значение \tilde{h} , поэтому оно сохраняется при изменении слова.

Предположим, что $\tilde{h}(X_{k_1}) \neq \tilde{h}(X_{k_2})$.

В этом случае выберем подмножество $S_x \subseteq \{1, \dots, n\}$, такое что на X_k при $k \in S_x$ функция \tilde{h} принимает максимальное значение. Аналогично, выберем подмножество $S_y \subseteq \{1, \dots, m\}$, такое что на Y_l при $l \in S_y$ функция \tilde{h} максимальна. Известно, что $(c_1 X_1 + \dots + c_n X_n)W(d_1 Y_1 + \dots + d_m Y_m) = \sum_{k,l} c_k d_l X_k LUQ_i P_j VRY_l = 0$. Следовательно, этот элемент можно привести к нулю. Однако ни один из элементов $X_k LUQ_i P_j VRY_l$ не может быть приведён к нулю. Таким образом, все элементы $X_k LUQ_i P_j VRY_l$ могут быть разбиты на несколько классов эквивалентных слов. Заметим, что все слова $X_k LUQ_i P_j VRY_l$ ($k \in S_x$ и $l \in S_y$) могут быть эквивалентны только слову вида $X_{k'} LUQ_i P_j VRY_{l'}$, где $k' \in S_x$ и $l' \in S_y$. Следовательно, $(\sum_{k \in S_x} c_k X_k) \cdot LUQ_i P_j VR \cdot (\sum_{l \in S_y} d_l Y_l) = 0$. Это противоречит тому, что n выбрано минимальным. Следовательно, функция $\tilde{h}(X_k)$ не зависит от k , а функция $\tilde{h}(Y_l)$ не зависит от l .

Имеем $XLUQ_i P_j VRY = \sum_{k,l} c_k d_l X_k LUQ_i P_j VRY_l$. Можно рассматривать определяющие соотношения как правила приведения и использовать их для поиска базы Грёбнера для каждого слагаемого $X_k LUQ_i P_j VRY_l$.

Зафиксируем все буквы t в конце слова X_k : $X_k = X'_k t^{q_k}$. Это лексикографические равенства, где $q_k \geq 0$.

Поскольку $\sum_{k,l} c_{k,l} X'_k t^{q_k} LUQ_i P_j VRY'_l = 0$, эта сумма (в приведённой форме) может быть разбита на несколько классов эквивалентных мономов. Рассмотрим один из таких

классов: $\sum X'_u t^{x_u} LUQ_i P_j V R Y'_u$. Если эти мономы эквивалентны, то все X'_u также должны быть эквивалентны. Так как $\tilde{h}(X_k)$ не зависит от k , то все x_u должны быть одинаковыми.

Таким образом, $n = 1$, $m > 1$, и имеем ситуацию $XLUQ_i P_j V R (\sum_{l=1}^m d_l Y_l) = 0$, где $X \in \Psi^*$ – некоторое слово, а m минимально. Значит, все слова $XLUQ_i P_j V R Y_l$ должны быть одинаковыми в алгебре, однако Y_l должны быть попарно различны. Если преобразовать слово $W R Y_l$ (где $W = XLUQ_i P_j V$), то только буква s может проходить через R , поэтому единственный способ привести его – переставить буквы s из W в Y_l . Число таких букв s определяется словом W , и оно будет одинаковым для всех l . Следовательно, в алгебре получится равенство $s^k Y_1 = s^k Y_2 = \dots = s^k Y_m$ (для некоторого неотрицательного k). Заметим, что соотношения с буквой s не меняют структуру слова, и можно видеть, что для любых двух разных слов Y и Z , слова sY и sZ тоже различны. Значит, $s^k Y_1 \neq s^k Y_2$ в алгебре, и m не может быть больше 1.

Это противоречие завершает доказательство. □

Поскольку задача об остановке алгоритмически неразрешима, задача о делителях нуля в алгебре H также алгоритмически неразрешима.

4.2. Алгебра с алгоритмически неразрешимой проблемой нильпотентности.

Для случая нильпотентности реализуется похожая конструкция, просто рассматриваются слова вида $(tRUQ_i P_j VR)^n$. В случае, если слово такого вида обращается в ноль, элемент $tRUQ_i P_j VR$ будет нильпотентным.

4.3. Определяющие соотношения. Рассмотрим следующие определяющие соотношения

$$(26) \quad tRa_l = Rta_l; \quad 0 \leq l \leq 3$$

$$(27) \quad ta_l R = a_l R t; \quad 0 \leq l \leq 3$$

$$(28) \quad ta_k a_j = a_k t a_j; \quad 0 \leq k, j \leq 3$$

$$(29) \quad ta_k Q_i P_j = Q_{q(i,j)} P_k t a_{p(i,j)}; \text{ для левых пар } (i, j) \text{ and } 0 \leq k \leq 3$$

$$(30) \quad tRQ_i P_j = RQ_{q(i,j)} P_0 t a_{p(i,j)}; \text{ для левых пар } (i, j) \text{ and } 0 \leq k \leq 3$$

$$(31) \quad ta_l Q_i P_j a_k a_n = a_l a_{p(i,j)} Q_{q(i,j)} P_k t a_n; \text{ для правых пар } (i, j) \text{ and } 0 \leq k \leq 3$$

$$(32) \quad ta_l Q_i P_j a_k R = a_l a_{p(i,j)} Q_{q(i,j)} P_k R t; \text{ для правых пар } (i, j) \text{ and } 0 \leq k \leq 3$$

$$(33) \quad tRQ_i P_j a_k a_n = R a_{p(i,j)} Q_{q(i,j)} P_k t a_n; \text{ для правых пар } (i, j) \text{ and } 0 \leq k \leq 3$$

$$(34) \quad tRQ_i P_j a_k R = R a_{p(i,j)} Q_{q(i,j)} P_k R t; \text{ для правых пар } (i, j) \text{ and } 0 \leq k \leq 3$$

$$(35) \quad ta_l Q_i P_j R = a_l a_{p(i,j)} Q_{q(i,j)} P_0 R t; \text{ для правых пар } (i, j) \text{ and } 0 \leq l \leq 3$$

$$(36) \quad tRQ_i P_j R = R a_{p(i,j)} Q_{q(i,j)} P_0 R t; \text{ для правых пар } (i, j)$$

$$(37) \quad Q_4 P_3 = 0.$$

Отношения (26) и (28) используются для перемещения t от левого края к последней букве a_l , стоящей перед $Q_i P_j$, которые обозначают головку машины. Отношения (29)–(36) описывают сам процесс вычисления. Отношение (27) используется для перемещения t через завершающую букву R .

Наконец, отношение (37) останавливает машину.

4.4. Нильпотентность фиксированного слова и остановка машины. Будем называть слово $tRa_{u_1}a_{u_2}\dots a_{u_k}Q_iP_ja_{v_1}a_{v_2}\dots a_{v_l}R$ *основным словом*. Главная цель – доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2.7. *Машина останавливается тогда и только тогда, когда основное слово является нильпотентным в алгебре, заданной определяющими соотношениями (26)–(37).*

Сначала докажем несколько утверждений.

Замечание. Мы используем знак \equiv для лексикографического равенства и знак $=$ для равенства в алгебре.

Рассмотрим полное состояние нашей машины Тьюринга, представленное словом $Ra_{u_1}a_{u_2}\dots a_{u_k}Q_iP_ja_{v_1}a_{v_2}\dots a_{v_l}R$.

Положим $U \equiv a_{u_1}a_{u_2}\dots a_{u_k}$ и $V \equiv a_{v_1}a_{v_2}\dots a_{v_l}$. Таким образом, U и V задают цвета всех ячеек на ленте машины Тьюринга. Будем обозначать полное состояние этой машины как $M(i, j, U, V)$. Пусть $M(i', j', U', V')$ – следующее состояние ($M(i, j, U, V) \rightarrow M(i', j', U', V')$).

Рассмотрим полугруппу G , заданную определяющими отношениями (26)–(37). Пусть $W(i, j, U, V)$ – слово в G , соответствующее состоянию машины $M(i, j, U, V)$. (На самом деле $W(i, j, U, V) \equiv Ra_{u_1}a_{u_2}\dots a_{u_k}Q_iP_ja_{v_1}a_{v_2}\dots a_{v_l}R$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. *Перенесём все слова из соотношений (26)–(37) в левую часть равенства.*

Существует редуцирующий порядок на свободном моноиде, порожденном алфавитом $\Phi = \{t, a_0, \dots, a_3, Q_0, \dots, Q_6, P_0, \dots, P_3, R\}$, такой, что левые части полученных равенств образуют базис Грёбнера в идеале, ими порожденном.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что редуцирующим порядком на свободном моноиде Φ^* называют полное упорядочивание, при котором пустое слово минимально, и для любых $a, b, s_1, s_2 \in \Phi^*$, если $s_1 \prec s_2$, то $as_1b \prec as_2b$.

Любое слово w из Φ^* можно однозначно записать в виде $X_0tX_1t\dots tX_n$, где $X_i \in \Phi^*$ не содержат буквы t . При этом каждый X_i может быть пустым, как и все вместе (если слово вида t^n). Под *высотой* этого слова будем понимать $h(w) = \sum_{i=0}^n 2^i \deg X_i$.

Определим следующий порядок. Даны два слова w_1 и w_2 , сначала сравниваем их по степени t . Если $\deg_t(w_1) < \deg_t(w_2)$, то $w_1 \prec w_2$. Если $\deg_t(w_1) = \deg_t(w_2)$, то сравниваем по высоте. Если $h(w_1) < h(w_2)$, то $w_1 \prec w_2$. Если высоты также совпадают, то используем deglex-порядок.

Требуется доказать, что этот порядок является редуцирующим порядком.

Заметим, что пустое слово является минимальным (у него нулевая степень по t , нулевая высота и нулевая степень).

Пусть $a, b, s_1, s_2 \in \Phi^*$ и $s_1 \prec s_2$.

Если $\deg_t(s_1) < \deg_t(s_2)$, то $\deg_t(as_1b) < \deg_t(as_2b)$, значит $as_1b \prec as_2b$.

Пусть $\deg_t(s_1) = \deg_t(s_2) = n$ и $h(s_1) < h(s_2)$. В этом случае покажем, что умножение неравенства на один символ не меняет его. А именно, для любого символа $x \in \Phi$ имеем $xs_1 \prec xs_2$ и $s_1x \prec s_2x$. Сначала предположим, что $x \neq t$. Тогда умножение слева на x увеличивает высоту обеих частей на 1, неравенство сохраняется. Умножение справа на x увеличивает высоту обеих частей на 2^n , и неравенство также сохраняется. Умножение слева на t умножает обе высоты на 2, а умножение справа на t не меняет высоту.

Теперь предположим, что $\deg_t(s_1) = \deg_t(s_2)$ и $h(s_1) = h(s_2)$. Тогда $\deg_t(as_1b) = \deg_t(as_2b)$ и $h(as_1b) = h(as_2b)$. В этом случае сравниваем пары (s_1, s_2) и (as_1b, as_2b) по deglex-порядку, который является редуцирующим порядком.

Заметим, что каждая левая часть содержит старший моном. Не существует такого слова, которое начинается на какой-либо старший моном в базисе и заканчивается другим старшим моном. \square

ЛЕММА 2.6. *Для любого непустого слова $U \equiv a_{i_1} \cdots a_{i_l}$ выполнено $tUR = URt$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно использовать соотношение (28) $(l - 1)$ раз, чтобы превратить tUR в $a_{i_1} \cdots a_{i_{l-1}} ta_{i_l} R$. Затем применяем соотношение (27). \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. *Если $i = 4$ и $j = 3$, то $tW(i, j, U, V) = 0$. В противном случае выполняется: $tW(i, j, U, V) = W(i', j', U', V')t$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим слово $tW(i, j, U, V) = tRUQ_i P_j VR$. Если $i = 4$ и $j = 3$, то можно применить соотношение (37). В противном случае предположим, что (i, j) – это левая пара.

Если U – не пустое слово, то его можно записать как $U = \tilde{U}a_k$ для некоторого $0 \leq k \leq 3$. В этом случае имеем слово $tR\tilde{U}a_k Q_i P_j VR$. Применяем соотношение (26), чтобы получить $Rt\tilde{U}a_k Q_i P_j VR$. Теперь используем соотношение (28) степень \tilde{U} раз: получаем $R\tilde{U}ta_k Q_i P_j VR$. После этого применяем соотношение (29), и наше слово переходит в $R\tilde{U}Q_{i'} P_{j'} ta_{p(i,j)} VR$. Далее используем лемму 2.6.

Если U – пустое, то $tW(i, j, U, V) \equiv tRQ_i P_j VR$. В этом случае начнём цепочку с применения (30): $tRQ_i P_j VR = RQ_{i'} P_0 ta_{p(i,j)} VR$. После этого используем лемму 2.6.

Пусть (i, j) – это правая пара. Здесь возможны шесть случаев:

Случай 1 U и V – пустые слова. В этом случае имеем слово $tRQ_i P_j R$ и используем соотношение (36).

Случай 2 U – пусто, $V = a_k$ – слово степени 1. В этом случае имеем слово $tRQ_i P_j a_k R$, можно применить соотношение (34).

Случай 3 U – пусто, $V = a_k \tilde{V}$ – слово степени больше 1. В этом случае слово $tRQ_i P_j a_k \tilde{V} R$. Используем соотношение (33), преобразуя его в $Ra_{p(i,j)} Q_{i'} P_{j'} t\tilde{V} R$, где \tilde{V} – непусто. Теперь используем лемму 2.6 для завершения цепочки.

Случай 4 $U = \tilde{U}a_l$ – непусто, V – пусто. В этом случае имеем слово $tR\tilde{U}a_l Q_i P_j R$. Применяем соотношение (26), преобразуя его в $Rt\tilde{U}a_l Q_i P_j R$. Применяя (28) степень \tilde{U} раз, получаем $R\tilde{U}ta_l Q_i P_j R$. Соотношение (35) завершает цепочку.

Случай 5 $U = \tilde{U}a_l$ – непусто, $V = a_k$ – слово степени 1. В этом случае имеем слово $tR\tilde{U}a_l Q_i P_j a_k R$. Аналогично случаю 4 преобразуем слово в $R\tilde{U}ta_l Q_i P_j a_k R$. Соотношение (32) завершает цепочку.

Случай 6 $U = \tilde{U}a_l$ – непусто, $V = a_k \tilde{V}$ – слово степени больше 1. В этом случае имеем слово $tR\tilde{U}a_l Q_i P_j a_k \tilde{V} R$. Аналогично случаю 4 преобразуем слово в $R\tilde{U}ta_l Q_i P_j a_k \tilde{V} R$. Соотношение (31) превращает его в $R\tilde{U}a_l a_{p(i,j)} Q_{i'} P_{j'} t\tilde{V} R$. Далее используем лемму 2.6 для завершения цепочки. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) *Описанная выше машина Тьюринга начинает работу в состоянии $M(i, j, U, V)$ и останавливается после некоторого количества шагов.*
- (ii) *Существует положительное целое число N , такое что $t^N RUQ_i P_j VR = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что второе утверждение следует из первого.

Пусть $M(i, j, U, V)$ за один шаг переходит в $M(4, 3, U', V')$. Согласно утверждению 2.11, $tW(i, j, U, V) = W(4, 3, U', V')t$. Тогда по соотношению $Q_4 P_3 = 0$ из (37) получаем ноль.

Пусть утверждение верно для m (и меньшего) числа шагов. Пусть машина начинает с состояния $M(i, j, k, n)$ и останавливается после $m + 1$ шага. Рассмотрим первый шаг в

цепочке. Пусть это переход из $M(i, j, U, V)$ к $M(i', j', U', V')$. Применим утверждение 2.11 для этого шага. Тогда $tRUQ_iP_jVR = RU'Q_{i'}P_{j'}V'Rt$.

Машина, начав в состоянии $M(i', j', U', V')$, останавливается за m шагов. Таким образом, по индукции завершаем доказательство.

Теперь докажем, что первое утверждение следует из второго.

Если $t^N RUQ_iP_jVR = 0$, то существует цепочка эквивалентных слов, начинающаяся с $t^N RUQ_iP_jVR$ и заканчивающаяся нулём. Единственный способ получить ноль – применить соотношение $Q_4P_3 = 0$. Значит, слово, предшествующее нулю в этой цепочке, содержит Q_4P_3 .

Под *структурой слова* W , $S(W)$ будем понимать слово W , из которого удалены все буквы t . Каждое слово в цепочке будет иметь структуру $RU_kQ_{i_k}P_{j_k}V_kR$, поскольку единственное соотношение, разрушающее эту структуру – $Q_4P_3 = 0$, и оно применяется только один раз, в конце цепи. Заметим, что каждая структура соответствует некоторому состоянию машины Тьюринга. Единственный способ получить ноль в этой цепочке – это изменить индексы Q и P в структуре. Это реализуется перемещением буквы t .

Согласно утверждению 2.11, перемещение t слева направо соответствует одному шагу машины Тьюринга вперёд, а перемещение t справа налево – одному шагу машины назад (заметим, что это не всегда возможно). В нашей алгебре существует базис Грёбнера, поэтому можно считать, что в цепочке слова убывают (каждое слово ниже предыдущего относительно порядка на свободном моноиде Φ^*). Следовательно, буквы t перемещаются только слева направо.

Отсюда существует $k \leq N$ такое, что $t^N RUQ_iP_jVR = t^{N-k} R\tilde{U}Q_4P_3\tilde{V}Rt^k$.

Значит, машина останавливается после k шагов. □

Теперь мы готовы доказать вышеуказанную теорему 2.7.

Рассмотрим алгебру A , заданную определяющими соотношениями (26)–(37). Слово $tRUQ_iP_jVR$ является нильпотентным в A тогда и только тогда, когда машина $M(i, j, U, V)$ останавливается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(tRUQ_iP_jVR)^n = 0$. Структура этого слова соответствует ряду из n отдельных машин. Используя соотношения, мы можем превратить одну машину в следующее состояние (при этом, поскольку в алгебре есть базис Грёбнера, можем считать, что слова цепочки убывают). Таким образом, если для какой-либо машины получится Q_4P_3 , можно сделать вывод, что эта машина останавливается после некоторого числа шагов. Следовательно, $M(i, j, U, V)$ останавливается.

Пусть $M(i, j, U, V)$ останавливается. Тогда $t^n RUQ_iP_jVR = 0$ для некоторого минимального n . С помощью применения утверждения 2.11 несколько раз можем получить $(tRUQ_iP_jVR)^n = At^n RUQ_iP_jVR$ (для некоторого слова A). Следовательно, $(tRUQ_iP_jVR)^n = 0$. □

Поскольку проблема остановки машины Тьюринга не разрешима алгоритмически, задача о нильпотентности слова в алгебре A также алгоритмически неразрешима.

Приведенные доказательства опубликованы в [8].

5. Техника интерпретации слова как конечного автомата

Описанные выше результаты использовали технику интерпретации слова как конечного автомата. С помощью определяющих соотношений задается работа автомата. Это позволило построить конечно определенные полугруппы с разными свойствами:

1) Прямая реализация автомата в слове позволяет проверять наличие квадрата и обнулять слово в случае его обнаружения. Это позволяет построить полугруппу, в которой есть бесконечный безквадратный идеал. Это, естественно не то же самое, что нильполугруппа, в которой отсутствуют ненулевые слова большой степени. Но и реализация этого более простого свойства значительно проще, доказательство занимает всего несколько страниц.

2) Контроль количества слов разного вида с помощью автомата позволяет строить полугруппы с нецелой и даже рекурсивной размерностью Гельфанда-Кириллова. Нецелая размерность получается с помощью простого автомата, контролирующего, чтобы количество вхождений одной буквы-наполнителя было квадратом от количества вхождений другой буквы. Более сложная реализация универсальной машины Тьюринга позволяет построить полугруппу, размерность Гельфанда-Кириллова которой имеет дробную часть, являющейся произвольным рекурсивным числом (которое можно вычислить с помощью алгоритма).

3) Автомат может реализовывать универсальную машину Тьюринга. Это дает возможность сводить алгебраические свойства к проблеме остановки, что позволяет получать алгоритмическую неразрешимость проблемы делителей нуля и проблемы нильпотентности даже в алгебрах с конечным базисом Гребнера.

5.1. Дальнейшее использование техники. Данная техника, возможно, поможет построить и иные объекты. В частности, представляет интерес следующий

Вопрос. *Существует ли конечно определенная полугруппа с размерностью Гельфанда-Кириллова 2.5.*

Задача о построении конечно определенной бесконечной нильполугруппы также имеет интерпретацию в терминах автоматов. Рассмотрим цепочку локально взаимодействующих конечных автоматов. У них есть цвета корпусов. Если автомат объявляет себя нулем (совершает самоубийство), то вся цепочка погибает. Можно ли добиться того, чтобы преобразования были обратимы (если $u = v$, то $v = u$), при этом существовали сколь угодно длинные живые цепочки, и чтобы любая цепочка, у которой несколько раз подряд повторились цвета корпусов, погибала. Мы задаем локальный закон взаимодействия, а внутренние состояния автоматов могут быть любыми. Требуется достичь адекватного поведения цепочки автоматов.

Геометрическая структура комплекса

1. Геометрическая часть построения

1.1. План. В этой главе будет построена последовательность вложенных комплексов, состоящих из квадратов (4-циклов) с набором геометрических свойств:

1. **Равномерная эллиптичность.** Пространство называется *равномерно-эллиптическим*, если можно выбрать константу $\lambda > 0$, такую что в множестве кратчайших путей соединяющих любые две точки A и B на расстоянии D можно выбрать два пути, удаленных друг от друга на расстояние $\lambda \cdot D$. При этом расстояние между путями с общим началом и концом определяется как максимум расстояний между соответствующими точками.

2. **Вложенность.** Комплекс $n + 1$ уровня получается на основе комплекса n уровня добавлением нескольких вершин и ребер по определенным правилам.

3. **Локальная преобразуемость.** Пусть разрешено преобразовывать пути, заменяя путь по двум сторонам минимального квадрата на путь по другим двум сторонам. Два кратчайших пути с общими концами локально преобразуются друг в друга, если концы путей принадлежат вершинам одного квадрата вложенного комплекса.

Геометрические свойства построенной последовательности комплексов в дальнейшем используются для задания конечно определенных полугрупп.

1.2. Иерархическое построение. Построим *комплекс уровня n* с помощью итерационного процесса. На каждом шаге мы будем иметь дело с графом, причем простые циклические пути из четырех ребер будем называть *плитками*.

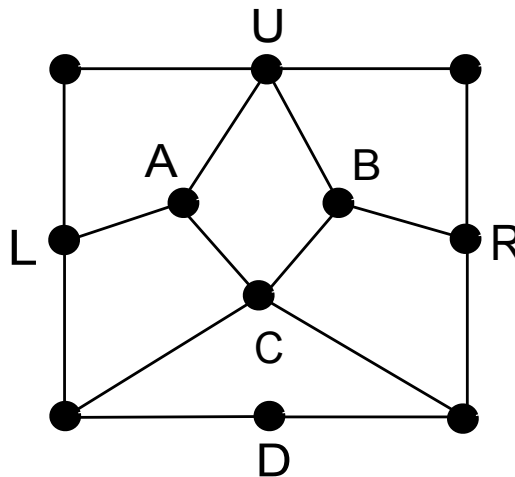


Рис. 1. Комплекс второго уровня.

Комплекс уровня 1 представляет собой простой цикл из четырех вершин CUL , CUR , CDR , CDL . *Комплекс уровня 2* это граф на рисунке 1.

То есть, на втором этапе у нас имеется шесть плиток. Будем называть их, согласно их положению, левой верхней, левой нижней, правой нижней, правой верхней, средней, нижней.

Будем считать, что вершины A, B, C, U, L, R, D имеют *глубину* 0, изначальные четыре вершины (углы) имеют глубину равную -1 . Будем также называть их *угловыми*. Кроме этого, угловые вершины будут появляться при операции подклейки (см ниже).

С комплексом будут производиться итерации двух типов: *разбиение* и *подклейка*.

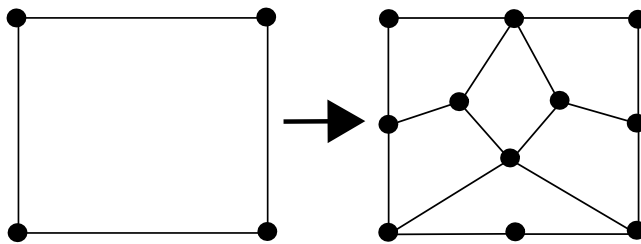


Рис. 2. Разбиение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Макроплиткой* уровня n назовем: для $n = 1$ – обычную плитку (простой 4-цикл), которую будем также называть *минимальной*; для $n > 1$ – результат применения следующей операции *разбиения* к макроплитке уровня $n - 1$: каждая плитка данной макроплитки разбивается на шесть новых плиток согласно правилу на рисунке 2. Создаются новые четыре вершины на границе разбиваемой плитки (в серединах ее сторон) и три вершины внутри нее. Одна из четырех возможных ориентаций определяется согласно положению (одному из шести) разбиваемой плитки в ее родительской макроплитке (рисунок 4).

Проводимые при разбиении ребра будем называть *внутренними ребрами*, принадлежащими разбиваемой макроплитке. Иначе говоря, макроплитка, которой принадлежит ребро, является минимальной по включению из тех макроплиток, которые содержат данное ребро целиком как внутреннее. То есть, принадлежность ребра определяется раз и навсегда, при его появлении. *Уровнем ребра* будем называть уровень макроплитки, которой оно принадлежит. *Типами* внутренних ребер будем называть 8 видов ребер образующихся при разбиениях (рисунок 3). Также для каждого внутреннего ребра определим две стороны A и B , расположенные как указано на рисунке. Есть также 4 типа *граничных* ребер (это ребра изначального цикла из 4 вершин), левое, правое, верхнее и нижнее. Пусть они также пронумерованы от 9 до 12. Граничные ребра комплекса относятся к этим типам. Также к ним относятся границы создаваемых подклеенных макроплиток (см ниже). Будем считать, что граничные ребра принадлежат макроплиткам, сторонами которых они являются.

Замечание. Далее в тексте термин *ребро* означает ребро макроплитки, а не ребро графа, если только из контекста не следует обратное. В то же время, *входящее* или *выходящее* ребро – как раз ребро графа, входящее в данную вершину.

Определим *типы вершин* на комплексе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Все вершины, встречающиеся на комплексе, мы разделим на следующие категории:

1) *Угловые.* (Лежащие в углах подклеенных макроплиток или всего комплекса). *Тип угловой вершины* определим как один из четырех вариантов углов, в котором она может находиться: CUL, CUR, CDR, CDL. (Corner Up-Left и так далее.) Угловые вершины принадлежат максимальной макроплитке, где они являются углами.

2) *Краевые.* (Лежащие на стороне подклеенной макроплитки или всего комплекса). Каждая такая вершина лежит в середине стороны некоторой макроплитки, прилегающей к краю. Тип краевой вершины определим в соответствии с тем, серединой какой стороны в этой макроплитке она является: L, R, D, U. Краевые вершины принадлежат той макроплитке, на середине стороны которой они лежат.

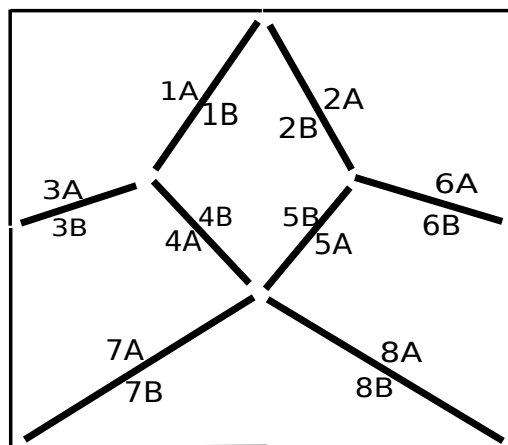


Рис. 3. Восемь типов внутренних ребер с ориентацией.

3) *Внутренние*. В этой категории определим три типа внутренних вершин: А, В, С, отвечающих внутренним узлам макроплиток, эти вершины создаются *внутри* разбиваемой макроплитки. Будем считать, что эти вершины *принадлежат* данной макроплитке. Иначе говоря такие вершины принадлежат минимальной по включению макроплитке, содержащей их.

4) *Боковые*. (Лежащие на границе между двумя макроплитками, на внутреннем ребре). Типы боковых вершин будут соответствовать всем упорядоченным парам из множества $\{U, R, D, L\}$. А именно: DR, RD, DL, и так далее. Будем считать, что в упорядоченной паре первой называется буква, соответствующая А-стороне внутреннего ребра, на котором лежит вершина. Все боковые вершины создаются в середине стороны разбиваемой макроплитки. Тип боковой вершины определяет, серединой каких именно сторон она является в двух макроплитках, где она является серединой сторон. Это как раз те макроплитки, которые разбивались при создании данной вершины. Будем считать, что боковые вершины *принадлежат* макроплитке, которой принадлежит данное внутреннее ребро.

В дальнейшем, вершину типа А будем, для простоты, называть А-вершиной или А-узлом. Аналогично для других типов. Вообще, вершины на графе мы также будем называть узлами.

Заметим, что тип вершины определяется при ее создании и в дальнейшем не меняется. Например, если вершина была боковой вершиной и после какой-то подклейки оказалась на краю подклеенной макроплитки, она все равно останется боковой и принадлежащей той макроплитке, внутреннему ребру которой она принадлежит.

Определим *глубину* новых вершин. Будем считать, что краевые и боковые вершины *принадлежат* тем ребрам, на которых они создаются. Все создаваемые при разбиении вершины получают глубину на 1 больше, чем максимальная глубина вершины до разбиения. Из построения ясно, что у любого ребра макроплитки хотя бы один из концов является вершиной, созданной на предыдущем шаге. Следовательно, создаваемая вершина в середине ребра получает глубину на 1 большую, чем, максимальная глубина двух концов ребра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Операция *разбиения*, примененная ко всему комплексу есть результат одновременного применения разбиения ко всем плиткам первого уровня в комплексе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Операция *подклейки*. При *подклейке* мы рассматриваем все пути $X_1X_2YZ_2Z_1$ из пяти вершин (и четырех ребер), такие что:

- 1) Вершины X_1, Y, Z_1 **не** являются тремя углами из четырех никакой макроплитки;

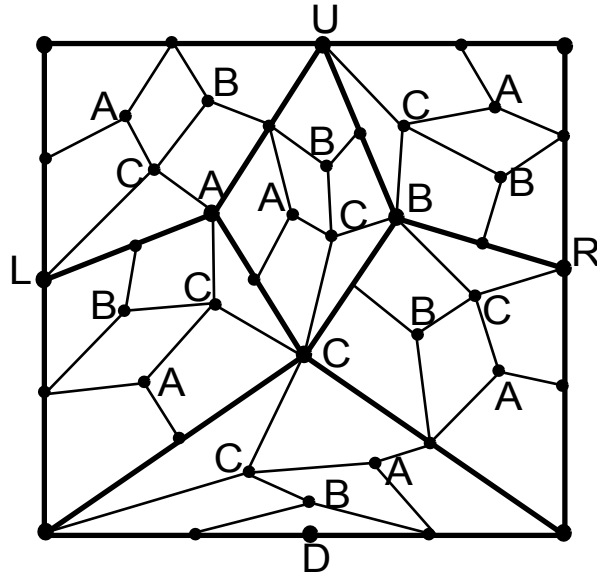


Рис. 4. Макроплитка третьего уровня. Отмечены типы внутренних вершин (A, B, C)

2) Вершины X_1, Z_1 являются боковыми или краевыми вершинами глубины $k - 1$, где k – максимальная глубина вершины в комплексе;

3) Вершина X_2 является серединой X_1Y , а Z_2 – серединой Z_1Y , то есть, X_2 и Z_2 являются боковыми или краевыми вершинами глубины k , созданными в комплексе самыми последними, при последней операции *Разбиения*.

4) Вершина Y имеет глубину $k - 2$.

5) Путь $X_1X_2YZ_2Z_1$ выбран так, что уровень ребра, которому принадлежит вершина X_1 больше уровня ребра вершины Z_1 .

Допустим, ребра, которым принадлежат X_1 и Z_1 , имеют один уровень. В этом случае мы считаем, что ребро X_1 имеет меньший номер в нумерации ребер, входящих в вершину Y , которая определяется индуктивно по глубине, см ниже.

Далее, для каждого такого пути создаются шесть новых вершин $T_1, T_2, T_3, T_A, T_B, T_C$, не лежащих в плоскости X_1YZ_1 , а также проводятся новые ребра $X_1T_2, X_2T_A, X_2T_B, T_2T_B, T_C T_B, T_C T_A, T_2T_1, T_3T_1, T_3Z_1, T_C Z_1, T_A Z_2$ и появляется новая *подклеенная* макроплитка $X_1YZ_1T_1$ (рисунок 5).

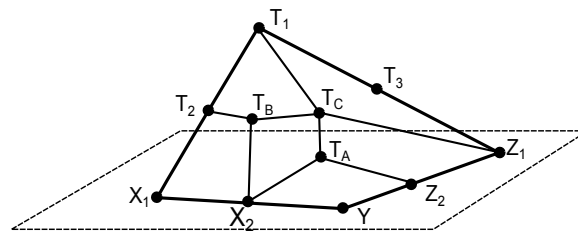


Рис. 5. Подклейка.

Созданные вершины будем называть *подклеенными*, причем T_1 присваивается глубина $k - 1$, а вершинам T_2, T_3, T_A, T_B, T_C – глубина k . Вершину T_1 будем считать угловой, вершины T_2, T_3 – краевыми, а вершины T_A, T_B, T_C – внутренними.

Типы вершин (A, B, C, U, UL и т.п.) и типы ребер не меняются при проведении подклейки.

Вершину Y будем называть *ядром подклейки*. Макроплитку, которой принадлежит ядро подклейки, будем называть *базовой плоскостью* подклейки. Макроплитки, которым принадлежат ребра YX_1 и YZ_1 (это может быть и одна макроплитка) будем называть макроплитками, к которым подклеивается новая подклеенная область.

При операции подклейки проводятся новые ребра, являющиеся внутренними ребрами в подклеенной макроплитке, а также два граничных ребра - нижнее и правое. Рассмотрим те из проведенных новых ребер, которые одним концом лежат на верхнем и левом ребрах подклеиваемой макроплитки, то есть тех ребрах которыми она подклеивается к остальному комплексу. Будем называть их *ребрами входа и выхода* в данную подклейку. Если путь проходит по такому ребру, то мы будем говорить что путь вошел в данную подклеенную макроплитку, или вышел из нее, в зависимости от направления пути. Заметим, что ребра входа и выхода могут появиться также после разбиения уже подклеенной макроплитки.

Примечание 1. Заметим, что в подклеенной макроплитке по построению определяется верхняя, а, следовательно, и остальные стороны: она выглядит так же, как если бы к плитке $X_1YZ_1T_1$ применили разбиение, считая сторону X_1Y верхней. Также можно считать, что в этой макроплитке T_2 середина стороны T_1X_1 , а T_3 – середина стороны T_1Z_1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Комплексами 1, 2 и 3 уровня будем называть макроплитки, соответственно, 1, 2 и 3 уровня.

Комплексом n уровня для $n \geq 4$ становится комплекс $n - 1$ уровня, к которому применены *Разбиение* и затем *Подклейка*.

Иногда мы будем рассматривать *плоские части* комплекса. Так мы будем называть отдельно рассматриваемые макроплитки, полученные разбиениями изначальной плитки, а также отдельно рассматриваемые подклеенные макроплитки. *Плоским* путем будем называть путь, полностью лежащий в некоторой макроплитке T . Этот путь не содержит ребер, ведущих в подклеенные к T макроплитки, но может содержать ребра, входящие и выходящие на границу T .

Замечание 1. Начиная с четвертого уровня комплекса (и при построении пятого уровня) путь X_1YZ_1 из определения операции подклейки может частично лежать в базовой плоскости, а частично в подклеенной части (если Z_1 появилась при предыдущей подклейке в качестве вершины T_2 или T_3). На больших уровнях комплекса весь путь из определения подклейки может лежать полностью в подклеенных плитках. Таким образом, возникают подклейки к частям подклеенных когда-то макроплиток и т.д. То есть подклеенная макроплитка подклеивается либо к одной либо к двум другим макроплиткам (к двум в случае, когда два ребра подклейки принадлежат разным макроплиткам). Заметим также, что уровень обоих этих макроплиток не менее чем на 1 превосходит уровень подклеиваемой макроплитки.

Замечание 2. В итоге мы всегда будем рассматривать комплексы конечного уровня. Предельного перехода применяться не будет.

ЛЕММА 3.1 (Об ограниченности роста степени вершины). *Для каждой вершины Z существует такое натуральное N , что начиная с уровня макроплитки N , степень (число входящих ребер) вершины Z не меняется, то есть она одинакова для макроплиток уровня N и $N + k$ для любого натурального k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую плитку T . У нее четыре угла X, Y, P, Q (рисунок 6).

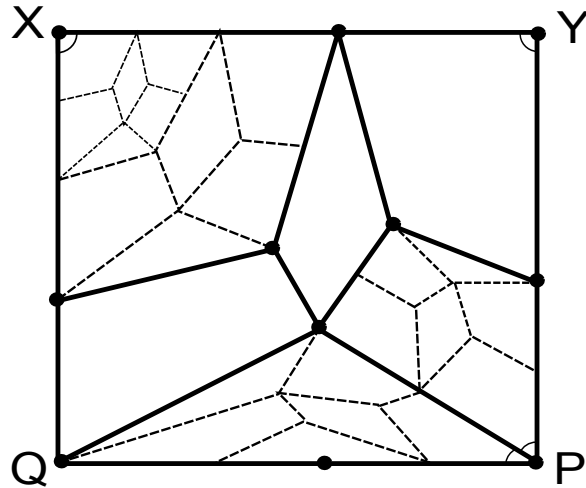


Рис. 6. Простые углы отмечены дугами.

При разбиении некоторые углы разбиваются ребрами, а некоторые нет.

Заметим, что левый и правый верхние углы не будут разбиты ребрами, какой бы ни был уровень макроплитки. Действительно, левый верхний угол переходит в себя при разбиении, и поэтому никогда не будет разбит ребрами. К правому верхнему углу, на следующем уровне разбиения, меньшая плитка прикладывается левым верхним углом, то есть и при последующих разбиениях ребер не появится.

Теперь заметим, что при первом разбиении макроплитки в правом нижнем углу появляется ребро, но обе макроплитки разбиения примыкают к правому нижнему углу своим левым верхним углом. То есть, при дальнейших разбиениях новых ребер не появится. К левому нижнему углу после первого разбиения будут примыкать две плитки разбиения, правым верхним и правым нижним углами, то есть тут появится еще одно ребро при втором разбиении, и больше их не будет.

Итак, внутри каждого угла каждой макроплитки будет проведено, максимум, два ребра.

Разбиение плиток, начиная с некоторого момента, перестает менять степень выбранной вершины. \square

Следствие. 1. Каждая вершина заданной глубины x выступает в качестве ядра подклейки для ограниченного количества подклеек.

2. В каждую вершину входит ограниченное количество ребер различных уровней, включая ребра из подклеек.

Первое утверждение следует из того, что каждая вершина бывает ядром подклейки только один раз, когда ее глубина на 2 меньше максимальной глубины. Докажем второе. Для выбранной вершины из ее собственной макроплитки ребер идет конечное число. Ребра одного уровня проводятся в вершину при одновременном создании нескольких подклеек, где данная вершина лежит на ребре подклейки. Таких подклеек одновременно создается конечное число, так как ядра всех этих подклеек находятся на расстоянии 2 от нашей вершины.

Нумерация на входящих в вершину ребрах. Для каждой вершины пронумеруем входящие в нее ребра. Нумеруются именно способы входа в вершину, то есть в случае, если вершина лежит на некоторой стороне или внутреннем ребре макроплитки, то эта сторона или ребро даст два входящих в вершину ребра.

Будем делать это сначала для ребер вершин глубины -1 и 0 . У таких вершин нет ребер в подклейки. Все плоские ребра можно пронумеровать по уровням. Сначала даем номера всем ребрам самого большого уровня, потом на один меньшего и так далее. При равных уровнях нумеруем по часовой стрелке.

Допустим, все входящие ребра в вершины глубины k пронумерованы. Пронумеруем все ребра из вершины X глубины $k + 1$. Все входящие ребра в ту же плоскость, которой принадлежит вершина X можно опять пронумеровать по уровням, от большего к меньшему, а при равных уровнях – по часовой стрелке. Рассмотрим все ребра, выходящие из X в подклеенные области. Пронумеруем сначала ядра этих областей, от меньшей глубины к большей, при равной глубине сначала боковые и краевые вершины, потом внутренние типа C , потом A и B . Заметим, что X не может лежать в двух подклейках, ядра которых имеют одну и ту же глубину и одновременно являются боковыми или краевыми, а также внутренними одного типа. Действительно, в этом случае две подклейки возникают одновременно с разными ядрами глубины $n - 2$ при максимальной глубине n . В этом случае расстояние между ядрами в момент подклейки будет не более 4. В этом случае ядра не могут одновременно быть внутренними вершинами одного типа или одновременно быть боковыми или краевыми.

Теперь покажем, как пронумеровать ребра для подклеек с одним и тем же ядром. Рассмотрим некоторое ребро r из X в подклееную область T . Эта область (макроплитка) T подклеивается к остальному комплексу по двум своим сторонам, причем X лежит на одной из них. Отметим, что X не может быть ядром данной подклейки, так как ядро по отношению к подклейке является верхней левой вершиной, а из верхней левой вершины макроплитки не выходит внутренних ребер.

Две стороны, по которым подклеивается T , являются входящими ребрами в ядро данной подклейки T . У ядра подклейки глубина меньше, и нумерация на ребрах уже задана. Поставим в соответствие ребру r номер ребра, соответствующего стороне, на которой X не лежит. Совпадение номеров у ребер r_1 и r_2 означает, что они идут в одну и ту же подклейку. Фактически мы пронумеровали все подклейки, в которых участвует вершина X .

Рассмотрим теперь все ребра в подклейки из X , имеющие некоторый одинаковый уровень s . Пронумеруем все ребра, соответствующие одинаковому номеру подклейки (входящего в соответствующее ядро ребра, на котором X не лежит). Заметим, что выходящие ребра из вершины на границе макроплитки, если они имеют один уровень, то тогда у них разный тип ребра. То есть у таких ребер разный тип ребра и их можно пронумеровать от меньшего к большему. Далее так нумеруем все ребра для каждого номера подклейки от меньшего к большему.

Проделав эту операцию по очереди для уровней ребра s от большего к меньшему можно пронумеровать все ребра в выделенную вершину любой заданной глубины.

ЛЕММА 3.2 (О боковых и краевых вершинах). 1) *Каждая боковая или краевая вершина лежит на середине стороны в какой-либо макроплитке или в двух макроплитках одного уровня, лежащих в одной плоскости;*

2) *Если боковая или краевая вершина не находится на границе исходного комплекса первого уровня, то она лежит на одном из восьми внутренних ребер (рисунок 3) в некоторой макроплитке, либо лежит на границе подклеенной макроплитки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В комплексе первого уровня свойство выполняется. На втором уровне также все верно для всех созданных боковых вершин.

Пусть для уровня k комплекса все эти свойства выполнены. Для уже существующих боковых и краевых вершин оба свойства будут сохраняться при дальнейших разбиениях

и подклейках. Если новая краевая вершина возникла при подклейке, то это она использовалась в качестве T_2 или T_3 из определения подклейки, и в качестве макроплитки можно взять как раз подклееную в тот момент макроплитку.

Созданная при разбиении вершина, очевидно, лежит на середине стороны только что разбитой плитки. Если это подклееное ребро или граница начального комплекса первого уровня, то такая плитка одна (и тогда это граница подклеенной макроплитки, либо всего комплекса), в остальных случаях таких макроплиток две.

Для уровней 1 и 2 комплекса заметим, что все стороны плиток, не лежащие на границе, являются частью какого-то большего ребра, классифицируемого, как одного из восьми типов из рисунка 3. Заметим, что если боковая вершина лежит на внутреннем ребре определенного типа, то при дальнейших подклейках и разбиениях этот тип не меняется. При этом создаваемые при разбиении внутренние ребра, очевидно, принадлежат одному из этих восьми типов.

Если ребро, при разбиении которого образовалась вершина не является границей для всего комплекса или подклеенной макроплитки, то оно принадлежит одному из восьми типов из рисунка 3 для какой-то макроплитки. Значит и вершина тоже принадлежит такому ребру. □

1.3. Пути на комплексе. В этом параграфе мы установим несколько свойств путей, проходящих по комплексу. В леммах ниже мы будем рассматривать комплексы произвольного размера, то есть мы дополнительно полагаем, что они верны для комплекса произвольного размера, естественно, на котором могут существовать указанные в леммах конструкции. Если речь идет о существовании некоторых констант, достаточно длинных путей и т.п. мы будем считать что такие константы и прочие выборы производятся независимо от размеров комплекса.

Путь, идущий по макроплитке, может быть локально преобразован:

ЛЕММА 3.3 (О переброске пути). Пусть $XYZT$ – некоторая макроплитка. Рассмотрим путь XYZ (состоящий из двух соседних макрорребер). Тогда, если разрешается менять подпуты из двух соседних ребер любой плитки на подпуты из двух других ребер (с общими началом и концом у этих подпутей), то путь XYZ может быть преобразован в XTZ – путь по другим двум макрорребрам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать по индукции. Для случая, когда макроплитка – это плитка, преобразование можно сделать сразу. Шаг индукции можно совершить, выполняя локальные преобразования по правилам, показанным на рисунке 7. □

Примечание. Применяя аналогичные рассуждения, можно доказать то, что также перебросить можно и путь, начало и конец которого лежат в серединах противоположных ребер макроплитки. ,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Замены подпутей из пары соседних ребер плитки на подпуты из другой пары будем называть *локальными заменами*. А возможность с помощью таких замен достичь некоторого состояния, будем называть *локальным преобразованием*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Будем считать форму пути *нулевой*, если она содержит подпуты длины 2 по ребру некоторой минимальной плитки (туда-обратно).

