

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Попандопуло Никита Андреевич

Численное моделирование особенностей динамики окололунных объектов

Специальность 1.3.1. Физика космоса, астрономия

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук, профессор

Бордовицына Татьяна Валентиновна

Томск – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЛУНЫ	18
1.1 Используемые системы координат.....	18
1.2 Уравнения движения.....	20
1.3 Математическая модель действующих сил	21
1.3.1 Возмущения от несферичности селенопотенциала	21
1.3.2 Возмущения от притяжения Земли и Солнца	23
1.3.3 Возмущения от светового давления	24
1.4 Колокационный интегратор Lobbie. Оценка точности интегрирования	30
1.5 Методика распараллеливания вычислительного процесса.....	31
1.6 Программный интерфейс	32
1.7 Сравнение с результатами других авторов.....	35
1.8 Методика исследования влияния вековых резонансов	37
1.8.1 Численный способ определения вековых частот.....	39
1.8.2 Аналитический способ определения вековых частот.....	40
1.9 Методика выявления и исследования орбитальных резонансов.....	41
Глава 2. АНАЛИЗ ОБЩЕЙ СТРУКТУРЫ ВОЗМУЩЕНИЙ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЛУНЫ.....	43
2.1 Описание исходных данных.....	43
2.2 Общий анализ структуры возмущений	44
2.3 Орбитальные резонансы в динамике окололунных объектов	48
Глава 3. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ОКОЛОЛУННЫХ ОБЪЕКТОВ НА НИЗКИХ ОРБИТАХ	51
Глава 4. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ОКОЛОЛУННЫХ ОБЪЕКТОВ НА СРЕДНИХ И ВЫСОКИХ ОРБИТАХ	56
4.1 Исследование влияния вековых резонансов на динамику ИСЛ.....	56
4.1.1 Механизм Лидова–Козаи в динамике окололунных объектов	56
4.1.2 Оценка областей влияния вековых и полувековых резонансов низких порядков в окололунном орбитальном пространстве	69

Глава 5. ОСОБЕННОСТИ ВЛИЯНИЯ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ НА ДИНАМИКУ ОКОЛОЛУННЫХ ОБЪЕКТОВ	72
5.1 Влияние СД на динамику объектов в окололунном орбитальном пространстве	72
5.2 Влияние СД на резонансную структуру движения окололунных объектов	75
Глава 6. ЭСКИЗНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЛУННОЙ ГНСС	84
6.1 Динамическая неустойчивость круговых орбит и применение эффекта Лидова–Козаи....	84
6.2 Выбор угловых орбитальных элементов ГНСС	84
6.3 Выбор позиционных орбитальных элементов ГНСС. Оценка устойчивости орбитальной группировки	86
6.4 Исследование видимости окололунных навигационных спутников	92
6.5 Оптимальная конфигурация лунной ГНСС	98
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	100
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	103
ПРИЛОЖЕНИЕ А Численные результаты по исследованию влияния орбитальных резонансов на динамику окололунных объектов.....	110
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Карты стабильности эксцентриситета и наклона орбит лунной ГНСС .	114

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность данной работы обусловлена современными требованиями к развитию космической деятельности, включая международные программы по исследованию Луны, такие как программа NASA "Artemis" [1], направленная на возвращение человека на Луну, или международный проект "Лунная деревня", разработанный в соавторстве Европейским космическим агентством, Массачусетским технологическим институтом и архитектурным агентством SOM [2]. В рамках этих инициатив, интерес к Луне как объекту исследований значительно возрос. Не только государственные программы, но и частные компании и научные организации уделяют этому заметное внимание. Это объясняется несколькими факторами.

Во-первых, Луна представляет интерес как потенциальный объект для долгосрочного заселения и использования её ресурсов. Обнаружение молекул воды на освещенной Солнцем поверхности Луны было подтверждено данными миссии SOFIA NASA [3]. Результаты миссии "Chandrayaan-1" Индийской организации космических исследований также подтвердили наличие воды на поверхности Луны [4]. Эти результаты открывают перспективы для создания баз, которые могут обеспечить ресурсы для долгосрочных миссий на поверхность Луны, а также поддерживать функционирование пилотируемых и автоматических аппаратов, задействованных в исследовании и освоении окололунного пространства.

Во-вторых, понимание динамических особенностей окололунного пространства имеет важное значение для безопасного полета космических аппаратов и создания стабильных орбит вокруг Луны. К примеру, китайская миссия Chang'e [5], успешно доставившая роверы и посадочные модули на лунную поверхность, позволяет изучить динамику окололунного пространства и условия на поверхности, что необходимо для планирования будущих миссий. Примером российской миссии является "Луна-25" [6], нацеленная на исследование полярных регионов Луны для разработки технологий для посадки и долговременной эксплуатации лунных станций. Несмотря на то, что миссия "Луна-25" не достигла всех своих целей из-за технических сложностей, она предоставила ценные данные для анализа и понимания особенностей окололунной орбиты. Эти миссии подчеркивают необходимость детального исследования особенностей движения на окололунных орбитах для обеспечения успешного выполнения космических миссий, связанных с посадкой на поверхность Луны, а также создания и использования окололунных орбитальных станций.

Исследование динамики объектов окололунного пространства предполагает разработку необходимого программно-математического обеспечения (ПМО) для анализа и прогнозирования орбитальных параметров космических аппаратов. Такое ПМО позволит оптимизировать миссии к Луне путём достижения различных практических целей, таких как оценка времени жизни

спутников на орбите, определение оптимальных параметров орбиты, планирование манёвров и коррекций орбитальных параметров для обеспечения эффективности миссий и др.

Полученные знания об особенностях динамики искусственных спутников Луны (ИСЛ) позволят перейти к проектированию глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС) вокруг Луны. Такая система должна быть спроектирована с учётом требований к структурной устойчивости орбитальной группировки, под которой в данном случае будем понимать минимизацию возмущений в позиционных параметрах орбит системы в течение срока её активного существования, и обеспечения плотной видимости её навигационных спутников на поверхности Луны для широкого спектра исследовательских и прикладных задач.

Таким образом, исследования динамических свойств окололунного пространства отражают актуальные потребности мирового сообщества исследователей космоса. Они создают необходимые условия для разработки методов и технологий успешного освоения Луны и дальнейшего использования её ресурсов.

Исследования движения ИСЛ начались с применения аналитических методов. Первые работы в этой области, такие как [7] и [8], были сосредоточены на разработке аналитических теорий для описания движения окололунных спутников, что позволяло учитывать основные гравитационные возмущения, такие как притяжение Земли, Солнца и неравномерность гравитационного поля Луны. Однако данные подходы имели ограниченную точность, особенно при учёте сложных возмущений.

С развитием наблюдательных технологий и методов обработки данных стали доступны высокоточные модели гравитационного поля Луны, построенные на основе данных миссий, таких как Lunar Prospector [9], Kaguya [10], GRAIL [11]. Эти модели значительно повысили точность расчётов возмущений, вызванных неравномерностью лунного гравитационного поля, что позволило перейти на новый уровень прогнозирования движения окололунных объектов. В частности, появление модели GRAIL1200 [12] позволило учитывать мельчайшие вариации селенопотенциала, что привело к более точному анализу долгосрочной эволюции орбит и устойчивому прогнозированию движения низколетящих спутников.

Прогресс в развитии вычислительной техники сделал возможным более точное численное моделирование движения ИСЛ. В ряде исследований были разработаны алгоритмы для учёта сложных гравитационных и негравитационных возмущений в системе Земля–Луна, что позволило значительно углубить понимание динамики ИСЛ [13]. Благодаря внедрению этих методов, последующие работы внесли важный вклад в исследование орбитальной динамики. Например, авторы [14] проанализировали влияние наклона на время жизни низколетящих ИСЛ на орбите, а в работе [15] были представлены исследования почти круговых орбит с оценками их стабильности и влияния гравитационного поля Луны на долговечность таких орбит.

Важным направлением стало исследование воздействия различных возмущающих факторов на движение спутников. Авторы [16] разработали численный интегратор для анализа долгосрочной эволюции орбит ИСЛ, что позволило учесть временные изменения орбитальных параметров. В работе [17] провели анализ круговых лунных орбит, выявив закономерности в зависимости времени существования орбиты от высоты и наклона. Более сложные модели, учитывающие неравномерное гравитационное поле Луны и воздействие третьих тел, были предложены в исследованиях [18] и [19]. Авторы [20] разработали численные методы для коррекции траекторий, направленные на минимизацию отклонений в орбитальных параметрах и поддержание заданной динамики спутников.

Особое внимание уделялось вопросам орбитальной стабильности ИСЛ. В работах [21] и [22] были представлены инструменты для анализа стабильности орбит, что стало важным шагом для поддержания долговременной точности орбит спутников. Авторы [23] исследовали замороженные орбиты на средних высотах вокруг Луны, продемонстрировав, что их эксцентриситет колеблется с малой амплитудой, а наклонение остается практически неизменным. В исследовании [24] было показано, что использование солнечного паруса способствует поддержанию замороженных орбит и может стабилизировать динамику ИСЛ под воздействием негравитационных возмущений. В работах [25] и [26] исследовали использование устойчивых эллиптических наклонных орбит, способных обеспечивать стабильное покрытие полярных регионов Луны с минимизацией гравитационных возмущений.

Развитие численных методов привело к значительным достижениям в области оценки покрытия и видимости навигационных спутниковых систем на окололунных орбитах. Авторы [27] провели анализ покрытия навигационных созвездий на орбитах Halo и дальних ретроградных орбит (DRO), выявив, что комбинация этих орбит позволяет достичь глобального покрытия Луны, при этом обеспечивая непрерывное покрытие полярных регионов. В работе [28] была предложена многоорбитальная конфигурация ГНСС для Луны, в которой орбиты Halo и DRO используются для охвата всей поверхности Луны с минимальным числом спутников, что также способствует повышению стабильности всей системы.

В последнее время исследователи сосредоточились на разработке ГНСС для Луны. Авторы работы [29] представили имитационную модель навигационной привязки орбитальных космических аппаратов к селенодинамической системе и цифровой карте Луны, ориентированная на практическое навигационное обеспечение лунных миссий. В работе [30] авторы рассмотрели различные аспекты спутниковой навигации в окололунном пространстве, акцентируя внимание на необходимости высокой точности навигации. В исследовании [31] был проведен анализ конфигураций орбитальных группировок, позволяющих обеспечить непрерывное покрытие всей лунной поверхности. Авторы [32] представили сравнительный

анализ различных орбитальных конфигураций для глобальной навигационной системы, предлагая стратегии для обеспечения точного позиционирования.

Несмотря на значительный прогресс в исследовании динамики окололунных объектов, ряд ключевых аспектов остаётся недостаточно изученным. В частности, отдельные исследования затрагивали вопросы резонансных явлений: так, в работе [33] исследовали тессеральные резонансы высокого порядка, связанные с повторяющимися трассами низкоорбитальных спутников, показав возможность длительного существования таких орбит за счёт согласования периода обращения спутника с вращением Луны; Авторы работы [34] исследовали вековую динамику окололунных спутников и выявили доминирование апсидального векового резонанса, связанного с двукратной частотой прецессии аргумента перигентра, оказывающего определяющее влияние на рост эксцентриситета и время жизни орбит. Однако комплексного исследования резонансных механизмов в динамике окололунных спутников до настоящего времени не проводилось. Настоящая работа восполняет этот пробел, предлагая совместный анализ как орбитальных, так и вековых резонансов, и их влияния на долговременную эволюцию окололунных орбит. Кроме того, существующие работы не учитывали особенности влияния светового давления (СД) на резонансную структуру движения ИСЛ.

Помимо упомянутого, в работах других авторов не проводился подробный анализ связи между влиянием сложного по структуре гравитационного поля Луны и эволюцией орбитальных элементов низколетящих спутников, что ограничивало понимание причин короткого времени жизни этих объектов на орбитах. Отсутствовали масштабные численные исследования орбитальной эволюции навигационных спутников в окололунном пространстве, направленных на выявление устойчивых конфигураций спутниковой системы и оценку навигационного покрытия поверхности Луны.

Настоящая работа восполняет эти пробелы.

Цель и задачи диссертационной работы

Целью данной работы является построение полной картины особенностей динамики окололунных объектов методами численного моделирования.

Для реализации поставленной цели, направленной на изучение ключевых аспектов динамики окололунных объектов, были сформулированы и решены следующие задачи:

- разработано программное обеспечение, позволяющее с высокой точностью исследовать движение ИСЛ и влияние вековых и орбитальных резонансов на их динамику;
- исследована причина короткой продолжительности жизни на орбитах низколетящих окололунных объектов;

- исследована структура и произведен анализ влияния вековых и орбитальных резонансов на средних и больших высотах окололунного пространства;
- выявлены особенности влияния СД на эволюцию орбитальных параметров ИСЛ, включая его воздействие на резонансную структуру движения объекта;
- рассмотрена возможность применения полученных результатов для проектирования окололунной ГНСС, удовлетворяющей требованиям структурной устойчивости и видимости навигационных спутников с поверхности Луны.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются временные ряды, описывающие динамику модельных окололунных объектов, равномерно размещенных в окололунном пространстве по заданным критериям распределения. Для множества модельных ИСЛ были рассчитаны такие ряды на 10-летнем интервале времени. Моделирование движения окололунных объектов было проведено с помощью ПМО «Численная модель движения систем ИСЛ».

