ОТЗЫВ научного консультанта
о диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
Иванова-Погодаева Ильи Анатольевича на тему:
«Построение бесконечной конечно определенной нильполугруппы»
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Появление общего понятия группы стало одним из ключевых моментов в развитии современной алгебры. В равной степени вызывали интерес конечные и бесконечные группы. Не удивительно, что уже в самом начале 20-века известный британский математик, один из основателей теории групп Уильям Бернсайд поставил свою знаменитую проблему Бернсайда о конечности конечнопорожденных групп конечной экспоненты.

Знаменитые работы П.С. Новикова и С.И. Адяна решили проблему Бернсайда и показали возможности построения сложных алгебраических объектов с бернсайдовскими свойствами. Дальнейшее развитие этой тематики привело к появлению метода канонической формы И.Рипса и развитию геометрических методов в теории групп, также восходящих к началу 20-го века.

Вопросы бернсайдовского типа играют важную роль в развитии современной алгебры. Понимание устройства «бернсайдовских объектов» обогащало математику новыми методами, которые позволяли решить многие алгебраические проблемы.

Построение сложнейших объектов комбинаторной алгебры (как группы Новикова – Адяна) включает многоступенчатое введение определяющих соотношений, позволяющее балансировать между противоположными требованиями к объекту, скажем, его бесконечностью и конечностью экспоненты. Важнейшим элементом построений является введение метода контроля следствий из определяющих соотношений. При этом примеры бернсайдовских конструкций обычно использовали бесконечную последовательность определяющих соотношений.

Многие вопросы бернсайдовского типа для конечно определенного случая являются известными и важными открытыми проблемами. В частности, открыта проблема Бернсайда для конечно определенных групп – в доказательстве Новикова – Адяна принципиальным было использование бесконечного количества соотношений. Также открытым вопросом является проблема Латышева существования конечно определенного нилькольца.

Проблема Шеврина – Сапира о существовании конечно определенной бесконечной нильполугруппы является важным вопросом в этом ряду. Опубликованная в авторитетном сборнике проблем, она привлекала внимание специалистов в области теории полугрупп более полувека.

Диссертация И.А. Иванова-Погодаева посвящена решению указанной проблемы. Что еще более важно, для построения нильполугруппы был создан новый метод построения конечно определенных объектов, основанный на рассмотрении слов как кодировок путей на специальном геометрическом пространстве. В перспективе подобные идеи могут привести к прогрессу в построении новых конечно определенных алгебраических объектов.

В первой, вводной главе диссертации проводится обзор по вопросам бернсайдовского типа, алгебраическим результатам в конечно определенном случае, а также смежным алгебраическим вопросам.

Во второй главе автор объединил результаты, связанные с построениями конечно определенных объектов, использующих реализацию вычислений абстрактной машины внутри полугруппы или алгебры. В этой главе автор отвечает на поставленные В.Н. Латышевым вопросы: о существовании алгебры с конечным базисом Гребнера – Ширшова и алгоритмически неразрешимой проблемой делителей нуля; о существовании алгебры с конечным базисом Гребнера – Ширшова и алгоритмически неразрешимой проблемой нильпотентности. Данные вопросы автор решает реализуя вычисления машины Тьюринга с помощью системы определяющих соотношений. Далее разработанная автором техника используется для построений конечно определенных полугрупп с функцией роста, обладающих нецелой размерностью Гельфанда – Кириллова. Также приводится конструкция конечно определенной полугруппы с бесконечным бесквадратным идеалом.

В третьей главе автор приступает к изложению основного результата диссертации. Сначала проводится геометрическая часть построения. Индуктивно строится последовательность геометрических комплексов. Комплексы обладают самоподобием и апериодической структурой, что роднит их с апериодическими мозаиками. Однако автору необходимо использовать комплексы, не реализующиеся на плоскости.