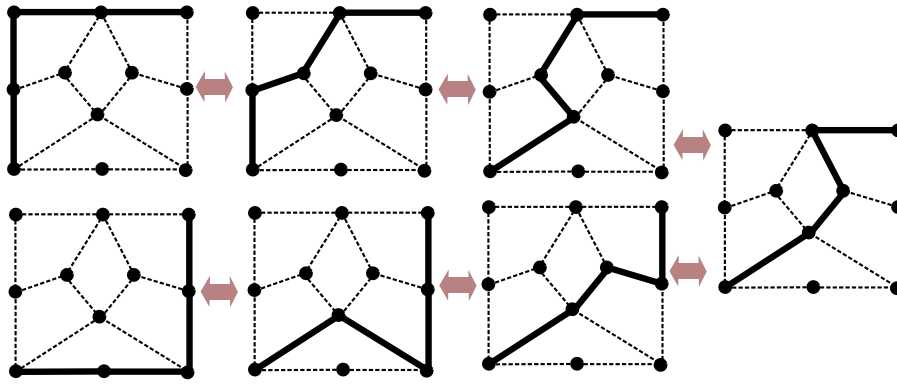


Рис. 7. Переброска пути на другую сторону макроплитки.

ЛЕММА 3.4 (О выносе пути на границу). Пусть начало и конец пути P , проходящего по макроплитке T , лежат на границе T . Тогда можно реализовать одну из двух возможностей:

1) P может быть локально преобразован в нулевую форму.

2) P может быть локально преобразован в форму P' так, что P' полностью лежит на границе T .

Кроме того, любой кратчайший путь, соединяющий противоположные углы или середины противоположных сторон макроплитки имеет длину 2^n , и может быть локально преобразован в любой из двух путей по границе (полупериметр), с теми же концами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать индукцией по уровню макроплитки. Любой путь по минимальной плитке и так лежит на ее границе. Пусть макроплитка уровня n . Рассмотрим ее разбиение на 6 (макро)плиток уровня $n - 1$. Путь P разбивается на несколько участков, каждый из которых имеет начало и конец на границе какой-то из этих подплиток. По предположению индукции, эти участки можно локально преобразовать в форму P_1 так, чтобы весь путь P_1 проходил только по границам подплиток.

Замечание. Символы L, U, R, D, A, B, C обычно обозначают типы вершин. Соответственно, внутри макроплитки крупного уровня может быть несколько вершин, имеющих один и тот же тип. Но в данном предложении макроплитка фиксирована, так что логично для обозначения принадлежащих ей вершин использовать те же буквы.

Обозначим буквами L, U, R, D середины соответственно левой, верхней, правой, нижней сторон T , и внутренние вершины как A, B, C .

Пусть P_1 содержит A один раз. Войти и выйти P_1 может только по трем ребрам (направленным в сторону U, L и C). Если вход и выход – по одному ребру, то условие 1) выполнено.

Пусть во входе и выходе задействованы ребра в сторону U и L . Если, например, выйти в сторону L , то сойти с ребра мы не можем (так как P_1 проходит только по границам макроплиток $n - 1$ уровня) и вернуться назад тоже (так как тогда будет выполнено 1). Заметим, что тогда P_1 содержит подпуть LAU или UAL , в обоих случаях этот подпуть, согласно лемме о переброске пути, можно локально преобразовать чтобы он проходил по границе макроплитки T и, таким образом, не содержал A .

Если во входе и выходе задействованы ребра в сторону L и C , то P_1 содержит подпуть LAC или CAL и он может быть преобразован в форму соответственно LXC или CXL , где X – левый нижний угол, и в этом случае опять форма не будет содержать A .

Если во входе и выходе задействованы ребра в сторону U и C , то P_1 содержит подпуть UAC или CAU и он может быть преобразован в форму соответственно UBC или CBU , и тоже форма не будет содержать A .

Проделав аналогичные рассуждения для симметричного случая вершины B , мы можем заключить, что путь можно преобразовать в форму P_2 , такую что она либо вообще не содержит A и B , либо содержит кусок UBC или CBU (который может быть преобразован в UAC или CAU соответственно).

Если P_2 не содержит A и B и содержит C , то войти и выйти из C можно только по ребрам, ведущим в левый нижний и правый нижний углы. В этом случае можно применить лемму о переброске пути для участка, содержащего эти углы и C и получить форму, не содержащую вершин A, B, C .

Пусть P_2 содержит кусок UBC или CBU . Посмотрим, как P_2 проходит через C : один вход (или выход) в сторону B , другой не может идти в сторону A , так как P_2 не содержит A , значит он идет в сторону нижнего левого или нижнего правого угла. Если это нижний правый угол Y то P_2 содержит кусок $UBCY$ или $YCBU$. Применяя лемму о переброске путей, $UBCY$ переводится в $UBRY$ и далее в $UZRY$, где Z правый верхний угол. Аналогично, $YCBU$ переводится в $YRZU$. Если это нижний левый угол X , то P_2 содержит кусок $UBCX$ или $XCBU$. Аналогично применяя лемму 3.3 о переброске пути, переводим $UBCX$ в $UACX$ и далее в $UALX$ и потом в $UWLX$, где W – левый верхний угол. Аналогично $XCBU \Rightarrow XCAU \Rightarrow XLAU \Rightarrow XLWU$.

Таким образом, мы получим форму не содержащую вершин A, B, C . В этом случае, если нельзя выполнить условие 1), то весь путь проходит по границе T , и выполнено условие 2).

Последнее утверждение этой леммы является следствием из первого, с учетом леммы о переброске пути. \square

ЛЕММА 3.5 (О “шевелении” пути). Пусть P – путь, состоящий из макроребра XU некоторой макроплитки T уровня не менее 4. Обозначим середину XU как H , середины XH и HU как G_1 и G_2 . В соответствии с определением подклеек, существует подклееная макроплитка, три угла которой лежат на макроребре: это G_1, H и G_2 . Тогда P может быть локально преобразован в форму P' , состоящую из трех частей: первая – XG_1 , третья – G_2Y , а вторая представляет собой путь по двум соседним ребрам подклеенной макроплитки, два других ребра которой являются частью P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проследить разбиение T (на три уровня в глубину). Обозначим середины G_1H и HG_2 как G_3 и G_4 . Так как G_3 и G_4 будут иметь уровень на 2 больше, чем H , значит, была проведена подклейка для пути $G_1G_3HG_4G_2$. Пусть F – созданная при этой подклейке угловая вершина. По лемме о переброске пути, G_1HG_2 можно локально преобразовать в G_1FG_2 . \square

ЛЕММА 3.6 (О выделении локального участка). Пусть n – уровень макроплитки и путь P лежит внутри нее.

1. Пусть оба края P лежат на границе T . Тогда если путь P имеет длину не менее $5 \times 2^{n-2}$, он может быть локально преобразован в нулевую форму P' .

2. Пусть один край P лежит в углу или на середине стороны T , а второй край – внутри T (часть пути может проходить по границе T). Тогда если путь P имеет длину 2^n , он может быть локально преобразован в нулевую форму P' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Согласно лемме о выносе на границу, можно считать, что весь путь P проходит по границе T . Пусть при этом не образовалось нулевой формы, то есть путь покрывает какую-то часть границы T , совершая движение либо по часовой стрелке либо против. Отметим на границе T восемь точек – углы и середины сторон. Заметим, что расстояние между соседними отмеченными точками (углом и серединой стороны) равно 2^{n-2} . Наш путь включает в себя не менее 5 из отмеченных точек. Тогда найдутся две

отмеченные точки, диаметрально противоположные относительно T , и такие, что путь P полностью покрывает половину границы между ними. Заметим при этом, что хотя бы одна из этих отмеченных точек не является концевой для P . Пользуясь леммой о переброске (с примечанием) можно перевести подпуть из половины границы на другую половину. Ясно, что получившаяся форма будет нулевой.

2. Будем доказывать индукцией по уровню макроплитки. Для уровней 1 и 2 утверждение легко проверяется. Допустим, уровень макроплитки равен n , а для меньших n это верно. Будем размечать пути скобками: открывающей скобкой отметим вершину, где путь заходит внутрь некоторой макроплитки, а закрывающей - где выходит. Из всех локально эквивалентных пути P путей выберем такой путь Q , в котором меньше всего скобок. Заметим, что подпуть Q , начинающийся с открывающей скобки, заканчивающийся закрывающей и не содержащий скобок внутри, попадает под условия леммы о выносе пути на границу, и его можно преобразовать в форму, где скобок будет меньше. Также заметим, что один край Q на границе, то есть первая скобка (если она есть) обязана быть открывающей. Тогда в Q не может быть закрывающих скобок, только открывающие.

Если Q не содержит скобок, тогда он проходит по границе макроплитки, и тогда оба конца пути лежат на границе, что не так по условию.

Обозначим как H одну из шести подплиток T , в которой лежит конец пути Q . Заметим, что если путь заходит в какую либо подплитку, то выйти из нее он уже не может, так как в этом случае в пути будет закрывающая скобка.

Обозначим как X первую вершину на пути, что вся оставшаяся часть лежит в H . Ясно, что X – один из углов одной из шести подплиток T . Разобьем Q на два подпути Q_1 и Q_2 , до и после X . Заметим, что Q_1 проходит лишь по границам и по внутренним ребрам T . Таким образом, можно считать, что Q_1 проходит по внутренним ребрам и границам макроплитки второго уровня.

Теперь проверим, что на макроплитке уровня 2 любой путь Q_1 , начинающийся на границе, ведущий в подплитку H и не содержащий закрывающих скобок, приводится либо к нулевой форме, либо к виду S_1S_2 , где S_1 имеет длину не более 2, а S_2 лежит в H . В силу вышесказанного, достаточно рассмотреть случаи, когда Q_1 имеет длину 3 и оканчивается во внутренней вершине, либо имеет длину 4 и лежит на границе макроплитки. Требуемое утверждение проверяется перебором путей, подчиняющихся указанным ограничениям, и подплиток H , в которых эти пути оканчиваются. Детали перебора предоставляются читателю.»

Итак, можно считать, что начальная часть S_1 пути не длиннее $2 \times 2^{n-2}$. Тогда оставшаяся часть пути лежит в H , и в ней можно выбрать кусок длины 2^{n-1} . К нему можно применить предположение индукции.

□

ЛЕММА 3.7 (О непродолжаемом пути). *Рассмотрим некоторую макроплитку T , являющуюся подплиткой более крупной макроплитки. Пусть путь P лежит в T , причем начало и конец P лежат в серединах противоположных сторон T . Тогда любые плоские пути вида WP или PW , где длина W более длины P , могут быть приведены к нулевой форме.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случаи WP и PW аналогичны, рассмотрим PW . Пусть a – это та сторона T , в середине X которой заканчивается P и начинается W . Пусть путь, выйдя из X идет внутрь макроплитки T , либо по ее стороне a . Обозначим как r , его первое ребро. Если r уходит внутрь макроплитки T , то к пути Pr применима вторая часть леммы о выделении локального участка. Пусть r лежит на стороне. Тогда один из двух путей Q_1 или Q_2 с теми же концами, что и P (и локально эквивалентных ему по лемме о выносе

пути на границу) тоже будет содержать r . В этом случае Q_1r или Q_2r содержит ребро, которое проходится туда-обратно.

Значит, из X путь может выйти только в макроплитку T' , соседствующую с T по стороне a . Допустим, существует вершина Y из пути W , лежащая на границе T' , отличная от X . В этом случае, кусок пути W от X до Y может быть локально преобразован так, что он будет проходить по границе T' . Но тогда выход этого куска из X будет по стороне a , и в этом случае опять можно локально преобразовать P чтобы PW содержал туда и обратно по одному ребру. Если такой вершины Y не найдется, то все остальные вершины W лежат внутри T' , то есть можно воспользоваться леммой о выделении локального участка. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Пусть r – выходящее ребро из вершины X . Пусть X – боковая или краевая вершина и разделяет некоторые макроплитки U и W (или лежит на границе некоторой макроплитки U). r называется *главным ребром*, если оно лежит на границе между U и W (или просто на границе U). Если же X – внутренняя вершина в макроплитке U , тогда r *главное ребро*, если r – лежит на одном из внутренних ребер макроплитки U .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Рассмотрим некоторый плоский путь. Он проходит через внутренние и боковые вершины. Рассмотрим последовательность всех вершин, которые посещает путь. Если на пути есть некоторая боковая или краевая вершина, вход и выход в которую прошел по главным ребрам, выбросим ее из этой последовательности. Последовательность оставшихся вершин назовем *паттерном пути*. То есть в паттерн пути входят все внутренние вершины, и все боковые и краевые вершины, где происходит вход(выход) в (из) макроплитку. Фактически паттерн пути – это его карта, показывающая маршрут на ориентировочных точках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Пусть P – некоторый паттерн. В рамках данного определения путь W будем называть *достаточно большим* путем, содержащим P , если выполнены следующие условия:

- 1) Путь W представляется в виде $W_1W_2W_3$, где паттерн W_2 есть P ;
- 2) Длина как W_1 , так и W_3 не менее удвоенной длины W_2 .

Мертвым будем называть такой паттерн P , что любой достаточно большой путь W , собственным подпутьем которого является путь с паттерном P , может быть локально преобразован к нулевой форме.

ЛЕММА 3.8 (О мертвых паттернах). *Рассмотрим некоторую макроплитку T и обозначим в ней внутренние вершины A, B, C и боковые U, R, D, L (аналогично обозначениям при разбиениях). Тогда паттерны AUB, ACB, CXD (где X – нижняя левая, либо нижняя правая вершина) являются мертвыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пути с паттернами AUB и ACB локально преобразуются друг в друга, так что достаточно рассмотреть один из этих случаев. Пусть n – уровень T . Пусть W_1ACBW_2 – достаточно большой путь, содержащий подпуть с паттерном ACB . Заметим, что длина пути с паттерном ACB равна 2^{n-1} . Допустим, W_1 не содержит вершин на границе T .

Если на W_1 есть вершины, лежащие на внутренних ребрах T , то участок пути от первой такой вершины K до A может быть локально преобразован так, чтобы он проходил только по внутренним ребрам T . Заметим, что таким внутренним ребром может быть только ребро от A до середины левой стороны, в других случаях путь W_1ACB либо будет содержать участок, которое он проходит туда, а потом обратно, либо будет содержать подпуть по границе средней подплитки T длиной более 2^{n-1} . То есть может быть преобразован к нулевой форме.

Тогда можно считать, что W_1 состоит из двух участков W_11 и W_12 , причем W_11 проходит внутри левой верхней или левой нижней подплитки T , а W_12 – по ребру от середины левой стороны T до A . Длина W_1 не менее 2^{n-1} . Применяя лемму о выделении локального участка, получаем, что путь W_1 , заканчивающийся в A приводится к нулевой форме.

Итак, пусть теперь W_1 и, аналогично, W_2 содержат вершины на границе T . Рассмотрим разбиение макроплитки T на 6 дочерних подплиток (в соответствии с операцией разбиения) и будем локально преобразовывать W так, чтобы он проходил по границам этих дочерних подплиток. Тогда из вершины B путь должен идти по ребру к R , а в A путь должен входить по ребру из L , в остальных случаях образуется обход подплитки по трем ее сторонам (и этот кусок преобразуется к нулевой форме). Таким образом, в W можно выделить подпуть, проходящий по макроплитке T , начало которого в L и конец в R . Можно воспользоваться леммой о непродолжаемом пути и получить требуемое.

Для паттерна CXD , пусть T' – макроплитка, соседняя с T по нижней стороне. Заметим, что выход из вершины D обязательно должен быть внутрь макроплитки T' , иначе можно применить лемму о выделении локального участка для нижней дочерней подплитки T . Заметим, что длина пути с паттерном CXD равна 2^{n-1} , где n – уровень T (и T'). Дальнейшая часть пути не менее, чем вдвое длиннее, то есть, не менее 2^n . Если далее на пути не встречается вершин на границе T' , то можно применить лемму о выделении локального участка. Пусть на пути встретится вершина Z на границе T' . Преобразуем кусок DZ чтобы он проходил по периметру T' .

Но тогда из D путь W продолжится по граничной между T и T' стороне. То есть теперь опять можно применить лемму о переборке пути для нижней дочерней подплитки T и получить требуемую нулевую форму. □

Примечание. Ясно, что и паттерны BUA , BCA , DXC (где X – нижняя левая, либо нижняя правая вершина) тоже мертвые, доказательство полностью аналогично.

ЛЕММА 3.9 (О мертвых путях в нижней подплитке). *Рассмотрим некоторую макроплитку T уровня n . Пусть путь XYZ лежит в T , причем Y – левый нижний угол T , XU лежит на внутреннем ребре, идущем из левого нижнего угла T во внутреннюю вершину C , а YZ лежит на нижней стороне T . Тогда для любых плоских путей W_1, W_2 , длины которых более 2^{n+1} , путь W_1XYZW_2 можно локально преобразовать к нулевой форме.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим середину нижней стороны T как D . Пусть T' нижняя подплитка T . Рассмотрим некоторый плоский путь W_1XYZW_2 , с длинами W_1, W_2 большими 2^{n+1} . Учитывая длину путей W_1 и W_2 , они имеют вершины на границе макроплиток уровня n . Тогда их можно преобразовать так, чтобы они проходили по границам макроплиток уровня T' или выше (не заходя в более мелкие плитки). Ясно, что W_1 должен проходить через C , а W_2 через D , иначе возникает очевидный кусок с нулевой формой. Таким образом, после преобразования, путь будет содержать подпуть с паттерном CXD , длина которого 2^{n-1} и который является мертвым, по лемме о мертвых паттернах. Следовательно, для указанных W_1 и W_2 наш путь можно преобразовать к нулевой форме. □

Замечание. Доказательство аналогично переносится на случай, когда Y – правый нижний угол и XU идет по внутреннему ребру от C .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. *Некорректным участком* пути будем называть такой подпуть XYZ , что вершина Y лежит на границе некоторой макроплитки T , а вершины X и Z лежат внутри T (не на границе).

ЛЕММА 3.10 (О некорректных участках). Пусть есть некорректный участок XYZ в макроплитке T уровня n , причем T – минимальная макроплитка, содержащая XYZ в качестве некорректного участка. Тогда для любых плоских путей W_1, W_2 , длины более 2^{n+2} , путь W_1XYZW_2 , может быть локально преобразован к нулевой форме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – родительская макроплитка для T . Пусть W_1 не содержит вершины, лежащей на границе U . В силу минимальности выбора T , вершина Y лежит в углу, либо в середине стороны T . Если на W_1 нет вершины, лежащей на границе T , тогда к пути W_1XY можно применить лемму о выделении локального участка. Значит, на пути W_1 есть вершины, лежащие на внутренних ребрах U (в частности, на границе T). Пусть K первая вершина в W_1 , лежащая на внутреннем ребре U . Тогда по лемме о выносе пути на границу, участок пути W_1XY от K до Y может быть локально преобразован так, что он будет проходить только по внутренним ребрам U . Заметим, что тогда участок пути W_1 от начала до K лежит в некоторой подплитке U , обозначим ее T' .

Допустим сначала, что K и Y лежат на одном внутреннем ребре (разделяющем T и T'). Тогда после преобразования участка от K до Y , весь путь от начала W_1 до Y лежит в макроплитке T' и заканчивается в середине стороны или в углу. То есть к нему применима лемма о выделении локального участка.

Пусть теперь K и Y лежат на разных внутренних ребрах. Тогда участок от K до Y , проходящий по внутренним ребрам U обязан будет пройти через один из концов внутреннего ребра, на котором лежит K . Пусть это вершина F (учитывая, что F не на краю U , это может быть лишь одна из трех внутренних вершин). Тогда длина участка пути от начала до F меньше 2^n , иначе к нему применима лемма о выделении локального участка. Тогда длина участка от F до Y более 3×2^n , то есть более 6 внутренних ребер U . В этом случае, очевидно, этот участок может быть преобразован к нулевой форме.

Итак, будем считать, что W_1 и, аналогично, W_2 содержат вершины, лежащие на границе U . Тогда, с учетом леммы о выносе пути на границу, пути W_1 и W_2 внутри U проходят по внутренним ребрам, не менее крупным, чем ребра XY и YZ . Кроме того, если вдоль пути встречается вершина на более крупном ребре, то и далее путь проходит по столь же крупным ребрам.

Как уже было сказано выше, вершина Y лежит в углу T , либо в середине стороны. Из иерархии разбиений следует, что из всех углов кроме нижнего левого и из середины нижней стороны выходит не более одного ребра внутрь T , так что Y может лежать только на середине левой, правой или верхней стороны или в левом нижнем углу.

1. Пусть Y – левый нижний угол. Из этого угла внутрь выходит два ребра, оба к внутренним S -вершинам, одна в макроплитке T , другая в нижней дочерней подплитке T . То есть, путь XYZ попадает под условие леммы о нижней подплитке и все доказано.

2. Пусть Y – середина левой стороны. Из этой вершины выходит три ребра и поэтому есть три варианта расположения пути XYZ . В двух случаях можно применить лемму о нижней подплитке. Оставшийся случай изображен на рисунке 8.

Из вершины Z дальше путь может пойти:

i) в вершину B . В этом случае кусок $BZYX$ по лемме о переброске пути преобразуется в $BXYX$, то есть в нулевую форму.

ii) в вершину P . В этом случае кусок YZP преобразуется в YDP и для участка XYD можно применить лемму о нижней подплитке.

iii) в вершину A . Посмотрим, куда путь может пойти дальше. Если это вершина Q , то участок $YZAQ$ преобразуется в $YZPQ$ и далее в $YDPQ$, после чего опять можно применить лемму о нижней подплитке. Во втором случае, если путь идет в вершину U , то путь $XYZAU$ сразу можно привести к нулевой форме: $XYZAU \rightarrow XYZBU \rightarrow XYXBU$.

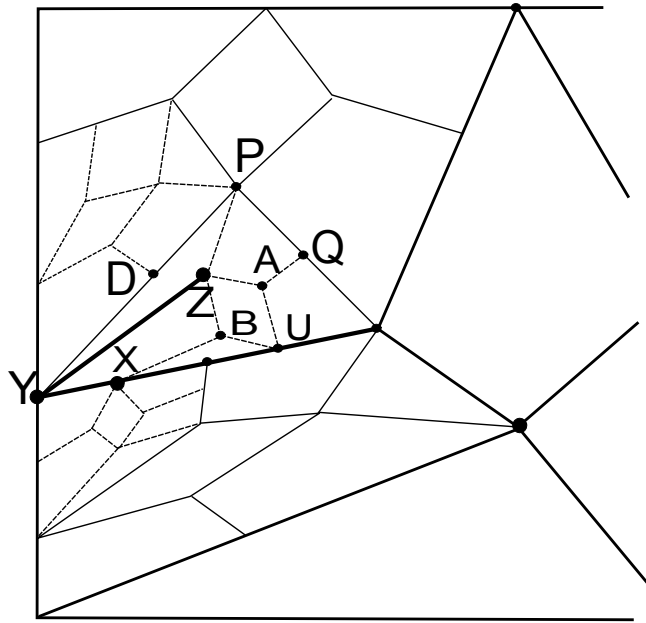


Рис. 8. Вершина Y – середина левой стороны.

3. Пусть Y – середина правой стороны. Этот случай симметричен второму, только вместо левой верхней подплитки мы имеем дело с правой нижней. Все рассуждения полностью аналогичны второму случаю.

4. Пусть Y – середина верхней стороны. Из этой вершины исходят четыре ребра (рисунок 9).

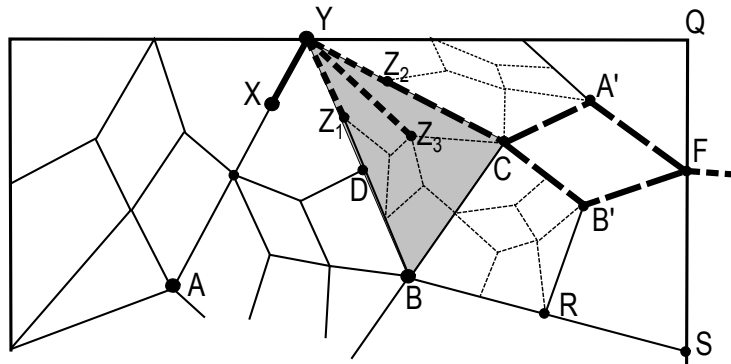


Рис. 9. Вершина Y – середина верхней стороны.

В случае, когда X и Z не лежат на внутреннем ребре типа 1 (идущем из Y к внутренней вершине A макроплитки T), то получается ситуация, полностью аналогичная второму и третьему случаям выше, на этот раз вместо левой верхней подплитки мы имеем дело с правой верхней. Итак, пусть верхняя правая подплитка T это T' и, ради определенности, X лежит на ребре, уходящем из Y к внутренней вершине A макроплитки T , а Z – на одном из трех ребер, попадающих в T' (отмечены пунктиром на рисунке 9).

Учитывая соглашение в начале доказательства, W_1 проходит по внутренним ребрам T или более крупных макроплиток. Тогда либо W_1XY содержит нулевую форму, либо W_1 проходит через внутреннюю вершину A макроплитки T . Теперь рассмотрим путь W_2 . Докажем, что этот путь может быть либо приведен к нулевой форме, либо локально преобразован в путь, начинающийся с макроребра YB .

В случае, если он начинается с Z_1 , мы сразу получаем, что W_2 проходит через внутреннюю вершину B . В случае Z_3 путь идет по внутренним ребрам макроплитки, выделенной серым цветом на рисунке 9. То есть он может быть локально преобразован, и будет проходить через B либо через C . В случае Z_2 он также проходит через C .

В обоих этих случаях далее путь идет по одному из участков $YCA'F$ или $YCB'F$, указанных длинным пунктиром (либо W_2 пройдет через B , либо будет может быть приведен к нулевой форме).

Таким образом, W_2 теперь проходит через вершину F . Пусть W_2 покидает макроплитку T , уходя в соседнюю макроплитку по правой стороне (короткий пунктир). Тогда длина оставшейся части W_2 (после F) более чем $2^{n+2} - 2^{n+1} = 2^{n+1}$. При этом эта часть пути W_2 оказывается внутри макроплитки, такой же по уровню, что и T' и начинается в середине ее стороны. Тогда к этой части пути применима лемма о выделении локального участка и лемма о вынесении пути на границу, что сводит доказательство к рассматриваемым ниже случаям.

Если из F путь W_2 идет к вершине Q , то оба возможных куска $YCA'FQ$ и $YCB'FQ$ по лемме о выносе пути на границу приводятся к виду $YQFQ$, то есть к нулевой форме. Если путь из F идет в S , то кусок $YCA'FS$ (или $YCBFS$) приводится к $YDBRS$ по лемме о переброске пути, применяемой последовательно для кусков этого пути.

Итак, W_1 проходит через внутреннюю вершину A макроплитки T , а W_2 – через внутреннюю вершину B . Теперь получившийся путь имеет подпуть с мертвым паттерном AUB . Заметим, теперь, что оставшиеся участки путей W_1 и W_2 превосходят требуемые в определении мертвого паттерна. То есть мы можем применить лемму о мертвых паттернах и привести путь W_1XYZW_2 к нулевой форме. □

Примечание. Рассуждения не сильно меняются, если рассмотренная макроплитка T имеет уровень 3 или меньше. В этом случае вершина Z_1 совпадает с D , а Z_3 с C .

ЛЕММА 3.11 (О корректности путей). *Пусть путь P представляет собой проход по двум соседним сторонам некоторой макроплитки T . Тогда любые локальные преобразования не могут привести P к нулевой форме, а также к форме, содержащей некорректный участок.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что P не приводится к нулевой форме. Для двух точек комплекса определено расстояние как наименьшая из длин соединяющих их путей. Докажем, что путь, проходящий по двум соседним сторонам макроплитки является кратчайшим для вершин в его концах. Действительно, для плитки уровня n кратчайший путь можно вынести на периметр, применяя соответствующую лемму. Путь по периметру соединяющий противоположные точки имеет длину 2^n .

Локальные преобразования не меняют длину пути. В случае, если после очередного преобразования появляется нулевая форма, путь не может быть кратчайшим.

Допустим теперь, что наш путь по двум сторонам макроплитки уровня n можно привести к форме, содержащей некорректный участок XYZ .

Пусть P соединяет левый нижний угол с правым верхним. Тогда T вкладывается в макроплитку уровня $n + 1$ в качестве левой верхней, при этом P является подпутем аналогичного пути из левого верхнего угла в правый верхний в более крупной макроплитке. Операцию вложения макроплитки в более крупную можно повторить любое число раз. Если P соединяет правый нижний угол с левым верхним, то T можно вложить в макроплитку уровня $n + 1$ в качестве нижней подплитки. Пусть P становится частью пути из левого нижнего угла в правый верхний. Далее вложения можно делать как для случая выше.

Итак P является подпутем сколь угодно протяженного от него в обе стороны пути P' , идущего по сторонам достаточно большой макроплитки и соединяющего ее левый нижний и правый верхний углы. По лемме о некорректных участках, если P приводится к пути, содержащему некорректный участок, то P' приводится к нулю. Но это невозможно, как уже показано выше. □

Замечание. Можно показать, что путь по двум соседним сторонам макроплитки после любого числа преобразований будет имеет форму W_1UW_2 , где пути W_1, W_2 (которые могут быть просто одной вершиной) полностью лежат на границах макроплитки, а у подпути U концы лежат на границе, а все остальные вершины лежат строго внутри.

ЛЕММА 3.12 (О расстоянии от края до выхода в подклейку). *1. Пусть вершина X лежит на краю некоторой макроплитки T принадлежащей комплексу K , вершина Y принадлежит T , но не находится на ее границе, а из Y существует выход в подклееную макроплитку уровня $n \geq 2$, не содержащую вершин на границе T . Тогда расстояние от X до Y в комплексе K (длина кратчайшего пути по ребрам) не менее 2^{n-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что для любых вершин X и Y на комплексе, операция подклейки не меняет расстояния между ними понимаемом в смысле количества ребер графа в кратчайшем соединяющем пути. Действительно, если X и Y после подклейки оказываются соединенными более коротким путем. Каждый его подпуть соединяющий две точки на границах подклеенной макроплитки. может быть локально преобразован в подпуть не заходящий внутрь этой подклейки, согласно лемме о вынесении пути на границу. В этом случае более короткий путь существует и до подклейки.

Вернемся к утверждению леммы. Проведем доказательство индукцией по уровню макроплитки T . Для уровней 2 и 3 подклеек внутри T не проводится. Для уровня 4 ближайшая вершина с подклееным ребром, в макроплитку, не содержащую X , лежит в середине любого ребра, выходящего на середину любого из граничных ребер. Расстояние от нее до границы T будет равно 2, при этом подклеенная макроплитка будет иметь уровень 2.

Пусть уровень T равен $k > 4$. Возьмем кратчайший путь XWY . Можно считать, что W не содержит вершин на границе T . Кроме того, можно считать, что Y не лежит внутри какой-то из подплиток T , иначе X можно взять на границе этой подплитки. Значит, Y обязательно лежит на одном из ребер, которые разделяют макроплитку T на 6 макроплиток при разбиении. Опять используя минимальность пути, замечаем, что Y лежит в углу подклеенной макроплитки. Из определения подклейки получаем, что уровень Y был на 1 меньше максимального в тот момент, когда эта подклейка производилась. Если после этого разбиений не было, то расстояние XW не менее 2, а также макроплитка при Y – второго уровня. Если после этого провели $l \geq 1$ разбиений, расстояние XW увеличилось в 2^l раз, а уровень макроплитки при Y возрос на l . Учитывая, что подклейки не меняют расстояний между точками, это завершает доказательство. □

ЛЕММА 3.13 (Об ограниченности пути, уходящего в подклееную часть). *1. Пусть путь P имеет вид $V_1AV_2BV_3CV_4$, где ребра из вершин A, B, C ведут в подклеенные области, а участки V_1, V_2, V_3, V_4 – плоские. Тогда путь P не может быть плоским (лежать в одной макроплитке).*

2. Пусть путь P начинается в вершине X , выход из X идет в подклееную макроплитку уровня n . Кроме того, пусть P не содержит ребер-выходов из подклеенных плиток. Тогда, если длина пути не менее 2^{n+1} , то он может быть приведен к нулевой форме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Допустим, путь проходит в подклеенной макроплитке T . Тогда T – та макроплитка, куда уходит ребро из C . Тогда путь от A до C проходит по краю T . Рассмотрим макроплитку (или две макроплитки) к которой подклеивается T . Тогда путь от начала до C проходит по этой одной или двум макроплиткам, при этом два раза проходит по ребру в подклееную область, что невозможно. (Один переход возможен, при переходе от одной макроплитки к другой.)

2. Пусть X_i – вершины P где происходят входы в подклеенные макроплитки T_i и X_1 это X . Пусть их всего s . Пусть уровень T_i равен n_i , $n_1 = n$. Учитывая, что уровень подклеенной макроплитки, как минимум, на 1 меньше, чем уровень каждой из макроплиток, к которым она подклеивается, получаем $n_1 > n_2 > \dots > n_s$.

По лемме о выделении локального участка, длина $X_i X_{i+1}$ менее 2^{n_i} . Тогда суммарная длина пути P меньше чем $2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^3 + 2^2 < 2^{n+1}$.

□

Слабая детерминированность

1. Определения

В этой главе обсуждается свойство слабой детерминированности, помогающее корректно ввести структуру определяющих соотношений на путях определенных в предыдущей главе комплексов. Слабая детерминированность доказывается для подстановочных комплексов, обладающих набором свойств, указанных ниже (и наши, построенные в предыдущей главе комплексы, удовлетворяют этим требованиям).

Сначала, для понимания, приведем неформальную формулировку.

ТЕОРЕМА 4.1 (О слабой детерминированности, неформальная формулировка). *Пусть задана плиточная подстановка σ определяющая последовательность комплексов. Пусть для всей последовательности комплексов задана некоторая раскраска α вершин и полуребер (входящих и выходящих ребер из вершин). Количество цветов для вершин и полуребер ограничено глобальной константой. Тогда существует дополнительная раскраска вершин и полуребер β , представляющая собой декорацию раскраски α (то есть β это разбиение каждого цвета в α на несколько новых цветов), такая что β является слабо детерминированной.*

Теперь определим необходимые понятия.

1.1. Структура комплексов. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, у которого зафиксированы верхняя, правая, нижняя и левая стороны. Пусть задано разбиение $ABCD$ на конечное количество четырехугольников, у каждого из которых также зафиксированы верхняя, правая, нижняя и левая стороны, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Любые два четырехугольника либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону;
2. Для каждого четырехугольника разбиения заданы его верхняя, правая, нижняя, левая стороны в указанном порядке по часовой стрелке.
3. Каждая сторона $ABCD$ содержит, помимо углов, ровно одну вершину четырехугольников разбиения.
4. Каждый четырехугольник разбиения примыкает к границе 0, 1, 2 или 3 вершинами, причем если примыкает двумя или тремя, то они соседние.
5. Если четырехугольник разбиения примыкает к границе 3 вершинами, то хотя бы одна из них попадает в угол большого четырехугольника.

Далее мы при рассуждениях о структуре комплексов мы будем использовать эти предположения.

Пусть вершины A_1, \dots, A_v четырехугольников разбиения расположены внутри $ABCD$, а вершины U, R, D, L расположены на верхней, правой, нижней и левой сторонах $ABCD$ соответственно.

С разбиением свяжем граф, имеющий $v + 8$ вершин, четыре угла, внутренние вершины: A_1, \dots, A_v , и боковые вершины U, R, D, L , ребрами графа являются стороны всех четырехугольников разбиения. Таким образом, большой четырехугольник с помеченными направлениями (верх, право, низ, лево) разбит на меньшие четырехугольники, также с помеченными сторонами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Четырехугольники разбиения будем называть *плитками* или *клетками*, а граф указанного выше разбиения на четырехугольники будем называть *плиточной подстановкой*. Четырехугольник $ABCD$ будем называть комплексом *нулевого уровня*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2 (**Индуктивное определение комплексов уровня n**). Рассмотрим четырехугольник, являющийся комплексом уровня n . Каждый из четырехугольников, на которые он разбит, разобьем на меньшие четырехугольники, применяя плиточную подстановку к данному четырехугольнику с помеченными направлениями сторонами. Получившийся подразбитый четырехугольник будем считать комплексом (макроплиткой) уровня $n + 1$.

Таким образом, плиточная подстановка T определяет последовательность комплексов K_T . Каждый комплекс последовательности является конечным графом.

Наложим дополнительное ограничение на плиточную подстановку: пусть клетка разбиения в левом верхнем углу примыкает к краю согласованными сторонами, верхней к верхней, левой к левой. То есть ее левый верхний угол попадает в левый верхний угол всего большого четырехугольника. При этом условии левый верхний угол никогда не будет подразбиваться ребрами.

Будем также считать, что существует некоторое единое для всех вершин число итераций k удовлетворяющее следующему условию: Для любой вершины X , появившейся на комплексе, спустя k итераций разбиений соседних с X клеток, X становится левым верхним углом для всех соседних с ней клеток.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Будем называть плиточную подстановку и порождаемую ею последовательность комплексов *локально конечной*, если степени всех вершин всех комплексов последовательности ограничены некоторым натуральным числом N .

Заметим, что при указанных дополнительных ограничениях плиточная подстановка является локально конечной. Действительно, зафиксируем некоторую вершину X комплекса, выходящие из нее ребра и клетки между ними. X является углом каждой такой клетки. Будем проводить разбиения клеток согласно правилу плиточной подстановки. Спустя некоторое глобально ограниченное число разбиений, X становится левым верхним углом для всех соседних с ней клеток. С этого момента, новых ребер с концом в X не возникнет.

Объекты, связанные с комплексами.

Стороны различных подкомплексов будем называть *макроредрами*. Ребра комплекса как графа (соединяющие соседние вершины) так и будем называть ребрами.

Рассмотрим комплекс K уровня n . В нем содержатся вершины следующих видов:

1. Угловые (четыре угла комплекса K)
2. Краевые (вершины, лежащие на краю K , но не в углах)
3. Боковые (вершины, появившиеся **внутри стороны** при очередном подразбиении некоторого четырехугольника, но не являющиеся краевыми)
4. Внутренние (вершины появившиеся внутри некоторого четырехугольника при очередном разбиении).

Пусть r - некоторое макроребро (сторона некоторого подкомплекса) не лежащее на сторонах (краю) изначального четырехугольника. Тогда, исходя из индуктивного определения, существует некоторый минимальный комплекс $K(r)$, содержащий r внутри себя, не на границе. В $K(r)$ макроребро r будет соответствовать некоторому внутреннему ребру в плиточной подстановке. *Уровнем* макроребра r будем называть уровень $K(r)$. Будем также считать, что макроребра на границе имеют нулевой уровень.

Исходя из построения, комплекс уровня n , содержит в себе все макрорёбра и вершины комплексов уровней $n + 1$ и более.

Будем считать, что внутренняя вершина *принадлежит* комплексу (макроплитке), если она появилась при первом разделении этого комплекса. Это, очевидно, совпадает с минимальным по включению комплексом, содержащим эту вершину строго внутри себя.

Аналогично, будем считать, что внутреннее ребро принадлежит комплексу (макроплитке), если оно появилось при его разделении первый раз. Боковые вершины принадлежат тому комплексу, которому принадлежит соответствующее макроорёбро.

Также определим уровень у выходящих ребер. Каждое выходящее ребро из вершины X принадлежит некоторому максимальному макрорёбру с концом в X , будем считать, что у него такой же уровень, как у этого макрорёбра.

Кроме того, каждый комплекс уровня n содержит комплексы меньших уровней как подграфы. В частности, комплекс уровня n есть объединение m комплексов уровня $n - 1$, где m – количество четырехугольников разбиения в плиточной подстановке.

Из локальной конечности плиточной подстановки следует, что существует некоторая константа $C(n)$, зависящая от уровня комплекса n , такая, что если заданная вершина X принадлежит комплексу с уровнем ℓ , то выходящие из X ребра будут иметь уровень не больше, чем $\ell - C(n)$.

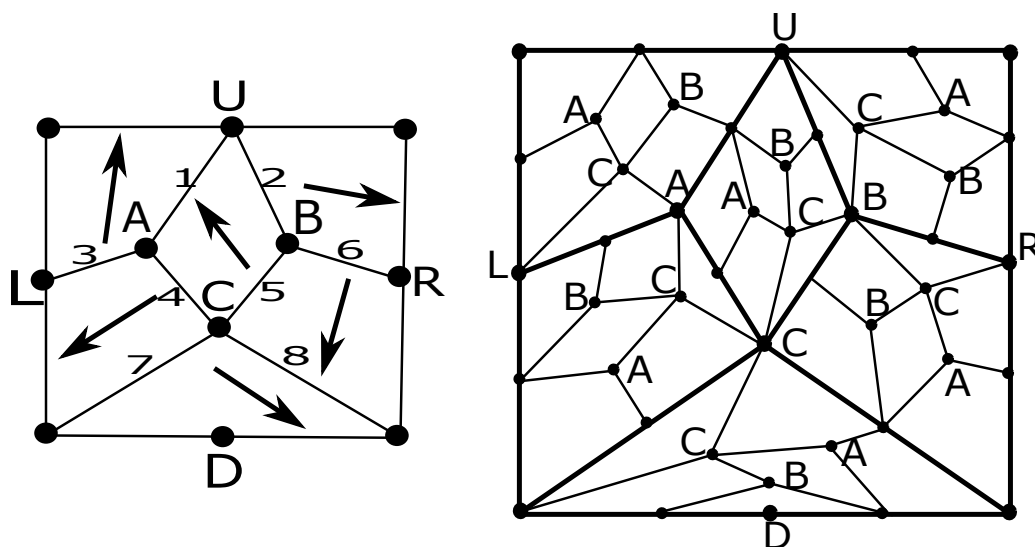


РИС. 1. Пример плиточной подстановки и комплекс третьего уровня с типами вершин. Внутренние типы вершин обозначены как A, B, C .

1.2. Раскраска вершин и ребер в последовательности комплексов. В этом параграфе мы зададим дополнительную раскраску вершин и полуребер β . Эта раскраска будет использоваться вместе с предварительной раскраской α , которая может быть произвольной. Итоговая раскраска будет произведением этих двух, то есть декорацией раскраски α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4 (Типы макрорёбер). Рассмотрим комплекс K_{n+1} уровня $n + 1$. Он представляет собой объединение m подкомплексов уровня n , где m - число клеток в плиточной подстановке. Макрорёбра, не лежащие на границе K_{n+1} , но лежащие на границах каких-то из m подкомплексов, будем называть *внутренними* макрорёбрами, принадлежащими K_{n+1} .

Макрорёбра на границе подкомплекса, то есть такие что весь подкомплекс находится в одной из полуплоскостей относительно их содержащей прямой, будем называть *граничными* относительно него.

Пронумеруем от 1 до r все ребра в плиточной подстановке, не лежащие на границе. *Типами макрорребер* будем называть таким образом полученные номера. Каждому внутреннему макрорребру, принадлежащему комплексу будет соответствовать некоторое ребро плиточной подстановки. Для макрорребер на границе комплекса *типом макрорребра* будем считать одну из 4 возможных сторон (верхняя, нижняя, правая и левая).

Для неграничных макрорребер *типом макрорребра* будем называть номер одного из внутренних ребер плиточной подстановки, соответствующего данному макрорребру. Фактически тип макрорребра уровня n определяется, если стереть все макрорребра уровней $> n$, и посмотреть, каким из внутренних ребер плиточной подстановки станет это макрорребро.

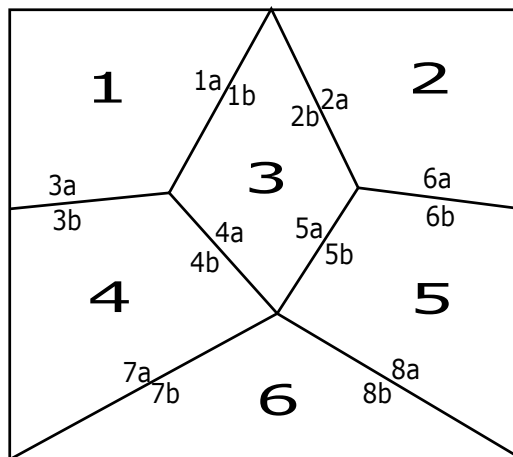


Рис. 2. Типы клеток и типы и ориентация макрорребер.

Внутреннее ребро лежит на границе между двумя подкомплексами. Будем считать, что каждое внутреннее ребро плиточной подстановки разделяет плоскость на две полуплоскости и они упорядочены, одна первая, другая вторая. Будем считать их сторонами этого макрорребра. Каждая сторона соответствует верхней, правой, нижней или левой сторонам некоторого подкомплекса, а макрорребро является общей границей этих двух подкомплексов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5 (О нумерации типов клеток). Занумеруем все возможные четырехугольные клетки в плиточной подстановке. Их мы будем называть *типами клеток*. Таким образом, каждая плитка на комплексе любого уровня принадлежит одному из этих типов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6 (О ориентации сторон макрорребер). Каждое макрорребро соответствует ребру в плиточной подстановке, разделяющему две клетки. Будем считать, что сторона макрорребра, соответствующая клетке с меньшим номером - это сторона A , а другая - сторона B . Таким образом, будем считать, что стороны макроплиток упорядочены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7 (Типы вершин). При разбиении каждой клетки комплекса K_n согласно плиточной подстановке, образуются новые внутренние вершины и новые боковые и краевые вершины, внутри уже проведенных ранее макрорребер. Заметим, что при дальнейших подразбиениях (переходах к комплексам больших уровней) внутренние вершины остаются внутренними, а боковые и краевые - соответственно, боковыми и краевыми. Сопоставим каждой вершине на произвольном комплексе K_n *тип вершины*.

Пронумеруем внутренние вершины в плиточной подстановке от 1 до v . Внутренним вершинам соответствуют *типы вершин* от A_1 до A_v . Боковая вершина лежит в середине

макрорёбра ℓ , разделяющем два подкомплекса U и V , одинакового уровня. Пусть S_U и S_V типы клеток, соответствующих U и V в своих родительских комплексах. Определим тип боковой вершины B , принадлежащей комплексу K_n . B лежит на некотором макрорёбре, две стороны которого упорядочены, в соответствии с определением (то есть нумерацией клеток, соответствующих этим сторонам).

Типом боковой вершины будем считать упорядоченную четверку (X, Y, S_U, S_V) , где X, Y – какие-то две различные стороны из четырех (левая, верхняя, правая, нижняя), причем X соответствует стороне, которой подкомплекс U примыкает к макрорёбру ℓ , а Y – стороне, которой примыкает V к ребру ℓ (с другой стороны); S_U и S_V типы клеток, соответствующих U и V в своих родительских комплексах.

Для краевой вершины тип вводится аналогично, но к ней примыкает только один подкомплекс.