Предметом исследования является динамическая структура окололунного орбитального космического пространства и особенности движения окололунных объектов.

Методология исследования

Основные законы динамики небесных тел являются методологической основой исследования.

В качестве метода исследования выступает численно-аналитическое моделирование движения объектов. Численное моделирование применяется для расчета орбитальной эволюции объектов на выбранном временном интервале. Оно позволяет получить массив векторов положения и оскулирующих элементов орбит всех рассматриваемых объектов в заданные моменты времени. Для этих же моментов времени для каждого объекта вычисляются компоненты частотного базиса с использованием, численного и аналитического подходов [35].

Формулы для поиска резонансных характеристик находятся с использованием аналитических методов. Для получения характеристик вековых и полuveковых резонансов использовались идеи, предложенные Дж. Куком [36]. Эти характеристики извлекаются из аргумента однократно и двукратно осредненной возмущающей функции. Методика, изложена в работе [37], и дополнена в [38].

Исследование динамики окололунных объектов производилось по следующей схеме:

1. Долгосрочная эволюция орбит рассчитывалась с использованием программного комплекса «Численная модель движения систем ИСЛ». В процессе моделирования учитывались

воздействия гравитационного поля Луны, возмущающее влияние Земли и Солнца, а также эффект СД и приливных деформаций Луны.

2. После моделирования движения объектов, был проведен анализ влияния различных возмущающих факторов. Влияние сложного гравитационного поля Луны на низких орбитах определялось путем анализа силы, представленной в виде составляющих орбитальной системы координат. Для исследования особенностей динамики на средних и высоких орбитах оценивалось влияние вековых и орбитальных резонансов с использованием разработанной численно-аналитической методики.

3. Отдельно рассмотрены особенности динамики ИСЛ при учёте влияния СД. Проведено численное моделирование движения окололунных объектов с добавлением СД к основному набору возмущающих факторов с двумя вариантами параметра парусности. Получены результаты влияния СД на орбитальную эволюцию окололунных объектов с помощью оценки вклада действующей на ИСЛ силы вдоль радиального, трансверсального и бинормального направлений движения. Дополнительно проведен анализ карт распределения влияния вековых резонансов на спутники с целью исследования особенностей влияния СД на резонансную структуру окололунного орбитального пространства.

4. Выполнено эскизное проектирование модели ГНСС для Луны. Оптимальная структурная устойчивость и видимость спутников системы на лунной поверхности оценивались путем моделирования и анализа орбитальной эволюции спутников с варьированием эксцентриситета и наклона орбит на разных высотах. Для оценки видимости были построены карты покрытия лунной поверхности спутниками рассматриваемой ГНСС. Оценка структурной устойчивости ГНСС проводилась путем анализа амплитуды колебаний параметров наклона и эксцентриситета орбит на 10-летнем интервале времени.

Для получения этих результатов использовались численно-аналитические методы моделирования и вычисления резонансных характеристик [35, 39, 40, 41], а также инструменты для построения динамических карт. Интегрирование дифференциальных уравнений движения ИСЛ производилось с использованием коллокационного численного метода, представленного в [42].

Научная новизна

Научная новизна работы состоит в следующем:

- проведено численное моделирование движения большого числа окололунных объектов в диапазонах большой полуоси от 1838 км до 26070 км и наклона от 0° до 180° на круговых и эллиптических орбитах окололунного орбитального пространства с целью анализа влияния на них различных возмущающих факторов;

- разработана численно-аналитическая методика выявления влияния вековых и орбитальных резонансов на динамику окололунных объектов, позволяющая эффективно исследовать объекты с различными эксцентриситетами и наклонениями орбит;

- впервые построены карты распределения вековых резонансов в окололунном пространстве, показывающие зоны значительного влияния резонансов на орбитальную эволюцию лунных спутников;

- впервые выполнен комплексный анализ влияния механизма Лидова–Козаи на динамику окололунных спутников: выявлены все характерные режимы проявления этого механизма (эффект Лидова–Козаи, слабый резонанс и точный резонанс) и установлено, что существование долгоживущих устойчивых “замороженных” орбит на средних и больших высотах обусловлено захватом ИСЛ в точный резонанс Лидова–Козаи;

- построены карты устойчивости орбит ИСЛ в пространстве параметров аргумента перигентра, наклонения и эксцентриситета (с учётом гравитационных возмущений от Земли и Солнца), позволяющие наглядно выявить области долговременной стабильности окололунных орбит;

- дано объяснение особенностей динамики низколетящих окололунных объектов;

- исследовано влияние СД на орбитальную динамику ИСЛ и резонансную структуру движения этих объектов;

- представлена эскизная модель лунной ГНСС с оценками структурной устойчивости и видимости системы на поверхности Луны.

Теоретическая и практическая значимость

Разработанная численно-аналитическая методика выявления влияния вековых резонансов позволяет эффективно исследовать объекты с различными эксцентриситетами и наклонениями орбит.

Проведено обширное численное моделирование движения окололунных объектов, что позволило проанализировать влияние различных возмущающих факторов на орбитальную эволюцию ИСЛ. В результате удалось определить ключевые параметры, влияющие на стабильность орбит, и предложить оптимальные траектории для долговременных миссий.

Построены динамические карты окололунного орбитального пространства, демонстрирующие области значительного влияния вековых резонансов (прежде всего механизма Лидова–Козаи) на орбитальную эволюцию ИСЛ. Эти карты имеют практическую значимость для планирования миссий и размещения спутниковых систем, так как помогают определить области с наиболее стабильными условиями для длительного нахождения спутников на орбитах.

Предложенная модель ГНСС для Луны обладает практической ценностью, она способна обеспечить устойчивую структурную конфигурацию и высокий уровень покрытия поверхности Луны спутниковой системой. Исследование показало, что, несмотря на необходимость корректирующих маневров для поддержания стабильности орбитальных параметров, предложенная конфигурация ГНСС гарантирует надёжную видимость около половины спутников группировки на всей поверхности Луны.

Таким образом, проведенные исследования углубляют понимание динамических процессов в окололунном пространстве и способны играть важную роль в проектировании, размещении и эксплуатации ИСЛ. Результаты работы могут быть применены для разработки лунной ГНСС и при оптимизации траекторий космических миссий, что говорит о практической ценности данной работы для последующего освоения Луны.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработанная численная модель движения искусственных спутников Луны позволяет проводить высокоточное моделирование движения окололунных объектов и исследовать динамику этих объектов.

2. Короткое время жизни низколетящих окололунных объектов на орбите обусловлено преобладающим влиянием радиальной составляющей гравитационного поля Луны, что приводит к быстрому росту эксцентриситетов.

3. На средних и больших высотах окололунного орбитального пространства влияние вековых резонансов, прежде всего механизма Лидова–Козаи, приводит к большому росту эксцентриситетов орбит.

4. Механизм Лидова–Козаи в окололунном пространстве проявляется в трёх формах — эффект, резонанс и точный резонанс, причём точный резонанс способен обеспечивать динамическую устойчивость орбит на длительных интервалах времени.

5. Влияние светового давления на движение искусственных спутников Луны приводит к дополнительному увеличению эксцентриситета орбит, сокращению времени жизни спутников и изменению структуры резонансных зон.

6. Предложенная конфигурация лунной глобальной навигационной спутниковой системы обеспечивает структурную устойчивость орбит и высокую плотность навигационного покрытия поверхности Луны.

Список публикаций по теме диссертации

Результаты диссертационной работы опубликованы в 9 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базе ядра РИНЦ «eLibrary Science Index», международными базами

данных (Web of Science, Scopus, RSCI) и рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.3.1. Физика космоса, астрономия.

1. А. Г. Александрова, Т. В. Бордовицына, **Н. А. Попандопуло**, И. В. Томилова. Новый подход к вычислению вековых частот в динамике околоземных объектов на орбитах с большими эксцентриситетами. Известия высших учебных заведений. Физика, том 63, № 1(745), стр. 57–62, 2020. EDN: NNLYYO. Импакт-фактор 0.350 (РИНЦ). Личный вклад 25%. Объем 0.72 печатных листа.

A. G. Aleksandrova, T. V. Bordovitsyna, **N. A. Popandopulo**, I. V. Tomilova. A New Approach to Calculation of Secular Frequencies in the Dynamics of Near-Earth Objects in Orbits with Large Eccentricities. Russian Physics Journal, Vol. 63, No. 1, pp. 64–70, 2020. EDN: PNWMSS. Импакт-фактор 0.130 (JCI). Личный вклад 25%. Объем 0.84 печатных листа.

2. **Н. А. Попандопуло**, А. Г. Александрова, И. В. Томилова, В. А. Авдюшев, Т. В. Бордовицына. Численное моделирование динамики искусственных спутников Луны. Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы, том 56, № 4, стр. 266–284, 2022. EDN: CATLGU. Импакт-фактор 0.990 (РИНЦ). Личный вклад 75%. Объем 2.28 печатных листа.

N. A. Popandopulo, A. G. Aleksandrova, I. V. Tomilova, V. A. Avdyushev, T. V. Bordovitsyna. Numerical Modeling of the Dynamics of Artificial Satellites of the Moon. Solar System Research, Vol. 56, No. 4, pp. 252–270, 2022. EDN: MOZBFO. Импакт-фактор 0.180 (JCI). Личный вклад 75%. Объем 2.28 печатных листа.

3. **Н. А. Попандопуло**, А. Г. Александрова, Т. В. Бордовицына. К обоснованию численно-аналитической методики выявления вековых резонансов. Известия высших учебных заведений. Физика, том 65, № 6(775), стр. 47–52, 2022. EDN: UNVHRP. Импакт-фактор 0.367 (РИНЦ). Личный вклад 75%. Объем 0.72 печатных листа.

N. A. Popandopulo, A. G. Aleksandrova, T. V. Bordovitsyna. To the Substantiation of a Numerical-Analytical Method for Revealing Secular Resonances. Russian Physics Journal, Vol. 65, No. 6, pp. 959–965, 2022. EDN: HIMLXG. Импакт-фактор 0.130 (JCI). Личный вклад 75%. Объем 0.84 печатных листа

4. **Н. А. Попандопуло**, А. Г. Александрова, Т. В. Бордовицына. Анализ динамической структуры вековых резонансов в окололунном орбитальном пространстве. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2022, № 77, стр. 110–124. EDN: BEIQKQ. Импакт-фактор 0.490 (РИНЦ). Личный вклад 75%. Объем 1.8 печатных листа.

N. A. Popandopulo, A. G. Aleksandrova, T. V. Bordovitsyna. Analysis of a Dynamic Structure of Secular Resonances in Circumlunar Orbital Space. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics, 2022, No. 77, pp. 110–124. EDN: BMKKAH. Импакт-фактор 0.050 (JCI). Личный вклад 75%. Объем 1.8 печатных листа.

5. **N. A. Popandopulo**, A. G. Aleksandrova. Searching for Optimal Areas of Circumlunar Space for Placement of Satellites Moving in Circular Orbits. *Russian Physics Journal*, Vol. 67, No. 7, pp. 1058–1064, 2024. EDN: HJILXE. Импакт-фактор 0.130 (JCI). Личный вклад 75%. Объем 0.84 печатных листа.

6. **Н. А. Попандопуло**, А. Г. Александрова, Н. А. Кучерявченко, Т. В. Бордовицына, Д. С. Красавин. Усовершенствованная численная модель движения искусственных спутников Луны и её применение в исследовании особенностей динамики окололунных объектов. *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*, том 58, № 6, стр. 783–806, 2024. EDN: NGVXCS. Импакт-фактор 0.800 (РИНЦ). Личный вклад 75%. Объем 2.88 печатных листа.

N. A. Popandopulo, A. G. Aleksandrova, N. A. Kucheryavchenko, T. V. Bordovitsyna, D. S. Krasavin. Improved Numerical Model of Motion of Artificial Satellites of the Moon and Its Application in Research Features of the Dynamics of Circumlunar Objects. *Solar System Research*, Vol. 58, No. 6, pp. 780–800, 2024. EDN: OOKWVI. Импакт-фактор 0.180 (JCI). Личный вклад 75%. Объем 2.52 печатных листа.

7. V. A. Avdyushev, **N. A. Popandopulo**. Analysis of Circumlunar Orbital Structures for Designing the Space Segment of a Lunar Global Navigation Satellite System. *Cosmic Research*, Vol. 63, No. 4, pp. 342–351, 2025. DOI: 10.1134/S0010952524601361 (EDN не известен). Импакт-фактор 0.160 (JCI). Личный вклад 50%. Объем 1.2 печатных листа.

8. **N. A. Popandopulo**, V. A. Avdyushev, I. V. Tomilova, T. V. Bordovitsyna. Numerical Modeling of the Influence of the Lidov–Kozai Mechanism on the Dynamics of Nearlunar Objects. *Astronomical and Astrophysical Transactions*, Vol. 35(1), pp. 17–28, 2025. DOI: 10.17184/eac.9606 (EDN не известен). Импакт-фактор 0.170 (SJR). Личный вклад 75%. Объем 0.72 печатных листа.