Ключевая идея всего построения заключается в представлении элементов полугруппы как путей на комплексах. Для реализации этой техники автор использует геометрические свойств построенных комплексов. Основным из этих свойств является эллиптичность – существование широкого набора кратчайших путей между двумя точками комплекса, причем с возможностью локальной трансформации любого кратчайшего пути в любой другой.

В четвертой главе автор проводит доказательство комбинаторного свойства детерминированности построенного семейства комплексов. Детерминированность здесь аналогична соответствующему свойству в апериодических мозаиках. Это свойство позволяет корректно ввести конечное множество определяющих соотношений, каждое из которых устанавливает эквивалентность двух путей с общим началом и концом, образующих некоторые минимальные конфигурации на комплексе. Также вводится набор мономиальных соотношений, приравнивающих к нулю слова, не являющиеся кодировками путей, либо являющиеся кодировками некратчайших путей. Осознание и явное формулирование свойства детерминированности позволило Иванову-Погодаеву достичь существенного упрощения своего первоначального доказательства, весьма сложного.

В пятой главе автор использует введенные определяющие соотношения вместе с геометрическими свойствами комплексов. Описывается алгоритм приведения произвольного слова к канонической форме, имеющей геометрическую интерпретацию. Ненулевым словам соответствуют кодировки кратчайших путей на построенных комплексах. Это дает возможность контроля равенства произвольных слов в полугруппе. В частности, автор доказывает, что произвольное слово, содержащее девятую степень, приводится к нулю. Это позволяет получить итоговую конструкцию, решающую вопрос Шеврина – Сапира.

В шестой главе автор делает первые шаги в направлении уже упомянутой главной остающейся нерешенной проблемы в теории бернсайдовских групп – построения бесконечной конечно определенной группы конечной экспоненты. Геометрическим инструментом здесь является каноническая форма Рипса. Автор предлагает свое изложение метода Рипса, с перекликающееся с методом путей, использованным в основных результатах Иванова-Погодаева. Полученные результаты в ранге два, наряду с излагаемым общим подходом дают основания для дальнейших исследований в случае групп и других алгебраических систем.

В седьмой главе автор излагает несколько смежных с основной тематикой результатов. В частности, рассматриваются вопросы поведения автоматов в графе бернсайдовской группы, а также свойства клеточных автоматов. В приложении указывается интересное применение мозаичных методов в построении геометрических самозаклинивающихся структур.

Изложение диссертации, в частности – геометрический язык, над которым автор работал в течение ряда лет обладает существенно большей прозрачностью, чем многие другие работы по комбинаторной алгебре и комбинаторике слов. Можно ожидать, что такой подход привлечет к данной проблематике новых исследователей молодого поколения, которые разовьют замечательные традиции Адяна, Новикова, Латышева, Ширшова и других отечественных ученых.

В целом диссертация И.А. Иванова-Погодаева, помимо решения конкретной важной алгебраической проблемы, содержит набор методов, которые можно было бы назвать геометрической комбинаторной алгеброй. Автор установил связи между геометрическими структурами и алгебраическими объектами, в определенной степени параллельные построениям М. Громова. Особенно интересно применить данную технику для решения проблемы Латышева о конечно определенном нилькольце. Возможно, развитие методов позволит получить конечно определенные конструкции в групповом случае.

Все результаты диссертации являются новыми, получены И.А. Ивановым-Погодаевым самостоятельно. Работа написана на высоком научном уровне. Результаты диссертации докладывалась на международных и всероссийских научных конференциях и семинарах.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Иванова-Погодаева Ильи Анатольевича удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова» и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.011.4 на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Научный консультант:
Академик РАН
доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

СЕМЕНОВ Алексей Львович 11.03.2026

Контактные данные:
тел.: , email:
Специальность, по которой научным консультантом
защищена диссертация:
01.01.05 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Адрес места работы:
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1,
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет
Тел.: 8(495)939-12-63; email: office@mech.math.msu.su

Подпись заведующего кафедрой механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова А.Л. Семенова удостоверяю:

Декан механико-математического
факультета МГУ, член-корреспондент РАН
профессор А.И. Шафаревич ____________________ /___________________