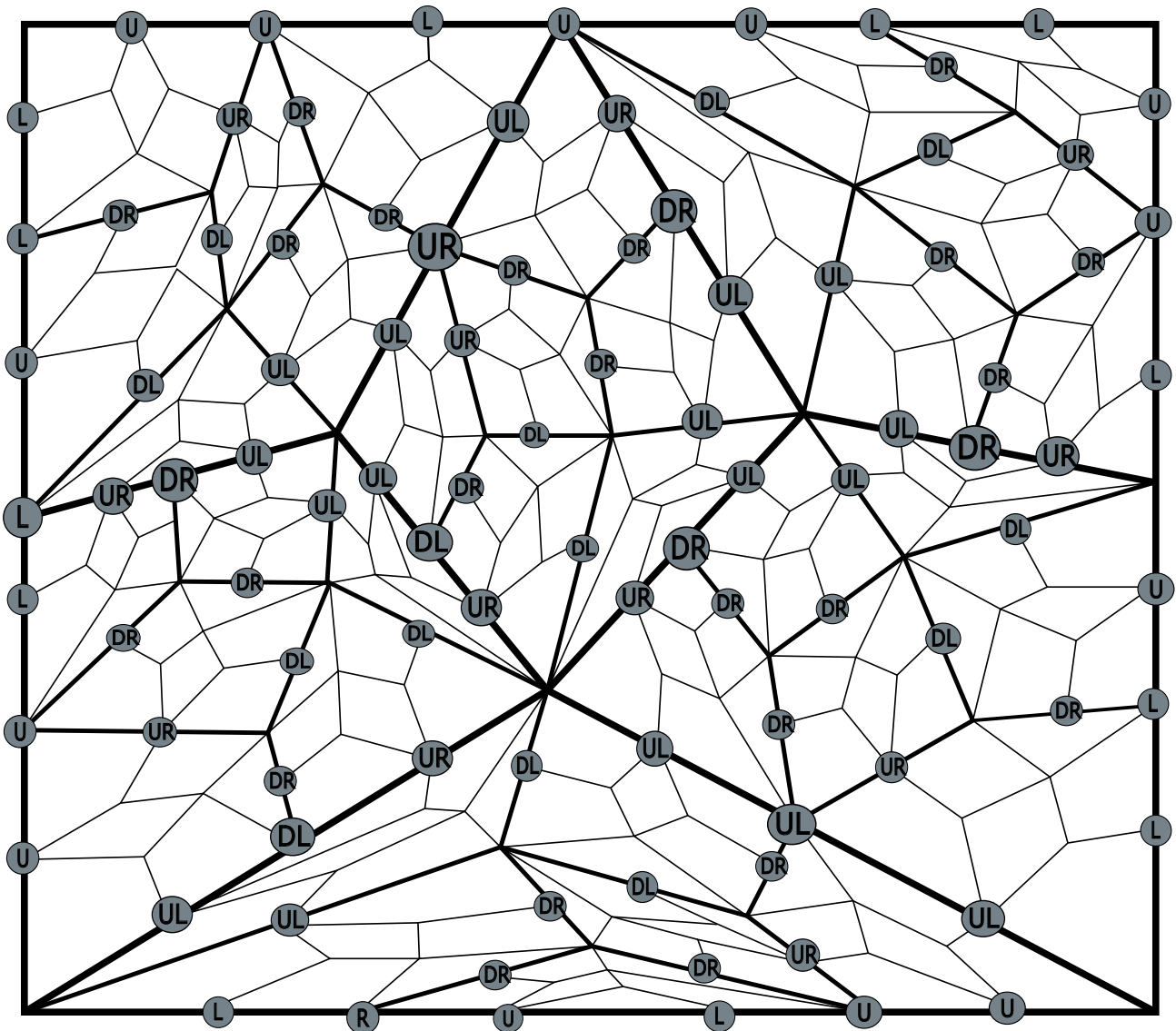


Рис. 3. Комплекс четвертого уровня со сторонами примыкания боковых и краевых вершин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8 (Ранг и скобочная ориентация). Для каждой вершины комплекса также определим *ранг*. Всего будет три ранга. Рассмотрим некоторый комплекс K . Он получается операцией разбиения из комплекса K' . Все добавленные при этом разбиении

вершины будем считать вершинами первого ранга. Заметим, что в соответствии с условием 3, наложенным на структуру комплексов, в середине каждой стороны при подразбиении появляется одна новая вершин. Вершины, имеющие первый ранг для комплекса K' , будем называть вершинами второго ранга для комплекса K . Остальные вершины будем называть вершинами третьего ранга. Иными словами, только что добавленные вершины имеют первый ранг, добавленные на предыдущем шаге – второй, остальные – третий.

Для боковых вершин введем *скобочную ориентацию*. Пусть зафиксировано некоторое макроребро и для него зафиксировано направление прохода по нему (будем считать, что мы проходим по ребру слева направо), то есть можно говорить, какие вершины на ребре левее, какие правее. Будем присваивать значение параметра «скобочной ориентации» в момент добавления соответствующей вершины. Всего значений этого параметра будет три, левая скобка, правая скобка и обе скобки.

Пусть X – боковая вершина первого ранга на этом макроребре, то есть добавлена при последнем разбиении, при этом не лежит в середине этого макроребра. Тогда ровно одна из соседних с X на данном макроребре вершин имеет второй ранг. Пусть это вершина Y . Будем говорить, что X *содержит левую (открывающую) скобку*, если Y стоит правее X . Будем говорить, что X *содержит правую (закрывающую) скобку*, если Y стоит левее X .

Если X является старшей вершиной внутри своего макроребра, то есть X лежит в середине макроребра и появилась при первом его разбиении, то будем считать, что X содержит обе скобки, и открывающую и закрывающую. Таким образом, всего есть три возможных скобочных ориентации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9 (Начальники вершин). Пусть K_n подкомплекс уровня n . Будем называть вершины на его границе (в углах и на сторонах) его *начальниками*. Начальниками внутренней вершины будем называть начальников того минимального комплекса, которому она принадлежит. Начальниками боковых вершин будем считать начальников того подкомплекса, которому принадлежит макроребро, на котором лежит данная вершина. Заметим, что если от K_n подразбиениями его клеток перейти к комплексам больших уровней, то начальники его вершин не поменяются. Будем считать, что все 8 начальников пронумерованы от левого верхнего угла по часовой стрелке. Восемь складываются из четырех угловых вершин и четырех вершин в серединах сторон, тут мы следуем условиям на структуру комплекса. Напомним, что вершинами-начальниками комплекса являются как раз эти 8 вершин, углы и середины сторон, появляющиеся при его первом разбиении. Четыре угловые вершины K_n будем называть *угловыми начальниками*. Если B – k -ый начальник A , будем использовать нотацию $B = Boss_k(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10 (Упорядоченность сторон). Пусть T – некоторая макроплитка, a, b, c, d – ее стороны. Каждая из сторон лежит на некотором макроребре. Зафиксируем для каждой стороны уровень соответствующего макроребра и упорядочим стороны по убыванию этих уровней. При этом, некоторые стороны могут иметь одинаковый уровень. Заметим, что существует конечное число таких способов упорядочить 4 стороны. Введем параметр *упорядоченность сторон*, который принимает соответствующие значения. Будем считать, что данный параметр определен, если для любых двух сторон определено, какая из них имеет более высокий уровень (старше) или они имеют одинаковый уровень. Если вершина (боковая или внутренняя) принадлежит макроплитке T (то есть T – минимальная макроплитка, содержащая вершину), то ее параметром упорядоченности сторон будем считать упорядоченность сторон T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.11 (Локальный и полный цвета вершины). *Базовым цветом вершины* X будем называть ее цвет в предварительно заданной раскраске α .

Локальным цветом вершины X будем называть упорядоченный набор из базового цвета вершины X , ее типа, ее ранга, упорядоченности сторон, а также скобочной ориентации и типа макроребра, если вершина – боковая или краевая.

Полным цветом вершины X будем называть комбинацию локального цвета вершины X и упорядоченного набора локальных цветов ее начальников.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.12 (Главные ребра). Пусть вершина A лежит на некотором макрорёбре. В этом случае, два выходящих из A ребра тоже лежат на этом макрорёбре. Полу-плоскости относительно макрорёбра упорядочены. Будем называть *первым главным ребром* то из них, справа от которого располагается первая из двух полу-плоскостей. Второе ребро будем называть *вторым главным ребром*.

Пусть вершина A является внутренней и принадлежит подкомплексу K уровня n . Тогда *главными ребрами* будем называть те выходящие из A ребра, которые тоже имеют уровень n и принадлежат тому же подкомплексу K . Таким образом, количество главных ребер, выходящих из A , соответствует степени соответствующей A вершины в плиточной подстановке. *Первым главным ребром* будем называть то ребро, которое соответствует ребру в плиточной подстановке с наименьшим номером. Заметим, что из A могут выходить и другие ребра, которые будут принадлежать уже другим подкомплексам, являющимися подкомплексами K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.13 (Входящие и выходящие ребра). Рассмотрим некоторую вершину A некоторого фиксированного типа на комплексе. Смежные с A ребра, и их вторые концы будем называть *окрестностью* вершины A . Будем проводить разбиение комплекса и следить за ребрами, смежными с A . Заметим, что после нескольких таких подразбиений, при последующих разбиениях новые ребра, смежные с A не будут появляться. То есть существует некоторое n , что при всех комплексах уровня выше n окрестность A одна и та же.

В частности, если взять комплекс достаточно большого уровня, содержащий вершину A , то применение к нему плиточной подстановки (и переход к комплексу следующего уровня) не добавит дополнительных ребер, смежных с A . Также, в силу локальной конечности, количество ребер, смежных с A ограничено, причем их уровень отличается от уровня A не более чем на некоторое ограниченное число. Пусть A имеет уровень n , причем для вершин того же типа и более высокого уровня окрестность уже не меняется. Пронумеруем все ребра, смежные с A по часовой стрелке, начиная от первого главного ребра.

Все эти пронумерованные ребра будем называть *входящими в A ребрами* (или, иногда, полуребрами, если нужно подчеркнуть для некоторого ребра, что оно входит именно в A).

В частности, заметим, что если известен тип и ранг вершины X выходящее ребро r то однозначно определяются следующее и предыдущее по часовой стрелке выходящие ребра из X .

Следствия. Из определений следуют свойства:

1. Если выходящее из A ребро AB - неглавное, то как входящее в B оно главное.
2. Если выходящее из A ребро AB - неглавное, то вершина A является одним из начальников B , и уровень A выше, чем у B .
3. Если ребро AB является главным входящим в A и в B , то они лежат на одном макрорёбре и они имеют одинаковых начальников. При этом одна из вершин может быть внутренней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.14 (Кодировка пути). Пусть имеется путь ABC . Его *кодировкой* будем называть упорядоченный набор из полных цветов вершин A, B, C , и ребра входа и выхода AB (относительно A и B) и BC (относительно B и C).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.15. Рассмотрим некоторую вершину X некоторого комплекса из последовательности. Пусть X принадлежит элементарному четырехугольнику (клетке) T . Для каждой вершины T рассмотрим минимальный комплекс, которому данная вершина принадлежит (согласно ранее определенной принадлежности). Будем считать X *особенной* относительно T , если ее комплекс строго содержит комплексы остальных трех вершин T . Если это условие не выполнено, будем считать вершину неособенной.

Назовем раскраску *слабо детерминированной*, если для любого пути ABC , где путь ABC проходит по двум ребрам клетки T и неособенной четвертой вершины D в той же клетке, полный цвет D , а также ребра входа и выхода вдоль пути ADC однозначно определяются по полным цветам остальных вершин A, B, C и ребрам входа и выхода вдоль пути ABC .

Комментарий. Особенности вершины соответствуют ситуации, когда четырехугольник выходит на границу комплекса одной своей вершиной. Слабая детерминированность отличается от сильной тем, что не требуется однозначно восстанавливать цвет особенных вершин. Для приложений (в частности для построения конечно определенной нильполугруппы) достаточно слабой детерминированности по некоторым особым причинам, о которых говорится в приложении.

2. Слабая детерминированность

ТЕОРЕМА 4.2 (О слабой детерминированности). Пусть задана плиточная подстановка σ , определяющая последовательность комплексов K_n . Пусть также задана произвольная раскраска α вершин и полуребер всех комплексов K_n в некоторое конечное число цветов. Тогда заданная выше раскраска β (содержащая σ) на последовательности комплексов K_n является слабо детерминированной.

План доказательства. Пусть известна кодировка некоторого пути ABC , то есть полные цвета вершин A, B, C и цвета выходящих и входящих ребер вдоль пути ABC . Требуется определить, является ли данный путь двумя соседними ребрами некоторой клетки, и если является, то требуется определить полный цвет вершины D и цвета входящих и выходящих ребер AD и DC .

Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 4.1 (Тип клетки определяет тип внутренних вершин). Пусть известен тип клетки T . Тогда по нему однозначно определяются типы тех вершин в углах клетки, которые являются внутренними.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, тип клетки соответствует некоторой клетке в плиточной подстановке, ее углы, если не попадают на границу плиточной подстановки, являются внутренними вершинами, тип которых задан по плиточной подстановке. □

ЛЕММА 4.2 (Восстановление типа клетки). Пусть известны типы вершин A, B, C и ребра входов и выходов вдоль пути ABC . Тогда однозначно определяется, проходит ли путь ABC по двум сторонам некоторой клетки, и ее тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для того, чтобы путь ABC лежал в одной клетке необходимо и достаточно, чтобы ребра входа в B были соседними. Если тип B - внутренний, то клетка однозначно определяется, как клетка, примыкающая к данной внутренней вершине, и лежащая между соответствующими ребрами входа. Аналогично, если тип B - боковой или краевой, два входящих ребра полностью определяют примыкающую к ним и к B клетку в плиточной подстановке. \square

ЛЕММА 4.3 (Номер начальника). Пусть известны полные цвета вершин A , B и ребра входов и выходов вдоль пути AB . Пусть также известно, что A - начальник B и B - внутренняя вершина. Тогда однозначно определяется номер A как начальника, среди начальников B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K - макроплитка, которой принадлежит B . Так как B - внутренняя вершина, ребро из которой попадает сразу на край K , K представляет собой макроплитку минимального уровня. Ребру AB будет соответствовать одно из ребер плиточной подстановки, выходящее на край, и какое именно, определяется по ребру выхода из B . Но тогда известно положение A на границе K , то есть и номер A как начальника B . \square

ЛЕММА 4.4 (Выходящие ребра у внутренней вершины). Пусть D - внутренняя вершина и нам известен ее тип. Пусть также известен тип клетки K , углом которой является D , и A и B - соседние с D углы K . Тогда однозначно определяются ребра выхода DA и DB .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как D внутренняя вершина, а A и B - углы K и соседние с D - D имеет уровень 1, и ей соответствует внутренняя вершина на плиточной подстановке. По типу клетки K и из плиточной подстановки определяются номера выходящих из D ребер. \square

ЛЕММА 4.5 (Лемма об определении начальников). 1. Пусть K - некоторый подкомплекс, являющийся непосредственным подкомплексом K' , примыкающим к двум соседним сторонам, и углу между ними. Пусть в K известны локальные цвета пяти его начальников, лежащих на соответствующих двух сторонах. Тогда однозначно определяются локальные цвета остальных трех начальников, лежащих внутри K' .

2. Пусть ABC путь на комплексе, причем A , B , C три из четырех вершин некоторой клетки T , и D - ее четвертая вершина, причем T примыкает к углу в своем родительском подкомплексе K (и этот угол - B).

Полные цвета A , B , C считаются известными.

Тогда однозначно определяются начальники у четвертой вершины клетки T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K' комплекс, такой, что K является его непосредственным подкомплексом. То есть K соответствует некоторой клетке в плиточной подстановке, применяющейся при разбиении K' .

1. Если становится известен тип этой клетки, то и локальные цвета оставшихся трех начальников легко определяются. Пусть, для определенности, K примыкает по левой и верхней стороне, остальные случаи аналогичны. Заметим, что правый верхний и левый нижний углы K лежат в серединах сторон K' . То есть мы знаем, к каким сторонам K' примыкает K . Тогда правило плиточной подстановки однозначно определяет, какой именно клеткой является K , тогда и определяются оставшиеся три начальника.

2. Пусть A лежит на макрорёбре R_A , а C лежит на ребре R_C . Для того, чтобы определить начальников K , нужно понять, каков тип клетки, соответствующей K при разбиении

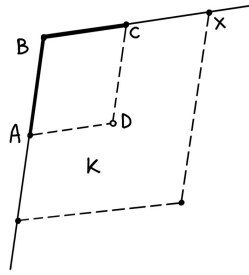


Рис. 4. Определение начальников у вершины внутри комплекса

K' . Заметим, что C лежит в середине стороны K , причем C - боковая или краевая вершина. Тогда тип C содержит информацию о типе клетки K внутри K' . То есть, по первой части леммы мы можем установить начальников K , то есть начальников D . □

Разбор случаев расположения клетки.

Итак, по известному пути ABC мы можем определить тип клетки, содержащую вершины A, B, C .

Зная тип клетки, мы можем определить, сколько вершин из данной клетки попадает на границу минимального содержащего ее подкомплекса (от 0 до 3). Получившиеся случаи разбираются с помощью следующих лемм. В каждом случае мы будем восстанавливать полный цвет оставшейся вершины D и ребра входов и выходов вдоль пути ADC . Во всех случаях, кроме одного, нужен лишь путь ABC .

ЛЕММА 4.6 (Нет вершин на границе). Пусть T - клетка, все углы которой не попадают на границу родительской макроплитки u , следовательно, являются внутренними вершинами. Пусть ABC - регулярный путь, проходящий по двум сторонам T , и нам известна его кодировка (то есть полные цвета вершин A, B, C , а также ребра входов и выходов вдоль пути ABC).

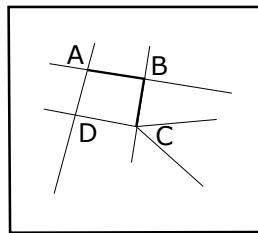


Рис. 5. Случай без вершин на границе

Тогда однозначно определяется кодировка пути ADC , где D - четвертая вершина T (то есть полный цвет D , ребра входов и выходов вдоль пути ADC).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае T совпадает с одной из внутренних клеток плиточной подстановки, не имеющих общих вершин с границей, поэтому последняя вершина обязательно внутренняя и ее тип полностью определяется типами других вершин. Покажем, как определяются параметры D .

Тип D - внутренняя вершина, причем типы остальных трех вершин в ее клетке известны, поэтому тип D определяется однозначно по плиточной подстановке. Не ограничивая общности, будем считать, что $ABCD$ - обход по часовой стрелке T .

Ранг. Первый, в данном рассматриваемом случае все вершины T - самые низкие в иерархии вершин.

Скобочная ориентация и тип макроребра. Не применимы: D внутренняя вершина.

Упорядоченность сторон. Такая же, как у остальных вершин в T .

Выходящее из A ребро AD – следующее после AB .

Входящее в C ребро DC – предыдущее перед BC .

Входящее в D ребро AD , а также выходящее из D ребро DC определяются по лемме о выходящих ребрах для внутренней вершины.

Начальники у D : Такие же, как и у остальных вершин A, B, C .

□

ЛЕММА 4.7 (Одна вершина на границе). Пусть T плитка, ровно один угол которой выходит на границу плиточной подстановки (и, соответственно, на границу минимального содержащего подкомплекса K).

Пусть ABC – путь, проходящий по двум сторонам T , и нам известна кодировка пути ABC (то есть полные цвета вершин A, B, C , ребра входов и выходов вдоль пути ABC).

Пусть D – четвертая вершина в T . Тогда либо мы устанавливаем, что D является особенной в T , либо однозначно определяется кодировка пути ADC . То есть определяются ребра входов и выходов вдоль пути ADC , а также полный цвет D .

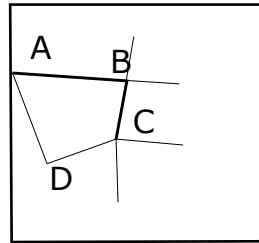


Рис. 6. Случай одной вершины на границе

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство в целом аналогично случаю без вершин на границе. Если нам известны именно три внутренние вершины, в этом случае последняя четвертая вершина является особенной. Теперь будем считать, что нам известна единственная граничная вершина A , и две другие вершины B и C .

Покажем, как определяются параметры D .

Тип D – внутренняя вершина, причем типы остальных трех вершин в ее клетке известны, поэтому тип D определяется однозначно по плиточной подстановке. Ради определенности будем считать, что путь $ABCD$ обходит плитку по часовой стрелке.

Ранг. Первый, в данном рассматриваемом случае все вершины T – самые низкие в иерархии вершин.

Скобочная ориентация и тип макроребра. Не применимы: D внутренняя вершина.

Упорядоченность сторон. Такая же, как у вершин B и C в T .

Выходящее из A ребро AD – следующее после AB .

Входящее в C ребро DC – предыдущее перед BC .

Входящее в D ребро AD , а также выходящее из D ребро DC определяются по лемме о выходящих ребрах для внутренней вершины.

Начальники у D : Такие же, как и у B, C .

□

ЛЕММА 4.8 (Две вершины на границе). Пусть T плитка, ровно два угла которой выходят на границу плиточной подстановки (и, соответственно, на границу минимального содержащего подкомплекса K).

Пусть ABC – путь, проходящий по двум сторонам T , и нам известна кодировка пути ABC (то есть полные цвета вершин A, B, C , а также ребра входов и выходов вдоль пути ABC).

Тогда либо мы определяем, что четвертая вершина D является особенной в плитке T , либо однозначно определяется кодировка пути ADC (цвет D , ребра входов и выходов вдоль пути ADC).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, мы знаем конфигурацию плитки T внутри ее родительской макроплитки. Возможны два случая, первый, когда среди вершин A, B, C есть две внутренние, и второй – когда есть одна.

1. Разберем первый случай. Пусть среди A, B, C есть две внутренние вершины.

Согласно ограничениям на расположение клетки T внутри плиточной подстановки, две внутренние вершины в клетке должны идти подряд. Пусть, для определенности, B, C – внутренние вершины, и путь ABC обходит T по часовой стрелке. D и A лежат на границе K , а B и C принадлежат K .

T примыкает своей стороной к границе K . Пусть, ради определенности, это левая сторона K . Пусть $A = Boss_n(C)$. Тогда $D = Boss_{n-1}(C)$, то есть D – предыдущий по часовой стрелке начальник C . Учитывая, что мы знаем номер A как начальника C , по лемме о номере начальника, мы знаем и номер D , и в частности, мы определяем является D левым нижним углом K или нет.

В ходе этого рассуждения мы не будем использовать данные вершины B . Таким образом, рассуждение будет применимо и для дальнейшего случая, когда B, A, D лежат на границе K , а C – внутренняя.

Рассмотрим два случая, первый когда D не лежит в левом нижнем углу и когда лежит, в обоих случаях покажем, как определяются параметры D .

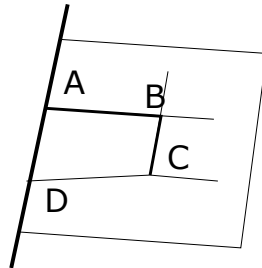


Рис. 7. Случай двух вершин на границе, B, C внутренние

1.1. Пусть D не лежит в левом нижнем углу K .

Тип, ранг, скобочная ориентация тип макрорребра и упорядоченность сторон. Так как D – предыдущий по часовой стрелке начальник C , поэтому ее локальный цвет (тип, ранг, скобочная ориентация, тип макрорребра и упорядоченность сторон) известен по полному цвету B .

Выходящее из A ребро AD – следующее после AB .

Входящее в C ребро DC – предыдущее перед BC .

Входящее в D ребро AD определяется как 1 главное, если выходящее из A – 2 главное. И 2 главное, если выходящее из A – 1 главное.

Выходящее из D ребро DC определяются, как следующее по часовой стрелке после DA .

Начальники у D : Такие же, как и у A .

1.2. Пусть теперь D – левый нижний угол K .

Тип, ранг, скобочная ориентация, тип макрорребра и упорядоченность сторон у D определяются, так как D – начальник C , предыдущий перед A .

Рассмотрим упорядоченность сторон у C . Если нижняя сторона старше, чем левая, то D – особенная вершина, так как она лежит на нижней стороне K , а A – только на левой.

Если нижняя сторона K равна левой по старшинству, это означает, что нижняя и левая стороны K – равноправные макрорёбра, выходящие из одной внутренней вершины, которой как раз является левый нижний угол K , то есть D .

В этом случае начальники D такие же, как и у A . Зная тип макрорёбра A , и тип D мы вычисляем ребро выхода DA . Ребро выхода DC – следующее по часовой стрелке.

Если левая сторона старше по примыканию, чем нижняя, это означает, что D и A – боковые вершины на одном макрорёбре. Начальники D такие же, как и у A . Выходящее ребро DA – главное, причем если AD – первое главное, то DA – второе и наоборот. Выходящее ребро DC – следующее по часовой стрелке после DA .

2. Теперь разберем второй случай. Пусть среди A, B, C есть одна внутренняя вершина. Из-за ограничений на плиточную подстановку, граничные вершины идут подряд, то есть не может быть так, что A, C граничные, B внутренняя. Пусть граничные – A и B , и C – внутренняя. Тогда D – тоже внутренняя. Пусть также ABC обходит T по часовой стрелке.

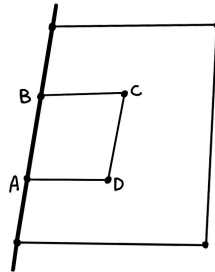


Рис. 8. Случай двух вершин на границе, C и D внутренние

Тип. D – внутренняя вершина, причем известен тип клетки и другая внутренняя вершина C , поэтому D однозначно определяется.

Ранг. Первый, D в этом случае самая низкая по уровню вершина.

Скобочная ориентация и тип макрорёбра. Не применимы, так как D внутренняя вершина.

Упорядоченность сторон. Такая же, как у вершины C .

Выходящее из A ребро AD – следующее после AB .

Ребра входа и выхода вдоль пути ADC определяются согласно расположению клетки T в плиточной подстановке, по лемме о выходящих ребрах у внутренней вершины.

Начальники у D : Такие же, как и у C .

□

ЛЕММА 4.9 (Три вершины на границе). Пусть T плитка, ровно три угла которой выходят на границу плиточной подстановки (и, соответственно, на границу минимального содержащего подкомплекса).

Пусть ABC – путь, проходящий по двум сторонам T , и нам известна кодировка пути ABC , то есть цвета вершин A, B, C , а также ребра входов и выходов вдоль пути ABC .

Тогда либо мы определяем, что четвертая вершина D является особенной в плитке T , либо однозначно определяется кодировка пути ADC (полный цвет D , ребра входов и выходов вдоль пути ADC).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможны три случая, первый, когда вершины A, B, C , как раз и есть те, которые попадают на границу, второй когда C – не попадает на границу и является внутренней (случай с A симметричен) и третий, когда B – внутренняя.

1. Пусть A, B, C все граничные вершины. Тогда D – внутренняя и ее тип, а также ребра входа и выхода вдоль пути ADC определяются согласно расположению клетки T в плиточной подстановке, по лемме о выходящих ребрах из внутренней вершины. Уровень D первый.

Осталось установить начальников D , а также чему будет равна упорядоченность сторон у вершины D . Начальники D определяются по лемме об определении начальников. Теперь определим упорядоченность сторон.

Рассмотрим типы вершин A, B, C . Возможно два подслучая, когда среди вершин A, B, C есть вершина с внутренним типом, и когда они все имеют не внутренний тип.

1.1. Пусть одна из вершин A, B, C – внутренняя, обозначим ее X . Рассмотрим макроплитку K , которой принадлежит D , это родительская макроплитка для T . T примыкает к углу, как раз в этой внутренней вершине X . Заметим, что используя тип X и типы макроребер остальных вершин, мы вычисляем тип клетки K в плиточной подстановке.

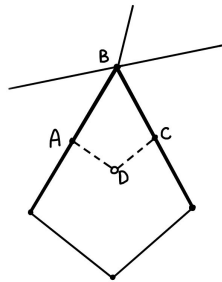


Рис. 9. A, B, C на границе, B имеет внутренний тип

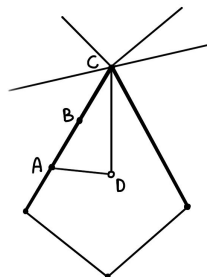


Рис. 10. A, B, C на границе, C имеет внутренний тип

Установим упорядоченность сторон у вершины D , то есть у макроплитки K . Если соответствующая клетка в плиточной подстановке не примыкает к краю, то все стороны имеют одинаковое старшинство. В случае примыкания, мы устанавливаем старшинство примыкания по упорядоченности сторон для вершины X . Например, если примыкание идет по нижней и левой сторонам, мы устанавливаем какая из соответствующих им сторон старше для вершины X .

1.2 Пусть среди вершин A, B, C нет внутренних. Рассмотрим ребра выхода вдоль пути ABC .

Случай А. Пусть все эти ребра входа и выхода – главные. Тогда путь ABC идет по некоторому макроребру. В этом случае, вершины A, B, C лежат внутри стороны (не в углах) и клетка примыкает двумя последовательными сторонами к краю родительской макроплитки, что невозможно по условиям плиточной подстановки.

Случай В. Пусть не все ребра входов и выходов вдоль пути ABC – главные. Пусть неглавным является ребро выхода от вершины X (одной из A, B, C). Тогда угол K лежит в X , находится между двумя нам известными ребрами выхода, то есть и упорядоченность

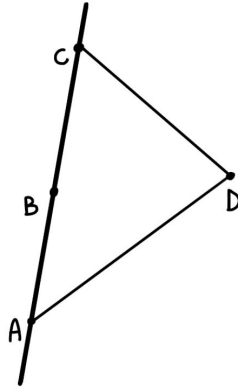


Рис. 11. A, B, C на границе, путь ABC по главным ребрам

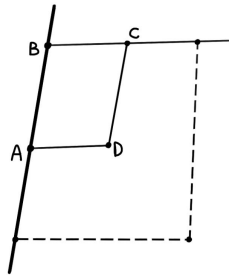


Рис. 12. A, B, C на границе, переход BC по неглавному ребру

сторон K (и D) можно в этом случае однозначно определить: выходящие из X стороны будут самые старшие, другие две будут самыми младшими и равноправными. Какими именно сторонами примыкает K к X устанавливается по неглавному ребру из X .

2. Пусть C - не попадает на границу K и является внутренней.

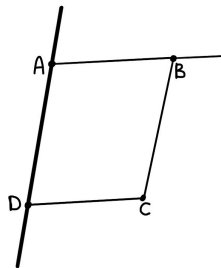


Рис. 13. A, B, D на границе, C внутри K

Разбор этого случая аналогичен случаю 1 в лемме о двух вершинах на границе. В том случае B являлась внутренней вершиной, а теперь она лежит на границе. В том рассуждении мы не использовали данные B , так что теперь можно полностью повторить алгоритм восстановления данных D для разобранный случай.

3. Пусть B - внутренняя. Пусть K родительский подкомплекс для T . Пусть, для определенности, A и C лежат на, соответственно, левой и верхней сторонах K .

3.1 Левая и верхняя стороны равны по старшинству относительно B (и, соответственно, K). В этом случае, D внутренняя вершина, а DA и DC лежат на главных ребрах.

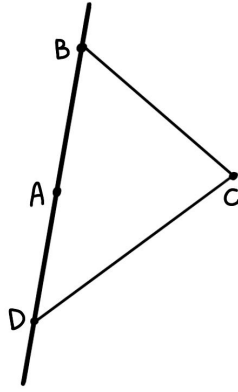


Рис. 14. A, B, D на границе, C внутри K

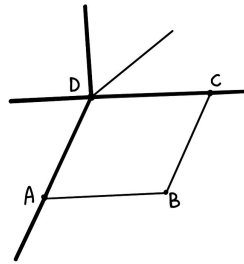


Рис. 15. B внутри K , DA, DC - главные

Тип, ранг, скобочная ориентация, тип макроребра и упорядоченность сторон у D определяются, так как D – начальник B , причем лежащий в левом верхнем углу. Начальники у D те же, что и у A .

Выходящее ребро AD предыдущее перед AB . Входящее ребро DC следующее перед BC . DA и DC два последовательных выходящих главных ребра, соответствующих типам макроребер DA и DC .

3.2 Одна из сторон (пусть левая) старше для B . В этом случае D начальник для B . Кроме того, A и D лежат на одном макроребре.

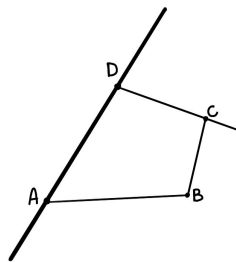


Рис. 16. B внутри K , DC - неглавное

Тип, ранг, скобочная ориентация, тип макроребра и упорядоченность сторон у D определяются, так как D – начальник B , причем лежащий в левом верхнем углу. Начальники у D те же, что и у A .

Выходящее ребро AD предыдущее перед AB . Входящее ребро DC следующее перед BC . DA главное ребро, противоположное AD . DC неглавное выходящее из D ребро, предыдущее перед DA .

□

Из приведенных выше лемм следует доказательство теоремы о слабой детерминированности.

Следствие из слабой детерминированности. Пусть плиточная подстановка представляет собой квадрат $n \times n$. В этом случае комплексы K_n будут представлять собой конечные подквадраты $n^k \times n^k$ квадратной решетки. Пусть задана слабодетерминированная раскраска. Выпишем все кодировки $AuBvC$ пути длины 4 на получившейся последовательности комплексов. Теперь объявим запрещенными все кодировки, не встречающиеся на последовательности комплексов K_n . Рассмотрим теперь произвольный квадрат T на квадратной решетке, вершины и ребра которой раскрашены в определенное нами множество цветов, причем правильным образом. То есть на квадрате не встречается запрещенных путей. Тогда T принадлежит некоторому комплексу K_m .

Макет доказательства Для квадратов 2×2 утверждение очевидно. Пусть утверждение доказано для квадратов, менее $2m$. Разобьем квадрат $2m \times m$ на два одинаковых квадрата. Каждый из них принадлежит некоторому комплексу по предположению индукции. Тогда рассматривая границу и используя детерминированность, можно «сшить» два квадрата и получать комплекс, содержащий оба квадрата сразу.

Замечание. Данное следствие представляет собой вариацию теоремы Гудмана-Штраусса для квадратной решетки. Используя слабую детерминированность, похожим способом можно доказать эту теорему и для произвольных комплексов.

3. Цель введения слабой детерминированности

О цели введения понятия слабой детерминированности. При построении конечно определенной полугруппы на последовательности комплексов свойство детерминированности используется чтобы корректно ввести определяющие соотношения. То есть для каждой пары путей, с общими концами, обходящими плитку с разных сторон вводится соотношение, приравнивающее их кодировки.

Пути, для которых слабая детерминированность отличается от обычной, соответствуют обходу плитки, одним углом выходящей на границу плиточной подстановки. Будем называть такие пути особыми. (То есть особый путь нельзя перекинуть на другую сторону плитки, так как при этом неоднозначно определяется цвет вершины на границе, которая не входит в особый путь, но входит в парный к нему). При введении определяющих соотношений мы также приравниваем к нулю короткие некрайчайшие пути. Для некоторых видов плиточных подстановок удается доказать, что если достаточно длинный путь включает особый подпуть, то его можно локально преобразовать к виду, содержащему некрайчайший участок. То есть, такой путь будет все равно нулевой. Это дает возможность не вводить определяющих соотношений для особых путей, и обойтись слабой детерминированностью.

В этом приложении свойство слабой детерминированности расширяется на класс комплексов с подклейками, которые используются для построения конечно определенной нильполугруппы.

Сначала определим последовательность комплексов с подклейками. Комплекс уровня n будет получаться из комплекса предыдущего уровня посредством применения *двух* операций: помимо разбиения, будет также проводиться подклейка - добавление в комплекс плитки, три угла которой лежат в комплексе, а четвертый угол является дополнительной новой вершиной.

Пусть задана плиточная подстановка σ . Определим последовательность комплексов, связанных с этой подстановкой. Будем считать, что обычный квадрат является комплексом уровня 0. Граф, совпадающий с плиточной подстановкой σ , будем считать комплексом уровня 1. Заметим, что каждый четырехугольник разбиения ориентирован (для него определены верхняя, левая, правая и нижняя стороны) и к нему можно применить плиточную подстановку, подразбивающую его на более мелкие четырехугольники. Получившийся граф будем считать комплексом уровня 2.

Комплексу уровня 0 принадлежат углы, будем считать, что они имеют уровень 0. Будем также считать, что вершины комплекса уровня 2, ему *принадлежат*, если они не являются вершинами комплекса уровня 1, аналогично для комплекса уровня 1 и 0. Если вершина принадлежит комплексу уровня k , то она имеет уровень k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.16. Пусть K_n – комплекс уровня n . Рассмотрим пути ABC , такие что B имеет уровень $n - 1$, а вершины A и C имеют уровень n . Пусть также, в комплексе не существует клетки, содержащей вершины A, B, C в качестве своих углов. Для каждого такого пути введем новую вершину D и добавим ребра AD и DC , добавляя таким образом в комплекс новую клетку $ABCD$ для каждого пути ABC , удовлетворяющим этим условиям. При этом AB и BC будем считать левой и верхней стороной в новой клетке. Вершину B будем называть *ядром* нового подклеенного подкомплекса. Полученные вершины D по определению будут уровня n .

Будем считать, что на плиточную подстановку наложено дополнительное условие, что в левый верхний угол комплекса любого уровня не входит других ребер, кроме верхней и левой сторон. Из этого условия следует, что из ядра нет ребер внутрь подклеенного комплекса, только по его границам.

Пусть K'_n – получившийся комплекс. Он содержит ориентированные плитки (как старые, из K_n) так и подклеенные. Для каждой ориентированной плитки применим плиточную подстановку, разбивая ее на несколько меньших плиток и добавляя новые вершины. Полученный комплекс будем называть комплексом уровня $n + 1$. Добавленные при последнем разбиении вершины будем считать ему принадлежащими и имеющими уровень $n + 1$.

Замечание. Подклеенные плитки при переходе к комплексу большего уровня также подразбиваются. Пути ABC при подклейке вполне могут выбираться и так, что C лежит в подклеенной части, а A и B – в плоской.

Кроме того, если вершина A лежит на границе подклеенного подкомплекса K , и не является его ядром, то она является боковой или краевой, граница K лежит на макрорребре, которому принадлежит A . Если A – угол K , то ровно одно главное выходящее ребро лежит на границе K , если A не угол K то оба выходящих главные ребра из A тоже лежат на границе K . Неглавные выходящие из A ребра лежат в K только если это ребра в соответствующую подклейку.

Докажем некоторую вариацию свойства детерминированности для путей на полученном комплексе.

Итак, каждый комплекс полученной последовательности состоит из конечного числа плоских подкомплексов (рассмотренных выше). Каждый плоский подкомплекс по определению подклеивается двумя своими соседними макрорребрами подклеивается к остальной части всего комплекса.

Рассмотрим K_n – плоский комплекс уровня n , определенный подстановочным способом, описанным выше. Пусть $ABCD$ – некоторая минимальная плитка на K_n . Замену участка пути ABC на участок пути ADC будем называть *локальным преобразованием* пути. Если некоторый путь P' получается из пути P с помощью нескольких локальных преобразований, будем считать их *эквивалентными*.

Путем на комплексе будем называть конечную последовательность $V_1, E_1, V_2, E_2, \dots, V_{n-1}, E_{n-1}, V_n$, где V_i - вершины, а E_j - ребра.

Рассмотрим произвольный путь P на K_n , концы которого лежат на границе K_n . Если для любого такого пути P его можно локально преобразовать в путь P' , полностью лежащий на границе K_n , будем называть K_n *плоским регулярным* комплексом.

Последовательность плоских регулярных комплексов построена в работе [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.17. Определение регулярного комплекса.

1. Плоский регулярный комплекс уровня n будем считать регулярным комплексом.

2. Пусть регулярный комплекс R и плоский регулярный комплекс K_n уровня n таковы, что две соседних стороны K_n принадлежат R , причем других пересечений у этих комплексов нет. Тогда объединение $R \cup K_n$ также будем считать регулярным комплексом.

Из определения следует, что регулярный комплекс состоит из объединения конечного числа плоских регулярных подкомплексов. Пусть вершина A лежит на пересечении регулярного подкомплекса K и плоского подкомплекса K' , а следующая вершина B лежит внутри K' (не на границе). Тогда ребро из A в B будем называть *ребром в подклейку*.

ЛЕММА 4.10 (Выпрямление пути). Пусть путь P принадлежит некоторому регулярному комплексу K , причем концы P принадлежат некоторому плоскому подкомплексу \hat{K} . Тогда существует $P' \equiv P$ полностью лежащий в \hat{K} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем разметку пути. Если путь проходит по ребру, входящему в некоторую подклейку, отметим его открывающей скобкой, если наоборот, возвращается из подклейки, поставим закрывающую скобку. Если скобок вообще нет, путь уже полностью лежит в подкомплексе \hat{K} . Проведем доказательство по индукции по общему числу скобок в пути, пусть для k скобок утверждение верно.

Если на пути встречается участок, начинающийся с открывающейся скобки и заканчивающийся закрывающей, то на этом участке путь проходит по некоторому плоскому подкомплексу и можно воспользоваться свойством его регулярности, заменив этот участок на проходящий по границе этого подкомплекса. При этом вместо двух скобок в новом пути будет максимум одна. Для нового пути можно воспользоваться предположением индукции.

Если указанного выше участка нет, тогда сначала идут все закрывающие скобки, потом все открывающие. Все скобки не могут быть одного типа, так как тогда концы не могли бы быть в одном подкомплексе. Выделим первую открывающую и последнюю закрывающую скобки. Тогда путь представляется в форме $A)XBY(C$, где X, Y - некоторые вершины, подпуть A содержит только закрывающие скобки, а подпуть B только открывающие. Рассмотрим пути u из X до левого края и v от Y до правого края. Заметим, что u и v всегда лишь заходит внутрь подклеек.

Рассмотрим K_u и K_v - подкомплексы, в которых лежат, соответственно, u и v . K_v и K_u могут пересекаться только по границе. Но концы нашего изначального пути (то есть конечные вершины u и v) лежат в одном плоском подкомплексе, что означает, что оба пути u и v начинают и заканчиваются на границе K_u и K_v , тогда к ним можно применить предположение индукции и уменьшить число скобок.

□

В основной части настоящей работы показано как определяются цвета вершин и ребер в плоском комплексе.

По построению, каждая вершина принадлежит ровно одному базовому плоскому подкомплексу, кроме того, она может находиться на границе нескольких подклеенных подкомплексов. Базовый подкомплекс вершины X будем обозначать как K_X .

Пусть имеется путь $P = A_1 A_2 \dots A_k$ проходящий по некоторому комплексу. Для каждого ребра $A_i A_{i+1}$ определено, является ли это ребро входящим из подклеенного комплекса, выходящим в подклеенный комплекс или плоским. Из определения последовательности комплексов следует, что два последовательных ребра не являются одновременно входящими или выходящими.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.18 (Веер и флаг вершины). Пусть $B(P)_{A_i}$ – базовый комплекс для A_i , а $L(P)_{A_i}$ и $R(P)_{A_i}$ – соответствующие подклеенные комплексы (определены, если ребра из A_i уходят в подклейки). Все эти комплексы определяются относительно пути P . Упорядоченную тройку $B_{A_i}, L_{A_i}, R_{A_i}$ (где последние два элемента могут быть пустыми) будем считать *ассоциированными* комплексами для A_i и обозначать как $\Omega(P)_{A_i}$.

Веером вершины A_i будем называть упорядоченную пятерку $\Omega_{A_{i-2}}, \Omega_{A_{i-1}}, \Omega_{A_i}, \Omega_{A_{i+1}}, \Omega_{A_{i+2}}$, то есть это несколько комплексов являющихся базовыми или подклееными для вершин $A_{i-2}, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2}$, некоторые из которых могут совпадать.

Пусть вершина A_i зафиксирована. Пусть комплекс K входит в веер A_i . Пусть вершина X , является начальником A_i в одном из ассоциированных с A_i комплексов. Вместо ее типа, будем рассматривать ее *обобщенный тип*: упорядоченный набор типов X относительно всех комплексов в веере A_i .

Флагом вершины A_i будем называть упорядоченный набор цветов A_i относительно всех комплексов, входящих в веер A_i .

Замечание. Таким образом, для пространственного пути, в вершине A_i хранится информация не только о ее цвете в трех ассоциированных комплексах, но и ее полном цвете в ассоциированных комплексах для последовательных вершинах, третья из которых это A_i . При этом для начальников A_i используются не обычные плоские типы вершин, а типы относительно всех комплексов в веере A_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.19 (о кодировке пути). Будем считать, что ребро выхода AB определено относительно того базового плоского подкомплекса, которому принадлежит ребро AB .

Кодировкой пути $A_1 \dots A_k$ будем называть упорядоченную последовательность флагов вершин и ребер входов и выходов вдоль пути.

ЛЕММА 4.11 (о установлении клетки). *Пусть имеется путь $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$, причем если три вершины, идут подряд и лежат в одном плоском подкомплексе, то данный подпуть является регулярным. Тогда по кодировке пути $A_3 A_4 A_5$ определяется, являются ли соответствующие вершины тремя вершинами в некоторой клетке комплекса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если оба ребра из A_4 – плоские, то ситуация сводится к уже рассмотренному плоскому случаю. Если оба ребра $A_4 A_3$ и $A_4 A_5$ оба выходят в подклейку, то, очевидно искомой клетки не существует. Пусть, для определенности, ребро $A_4 A_5$ как выходящее из A_4 , является выходом в подклейку, а $A_4 A_3$ – плоское.

Пусть K_{A_4} – базовый плоский подкомплекс для вершины A_4 . Допустим, ребро $A_3 A_4$ принадлежит K_{A_4} . В этом случае A_4 не может быть ядром K_{A_4} . Если это ребро, как входящее в A_4 , является неглавным, то искомой клетки не существует, так как по границе K_{A_4} проходит макроребро на котором лежит A_4 .

Пусть ребро $A_3 A_4$ как входящее в A_4 является главным. Тогда $A_3 A_4$ лежит на границе K_{A_4} , как и весь путь $A_3 A_4 A_5$, тогда данный подпуть является регулярным и мы получаем искомое. □

ЛЕММА 4.12 (о детерминированности вдоль пути). *Пусть имеется путь $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ и выполнены условия:*

1) A_3, A_4, A_5 являются вершинами в некоторой клетке T ;

2) Путь $A_3A_4A_5$ является регулярным относительно плоского подкомплекса, содержащего клетку T .