9. И. В. Томилова, Т. В. Бордовицына, А. Г. Александрова, Е. В. Блинкова, **Н. А. Попандопуло**, Т. В. Шафоростов. Численно-аналитический подход к исследованию резонансных структур околопланетных орбитальных пространств. *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*, том 59, № 3, стр. 239–256, 2025. EDN: KWELQA. Импакт-фактор 1.333 (РИНЦ). Личный вклад 15%. Объем 0.72 печатных листа.

I. V. Tomilova, T. V. Bordovitsyna, A. G. Aleksandrova, E. V. Blinkova, **N. A. Popandopulo**, T. V. Shaforostov. Numerical and Analytical Approach to the Study of Resonant Structures of Near-Planetary Orbital Spaces. *Solar System Research*, Vol. 59, No. 3, pp. 39–53, 2025. EDN: VGCABD. Импакт-фактор 0.180 (JCI). Личный вклад 15%. Объем 0.72 печатных листа.

Личный вклад автора

В статьях 1 (личный вклад 70%), 3 (личный вклад 70%) автор разработал численно-аналитическую методику выявления вековых резонансов, провёл её тестирование и подготовил

значительную часть текста. В статьях 2 (личный вклад 75%), 4 (личный вклад 75%), 5 (личный вклад 75%) и 8 (личный вклад 75%) автор является первым автором и выполнил большую часть работы. В статье 6 (личный вклад 60%) автор усовершенствовал численную модель движения ИСЛ с учётом возмущений и параллельных вычислений, выполнил расчёты и участвовал в анализе результатов. В статье 7 (личный вклад 60%) автор выполнил моделирование окололунных орбитальных структур для проектирования космического сегмента лунной ГНСС, подготовил карты видимости и анализ покрытия поверхности Луны, участвовал в написании текста. В статье 9 (личный вклад 15%) автор провёл расчёты для окололунного сегмента в рамках исследования резонансных структур околопланетных орбитальных пространств и участвовал в подготовке текста.

Степень достоверности результатов

Моделирование движения ИСЛ выполнялось с использованием разработанного автором ПМО, основанного на высокоточных численных методах и современных гравитационных моделях (в том числе GRAIL1200), которые широко применяются в научных исследованиях динамики окололунных объектов. Часть исходных данных и параметров моделей была заимствована из авторитетных международных каталогов и публикаций, что обеспечивает воспроизводимость расчётов. Полученные результаты согласуются с независимыми расчётами других авторов для сопоставимых условий, а также подтверждаются известными теоретическими зависимостями и аналитическими оценками. Тестирование программного комплекса проводилось на ряде модельных задач с известным решением, что подтвердило его корректность и точность.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы опубликованы в 9 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базе ядра РИНЦ «eLibrary Science Index», международными базами данных (Web of Science, Scopus, RSCI) и рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.3.1. Физика космоса, астрономия.

Результаты научной работы были представлены на следующих научных конференциях:

1. XI Международная научная конференция «Околоземная астрономия и космическое наследие», Казань, 2019.
2. 49-я Международная студенческая научная конференция «Физика космоса», Екатеринбург, 2020.
3. Одиннадцатый Московский международный симпозиум по исследованиям Солнечной системы, Москва, 2020.

4. Международная конференция Europlanet Science Congress, онлайн, 2020.
5. X Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики – 2020», Томск, 2020.
6. Всероссийская конференция «XLV Академические чтения по космонавтике», Москва, 2021.
7. Всероссийская астрономическая конференция с международным участием «Астрономия в эпоху многоканальных исследований», Москва, 2021.
8. XI Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики – 2021», Томск, 2021.
9. XII Всероссийская научная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», Томск, 2022.
10. XII Всероссийская научная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», Томск, 2023.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения, списка использованных источников (85 наименований) и двух приложений, содержит 66 рисунков и 11 таблиц. Общий объем работы составляет 120 страниц.

Во *Введении* обосновывается актуальность темы диссертационной работы. Описаны цели и задачи исследования, даётся характеристика научной новизны работы, а также научной и практической значимости полученных результатов. Формулируются основные положения, выносимые на защиту. Указан личный вклад автора, приведён список опубликованных статей, а также конференций, на которых были представлены эти результаты. Изложена структура и новизна работы, а также краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена разработке численной модели движения систем ИСЛ. Описываются используемые системы координат (СК), уравнения движения и силы, действующие на ИСЛ, включая возмущения от несферичности гравитационного потенциала Луны, притяжения Земли и Солнца, рассматриваемых как материальные точки, а также возмущения от СД. Значимым элементом численной модели является интегрирование уравнений движения с использованием коллокационного интегратора Lobbie [42], который обеспечивает высокую точность расчетов. Особое внимание уделено описанию методики исследования влияния вековых резонансов на орбитальную динамику. Кроме того, в главе приводится описание метода распараллеливания вычислительного процесса, что позволяет эффективно использовать суперкомпьютеры для моделирования движения большого числа объектов. Описан пользовательский интерфейс программного обеспечения, который облегчает работу с моделью.

Вторая глава фокусируется на описании общей структуре возмущений, воздействующих на ИСЛ. Выполняется численное моделирование динамики более 5000 объектов на круговых орбитах в окололунном пространстве в течение 10-летнего периода. Оцениваются влияния гравитационного поля Луны, Земли и Солнца на положение ИСЛ. Исследуется, как начальные параметры орбит, такие как большая полуось, наклонение и долгота восходящего узла, воздействуют на орбитальную стабильность. Особое внимание уделено анализу изменений эксцентриситета и времени жизни объектов на орбитах в зависимости от этих параметров. Кроме того, исследовано влияние орбитальных резонансов, вызванных неоднородностями гравитационного поля Луны (масконами). Показано, что в гравитационном поле Луны существует по крайней мере 8 аномалий, способных вызывать резонансные эффекты в динамике окололунных объектов, но поскольку порядок резонанса высок эффект этот незначителен.

Третья глава посвящена особенностям динамики спутников на низких окололунных орбитах. Рассматриваются гравитационные воздействия со стороны Луны, которые оказывают доминирующее влияние на движение объектов на малых высотах. Воздействие третьих тел сведено к минимуму, что позволяет сосредоточиться на анализе гравитационного поля Луны. Особое внимание уделено оценке короткой продолжительности жизни объектов на низких орбитах, максимального роста эксцентриситета и влиянию на ИСЛ нецентральных составляющих гравитационного поля Луны, представленных в орбитальной СК. Также рассматривается влияние начальной долготы восходящего узла на стабильность низкоорбитальных спутников.

В *четвёртой главе* диссертации изложены результаты анализа динамики спутников, движущихся на средних и высоких орбитах. Рассматривается влияние вековых резонансов на орбитальную эволюцию объектов. Особое внимание уделено механизму Лидова–Козаи [43, 44], имеющему резонансную природу [45, 46]. Подробно описаны механизмы резонансного взаимодействия и их воздействие на ключевые параметры орбит, такие как эксцентриситет и наклонение. Впервые выполнено комплексное исследование, показавшее, что механизм Лидова–Козаи в окололунном пространстве проявляется во всех своих формах (слабый резонанс, точный резонанс и эффект Лидова–Козаи), при этом было установлено, что действие данного механизма при определённых условиях способствует формированию долгоживущих устойчивых («замороженных») орбит. Исследовано устойчивое и неустойчивое влияние вековых и полuveковых резонансов низких порядков на орбитальную динамику. Построены карты зон наложения резонансов, демонстрирующие области их значительного воздействия, и определены оптимальные орбитальные параметры, минимизирующие негативное влияние резонансных явлений на долговременную устойчивость орбит спутников Луны.

Пятая глава связана с описанием исследования влияния СД на орбитальную динамику окололунных объектов. Рассматриваются численные модели, учитывающие воздействие СД на орбиты спутников с параметрами парусности 0.1 и 1 м²/кг. Проведен анализ изменений орбитальных параметров, включая рост эксцентриситета и сокращение времени существования орбит, вызванное дополнительным влиянием СД. Особое внимание уделено влиянию СД на резонансную динамику объектов и появлению новых областей наложения резонансов, что имеет значение для проектирования устойчивых орбитальных конфигураций.

Шестая глава посвящена эскизному проектированию лунной ГНСС, основанной на высокоэллиптических орбитах и состоящей из 24 спутников. Проведено численное моделирование движения спутников с варьированием основных орбитальных параметров, включая большую полуось (4–12 радиусов Луны), эксцентриситет (до 0.7) и наклонение (40°–65°). Выполнен анализ влияния этих параметров на устойчивость орбитальных группировок и качество навигационного покрытия. Определены параметры, обеспечивающие долговременную стабильность орбит и высокую плотность покрытия с одновременной видимостью до 10–11 спутников на всей поверхности Луны. Подробно рассмотрены структурные и динамические характеристики оптимальной конфигурации, а также её эффективность в обеспечении стабильности и покрытия.

Глава 1. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЛУНЫ¹

В настоящей главе представлена разработанная численная модель движения систем ИСЛ: используемые системы координат и уравнения движения; модели возмущений (селенопотенциал, притяжение Земли и Солнца, СД); коллокационный интегратор Lobbie и контроль точности; организация вычислительного процесса и элементы программного интерфейса. Краткое описание комплекса и интерфейса ранее опубликовано в [47].

1.1 Используемые системы координат

В рамках численного моделирования движения ИСЛ используются различные селеноцентрические СК, каждая из которых задействована на определенных этапах алгоритма прогнозирования и исследования движения окололунных объектов. В процессе прогнозирования движения ИСЛ происходят неоднократные переходы между этими системами, что позволяет учитывать различные возмущающие факторы на спутники и обеспечивать высокую точность вычислений. Приведем описание используемых систем в программном комплексе «Численная модель движения систем ИСЛ».

Инерциальная селеноэкваториальная СК (x). Ось Z ориентирована вдоль оси вращения Луны, оси X и Y расположены в плоскости экватора Луны, причем ось X направлена в сторону точки пересечения лунного экватора с небесным экватором в направлении на точку начала отсчета в Международной небесной системе координат (ICRF). Основной особенностью СК является то, что оси этой системы неподвижны относительно удаленных звезд и не вращаются вместе с Луной. Это позволяет использовать СК для задания положения спутников в инерциальной системе отсчета.

Вращающаяся селеноэкваториальная СК (y). В этой СК ось Z , как и в предыдущем случае ориентирована вдоль оси вращения Луны. Оси X и Y также расположены в плоскости экватора Луны, однако в отличие от инерциальной системы, они вращаются вместе с Луной. Ось X направлена на лунный начальный меридиан, что позволяет фиксировать положение спутников относительно поверхности Луны. Ось Y дополняет правую СК. Моделирование орбит спутников в данной СК обеспечивает более точное представление их движения относительно поверхности Луны, что важно для планирования и коррекции траекторий полета, а также учёта влияния неоднородностей гравитационного поля Луны. Кроме того, вращающаяся система используется для расчёта периодов видимости спутников с различных точек на поверхности Луны.

¹ При написании данной главы использовались материалы публикаций по теме диссертации 1, 2, 3, 4 и 6, выполненных в соавторстве.

Инерциальная геоэкваatoriальная СК ($\mathbf{x}_{\text{ICRF}}$) используется для интегрирования дифференциальных уравнений (ДУ) движения ИСЛ. Ось Z в инерциальной геоэкваatoriальной системе направлена вдоль оси вращения Земли, ось X ориентирована в сторону точки весеннего равноденствия, а ось Y дополняет правую СК. Использование этой системы позволяет избежать дополнительных переходов между СК в процессе интегрирования ДУ, поскольку положения возмущающих тел извлекаются из фонда координат больших планет в геоэкваatoriальной СК.

Для перевода вектора $\mathbf{x}_{\text{ICRF}}$ из геоэкваatoriальной СК в селеноэкваatoriальную систему $\mathbf{x}$ необходимо выполнить следующее преобразование координат (рисунок 1.1):

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_x(90^\circ - \delta_0) \mathbf{R}_z(\alpha_0 + 90^\circ) \mathbf{x}_{\text{ICRF}}, \quad (1.1)$$

а для перехода вектора положения $\mathbf{x}$ из инерциальной СК во вращающуюся систему $\mathbf{y}$ преобразование будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_z(\gamma_0) \mathbf{x}, \quad (1.2)$$

где α_0 — прямое восхождение северного полюса вращения Луны; δ_0 — склонение северного полюса Луны; γ_0 — угловое расстояние между восходящим узлом экватора Луны и начальным меридианом в плоскости экватора Луны.



Рисунок 1.1 — Графическое представление перехода между инерциальной геоэкваatoriальной СК во вращающуюся систему относительно экватора Луны

Матрицы имеют следующие назначения:

$\mathbf{R}_z(\alpha_0 + 90^\circ)$ — матрица поворота на угол, приводящая ось X в положение, соответствующее экваториальной плоскости Луны;

$\mathbf{R}_x(90^\circ - \delta_0)$ — корректирует наклон плоскости экватора Луны относительно небесного экватора, приводя СК в положение, в котором ось Z будет совпадать с осью вращения Луны;

$\mathbf{R}_z(\gamma_0)$ — выполняет поворот СК вокруг оси Z на угол W , который определяется положением начального меридиана Луны в конкретный момент времени.