Пусть X – четвертая вершина этой клетки. Тогда по известной кодировке пути $A_2A_3A_4A_5A_6$ однозначно определяется кодировка пути $A_2A_3XA_5A_6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 1. Оба смежных с A_4 ребра являются плоскими. В этом случае кусок пути $A_3A_4A_5$ является плоским. К нему применима теорема о слабой детерминированности в плоском случае, таким образом по цветам A_3, A_4, A_5 в базовом комплексе однозначно определяется цвет X в базовом комплексе. Определим остальные компоненты флага X . Допустим, из A_5 следующее ребро пути уходит в подклеенный комплекс $K_{A_5A_6}$. Фактически, требуется определить цвет X относительно $K_{A_5A_6}$. Заметим, что X и A_5 лежат на макрорёбре, общем для комплексов $K_{A_5A_6}$ и базовом, где лежит путь $A_3A_4A_5$. Тогда клетка $T = XA_3A_4A_5$ примыкает к этому макрорёбру вершинами X и A_5 . Рассмотрим минимальный плоский подкомплекс, содержащий клетку T . Тогда либо A_3 либо A_4 лежат внутри него, и X является начальником соответствующей вершины, следующим или предыдущим по часовой стрелке в зависимости от ориентации пути $A_3A_4A_5$ внутри T . Таким образом, тип X относительно $K_{A_5A_6}$ определяется. Начальники X относительно $K_{A_5A_6}$ совпадают с начальниками A_5 .

Таким образом, полностью определен флаг вершины X .

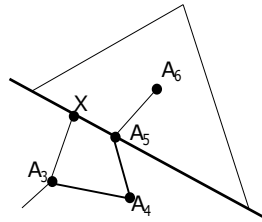


РИС. 17. Восстановление X , лежащей на общем макрорёбре с подклеенным комплексом

Случай 2. Одно из ребер, смежных с A_4 является выходящим в подклейку. Будем считать, что это ребро A_4A_5 . Рассмотрим комплекс K , являющийся базовым по отношению к вершине A_5 . Тогда A_3 и A_4 лежат на краю K (иначе клетки T не существует). Рассмотрим путь $A_3A_4A_5$ как плоский в K . Тогда по теореме о плоской детерминированности однозначно определяется цвет X относительно K . Заметим, что, веер вершин X и A_4 совпадает (помимо самих вершин X и A_4). Таким образом, флаг вершины X полностью определяется, аналогично плоскому случаю. □

Лемма о детерминированности вдоль пути является пространственным аналогом теоремы о слабой детерминированности. Она используется для введения полугрупповых определяющих соотношений для уже построенной последовательности подстановочных комплексов. После введения данных соотношений появляется возможность преобразовывать слова, отвечающие кодировкам путей. Преобразования слов отвечают переходам к эквивалентным путям.

Полугруппа путей на семействе равномерно эллиптических комплексов

ТЕОРЕМА 5.1 (О введении раскраски со свойством детерминированности). *Введенная система цветов для ребер и вершин семейства комплексов обладает свойством детерминированности: если A, B, C - вершины некоторого минимального 4-цикла $ABCD$ на комплексе, и при этом путь ABC не образует мертвый паттерн, то по кодировке пути ABC можно однозначно определить кодировку пути ADC .*

Эта однозначность (детерминированность кодировки) позволяет корректно ввести определяющие соотношения в полугруппе. Для каждой плитки каждые два таких пути объявляются эквивалентными, а их кодировки – равными словами в полугруппе (если не один из них до этого не был объявлен запрещенным).

Кроме того, ко второй части относится перебор различных случаев расположения пути по двум соседним ребрам минимального квадрата на комплексе. Перебор проверяет что кодировка парного пути, по другим двум соседним ребрам, определяется однозначно.

Задание кодировки вершин и ребер вместе с проверкой детерминированности завершает задание системы определяющих соотношений. Эта система состоит из нескольких пар эквивалентных между собой путей по двум соседним ребрам всевозможных квадратов на семействе комплексов, а также из нескольких мономиальных соотношений:

- 1) слова короткой длины, не являющиеся кодировкой никакого пути на комплексе;
- 2) кодировки коротких некрайчайших путей (пути туда и обратно по некоторому ребру);
- 3) кодировки мертвых паттернов – путей, которые не могут быть продолжены до достаточно длинного пути.

Таким образом, задана конечно определенная полугруппа путей на заданном семействе комплексов. В третьей части мы доказываем, что она бесконечна (длинные пути не приводятся к нулю и не меняют длины при преобразовании), а также обладает ниль свойством (произвольное слово содержащее период θ может быть приведено к нулю локальными преобразованиями).

1. Приведение к канонической форме

После введения определяющих соотношений мы можем оперировать исключительно словами-кодировками путей. Учитывая, что кодировки, отвечающие коротким запрещенным путям, были обнулены, мы можем считать, что на каждом коротком подпути наш путь вкладывается в некоторый комплекс. И с ним можно проводить локальные преобразования, как с соответствующим вложенным путем. В процессе таких преобразований мы получаем либо все более крупный подпуть, вложенный в комплекс, либо приходим к запрещенному участку и нулевому слову.

Все указанные параметры (можно считать их оттенками цвета) используются при приведении слова-кодировки к каноническому виду.

Далее будет применяться терминология, введенная в первых частях работы. В частности, в цвет вершины входит несколько параметров, таких как ее тип, окружение и информация. Цвета соответствуют буквам в полугруппе, и говоря о букве, кодирующей некоторую вершину, мы можем пользоваться ее типом, окружением и информацией в рамках алгоритма по приведению к канонической форме.

Во второй работе были введены компоненты раскраски узлов. Фактически, мы будем использовать плоскую компоненту этой раскраски, иногда обращаясь к цвету в подклеенной части. Чаще всего, нас будет интересовать, имеет ли некоторый узел в подклеенной части определенный тип.

Общая схема рассуждений будет иметь вид: мы рассматриваем некоторое короткое слово, используем то, что короткие слова, не реализуемые в виде путей на комплексе, обнулены. То есть данное короткое слово можно рассматривать как кодировку некоторого пути. После этого мы применяем подходящие соотношения для преобразования пути. Далее обращаемся к другому участку. Для применения соотношений нас будет интересовать тип узлов в базовой плоскости, а также - имеет ли этот узел определенный тип в некоторой подклейке. Применение соотношений для преобразования пути всякий раз обеспечено свойством детерминированности, доказанным для всевозможных коротких путей во второй работе.

В этой работе мы покажем, как проводить преобразования для приведения слова к канонической форме. Сначала мы рассмотрим пути, лежащие на одном ребре некоторой макроплитки, а затем разберем общий случай.

Пусть X_i – буквы, кодирующие всевозможные входящие ребра на семействе комплексов, Y_i – буквы, кодирующие узлы (их типы, окружения и информации), Z_i – буквы, кодирующие выходящие ребра. Фактически, X_i и Z_i выбираются из одного алфавита ребер входа-выхода.

Будем говорить, что слово W имеет *правильную форму*, если в нем справа от любой (не последней в слове) буквы семейства X обязательно стоит буква семейства Y , справа от любой (не последней в слове) буквы семейства Y стоит буква семейства Z , а справа от любой (не последней в слове) буквы семейства Z стоит буква семейства X . Рассмотрим полугруппу S с нулем 0 и порождающими $\{X_i, Y_i, Z_i\}$.

Будем считать, что в полугруппе S введены определяющие соотношения следующих категорий:

Категория 1: соотношения, обеспечивающие правильную форму: $X_i Z_j = 0$, $X_i X_j = 0$, $Y_i X_j = 0$, $Z_i Y_j = 0$, $Y_i Y_j = 0$, $Z_i Z_j = 0$, для всевозможных пар (i, j) .

Категория 2: $U_i = 0$, где U_i пробегает всевозможные слова длины не более 4, не являющиеся кодировкой никакого пути на комплексе.

Категория 3: $U_i = 0$, где U_i пробегает всевозможные слова, являющиеся кодировкой какого-либо пути, представляющего нулевую форму (путь туда и обратно по некоторому ребру).

Категория 4: $U_i = 0$, где U_i пробегает всевозможные слова, длины не более 6, являющиеся кодировкой какого-либо пути, представляющего путь с мертвым паттерном (одним из мертвых паттернов, перечисленных в предложении о мертвых паттернах в первой части работы).

Категория 5: $U_i = V_j$, где U_i и V_j – кодировки путей, участвующих в некотором локальном преобразовании. Конечное число таких пар приведено при введении определяющих соотношений во второй части работы.

Оценка числа соотношений. Букв в алфавите не более $7 \cdot 10^{36}$. Всевозможных слов длины не более 4 существует не более $2,401 \cdot 10^{147}$. Учитывая, что в других категориях соотношений значительно меньше, можно считать, что общее число соотношений, введенных в полугруппе, не превосходит $3 \cdot 10^{147}$.

Замечание. Введение соотношений можно значительно оптимизировать, сильно уменьшив их число. Но это выходит за рамки этой работы.

Далее мы рассмотрим следствия из этих соотношений.

1.1. Свойства путей, лежащих на одном ребре. Пусть W – последовательность боковых узлов, принадлежащих одному внутреннему ребру некоторой макроплитки. Поскольку мы ввели мономиальные соотношения для всех слов, не длиннее 10, не являющихся кодировками путей на комплексе, мы можем установить, какие слова в принципе могут быть разрешены в полугруппе S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Определим *последовательность уровней на ребре* $\text{EdgeLevels}(k)$ в зависимости от натурального параметра k следующим образом:

$$\text{EdgeLevels}(1)=1;$$

$$\text{EdgeLevels}(2)=121;$$

$$\text{EdgeLevels}(3)=1213121;$$

$$\text{Для } k > 3, \text{EdgeLevels}(k)=\text{EdgeLevels}(k-1)3\text{EdgeLevels}(k-1).$$

Рассмотрим последовательность $\text{EdgeLevels}(k)$. Заменяем 1 на 2, 2 на 3, 3 оставляем как есть. После этого в начале и конце последовательности, а также между любыми двумя членами добавим 1. Очевидно, что при этом получится $\text{EdgeLevels}(k+1)$. также можно заметить, что последовательность периодическая, с периодом 3121 и предпериодом 121. Ясно, что для любого бокового ребра существует такое k , что последовательность $\text{EdgeLevels}(k)$ отвечает значениям уровней боковых узлов на этом ребре.

ЛЕММА 5.1. Пусть W – слово в S , в котором все буквы, соответствующие узлам, кодируют боковые узлы, лежащие на одном и том же ребре, одинаковым для всех параметров информации. Кроме того, пусть все реберные буквы одинаковы и равны 1 или 2 (то есть все переходы по главным ребрам). Тогда:

1. Уровни узлов на ребре идут в последовательности $\text{EdgeLevels}(k)$ для некоторого натурального k .

2. Для каждого узла X , уровень которого выше 1, существует подклееная макроплитка T , такая что тип X относительно T (тип в подклейке) равен либо CUR либо CDL, причем оба таких типа (для разных макроплиток) могут быть только у одного узла в W , находящегося в середине внутреннего ребра макроплитки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из того, что в любом комплексе уровни идут именно в такой последовательности. То есть, все слова длины не более 20, не являющиеся подсловами такой периодической последовательности, присутствуют среди мономиальных соотношений. Из этого следует, что если последовательность узлов не содержит запрещенных подслов, последовательность уровней узлов соответствует указанной.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим, как устроены последовательности узлов на внутренних ребрах построенного комплекса. После операции разбиения, узлы первого уровня становятся узлами второго. При операции подклейки, каждый узел второго уровня становится либо правым верхним, либо левым нижним углом новой подклеенной макроплитки, причем в дальнейшем к этим узлам макроплитки углами не подклеиваются. Единственным узлом, в подклеенном типе которого может присутствовать и CUR и CDL, является узел в середине внутреннего ребра, так как он может участвовать в нескольких подклеенных макроплитках.

Ранги боковых узлов. Пусть W – последовательность боковых узлов, принадлежащих одному внутреннему ребру некоторой макроплитки. Будем говорить, что *боковой узел имеет ранг 1* (или, соответственно, ранг 2), если этот боковой узел – первого (или, соответственно, второго) уровня. *Регулярным словом ранга 1* будем считать слово из одного узла ранга 1.

Теперь индуктивно определим остальные ранги узлов. *Регулярным словом ранга n* будем называть последовательность узлов XUX , где X – регулярное слово ранга $n - 1$, а U – узел ранга n . То есть, например, если ранги узлов идут в последовательности 121, то это регулярное слово ранга 2.

Итак, для произвольного слова осталось определить ранги узлов уровня 3 и выше.

Будем говорить, что буква *содержит левую скобку*, если она содержит в подклеенном типе CUR, и *содержит правую скобку*, если она содержит в подклеенном типе CDL. Символически это отражено на рисунке 1.

Пусть определены ранги узлов до $n - 1$. Будем говорить, что *боковой узел X имеет ранг n* , если:

1. X находится в середине подслова $\widehat{W} \subset W$, состоящего из $2^{n-1} + 1$ букв;
2. Слово \widehat{W} представляется в форме $YUXVZ$, где Y, Z – боковые узлы ранга $n - 1$, причем Y содержит левую скобку, Z содержит правую скобку, U, V – регулярные слова ранга $n - 2$.

Слово \widehat{W} будем называть *словом-представителем* для буквы X ранга n .

Диаграммой рангов слова U будем называть слово \widehat{U} в счетном алфавите $\{1, 2, \dots\}$, получаемое из слова U заменой каждой буквы на ее ранг. Например, узел X имеет ранг 3, если в W есть подслово $Z_1Y_1XY_2Z_2$, где у Z_1 и Z_2 ранг 2, а у Y_1 и Y_2 ранг 1. Тогда диаграмма рангов выглядит так: 21312.

Замечание 1. Смысл понятия *слово-представитель X* в том что слово-представитель является половиной периметра (верхняя плюс левая сторона) подклеенной макроплитки, ядром которой является X .

Замечание 2. Заметим, что ранги некоторых букв слова могут быть не определены (например, ранг должен быть не менее n , а до края слова меньше 2^{n-2} узловых букв). Вдали от краев ранги уже определены, то есть в некотором слове можно выбрать подслово W так, что ранги букв W определены, причем слово-представитель для каждой буквы W является подсловом W . Например, если выбрать W_1 как слово-представитель буквы, имеющей максимальный ранг, W_2 как слово, накрывающее W_1 и оба слова представителя крайних букв W_1 , и так далее, W_i – слово, накрывающее W_{i-1} и слова представители крайних букв W_{i-1} . На очередном шаге слово W_i будет просто одной буквой. Тогда можно выбрать W как объединение всех слов W_i .

В дальнейшем будем считать что слово W выбрано так, что ранги букв W определены, причем слово-представитель для каждой буквы W является подсловом W .

ЛЕММА 5.2. Пусть W – последовательность узлов на одном внутреннем ребре некоторой макроплитки и узел X имеет ранг n . Рассмотрим слова длиной $2^k + 1$, с центром в X . Его слово-представитель, имеющее длину $2^{n-1} + 1$, является наименьшим среди таких слов, левый узел которых имеет в подклеенном типе CUR, а правый – CDL.

Это утверждение доказывается индукцией по n .

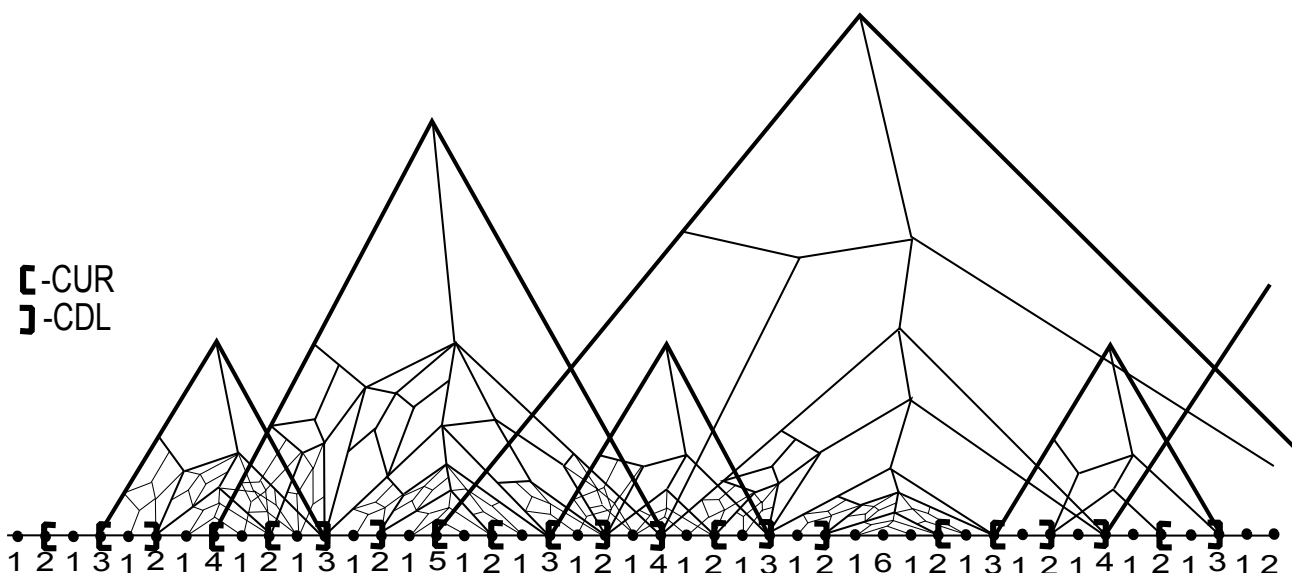


Рис. 1. Устройство подклеек на ребре

ЛЕММА 5.3. Пусть W – слово в S , в котором все буквы, соответствующие узлам, кодируют боковые узлы, причем все они лежат на ребре одного и того же типа, и параметр информации у всех одинаковый.

Пусть X – буква в слове W , уровень которой равен 3, причем между краями W и X находятся, как минимум, 4 буквы, отвечающие кодам узлов. Тогда либо некоторое подслово $\tilde{W} \in W$, содержащее X , приводится к нулю с помощью определяющих соотношений в S , либо существует подслово в W , являющееся словом-представителем X и оно может быть реализовано в качестве кодировки пути на некотором ребре комплекса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что мы читаем слова в положительном (относительно несущего ребра) направлении. Пусть уровень X (то есть и ранг тоже) равен 3. Рассмотрим подслово W , содержащее 5 узловых букв, с центром в X .

Допустим, первая и последняя буквы содержат в подклеенном типе, соответственно, CDL и CUR. Если W не встречается на комплексе, оно должно присутствовать среди мономиальных определяющих соотношений. Иначе оно автоматически реализуется в качестве кодировки пути. В этом случае W – кодировка пути по верхней и левой стороне подклеенной макроплитки уровня 2, и W – слово-представитель X .

Пусть, теперь, первая и последняя буквы содержат в подклеенном типе, соответственно, CUR и CDL, то есть в другом порядке. (Иные варианты не встречаются на комплексе в качестве кодировок и потому приводятся к нулю).

В этом случае ранг центральной буквы – 4 или выше. Рассмотрим слово V_1 из девяти букв с центром в X . Диаграмма рангов V_1 имеет вид 3121 x 1213. Слово V_1 встречается на комплексе, иначе все можно сразу привести к нулю. Рассмотрим типы (в подклеенной части) для четвертой и шестой букв этого слова. Это должны быть разные типы, а учитывая положительное прочтение слова, четвертая должна иметь тип U, а шестая L (речь о типах в подклеенной области). То есть, к подслову из четвертой, пятой и шестой букв может быть применено соотношение для локального преобразования из числа введенных в случае P2. Затем можно применить другие локальные преобразования 7 из числа введенных в случае P2, для соответствующих трехбуквенных слов. В результате мы преобразуем слово V_1 в кодировку пути, изображенного на рисунке 2.

Рассмотрим трехбуквенное подслово, отмеченное в левой части на рисунке 3. Заметим, что либо путь с таким кодом не может встретиться на комплексе (и тогда оно равно нулю),

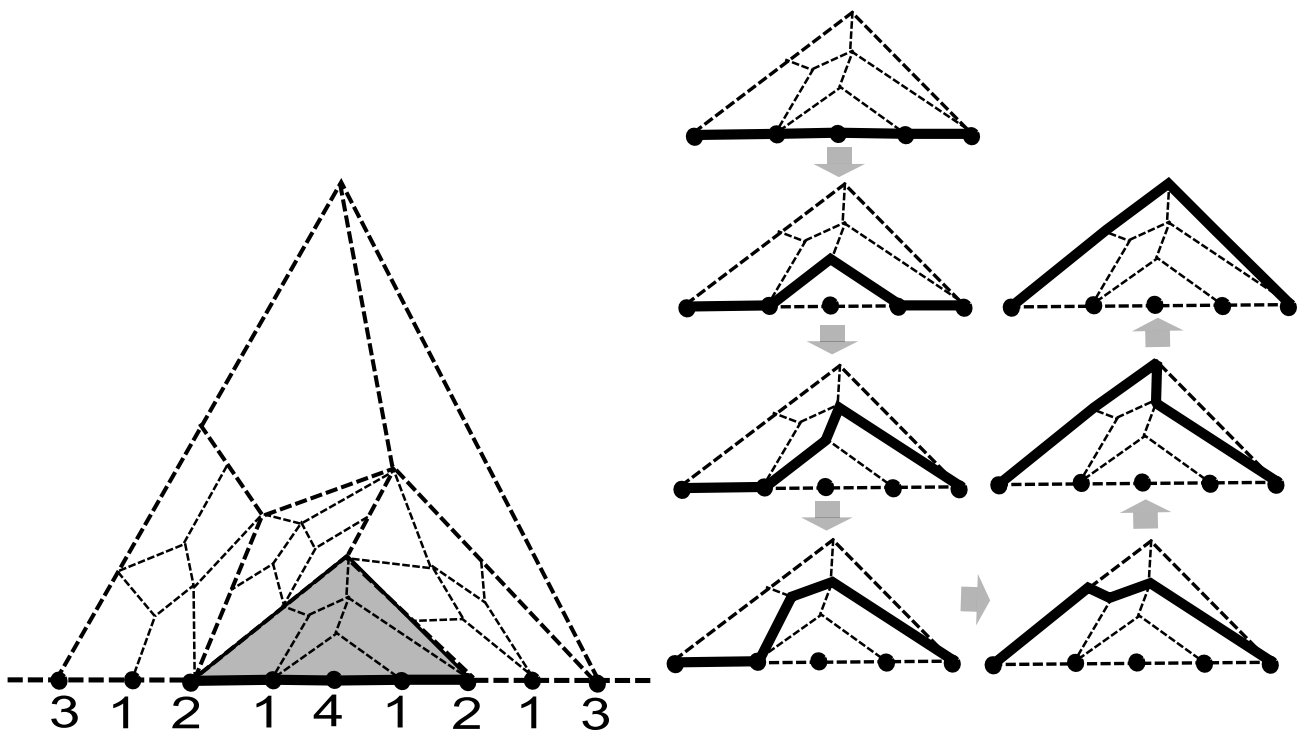


Рис. 2. Преобразование слова-представителя

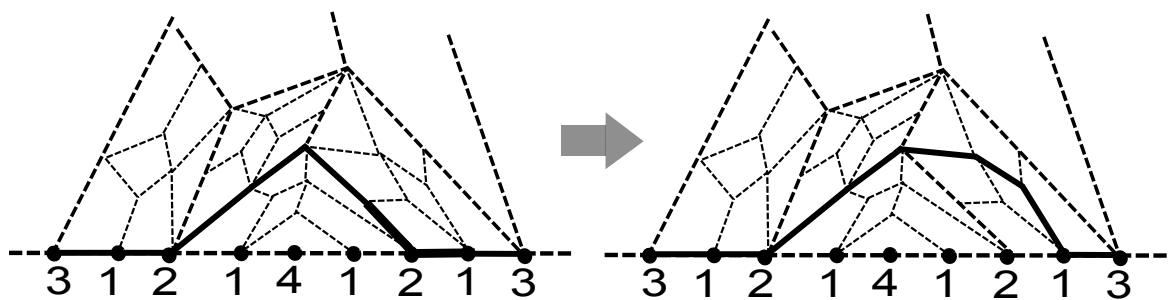


Рис. 3. Преобразование слова-представителя

либо к нему можно применить соотношение $P3 - 8$. Действительно, узел X обязан иметь уровень 1, значит, базовый тип его UL или LU , а тип в подклейке – U (если будет L , то такого участка из трех узлов не может встретиться на комплексе). Затем, аналогично применяем соотношения $B3 - 6$, $P3 - 1$, и получаем кодировку пути, изображенного в правой части рисунка 3.

Далее возможно два варианта. Последняя буква слова V_1 может содержать в подклеенном типе либо CDL либо CUR .

В первом случае мы можем применить соотношение $P3 - 10$, далее $B3 - 5$, $B3 - 2$. Применяя далее подходящие соотношения, можно получить из слова кодировку пути, изображенного в левой части на рисунке 4. Согласно лемме 5.2, в этом случае рассмотренное девятибуквенное слово и есть слово-представитель для X . Применив далее несколько соотношений, мы можем преобразовать это слово в кодировку пути, указанного в правой части рисунка 4.

Во втором случае мы продолжаем применять соотношения, пока не получим из нашего девятибуквенного слова кодировку указанного на рисунке 5 пути.

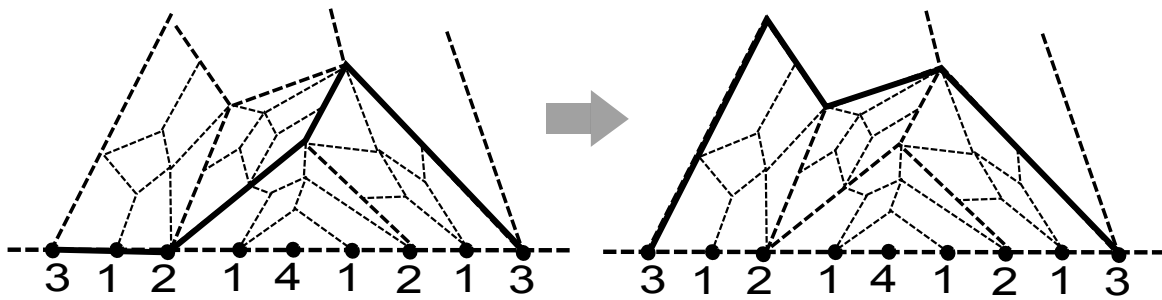


Рис. 4. Преобразование слова-представителя

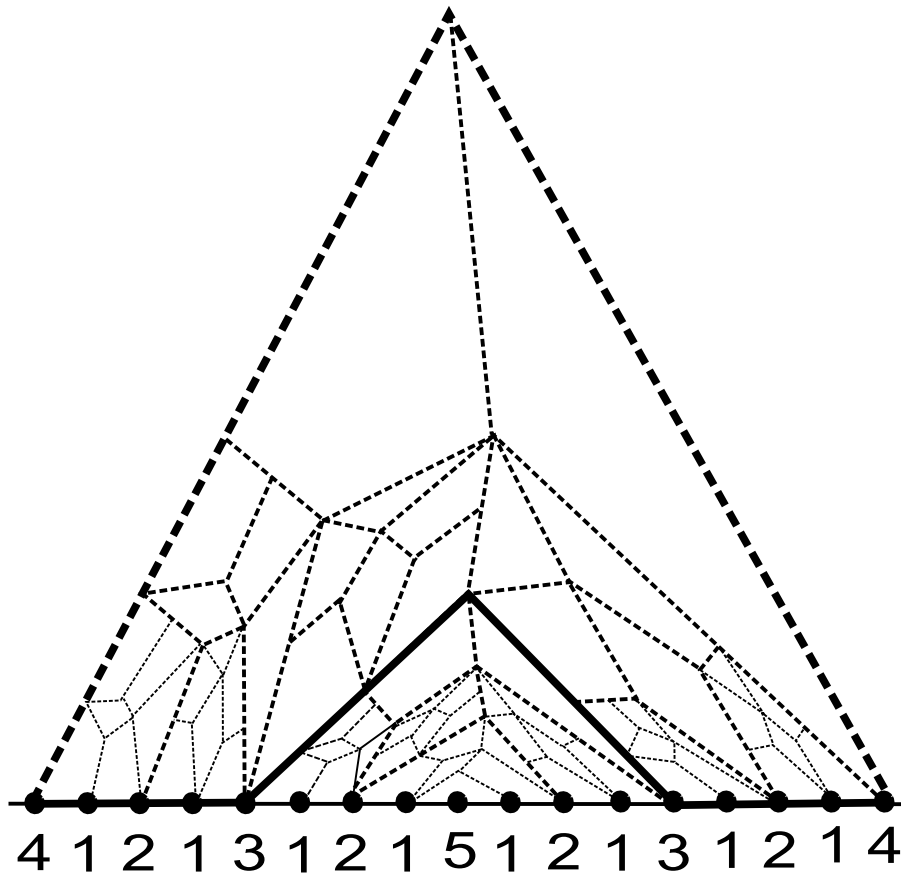


Рис. 5. Преобразование слова-представителя

Теперь рассмотрим 17-буквенное слово V_2 с центром в X (рисунок 5). Мы опять можем брать трехбуквенные слова на границе 17-буквенного слова так, что либо эти трехбуквенные слова будут встречаться в мономиальных соотношениях, либо в соотношениях для локальных преобразований путей. После проведения необходимых преобразований, мы опять получим альтернативу: последняя буква слова V_2 может содержать в подклееном типе либо CDL либо CUR . Аналогично 9-буквенному слову, мы либо получаем кодировку пути, полученного из слова-представителя, либо возможность продолжить процесс и перейти к рассмотрению 33 буквенного слова.

Продолжая процесс преобразования, мы дойдем до того момента, когда сможем окончательно выписать кодировку пути, полученного из слово-представителя, либо получим в какой-то момент нулевое слово.

□

ЛЕММА 5.4. Пусть W – слово в S , удовлетворяющее следующим условиям:

1. W состоит из трех частей $W = V_1XV_2$, где

X – узловая буква, соответствующая внутреннему узлу (A, B или C), либо X – любая узловая буква, но ребро входа в X или ребро выхода из X – неглавное;

V_1, V_2 – слова, все узловые буквы которых обладают одной и той же информацией (своей для V_1 и для V_2), а все реберные буквы (кроме, возможно, входящего в X и выходящего из X) соответствуют главным ребрам, причем тип ребра постоянен для V_1 и для V_2 .

Тогда либо некоторое подслово $\widehat{W} \in W$, содержащее X , приводится к нулю с помощью определяющих соотношений в S , либо существует подслово в W являющееся словом-представителем X и оно может быть реализовано в качестве кодировки пути на некотором ребре комплекса.

Доказательство полностью аналогично лемме 5.3. В данном случае в процессе доказательства используются соотношения, связанные с подклеенной макроплиткой с ядром в X .

ЛЕММА 5.5. Пусть W – слово в S и каждая узловая буква W кодирует боковой узел, причем информация всех таких узлов совпадает, а каждая реберная буква соответствует главному ребру (то есть для всех 1 или для всех 2). Тогда либо W можно привести к нулю с помощью определяющих соотношений в S , либо W представляется в виде кодировки некоторого пути на комплексе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если уровень всех узловых букв не выше 2, то W не может быть содержать более 3 узловых букв, в этом случае W имеет малую длину и если в нем не содержится запрещенных слов, значит оно реализуется в качестве кодировки пути.

Выберем некоторую букву X , уровня 3. Пусть ее ранг равен k . Применим к X лемму 5.3. Получим $V(X)$ – слово-представитель X . Обозначим крайнюю справа букву $V(X)$ как X_1 . Ее ранг будет меньше на 1, чем ранг X . Применим к X_1 лемму 5.3, опять возьмем в $V(X_1)$ крайнюю справа букву X_2 . Продолжим так применять лемму 5.3, пока ранг и уровень всех буквы X_i , будет не менее 3. Если в какой-то момент слово W закончилось, мы можем рассмотреть аналогичный процесс, взяв на каждом шаге крайние слева буквы слов-представителей.

Будем пока считать, что слово не заканчивается. Тогда мы в итоге получим букву X_i , ранг и уровень которой равны 2. Следующая за X_i узловая буква должна иметь уровень 1, иначе возникнет запрещенное слово. Рассмотрим еще одну следующую узловую букву Y . Ее уровень равен 3, применим к ней предложение 5.3. Можно заметить, что левый конец полученного слова-представителя $V(Y)$ – это буква X . То есть, ранг Y на один выше, чем ранг X .

Таким образом, с помощью указанного процесса, мы можем по заданной узловой букве либо найти букву с большим рангом, либо дойти до конца слова (в обе стороны). Во втором случае указанная буква будет обладать наивысшим рангом из всех узловых букв.

Пусть буква X – обладает максимальным рангом из всех узловых букв W . Теперь применим лемму 5.3 к X и рассмотрим крайние буквы X_L и X_R полученного слова-представителя. Заметим, что их ранг на 1 меньше, чем ранг X . Для каждой из этих букв зафиксируем пару соседних с ней реберных букв так, что одно ребро уходит в подклейку (соответствующую слову-представителю X), а другая – соответствует главному ребру. Применим к этим буквам с такими парами ребер лемму 5.4, получая расширение подслова, представимого в качестве кодировки некоторого пути. Продолжим далее аналогичным образом, пока крайние буквы не будут иметь ранг 2. Следующие две буквы с обоих концов должны иметь ранг 1, и полученное таким образом слово представляется в

виде кодировки пути на комплексе. Заметим, что если после этого слева или справа имеется какая-либо буква, она должна иметь больший ранг, чем X (в этом можно убедиться, применив для этой буквы лемму 5.3). Таким образом, все слово может быть представлено в виде кодировки пути на комплексе.

Пусть у нас получился путь P на комплексе. Теперь можно проделать над ним все локальные преобразования в обратном порядке, возвращая слову форму, где все узловые буквы принадлежат одному ребру и все переходы – главные. Путь P преобразуется в эквивалентный путь, идущий по одному внутреннему ребру некоторой макроплитки. \square

ЛЕММА 5.6. Пусть W – слово в S , удовлетворяющее следующим условиям:

W состоит из трех частей $W = V_1 X V_2$, где

X – узловая буква, соответствующая внутреннему узлу (A, B или C), либо X – любая узловая буква, но ребро входа в X или ребро выхода из X – неглавное;

V_1, V_2 – слова, все узловые буквы которых обладают одной и той же информацией (своей для V_1 и для V_2), а все реберные буквы (кроме, возможно, входящего в X и выходящего из X) соответствуют главным ребрам, причем тип ребра постоянен для V_1 и для V_2 .

Тогда либо W можно привести к нулю с помощью определяющих соотношений в S , либо W представляется в виде кодировки некоторого пути на комплексе.

Доказательство аналогично лемме 5.5, учитывая что вершина X тоже обязана быть ядром подклеенной макроплитки со сторонами на V_1 и V_2 .

ЛЕММА 5.7 (О пути внутри макроплитки). Пусть W – слово в S , отвечающее следующим условиям:

1. В слове W отсутствуют буквы, кодирующие входы-выходы в подклейку;
2. Первая и последняя буквы слова W – узловые;
3. Вторая буква слова W кодирует неглавное выходящее ребро;
4. Предпоследняя буква слова W кодирует неглавное входящее ребро;
5. Кроме второй и предпоследней букв в слове W ни одна буква не кодирует неглавных входящих или выходящих ребер (то есть все остальные буквы, кодирующие ребра – отвечают главным ребрам).

Тогда W либо может быть приведено к нулю, либо W является кодировкой некоторого пути, соединяющего два узла на периметре некоторой макроплитки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что слово W имеет правильную форму, то есть буквы, кодирующие входящие ребра, узлы и выходящие ребра, встречаются в слове в правильном порядке. В противном случае слово сразу можно привести к нулю, с помощью соотношений категории 1. Также, будем считать что всякое подслово длины 4 в нашем слове является регулярным, иначе, можно применить мономиальное соотношение из категории 2.

Учитывая правильность формы, буквы 1, 4, 7, ..., $3k + 1$ слова W кодируют узлы. Буквы 2, 5, 8, ..., $3k + 2$ – кодируют выходящие ребра, а буквы 3, 6, 9, ..., $3k$ – кодируют входящие ребра.

Неглавное ребро входа означает, что путь входит внутрь некоторой макроплитки. Заметим, всего существует шесть возможных “входов” внутрь макроплитки: по ребрам 1 и 2 (из середины верхней стороны), по ребру 3 из середины левой стороны, по ребру 6 из середины правой стороны, по ребру 7 из левого нижнего угла и по ребру 8 из правого нижнего угла.

По второй букве W , кодирующей вход в макроплитку, можно установить, с каким из указанных шести входов мы имеем дело. Допустим, сначала, что это вход по ребру 3 из

середины левой стороны, а выход (предпоследняя буква) – по ребру 1 в середину верхней стороны.

Допустим, четвертая буква W соответствует черному внутреннему узлу (A , B или C). Рассмотрим седьмую букву, соответствующую третьему по очередности узлу вдоль нашего пути. Если эта буква является последней в W , то W представляет собой путь из середины левой стороны через узел типа A в середину верхней стороны. Все слова не соответствующие этому, не кодируют никакого пути на комплексе и поэтому содержатся среди мономиальных соотношений категории 2. Значит, седьмая буква не является последней. Заметим, что если она соответствует боковому узлу, то подслово W из первых семи букв будет кодировать несуществующий путь. В случае, когда седьмая буква соответствует внутреннему узлу, можно рассмотреть возможные типы десятой и тринадцатой букв. Можно заметить, что если путь с такой кодировкой существует, в нем содержится участок, проходимый туда и обратно (нулевая форма) и в этом случае, в нашем слове будет подслово из категории 3 мономиальных соотношений.

Теперь пусть четвертая буква W кодирует боковой узел. Пусть в слове W все буквы кодируют боковые узлы. Участок пути из одного бокового узла в другой по главному ребру не меняет тип этого ребра. В нашем случае это ребро 3, причем с левой стороны – сторона $3A$, а с правой – $3B$. Но при выходе (когда мы приходим в середину верхней стороны) ребро должно быть типа 1, то есть найдется локальный участок, где тип ребра меняется, значит можно применить соотношение из категории 2.

Итак, после цепочки боковых узлов, нам должен встретиться внутренний узел. Поскольку у нас ребро 3, это может быть только узел типа A , для других не будет реализующих путей на комплексе. После узла A , мы можем продолжать путь по ребру 1, либо по ребру 4. (Если путь далее продолжается по ребру 3, то образуется участок с нулевой формой и опять же можно применить мономиальное соотношение.)

В случае ребра 4, мы продолжим изучение последующих букв, кодирующих узлы. Аналогично можно установить, что после нескольких боковых узлов, мы должны встретить узел типа C , иначе можно будет применить мономиальное соотношение. После узла C , дальнейший путь может продолжиться по одному из ребер 7, 8 или 5. В первых двух случаях, если после цепочки боковых, мы встретим внутренний узел, можно будет применить мономиальное соотношение, так как такого участка пути не может существовать на комплексе.

Если же дальнейший путь идет по ребру 5, опять рассмотрим цепочку боковых узлов до первого внутреннего узла (опять же, боковые узлы не могут поменять тип ребра, а в конце ребро должно быть первого типа). Это может быть только узел типа B и дальнейший путь может идти только по ребрам 2 или 6. В обоих случаях, для любого встреченного узла внутреннего типа можно будет применить мономиальное соотношение.

Таким образом, наше слово должно содержать цепочку боковых узлов на ребре 1, потом A -узел, потом цепочка боковых узлов типа 3. Если указанные цепочки содержат не более 10 букв, кодирующих узлы, то можно напрямую либо найти все наше слово среди запрещенных, а если его там нет, значит слово реализуется в качестве кодировки. Пусть указанные цепочки достаточно длинные. Временно выбросим из слова три первые и три последние буквы. Останется слово, к которому мы можем применить лемму 5.6, выбрав в качестве X наш A -узел.

То есть, урезанное слово без первых трех и последних трех букв может быть представлено в качестве кодировки пути на комплексе. Пусть это будет путь внутри некоторой макроплитки T , с заданными окружениями тех узлов на границе T , которые являются начальниками узлов из W .

При этом первые три и последние три буквы кодируют вход и выход в макроплитку, плюс информацию двух узлов на границе. Если вход или выход не соответствует ребрам, по

которым далее должен идти путь, мы сразу можем применить мономиальное соотношение. Значит, окружение макроплитки и окружение и информация двух входных узлов могут сочетаться в одном объекте на комплексе. Тогда получаем, что наше слово реализуется в качестве кодировки некоторого пути на комплексе. □

Замечание 1. Если вход и выход осуществляются не по ребрам 3 и 1, можно провести полностью аналогичный побуквенный анализ слова, и найти подслово категорий 2 или 3, либо установить, что слово есть кодировка некоторого пути в макроплитке. Таким образом, предложение можно доказать для входов внутрь макроплитки по ребрам любых внутренних типов.

Замечание 2. Неглавные ребра в начале и конце слова могут также быть ребрами в подклейку, рассуждения при этом не меняются.

ЛЕММА 5.8 (О сокращении подпути по подклеенной макроплитке). *Пусть W – слово в S , причем первая и последняя буквы кодируют некоторые узлы (то есть это некоторые из букв Y_i), а вторая и предпоследняя – кодируют, соответственно входящее ребро в подклейку и выходящее ребро из подклейки, причем кроме этих двух, больше входов и выходов в подклеенные области в слове W не встречаются. Тогда W либо может быть приведено к нулю, либо к форме, содержащей менее двух входов или выходов в подклеенные области.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что W имеет правильную форму, то есть буквы, кодирующие входящие ребра, узлы и выходящие ребра, встречаются в слове в правильном порядке.

Скобочной структурой слова будем называть слово в алфавите из двух букв: $\{ [,] \}$ открывающей и закрывающей скобок, составленное следующим образом: – каждая буква, кодирующая выходящее неглавное ребро, или ребро, ведущее в подклеенную макроплитку, заменяется на “[”, а каждая буква, кодирующая входящее неглавное ребро, или ребро, ведущее из подклеенной макроплитки, заменяется на “]”. Остальные буквы заменяются пустыми буквами.

Рассмотрим скобочную структуру W . Она начинается открывающей скобкой и заканчивается закрывающей. Очевидно, что существует подслово в W , которому в скобочной структуре соответствует подслово “[]” (из открывающей и закрывающей скобок). Это подслово \widehat{W} удовлетворяет условиям леммы 5.7, то есть, в некоторой макроплитке есть путь, соединяющий точки периметра, с таким кодом. Но тогда есть цепочка локальных преобразований, приводящая этот путь к эквивалентному, но идущему по периметру той же макроплитки. Поскольку локальным преобразованиям отвечают соотношения из категории 5, подслово \widehat{W} можно привести к форме, скобочная структура которой содержит не более одной скобки (а не две). Отметим также, что начальная и конечная скобки не исчезают при такой операции.

Будем проводить такие операции, пока во всем слове W не останется только открывающей и закрывающей скобок. Теперь наше слово соответствует пути, все ребра которого – главные, кроме первого и последнего. Данная ситуация аналогична условиям леммы 5.7. Таким образом, если наше слово ненулевое, оно представляет некоторый путь и мы можем провести цепочку локальных преобразований, чтобы этот путь шел по периметру макроплитки. Такой путь не может содержать более одного ребра в подклейки. Таким образом, в результате преобразований, в слове понизилось количество ребер в подклейки. □

ЛЕММА 5.9 (О двух выходах в подклейку подряд). 1. (Плоский случай). Пусть W – слово в полугруппе S , причем в W не входит букв, кодирующих входы и выходы в подклейки, а также кодирующих выходы из подплиток. Пусть также первая буква является узловой, а вторая кодирует ребро в подплитку. Тогда либо W может быть приведено к нулю в S , либо W является кодировкой некоторого пути на комплексе.

2. Пусть W – слово в полугруппе S , причем в W не входит букв, кодирующих выходы в подклейки, а также кодирующих выходы из подплиток. Пусть также первая буква является узловой, а вторая кодирует ребро в подклейку. Тогда либо W может быть приведено к нулю в S , либо W является кодировкой некоторого пути на комплексе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Узловые буквы, соответствующие узлам A, B, C, R, D, CDR будем называть *особыми*, как и соответствующие узлы.

1. Выделим в слове W реберные буквы, кодирующие переход в подплитку. Пусть буквы Z_i – это узловые буквы, входящие в слово перед ними. Тогда слово представляется в виде $Z_1V_1 \dots Z_kV_k$, где в словах V_i первая буква кодирует вход в подплитку, а все остальные реберные буквы кодируют главные ребра. Зафиксируем i и рассмотрим участок Z_iV_i . Выделим в нем особые буквы (в данном случае, они соответствуют узлам A, B, C). Представим Z_iV_i в виде $Z_iU_1S_1 \dots S_{l-1}U_lZ$, где U_j – слова без особых букв, S_j – особые буквы. Применяя лемму 5.6 к участку $Z_iU_1S_1U_2$, мы получаем путь по двум внутренним ребрам некоторой макроплитки, начинающийся на ее границе. Будем говорить, что макроплитка, в которой путь с заданной кодировкой может проходить, *удовлетворяет условию*. Заметим, что на комплексе может существовать несколько макроплиток, удовлетворяющих условию, например, если ни у одного узла на пути нет третьего начальника, то третьим начальником у макроплитки могут быть разные узлы.

Применяя эту же лемму 5.6 к каждому участку $U_jS_jU_{j+1}$, мы также получаем набор макроплиток, где мог бы располагаться этот участок из двух ребер. Докажем, что множество макроплиток, удовлетворяющих всем условиям, не является пустым. Фактически, достаточно проверить возможность выбора трех начальников макроплитки, обеспечивающих все пути согласованными кодировками. Заметим, что все участки состоят из двух внутренних ребер. Но если часть участков требует одного начальника, а часть другого, то можно выбрать один участок, где эти требования не согласуются, тогда данный участок нельзя вложить в макроплитку, что является противоречием. Таким образом, существует некоторое непустое множество троек начальников, удовлетворяющих всем условиям.

Итак, весь участок Z_iV_i можно представить как кодировку пути в некоторой макроплитке T_i . Также, участок $Z_{i+1}V_{i+1}$ также кодирует путь в некоторой макроплитке T_{i+1} , причем T_{i+1} должна занимать определенное кодом Z_iV_i положение одной из подплиток T_i . Для каждого такого входа применим лемму 5.6.

Заметим следующее наблюдение. Пусть макроплитка C является подплиткой для макроплитки B , а та, в свою очередь, является подплиткой для макроплитки A . Выберем два каких-то положения для A внутри комплекса, (A_1 и A_2). Пусть есть путь P_1 внутри A , выходящий на границу B , а также пусть есть путь P_2 от соответствующей точки границы B , выходящий на границу C . Рассмотрим эти пути в двух положениях A , A_1 и A_2 . Тогда у вершин в пути P_1 изменится параметр информации (так как локальная кодировка у начальников A_1 отличается от A_2). У вершин в пути P_2 не будет отличаться ничего, так как B занимает одинаковое место в A_1 и A_2 и локальная кодировка у вершин на границе B будет одинаковой. То есть если путь P_2 корректен (то есть вкладывается в комплекс) и P_1 корректен, то можно рассмотреть реализацию пути P_1 и продолжить его аналогично геометрии P_2 . Это будет их совместная реализация.

То есть каждый следующий вход внутрь очередной макроплитки устроен корректно, то есть параметр информации во вложенной макроплитке согласован с расположением входа. Поскольку параметр информации касается только начальников, то войдя внутрь

макроплитки у нас уже нет ограничений на изначальных начальников. Иначе говоря, если мы из некоторой макроплитки T_1 вошли внутрь макроплитки T_2 , а потом в T_3 , то внутри T_2 и T_3 мы уже не знаем начальников T_1 , то есть путь с такой же геометрией, но с другими начальниками для T_1 будет тоже корректен. Тогда если вход внутрь каждой вложенной макроплитки устроен корректно на каждом входе, то и в целом он корректен.

Таким образом, существует некоторая макроплитка, содержащая весь путь с кодировкой W .

2. Выделим в слове W буквы, кодирующие переход в подклейку. Пусть буквы Z_i – это узловые буквы, входящие в слово перед ними. Тогда слово представляется в виде $Z_1V_1 \dots Z_kV_k$, где в словах V_i первая буква кодирует вход в подклейку, а все остальные реберные буквы кодируют плоские ребра. Для участков Z_iV_i можно применить пункт 1) настоящей леммы. Аналогично рассуждению выше, существуют макроплитки для участков Z_iV_i и $Z_{i+1}V_{i+1}$ вместе. Иначе опять же можно применить лемму 5.6 для участка, одна часть которого в одном пути, а другая в другом. В итоге получаем макроплитку, где содержится общий путь для W . □

ЛЕММА 5.10 (О безквадратности пути по одному ребру). *Пусть W – путь на комплексе, целиком проходящий внутри некоторого ребра (внутреннего или граничного) и не содержащий узел с типами DL, LD, DR, RD, RU, UR, R, D. Тогда соответствующее слово в полугруппе S не содержит двух одинаковых подслов, идущих подряд.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подстановочную систему в алфавите $\{U_1, L_1, U, L\}$, определяемую следующим образом: $U_1 \rightarrow U_1UL_1$, $L_1 \rightarrow U_1LL_1$, $U \rightarrow U$, $L \rightarrow L$.

Такая система, в частности, генерирует следующую последовательность слов:

$$U_1 \rightarrow U_1UL_1 \rightarrow U_1UL_1UU_1LL_1 \rightarrow U_1UL_1UU_1LL_1UU_1UL_1LU_1LL_1 \rightarrow \dots$$

Пусть X – некоторое слово. Обозначим описанную подстановочную замену как $f(X)$.

Пусть сначала путь отвечающий W проходит по внутреннему ребру. Рассмотрим кодировку нашего слова W в полугруппе S . Проведем над ним следующие операции:

каждую букву, кодирующую UL-узел, уровня выше первого, заменим на букву U ;
каждую букву, кодирующую LU-узел, уровня выше первого, заменим на букву L ;
каждую букву, кодирующую UL-узел первого уровня, заменим на букву U_1 ;
каждую букву, кодирующую LU-узел первого уровня, заменим на букву L_1 ;
все буквы, кодирующие не узловые буквы, удалим из слова.

Получившееся слово в алфавите $\{U_1, L_1, U, L\}$ будем называть W' . Заметим, что если W содержит два одинаковых подслова, идущих подряд, то таким же свойством будет обладать и W' .

Покажем, что W' является подсловом $f^n(U_1)$ или $f^n(L_1)$ для некоторого n . Действительно, выберем в нашем слове W букву, X кодирующую узел с самым большим рангом n (узел, появившийся ранее всех при разбиениях). Такая буква только одна, так как если бы их было хотя бы две, то согласно правилам разбиения, между ними нашелся бы узел с более высоким рангом.

Допустим, ради определенности, что узел X имеет тип UL. Можно заметить, что последовательность узловых букв в слове W' является подсловом в слове $f^{n-1}(U_1)$, это легко можно установить индукцией по n , подстановочная последовательность f полностью соответствует образованию узловых вершин при разбиениях.

Таким образом, для доказательства предложения, достаточно показать, что $f^n(U_1)$ не содержит двух одинаковых подслов подряд для любого n .

Эта последовательность является последовательностью Дина, ее безквадратность установлена в работе [92]. Для удобства приводим свое доказательство.

Допустим, это не так. Возьмем наименьшее n , при котором такие подслова появляются. Пусть $f^n(U_1)$ содержит подслово QQ . Разметим наше слово следующим образом. Выделим в $f^n(U_1)$ обычными (не квадратными) скобками участки, соответствующие подсловам U_1UL_1 , U_1LL_1 , U , V , образовавшимся при последнем переходе $f^{n-1}(U_1) \rightarrow f^n(U_1)$. Сами скобки не принадлежат алфавиту, а являются просто инструментом разметки. Если при этом в Q вошло целое количество участков, начинающихся и заканчивающихся скобкой, то в слове $f^{n-1}(U_1)$ также будет два одинаковых подслова $f^{-1}(Q)$ идущих подряд, что дает противоречие с выбором n .

Значит есть подслово (U_1UL_1) или (U_1LL_1) , часть которого лежит вне Q , а часть внутри. То есть, Q начинается с UL_1 или LL_1 , либо с U_1 или L_1 .

Рассмотрим первый случай. Q должно заканчиваться на $(U_1$, то есть Q представляется в виде $UL_1)Y(U_1$, где Y – слово содержащее целое количество участков в скобках и к нему можно применить f^{-1} . Тогда $f^n(U_1)$ представляется в виде

$$W_1(U_1UL_1)Y(U_1UL_1)Y(U_1UL_1)W_2,$$

где W_1, W_2 – некоторые подслова, содержащие целое число участков в скобках.

Можно заметить, что при применении f^{-1} к подслову $(U_1UL_1)Y(U_1UL_1)Y(U_1UL_1)$ там также образуется два одинаковых подслова идущих подряд. То есть такие слова встретятся в $f^{n-1}(U_1)$, что невозможно.

Остальные случаи: Q начинается с $LL_1); U_1); L_1)$ рассматриваются полностью аналогично. □

ЛЕММА 5.11. Пусть W – произвольное слово в S . Тогда слово W^9 приводится к нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим в слове W открывающими скобками – ребра, кодирующие входы в подклейки и входы в подплитки (неглавные ребра), а закрывающими – выходы из подклеек и подплиток. Если подслово начинается с открывающей скобки, заканчивается закрывающей, и не содержит внутри скобок, будем применять предложение 5.8. Таким образом, в какой-то момент мы преобразуем наше слово W в форму $\widehat{W} = W_1W_2$, где W_1 содержит только закрывающие скобки, а W_2 только открывающие.

Заметим, что $W^9 = W_1(W_2W_1)^8W_2$. Рассмотрим слово W_2W_1 . Применяя к нему такой же процесс (предложение 5.8 к каждой паре скобок), мы в итоге получим слово V , либо не содержащее скобок вообще, либо содержащее только один их вид.

Пусть, например, V содержит только открывающие скобки, среди которых есть выходы в подклейку.

Заметим, что V^8 содержит не менее 8 открывающих скобок, отвечающих выходам в подклейку, то есть содержит подслово $U = Z_1x_1V_1Z_2x_2V_2 \dots Z_kx_kV_k$, где x_i – ребра, кодирующие выходы в подклейки, участки V_i не содержат таких букв, Z_i – узловые буквы, $k \geq 8$.

Учитывая лемму 5.9, U может быть представлено как кодировка некоторого пути по комплексу. Пусть T – подклеенная макроплитка, в которую уходит ребро x_2 .

Допустим, Z_1 принадлежит T . Это может быть только если Z_1 – ядро подклейки T (и сама T – подклейка к некоторой подклейке R). В этом случае V_1 идет по краю R , то есть проходит краевые вершины. Заметим, что путь после Z_2 в этом случае заходит внутрь T и не может проходить по краевым вершинам, иначе путь бы содержал и закрывающую скобку. Значит, и Z_1 и Z_2 входят в V , то есть принадлежат одному периоду. Тогда в пути встречается не менее 16 открывающих скобок.

Пусть s – уровень подклеенной макроплитки Y , куда уходит ребро x_3 . По первой части леммы 3.13, кусок пути от Z_1 до Z_3 не может лежать в одной макроплитке. То есть Z_1 не лежит в T . Тогда длина пути от Z_1 до Z_3 не менее 2^{s-1} по лемме 3.12. Кроме того, по второй части леммы 3.13 оставшаяся часть пути менее 2^{s+1} . Но часть пути после Z_3 не меньше, чем в четыре раза длиннее. Получаем противоречие, значит слово можно привести к нулю.

Если Z_1 не принадлежит T , тогда обозначаем как s уровень T , после чего первую часть леммы 3.13 применяем к куску от Z_1 до Z_2 , после чего аналогично применяя лемму 3.12 и вторую часть леммы 3.13, получаем, что кусок от Z_1 до Z_2 не менее 2^{s-1} , а остальной кусок менее 2^{s+1} , хотя он не меньше, чем в четыре раза длиннее.

Похоже разбирается плоский случай, когда V не содержит входов в подклейки, а только входы в подплитки. То есть, V содержит подслово $U = Z_1x_1V_1Z_2x_2V_2 \dots Z_kx_kV_k$, где x_i – ребра, кодирующие выходы в подплитки, участки V_i не содержат таких букв, Z_i – узловые буквы, $k \geq 8$. Учитывая первую часть леммы 5.9 U может быть представлено как кодировка некоторого пути по комплексу.

Рассмотрим минимальную макроплитку T , содержащую оставшуюся часть пути, начиная с Z_2 (ребро x_2 входит внутрь T , далее весь путь находится строго внутри нее). Пусть s – уровень макроплитки T . Заметим, что 2^{s-1} – длина стороны T . Если Z_1 лежит на границе T , длина участка до Z_2 не менее половины длины стороны T , то есть 2^{s-2} . Если же Z_1 не принадлежит T , то расстояние до вершины на границе T также не менее 2^{s-2} . Таким образом, длина участка от Z_1 до Z_2 не менее 2^{s-2} , а оставшийся участок, не менее чем в 4 раза длиннее, то есть более 2^s . Но остаток пути, начиная с Z_2 лежит в T и его длина по лемме 3.6, менее 2^s , что приводит к противоречию.

Пусть V не содержит скобок вообще. В этом случае мы имеем дело с плоской ситуацией, без выходов в подклейки, также нет и входов и выходов в подплитки.

В этом случае, все ребра главные. Будем следить, по каким ребрам проходит предполагаемый путь. Допустим, V содержит узловую букву кодирующую не боковой узел (то есть, узел типа \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{C} , или угловой), тогда путь должен проходить по нескольким ребрам одной макроплитки. Заметим, что нельзя посетить более четырех внутренних ребер макроплитки не повернув ни в одном месте назад и не выйдя на периметр. Но V^8 должно содержать больше четырех таких участков, значит, в каком-то из них можно будет применить мономиальное соотношение.

Пусть теперь все узловые буквы V кодируют боковые узлы. То есть предполагаемый путь проходит по одному и тому же ребру некоторой макроплитки. Для такого случая можно применить предложение 5.5. То есть мы применяем несколько преобразований, и если в процессе нельзя было применить мономиальное соотношение, в конце получится представление нашего слова в виде кодировки некоторого пути на комплексе. То есть, наш путь лежит полностью внутри некоторого ребра на комплексе.

Внутри каждого ребра на комплексе нет более трех узлов с типами, отличными от \mathbb{UL} и \mathbb{LU} . Путь V^8 содержит восемь одинаковых участков подряд, в них не может встретиться вершин с типами, отличными от \mathbb{UL} и \mathbb{LU} . Но тогда в слове не может быть даже двух одинаковых участков подряд (лемма 5.10). Таким образом, W^9 всегда приводится к нулю. \square

Теперь мы можем завершить доказательство нашей основной теоремы:

ТЕОРЕМА 5.2. *В полугруппе S , заданной конечным числом определяющих соотношений, существует бесконечное число различных слов, не равных нулю. При этом для любого слова W его девятая степень приводится к нулю: $W^9 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому регулярному пути на комплексе можно привести в соответствие его кодировку – слово в полугруппе. При этом, при преобразовании пути его

длина не меняется. Таким образом, если некоторый путь приводится к нулю, это значит, что либо в нем нашлось запрещенное подслово, либо локально некрайчайший кусок пути, либо мертвый паттерн. Во всех этих случаях путь не является регулярным. То есть, все регулярные пути к нулю привести нельзя.

Вторая часть утверждения следует из леммы 5.11. Таким образом, построенная конечно определенная полугруппа S содержит бесконечное множество различных слов, и при этом является нильполугруппой, где каждое слово в девятой степени приводится к нулю.

□

2. Дальнейшие вопросы и соображения

Л. Н. Шеврин поставил следующие вопросы:

Вопрос 1. *Каково наименьшее возможное число элементов базиса бесконечной конечно определенной нильполугруппы конечного индекса?*

Вопрос 2. *Каков наименьший возможный индекс бесконечной конечно определенной нильполугруппы конечного индекса?*

Можно ли опустить в формулировке обоих вопросов слова «конечного индекса»? А именно, эти слова нужно будет опустить, если будет дан положительный ответ на следующий вопрос:

Вопрос 3. *Любая ли бесконечная конечно определенная полугруппа имеет конечный индекс?*

Нам представляются чрезвычайно важным для дальнейшего обобщение результата Х. Гудмана-Штраусса. В частности, представляют интерес два вопроса:

А. Топологическое обобщение результата Х. Гудмана-Штраусса. Мозаика рассматривается как плоский граф, где плитками являются простые циклы. Нужно доказать, что заданием конечного числа локальных правил можно добиться заданного иерархического правила построения.

В. Обобщение иерархического правила. Нужно доказать, что заданием конечного числа локальных правил можно добиться заданного рекурсивного правила построения мозаики.

Последнее нам представляется важным как в связи с третьим вопросом Л. Н. Шеврина (мы предполагаем отрицательный ответ), так и для построения иных рекурсивных объектов. По всей видимости, эти вопросы должны предшествовать теоретико-кольцевым исследованиям.

И, наконец, возникает вопрос, на который также обратил наше внимание Л. Н. Шеврин:

Вопрос 4. *Какие максимальные ненулевые степени элементов возможны в построенной нами полугруппе S ?*

Все перечисленные вопросы представляются полезными для получения идей, позволяющих работать в кольцевой тематике.

Каноническая форма Рипса для второго ранга

В этой главе обсуждается применение геометрических идей уже для группового случая.

Одним из перспективных направлений является использование вычислительных методов для анализа групп Бернсайда и других сходных алгебраических структур. В свете последних достижений Э. Рипса [135] анализ этих структур естественным образом формулируется на языках алгоритмов и вычислений.

Приведём несколько обоснований возможности получения строгих результатов с помощью вычислительных методов:

- Обобщения условий малых сокращений для групп Бернсайда позволяют эффективно алгоритмизировать задачу о слове в этих группах.
- Соотношения в группах Бернсайда определяют градуированную структуру, позволяющую построить итеративные приближения к $B(m, n)$ в виде последовательностей вложенных групп, где постепенно добавляются новые соотношения. Каждая промежуточная группа характеризуется конечным множеством соотношений, пригодных для формализации и машинного анализа.
- Теория канонических форм, разработанная Э. Рипсом, предоставляет прямой алгоритм построения канонической формы для произвольного слова. Работа с такими формами существенно упрощает структуру соответствующих диаграмм Ван Кампена. Хотя теория изначально не предполагает ручных вычислений этих форм, данный подход оказывается естественным для компьютерного анализа.

Предварительный этап работы – изучение, формализация и строгое изложение теории канонических форм, разработанной Рипсом. Наиболее объёмная и содержательная часть настоящего исследования

1 посвящена именно этой задаче. Размер раздела может показаться избыточным, однако это необходимо: последующий анализ опирается на изложенные здесь факты, и важно дать строгое описание теории.

Первый нетривиальный случай, требующий анализа, – это ограничение соотношений первыми двумя рангами. Вторая задача настоящего исследования – уточнение оценок Рипса для случая, когда соотношения делятся на ранги 1 и 2. Из построенной в разделе 1.3 теории следует, например, результат бесконечности группы Бернсайда с учётом только первых двух рангов связей при сравнительно небольшом показателе (нечётные $n > 120$). Этот факт, во-первых, подтверждает потенциал предложенной теории для анализа приближений групп Бернсайда, а во-вторых, ограничивает количество случаев, требующих дальнейшего детального разбора.

В последнем разделе 3 описаны некоторые направления будущих исследований.

Часть работы, посвящённая изложению достигнутых результатов и предварительной информации, состоит из двух основных разделов, отличающихся по сложности и содержанию. В данном разделе приводится краткое (и достаточно неформальное) введение в теорию малых сокращений. Эта область геометрической теории групп развивалась независимо от задачи Бернсайда (имеет самостоятельные применения, см., например, [140]), но существенные успехи в изучении структуры $B(m, n)$ при больших показателях основаны

на идеях этой теории. Поэтому необходимо дать краткий обзор её основных понятий и утверждений.

Вторая часть предварительной информации 1 (итеративная теория малых сокращений Э. Рипса) – изложение обобщённого и альтернативного подхода, разработанного Рипсом и упрощающего индуктивный анализ групп Бернсайда. Хотя часть теории приводится в работах [125], [132], [134], [135] новейшие результаты Рипса официально не опубликованы.

Включение этого текста в отдельный раздел оправдано: несмотря на известность фактов (пусть даже среди узкого круга специалистов), настоящее изложение впервые даёт письменную и логически завершённую презентацию взглядов Рипса, сформированных в ходе работы. В этом смысле данный раздел можно рассматривать как оригинальный результат статьи.

0.1. Теория малых сокращений. Теория малых сокращений – это раздел геометрической теории групп, посвящённый изучению групп с условием малых сокращений. В неформальной формулировке: различные соотношения не содержат слишком длинных общих подслов. Такое условие даёт возможность делать утверждения о гиперболической структуре диаграмм Ван Кампена в соответствующих группах (см. [136] для одного из первых математически строгих изложений). В частности, оно обеспечивает применимость геометрических методов для доказательства разрешимости задачи о слове. Развернутое строгое изложение теории содержится в монографии А. Ю. Ольшанского [39].

Теория малых сокращений играет ключевую роль во всех известных методах получения оценки бесконечности $B(m, n)$ для больших показателей, основанных на её обобщении и итеративном применении.

В данном разделе мы ограничимся кратким введением, необходимым для понимания дальнейшего изложения, полностью опуская доказательства. Где это не влияет на восприятие общей картины, допускается некоторая нестрогость, чтобы облегчить интуитивное понимание предмета. Строгие определения и доказательства можно найти в соответствующих источниках, например, [39].

Рассмотрим группу G , порождённую (конечным) множеством элементов $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Если G не свободна, то между элементами a_i существуют *соотношения*: слова в алфавите $A \sqcup A^{-1}$, которые равны тождественному элементу e в G (часто обозначается просто как 1 в группе G). Например, \mathbb{Z}^2 можно рассматривать как группу, порождённую символами a_1, a_2 с единственным соотношением $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$.

Очевидно, нет необходимости явно указывать *все* соотношения в группе. Обычно достаточно указать лишь небольшое подмножество, из которого следуют все остальные. Более строго даём следующее определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Соотношение w выводится из соотношений v_1, \dots, v_n тогда и только тогда, когда существуют слова u_1, \dots, u_n такие, что $w = u_1^{-1} v_1^{\pm 1} u_1 \cdot u_2^{-1} v_2^{\pm 1} u_2 \cdot \dots \cdot u_n^{-1} v_n^{\pm 1} u_n$.

Легко видеть, что это конструктивное определение эквивалентно тому, что $w = 1$ в любой группе G , удовлетворяющей соотношениям v_1, \dots, v_n .

Однако до этого момента мы непосредственно не вводили условие малых сокращений. Для его формулировки приведём иной, эквивалентный способ трактовки соотношений и выводимости одного соотношения из других.

Напомним, что *диаграмма Ван Кампена* над группой G – это плоский ориентированный граф, где каждое ребро подписано порождающим a_i , а для каждой клетки на этом графе слово, получающееся обходом её границы, совпадает с одним из исходных соотношений. Здесь обход границы означает конкатенацию букв, написанных на рёбрах границы; при прохождении ребра в обратном направлении буква включается со знаком минус.

ЛЕММА 6.1 (Лемма Ван Кампена). Соотношение w выводится из соотношений v_1, \dots, v_n тогда и только тогда, когда существует диаграмма Ван Кампена над G , в которой граница каждой клетки реализует циклический сдвиг слова v_i или его обратного, а внешняя граница всей диаграммы реализует слово w .

Для интуитивного пояснения этой леммы приведём следующий пример (адаптировано из [119]):

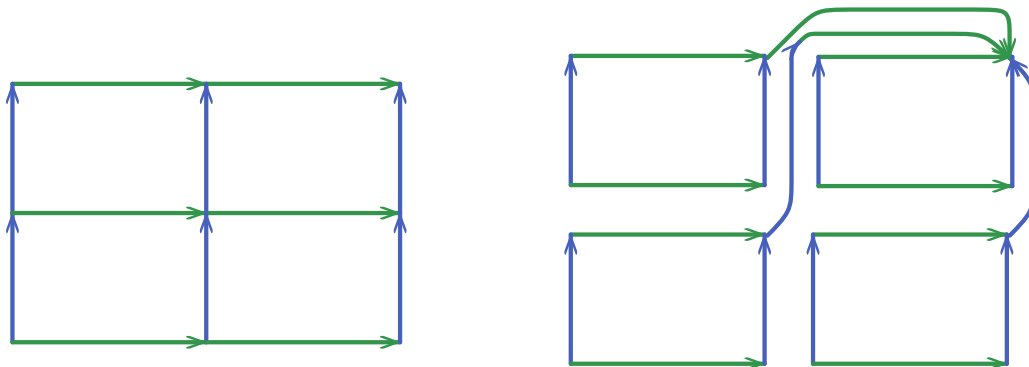


РИС. 1. Простая диаграмма Ван Кампена в группе \mathbb{Z}^2 , порождённой x и y с соотношением $[x, y] = 0$. Синие стрелки соответствуют x , зелёные – y .

На левом рисунке показано «геометрическое» выведение слова $x^{-2}y^{-2}x^2y^2$ из определяющего соотношения $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Справа – разложение диаграммы Ван Кампена, соответствующее алгебраическому выводу: $x^{-2}y^{-2}x^2y^2 = (x)^{-1}[x, y](x)(yx)^{-1}[x, y](yx)[x, y](y)^{-1}[x, y](y)$. Существо формального доказательства леммы Ван Кампена состоит в аккуратной формализации подобной операции «разложения диаграммы».

Для чуть более интересного примера рассмотрим следующую диаграмму (см. рисунке 2).

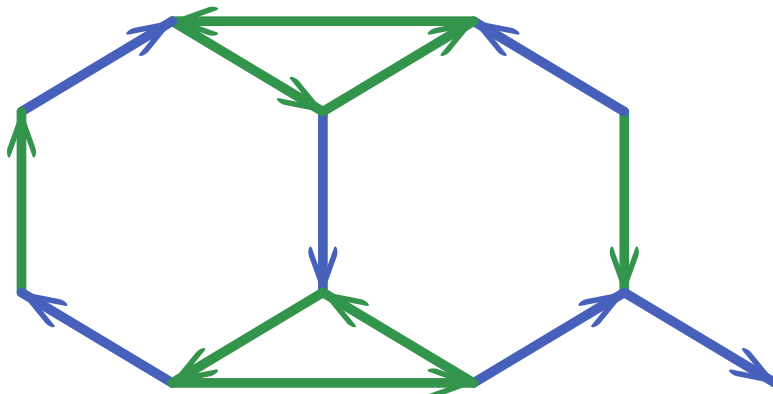


РИС. 2. Диаграмма Ван Кампена, возникающая в доказательстве конечности $B(2, 3)$. Синие стрелки – x , зелёные – y , но теперь соотношения имеют вид $g^3 = e$.

Каждая клетка этой диаграммы соответствует соотношению $w^3 = 1$, где w равно либо x , либо y , либо $x^{-1}y$. Внешняя граница даёт соотношение $[[x, y], y] = 1$. Вывод этого соотношения – ключевой шаг к доказательству конечности группы $B(n, 3)$ Бернсайда с показателем 3 (см. [117]).

Теория малых сокращений связывает алгебраическую природу соотношений в группах с геометрическим языком диаграмм Ван Кампена. Здесь и далее фиксируется множество

соотношений \mathcal{R} , и предполагается, что оно замкнуто относительно взятия обратных слов и циклических сдвигов.

Куском называется слово w , входящее в два различных соотношения из \mathcal{R} . Формально это значит, что существуют соотношения $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, такие что $R_1 = wr_1$, $R_2 = wr_2$.

Наконец, мы говорим, что $G = \langle A \mid \mathcal{R} \rangle$ удовлетворяет *условию малых сокращений* $C'(\lambda)$, если для любого куска w и любого соотношения R , содержащего w , выполняется $|w| < \lambda|R|$.

Интуитивно это условие означает, что любые два исходных соотношения существенно различны (не имеют длинных общих подслов), поэтому в диаграмме Ван Кампена каждая клетка имеет не менее $\frac{1}{\lambda}$ соседей.

Наконец, сформулируем один из результатов ([139]), известный, как лемма Грендлингера:

ТЕОРЕМА 6.1 (Лемма Грендлингера). *Если \mathcal{R} удовлетворяет условию $C'(\frac{1}{6})$, а (циклически приведённое) соотношение $w = 1$ выводится из \mathcal{R} , то существует циклический сдвиг \bar{w} слова w и соотношение $r \in \mathcal{R}$, для которых общий префикс u слов \bar{w} и r имеет длину $|u| > \frac{1}{2}|r|$.*

Хотя этот результат может казаться техническим, его значимость трудно переоценить. Действительно, теорема 6.1 позволяет построить жадный алгоритм решения задачи о равенстве слов в G . Объясним, почему это так: надо проверять, равно ли заданное слово w единице в G . Если $w = 1$, то по лемме Грендлингера можно найти соотношение R , у которого более половины R подряд встречается как подслово u в w . Пусть $R = us$. Тогда мы заменяем u на s^{-1} с последующим сокращением: длина слова w уменьшается, а требуемый результат доказывается индуктивно.

Этот алгоритм известен как *алгоритм Дена* (подробное рассмотрение этих идей см. в [137] и [138]), и его существование для групп с малым сокращением – одна из причин, почему изучение таких групп интересно.

Завершим этот раздел замечанием, что константа $\frac{1}{6}$ в лемме Грендлингера является точной: для любого $\lambda > \frac{1}{6}$ можно построить группу, удовлетворяющую условию $C'(\lambda)$, и диаграмму Ван Кампена в этой группе, для которой утверждение леммы Грендлингера не выполняется. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим условие $C'(\frac{1}{5})$ и следующую диаграмму (пример адаптирован из [119]):

Действительно, каждая клетка на рисунке 3 имеет периметр не менее 10, а каждый кусок – длину 2. Тем не менее, из этих соотношений можно вывести слово длины 2 (применяя лемму 6.1 к диаграмме на рисунке 3), что явно противоречит лемме 6.1.

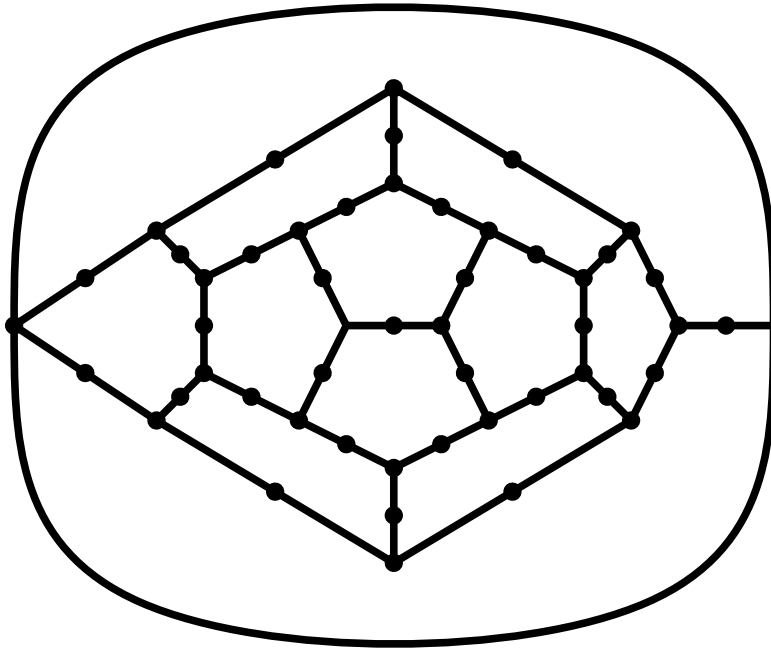


Рис. 3. Диаграмма Ван Кампена для группы с условием $C''(\frac{1}{5})$ с внешней границей длины всего 2, что противоречит утверждению леммы 6.1

1. Итеративная теория малых сокращений Э. Рипса

В этом параграфе мы дадим краткое самостоятельное изложение итеративной теории малых сокращений, разработанной Э. Рипсом начиная с [125] (1997) и далее развивавшейся в работах [132], [134], [135]. Однако, только часть конструкций, изложенных в последующих подразделах, была формально представлена Рипсом в публикациях; оставшиеся результаты не публиковались, а были изложены в лекционном курсе, прочитанном Рипсом в Университете Тель-Авива [124]. Конспекты этих лекций стали доступны лишь недавно (с непосредственным участием А. Канель-Белова и А. Белецкого).

Следует отметить, что курс Рипса был достаточно неформальным – большинство объяснений были интуитивными, но достаточными для дальнейшей строгой разработки базовой теории. Поэтому понимание и строгая формализация результатов Рипса, равно как их письменное оформление, представляют, во-первых, важную часть прогресса в области задачи Бернсайда и обобщения теории малых сокращений в целом, а во-вторых, имеют самостоятельную ценность.

1.1. Диаграммы для полуканонических слов. Итак, мы работаем с определением группы: $G = \langle A \mid \mathcal{R} \rangle$, где A – конечное множество образующих, а \mathcal{R} – множество соотношений, которое мы будем считать замкнутым относительно взятия обратных и циклических сдвигов.

Конечная цель – построить каноническую форму для слова в G , упрощающую анализ диаграмм Ван Кампена для группы. В первый шаг введём понятие \mathcal{R} -диаграммы.

Фиксируем константу $\tau \in (0, 1)$ (целесообразно воспринимать τ как достаточно маленькое число). Также для каждого соотношения $R \in \mathcal{R}$ введём относительную длину подслова S в R как $L_R(S) = \frac{|S|}{|R|}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Для слова W в алфавите $A \cup A^{-1}$ назовём \mathcal{R} -диаграммой слова W множество всех подслов S (при этом различаем вхождения одного и того же подслова в разных позициях в W), таких что $W = ASB$, а $S = R^\alpha R_1$, где $R \in \mathcal{R}$, $\alpha \geq 0$, $R = R_1 R_2$, и относительная длина $L_R(S) \geq \tau$.



Рис. 4. S_1 – синий, S_2 – зелёный, Q – красный.

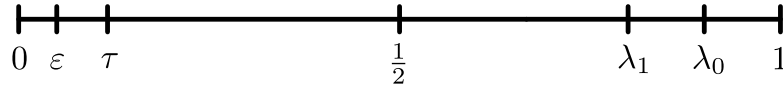


Рис. 5. Диаграмма введённых констант, используемых далее

Назовём диаграмму максимальной, если она содержит только максимальные подслова S (по включению).

Это определение может показаться немного сложным, однако фактически оно вполне естественно. Для слова W интересуют возможные варианты его сокращений, и каждый такой вариант соответствует участку соотношения из \mathcal{R} , встречающемуся в нашем слове. Кроме того, повторное вхождение соотношения тоже рассматривается как потенциальная возможность сокращения. Наконец, если не ограничивать снизу длину интересующих подслов, мы включим в \mathcal{R} -диаграмму слишком много несущественных слов (например, любую букву, встречающуюся в любом соотношении). Чтобы этого избежать, рассматриваем только подслова соотношений достаточной относительной длины – не менее τ .

Будем считать, что наша группа удовлетворяет условиям малых сокращений с константой ε (это условие будет подразумеваться до начала рассмотрения градуированных систем соотношений). В наших обозначениях это означает, что если $R_1 = SP \in \mathcal{R}$, $R_2 = SQ \in \mathcal{R}$, то $L_{R_i}(S) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Дополнительно требуется неравенство $2\varepsilon < \tau$. Это даёт важное ограничение на возможную структуру максимальных \mathcal{R} -диаграмм:

ЛЕММА 6.2. *При выполнении этих условий в максимальной \mathcal{R} -диаграмме слова W ни одна буква не входит одновременно в три и более подслова S .*

Доказательство. Пусть S_1, S_2 – подслова в максимальной диаграмме, R_1 и R_2 – соответствующие им соотношения, а P – область их пересечения: $S_1 = AP$, $S_2 = PB$. В этом случае относительная длина $L_{R_1}(P) < \varepsilon$, $L_{R_2}(P) < \varepsilon$. Пусть некоторое третье подслово Q пересекает P . Из максимальной Q не может содержаться целиком в S_2 . Значит, оно выходит за границы S_2 либо влево (см. рисунке 4, слева), либо вправо (рисунке 4, справа). Первый случай невозможен, поскольку относительная длина Q не менее $\tau > 2\varepsilon$, и либо $Q \cap S_1$, либо $Q \cap S_2$ обладало бы относительной длиной больше ε . Во втором случае Q покрывает $S_2 \setminus P$, однако $L_{R_2}(S_2 \setminus P) = \tau - L_{R_2}(P) > \varepsilon$. Следовательно, пересечение трёх максимальных подслов в одной точке невозможно. \square

На данном этапе введены константы ε и τ , которые удобно считать малыми числами. Для дальнейших рассуждений также понадобятся константы λ_0 и λ_1 при следующих условиях:

$$(38) \quad \begin{aligned} 1 - \lambda_0 &> \tau + 2\varepsilon \\ \lambda_0 - \lambda_1 &> 2\varepsilon \\ \lambda_1 - \frac{1}{2} &> 2\varepsilon \\ \tau &> 2\varepsilon \end{aligned}$$

Технические детали необходимости этих условий будут изложены далее. Таким образом, полезно воспринимать значения λ_i как большие числа, но всё же не равные ни 1, ни $\frac{1}{2}$ (см. рисунке 5). Имея эти константы, можем дать основное определение:

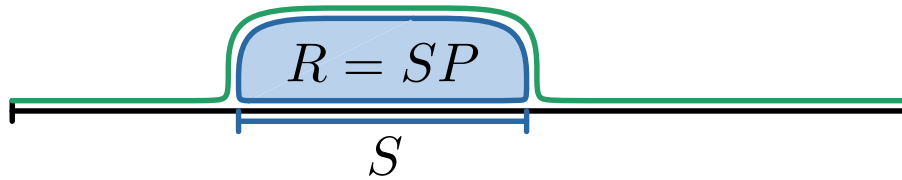


Рис. 6. Схематическое изображение поворота на слове S (синий), с использованием соотношения $R = SP$. Результирующее слово показано зелёным.

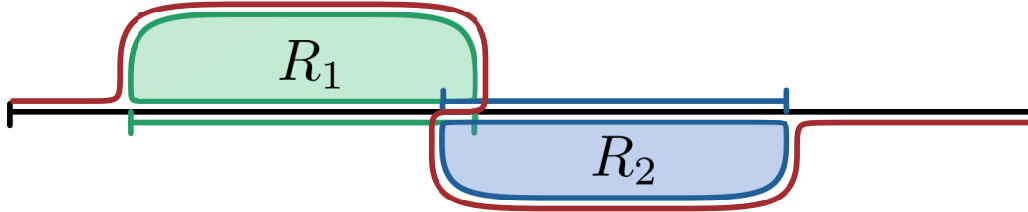


Рис. 7. Два \mathcal{R} -поворота, результирующее слово показано фиолетовым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Слово W называется λ -полуканоническим (обозначается $W \in \text{SC}(\lambda)$), если для любого подслова S (и соотношения R , подсловом которого является S) из максимальной \mathcal{R} -диаграммы слова W выполняется $L_R(S) < \lambda$.

Таким образом, интерес представляют слова, где все вхождения исходных соотношений достаточно малы. Изучение таких слов естественно, ведь если слово содержит большой фрагмент какого-либо соотношения, его можно эффективно сократить. Остальная часть подраздела посвящена основным свойствам полуканонических слов, конструкции групповой структуры на них и доказательству эквивалентности полученной группы исходной группе G .

Очевидно, главным инструментом преобразования слов в G является поиск подслова S , для которого существует соотношение вида $R = SP \in \mathcal{R}$, и замена S на подслово P^{-1} . Назовём каждую такую замену \mathcal{R} -поворотом. Схематическое изображение, используемое для визуализации этого преобразования, показано на рисунке 6. Чёрная линия – исходное слово, зелёная – слово после \mathcal{R} -поворота.

Кроме того, разные λ -полуканонические слова могут быть эквивалентны в группе G . Для решения этой проблемы вводится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Два слова W_1 и W_2 из $\text{SC}(\lambda_1)$ называются эквивалентными, если имеется последовательность \mathcal{R} -поворотов, переводящая слово W_1 в слово W_2 , причём все промежуточные слова принадлежат $\text{SC}(\lambda_0)$.

Заметим, что это действительно отношение эквивалентности (транзитивность, рефлексивность и симметричность очевидны по построению), и на первый взгляд не вполне ясно, почему определение (а именно требование полуканоничности промежуточных слов при λ_0) естественно и разумно. Однако это становится понятно при рассмотрении следующей диаграммы на рисунке 7:

Здесь горизонтальная линия обозначает последовательность символов в слове W_1 . Зелёная и синяя полосы обозначают элементы S_1 и S_2 максимальной диаграммы. Пусть первым преобразованием является \mathcal{R} -поворот по первому (зелёному) подслову. Второй поворот осуществляется по подслову S_2 . Полученное слово W_2 указано фиолетовой линией. Однако на такой диаграмме видно, что после первого поворота пересекающиеся с S_1 элементы максимальной диаграммы могут измениться, так как пересечение $S_1 \cap S_2$ уже отсутствует в слове. В данном примере S_2 укорачивается, но очевидно, что некоторые повороты (например, обратные) могут увеличить длину соседних подслов в диаграмме.

Однако поскольку на каждом шаге пересечение любых двух различных слов не превосходит ε , длина любого подслова S в диаграмме может измениться не более чем на 2ε (за счёт поворотов непосредственно слева и справа от S). Таким образом, если требовать достаточно большого зазора между λ_1 и λ_0 (не менее 2ε), то для любой последовательности поворотов по подсловам из начальной диаграммы не возникнут новые подслова с относительной длиной больше $\lambda_1 + 2\varepsilon$.

С другой стороны, легко видеть, что любой допускаемый нашим определением поворот – это именно поворот по одному из подслов из начальной максимальной диаграммы W_1 . Действительно, любой поворот, заменяющий S на P^{-1} , должен удовлетворять $L_R(S) > \tau + 2\varepsilon$ (иначе результат не принадлежит $SC(\lambda_0)$). Однако подслова S , состоящие из подслов других соотношений, имеют относительную длину не более 2ε (см. доказательство леммы 6.2). Следовательно, у S есть часть длиной не менее τ , не совпадающая с другими соотношениями, то есть S принадлежит исходной максимальной \mathcal{R} -диаграмме.

Наконец, первое из условий на константы ($1 - \lambda_0 > \tau + 2\varepsilon$) необходимо для того, чтобы каждое новое подслово вновь попадало в диаграмму (иначе оно станет слишком коротким и исчезнет, поскольку рассматриваются только сегменты длины не менее τ).

Комбинируя лемму 6.2 и определение 6.4, получаем:

ЛЕММА 6.3. *В условиях определения 6.4 результат применения последовательности поворотов к подсловам S_1, \dots, S_k максимальной \mathcal{R} -диаграммы W не зависит от порядка их применения.*

Доказательство. Заметим, что утверждение леммы имеет смысл, так как условие $1 - \lambda_0 > \tau + 2\varepsilon$ гарантирует, что все повороты выполняются по подсловам начальной диаграммы (возможно, укороченным или удлинённым на $\leq 2\varepsilon$ предыдущими поворотами). Доказательство ведём по индукции по числу поворотов. Достаточно показать, что новый поворот коммутирует с последним выполненным. Если подслово для нового поворота отстоит хотя бы на ε символов от предыдущего, коммутативность очевидна. В противном случае имеем ситуацию, изображённую на рисунке 7, и коммутативность тоже ясна: применение поворотов 1 и 2 в любом порядке приводит к слову, отмеченному фиолетовой линией. \square

Установив, что результат не зависит от порядка поворотов, а только от набора подслов, по которым они проводятся, и по лемме 6.2, где все подслова максимальной диаграммы расположены последовательно и пересекаются не более чем на ε , можно изобразить каждый класс эквивалентности некоторого λ_1 -канонического слова более симметрично. Типичный пример такого изображения показан на рисунке 8. Здесь каждой ячейке графа соответствует как соотношение из \mathcal{R} , так и конкретное подслово в максимальной \mathcal{R} -диаграмме W (и наоборот – каждому подслову в максимальной диаграмме сопоставляется свой участок на одномерной карте). При этом длина каждого горизонтального сегмента не больше λ_0 , а длина вертикального мостика – не больше ε .



Рис. 8. Однослойная карта класса эквивалентности λ_1 -канонического слова.

Каждое слово из класса эквивалентности W представляется как путь, идущий слева направо по этой диаграмме, каждый раз выбирая верхний или нижний сегмент. Каждый поворот при эквивалентных преобразованиях W теперь изображается как "переключение" с одного альтернативного сегмента на другой, и видно, что повороты коммутируют по разным подсловам. Такое изображение мы будем называть *однослойной картой* класса эквивалентности некоторого λ_1 -канонического слова W . Именно эти карты послужат базой для всех дальнейших рассуждений.

Следующим шагом будет построение на множестве классов эквивалентности в $SC(\lambda_1)$ (то есть на множестве однослойных карт) групповой структуры. Очевидно, что хочется определить обратный элемент как ту же карту, прочитанную в обратном направлении. Однако если умножение двух карт определить простым приписыванием, произведение карты на её обратную не даст тождественной (пустой) карты. Поэтому вводится более аккуратное алгоритмическое определение умножения для двух карт.

Чтобы перемножить карту C на карту D , начнём с поэлементного сравнения карт C^{-1} и D . Сравниваем символы до первой позиции (символа, не входящего в \mathcal{R} -диаграмму, или ячейки карты), где возникает различие. Далее возможны несколько случаев:

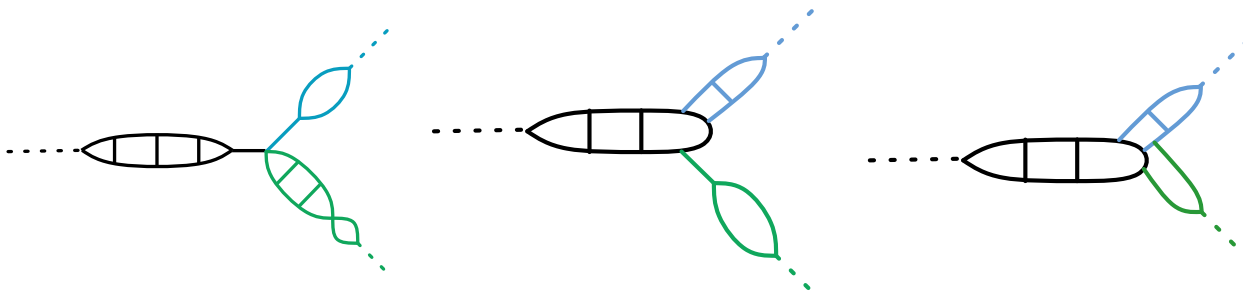


РИС. 9. Возможные случаи расположения карт в первой точке различия.

Общая часть C^{-1} и D показана чёрным; отличающие продолжения – синим и зелёным.

Если реализуется первый вариант (отличие – символ вне \mathcal{R} -диаграммы), произведение карт – просто приписывание синей и зелёной частей. Если реализуется второй вариант (отличие – это ячейка карты, но возможные продолжения являются непересекающимися мостиками до этой ячейки), то произведение строится путём склеивания синей и зелёной частей с вставкой в середину одного или обоих путей, проходящих через центральную ячейку – в зависимости от того, удовлетворяет ли длина хотя бы одного из этих путей условию $\leq \lambda_1$. Наконец, в третьем случае в произведение включается только "короткий" отрезок центральной ячейки, так как его относительная длина не превышает 2ϵ , то есть длина альтернативного пути слишком велика.

Замечательно, что при таком умножении карта, прочитанная в обратном направлении, действительно становится обратным элементом. Проверить ассоциативность такой операции несложно (достаточно заметить, что исчезновение "сливающихся" концов диаграммы не сказывается на центральной ячейке, а значит, "хвосты" можно удалять в любом порядке).

Таким образом, на множестве однослойных карт задана групповая структура. Можно показать, что полученная таким путём группа (обозначим её G_1) изоморфна исходной группе G . Неоспоримое преимущество работы с G_1 вместо G заключается в отсутствии свободы выбора различных представлений одного и того же элемента группы G , так как теперь разные карты соответствуют различным элементам. Следующий (и главный) этап теории – введение так называемой *канонической формы* для каждого элемента G_1 , то есть выделение уникального представительского пути на каждой карте.

1.2. Каноническая и сертифицированная формы. Прежде чем перейти к (довольно нетривиальной) конструкции канонической формы, попробуем привести некоторую мотивацию.