Значения угловых величин, описывающих направление северного полюса вращения Луны и начального меридиана, рассчитываются следующим образом [48]:

$$\alpha_0 = 269.9949^\circ + 0.0031T_{\text{JD}} - 3.8787 \sin E_1 - 0.1204 \sin E_2 + 0.0700 \sin E_3 - 0.0172 \sin E_4 + 0.0072 \sin E_6 - 0.0052 \sin E_{10} + 0.0043 \sin E_{13},$$

$$\delta_0 = 66.5392^\circ + 0.01307T_{\text{JD}} + 1.5419 \cos E_1 + 0.0239 \cos E_2 - 0.0278 \cos E_3 + 0.0068 \cos E_4 - 0.0029 \cos E_6 + 0.0009 \cos E_7 + 0.0008 \cos E_{10} - 0.0009 \cos E_{13},$$

$$\gamma_0 = 38.3213 + 13.17635815d - 1.4 \times 10^{-12} d^2 + 3.5610 \sin E_1 + 0.1208 \sin E_2 - 0.0642 \sin E_3 + 0.0158 \sin E_4 + 0.0252 \sin E_5 - 0.0066 \sin E_6 - 0.0047 \sin E_7 - 0.0046 \sin E_8 + 0.0028 \sin E_9 + 0.0052 \sin E_{10} + 0.0040 \sin E_{11} + 0.0019 \sin E_{12} - 0.0044 \sin E_{13},$$

$$\begin{aligned} E_1 &= 125.045^\circ - 0.0529921d, & E_2 &= 250.089^\circ - 0.1059842d, & E_3 &= 260.008^\circ + 13.0120009d, \\ E_4 &= 176.625^\circ + 13.3407154d, & E_5 &= 357.529^\circ + 0.9856003d, & E_6 &= 311.589^\circ + 26.4057084d, \\ E_7 &= 134.963^\circ + 13.0649930d, & E_8 &= 276.617^\circ + 0.3287146d, & E_9 &= 34.226^\circ + 1.7484877d, \\ E_{10} &= 15.134^\circ - 0.1589763d, & E_{11} &= 119.743^\circ + 0.0036096d, & E_{12} &= 239.961^\circ + 0.1643573d, \\ E_{13} &= 25.053^\circ + 12.9590088d, \end{aligned}$$

T_{JD} — интервал в юлианских столетиях от стандартной эпохи,

d — интервал в сутках от стандартной эпохи (J2000.0).

Инерциальная СК относительно орбитальной плоскости Земли ($\mathbf{x}_{\text{GNSS}}$). В этой системе ось Z направлена перпендикулярно к плоскости орбиты Земли, ось X ориентирована в сторону центра Земли, а ось Y дополняет правую СК. Преимущество использования данной СК заключается в том, что она позволяет более точно моделировать долгосрочные возмущения, вызываемые притяжением Земли, что необходимо для обеспечения стабильности орбитальных параметров на длительных временных интервалах в лунных навигационных задачах. Данная СК будет подробно рассмотрена в шестой главе диссертации, посвященной эскизному проектированию лунной ГНСС.

1.2 Уравнения движения

Рассмотрим движение ИСЛ как движение материальной точки с бесконечно малой массой в гравитационном поле Луны. Программный комплекс позволяет интегрировать дифференциальные уравнения движения ИСЛ в инерциальной прямоугольной системе координат, связанной с центром масс Луны, в следующем виде:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{P} = \mathbf{R}^T \mathbf{P}_M + \mathbf{P}_E + \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_{SL} \quad (1.3)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{P}$ — ускорение ИСЛ; $\mathbf{P}_M$ — возмущающее ускорение, обусловленное влиянием селенопотенциала и записанное в СК, жёстко связанной с Луной; $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}_Z(\gamma_0)^T$ — матрица перехода из вращающейся СК в инерциальную; $\mathbf{P}_E, \mathbf{P}_S$ — возмущающие ускорения, обусловленные притяжением Земли и Солнца соответственно; $\mathbf{P}_{SL}$ — ускорение, вызванное давлением солнечной радиации.

Интегрирование ДУ движения ИСЛ (1.3) происходит в СК, ориентированной относительно экватора Земли. Как уже было отмечено в разделе 1.1, данный подход позволяет оптимизировать процесс учёта возмущений $\mathbf{P}_E, \mathbf{P}_S, \mathbf{P}_{SL}$, т.к. исходное положение возмущающих тел представлено в геоэкваториальной СК.

1.3 Математическая модель действующих сил

1.3.1 Возмущения от несферичности селенопотенциала

Потенциал притяжения Луны, действующий на внешнюю точку, будем представлять следующим образом [49]:

$$V = \frac{\mu_M}{R_M} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_M}{|\mathbf{y}|} \right)^{n+1} \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) [\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda] \right\}, \quad (1.5)$$

где μ_M — гравитационный параметр Луны; R_M — средний радиус Луны; $|\mathbf{y}|, \varphi, \lambda$ — сферические координаты внешней точки во вращающейся СК; $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$ — гармонические коэффициенты, описывающие структуру гравитационного поля Луны, причем $\bar{S}_{n,0} = 0$; $\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)$ — полностью нормированные присоединенные функции Лежандра, связанные с классическими $P_{n,m}$ формулой:

$$\bar{P}_{n,m} = N_{n,m} P_{n,m},$$

где

$$N_{n,m} = \sqrt{\frac{(n-m)(2n+1)(2-E_m)}{(n+m)!}}, \quad E_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases}.$$

Учитывая выше сказанное, влияние от несферичности селенопотенциала будем вычислять следующим образом:

$$\mathbf{P}_M = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}}. \quad (1.6)$$

Для вычисления составляющих разложения потенциала притяжения Луны (1.5) и его производных (1.6) будем использовать рекуррентный алгоритм Л. Каннингема [50]. Для этого введем шаровую функцию

$$\bar{V}_{n,m} \equiv \frac{\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)(\cos m\lambda + i \sin m\lambda)}{|\mathbf{y}|^{n+1}}$$

и перепишем соотношение (1.5) как

$$V = \text{Real} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_M^n (\bar{C}_{n,m} - i \bar{S}_{n,m}) \bar{V}_{n,m}.$$

Выразим прямоугольные координаты y_1, y_2, y_3 через сферические $|\mathbf{y}|, \varphi, \lambda$:

$$y_1 = |\mathbf{y}| \cos \varphi \cos \lambda, \quad y_2 = |\mathbf{y}| \cos \varphi \sin \lambda, \quad y_3 = |\mathbf{y}| \sin \varphi,$$

а шаровые функции $\bar{V}_{n,m}$ с помощью нижеследующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{n,m} &= \frac{\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)(y_1 + iy_2)^m}{\cos^m \varphi}, \\ \bar{V}_{n,m} &= \sqrt{\frac{E_m(2n+1)}{E_{m-1}2m}} \frac{y_1 + iy_2}{|\mathbf{y}|^2} \bar{V}_{n-1,m-1}, \quad (m = n) \\ \bar{V}_{n,m} &= \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{n^2 - m^2}} \frac{y_3'}{|\mathbf{y}|^2} \bar{V}_{n-1,m} - \sqrt{\frac{(2n+1)[(n-1)^2 - m^2]}{(2n-3)(n^2 - m^2)}} \frac{1}{|\mathbf{y}|^2} \bar{V}_{n-2,m}, \\ V_{0,0} &= \frac{1}{|\mathbf{y}|}, \\ \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial y_1} &= -\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2} + \\ &\quad + \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}} \frac{\bar{V}_{n+1,m-1}}{2}, \quad (m > 0) \\ \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial y_1} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \text{Real} \bar{V}_{n+1,1}, \quad (m = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial y_2} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} i \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2} + \\
&+ \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}} i \frac{\bar{V}_{n+1,m-1}}{2}, \quad (m > 0) \\
\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial y_2} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \text{Imag} \bar{V}_{n+1,1}, \quad (m = 0) \\
\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial y_3} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3}} \bar{V}_{n+1,m}, \quad (m \geq 0)
\end{aligned}$$

Возмущения, вызванные приливными деформациями Луны под воздействием притяжения Земли и Солнца, учитываются в виде поправок к коэффициентам разложения гравитационного поля Луны $\bar{C}_{n,m}$, $\bar{S}_{n,m}$, свободным от приливных эффектов (1.5), и рассматриваются исключительно в рамках модели Лява. Задача сводится к вычислению поправок, определяемых частотно независимыми величинами $k_{n,m}$, по следующей формуле:

$$\Delta \bar{C}_{n,m} - i \Delta \bar{S}_{n,m} = \frac{k_{n,m}}{2n+1} \left[\frac{\mu_E}{\mu_M} \left(\frac{R_M}{|\mathbf{x}_E|} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\sin \varphi_E) e^{-im\lambda_E} + \frac{\mu_S}{\mu_M} \left(\frac{R_M}{|\mathbf{x}_S|} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\sin \varphi_S) e^{-im\lambda_S} \right],$$

где k_{nm} — номинальное число Лява степени n , порядка m (таблица 1.1); μ_E, μ_S — гравитационные параметры Земли и Солнца соответственно; $\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_S$ — селеноцентрические векторы положения Земли и Солнца соответственно; $\varphi_E, \lambda_E, \varphi_S, \lambda_S$ — соответственно широта и долгота Земли и Солнца в селеноцентрической СК, жёстко связанной с Луной.

Таблица 1.1 — Номинальные числа Лява

n	m	k_{nm}
2	0	0.02163
2	1	0.03786
2	2	0.10786

1.3.2 Возмущения от притяжения Земли и Солнца

Для учёта влияния внешних возмущающих тел на движение ИСЛ используется известная формула [51]:

$$\mathbf{P}_{E,S} = \mu_{E,S} \left(\frac{\mathbf{x}_{E,S} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{E,S} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_{E,S}}{|\mathbf{x}_{E,S}|^3} \right). \quad (1.7)$$

где $\mu_{E,S}$ и $\mathbf{x}_{E,S}$ — гравитационные параметры и селеноцентрические радиус-векторы Земли и Солнца соответственно.

Для определения координат возмущающих тел используется фонд координат крупных планет DE438/LE438 [52], обеспечивающий высокую точность вычислений в пределах временного интервала 1550–2650 гг.

1.3.3 Возмущения от светового давления

Ускорение ИСЛ, вызываемое давлением солнечной радиации, даётся выражением

$$\mathbf{P}_{SL} = \Phi k_S \eta \frac{a_E^2}{|\mathbf{x}|^2} \frac{\sigma}{m_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad (1.8)$$

где Φ — функция тени; $k_S = 4.56 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2$ — солнечная постоянная; η — постоянная, характеризующая отражающие свойства объекта ($\eta = 1$ соответствует зеркальному отражению); a_E — астрономическая единица; σ , m_0 — площадь миделевого сечения и масса моделируемого объекта, соответственно.

Наиболее сложным параметром в выражении (1.8) с вычислительной точки зрения является функция тени, поскольку спутник может попадать одновременно в тень Луны и Земли. В связи с этим необходимо учитывать взаимные геометрические положения окололунного объекта, Луны, Земли и Солнца. Возможные конфигурации дисков небесных тел представлены на рисунках 1.2 и 1.3.

Рассмотрим каждый случай взаимного положения по отдельности. Обозначим b_{ES} — угловое расстояние между центрами дисков Земли и Солнца, b_{MS} — угловое расстояние между центрами дисков Луны и Солнца, b_{ME} — угловое расстояние между центрами дисков Луны и Земли, r_S — угловой радиус Солнца, r_E — угловой радиус Земли, r_M — угловой радиус Луны. Введённые параметры вычисляются следующим образом:

$$r_M = \arcsin \frac{R_M}{|\mathbf{x}|}, \quad r_E = \arcsin \frac{R_E}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_E|}, \quad r_S = \arcsin \frac{R_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|},$$

$$b_{MS} = \arccos \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|}, \quad b_{ME} = \arccos \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_E}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_E|}, \quad b_{ES} = \arccos \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_E}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_E|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|}.$$

1. *Спутник полностью освещён.* Взаимное расположение небесных тел, при котором диск Солнца не перекрывается, можно описать следующим образом (рисунок 1.2а):

$$b_{ES} > r_S + r_E, \quad b_{MS} > r_S + r_M, \quad \Phi = 1.$$

2. *Спутник в тени Земли.* Условие затмения в случае, когда ИСЛ полностью находится в тени Земли, выглядит следующим образом (рисунок 1.2г):

$$b_{ES} \leq |r_E - r_S|, \quad \Phi = 0.$$

3. *Спутник в тени Луны.* Конфигурация небесных тел представлена на рисунке 1.2д, а условия затмения и функцию тени запишем в виде

$$b_{MS} \leq |r_M - r_S|, \quad \Phi = 0.$$

4. *Спутник в полутени от одного небесного тела.*

I. Диск Солнца частично закрывается диском Земли. Для данного случая функция тени Φ вводится при необходимом условии затмения (рисунок 1.2б):

$$b_{ES} < r_S + r_E \text{ и } b_{MS} > r_S + r_M.$$

Формула принимает следующий вид:

$$\Phi = 1 - \frac{s}{s_S}, \quad (1.9)$$

где s — площадь перекрытия:

$$s = \begin{cases} s_{SE}, & \text{если } b_{ES} > |r_E - r_S|, \\ s_E, & \text{если } b_{ES} \leq |r_E - r_S| \text{ и } r_E < r_S, \\ s_S, & \text{если } b_{ES} \leq |r_E - r_S| \text{ и } r_E \geq r_S. \end{cases} \quad (1.10)$$

Здесь s_S , s_E , s_{SE} — площади дисков Солнца и Земли, а также их перекрытия соответственно:

$$\begin{aligned} s_S &= \pi r_S^2, \quad s_E = \pi r_E^2, \quad s_{SE} = \frac{r_S^2}{2}(\theta_{SE} - \sin \theta_{SE}) + \frac{r_E^2}{2}(\theta_{ES} - \sin \theta_{ES}), \\ \theta_{SE} &= 2 \arccos \left(\frac{b_{ES}^2 + r_S^2 - r_E^2}{2b_{ES}r_S} \right), \quad \theta_{ES} = 2 \arccos \left(\frac{b_{ES}^2 + r_E^2 - r_S^2}{2b_{ES}r_E} \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

II. Диск Солнца закрывается диском Луны. Условие затмения запишем в виде (рисунок 1.2в):

$$b_{ES} > r_S + r_E \text{ и } b_{MS} < r_S + r_M.$$

Тогда функция тени вычисляется по формуле (1.9), где площадь затмения s :

$$s = \begin{cases} s_{SM}, & \text{если } b_{MS} > |r_M - r_S|, \\ s_M, & \text{если } b_{MS} \leq |r_M - r_S| \text{ и } r_M < r_S, \\ s_S, & \text{если } b_{MS} \leq |r_M - r_S| \text{ и } r_M \geq r_S, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$s_M = \pi r_M^2, \quad s_{SM} = \frac{r_S^2}{2} (\theta_{SM} - \sin \theta_{SM}) + \frac{r_M^2}{2} (\theta_{MS} - \sin \theta_{MS}), \quad (1.13)$$

$$\theta_{SM} = 2 \arccos \left(\frac{b_{MS}^2 + r_S^2 - r_M^2}{2 b_{MS} r_S} \right), \quad \theta_{MS} = 2 \arccos \left(\frac{b_{MS}^2 + r_M^2 - r_S^2}{2 b_{MS} r_M} \right).$$

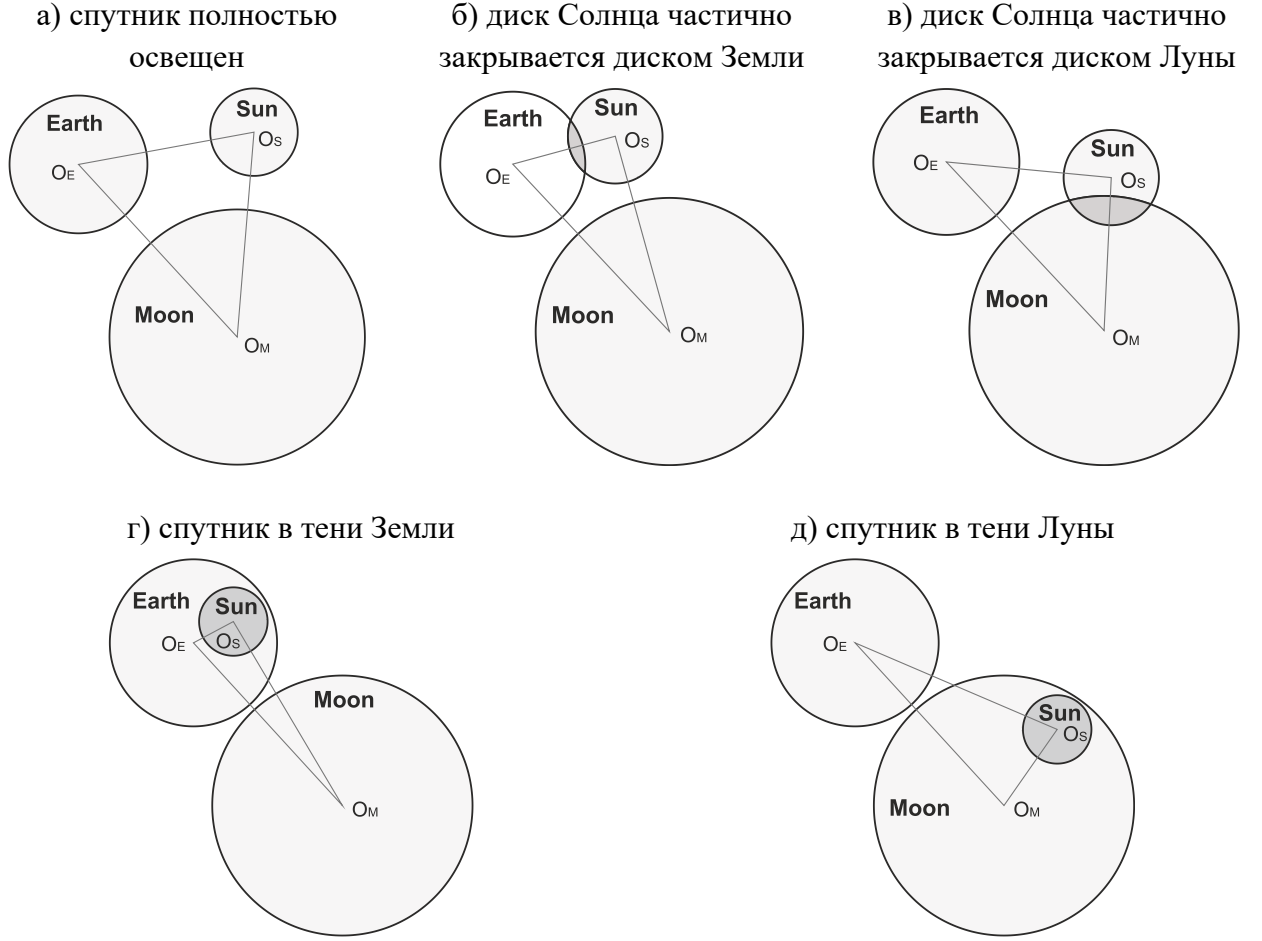


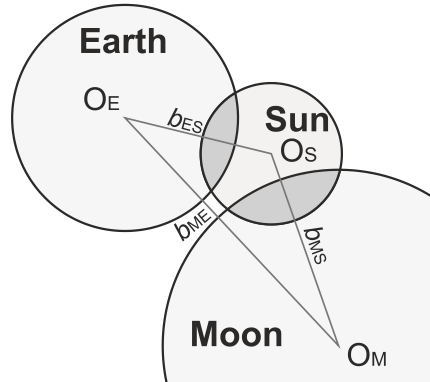
Рисунок 1.2 — Взаимные положения спутника, Луны, Земли и Солнца: а) спутник полностью освещён; б) — д) спутник в тени, образованной одним объектом

5. Спутник в полутени, образованной Луной и Землёй.

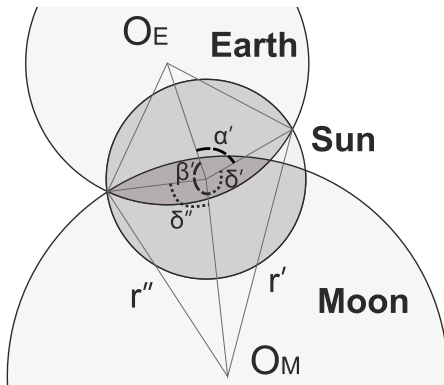
I. Пересечение диска Солнца с диском Земли не имеет общей площади с пересечением диска Солнца с диском Луны. Условие затмения (рисунок 1.3а):

$$b_{ES} < r_S + r_E, \quad b_{MS} < r_S + r_M \text{ и } b_{ME} \geq r_E + r_M.$$

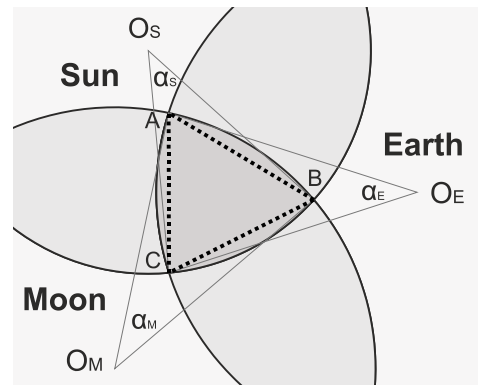
a)



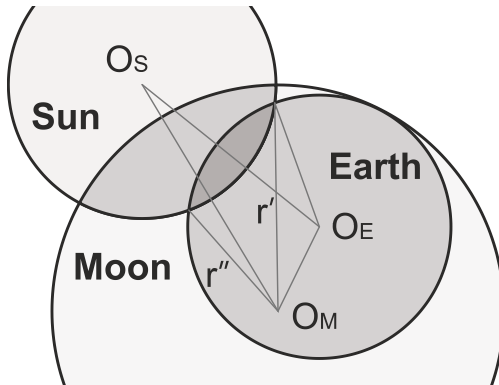
б)



в)



г)



д)

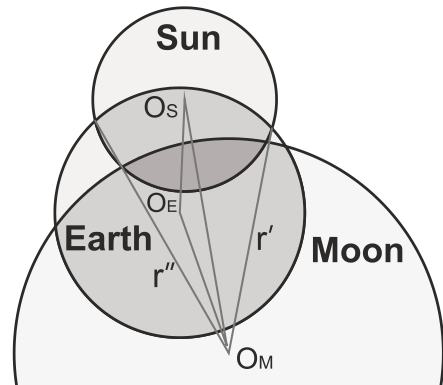


Рисунок 1.3 — Взаимные положения объектов, когда спутник в полутени, образованной двумя объектами, Луной и Землей: а) пересечение не имеет общую площадь;

б) — д) пересечение имеет общую площадь

Площадь перекрытия s , образованная пересечением дисков с площадями S_{SE} и S_{SM} , вычисляется как

$$S = S_{SE} + S_{SM},$$

причём s_{SE} , s_{SM} вычисляются по формулам (1.11), (1.13).

II. Пересечение диска Солнца с диском Земли имеет общую площадь с пересечением диска Солнца с диском Луны. Условия запишутся в следующем виде:

$$b_{ES} < r_S + r_E, \quad b_{MS} < r_S + r_M \text{ и } b_{ME} < r_E + r_M.$$

В зависимости от взаимного положения дисков Солнца, Земли и Луны возможны четыре случая. введём вспомогательные параметры. Пусть r' , r'' — расстояния от центра Луны до двух точек пересечения дисков Солнца и Земли, а δ' , δ'' — углы между b_{MS} и r' , b_{MS} и r'' соответственно (рисунок 1.3б). Тогда величины r' , r'' можно вычислить следующим образом:

$$r' = \sqrt{b_{MS}^2 + r_S^2 - 2b_{MS}r_S \cos \delta'},$$

$$r'' = \sqrt{b_{MS}^2 + r_S^2 - 2b_{MS}r_S \cos \delta''},$$

где $\delta' = 2\pi - \alpha' - \beta'$, $\delta'' = \beta' - \alpha'$, а углы α' , β' определяются как

$$\alpha' = \arccos\left(\frac{b_{ES}^2 + r_S^2 - r_E^2}{2b_{ES}r_S}\right), \quad \beta' = \arccos\left(\frac{b_{ES}^2 + b_{MS}^2 - b_{ME}^2}{2b_{ES}b_{MS}}\right).$$

Расположение небесных тел относительно друг друга показаны на рисунках 1.3б–3д. Рассмотрим условия затмения для каждого случая:

а) Рисунок 1.3б.

$$r' \geq r_M, \quad r'' \geq r_M \text{ и } b_{ME} \geq r_M.$$

Площадь перекрытия диска Солнца дисками Земли и Луны вычисляется следующим образом:

$$S = S_{SE} + S_{SM} - S_{ME},$$

где площадь пересечения дисков Солнца и Земли S_{SE} вычисляется по формуле (1.11), S_{SM} — по формуле (1.13), а площадь S_{ME} вычисляется следующим образом:

$$S_{ME} = \frac{r_M^2}{2}(\theta_{ME} - \sin \theta_{ME}) + \frac{r_E^2}{2}(\theta_{EM} - \sin \theta_{EM})$$

$$\theta_{ME} = 2 \arccos\left(\frac{b_{ME}^2 + r_M^2 - r_E^2}{2b_{ME}r_M}\right), \quad \theta_{EM} = 2 \arccos\left(\frac{b_{ME}^2 + r_E^2 - r_M^2}{2b_{ME}r_E}\right). \quad (1.14)$$

б) Рисунок 1.3в.

$$r' < r_M \text{ и } r'' \geq r_M \text{ или } r' \geq r_M \text{ и } r'' < r_M.$$

Общая площадь пересечения трех дисков определяется по формуле:

$$S = S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} + S_{\Delta ABC},$$

где S_{AB} — площадь сегмента образованного хордой AB и дугой AB, S_{BC} — площадь сегмента образованного хордой BC и дугой BCAB, S_{CA} — площадь сегмента образованного хордой CA и дугой CAAC, $S_{\Delta ABC}$ — площадь треугольника ABC (рисунок 1.3в).