Мысль выбрать канонического представителя для каждой однослойной карты может показаться бесполезной – ведь вся предыдущая часть была посвящена построению классов эквивалентности из исходных элементов G , к которым мы теперь опять хотим привязать конкретные слова. Однако эта идея становится существенно более ценной, если вспомнить

основной замысел работы с группами Бернсайда (наша финальная цель). Мы планируем градуировать множество соотношений так, чтобы внутри каждого ранга выполнялось условие малых сокращений, а соотношения предыдущих рангов оставались "малыми" по сравнению с текущим рангом. В этом случае диаграмма Ван Кампена будет выглядеть примерно так, как на рисунке 10:

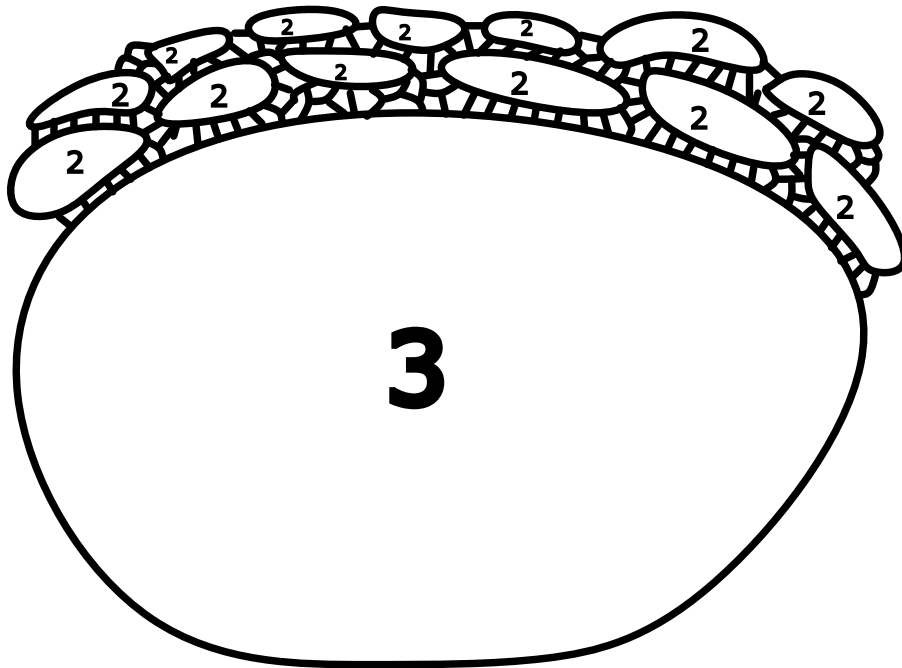


Рис. 10. Трёхслойная диаграмма Ван Кампена

Клетки каждого ранга прилегают друг к другу не «идеально», а с прослойками из клеток более низкого ранга. В такой ситуации, несмотря на удовлетворение условию малых сокращений в высшем ранге, невозможны жёсткие утверждения о структуре всей диаграммы, подобно лемме Грендлингера, так как клетки верхнего ранга не примыкают друг к другу вплотную.

Допустим, однако, что все соотношения второго ранга приведены к каноническому виду относительно первого, и так далее, индуктивно для всех рангов. Тогда границы клеток одного ранга, разделённых лишь тонкой прослойкой из нижних рангов, на самом деле совпадут, ведь слово, записанное на общей границе, приведено к каноническому виду с обеих сторон. Значит, этот путь в одномерной карте выбран одинаково (с обеих сторон). Тогда окажется, что клетки высших рангов на самом деле склеены вплотную во всех местах, где это требуется, и манипулировать такими структурами можно в духе обычных малых сокращений.

Теперь перейдём непосредственно к формальной конструкции. Рассмотрим однослойную карту (см. рисунок 8) λ_1 -канонического слова. Идея заключается в том, чтобы для каждой пары альтернативных горизонтальных сегментов – альтернативных путей – выбрать один из них, а путь, проходящий по выбранным сегментам, считать канонической формой диаграммы. Для выбора действует следующий критерий:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5. Для двух путей w_1 и w_2 на однослойной карте, заключённых между мостами p_1 и p_2 (то есть, $R = p_1 w_1 p_2^{-1} w_2^{-1}$), и при фиксированном наборе образующих x_1, \dots, x_n , предпочтительным считается путь w_1 , если:

- w_1 короче w_2 по количеству символов.
- Если w_1 и w_2 равной длины, то сравниваем пары w_1 и w_2 (или w_2^{-1} и w_1^{-1}) и вычисляем разность их позиций в лексикографическом порядке всех слов той же

длины в алфавите $x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}$, обозначим её как d_1 (или d_2). Если $|d_1| > |d_2|$, выбираем меньшее из слов w_1, w_2 , а если $|d_1| < |d_2|$, то меньшее из слов w_2^{-1}, w_1^{-1} .

- Если w_1 и w_2 совпадают как последовательности символов, повторяем операцию из предыдущего пункта для слов $p_1 w_1, p_1^{-1} w_2$ и $p_2 w_1^{-1}, p_2^{-1} w_2^{-1}$.

Нетрудно видеть, что это определение всегда позволяет выбрать однозначный предпочтительный путь, кроме случая $w_1 = w_2, p_1 = p_2$, то есть для $R = (p_1 w_1)^2$. Поэтому далее будем считать, что никакое соотношение не является точным квадратом слова.

Замечание 6.1. Именно здесь кроется причина, почему результаты формулируются только для групп Бернсайда с нечётными показателями – иначе уже в первом ранге было бы множество соотношений-квадратов, препятствующих однозначному выбору канонического представителя.

Наконец, обратим внимание, что определение преднамеренно усложнено включением не только самих слов, но и их обратных, чтобы гарантировать согласованность взятия канонической формы с операцией обращения в группе G_1 . Действительно, если бы не учитывать лексикографическое сравнение обратных элементов, могла бы возникнуть ситуация, когда при обходе однослойной карты в одну сторону предпочтительнее w_1 , а в обратную – w_2^{-1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6. Канонической формой однослойной карты называется слово, полученное конкатенацией всех предпочтительных подслов (прохождений по карте), соединённых мостиками. Каноническая форма однослойной карты C обозначается как $\text{can}(C)$.

Отметим, что при произвольном выборе представителей в каждом классе эквивалентности изначально не ясно, как соотносятся канонические формы множителей и их произведения. Однако для нашего определения канонической формы ситуация заметно лучше. А именно, верна следующая лемма:

ЛЕММА 6.4. $\text{can}(W_1)\text{can}(W_2)\text{can}(W_2^{-1}W_1^{-1}) = R_1^\vee R_2^\vee R_3^\vee R_4^\vee$, где R_i^\vee – результат сопряжения соотношения R_i каким-то словом.

То есть, в диаграмме с тремя каноническими словами, произведение которых равно 1, содержится не более 4 клеток. Более того, можно показать, что диаграмма такого "треугольника" выглядит в общем виде как на рисунке 11.

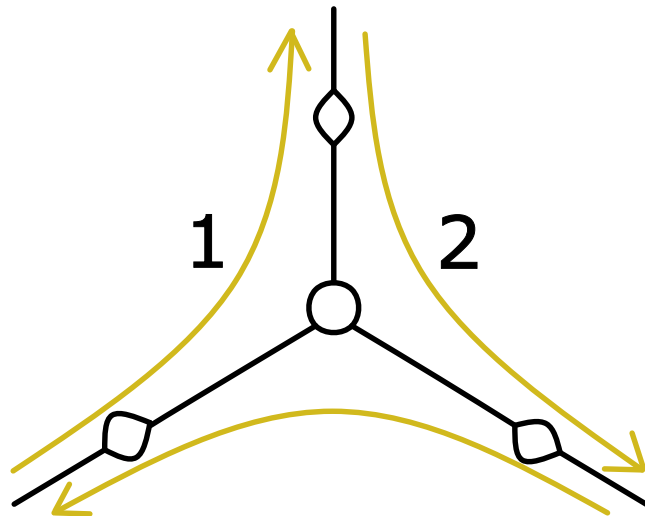


Рис. 11. Общий вид треугольника, образованного тремя каноническими словами

Доказательство. Чтобы это показать, рассмотрим, как может измениться каноническая форма при модификации одной клетки на однослойной карте. Поскольку выбор предпочтительного варианта осуществляется независимо в каждой клетке, каноническая форма может поменяться только в начальной клетке, а также если из нашей карты добавляются или исчезают новые клетки. Единственная причина исчезновения клетки – если одна из её сторон становится слишком длинной (больше λ_1), из-за чего она перестаёт входить в однослойную карту (мы рассматриваем лишь достаточно короткие подслово как альтернативы для преобразований, см. определение 6.4). Но может ли исчезновение клеток повлиять на клетки далеко от места изменения? Очевидно, что при движении по диаграмме от изменённой клетки, если какая-то клетка "выжила" то все последующие тоже не изменяются, так что изменение может распространяться только по цепочке клеток, каждая из которых исчезает. С другой стороны, при исчезновении соседней клетки альтернативные пути удлиняются не более чем на ε (так как вертикальный мостик теперь включён в одну из альтернатив), и, значит, цепочка исчезновений возникает только там, где одна из сторон цепочки клеток имела относительную длину не менее $\lambda_1 - \varepsilon$. Такая ситуация изображена на рисунке 12.

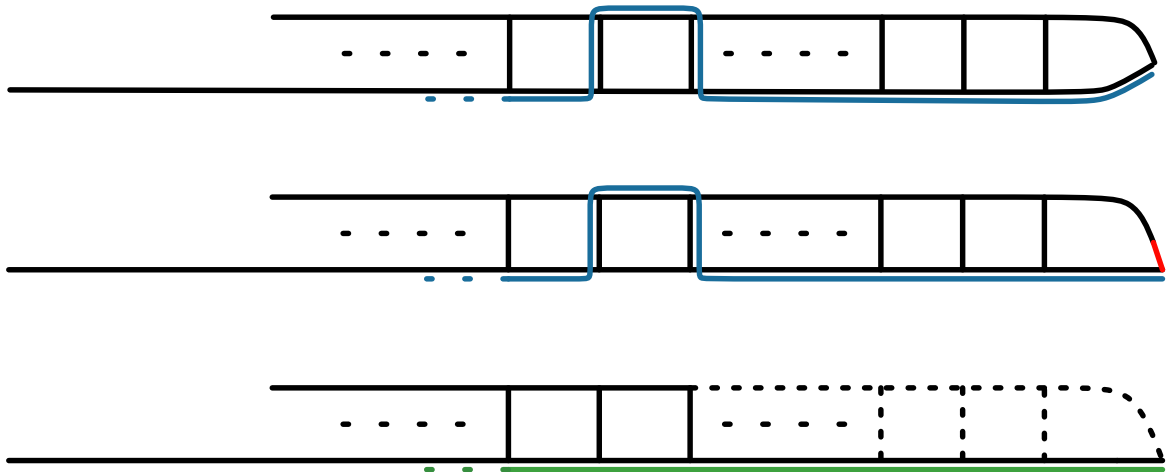


Рис. 12. "Эффект домино": изменение канонической формы вдали от точки модификации слова.

Здесь синий путь – каноническая форма в исходной карте, а правая цепочка клеток имеет длину не менее $\lambda_1 - \varepsilon$ по верхней стороне. Тогда при добавлении на карту красного сегмента эта цепочка клеток "рухнет" исчезая с карты. Поскольку в каждой из этих клеток исчезнувшая сторона имела длину не менее $\lambda_1 - \varepsilon > \frac{1}{2}$, каноническая форма в этой области не изменяется. Более того, единственное место, где каноническая форма может поменяться – первая оставшаяся клетка. Кроме того, изменение может произойти только если относительная длина обеих альтернатив в этой клетке лежит в интервале $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$, поскольку иначе исчезновение соседней клетки не изменило бы предпочтительного пути.

Следовательно, несмотря на то, что небольшая правка слова может изменить каноническую форму на сколь угодно далёком участке карты, эти изменения можно "контролировать": форма меняется единожды, только при наличии цепочки клеток с почти максимальной длиной одной из сторон и только если на конце этой цепочки есть клетка с отношением длин, близким к $\frac{1}{2}$.

Учитывая этот факт, завершение доказательства леммы 6.4 очевидно: действительно, по определению произведения в G_1 выстраивается треугольная конструкция из однослойных карт (см. рисунке 1.1), где для каждой из трёх сторон изменение происходит только в центральной (первой различной) клетке. Значит, канонические формы исходных слов и

их произведений могут различаться только в одной точке на каждом из "лучей" из центральной клетки, что и утверждает лемма. \square

Тем не менее, введение канонической формы нацелено на ещё более точный контроль возможных расхождений. Для этого наложим дополнительное условие на рассматриваемые карты.

Отметим, что лемма 6.2 влечёт последовательное (возможно, с небольшими перекрытиями) расположение всех подслов максимальной \mathcal{R} -диаграммы слова и, значит, их можно упорядочить. Введём две новые константы, обозначаемые λ_2 и λ_3 , с условиями, аналогичными тем, что накладывались на λ_1 :

$$(39) \quad \begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 &> 2\varepsilon \\ \lambda_2 - \lambda_3 &> 2\varepsilon \\ \lambda_3 - \frac{1}{2} &> 2\varepsilon \end{aligned}$$

Наконец, зафиксируем некоторую аperiodическую последовательность l_1, l_2, l_3, \dots из единиц и двоек. Пример конкретной такой последовательности – последовательность Морса-Туэ ([25]), обладающая свойством: ни для какого слова X и символа a не содержит подслова вида $aXaXa$, значит, куба никакого слова там нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7. Горизонтальный сегмент S соотношения R в однослойной карте C называется *надёжным*, если найдётся слово W , эквивалентное слову, заданному картой C (то есть путь по карте C), такое что S входит в максимальную \mathcal{R} -диаграмму W , его относительная длина $L_R(S) \leq \lambda_3$, а для любого n подслова S_l (соотв. S_r) в максимальной \mathcal{R} -диаграмме, встречающиеся при движении влево (соотв. вправо) в диаграмме W , имеют относительную длину $\leq \lambda_{l_n}$. В этом случае W называется *свидетелем* для S .

Определение не слишком интуитивно, поэтому поясним подробнее.

Во-первых, любой предпочтительный горизонтальный сегмент (т.е. принадлежащий $\text{cap}(C)$) оказывается надёжным. Действительно, тривиально, что $\text{cap}(C)$ служит свидетелем для каждого своего сегмента (длина каждого предпочтительного участка не превышает $\frac{1}{2}$, все подслова в \mathcal{R} -диаграмме – длины не больше $\frac{1}{2} + 2\varepsilon$).

Во-вторых, заметим, что требование существования свидетеля очень слабо: практически любой горизонтальный сегмент длиной не более λ_3 имеет каноническую форму карты в качестве свидетеля. Единственная ситуация, когда сегмент является надёжным, но каноническая форма не выступает для него свидетелем – когда имеется последовательность горизонтальных сегментов почти ровно требуемой длины (т.е. длины, почти равной λ_{l_i}). Действительно, если в диаграмме присутствует последовательность горизонтальных сегментов S_0, S_1, S_2, \dots , где относительная длина $L_{R_0}(S_0) \in (\lambda_3 - \varepsilon, \lambda_3)$ и для всех $n > 0$ выполнено $L_{R_n}(S_n) \in (\lambda_{l_n} - \varepsilon, \lambda_{l_n})$, то у нас есть свидетель для S_0 , но мы не можем перейти на альтернативный более короткий путь, поскольку длина каждого горизонтального сегмента строго ограничена и не позволяет добавить вертикальный мостик для выбора альтернативы, которая была бы короче глобально. Однако если подобная ситуация не возникает, можно всегда "переключиться" на каноническую форму:

ЛЕММА 6.5. Пусть в карте C есть клетка R , в которой относительная длина каждого горизонтального сегмента не превосходит λ_3 . Тогда для любого горизонтального сегмента слева от этой клетки существование свидетеля эквивалентно существованию части свидетеля, достигающей R . Аналогично, для любого сегмента справа от R существование свидетеля эквивалентно существованию куска свидетеля, доходящего до R .

Доказательство. Поскольку $\lambda_3 + 2\varepsilon \leq \lambda_1, \lambda_2$, мы можем добавить вертикальные сегменты как влево, так и вправо, что позволяет перейти к началу более короткого горизонтального сегмента в следующей клетке. Далее в качестве продолжения свидетеля берём соответствующий кусок $\text{can}(C)$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8. Карта, в которой каждый сегмент надёжен, называется сертифицированной. Результат оставления в карте C только надёжных сегментов называется результатом сертификации (или сертифицированной формой) карты C и обозначается как $\text{cert}(C)$.

Теперь, введя отдельно каноническую и сертифицированную формы для карт, в дальнейшем мы практически всегда будем интересоваться их композицией: канонической сертифицированной формой, то есть $\text{can}(\text{cert}(C))$.

ЛЕММА 6.6. $\text{can}(\text{cert}(W_1)) \text{can}(\text{cert}(W_2)) \text{can}(\text{cert}(W_2^{-1}W_1^{-1})) = R_1^\vee R_2^\vee R_3^\vee R_4^\vee$, где R_i^\vee – результат сопряжения соотношения R_i каким-то словом.

Доказательство. Эта лемма – прямой аналог предыдущего утверждения, но само по себе оно не очевидно, так как сертификация диаграммы – глобальный процесс, а значит, сертифицированная форма произведения может не совпадать с сертифицированными формами множителей. Однако, используя лемму 6.5, мы понимаем, что различия в сертифицированных формах возникают только на участке между центром треугольника (см. рисунке 11) и точкой различия канонических форм. Действительно, в точке отличия относительная длина любого горизонтального сегмента не превосходит $\frac{1}{2} + \varepsilon < \lambda_3$, а значит, по лемме 6.5 все сегменты, более удалённые от центра, одновременно либо включаются, либо не включаются в сертифицированные формы как множителей, так и произведения (так как выполняя переход по сегменту длины $< \lambda_3$, мы можем продолжить как по $\text{can}(W_1)$, так и по $\text{can}(W_2^{-1}W_1^{-1})$). \square

Кроме того, можно заметить: поскольку теперь все сегменты диаграммы надёжны и их относительная длина не превосходит λ_3 , ситуация, изображённая на рисунке 12, невозможна. Следовательно, *единственная* причина различий канонических форм – различия именно в сертифицированных диаграммах. Однако снова, по лемме 6.5, это накладывает ограничения на длины сегментов между центром треугольника и точкой различия. Напомним, что последовательность (l_n) специально выбрана нами аперидической, что даёт следующий факт:

Замечание 6.2. Если в условиях леммы 6.6 $W_1 = A_1^{n_1}$, $W_2 = A_2^{n_2}$, то точки различия в канонических формах отстоят от центра не более чем на $2 \max(|A_1|, |A_2|)$.

Доказательство. Действительно, мы накладываем аперидические ограничения, причём такие, что запрещают под слова вида $aXaXa$, на длины сегментов между центром треугольника и точкой различия канонических форм, тогда как карты соответствующих слов периодичны. В результате длина участка, на котором соблюдаются оба условия, не может превышать двух периодов. \square

Здесь впервые мы сталкиваемся со спецификой соотношений в группах Бернсайда (периодичность). Поскольку именно этот случай особенно интересен, остановимся подробнее и докажем следующую лемму:

ЛЕММА 6.7. Пусть $n > 4$ и C – однослойная карта. Тогда для карты C^n сертифицированная (а значит, и каноническая) формы имеют периодическую структуру, за исключением, возможно, двух граничных периодов C с каждой стороны.

Доказательство. Если в сертифицированной форме C нет ни одной клетки (т.е. ни одной пары альтернативных путей), утверждение очевидно. Если присутствует хотя бы одна клетка, то длина каждой стороны в ней не более λ_3 . Тогда, по лемме 6.5, свидетелю

достаточно пройти до первой такой клетки. А так как эта клетка присутствует в каждой копии карты C , то существование свидетеля для всех внутренних периодов одинаково (т.е. достаточно пройти до ближайшей копии клетки справа и слева). \square

На этом этапе мы переходим от построения нужных конструкций для анализа групп Бернсайда (и групп со ступенчатой структурой малых сокращений) к более прикладным задачам. В следующем разделе мы рассмотрим градуированные диаграммы Ван Кампена и применим аппарат двух предыдущих разделов для их исследования.

1.3. Ранжирование соотношений. Начиная с этого раздела, мы, наконец, приступаем к топологии диаграмм Ван Кампена, возникающих в группах со ступенчатой структурой малых сокращений. Здесь и далее обычно будем требовать $\varepsilon \leq \frac{1}{10}$, то есть каждая клетка окружена как минимум десятью клетками того же ранга.

Вся дальнейшая логика этого раздела основана на разнесении клеток диаграммы по расстоянию от некоторой фиксированной центральной клетки.

Более формально, зафиксируем клетку R_0 и определим расстояние от каждой клетки R диаграммы до R_0 как минимальное расстояние между соответствующими вершинами на двойственном графе. На рисунке 13 слева показан типичный (топологический) вид диаграммы после разнесения клеток по расстоянию от центра.

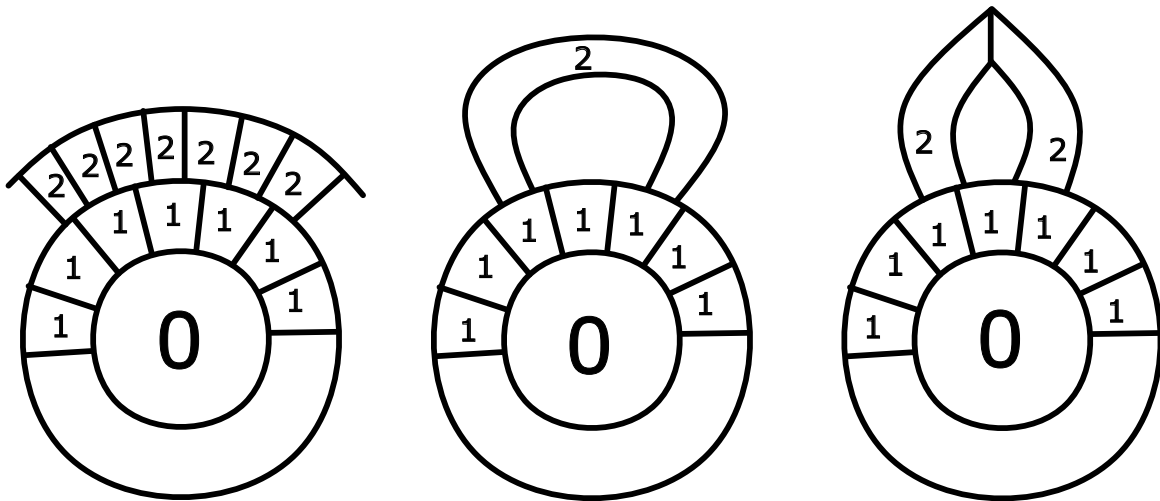


РИС. 13. Слева: топология диаграммы Ван Кампена. Справа: примеры невозможных топологий.

Классическими доводами из теории малых сокращений можно доказать, что если все клетки диаграммы, кроме, возможно, центральной, удовлетворяют условию малых сокращений с постоянной $\varepsilon < \frac{1}{6}$, то ни одна клетка не может вести себя так, как изображено в центре или справа на рисунке 13 (иначе у клеток во внутренней области окажется слишком мало соседей).

ЛЕММА 6.8. *Ни одна клетка из кольца на расстоянии $n > 1$ не может соприкасаться с тремя или более клетками на расстоянии $n - 1$. Также каждая клетка на расстоянии n имеет как минимум 3 соседа на расстоянии $n + 1$.*

Доказательство. Для первого утверждения: иначе у какой-то из этих клеток был бы один сосед на расстоянии n , не более двух на расстоянии $n - 1$ и не более двух на $n - 2$ (рассматриваем минимальный контрпример). Для второго утверждения: иначе максимум два соседа на предыдущем уровне, максимум два на этом уровне и максимум два на следующем уровне. Противоречие. \square

Из леммы 6.8 немедленно следует, что число клеток на расстоянии n от данной растёт экспоненциально по n .

Однако нас интересует топология диаграмм не только в группах с условием малых сокращений, но и в группах, где условие малых сокращений выполняется отдельно для каждого ранга соотношений. В настоящей работе мы ограничимся случаем двух рангов соотношений: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \sqcup \mathcal{R}_2$. Тем не менее, обобщение на произвольное число рангов достигается тривиальным повторением всех рассуждений, приведённых здесь. Мы воспользуемся результатами предыдущих разделов и приведём все слова из \mathcal{R}_2 к каноническому виду по соотношениям из \mathcal{R}_1 . Теперь наша цель – сформулировать необходимые оценки для, грубо говоря, числа соседей у каждой клетки второго ранга в диаграмме Ван Кампена над G .

Оформим это формально. Для диаграммы Ван Кампена, состоящей из соотношений двух рангов, введём понятие *производной диаграммы* следующим образом. Введём некоторую нумерацию клеток второго ранга, участвующих в диаграмме, обозначим их R_1, R_2, \dots, R_k . Для каждой клетки первого ранга определим расстояния d_1, \dots, d_n от неё до каждой из клеток второго ранга. *Областью* клетки R_i будем называть поддиаграмму, включающую саму R_i , все клетки, для которых $\forall j \neq i : d_i < d_j$, а также все клетки, для которых $\forall j < i : d_i < d_j$ и $\forall j > i : d_i \leq d_j$. Интуитивно областью клетки R_i будем называть часть диаграммы, для которой R_i – ближайшая клетка второго ранга, а в случае равных расстояний порядок разрешается с помощью введённой нумерации. Диаграмма Ван Кампена вместе с упорядочением R_i , числами d_i и разбиением на области называется *производной диаграммой*.

Поскольку слова из \mathcal{R}_2 переписаны в каноническом виде, клетки второго ранга, грубо говоря, не могут содержать слишком длинные части соотношений из \mathcal{R}_1 . Следовательно, клетки первого ранга не могут "сильно" граничить с клеткой второго ранга. Точнее, нам достаточно, чтобы относительная длина общей границы между клеткой 1-го и 2-го ранга не превышала $\lambda_1 < 1 - 4\varepsilon$, что означает, что у каждой такой клетки первого ранга не менее 5 соседей первого ранга. Как указано выше, далее также предполагается $\varepsilon < \frac{1}{9}$, то есть любая клетка первого ранга, не граничащая с клеткой второго ранга, имеет не менее 9 соседей.

Учитывая это, рассуждения полностью повторяют случай диаграмм только из соотношений одного ранга: топология каждой отдельной области не содержит дыр (см. рисунке 13). Формально это означает, что подмножество области, образованное клетками с расстоянием $d \leq n$, всегда просто связно при любом n .

Нас интересует анализ границы между двумя областями. Прежде чем перейти к рассмотрению "глобальной картины докажем простую, но важную для последующего анализа лемму. Отметим, что регулярность структуры расположения клеток на фиксированном расстоянии от центра области позволяет зафиксировать некоторое направление обхода и – соответственно – говорить о предыдущей и следующей областях в этом порядке на каждом слое.

Теперь рассмотрим клетку R первого ранга на расстоянии n . Найдём клетку R_f на расстоянии 1, получая её так: начиная с R , на каждом шаге выбираем в порядке обхода первую из соседних по текущей области клетку, находящуюся на расстоянии на единицу меньше. Аналогично определим клетку R_l , выбирая на каждом шаге последнюю по порядку обхода клетку среди соседей на меньшее расстояние.

Верна следующая лемма.

ЛЕММА 6.9. *Клетки R_f и R_l – смежные.*

Доказательство. Рассмотрим процесс итеративного движения по слоям к центру области. На первом шаге возникают две смежные клетки (следствие первого утверждения леммы 6.8). Если на следующем шаге были бы несмежные клетки, то в синей области на рисунке 14 у клетки на следующем уровне оказалось бы не более двух соседей, противоречая второму утверждению леммы 6.8. \square

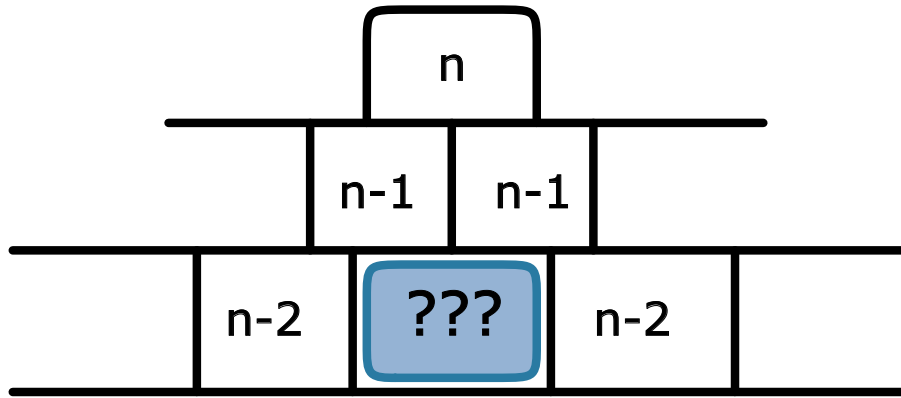


Рис. 14. Невозможность расхождения двух крайних путей через смежные клетки.

Теперь рассмотрим границу между двумя областями. Общий вид показан слева на рисунке 15. Для начала рассмотрим случай, когда клетки второго ранга для этих областей находятся далеко друг от друга, то есть граница между областями не совпадает с границей клетки второго ранга.

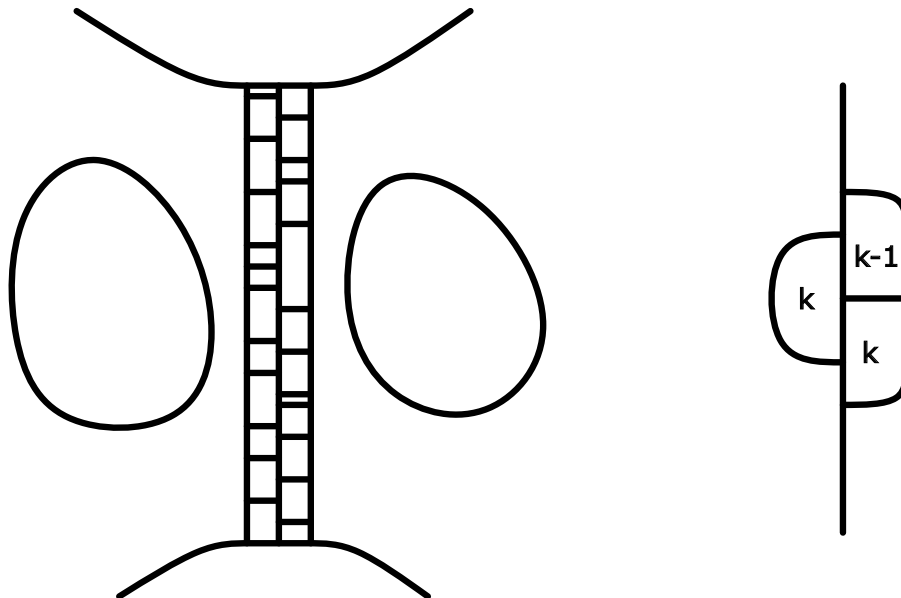


Рис. 15. Слева – общий вид границы между двумя областями, справа – возможные расстояния для клетки по другую сторону границы.

Без ограничения общности предположим, что у клетки слева от границы меньший номер области. Тогда для клетки на расстоянии k от центра слева от границы справа могут оказаться клетки на расстоянии k или $k - 1$. Ключевой факт, дающий нам оценки числа соседей этой области – следующая лемма:

ЛЕММА 6.10. *Если граница между областями не проходит по границе клетки второго ранга, то в последовательности расстояний до центра при движении вдоль границы нет (нестрогих) локальных максимумов.*

Доказательство. Пусть в левой области возник локальный максимум (вторая область рассматривается аналогично). Пусть максимальное значение расстояния на границе – k . Соседние клетки в той же области при этом имеют расстояния $k - 1$ или k (так как $k + 1$ невозможно по локальной максимальнойности). Тогда рассматриваемая клетка имеет

не более 4 соседей в своей области, значит, не менее 5 соседей имеет в правой области (рисунке 16).

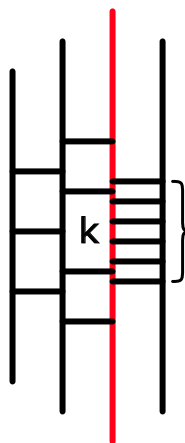


Рис. 16. Локальный максимум расстояния на границе.

Каждая из этих клеток имеет расстояние k или $k - 1$ до центра, но по элементарному рассуждению: в любой последовательности из 5 чисел k и $k - 1$ обязательно найдётся локальный максимум. Повторяя рассуждение для этого нового максимума, получаем, что он должен иметь не менее 5 соседей слева, что невозможно по построению (по определению, только один). Противоречие. \square

Значит, при обходе границы между областями расстояние до центра сперва убывает, затем возрастает, и между ними не более двух повторяющихся значений (иначе возникает локальный максимум). Значит, для крайних клеток на границе одна из двух последовательностей клеток из леммы 6.9 идёт по границе (см. рисунке 17) вплоть до минимального значения расстояния на границе. А это позволяет доказать следующий важный факт:

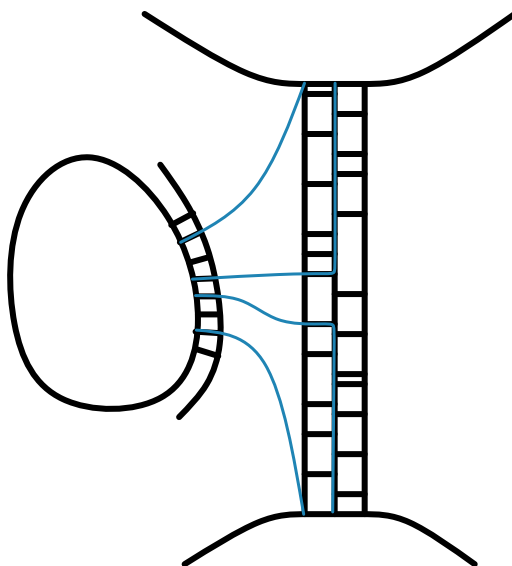


Рис. 17. Последовательности, получаемые путём выбора крайних (правого/левого) соседей предыдущего слоя, начиная с крайних клеток на границе.

ЛЕММА 6.11. *Если граница между областями не совпадает с границей клетки второго ранга, то любой кратчайший путь из клетки на этой границе до клетки на расстоянии 1 от центра области попадёт в одну из не более чем 5 подряд идущих клеток на расстоянии 1 от центра.*

Доказательство. Обозначим крайние клетки на границе как T и B . Очевидно, что клетки, в которые заходят путь по самым левым и самым правым соседям из T (обозначения T_f, T_l по лемме 6.9), являются концами всех кратчайших путей к центру из соответствующего участка границы. Аналогично для B . Ранее мы показали, что между T_f, T_l и B_f, B_l может быть максимум одна клетка – то есть путей не более пяти. \square

Кроме того, поскольку каждая клетка на расстоянии 1 от центра может быть концом кратчайшего пути с границы области, лемма 6.11 даёт оценку на число границ, не проходящих по клеткам второго ранга для данной области (так как каждая занимает не более пяти клеток слоя на расстоянии 1 от центра).

Остаётся рассмотреть случай, когда граница между областями проходит непосредственно по границе клетки второго ранга. В этом случае мы имеем дело с так называемой областью смежности:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.9. Пусть R_1 и R_2 – клетки второго ранга в диаграмме Ван Кампена. Часть диаграммы, состоящая из клеток первого ранга, для которых расстояние до R_1 и R_2 одновременно равно 1, а также общие отрезки границ R_1 и R_2 , называется *диаграммой смежности* клеток R_1 и R_2 .

Именно в анализе смежных клеток второго ранга начинают работать все предшествующие построения. Поскольку соотношения второго ранга теперь записаны в каноническом виде по отношению к соотношениям первого ранга, справедливо следующее утверждение:

ЛЕММА 6.12. Пусть рассматривается область смежности между клетками R_1 и R_2 . Тогда за исключением не более чем двух клеток с каждой стороны области смежности, вся эта область состоит исключительно из непосредственной границы между R_1 и R_2 .

Доказательство. Очевидно, что область смежности для R_1 и R_2 – это в точности однослойная карта. Поскольку каждое из соотношений R_i записано в каноническом виде, длина каждого альтернативного участка не превышает $\frac{1}{2} + 2\varepsilon$, так как в канонической форме берётся более короткий из альтернативных участков. Согласно лемме 6.5, в этом случае сертифицированные формы совпадают везде, кроме, возможно, двух участков с каждой стороны карты (доказательство аналогично лемме 6.7). Тогда канонические формы совпадают везде, кроме, возможно, трёх крайних участков с каждой стороны (поскольку каноническая форма зависит только от геометрии данной клетки: две крайние клетки могут отличаться в сертифицированной форме, ещё одна клетка одновременно присутствует в обеих, но длины её сторон могут отличаться на ε из-за различий в предыдущих). \square

Таким образом, получаем следующий результат:

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть внутри ранга 1 соотношения удовлетворяют условию малых сокращений с постоянной ε_1 , внутри ранга 2 – с постоянной ε_2 , а длина общей части клетки первого и второго ранга относительно клетки второго ранга не превосходит ε_3 . Тогда для любой диаграммы Ван Кампена над $G = \langle A | \mathcal{R}_1 \sqcup \mathcal{R}_2 \rangle$ каждая область имеет по меньшей мере $(\varepsilon_2 + 10\varepsilon_3)^{-1}$ соседей.

Доказательство. Из лемм 6.11 и 6.12 следует, что если граница между областями не содержит области смежности, то ей соответствует не более 5 клеток первого ранга на слое расстояния 1 от центра. Если есть область смежности, то ей соответствует не более 2 клеток первого ранга с каждой стороны вне области смежности, плюс не более 3 клеток первого ранга с каждой стороны внутри области смежности, плюс относительная мера самой непосредственной общей границы между клетками второго ранга, что и даёт требуемую оценку. \square

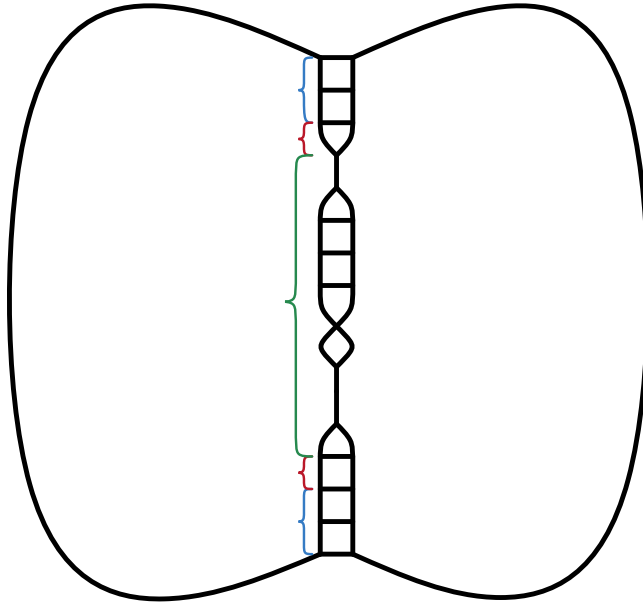


Рис. 18. Граница между двумя клетками второго ранга. Возможные области отличия в сертифицированных формах выделены синим; дополнительные области отличия в канонических формах – красным; области, где границы клеток второго ранга обязательно совпадают – зелёным.

2. Немедленные результаты

Важным результатом являются строгое и подробное письменное изложение построенной теории Рипса. Хотя сами эти объяснения не являются ранее неизвестными научными достижениями, подготовка этого текста потребовала прояснения и формализации доказательств ряда фактов, открытых Э. Рипсом, а также организации связного письменного изложения этой теории, начиная с основ и заканчивая анализом конкретных групп Бернсайда.

Теперь перейдём к первым результатам.

2.1. Градуированная структура системы соотношений в $B(m, n)$. Как отмечалось ранее, соотношения в группах Бернсайда можно разнести по рангам: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \sqcup \mathcal{R}_2 \sqcup \mathcal{R}_3 \sqcup \dots$ следующим образом:

- Если $R_1 = sr_1 \in \mathcal{R}_k$, $R_2 = sr_2 \in \mathcal{R}_k$ – два различных (то есть не циклические сдвиги и не обратные) соотношения ранга k , то $|s| < \varepsilon_k |R_1|$, $|s| < \varepsilon_k |R_2|$ для некоторого $\varepsilon_k < 1$ (условие малых сокращений для каждого ранга).
- Если $R_1 = sr_1 \in \mathcal{R}_k$, $R_2 = sr_2 \in \mathcal{R}_l$, $k < l$ – соотношения разных рангов, то $|s| < \varepsilon'_k |R_2|$ для некоторого $\varepsilon'_k < 1$ (условие малости предыдущих рангов по отношению к следующему).

Сначала неочевидно, что такое разбиение всегда возможно; это следует из следующей леммы:

ЛЕММА 6.13. Пусть $w_1 = p_1^n$ и $w_2 = p_2^n$ – соотношения в группе, при этом слова p_1, p_2 не периодичны и не являются ни циклическими сдвигами, ни обратными друг другу. Тогда длина любого общего участка этих соотношений меньше $|p_1| + |p_2|$.

Доказательство. В случае $|p_1| = |p_2|$ утверждение очевидно: наличие общего участка длины хотя бы $|p_1|$ означает, что $w_1 = w_2$. Без ограничения общности, пусть $|p_1| > |p_2|$. Пусть s – общий участок w_1 и w_2 длины $|s| \geq |p_1| + |p_2|$. Пусть q_1 (q_2) – первые $|p_1|$ ($|p_2|$) символов s . В этом случае w_i становится периодичным с периодом q_i . Если $|p_1| = k|p_2|$, то

$q_1 = q_2^k$, что противоречит неперiodичности p_i . Значит, $|p_1| = k|p_2| + r, 0 < r < |p_2|$. Тогда подслово $s_{|p_1|+1} \dots s_{|p_1|+|p_2|}$ тоже равно q_2 , то есть w_2 содержит два одинаковых периода q_2 сдвинутые на $0 < r < |p_2|$. Это значит, что w_2 периодично с периодом длины $(|p_2|, r)$, что снова противоречит неперiodичности p_2 .

Следовательно, степени различных неперiodических слов пересекаются не более чем на сумму их длин. Это позволяет разнести соотношения по рангам. Введём последовательность чисел $l_0 = 0, l_1, l_2, l_3, \dots$, и положим

$$(40) \quad \mathcal{R}_k = \left\{ w^n \mid l_{k-1} < |w| \leq l_k, w - \text{неперiodическое слово} \right\}$$

При определённых условиях на l_k , которые мы выведем ниже, эта градация будет удовлетворять необходимым свойствам.

Заметим, что Э. Рипс, как и большинство авторов предыдущих работ, не исследует детально ограничения на последовательность l_k , поскольку в анализе всей совокупности соотношений \mathcal{R} результат не зависит от конкретного разбиения по рангам. Соответственно, разные (корректные) разбиения эквивалентны. Однако в рамках нашего плана по изучению финитных приближений групп Бернсайда (которые включают лишь конечное число соотношений), нам важен конкретный и содержательный выбор градации.

Как указывалось выше, в данной работе нас прежде всего интересует анализ первого нетривиального случая двух рангов: $\mathcal{R}_1 \sqcup \mathcal{R}_2$.

2.2. Уточнение оценок для случая $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \sqcup \mathcal{R}_2$. Хотя построенная Э. Рипсом теория позволяет дать точные оценки для показателя, при котором группа Бернсайда становится бесконечной, сами вычисления довольно трудоёмки из-за граничных эффектов, возникающих при переходе с ранга на ранг (см. рисунке 19).

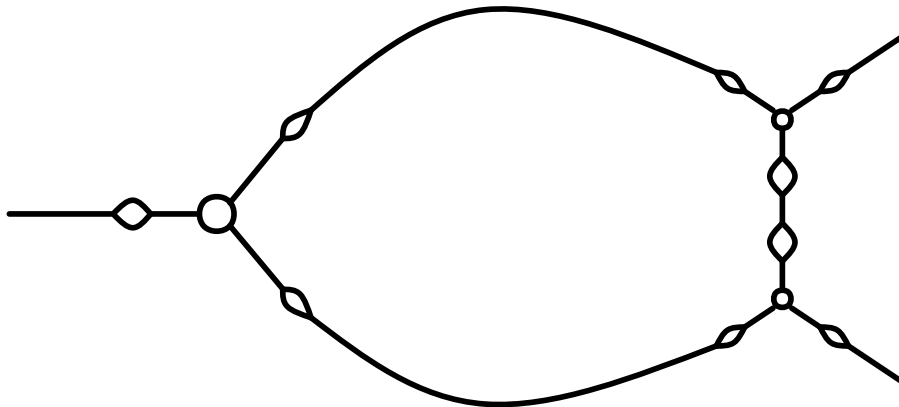


Рис. 19. Граничные эффекты для одной клетки однослойной карты высшего ранга.

Пример такого эффекта мы уже видели в теореме 6.2, где константа малых сокращений в редуцированной диаграмме является нетривиальной комбинацией констант малых сокращений первого и второго ранга. Несмотря на то, что точный анализ необходимых оценок показателя сложен, при достаточно большом показателе константы малых сокращений в редуцированных диаграммах всех рангов сверху ограничены, поскольку размеры соотношений увеличиваются экспоненциально с ростом ранга. Поэтому Рипс в своих рассуждениях оперирует «достаточно большим» нечётным показателем (например, больше 2^{30}), чтобы упростить доказательства при индуктивном переходе по рангам. Разумеется, такие ограничения неприемлемы при любом (ручном или компьютерном) прямом анализе.

К счастью, при конечном числе рангов эти ограничения могут быть значительно ослаблены, так как форму и размер граничных эффектов можно вручную контролировать. В этом разделе даны уточнённые оценки для случая первых двух рангов. В терминологии предыдущего раздела: пусть n -ые степени непериодических слов длины не более l составляют первый ранг, а степени слов длины от $l + 1$ до L – второй ранг. Докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $G = \langle A | \mathcal{R}_1 \sqcup \mathcal{R}_2 \rangle$ в указанной выше терминологии, где $|A| \geq 2$. Тогда, если

$$(41) \quad \begin{aligned} n &> 120, \quad n \text{ нечётно} \\ l &< \frac{n - 24}{24} \\ L &< \frac{n(n - 114)}{144} \end{aligned}$$

группа G бесконечна.

Доказательство. Для доказательства теоремы последовательно учитываем все необходимые требования, постепенно получая всё более сильные ограничения на n .