Площади сегментов S_{AB} , S_{BC} и S_{CA} определяется по формулам:

$$S_{AB} = \frac{r_M^2}{2}(\alpha_M - \sin \alpha_M), \quad S_{BC} = \frac{r_S^2}{2}(\alpha_S - \sin \alpha_S), \quad S_{CA} = \frac{r_E^2}{2}(\alpha_E - \sin \alpha_E),$$

где секторальные углы дисков Луны α_M , Земли α_E и Солнца α_S вычисляются следующим образом (см. (1.11), (1.13), (1.14)):

$$\begin{aligned} \alpha_M &= \frac{1}{2}(\theta_{SM} + \theta_{SE}) - \arccos\left(\frac{b_{ES}^2 + b_{MS}^2 - b_{ME}^2}{2b_{ES}b_{MS}}\right), \\ \alpha_E &= \frac{1}{2}(\theta_{ES} + \theta_{EM}) - \arccos\left(\frac{b_{ME}^2 + b_{ES}^2 - b_{MS}^2}{2b_{ME}b_{ES}}\right), \\ \alpha_S &= \frac{1}{2}(\theta_{MS} + \theta_{ME}) - \arccos\left(\frac{b_{ME}^2 + b_{MS}^2 - b_{ES}^2}{2b_{ME}b_{MS}}\right). \end{aligned}$$

Стороны треугольника вычисляются по формулам:

$$AB = 2r_M \sin \frac{\alpha_M}{2}, \quad AC = 2r_E \sin \frac{\alpha_E}{2}, \quad CB = 2r_S \sin \frac{\alpha_S}{2},$$

а площадь треугольника вычисляется через полупериметр p_{ABC} по формуле Герона:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p_{ABC}(p_{ABC} - AB)(p_{ABC} - AC)(p_{ABC} - CB)}.$$

в) Рисунок 1.3г.

$$r' < r_M \text{ и } r'' < r_M.$$

Диск Луны полностью закрывает диск Земли и учёт пересечения диска Солнца диском Земли не требуется. Отсюда следует, что площадь закрытия диска Солнца диском Луны определяется по формуле (1.12).

г) Рисунок 1.3д.

$$r' \geq r_M, \quad r'' \geq r_M \text{ и } b_{ME} < r_M.$$

Перекрытие диска Солнца полностью осуществляется диском Земли и отсюда следует, что площадь закрытия диска Солнца диском Земли определяется по формуле (1.10).

Для всех выше описанных случаев определяется площадь перекрытия диска Солнца, а для нахождения функции тени Φ полученное значение s следует подставить в формулу (1.9).

1.4 Колокационный интегратор Lobbie. Оценка точности интегрирования

Уравнения движения интегрируются с использованием высокопорядкового колокационного интегратора Lobbie [42] с переменным шагом, разработанного В.А. Авдюшевым и являющегося развитием интегратора Эверхарта [53].

Интегрирование ДУ движения ИСЛ выполняется с переменным шагом, однако предусмотрена возможность работы с постоянным шагом. Выбор шага интегрирования осуществляется по следующей формуле:

$$h^* = h \left(\frac{\|\mathbf{e}\|_{tol}}{\|\mathbf{e}\|_{cal}} \right)^{\frac{1}{p_s+1}},$$

где h^* и h — величины шага интегрирования на последующей и текущей итерациях соответственно; $\|\cdot\|$ — евклидова норма; $\|\mathbf{e}\|_{tol}$ — задаваемая точность; $\|\mathbf{e}\|_{cal}$ — локальная погрешность; p_s — порядок метода.

Точность интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСЛ оценивалась путем сравнения с эталонной орбитой. Для анализа были выбраны три модельных объекта с большой полуосью a , равной 2 тыс., 10 тыс. и 20 тыс. км, при нулевых значениях остальных орбитальных элементов. Прогнозирование движения выполнено на интервале в 1 год.

В программном комплексе выбор шага интегрирования осуществляется через параметр LL , который связан с заданной точностью следующим образом: $\|\mathbf{e}\|_{tol} = 10^{-LL}$. В качестве эталонной орбиты использовалась траектория, рассчитанная методом интегрирования 16-го порядка с параметром $LL = 12$ на 64-битной разрядной сетке. При этом в расчетах учитывались следующие возмущающие факторы: несферичность гравитационного поля Луны до гармоник 50-го порядка и степени, приливные деформации центрального тела, а также гравитационные воздействия со стороны Земли и Солнца. Результаты оценки точности представлены на рисунке 1.4.

Оценки на рисунке 1.4 показывают, что на низкой орбите в результате численного интегрирования при параметре LL , равном 10, достигается точность порядка 10^{-3} мм, однако на это требуется значительное количество вычислительных ресурсов. Для окололунных объектов на средней и высокой орбитах ошибки округления имеют значения на уровне 10^{-1} мм.

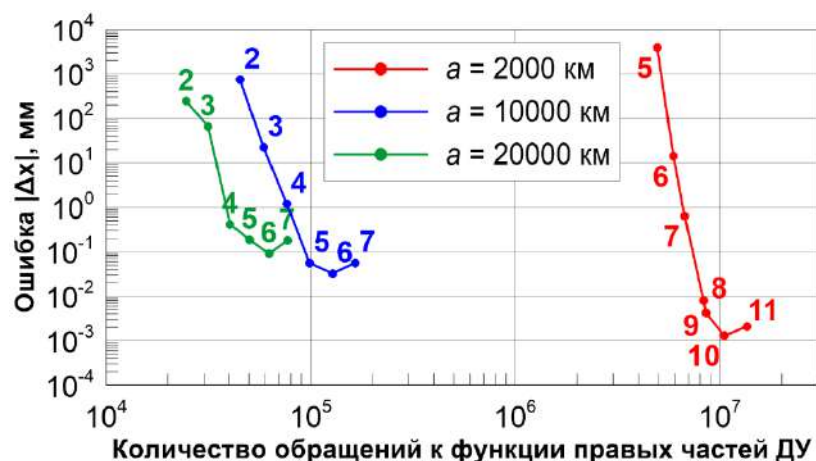


Рисунок 1.4 — Оценка точности метода интегрирования на примере трёх модельных объектов, расположенных на низкой, средней и высокой орбитах

1.5 Методика распараллеливания вычислительного процесса

Численная модель движения систем ИСЛ реализована в двух вариантах: одна версия программы предназначена для персональных компьютеров, а другая — для суперкомпьютера СКИФ Cyberia Томского государственного университета. Благодаря распараллеливанию вычислительного процесса моделирования движения совокупности окололунных объектов, удастся существенно снизить время вычислений и обработать большее количество данных.

На рисунке 1.5 представлен схематически механизм распараллеливания. На схеме ядра кластера обозначены кругами, а интегрируемые ДУ движения ИСЛ — квадратами с соответствующими номерами. Количество запрашиваемых на суперкомпьютере ядер обозначено как N , а число объектов равно M , причем $M \geq N$. Ядра в данной схеме с номерами K_1 и $K_2 \in [1, N]$.

После считывания начальных данных ИСЛ для процесса прогнозирования движения каждому ядру назначаются для вычисления координаты и скорости объекта на один момент времени t_0 . Причем каждое ядро интегрирует уравнения движения одного объекта. Если остаются объекты, не закрепленные за ядрами, их распределение осуществляется следующим образом: первое ядро K_1 , завершившее расчеты для своего объекта, на момент времени t_1 начинает процесс вычисления эфемерид для следующего объекта с номером $N+1$, а следующее свободное ядро K_2 берет на себя вычисления для объекта $N+2$. Данный процесс распределения продолжается, пока не будет достигнут конец списка с исходными данными модельных объектов.

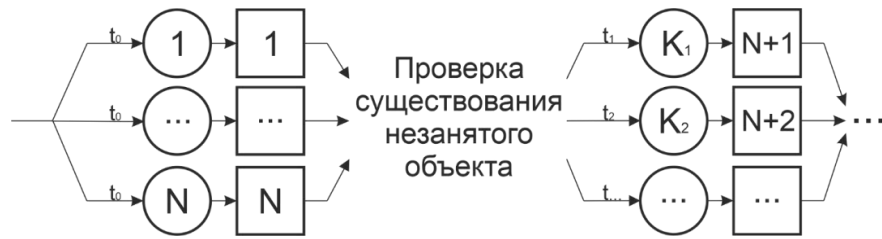


Рисунок 1.5 — Схематичное представление вычислительного процесса в среде для параллельных вычислений

Ранее в программный комплекс «Численная модель движения систем ИСЛ» был встроен механизм, при котором каждому ядру назначался пучок объектов одинакового размера, а шаг интегрирования выбирался для всего пучка, а не для каждого отдельного объекта (рисунок 1.6). Это приводило к тому, что точность интегрирования зависела от количества объектов в пучке, что является некорректным, поскольку у каждого объекта своя орбитальная эволюция, и оптимальный шаг интегрирования должен быть индивидуальным. Такой подход не только вносит вычислительные ошибки, но и может вызывать чрезмерное уменьшение шага интегрирования, что, в свою очередь, увеличивает время вычислений.

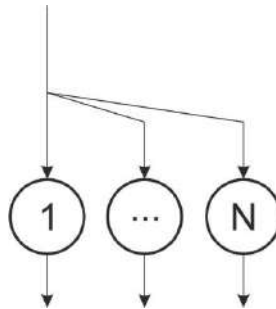


Рисунок 1.6 — Схема распараллеливания методом распределения пучками

В работе [54] представлено подробное сравнение методов распараллеливания, описанных выше, для программного комплекса «Численная модель движения систем ИСЗ».

1.6 Программный интерфейс

В более ранних версиях Численной модели движения ИСЛ взаимодействие с пользователем осуществлялось через входной текстовый файл (рисунок 1.7), что часто приводило к ошибкам из-за некорректного заполнения данных и было неудобным способом работы с программой. Для решения этой проблемы был разработан пользовательский интерфейс, который значительно упростил взаимодействие с программой.

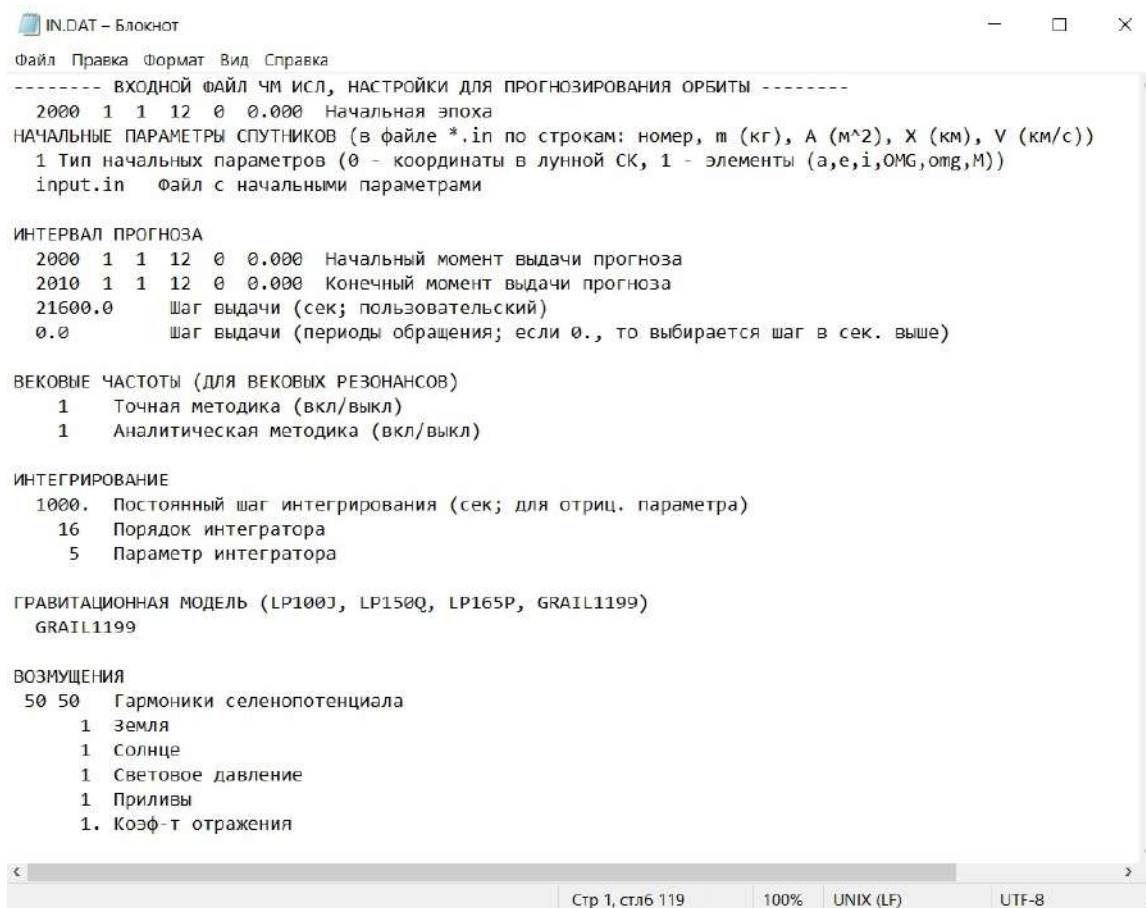


Рисунок 1.7 — Входной файл первой версии «Численной модели движения ИСЛ»

Основной интерфейс представлен на рисунке 1.8а. Как видно, модель позволяет учитывать различные возмущающие факторы: гармоники селенопотенциала до 1200-го порядка и степени; гравитационные воздействия Земли и Солнца, рассматриваемых как точечные массы; приливные силы и СД. Важно отметить, что пользователь может выбрать модель селенопотенциала (рисунок 1.8б) среди следующих: LP100J, LP150Q, LP165P и GRAIL1200 [9, 12].

Пользователь самостоятельно определяет, какие возмущения учитывать при моделировании, исходя из целей задачи и требуемой точности прогноза, устанавливая галочки напротив возмущающих факторов, как показано на рисунке 1.8а на левой панели главного окна пользовательского интерфейса.

Далее необходимо задать начальный и конечный моменты прогноза движения ИСЛ, при этом вывод данных в файл возможен в любой момент внутри заданного временного интервала. По умолчанию начальный момент вывода данных совпадает с началом прогноза. Шаг вывода результатов можно задать либо в секундах, либо в количестве оборотов, при этом программа автоматически вычисляет период для каждого околослунного спутника по информации из исходных данных.

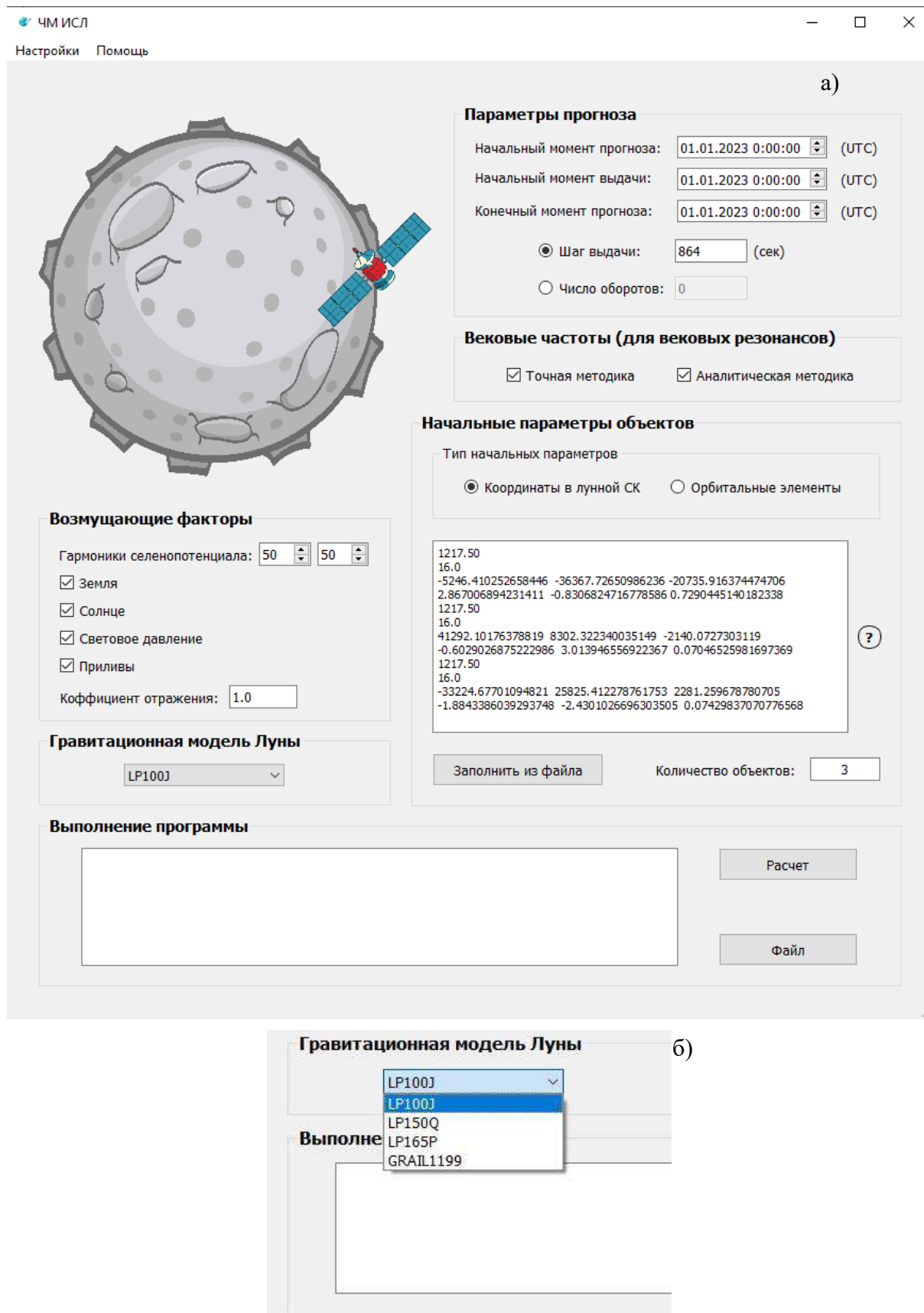


Рисунок 1.8 — Интерфейс «Численной модели движения систем ИСЛ»:

а) основной интерфейс; б) выбор модели селенопотенциала

Начальные параметры ИСЛ, такие как масса, площадь миделевого сечения, начальные координаты и скорости или орбитальные элементы, вводятся в соответствующее текстовое поле, расположенного на главном окне. Пользователь может внести параметры двумя способами: напрямую ввести их в окно или загрузить файл с данными, нажав кнопку «Заполнить из файла» и указав путь к необходимому файлу с соответствующим форматом.

После ввода всех данных можно либо запустить расчёты, нажав кнопку «Расчёт», либо, если требуется моделирование динамики большого количества объектов с использованием параллельных вычислений, то, нажав на кнопку «Файл», сформировать текстовый файл по заполненным полям интерфейса и использовать его для запуска программного комплекса на кластере Скиф Cyberia ТГУ.

1.7 Сравнение с результатами других авторов

Программный комплекс «Численная модель движения систем ИСЛ» был протестирован на основе результатов, опубликованных другими авторами. В работе [17] приведена оценка влияния начальной эпохи на время существования полярного спутника, движущегося по круговой орбите на высоте 100 км. Анализ проводился с использованием двух численных моделей движения — «Ipror» и «STK». В таблице 1.2 представлены данные, позволяющие сопоставить оценки, полученные указанными авторами, с результатами, полученными при помощи разработанного программного комплекса. Как следует из таблицы, расчеты демонстрируют высокую степень совпадения. Средняя ошибка относительно модели «Ipror» составляет 0.08 %, а по сравнению с «STK» — 0.04 %.

Таблица 1.2 — Сравнение времени существования спутника на круговой полярной орбите с высотой 100 км над поверхностью в зависимости от начальной эпохи

Начальная эпоха	Время существования на орбите, сутки		
	Модель «Ipror»	Модель «STK»	«Численная модель движения систем ИСЛ»
1 января 2010	219.04	219.24	219.19
1 января 2011	182.04	182.16	182.11
1 января 2012	172.00	172.06	172.01
1 января 2013	186.13	186.32	186.19
1 января 2014	178.71	178.78	178.73
1 января 2015	166.67	166.63	166.75
1 января 2016	186.08	186.28	186.23

Кроме того, проведено сравнение полученных результатов с оценками, представленными в работе [16]. В данной статье описаны возможности модели движения окололунных объектов «YSPLOP» и приведены оценки влияния селенопотенциала на время существования полярного спутника, движущегося по круговой орбите на высоте 100 км. При вычислениях использовалась модель гравитационного поля Луны LP165P, при этом влияние Земли и Солнца не учитывалось. Результаты, приведенные в таблице 1.3, демонстрируют высокую степень соответствия оценок, полученных в [16], с результатами настоящего исследования. Среднее различие составляет 0.04 %.

Таблица 1.3 — Сравнение оценок времени существования на круговой полярной орбите с высотой 100 км над поверхностью в зависимости от порядка и степени селенопотенциала

Порядок × степень гравитационной модели LP165P	Время существования на орбите, сутки	
	Модель «YSPLOP»	«Численная модель движения систем ИСЛ»
70×70	161.12	161.06
65×65	163.36	163.51
60×60	163.42	163.43
55×55	161.20	161.30
50×50	163.42	163.43
45×45	146.17	146.17
40×40	146.00	146.00
35×35	146.15	146.17
30×30	131.46	131.73
25×25	198.75	199.11
20×20	221.58	221.28
15×15	> 2 лет	> 2 лет
10×10	> 2 лет	> 2 лет

Дополнительно было проведено сравнение с результатами тех же авторов, в котором анализировалась зависимость высоты перицентра от времени прогнозирования при учёте и без учёта возмущений от третьих тел. Исследуемый спутник, как и ранее, представляет собой полярный объект, движущийся по круговой орбите на высоте 100 км над поверхностью Луны. Результаты представлены на рисунке 1.9. Для наглядности на рисунке 1.9б приведено изображение графика из оригинальной публикации авторов. Как видно, графики демонстрируют визуальное сходство. Представленные данные подтверждают, что на низких окололунных орбитах определяющее влияние на динамику спутников оказывает гравитационное поле Луны, в то время как воздействие третьих тел остаётся незначительным.

Специфическая динамика объекта, показанная на рисунке 1.9, а именно, уменьшение высоты перицентра связано с ростом эксцентриситета, обусловленным значительным влиянием

радиальной составляющей гравитационного поля Луны. Как будет показано в главе 3, это явление характерно для низколетящих спутников Луны.

Таким образом, разработанное ПМО «Численная модель движения систем ИСЛ» обеспечивает результаты, либо совпадающие, либо находящиеся в хорошем согласии с данными, полученными другими авторами. Это свидетельствует о высокой надёжности вычислений, выполняемых с использованием представленного программного комплекса.

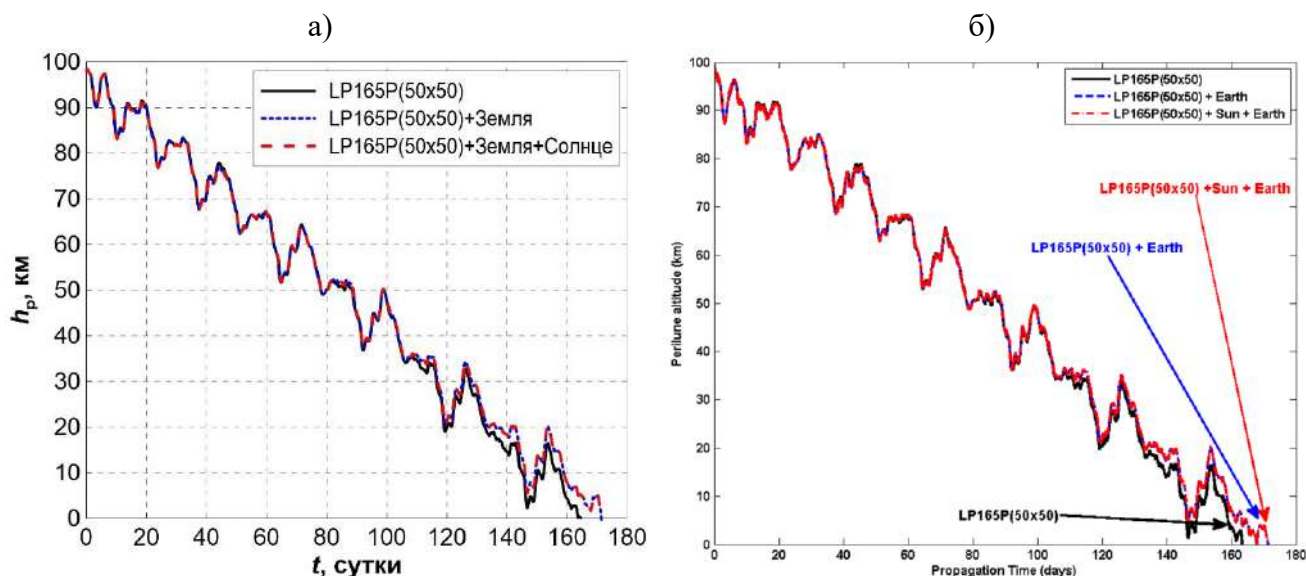


Рисунок 1.9 — Оценки зависимости высоты перицентра от времени низколетящего полярного спутника на круговой орбите, полученные а) в диссертации и б) авторами [16]

1.8 Методика исследования влияния вековых резонансов

Программный комплекс «Численная модель движения систем ИСЛ» не только осуществляет прогнозирование орбитальных элементов ИСЛ, но и позволяет определять параметры, необходимые для анализа воздействия вековых резонансов на динамику ИСЛ.