При построении теории в разделе 1 рассматривалась произвольная константа ε , предполагая выполнение условия малых сокращений в первом ранге для неё. Следует отметить, что не каждое значение ε подходит. Для существования констант $\tau, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ необходимо и достаточно, чтобы

$$(1 - \lambda_0) + (\lambda_0 - \lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_3) + (\lambda_3 - \frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$$

откуда, вспоминая, что $\tau > 2\varepsilon$, получаем

$$(4 + 2 + 2 + 2 + 2)\varepsilon < \frac{1}{2}$$

то есть $\varepsilon < \frac{1}{24}$. Теперь для выполнения условия $C'(\varepsilon)$ в первом ранге необходимо, чтобы

$$\forall a, b \leq l : a + b < \min(a, b)n\varepsilon$$

(условие малости общей части для слов с периодами длины a и b). Рассматривая случай $a = l, b = l$, получаем

$$n > \varepsilon \frac{2l}{l}$$

что даёт $n > 48$ (напомним, что n нечётно, см. замечание 6.1). С другой стороны, ясно, что самое строгое ограничение на l получается при рассмотрении случая $a = 1, b = l$:

$$l < 1 + n\varepsilon$$

Таким образом, хотя мы можем выбрать l , удовлетворяющий условиям для любого нечётного $n > 48$, при уменьшении n число слов, которые можно поместить в первый ранг так, чтобы условие малых сокращений $C'(\varepsilon)$ выполнялось, быстро уменьшается. В предельном случае, когда $n = 49$, в первый ранг могут попасть только n -ые степени слов длины 1, 2 и 3.

Теперь рассмотрим ограничения, накладываемые на второй ранг. Напомним, что нашей целью является применение аналога леммы Гриндлингера (теоремы 6.1) к производной диаграмме Ван Кампена. Для этого требуется, чтобы относительная мера границы между двумя областями на произвольной карте была меньше $\frac{1}{6}$.

Используя лемму 6.13, заключаем, что длина общей части между клеткой первого ранга и клеткой второго ранга относительно клетки второго ранга не превосходит

$$\frac{(l + 1) + l}{n(l + 1)} < \frac{2}{n}$$

Теперь, используя основной результат из раздела 1, теорему 6.2, заключаем: чтобы производная карта удовлетворяла условию $C'(\frac{1}{6})$, необходимо, чтобы

$$\varepsilon_2 + 10 \cdot \frac{2}{n} < \frac{1}{6}$$

где ε_2 – константа малых сокращений внутри второго ранга. Отсюда получаем ограничение на ε_2 :

$$\varepsilon_2 < \frac{n - 120}{6n}$$

откуда явно видно, что $n > 120$. Финальное требование к L – условие малых сокращений с константой ε_2 внутри второго ранга. Как и в первом ранге, необходимо

$$\forall a, b \in [l + 1, L] : a + b < \min(a, b)n\varepsilon_2$$

где самое строгое ограничение достигается при $a = l + 1, b = L$:

$$\frac{L + l + 1}{l + 1} < n\varepsilon_2 < n \cdot \frac{n - 120}{6n} = \frac{n - 120}{6}$$

переносим слагаемые и вспоминаем, что $l + 1 < n\varepsilon$, получаем:

$$L < (l + 1) \cdot \left(\frac{n - 120}{6} - 1\right) < (l + 1) \cdot \frac{n - 114}{6} < n\varepsilon \cdot \frac{n - 114}{6} < \frac{n(n - 114)}{144}$$

Итак, финальные ограничения выглядят следующим образом:

$$(42) \quad \begin{aligned} n &> 120, \quad n \text{ нечётно} \\ l &< \frac{n - 24}{24} \\ L &< \frac{n(n - 114)}{144} \end{aligned}$$

При этих условиях, согласно теореме 6.2, производная диаграмма Ван-Кампена удовлетворяет условию $C'(\frac{1}{6})$, и, следовательно, по лемме Гриндлингера (лемма 6.1) некоторая клетка некоторого ранга формирует участок границы относительной длины, превышающий $\frac{1}{2}$.

Однако, очевидно, что благодаря специфике соотношений в группах Бернсайда легко построить сколь угодно длинное слово W , не содержащее подслов вида S^m при $m > \frac{n}{2}$, – достаточно взять последовательность без длинных периодических участков. Пример такой последовательности – последовательность Морса-Туэ [25], в которой даже кубы отсутствуют как подслова. Такая последовательность не может быть границей диаграммы Ван-Кампена, для которой она была бы границей, и, следовательно, не равна единице в группе G .

Итак, при этих условиях группа, порождённая $m > 2$ генераторами и соотношениями $\mathcal{R}_1 \sqcup \mathcal{R}_2$, бесконечна. \square

Эта теорема демонстрирует, что рассматривать только первые два ранга соотношений имеет смысл лишь для достаточно больших (нечётных) показателей ($n < 120$).

3. План дальнейших исследований

Итак, сделан первый шаг в исследовании финитных приближений групп $B(m, n)$ на основе построений Э. Рипса. Основным результатом этой главы является формализация и автономное изложение теории канонических форм, а также прямое и независимое использование этой теории для уточнения некоторых оценок по приближениям групп Бернсайда с конечным числом соотношений. Дальнейшее исследование намечено по трём направлениям:

- Обобщение методов, позволивших получить оценки для двухранговой системы соотношений, на произвольное конечное число рангов и исследование граничных эффектов, возникающих при увеличении числа рангов с целью потенциального снижения оценок.
- Использование компьютерной переборки для изучения приближений $B(m, n)$ для малых показателей (например, исследование конечности $B(2, n)$ для нечётных $n < 120$).
- Расширение рамок итеративной теории малых сокращений, разработанной Э. Рипсом, на другие алгебраические структуры (кольца, поля).

Первое направление исследований является наиболее доступным и прямолинейным вариантом расширения и обобщения данной работы. Отметим, что несмотря на то, что для достаточно больших показателей индуктивный переход по рангам осуществляется почти автоматически, сложность получения точных оценок и ручного анализа процесса быстро возрастает с увеличением числа рангов в рассмотрении. Тем не менее, кажется возможным получить оценки, сочетающие достаточную точность и позволяющие провести индуктивное доказательство для обобщения на произвольное конечное число рангов.

В то же время компьютерный анализ (второе направление) может привести к улучшению понимания структуры $B(m, n)$ для малых показателей. Наконец, третье направление, пожалуй, наиболее амбициозно, поскольку получение аналога теории малых сокращений для других алгебраических объектов – потенциально важная и по большей части открытая проблема современной математики.

Смежные идеи и перспективы

В этой главе мы обсудим несколько результатов, идейно связанных с построениями в конечно определенных полугруппах.

1. Коллектив автоматов в конечно-порождённых группах

Есть довольно большое число вариаций задачи об обхождении автоматом лабиринта, но в целом она выглядит так: коллектив конечных автоматов двигается по рёбрам некоторого (возможно бесконечного) графа, необходимо выяснить смогут ли автоматы посетить все вершины графа.

Простейшим примером такой задачи, является обход \mathbb{Z} . Конечный автомат, двигающийся по решётке \mathbb{Z} по некоторым внутренним правилам, не сможет обойти эту прямую, т.к. в какой-то момент заикнется. Однако можно рассмотреть коллектив из одного полноценного конечного автомата и двух автоматов-камней, которые не имеют внутреннего состояния и могут передвигаться только совместно с главным автоматом. Легко показать, что подобная система может обойти \mathbb{Z} (главный автомат бежит между камнями и постепенно раздвигает их) [99]. В случае решёток \mathbb{Z}^k , $k > 1$ для обхода достаточно коллектива из автомата и трёх камней, причём с меньшим количеством камней обойти не получится. Если из плоской решётки \mathbb{Z}^2 разрешить выкидывать некоторые вершины, то окажется, что автомата и трёх камней не достаточно для обхода [97, 100] таких лабиринтов, при этом пяти камней хватит [98] (4 - открытый вопрос).

Возникает закономерный вопрос, существуют ли лабиринты, которые не обходятся подобными системами. Ответ на этот вопрос положительный. Например, можно построить бесконечную лабиринт-ловушку на решётке \mathbb{Z}^3 для любой системы автоматов [101]. Но построение таких лабиринтов обычно довольно громоздко. В работе мы предлагаем другой подход для построения подобных ловушек.

В качестве лабиринтов можно рассматривать графы Кэли конечно-порождённых групп. Такой подход даёт довольно интересные результаты. Оказывается, графы Кэли бесконечных свободных бёрнсайдовых групп, существование которых доказано Новиковым и Адаёном [37], нельзя обойти никакой системой конечных автоматов. Проблемы Бернсайдовского типа имеют большое значение в современной алгебре, поэтому кажется интересным, что такие серьёзные результаты находят применение в довольно удалённых от алгебры областях. В работе будет показано, что граф Кэли конечно-порождённой группы нельзя обойти коллективом конечных автоматов тогда и только тогда, когда она бесконечна и каждый ее элемент периодичен.

1.1. Определения. В этой секции мы введём формальные определения, которые нам понадобятся. Во-первых, мы определим понятие лабиринта. В нашем случае лабиринтом будет граф Кэли некоторой конечно-порождённой группы. Отметим, что возможны и другие определения лабиринта. Во-вторых, определим коллектив конечных автоматов и поведение коллектива в лабиринте. Также введём определение лабиринта-ловушки.

Будем пользоваться основными понятиями и обозначениями теории из автоматов и графов, принятыми здесь [102, 103, 105].

Пусть G группа, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ – множество образующих группы G , $S^{-1} = \{s_1^{-1}, s_2^{-1}, \dots, s_n^{-1}\}$. Граф Кэли группы G на образующих S будем обозначать $\Gamma = \Gamma(G, S)$.

Для простоты будем считать, что G - это вершины графа, также будет использовать групповые операции над вершинами, если это потребуется. За $E(\Gamma)$ обозначим множество рёбер графа. Γ - будет лабиринтом в нашей задаче.

Под конечным автоматом \mathfrak{A} будем понимать пятёрку (A, Q, B, ϕ, ψ) , где A, B, Q - конечные множества (алфавиты): входной, выходной и алфавит состояний. $\phi : Q \times A \rightarrow Q$, $\psi : Q \times A \rightarrow B$ - функции переходов и выходов. Если начальное состояние $q_0 \in Q$ фиксировано, то такой автомат $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \phi, \psi, q_0)$ будем называть инициальным. Далее, если факт инициальности будет важен для нас, тогда будем обозначать автомат нижним индексом. Часто вместо конечного автомата будем говорить просто автомат.

Пусть задана группа G с множеством образующих S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Набор $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m)$ называется коллективом (G, S) -допустимых автоматов, где $\mathfrak{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \phi_i, \psi_i)$, для $i = 1, \dots, m$, некоторые автоматы, такие что:

- $A_i = \{a \in \prod_{j=1}^m (\theta \cup Q_j) \mid \text{Pr}_i(a) = \theta\}$, где $\theta \notin \bigcup_{i=1}^m Q_i$ - некоторый выделенный элемент
- $B_i = S \cup S^{-1} \cup \{e\}$

Если у всех m автоматов заданы начальные состояния $\vec{q}_0 = (q_0^1, \dots, q_0^m)$, то коллектив будем называть инициальным и обозначать $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$

Пусть $\Gamma(G, S)$ - граф Кэли. $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$, $v_i \in G$ - его набор вершин; $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$, где $q_i \in Q_i$ - некоторое состояние автомата \mathfrak{A}_i . Тогда для любого $i = 1, \dots, m$ определим функции:

$$a_i(\vec{q}, \vec{v}) = (q'_{i1}, q'_{i2}, \dots, q'_{im})$$

где для $1 \leq j \leq m$, $q'_{ij} = q_j$, если $v_i = v_j$ и $i \neq j$, иначе $q'_{ij} = \theta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Поведением коллектива (G, S) -допустимых автоматов $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m)$ с начальными состояниями $\vec{q}_0 = (q_0^1, \dots, q_0^m)$, $q_i \in Q_i$ в графе Кэли $\Gamma(G, S)$ с набором начальных вершин $\vec{v}_0 = (v_0^1, \dots, v_0^m)$, назовем последовательность $\pi(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, \Gamma_{\vec{v}_0}) = (\vec{q}_0, \vec{v}_0), (\vec{q}_1, \vec{v}_1), \dots$, где $\vec{q}_t = (q_t^1, \dots, q_t^m)$, $\vec{v}_t = (v_t^1, \dots, v_t^m)$, такую, что

- $q_t^i \in Q_i$, $v_t^i \in G$, $(v_t^i, v_{t+1}^i) \in E(\Gamma)$ или $v_t^i = v_{t+1}^i$
- $\phi_i(q_t^i, a_i(\vec{v}_t, \vec{q}_t)) = q_{t+1}^i$
- $\psi_i(q_t^i, a_i(\vec{v}_t, \vec{q}_t)) = g$, где $v_t^i g = v_{t+1}^i$, $g \in S \cup S^{-1} \cup e$

То есть, у нас есть коллектив автоматов, который перемещается по лабиринту. Они могут взаимодействовать друг с другом, когда находятся в одной вершине. Формально - следующее состояние и направление хода одного автомата, зависит от состояний автоматов, которые находятся с ним в одной вершине.

Положим $\pi_t(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, \Gamma_{\vec{v}_0}) = (\vec{q}_t, \vec{v}_t)$.

Пусть,

$$\text{Int}_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, \Gamma_{\vec{v}_0}) = \bigcup_{t=0}^{\infty} \{v_t^i\}, \forall i = 1, \dots, m$$

$$\text{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, \Gamma_{\vec{v}_0}) = \bigcup_{t=1}^m \text{Int}_t(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, \Gamma_{\vec{v}_0})$$

$$\text{Fr}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, \Gamma_{\vec{v}_0}) = V \setminus \text{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, \Gamma_{\vec{v}_0})$$

Будем говорить, что \mathcal{A}_{q_0} обходит Γ_{v_0} , если $\text{Fr}(\mathcal{A}_{q_0}, \Gamma_{v_0}) = \emptyset$.

Говорим, что \mathcal{A}_{q_0} сильно обходит Γ , если он обходит его, начиная из любого набора \vec{v}_0 вершин лабиринта. Γ_{v_0} - ловушка для \mathcal{A}_{q_0} , если автомат не обходит граф; Γ - сильная

ловушка для \mathcal{A}_{q_0} , если автомат не может обойти лабиринт из любого набора начальных вершин.

Иногда выделяют особый вид коллектива - один основной автомат и k автоматов-камней. В данном виде коллектива автоматы-камни могут двигаться только совместно с основным автоматом, фактически основной автомат их двигает по лабиринту, а сами по себе они перемещаться не могут.

1.2. Построение сильной ловушки для любого коллектива автоматов. В этой секции мы построим сильную ловушку для любого коллектива автоматов. Ловушка будет выглядеть как граф Кэли некоторой группы. Сама группа будет и, соответственно, лабиринт бесконечны, но любой коллектив автоматов обойдет лишь конечную область в нём, что мы и докажем.

1.2.1. *Проблема Бернсайда и её решения.* Проблема Бернсайда о периодических группах фиксированного периода была поставлена Бернсайдом в 1902 году в следующей форме:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть группа G имеет m независимых порождающих элементов a_1, a_2, \dots, a_m и для любого элемента $x \in G$ выполнено соотношение $x^n = 1$, где n - данное целое число. Будет ли определенная таким образом группа конечной, и если да, то каков ее порядок?

Сейчас группы, определенные m порождающими и соотношением $x^n = 1$, называют свободными бёрнсайдowymi группами ранга m и периода n (экспоненты n). Обычно они обозначаются как $B(m, n)$.

1.3. Определение лабиринта. Пусть G бесконечная конечно-порождённая группа, у которой нет элементов бесконечного порядка. $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ - множество образующих группы G , среди которых нет повторяющихся и обратных. $\Gamma(G, S)$ - граф Кэли для этой группы и образующих.

Пусть $g = t_1 t_2 \dots t_n$, где $g \in G$ и $t_i \in S \cup S^{-1}$, причем n минимальное число с такими свойствами, т.е g нельзя представить меньшим количеством элементов из $S \cup S^{-1}$. Тогда будем обозначать $d(g) = n$. Заметим, что $d(g) = d(g^{-1})$. Также, легко видеть, что кратчайшее расстояние в лабиринте между двумя вершинами v_1 и v_2 , равно $d(v_1^{-1}v_2) = d(v_2v_1^{-1})$. $M(r)$ - общий период всех элементов g , для которых $d(g) \leq r$. В силу отсутствия элементов бесконечного порядка $M(r)$ конечно и определено для всех r .

1.4. Единичный автомат. Рассмотрим сначала случай с одним автоматом. Покажем, что единичный автомат сможет обойти только ограниченную часть Γ .

Пусть $\mathcal{A} - (G, S)$ - допустимый коллектив из одного автомата. Заметим, что ход автомата в конкретной вершине определяется исключительно его состоянием, так как других автоматов нет. Пусть этот автомат \mathcal{A} начинает движение из некоторой вершины v_0 . Тогда, его движение будет довольно простым.

ЛЕММА 7.1. *Поведение автомата \mathcal{A}_{q_0} в Γ с $|Q|$ состояниями будет обладать следующими свойствами:*

- На начальной стадии автомат сделает $U < |Q|$ ходов, с неповторяющимися состояниями;
- Далее состояния будут повторяться с периодом $T \leq |Q|$;
- Каждые $M(T)$ периодов вершины, посещаемые автоматом будут повторяться;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как количество состояний конечно, какое-то состояние автомата повторится как минимум два раза. Пусть первое такое состояние q_1 и между первым и вторым появлением сделано T ходов (очевидно $T \leq |Q|$), а перед q_1 было $U < |Q|$ ходов. Заметим, что текущее состояние однозначно определяет следующее, таким образом после второго появления q_1 последовательность состояний будет такой же, как и после первого

появления. Отсюда получаем зацикленность состояний с периодом T . Обозначим через v_1 вершину лабиринта, в которой автомат впервые оказался в состоянии q_1 .

Пусть s'_1, s'_2, \dots, s'_T – направления движения автомата в цикле, $s'_i \in S \cup S^{-1}$. Пусть $g_T = s'_1 s'_2 \dots s'_T$, $g_T \in G$. Тогда через $M(T)$ циклов после посещения вершины v_1 автомат окажется в вершине $v_1 g_T^M = v_1$, то есть вернётся обратно. Таким образом, сначала автомат посетит не более U вершин, а дальше в цикле будет посещать не более $TM(T)$ вершин. \square

Из этой леммы легко видеть, что Γ – сильная ловушка для любого одиночного автомата.

1.5. Коллектив. Теперь рассмотрим случай коллектива автоматов. Пусть $\mathcal{A}_{\vec{v}_0} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m) - (G, S)$ -допустимый коллектив автоматов. Основная наша цель – доказать, что построенный нами лабиринт – сильная ловушка для любого такого коллектива, причём коллектив сможет обойти только конечное число вершин лабиринта.

Пусть $|Q_1|, \dots, |Q_m|$ – количество состояний у автоматов. Обозначим через Q_A максимум из $|Q_i|$ $i = 1, \dots, m$.

Назовём состоянием коллектива \mathcal{A} в момент времени t набор $I = (q_t^1, q_t^2, \dots, q_t^m, F_t)$, где $q_t^i \in Q_i$ – состояние конкретного автомата в момент t ; $F_t = \{F_t^1, F_t^2, \dots, F_t^k\}$, $k \leq m$, где F_t^i – множество номеров всех автоматов находящихся в какой-то вершине в данный момент. Причём $\bigcup_{i=1}^k F_t^i = \{1, \dots, m\}$ и один индекс принадлежит только одному F_t^i . Если все автоматы находятся в разных вершинах, то F_t^i состоят из одного индекса каждый и их m штук. То есть, состояние коллектива – это состояния всех автоматов и разбивка автоматов на группы стоящих в одной вершине. Далее факт нахождения в одной вершине двух или более автоматов будем называть встречей.

Положением коллектива в лабиринте в момент времени t , назовём набор вершин $(v_t^1, v_t^2, \dots, v_t^m)$, в котором находятся автоматы. Заметим, что пара положение-состояние однозначно все определяет последующее поведение коллектива автоматов.

ТЕОРЕМА 7.1. *Поведение коллектива автоматов $\mathcal{A}_{\vec{v}_0} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m)$ в Γ в вектором начальных вершин \vec{v}_0 обладает следующим свойством: существуют такие O_m и H_m зависящее только от m , Q_A и функции $M(r)$, что:*

- Состояния коллектива \mathcal{A} любые в H_m подряд идущих моментов времени однозначно определяют следующее состояние.
- На начальной стадии коллектив автоматов сделает $U \leq O_m$ ходов, после которых состояния будут повторяться с периодом $T \leq O_m$;
- Каждые $M(T)$ периодов, положение коллектива будет повторяться, т.е. после первых U ходов пара положение-состояние коллектива \mathcal{A} будет повторяться с периодом $M(T)T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать индукции по числу автоматов. В случае с одним автоматом, состояние коллектива фактически состояние автомата и $O_1 = Q_A$, $H_1 = 1$, что было доказано ранее. Таким образом база индукции есть.

Пусть $m = l$, тогда по предположению индукции для всех $m < l$ утверждение верно. H_l и O_l будем выражать через l , M , Q_A , H_i и O_i для $i < l$. Поскольку H_i и O_i по предположению зависят только от i , Q_A и функции $M(r)$, H_l и O_l тоже можно будет выразить через l , Q_A и функцию $M(r)$. \square

ЛЕММА 7.2. *Пусть существуют две группы автоматов размерами a и b , $a + b = l$. Пусть O_a и O_b константы из индукции. Тогда, если никакие два автомата из этих групп (один из первой, один из второй) не встречались $h = \max(O_a, O_b) + M(O_a)M(O_b)O_aO_b + 1$ ходов подряд, то и в дальнейшем никакие два не встретятся.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что эти h ходов, группы не влияют на движения друг друга, поэтому эти две группы мы можем в течении h ходов рассматривать как два коллектива в лабиринте L с некоторыми начальными состояниями и вектором начальных вершин. Заметим, так как $a, b < l$, то к этим коллективам применимы предположения индукции (но только на h первых ходов, в дальнейшем в худшем случае автоматы из разных групп встретятся и независимость пропадёт).

Тогда, после $\max(O_a, O_b)$ ходов (могут и раньше), состояния автоматов в обеих группах будут повторяться циклами длиной $T_a \leq O_a$ и $T_b \leq O_b$ и каждые $M(T_a)$ и $M(T_b)$ таких циклов положения групп автоматов повторяются.

Заметим, что за следующие $M(T_a)M(T_b)T_aT_b + 1$ ходов первая группа будет находиться в не более $M(T_a)T_a$ различных парах положение-состояние, аналогично вторая в не более $M(T_b)T_b$ различных парах. Тогда существуют два момента времени t_1, t_2 из этих $M(T_a)M(T_b)T_aT_b + 1$ ходов, когда положение первого коллектива – \vec{v}_a , состояние – (\vec{q}_a, F_a) , положение второго коллектива – \vec{v}_b , состояние – (\vec{q}_b, F_b) . Заметим, что из эти двух пар положение-состояние однозначно получается пара положение-состояние всего коллектива. Таким образом, пара положение-состояние всего коллектива из m автоматов повторилась, то есть оно и дальше будет повторяться с периодом $T_{ab} = t_2 - t_1 \leq M(T_a)M(T_b)T_aT_b$. Поскольку, между t_1 и t_2 группы автоматов не встречались, они и дальше не будут встречаться. Заметим, что в силу монотонности $M(r) M(T_a)M(T_b)T_aT_b \leq M(O_a)M(O_b)O_aO_b$, откуда следует требуемое. \square

Докажем следующую лемму, являющуюся подпунктом теоремы.

ЛЕММА 7.3. Положим H_l минимальным натуральным числом со следующими свойствами:

$$H_l \geq \max(O_i, O_j) + M(O_a)M(O_b)O_iO_j + 1, \forall i > 0, j > 0, i + j = l$$

$$H_l \geq H_i, \forall i < l$$

Тогда, по последовательности I_1, I_2, \dots, I_{H_l} из H_l состояний коллектива можно однозначно определить состояние I_{H_l+1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что по этим H_l состояниям мы можем определить, есть ли две группы автоматов, автоматы из которых не встречаются друг с другом за эти H_l ходов (в состояниях записана информация о встречах автоматов).

Пусть есть две такие группы A и B с размерами a и b . Тогда в силу выбора H_l эти группы удовлетворяют условию предыдущей леммы. Следовательно, автоматы из этих групп не встретятся после этих H_l ходов, а, следовательно, и на ходу $H_l + 1$. Заметим, что состояние коллектива из l автоматов однозначно определяется состоянием коллектива A и коллектива B и наоборот (если их рассматривать как коллективы автоматов в L) на этих $H_l + 1$ ходу.

Тогда, I_{H_l+1} – состояние коллектива \mathcal{A} из l автоматов, однозначно определяется состоянием коллектива A и коллектива B на $H_l + 1$ -ом ходу. В свою очередь, состояния коллективов A и B на этом ходу, однозначно определяются предыдущими своими H_a и H_b состояниями, а значит и предыдущими H_l состояниями. Следовательно I_{H_l+1} однозначно определяется через предыдущие H_l состояний коллективов A и B , а значит и \mathcal{A} , что и требовалось.

Пусть таких двух групп нет. Далее все моменты времени лежат в интервале от 1 до H_l (если не оговорено обратное). Заметим, что по состояниям I_1, I_2, \dots, I_{H_l} можно определить, направление движения автомата \mathfrak{A}_i в момент t (будем обозначать его $g_t^i \in D(S)$). Следовательно, если известна вершина v_{t_1} , в которой \mathfrak{A}_i находился в момент t_1 , то и известна вершина v_{t_2} , в которой он находился любой другой момент t_2 , причём $v_{t_2} = v_{t_1}g$, где $g \in G$ произведение каких-то g_j^i , либо их обратных.

Пусть \mathfrak{A}_1 в момент времени 1 находится в вершине v_0 . Тогда в остальные моменты $2 \leq t \leq H_l$ он находится в вершинах $v_0 h_t^1$, где $h_t^1 \in G$ однозначно определяется через I_1, I_2, \dots, I_{H_l} . В силу предположения о том, что разделённых групп не существует, есть автомат, для удобства \mathfrak{A}_2 , с которым он встретится в момент t_1 , в вершине $v_0 h_{t_1}^1$. Тогда, в момент t_1 известно положение \mathfrak{A}_2 , а значит известны вершины в которой \mathfrak{A}_2 находится во все остальные моменты времени t , причём они имеют вид $v_0 h_t^2$, где h_t^2 однозначно выражается через I_1, I_2, \dots, I_{H_l} ($h_{t_1}^1 = h_{t_1}^2$, а остальные получаются из $h_{t_1}^2$ с помощью g_j^2).

Аналогично, найдем автомат \mathfrak{A}_3 , с которым встречается хотя бы один из двух первых, для него положения вершин будут определяться аналогично. Так будем продолжать и далее. Заметим, что в силу условия о не существовании двух не встречающихся групп, мы всегда найдем новый автомат, с которым есть встречи у уже рассмотренных. Таким образом, любой \mathfrak{A}_i из m автоматов в момент t находится в вершине $v_0 h_t^i$, причём h_t^i однозначно выражается через I_1, I_2, \dots, I_{H_l} .

Рассмотрим момент времени $H_l + 1$. Состояния каждого из m автоматов, однозначно получаются из I_{H_l} . Пусть в момент $H_l + 1$ \mathfrak{A}_i находится в вершине $v_0 h_{H_l}^i g_i$, $g_i \in G$. Заметим, что для определения, стоят ли \mathfrak{A}_i и \mathfrak{A}_j достаточно сравнить на равенство $h_{H_l}^i g_i$ и $h_{H_l}^j g_j$. $h_{H_l}^i$ и $h_{H_l}^j$ однозначно определяется через I_1, I_2, \dots, I_{H_l} , g_i и g_j через I_{H_l} . Следовательно, разбиение на группы стоящие в одной вершине на шаге $H_l + 1$ однозначно определяется через I_1, I_2, \dots, I_{H_l} , а значит и I_{H_l+1} однозначно через них определяется. Что нам и требовалось. Итого пункт про H_l выполнен.

Посчитаем, сколько различных состояний $I = (\vec{q}, F)$ может быть у коллектива \mathcal{A} . Различных \vec{q} не более Q_A^l (т.к. состояний у каждого из автоматов не более Q_A). Количество различных F грубо оценим сверху числом l^l . Действительно, разложить l индексов автоматов по l множествам можно не более чем l^l способами, и каждому такому способу соответствует только одно F (разбиение автоматов по группам, стоящим в одной вершине). Итого, различных состояний коллектива не более чем $(Q_A l)^l$.

Тогда заметим, что существует не более $(Q_A l)^{l H_l}$ различных блоков из H_l подряд идущих состояний коллектива. Положим $O_l = (Q_A l)^{l H_l} + H_l$, рассмотрим первые O_l ходов коллектива \mathcal{A} в L . В этих ходах можно выделить $(Q_A l)^{l H_l} + 1$ блок из H_l подряд идущих состояний коллектива. Тогда, два блока начинающиеся в ходы t_1 и t_2 будут одинаковыми. Так как каждый такой блок однозначно определяет последующую последовательность состояний коллектива, мы получаем, что, начиная с момента t_1 , состояния коллектива зацикливаются с периодом $t_2 - t_1$. Таким образом, U из условия теоремы равно $t_1 \leq O_l$ (если первый ход считается нулевым), а $T = t_2 - t_1 \leq O_l$. Получаем, что второй пункт теоремы выполнен, нужное O_l найдено.

Для доказательства теоремы осталось показать, что каждые $M(T)$ получившихся циклов, положения коллектива будут повторяться. Действительно, пусть любой \mathfrak{A}_i на каком-то ходе $t \geq t_1$ находится в вершине v_t . Пусть за каждые T ходов он сдвигается на $g_i \in G$. g_i слово длины не более чем T , поэтому через $M(T)$ ходов \mathfrak{A}_i попадёт в вершину $v_t g_i^{M(T)} = v_t$, что нам и требуется. Таким образом после первых U ходов пара положение-состояние всего коллектива \mathcal{A} будет повторяться с периодом $M(T)T \leq M(O_m)O_m$. □

Таким образом, мы показали, что любой коллектив автоматов стартовый из любых вершин обойдёт только конечную часть Γ .

1.6. Об обходе графов Кэли конечно-порожденных групп. Можно сформулировать следующее утверждение об обходе коллективом автоматов графов Кэли конечно-порожденных групп.

ТЕОРЕМА 7.2. *Граф Кэли конечно-порожденной группы нельзя обойти коллективом автоматов тогда и только тогда, когда она бесконечна и в ней нет элемента бесконечного порядка.*

Невозможность обхода бесконечной конечно-порожденной периодической группы мы показали выше. Приведём здесь набросок доказательства существования обхода групп с элементами бесконечного порядка.

ЛЕММА 7.4. *Пусть G конечно порожденная группа, содержащая элемент $g \in G$ бесконечного порядка. Тогда ее граф Кэли Γ может обойти коллектив из одного автомата и трёх автоматов-камней.*

Замечание 7.1. Минимально возможное число состояний автомата зависит от элемента g и графа Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартно и полностью аналогично теореме Аджанса [99] об обходе бесконечного дерева автоматом с тремя камнями, мы приведем его набросок. Пусть s – число образующих группы G , тогда Γ есть естественная проекция $\pi(T_{2s})$ свободного дерева T_{2s} степени $2s$ (удвоение происходит из-за наличия обратных элементов к образующим группы). Расположим три камня вдоль степеней элемента g . Пусть они расположены в точках $h, g^k h, g^{k+l} h$, автоматом между ними. Тогда с величинами k, l автоматом может оперировать как со счетчиками, а два счетчика задают машину Минского [99, 102], для которой можно написать программу обхода T_{2s} . Тогда произойдет и обход $\pi(T_{2s})$.

Остается пояснить, как осуществить перемещение системы автомат – камни вдоль ребра v графа Кэли. Рассмотрим момент, когда в одном из счетчиков стоит 0, т.е. камни K_1 и K_2 стоят в одной клетке h , а камень K_3 – в клетке $g^m h$.

Далее автомат делает следующие шаги:

- 1) Переносит K_1 вдоль v , затем переходит обратно к K_2 (сдвигается на v^{-1});
- 2) Идет вдоль g , пока не дойдет до K_3 , переносит K_3 на g^{-1} , далее идет назад вдоль g без K_3 , пока не дойдет до K_2 ;
- 3) Переходит по v , далее идет по g пока не дойдет до K_1 , переносит K_1 вперед на g ;
- 4) Далее делает шаг по g назад, потом проверяет соседние клетки на наличие K_2 , повторяет эту операцию, пока не найдет K_2 ;
- 5) Повторяет шаги 2-4, пока K_3 не окажется в одной клетке с K_2 . После этого переносит K_3 и K_2 сдвигает на v что завершает сдвиг системы.
- 6) Далее запускает машину Минского чтобы учесть информацию о сдвиге на v , и вычислить следующий элемент сдвига.

Таким образом, имея в распоряжении машину Минского с записанной в ней программой посещения графа, и перетаскивая ее за собой, автомат обходит весь граф. \square

2. Об эволюции, заданной клеточным автоматом

Этот параграф посвящен исследованию класса клеточных автоматов.

Клеточные автоматы популяризировал Джон Конвей, придумавший игру «Жизнь» [93], [94]. Несмотря на сравнительно простые правила, с помощью правил такого типа можно создавать клеточные автоматы, моделирующие машину Тьюринга. Также клеточные автоматы интересны с точки зрения моделирования биологических процессов размножения клеток.

Также эволюциям клеточных автоматов посвящен проект на Летней Конференции Турнира Городов 1997 года [96].

В этой главе выбран для изучения автомат, описанный в следующей известной задаче А.Л. Тоома:

«На бесконечной белой плоскости эволюционирует ограниченная черная клякса. Каждую секунду все точки меняют свой цвет по следующему закону. Чтобы определить цвет

точки в следующий момент времени, надо нарисовать круг единичного радиуса с центром в этой точке. Если больше половины его площади черная, то центр становится черным, иначе - белым. Пусть K - клякса, K^n означает результат эволюции кляксы за n единиц времени (секунд). Существует ли клякса, которая будет жить вечно?»

Ответ на данный вопрос - нет. Дело в том, что эволюция обладает монотонностью, и если клякса с дополнительным множеством черных точек все равно умирает, то и изначальная клякса не может жить вечно. Поэтому вопрос сводится к изучению эволюции круга, при этом достаточно легко доказать, что в следующие моменты эволюции клякса остается кругом, причем его радиус уменьшается как минимум на некоторую константу.

Интересно изучить аналоги данной задачи в дискретном случае. Оказывается, на клеточной плоскости ситуация более нетривиальная. Аналогом круга единичного радиуса для определения цвета точки в следующий момент времени служит множество из нечетного числа клеток плоскости.

Пусть K' - множество клеток на клеточной плоскости, клякса - произвольное конечное подмножество K' . Площадь кляксы - число её клеток. Дискретный закон эволюции таков: фиксируется конечное множество $S \in K'$ с нечетным числом элементов и одной отмеченной клеткой (не обязательно из S). S называется *шаблоном* эволюции. Чтобы узнать цвет клетки $X \in K'$ через секунду, надо параллельно перенести S так, чтобы отмеченная клетка перешла в X , и посмотреть, точек какого цвета шаблон закрывает больше - это и будет цвет клетки X через секунду. Будем называть шаблон *убывающим*, если любая клякса гибнет при этом шаблоне, и *неубывающим* в противном случае.

2.1. Основные определения. Выберем *центральную клетку* следующим образом. Возьмём столбец, слева и справа от которого меньше половины клеток кляксы, и строку, сверху и снизу от которой меньше половины клеток кляксы. Клетку на их пересечении назовем *центральной*.

Понятно, что от выбора центральной клетки не зависит, шаблон убывающий или неубывающий. Ведь если выбрать центральной другую клетку шаблона, то каждый этап новой эволюции будет отличаться от соответствующего этапа старой параллельным переносом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Будем говорить, что клетка *лежит на прямой*, если на прямой лежит её центр. Аналогично, будем говорить о клетке, находящейся снизу, справа и т.п. от прямой, если снизу, справа находится ее центр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Шаблон назовём *почти симметричным*, если для любой прямой, на которой лежит центральная клетка, по обе стороны от этой прямой лежит поровну других клеток шаблона, и на этой прямой с двух сторон от центральной тоже клеток шаблона поровну.

2.2. Критерий неубываемости шаблона.

ТЕОРЕМА 7.3 (о неубывающем шаблоне). *Для любого почти симметричного шаблона существует клякса, которая не исчезнет в процессе эволюции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим почти симметричный шаблон. Ясно, что его центральная клетка будет клеткой шаблона. Пусть шаблон помещается внутри окружности с диаметром d и центром в центре центральной клетки. Рассмотрим все прямые, на которых лежат центральная клетка и ещё какая-либо клетка шаблона, и все прямые симметричные им относительно горизонтали, а также вертикальную и горизонтальную прямые, тоже проходящие через центральную клетку. Горизонтальная и вертикальная прямые делят плоскость на 4 части. Посмотрим на прямые, лучи от которых содержатся в левой верхней части плоскости (включая ограничивающие горизонтальную и вертикальную прямые) и

пронумеруем их числами от 1 до k , начиная с горизонтальной и заканчивая вертикальной, по часовой стрелке. Теперь построим ломаную, первое звено которой - отрезок длины d , параллельный прямой 1, второе звено длины $2d$ соединено с правым концом первого звена и параллельно прямой 2, и так далее, m -ое звено длины $2d$ соединено с правым концом $m - 1$ звена и параллельно прямой m . Отразим по горизонтали эту ломаную, получив ещё одну, и соединим их концами вертикальных звеньев. Полученную ломаную соединим концами горизонтальных звеньев со своей, отражённой по вертикали, копией. Получается некая фигура F , ограниченная нашей замкнутой ломаной. Заметим, что от выбора четверти плоскости (мы выбрали левую верхнюю) F не зависит. Пусть клякса K состоит из клеток, центры которых находятся внутри фигуры F или на её границе. \square

ЛЕММА 7.5. Любая клетка кляксы K не исчезнет в процессе эволюции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если окружность с диаметром d и центром в центре какой-то клетки X кляксы, пересекает лишь одно звено F , то понятно, что внутри F больше половины клеток шаблона (то есть центров клеток шаблона). И тогда клетка X не исчезнет к следующему шагу эволюции. Если окружность не пересекает никакое звено, то также очевидно, что X не исчезнет в следующий момент. Если же окружность пересекает два звена, то посмотрим, что будет, если эти два звена касаются друг друга в центре центральной клетки. Назовём их 1 и 2, (рисунок 1). 2 продлим до второго пересечения с окружностью. В секторе между 1 и продолжением 2 (на рисунке он закрашен серым) не должно быть центров клеток шаблона, ведь мы, когда строили ломаную, брали подряд звенья, параллельные прямым, выходящим из центра, между которыми клеток шаблона нет. Тогда внутри кляксы клеток шаблона столько, сколько клеток шаблона с одной стороны от прямой, содержащей звено 2 и на ней (с той, где звено 1). Тогда понятно, что их больше половины. Теперь рассмотрим случай, когда два звена касаются друг друга не в центре центральной клетки. Понятно, что раз центр центральной клетки должен быть внутри фигуры F , то часть окружности, ограниченная этими двумя звеньями (пересечение круга с F) содержит сектор, ограниченный радиусами, параллельными звеньям, правая часть рисунка 1. Тогда в этом случае внутри кляксы клеток шаблона разве что больше, чем в предыдущем (когда два звена касаются друг друга в центре центральной клетки). Ясно, что более двух звеньев окружность пересекать не могут (из-за их длины). Эта лемма завершает доказательство теоремы. \square

Теперь докажем, что если шаблон не принадлежит к описанному классу почти симметричных, то он убивающий.

ТЕОРЕМА 7.4. Для любого шаблона, который не является почти симметричным, любая клякса исчезнет в процессе эволюции.

Рассмотрим шаблон, не являющийся почти симметричным, и произвольную кляксу.

ЛЕММА 7.6. Существует прямая l , на которой лежит центральная клетка и с одной стороны от l не меньше половины клеток. Кроме того, l не вертикальная и не горизонтальная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если центральная клетка не является клеткой шаблона, то можно просто взять прямую, на которой не лежит ни одной клетки шаблона. Если центральная клетка является клеткой шаблона, то должна найтись прямая, на которой больше не лежит клеток шаблона и с одной стороны от неё клеток больше половины. Предположим, это не так. Но шаблон не почти симметричный, и тогда найдётся прямая, на которой лежит несколько клеток шаблона и их не поровну с двух сторон от центральной клетки, или с двух сторон от этой прямой клеток шаблона не поровну. В любом случае малым шевелением можно эту прямую изменить на такую, чтоб с одной стороны от неё оказалось

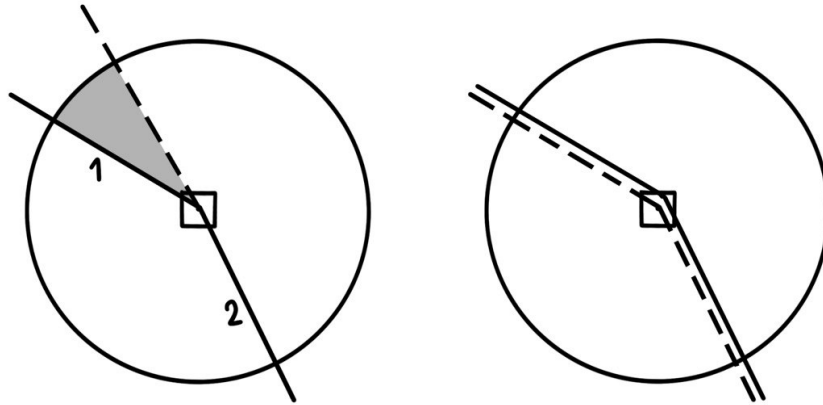


Рис. 1. Окружность шаблона

больше половины клеток. Если мы нашли искомую прямую, но она является вертикальной или горизонтальной, то это также можно исправить малым шевелением. \square

ЛЕММА 7.7 (о монотонности). *Если существует клякса A , покрывающая кляксу B , и A исчезнет в процессе эволюции, то и B исчезнет.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5. Клетки кляксы, которые совпадают с клетками шаблона клетки Y , назовём *соседями* Y .

ЛЕММА 7.8. *На i -ый шаг эволюции A каждая клетка имеет соседей не менее, чем на i -ый шаг эволюции B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это по индукции. База: 0 шаг, условие леммы выполняется. Переход: от i к $i + 1$. Все клетки, что стали соседними с Y на $i + 1$ -ый шаг эволюции B , будут соседними и с Y на $i + 1$ -ый шаг эволюции A , ведь у них на i -ый шаг эволюции B было не больше соседей, чем на i -ый шаг эволюции A . Значит, на $i + 1$ -ый шаг эволюции A Y имеет соседей не менее, чем на $i + 1$ -ый шаг эволюции B . Переход доказан.

Тогда, если A исчезнет, то на какой-то шаг у любой клетки будет 0 соседей, значит и в эволюции B на какой-то шаг у любой клетки будет 0 соседей и B исчезнет. Лемма доказана. \square

ЛЕММА 7.9. *Существует клякса A , покрывающая нашу кляксу, такая, что A исчезнет в процессе эволюции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём треугольник T со следующими свойствами:

1. Стороны T параллельны l , вертикальной и горизонтальной прямой.
2. T содержится в той полуплоскости от прямой, содержащей сторону, параллельную l , что и меньшая часть клеток шаблона.
3. T содержит всю кляксу.

Пусть клякса A состоит из клеток, центры которых находятся внутри треугольника T или на его границе.

Не умаляя общности, скажем, что треугольник T находится выше его горизонтальной стороны и правее вертикальной. Понятно, что ниже его горизонтальной стороны и левее вертикальной не появится клеток кляксы, ведь мы выбирали центральную клетку так, что с обеих сторон от вертикальной или горизонтальной прямой, на которой она лежит, было менее половины клеток.

Проведём множество прямых, параллельных l , так, чтоб каждая клетка нашей кляксы лежала хоть на какой-то из них. Понятно, что правее и выше самой правой из проведённых прямых новых клеток кляксы не появится из-за выбора l . А клетка (возможно, клетки), лежащая на самой правой из проведённых прямых, исчезнет к следующему шагу эволюции и больше клеток кляксы на этой прямой не появится. Дальше исчезнет клетка (клетки) со следующей прямой и т. д. Следовательно, клякса A исчезнет. Тогда по лемме о монотонности наша клякса также исчезнет. \square

Итак, почти симметричные шаблоны - неубывающие, а остальные - убывающие.

Теперь докажем, что для любого натурального n найдутся такие шаблон и клякса, что в процессе эволюции клякса будет меняться с периодом n .

ТЕОРЕМА 7.5. *Для натурального n существует шаблон и клякса, переходящая в себя через n моментов времени.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть шаблон состоит из центральной клетки, соседних с ней по нижнему и левому ребру и двух клеток, находящихся сверху и справа от центральной так, чтобы между каждой из этих клеток и центральной клеткой было расстояние $n - 1$. На левой части рисунка 2 показан шаблон для $n = 5$.

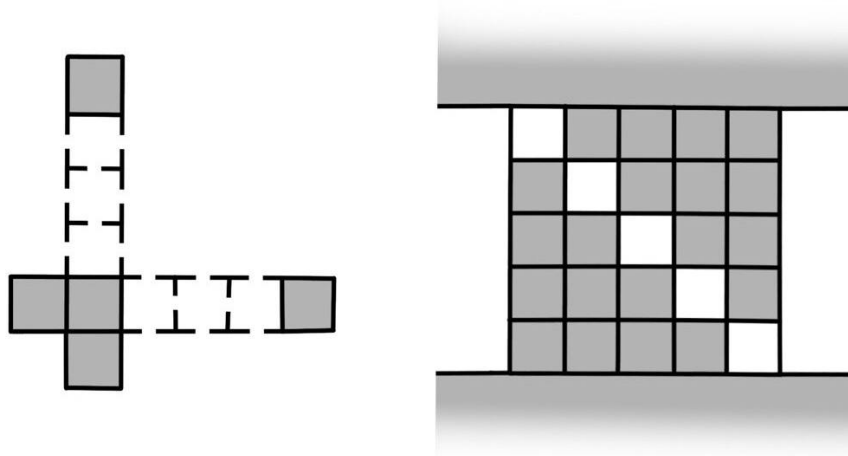


Рис. 2. Шаблон и клякса с периодической эволюцией

Мы умеем строить кляксу, снизу и сверху которой минимум по $2d - 1$ подряд идущих клеток, находящихся в одной строке. Возьмём квадрат $n \times n$, а сверху и снизу от него поместим две такие кляксы, чтобы его нижняя и верхняя строка соседствовали (по рёбрам) с кляксами.

Пронумеруем клетки в зависимости от того, на каких диагоналях они находятся. В левом нижнем углу - 1, в клетках, соседних с левым нижним углом, - 2, и так далее. На центральной диагонали из левого верхнего до правого нижнего угла - n , на следующей диагонали снова 1, затем снова 2 и так далее, в правом верхнем углу - $n - 1$.

Скажем, что все клетки квадрата, кроме клеток с номером n , изначально принадлежат кляксе. На правой части рисунка 2 показана схема кляксы для $n = 5$. Теперь окажем, что если на какой-то шаг эволюции кляксе принадлежат все клетки квадрата, кроме клеток с номером i , то на следующий шаг кляксе будут принадлежать все клетки, кроме клеток с номером $i + 1$ (будем считать, что $n + 1 = 1$).

С любой клеткой с номером $i + 1$ в одной строке есть клетка с номером i , причём либо на расстоянии 1 и слева от неё, если она не в самом левом столбце квадрата, либо на расстоянии $n - 1$ и справа от неё, если она в самом левом столбце квадрата. А вторая клетка шаблона, находящаяся в одной строке с центральной, вне квадрата. Тогда понятно, что обе клетки шаблона, находящиеся в одной строке с центральной, не совпадают с клетками кляксы. А в одном столбце с клеткой с номером $i + 1$ есть клетка с номером i на расстоянии 1 и снизу от неё, либо на расстоянии $n - 1$ и сверху от неё. Тогда для нашей клетки с номером $i + 1$ есть ещё одна клетка шаблона, не совпадающая с клеткой кляксы, значит у неё точно есть 3 клетки шаблона, не совпадающие с клетками кляксы и она перестанет быть клеткой кляксы к следующему шагу.

Для всех клеток с номерами, отличными от $i + 1$, клетка выше на $n - 1$, ниже на 1 и одна из тех, что правее на $n - 1$ и левее на 1 будут клетками кляксы. А значит, к следующему шагу все клетки, кроме клеток с номером $i + 1$, станут клетками кляксы, и лемма об этом доказана. Тогда понятно, что клякса эволюционирует с периодом n . \square

Интересно, что если шаблон является симметричным, то возможны лишь периодические эволюции с периодами 1 и 2.

ТЕОРЕМА 7.6. Пусть имеется симметричный относительно центральной точки шаблон S . Тогда произвольная клякса, либо перестает через какое-то время меняться, либо принимает всего два состояния, переходящие одно в другое, то есть переходит в периодическую эволюцию с периодом 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем называть кляксой K^i множество не только чёрных, но и белых клеток в момент i . Пусть X – некоторая клетка. Обозначим $S(X_i)$ множество клеток, принадлежащих кляксе K^{i-1} которое накрывает шаблон S , приложенный к X . То есть, это множество клеток, определяющее цвет клетки X_i .

Назовем *переменчивостью* кляксы K^i количество разноцветных пар вида (X, Y) , таких, что $X \in K^i$, а $Y \in S(X) \in K^{i-1}$. Докажем, что переменчивость кляксы K^{i+1} не превосходит переменчивость K^i , то есть переменчивость не возрастает со временем и является полуинвариантом.

Посчитаем число разноцветных пар для одной клетки X . Будем называть *бриллиантом* D_x граф, содержащий в качестве вершин клетки $A = X_{i+1}$, $B = X_{i-1}$ и множество $S(X_{i+1}) \in K^i$, а в качестве рёбер пары вида (A, C) , где $C \in S(X_{i+1})$, и пары вида (B, C) , где $C \in S(X_{i+1})$. Пары первого типа будем называть *верхними*, а пары второго - *нижними*.

Докажем, что в любом бриллианте верхних разноцветных пар не больше, чем нижних.

Действительно, допустим сначала, что A и B одноцветные. Тогда количество разноцветных пар в обоих случаях одинаково.

Пусть теперь A и B разноцветные, и, ради определенности A – черная, а B – белая. Тогда среди множества $S(X_{i+1})$, как раз и определяющего цвет клетки A , больше чёрных клеток, чем белых. Тогда и пар этих чёрных клеток с B больше, чем пар оставшихся белых клеток с A .

Все множество пар вида $(X_i, S(X_i))$ представляет собой верхние пары всех возможных бриллиантов D_{X_i} , причем каждая пара входит в один бриллиант. В силу симметричности шаблона S , всё множество пар $(S(X_i), X_{i-1})$ представляет собой множество нижних пар для всевозможных бриллиантов D_{X_i} , где также каждая пара входит в один бриллиант.

Из этого следует, что переменчивость кляксы не возрастает со временем, причем, если найдется хотя бы одна клетка X , что X_{i+1} и X_{i-1} разного цвета, то в соответствующем бриллианте верхних разноцветных пар будет меньше, чем нижних. Тогда переменчивость кляксы уменьшится.

Рассмотрим эволюцию кляксы. В силу того, что множество черных клеток ограничено некоторым прямоугольником, в некоторый момент клякса начнет меняться периодически. Следовательно, переменчивость кляксы должна быть всё время постоянной. В случае, если период не равен 1 или 2, найдется клетка X , что X_{i+1} и X_{i-1} разного цвета, что приводит к уменьшению переменчивости и противоречию. \square

3. ПРИЛОЖЕНИЕ. Применение мозаик: Самозаклинивающиеся структуры

В приложении мы рассмотрим интересное применение мозаик. Из замощений плоскости правильными квадратами и правильными шестиугольниками может быть выращена трехмерная структура, обладающая свойствами самозаклиненности.

Рассмотрим множество соприкасающихся выпуклых фигур в \mathbb{R}^2 . Нетрудно доказать, что одну из этих фигур можно вывести из множества сдвигом, не нарушая положения остальных. Следовательно, любую совокупность плоских фигур можно разобрать, последовательно передвигая все фигуры по одной (в отличие от простой гомотетии плоскости, при которой все фигуры автоматически выходят из соприкосновения друг с другом).

Можно было бы подумать, что это утверждение справедливо и для пространств большей размерности. Однако попытки обобщить его на \mathbb{R}^3 не увенчались успехом. В качестве контрпримера в работе [107] были предложены структуры, состоящие из выпуклых тел, которые невозможно разобрать путём удаления отдельных тел. Однако их пример был сложен и был построен нерегулярным образом.

Самыми простыми сцеплёнными структурами, по-видимому, являются слоистые конструкции, то есть наборы выпуклых тел, расположенных в слое между двумя параллельными плоскостями [108]. Сначала рассмотрим два типа правильных тетраэдров. Будем называть их A -тетраэдр и B -тетраэдр. Длины верхних рёбер обоих тетраэдров, которые взаимно перпендикулярны, полагаются равными единице. Оба тетраэдра полностью определяются своими верхними рёбрами. Очевидно, что можно расположить тетраэдры так, чтобы передний конец верхнего ребра B и середина верхнего ребра A совпали. В этом случае расстояние между центрами этих тетраэдров равно 1.

Рассмотрим теперь множество точек на плоскости, у которых обе координаты – целые числа. Пусть точки, у которых обе координаты либо нечётные, либо чётные, называются «белыми», а точки, у которых одна координата нечётная, а другая чётная, – «чёрными». Предположим, что белые точки являются центрами A -тетраэдров, а чёрные точки – центрами B -тетраэдров. На рисунке 3 представлен фрагмент такого множества тетраэдров.

Рассмотрим один из A -тетраэдров, назовём его X . Вокруг него находятся четыре соседних B -тетраэдра: слева, справа, сверху и снизу. Очевидно, что четыре грани X примыкают к четырём соседним B -тетраэдрам. Более того, левые и правые соседи препятствуют движению X вверх, а верхний и нижний соседи препятствуют его движению вниз. Ясно, что и B -тетраэдры «заблокированы» своими соседями. Такая ситуация называется самозаклиниванием (interlocking).

Определение 1. Рассмотрим множество тел (возможно, бесконечное). Пусть для любого тела X выполняется следующее условие: если степень свободы всех тел, кроме X ,

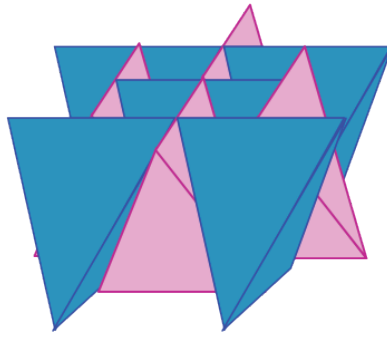


Рис. 3. Фрагмент самозаклинивающегося слоя тетраэдров.

равна 0, то и степень свободы X также равна 0. В этом случае множество называется самозаклинивающейся (interlocking) структурой. Состояние заклиненности означает, что ни одно тело не может быть удалено из системы, так как все остальные тела неподвижны.

Далее мы рассмотрим различные типы самозаклинивающихся структур и способы их построения при помощи правильных мозаик.

Пусть имеется регулярная квадратная решётка, раскрашенная в два цвета, подобно бесконечной шахматной доске. На каждом рёбре разместим стрелку согласно следующим правилам:

1. Все стрелки имеют одинаковую длину;
2. Все стрелки начинаются в середине соответствующего рёбра и перпендикулярны ему;
3. Для чёрных клеток верхняя и нижняя стрелки направлены наружу, а левая и правая – внутрь;
4. Для белых клеток верхняя и нижняя стрелки направлены внутрь, а левая и правая – наружу.

Теперь рассмотрим плоскость, построенную на рёбре и наклонённую в направлении соответствующей стрелки.

Построим такую плоскость для каждого рёбра, используя один и тот же угол наклона α . Рассмотрим четыре плоскости, соответствующие определённому квадрату S . Очевидно, что эти плоскости, если наклонены под подходящим углом, образуют тетраэдр. Этот тетраэдр пересекает нашу исходную плоскость шахматной доски по квадрату S .

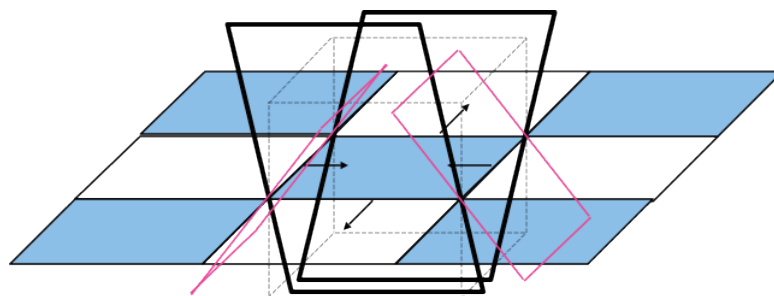


Рис. 4. Наклоненные плоскости одного квадрата.

Ясно, что для чёрных квадратов мы получаем A -тетраэдры, а для белых – B -тетраэдры. Каждый тетраэдр заблокирован внутри слоя: левые и правые соседи препятствуют перемещению A -тетраэдров вверх, а верхний и нижний – вниз.

Таким образом, наша исходная плоскость шахматной доски со стрелками становится диаграммой, представляющей схему заклинивания. Стрелки показывают, каким образом

тетраэдры блокируют своих соседей. Этот процесс называется процедурой перемещающегося сечения («moving cross-section procedure»).

Ориентация стрелки указывает направление движения соответствующей грани полигона в сечении при смещении плоскости сечения вверх. Длина стрелки пропорциональна $\tan \alpha$, наклону грани. Для рассмотренной выше квадратной решётки эта схема стрелок показана на рисунке reffig:П4.

Описанная структура является примером сборки, в которой ни один элемент не может быть удалён, не нарушив соседей. Привлекательно использовать такие схемы в инженерии как новый принцип проектирования. Этот принцип позволяет строить структуры из выпуклых элементов без связывающей среды или соединителей, т.е. структуры, которые (а) отличаются высокой устойчивостью к распространению трещин (трещины останавливаются на границах между элементами), а также свободны от концентраций напряжений, возникающих из-за механических соединителей, используемых в традиционных конструкциях блоков [109]—[113]. Таким образом, существует практическая задача поиска и описания сцепляющихся множеств.

Интересно, что такая конфигурация тетраэдров впервые была найдена инженером-строителем Гликманом [114], который предложил систему мощения на основе усечённых тетраэдров. Однако эта структура осталась незамеченной математическим сообществом.

Описанные структуры получаются при разбиении плоскости на равные квадраты. А.Я. Канель-Белов рассмотрел другую правильную решётку – шестиугольную и обнаружил новый тип самозаклинивающихся тел, которыми оказываются обычные кубы! Рецепт построения новых самозаклиненных структур по этому разбиению следующий: мы расставляем стрелки одинаковой длины на гранях шестиугольника так, чтобы для любого шестиугольника разбиения стрелки, направленные внутрь и наружу, чередовались (см. рисунке 5). Затем рассматриваем слой шестиугольных призм с сечением типа сот. Наклоняем боковые грани призм согласно указанным стрелкам по вышеописанному правилу. Если продолжить эти наклонённые грани, как в предыдущем примере, получится сцепляющаяся система кубов, октаэдров (рисунке 6) или додекаэдров (рисунке 7), в зависимости от угла α [115]. Все три получившиеся формы соответствуют платоновым телам, как и рассмотренный выше тетраэдр.

Интересно, что для кубов угол $\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ совпадает с углом для тетраэдров. Для октаэдров этот угол меньше: $\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$.

Приведённые выше примеры охватывают все типы платоновых тел, кроме икосаэдра. Позднее А.Я. Канель-Белов обнаружил, что икосаэдры можно разместить заклиненным образом, если использовать в качестве основы десятиугольное срединное сечение икосаэдра. Десятиугольники можно расположить на плоскости и назначить стрелки на их грани таким образом (рисунке 8), чтобы икосаэдры, восстановленные этим способом перемещения срединного сечения, образовывали сцеплённую конструкцию (рисунке 9). Следует отметить, что не все грани икосаэдра контактируют с соседними телами. Так как додекаэдр также имеет десятиугольное срединное сечение, аналогичная конструкция на основе десятиугольников возможна и для додекаэдров (рисунке 8, 10). Таким образом, додекаэдры допускают два сцеплённых способа размещения, нормальных к их осям симметрии третьего и пятого порядка.

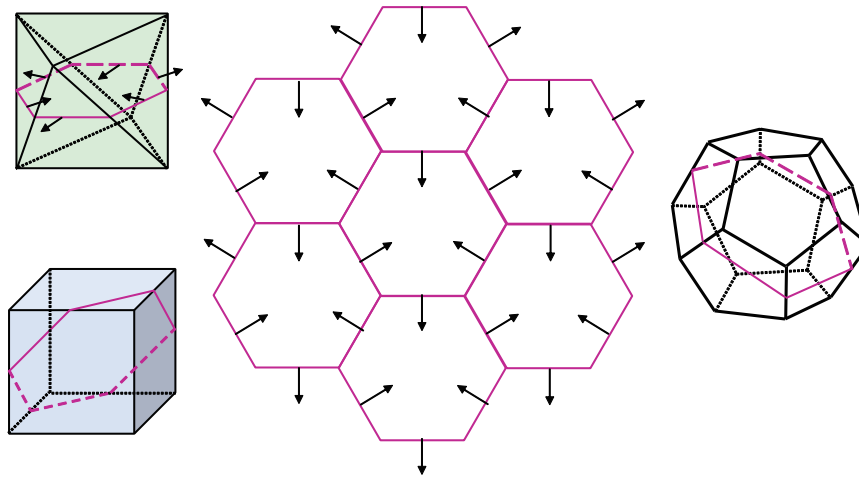


Рис. 5. Шестиугольная разметка плоскости и соответствующие платоновы тела с их шестиугольными срединными сечениями. Ориентация стрелок указывает наклон граней модифицированных шестиугольных призм, которые обеспечивают их заклиненность.

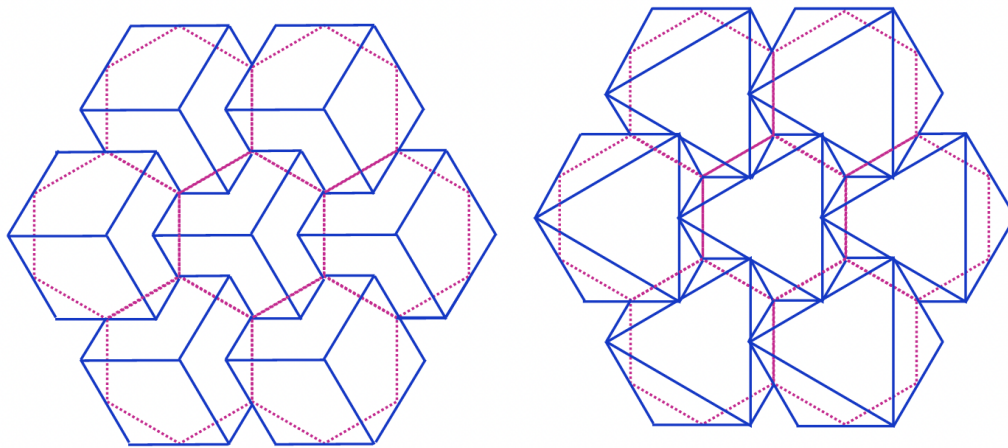


Рис. 6. Фрагменты заклиненных слоев кубов и октаэдров

Подробнее с темой самозаклинивающихся структур можно ознакомиться в работе [106].

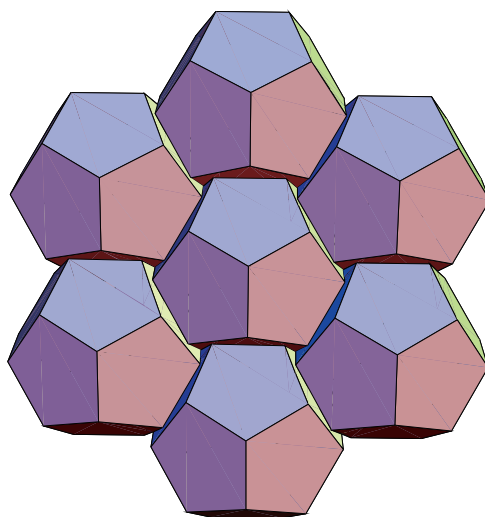


Рис. 7. Фрагмент самозаклиненного слоя додекаэдров, нормальных к оси симметрии третьего порядка

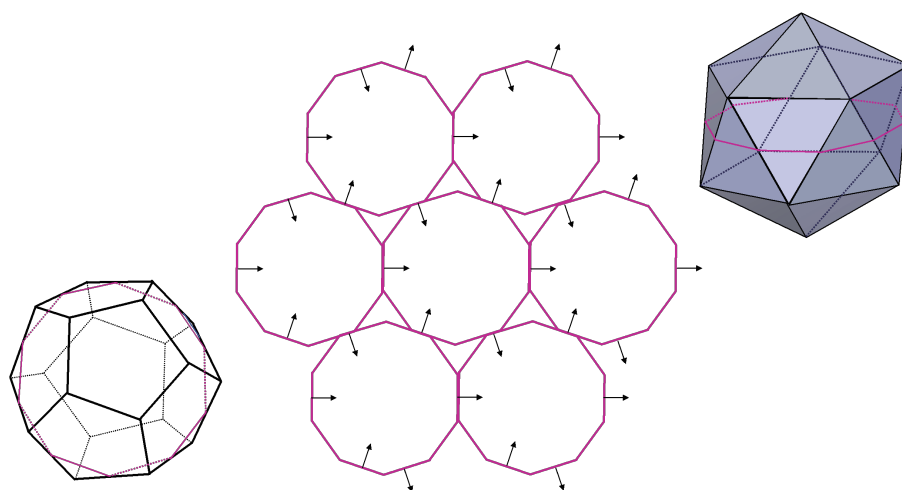


Рис. 8. Десятиугольная мозаика плоскости и соответствующие додекаэдр и икосаэдр. Показаны только те стрелки, которые соответствуют контактирующим граням.

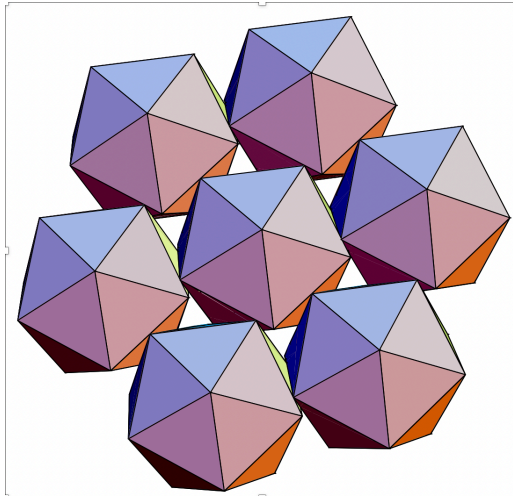


РИС. 9. Фрагмент самозакливающегося слоя икосаэдров.

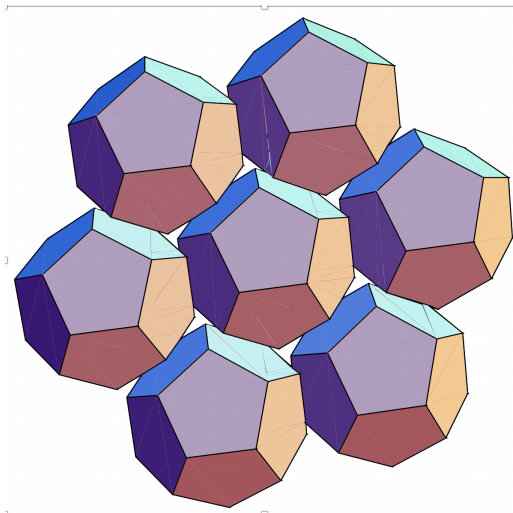


РИС. 10. Фрагмент самозаклиненного набора додекаэдров, перпендикулярного оси симметрии пятого порядка.

Литература

- [1] И.Иванов-Погодаев, А.Канель-Белов. *Конечно определенная нильполугруппа: комплексы с равномерной эллиптичностью* // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2021. Т. 85. № 6. С. 126–163.
- [2] I. A. Ivanov-Pogodaev, A.Ya. Kanel-Belov *Deterministic coloring of a family of complexes* // Journal of Mathematical Sciences. 2023. vol. 275. №4. 403-501.
- [3] А.Я. Белов-Канель, И.А. Иванов-Погодаев *Конструкция бесконечной конечно определенной нильполугруппы*// Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. №1. С. 5-10.
- [4] И. А. Иванов-Погодаев *Полугруппа путей на семействе равномерно эллиптических комплексов*// Функциональный анализ и его приложения. 2023. Т. 57. №2. С. 41–74.
- [5] И. А. Иванов-Погодаев *О детерминированности путей на подстановочных комплексах* // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 521. С. 43–62.
- [6] И. А. Иванов-Погодаев, *Бесконечная конечно определенная полугруппа с тождеством $x^4 = 0$* , Успехи математических наук, 2026, том 81, выпуск 2, 183–184.
- [7] И. А. Иванов-Погодаев *Об оценках на экспоненту в конструкции бесконечной конечно представленной полугруппы*// Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 525. №1. С. 130-134.
- [8] Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S. *Finite Groebner Basis Algebra With Unsolvable Problems Of Nilpotency and Zero Divisors* // Journal of Algebra. 2018. vol. 508. pp. 575-588.
- [9] Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S., Sapir O. *A construction of a finitely presented semigroup containing an infinite square-free ideal with zero multiplication* // International Journal of Algebra and Computation. 2018. vol. 28. № 8. pp. 1565-1573.
- [10] I. Ivanov-Pogodaev, A. Kanel-Belov *Construction of finitely presented infinite nil-semigroups* // Journal of Mathematical Sciences. 2012. vol. 186. № 5. pp. 751–752.
- [11] Alexei Kanel-Belov, Alexei Chilikov, Ilya Ivanov-Pogodaev, Sergey Malev, Eugeny Plotkin, Jie-Tai Yu and Wenchao Zhang *Nonstandard Analysis, Deformation Quantization and Some Logical Aspects of (Non)Commutative Algebraic Geometry* // Mathematics. 2020. vol. 8. №10. pp. 1-33.
- [12] Anton Beletsky, Ilya Ivanov-Pogodaev *Combinatorial Estimations on Burnside Type Problems* // Mathematics. Special Issue Combinatorial Algebra, Computation, and Logic, 2nd Edition. 2024. vol. 12. №5. pp. 665.
- [13] Д. В. Гусев, И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов *Коллектив автоматов в конечно порожденных группах* // Математические заметки. 2020. Т. 108. №5. С. 692–701.
- [14] И. А. Иванов-Погодаев, О. А. Рыжова. *О эволюции, заданной клеточным автоматом*// Чебышевский сборник. 2025. Т. 26. № 3. С. 284-291.
- [15] Ivanov-Pogodaev I.A., Kanel-Belov A.Ya. *Construction of a Nilsemigroup of Paths in a Countable Family of Uniformly Elliptic Complexes* // Algebra and Logic. 2025. vol. 63. № 6. pp. 410-438.
- [16] Адян С. И. *Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы*, УМН, 65:5(395) (2010), 5–60
- [17] Адян С. И. *Новые оценки нечетных периодов бесконечных бернсайдовских групп*. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 2015, т. 289, 41–82
- [18] Адян С. И. *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975, 335 с.
- [19] Белов А. Я. *Линейные рекуррентные уравнения на дереве*. Математические заметки, 78, N5, 643–651.
- [20] Белов А. Я. *Проблемы бернсайдовского типа, теоремы о высоте и о независимости*, Фундамент. и прикл. матем., 13:5 (2007), 19–79 А.Я.Белов, *Burnside-type problems, theorems on height, and independence*, J. Math. Sci., NY 156:2 (2009), 219–260
- [21] Белов А. Я., Харитонов М. И. *Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте*, Матем. сб., 203:4 (2012), 81–102 А.Я.Белов, М.И.Харитонов, *Subexponential estimates in Shirshov’s theorem on height*, Sb. Math., 203:4 (2012), 534–553 .

- [22] А. Я. Белов-Канель, И. А. Иванов-Погодаев, А. Малистов, И. Митрофанов, М. Харитонов, *Замощения, раскраски и плиточные группы*, <http://www.turgor.ru/lktg/2009/4/index.php>, 21-я летняя конференция международного математического Турнира городов, 2009, Российская академия наук, Департамент образования города Москвы, Московский центр непрерывного математического образования, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева, Журнал “Квант”, Теберда, Карачаево-Черкессия, 02.08.2009–10.08.2009.
- [23] Е. С. Голод *О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p -группах*. Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:2 (1964), 273–276
- [24] Е. С. Голод, И. Р. Шафаревич *О башне полей классов*. Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:2 (1964), 261–272
- [25] Thue, A. *Über unendliche Zeichenreihen*, Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl., Christiania 7 (1906), 1–22
- [26] *Днестровская тетрадь: оперативно-информационный сборник* — 4-е изд. — Новосибирск: изд. ин-та матем. СО АН СССР, 1993, 73.
- [27] Иванов-Погодаев И. А. *Машина Минского, свойства нильпотентности и размерность Гельфанда-Кириллова в конечно определенных полугруппах*. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук — Москва, 2006, 77с.
- [28] T. Fernique, Иванов-Погодаев И. А., Белов А. Я, И. В. Митрофанов. *Апериодичные замощения*, <http://www.turgor.ru/lktg/2013/2/index.htm>, 2013, 25-я летняя конференция Турнира городов Боровка, Беларусь / 04.08.2013–12.08.2013; http://lipn.univ-paris13.fr/~fernique/info/turgorod_rus2.pdf
- [29] Иьуду Н. К. *Алгоритмическая разрешимость проблемы распознавания делителей нуля в одном классе алгебр*. Фунд. и прикл. матем., 1995, 2, 1, 541–544.
- [30] Иьуду Н. К. *Стандартные базисы и распознаваемость свойств алгебр, заданных копредставлением*. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук — Москва, 1996, 73.
- [31] Харитонов М. И. *Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте*. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук — Москва, 2015, 73с.
- [32] Кострикин А. И. *Вокруг Бернсайда*. — М.: Наука, 1986, 232.
- [33] Зельманов Е.И., *Решение ослабленной? проблемы Бернсайда? для групп нечетного показателя*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1990, том 54, выпуск 1, 42–59
- [34] Зельманов Е.И. *Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп*, Матем. сб., 182:4 (1991), 568–592
- [35] Лысёнок И. Г. *Бесконечность бернсайдовых групп периода 2^k при $k > 13$* , УМН, 47:2 (1992), 201–202; I. G. Lysenok *The infinitude of Burnside groups of period 2^k for $k > 13$* , Russian Math. Surveys, 47:2 (1992), 229–230.
- [36] Лысёнок И. Г. *Бесконечные бернсайдовы группы четного периода*, Изв. РАН. Сер. матем., 60:3 (1996), 3–224; англ. пер.: I. G. Lysenok, *Infinite Burnside groups of even exponent*, Izv. Math., 60:3 (1996), 453–654.
- [37] Новиков П. С., Адян С. И. *О бесконечных периодических группах.*, (I–III), Изв. АН СССР. Сер. матем., 32 (1968)
- [38] Ольшанский А. Ю. *О теореме Новикова–Адяна*, Матем. сб., 118(160):2(6) (1982), 203–235
- [39] Ольшанский А. Ю. *Геометрия определяющих соотношений в группах.*, М.: Наука, 1989.
- [40] Пионтковский Д. И. *Базис Грёбнера и когерентность мономиальной ассоциативной алгебры.*, Фунд. и прикл. матем., 1996, 2, 2, 501–509.
- [41] Пионтковский Д. И. *Некоммутативные базисы Гребнера, когерентность ассоциативных алгебр и делимость в полугруппах.*, Фунд. и прикл. матем., 2001, 7, 2, 495–513.
- [42] Санов И. Н., *Решение проблемы Бернсайда для показателя 4*, Уч. зап. Ленингр. ун-та, сер. матем., 10 (1940), 166–170.
- [43] *Свердловская тетрадь: Нерешённые задачи теории полугрупп. Выпуск третий*, Свердловск, 1989. — 40 с
- [44] Уфнарковский В. А. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре.*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. М.: ВИНТИ, 1990, 57, 5–177.
- [45] Уфнарковский В. А. *О росте алгебр*. Вестник МГУ. вып 1, 1978, 4, 59–65.
- [46] Ширшов А. И. *О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах.*, Мат. сб., 1957, 41, 3, 381–394. (РЖМат, 1958, 164)
- [47] Ширшов А. И. *О кольцах с тождественными соотношениями.*, Мат. сб., 1957, 43, 2, 277–283. РЖ-Мат, 1958, 7544)
- [48] I. Kaplansky. *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc., 54:575–580, 1948.
- [49] I. Kaplansky *On a problem of Kurosch and Jacobson*. Bull. Amer. Math. Soc., No52, 1946, P. 496–500.

- [50] Л. М. Самойлов. *Первичные многообразия ассоциативных алгебр и связанные с ними нильпроблемы*. Диссертация на соискание степени д. ф.- м. н. М., 2010.,
- [51] ШигOLEV В. В., *О ниль и нильпотентных конечноопределённых алгебрах*, Фунд. и прикл. матем., 2000, т. 6, выпуск 4, стр. 1239–1245.
- [52] J. Levitzki. *On a problem of A. Kurosch*. Bull. Amer. Math. Soc., No52, 1946, P. 1033–1035.
- [53] A. Kemer. *Multilinear components of the prime subvarieties of the variety $Var(M_2(F))$* . Algebras and Representation Theory, 4:1 (2001), 87–104.
- [54] А. Г. Курош. *Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах*. Изв. АН СССР, Сер. Матем., №5, 1941, С. 233–240.
- [55] N.Bédaride, Th.Fernique, *When periodicities enforce aperiodicity?*, Communications in Mathematical Physics 335 (2015), pp. 1099–1120.
- [56] Kanel–Belov A., Rowen Louis H. *Perspectives on Shirshov’s Height Theorem*. in book: selected papers of A.I.Shirshov, Birkhäuser Verlag AG (2009), 3–20.
- [57] Belov A. J., Borisenko V. V., Latysev V. N. *Monomial Algebras*. NY. Plenum, 1997.
- [58] Belov A. Ya. Ivanov I. A. *Construction of Semigroups with Some Exotic Properties*, Comm. in Algebra, Volume 31, Num 2, 2003. 673–696.
- [59] Belov A. Ya. Ivanov I. A. *Construction of Semigroups with Some Exotic Properties*, Acta Appl. Math 85 (2005), no 1–3, 49–56.
- [60] Belyaev V. Ya. *Imbeddability of recursively defined inverse semigroups in finitely presented semigroups*. Sibirsk. Math. Journal 25 no. 2., 1984. 50–54.
- [61] R. Berger, *The undecidability of the domino problem*, Ph.D. thesis, Harvard University, July 1964.
- [62] Burnside W., *On an unsettled question in the theory of discontinuous groups*, Q. J. Pure Appl. Math., 33 (1902), 230–238
- [63] Bokut L. A., Kukin G. P. *Algorithmic and combinatorial algebra*. Math. and its appl. 233.
- [64] Bokut, L *Unsolvability of the equality problem and subalgebras of finitely presented lie algebras*. Izvestiya Akad. Nauk SSSR. **36**:6 (1972), 1173–1219
- [65] Bergman, G. *The diamond lemma for ring theory*. Adv. Math., (1978), 29, 2, 178–218.
- [66] Markov, A. *The impossibility of certain algorithms in the theory of associative systems. (Russian)* Doklady Akad. Nauk SSSR, **55** N7, 1947, 587–590
- [67] Minsky, M. *Computation: Finite and Infinite Machines* (1967)
- [68] Novikov, P., *On algorithmic unsolvability of the problem of identity. (Russian)* Doklady Akad. Nauk SSSR **85** N4, (1952). 709–712.
- [69] Novikov, P., *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory*. Trudy Mat. Inst. im. Steklov. no. 44. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, (1955), 3–143
- [70] Post E., *Recursive unsolvability of a problem of Thue*. J. Symb. Logic, 12, N1, 1947, 1–11
- [71] Piontkovsky, D. *Gröbner base and coherence of monomial associative algebra*. Pure and Applied Math., (1996), 2, 2, 501–509.
- [72] Piontkovsky, D. *Noncommutative Gröbner bases, coherence of monomial algebras and divisibility in semigroups* Pure and Applied Math.,(2001), 7, 2, 495–513.
- [73] Piontkovsky, D. *On the Kurosh problem in varieties of algebras*. J. Math. Sci., New York 163, No. 6, 743–750 (2009); translation from Fundam. Prikl. Mat. 14, No. 5, 171–184 (2008).
- [74] Piontkovsky, D. *Graded algebras and their differential graded extensions*. J. Math. Sci., New York 142, No. 4, 2267–2301 (2007); translation from Sovrem. Mat. Prilozh. 30, 65–100 (2005).
- [75] Shirshov, A. *Some algorithmic problems for Lie algebras* Sib. mat. journal, (1962), vol 3 N2, 292–296
- [76] Ufnarovsky, V. *Combinatorial and asymptotic methods in algebra*. Itogi nauki i tehniki, Modern problems of pure math. M.: VINITI, (1990), 57, 5–177.
- [77] Conway J., Lagarias J.. *Tiling with polyminoes and combinatorial group theory.*/ J. Combin. Theory Ser. A. 1990. V. 53, 2, 183–208.
- [78] Ivanov S. V., *The free Burnside groups of sufficiently large exponents*, Internat. J. Algebra Comput., 4:1–2 (1994), 1–308.
- [79] Ivanov S. V., “On the Burnside problem on periodic groups”, Bul l. Ame r. Math. Soc. (N. S.), 27:2 (1992), 257–260; arXiv: math/9210221.
- [80] C. Goodman-Strauss, *Matching rules and substitution tilings*, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 1, 181–223.
- [81] Hall M.Jr., *Solution of the Burnside problem for exponent 6*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 43 (1957), 751–753.
- [82] Kemer, A. R., *Comments on the Shirshov’s Height Theorem*. in book: selected papers of A.I.Shirshov, Birkhäuser Verlag AG (2009), 41–48.
- [83] Kukin G. P. *The variety of all rings has Higman’s property*. Algebra and Analysis. Irkutsk. 1989 91–101
- [84] Latyshev V. *On the recognizable properties of associative algebras*. Special vol. J.S.C.: On computational aspects of commutative algebras. London: Acad. Press, 1988, 237–254.

- [85] Kharlampovich O. G., Sapir M. V. *Algorithmic problems in varieties*. International Journal of Algebra and Computation, Vol. 5, Nos. 4–5 (1995), 379–602
- [86] Ol'shanskii Alexander Yu., Sapir Mark V. *Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups*. Publications Mathematiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques May 2003, Volume 96, Issue 1, pp 43–169.
- [87] Robinson R. M., *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, Inventiones Mathematicae 12 (1971), 177–209.
- [88] Sapir M. V. *Algorithmic Problems for Amalgams of Finite Semigroups*.
- [89] Mark V. Sapir with contributions by Victor S. Guba and Mikhail V. Volkov *Combinatorial algebra: syntax and semantics* Springer, 2014, 355pp.
- [90] Wang Hao. *Proving theorems by pattern recognition—II*, Bell System Tech. Journal 40(1):1–41, 1961
- [91] Zelmanov E. I. *On the nilpotency of nilalgebras*. Lect. Notes Math., 1988, 1352, 227–240. РЖМат, 1989, 7A188)
- [92] Richard A. Dean, *A sequence without repeats on x, x^{-1}, y, y^{-1}* , Amer. Math. Monthly 72(4), 383–385 (1965).
- [93] Gardner, Martin *The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game «life»*. Mathematical Games. Scientific American. Vol. 223, no. 4. pp. 120–123, 1970
- [94] Тоффоли Т., Марголюс Н. *Машины клеточных автоматов* М.: Мир, 1991. – ISBN 5-03-001619-8
- [95] Wolfram, Stephen *A New Kind of Science* Wolfram Media, 2002 ISBN: 1-57955-008-8
- [96] Белов(Канель) А. Я., Буфетов А. И., Иванов И. А., Малистов А. С. *Кляксы и шаблоны* Летняя конференция турнира городов., 1998, М.:МЦНМО, 46–49, 114–132, Матем.Образование, № 2, июль–сентябрь 1997 г., стр.125–127
- [97] G. Kilibarda *On the minimum universal collectives of automata for plane labyrinths* Discrete Math. Appl. 3 6 1993 555–586
- [98] A. Szepietowski *A finite 5-pebble-automaton can search every maze* Information Processing Letters 15 5 1982 199–204
- [99] А. В. Анджанс *Поведение детерминированных и вероятностных автоматов в лабиринтах* Дисс. канд. физ.-мат. наук Рига 1987
- [100] Г. Килибарда *О минимальных универсальных коллективах автоматов для плоских лабиринтов* Дискретная математика. 1994 6 4 133–153
- [101] Г. Килибарда, III. Ушчумлич *О лабиринтах-ловушках для коллективов автоматов* Дискретная математика 1993 5 2 29–50
- [102] В. ,Б Кудрявцев, А. ,С. Подколзин, III. Ушчумлич *Введение в теорию абстрактных автоматов* М. Изд-во МГУ 1985
- [103] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин *Введение в теорию автоматов* М. Наука 1985
- [104] В. Б. Кудрявцев, Г. Килибарда, III. Ушчумлич *Системы автоматов в лабиринтах* Грант РФФИ № 06-01-00240
- [105] Ф. Харари *Теория графов* М. Мир 1973
- [106] A. J. Kanel-Belov, A. V. Dyskin, Y. Estrin, E. Pasternak, I. A. Ivanov-Pogodaev *Interlocking of convex polyhedra: towards a geometric theory of fragmented solids//* Moscow Mathematical Journal. 2010. vol. 10 №2. pp. 337–342.
- [107] Gal'perin, G.A., *Russian Math. Surveys* 40, 229. 1985
- [108] Kanel, A. Ya. *A story of an olympiad problem* Matematicheskoe prosveshchenie, 3, No. 5, 207-208 (in Russian). 2001
- [109] Dyskin, A.V., Y. Estrin, A.Ya. Kanel-Belov E. Pasternak *A new concept in design of materials and structures: Assemblies of interlocked tetrahedron-shaped elements* Scripta Materialia, 44, 2689-2694. 2001
- [110] Dyskin, A.V., Y Estrin, A. Ya. Kanel-Belov E Pasternak, *Toughening by fragmentation - How topology helps* Advanced Engineering Materials, 3, Issue 11, 885-888. 2001
- [111] Estrin, Y., Dyskin, A.V., Kanel-Belov, A.Ya. Pasternak, E. *Materials with novel architectonics: Assemblies of interlocked elements* In B. Karihaloo (ed.) IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-homogeneous Materials, Kluwer Academic Press, 51-56. 2002
- [112] Khor, C., Dyskin, A.V., Pasternak, E. Estrin, Y. and Kanel-Belov, A.Ya. *Integrity and fracture of plate-like assemblies of topologically interlocked elements* Structural Integrity and Fracture, SIF2002 (Dyskin, A.V. Hu X.Z. and Sahouryeh, E., Eds), Swets and Zeitlinger, Lisse, 449-456. 2002
- [113] Dyskin, A.V., Estrin, Y., Kanel-Belov, A.J. and Pasternak, E. *Topological interlocking of platonic solids: A way to new materials and structures* Phil. Mag. Letters Vol. 83, No. 3, 197-203. 2003
- [114] Glickman M, *The G-block system of vertically interlocking paving* Second International Conference on Concrete Block Paving, Delft, April 10-12, 1984: 345-348. 9. Dusseault, M.B. 1980. Itacolumites: the flexible sandstones. Q.J. eng. Geol. London, 13, 119-128. 1994

- [115] Radford, A. *A Guide to Dry Stone Walling* The Growood Press Ltd., Ramsbury, Marlborough, Wiltshire. 2001
- [116] Estrin, Y., A.V. Dyskin, E Pasternak, H.C. Khor A J Kanel-Belov *Topological interlocking of protective tiles for Space Shuttle*. Phil. Mag. Letters, 83, 351-355. 2003
- [117] Burnside, W. *On an unsettled question in the theory of discontinuous groups*. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, Quart. J. 33, 230–238, 1902
- [118] Hall, Marshall jun. *Solution of the Burnside problem for exponent six* Illinois Journal of Mathematics, 2, 764–786, 1958
- [119] A. A. Klyachko *Combinatorial Group Theory and Geometry* Math. Prosv., s.3, 13, 18–32, 2009
- [120] A. A. Клячко *Комбинаторная теория групп и геометрия* Матем. просв., сер. 3, МЦНМО 2009, 13, 18–32
- [121] Burnside, W. *On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions*. Proceedings of the London Mathematical Society. Second Series, 3, 435–440, 1905
- [122] Chandler, Bruce and Magnus, Wilhelm *Razvitie kombinatornoj teorii grupp. Ocherk istorii razvitiya idej* Transl. from the English, Moskva: Mir, 1985,
- [123] Agatha Atkarskaya *Combinatorial approach for Burnside groups of relatively small odd exponents* 2021.
- [124] Eliyahu Rips *Iterated Small Cancellation Theory for Groups and Rings*
- [125] E. Rips; Z. Sela *Canonical representatives and equations in hyperbolic groups* Inventiones mathematicae, 120, 1, 489–512, 1995
- [126] Adyan, S. I. *The Burnside problem and related topics*. Russian Mathematical Surveys, 65, 5, 805–855, 2010
- [127] Kenneth Appel and Wolfgang Haken *Every planar map is four colorable. Part I: Discharging* Illinois Journal of Mathematics, 21, 429-490 1977
- [128] Georges Gonthier *A computer-checked proof of the Four Colour Theorem* 2005
- [129] Belov-Kanel, A., Timorin, Vladlen, Rukhovich, Filipp *Outer billiards around regular polygons*, 08, 2022
- [130] Richard Evan Schwartz *Outer Billiards on Kites*, 2007
- [131] Gromov, M. *Hyperbolic Groups* New York, NY, Springer New York 1987
- [132] Atkarskaya, Agatha and Belov-Kanel, A. and Eugene, Plotkin and Rips, Eliyahu *Structure of small cancellation rings*, Journal for Research in Mathematics Education, 01 vol 2, 1-14, 2021
- [133] Rips, Eliyahu *Generalized small cancellation theory and applications I. The word problem* Israel J. Math, 1-146, 1982
- [134] Atkarskaya, Agatha and Belov-Kanel, A. and Eugene, Plotkin and Rips, Eliyahu *Structure of small cancellation rings*, Mathematics Research Reports, 2021, 09 vol 2, 1-14
- [135] Agatha Atkarskaya and Eliyahu Rips and Katrin Tent *The Burnside problem for odd exponents*, arXiv 2303.15997, 2023
- [136] Egbert R. Van Kampen *On Some Lemmas in the Theory of Groups* John Hopkins University Press, American Journal of Mathematics, 1933, 55, 1, 268–273
- [137] Roger C. Lyndon *On Dehn's algorithm* Springer, Mathematische Annalen 1966, 3, 166, 208–228
- [138] Paul E. Schupp *On Dehn's algorithm and the conjugacy problem* Springer, Mathematische Annalen, 1968, 178, 2, 119–130
- [139] Martin Greendlinger *Dehn's algorithm for the word problem* John Wiley and Sons, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1960, 13, 1 67–83.
- [140] Roger C. Lyndon, Paul E. Schupp *Combinatorial group theory* Classics in mathematics, Springer, 2001
- [141] Golod, E. S. *On nil-algebras and finitely approximable p -groups* Translations. Series 2. American Mathematical Society, Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc., 1965, 48, 103–106.
- [142] Issai Schur and Alfred Brauer and Hans Rohrbach *Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen: Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1911, Physikalisch-Mathematische Klasse, 619 – 627* 1973
- [143] Aleshin, S. V. *Finite automata and Burnside problem for periodic groups* Mathematical Notes, Math. Notes, 11, 199–203, 1972.
- [144] Grigorchuk, R. I. *On Burnside problem on periodic groups* Functional Analysis and its Applications, Funct. Anal. Appl., 14, 41–43, 1980.
- [145] Sushchanskij, V. I. *Periodic p -groups of permutations and the unrestricted Burnside problem* Soviet Mathematics. Doklady, Sov. Math., Dokl., 20, 766–770, 1979.
- [146] A. I. Kostrikin *Around Burnside* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 20, 1
- [147] B. Chandler, W. Magnus *The history of combinatorial group theory: a case study in the history of ideas* Springer, 1982, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 1