Традиционно влияние вековых резонансов исследуется с использованием аналитических [55, 56, 57, 58] или численно-аналитических [38, 59] методов. В обоих случаях для вычисления вековых частот используются приближённые аналитические выражения, разработанные для орбит с малыми значениями эксцентриситета [38]. Одной из ключевых особенностей воздействия вековых резонансов, в частности апсидально-нодальных, является увеличение эксцентриситета орбит околопланетных объектов [60]. В подобных условиях применение аналитических выражений для описания эволюции резонансных соотношений становится некорректным. Однако при малых начальных значениях эксцентриситета такие формулы позволяют выявить сам факт существования векового резонанса. В то же время при значительных значениях начального эксцентриситета использование этих приближений может приводить к существенным искажениям в оценках.

Применение численного моделирования движения позволяет более точно вычислять значения вековых частот с той же степенью точности, что и орбитальные элементы, используя уравнения Ньютона–Эйлера [61]. Однако, данный метод также имеет свои ограничения, которые далее будут отмечены. В работе [35] была показана необходимость комбинированного использования аналитических и численных методов для определения вековых частот при исследовании вековых резонансов в динамике околопланетных объектов. Приведём описание методики.

Запишем аргумент возмущающей функции в виде

$$\psi = (l - 2p' + q')\lambda' - (l - 2p + q)\lambda - q'\varpi' + q\varpi + (\bar{m} - l + 2p')\Omega' - (\bar{m} - l + 2p)\Omega. \quad (1.15)$$

Здесь $l, p, p', \bar{m}, q, q'$ — целочисленные индексы, $\lambda = \varpi + M$, $\lambda' = \varpi' + M'$ — средние долготы спутника и третьего тела соответственно, $\varpi = \Omega + \omega$, $\varpi' = \Omega' + \omega'$ — долготы перицентра спутника и возмущающего тела (элементы без штриха относятся к орбите спутника, а со штрихом — к орбите третьего тела). Наклонения и долготы восходящего узла i, Ω, i', Ω' отнесены к экватору Луны.

Аргумент разложения возмущающей функции в ряд в однократно осредненной задаче записывается следующим образом:

$$\underline{\psi} = (l - 2p' + q')M' - (l - 2p)\omega + (l - 2p')\omega' - \bar{m}(\Omega - \Omega'), \quad (1.16)$$

а в двукратно осредненной задаче записывается как:

$$\underline{\underline{\psi}} = (l - 2p')\omega' - (l - 2p)\omega - \bar{m}(\Omega - \Omega'). \quad (1.17)$$

Условие возникновения резонанса можно выразить через следующие уравнения:

$$\underline{\dot{\psi}} \approx 0, \quad \underline{\underline{\dot{\psi}}} \approx 0. \quad (1.18)$$

Обозначим выражения (1.18) как резонансные соотношения (РС), а формулы (1.16) и (1.17) — как критические или резонансные аргументы. Вычисляя производные от выражений (1.16)–(1.17), можно получить левые части РС (1.18), которые характеризуют наличие вековых резонансов в однократно и двукратно осреднённых задачах трёх тел. В рамках данного исследования рассматриваются системы Луна – спутник – Земля и Луна – спутник – Солнце. Под типом РС будем понимать его левую часть, определяемую выражением (1.18).

Изменяя целочисленные коэффициенты в выражении (1.16) для однократно осреднённой задачи, можно получить различные типы резонансных соотношений вековых резонансов, связанных со средним движением третьего тела (см. таблицу 1.5). Аналогично, для двукратно осреднённой задачи (1.17) формируются резонансные соотношения, относящиеся к апсидально-

нодальным вековым резонансам (см. таблицу 1.4). Известно, что параметры прецессии орбиты Солнца, обусловленные прецессией земной орбиты, имеют крайне малые значения, особенно это касается частоты в долготе перицентра Солнца. В связи с этим резонансные соотношения, содержащие данную частоту, были исключены из рассмотрения (таблица 1.4).

Таблица 1.4 — Типы апсидально-нодальных резонансов 1–4 порядков

№	Тип РС	№	Тип РС
1	$\dot{\omega}$	6	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) - \dot{\omega}'_E$
2	$\dot{\omega} + \dot{\omega}'_E$	7	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + \dot{\omega}$
3	$\dot{\omega} - \dot{\omega}'_E$	8	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - \dot{\omega}$
4	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$	9	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + 2\dot{\omega}$
5	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) + \dot{\omega}'_E$	10	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - 2\dot{\omega}$

В дальнейшем, моделируя движение ИСЛ с учётом воздействия селенопотенциала, а также гравитационного влияния Земли и Солнца, будем анализировать наличие вековых резонансов в динамике окололунных объектов. Для этого исследуется временная эволюция соотношений (1.16)–(1.17) и степень малости величин (1.18). Такой подход [62, 63] позволяет определить характер резонансных конфигураций: являются ли они устойчивыми при либрационном изменении соотношений (1.16)–(1.17) или неустойчивыми при циркуляционном изменении.

Орбитальные элементы в выражениях (1.16)–(1.17), а также вековые частоты, входящие в формулы (1.18) и представленные в таблицах 1.4 и 1.5, определяются двумя методами: численным и аналитическим.

Таблица 1.5 — Типы вековых резонансов 2–5 порядков со скоростью движения Земли $\bar{n}'_E$ и Солнца $\bar{n}'_S$

№	Тип РС	№	Тип РС	№	Тип РС
1	$\bar{n}'_{E,S} - \dot{\omega}$	5	$\bar{n}'_{E,S} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$	9	$\bar{n}'_{E,S} - \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$
2	$\bar{n}'_{E,S} + \dot{\omega}$	6	$\bar{n}'_{E,S} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$	10	$\bar{n}'_{E,S} + \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$
3	$\bar{n}'_{E,S} - 2\dot{\omega}$	7	$\bar{n}'_{E,S} + \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$	11	$\bar{n}'_{E,S} - 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$
4	$\bar{n}'_{E,S} + 2\dot{\omega}$	8	$\bar{n}'_{E,S} - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$	12	$\bar{n}'_{E,S} + 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$

1.8.1 Численный способ определения вековых частот

В численном методе для вычисления частот спутника используются уравнения Ньютона–Эйлера [64]

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{|\mathbf{x}|}{a(1-e^2)} \frac{\sin u}{\sin i} W_0; \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos u}{e} S_0 + \frac{\sin u}{e} \left(1 + \frac{|\mathbf{x}|}{a(1-e^2)} \right) T_0 - \frac{|\mathbf{x}|}{a(1-e^2)} \frac{\sin u}{\operatorname{tg} i} W_0. \quad (1.19)$$

Здесь S_0 , T_0 , W_0 — возмущающие ускорения, записанные в орбитальной СК и связанные с правыми частями уравнений движения известными соотношениями [64], u — аргумент широты, ϑ — истинная аномалия.

Вековые частоты и орбитальные элементы возмущающих тел определяются с использованием фонда DE438/LE438 [52]. Для расчёта частот из фонда извлекаются координаты и скорости возмущающих тел на 12 моментов времени с шагом 1 минута. Далее полученная сетка координат и скоростей преобразуется в сетку элементов орбиты с применением формул задачи двух тел. После этого производная от интерполяционного полинома Лагранжа 12-го порядка [64] используется для вычисления частот $\dot{\Omega}'$, $\dot{\omega}'$:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(x_i \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(t_i - t_j)} \left(\sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i, k \neq j}}^n (t - t_k) \right) \right).$$

Следует отметить, что вычисления выполняются без наложения ограничений на величины входящих в них параметров. Однако, поскольку уравнения (1.19), аналогично формулам задачи двух тел, содержат особенности при малых значениях наклона и эксцентриситета орбиты, в процессе анализа результатов рекомендуется дополнительно применять аналитический метод для расчёта вековых частот. Этот подход особенно полезен для исследования динамики объектов, движущихся по орбитам с малым эксцентриситетом.

1.8.2 Аналитический способ определения вековых частот

В этом случае расчёты основаны на предположении, что спутник движется в гравитационном поле Луны, учитывающем только влияние второй зональной гармоники селенопотенциала J_2 , и подвергается возмущениям со стороны Земли и Солнца. Последние рассматриваются как материальные точки, движущиеся по эллиптическим орбитам с вращающимися линиями апсид и узлов.

С учётом этих предположений для вычисления вековых частот движения спутника можно использовать следующие формулы:

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{J_2} + \dot{\Omega}_E + \dot{\Omega}_S, \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}_{J_2} + \dot{\omega}_E + \dot{\omega}_S,$$

компоненты $\dot{\Omega}_{J_2}$, определяемые влиянием второй зональной гармоники селенопотенциала J_2 , вычисляются по формулам [49]:

$$\dot{\Omega}_{J_2} = -\frac{3}{2} J_2 \bar{n} \left(\frac{R_M}{a} \right)^2 \cos i (1-e^2)^{-2}, \quad \dot{\omega}_{J_2} = \frac{3}{4} J_2 \bar{n} \left(\frac{R_M}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2},$$

а компоненты, связанные с влиянием внешних тел: Земли и Солнца, с применением формул [65]:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{E,S} &= -\frac{3}{16} \bar{n} \frac{\mu_{E,S}}{\mu_M} \left(\frac{a}{a_{E,S}} \right)^3 \frac{2+3e^2}{\sqrt{1-e^2}} (2-3\sin^2 i_{E,S}) \cos i, \\ \dot{\omega}_{E,S} &= \frac{3}{16} \bar{n} \frac{\mu_{E,S}}{\mu_M} \left(\frac{a}{a_{E,S}} \right)^3 \frac{4-5\sin^2 i + e^2}{\sqrt{1-e^2}} (2-3\sin^2 i_{E,S}). \end{aligned}$$

Элементы орбит определяются следующим образом

$$\begin{aligned} M' &= M'_0 + \bar{n}'(t-t_0), \quad \omega' = \omega'_0 + \dot{\omega}'(t-t_0), \quad \Omega' = \Omega'_0 + \dot{\Omega}'(t-t_0), \\ \omega &= \omega_0 + \dot{\omega}(t-t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t-t_0). \end{aligned}$$

Вековые частоты возмущающих тел в аналитическом способе считаются константами, численные значения которых можно найти, например, в [66].

1.9 Методика выявления и исследования орбитальных резонансов

Орбитальный резонанс в небесной механике — ситуация, при которой периоды обращения двух (или более) небесных тел соотносятся как небольшие натуральные числа. В результате эти тела периодически сближаются, находясь в определённых точках своих орбит. Возникающие вследствие этого регулярные изменения силы гравитационного взаимодействия этих тел существенно влияют на их движение.

Рассмотрим аргумент возмущающей функции, связанной с влиянием несферичности селенопотенциала

$$\Phi = (n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega - \theta), \quad (1.20)$$

где $\theta = \phi_M(t-t_0)$, а ϕ_M — угловая скорость вращения Луны. Причем

$$M = M_0 + n(t-t_0), \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t-t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t-t_0).$$

В формуле (1.20) обозначения традиционные.

Сформируем частоты, соответствующие рассматриваемому резонансу, используя методику, предложенную Р. Аланом [67, 68], уточненную Э. Д. Кузнецовым [69] для резонанса 1:2 и обобщенную в [70]. Выделим их из аргумента возмущающей функции (1.20),

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_1 &= u(\dot{M} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}) - m\dot{\theta} - \dot{\phi}_M, \\
\dot{\Phi}_2 &= u(\dot{\omega} + \dot{M}) + m(\dot{\Omega} - \dot{\phi}_M), \\
\dot{\Phi}_3 &= u\dot{M} + m(\dot{\omega} + \dot{\Omega} - \dot{\phi}_M), \\
\dot{\Phi}_4 &= u(\dot{M} - \dot{\Omega} + \dot{\omega}) - m(\dot{\phi}_M), \\
\dot{\Phi}_5 &= u\dot{M} + m(-\dot{\omega} + 2\dot{\Omega} - \dot{\phi}_M),
\end{aligned} \tag{1.21}$$

и соответствующие им критические аргументы

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= u(M + \omega + \Omega) - m\theta, \\
\Phi_2 &= u(\omega + M) + m(\Omega - \theta), \\
\Phi_3 &= uM + m(\omega + \Omega - \theta), \\
\Phi_4 &= u(M - \Omega + \omega) - m\theta, \\
\Phi_5 &= uM + m(-\omega + 2\Omega - \theta),
\end{aligned} \tag{1.22}$$

То обстоятельство, что в сформированные частоты и критические аргументы входят не все члены, содержащиеся в аргументе, не принципиально. Всегда можно косинус угла, содержащего все члены, разделить на сумму косинусов, один из которых будет содержать только резонансные члены, а второй все остальное. Таким образом будет выделена та составляющая, которая может давать в движении вековой или долгопериодический эффект с большой амплитудой. Все остальное для анализа несущественно.

Наличие резонанса будем оценивать по степени малости резонансных соотношений (1.21) и характеру эволюции во времени их резонансных аргументов (1.22). При этом резонанс считается устойчивым, если резонансный аргумент испытывает либрационное изменение и неустойчивым при циркуляционном изменении со временем.

Глава 2. АНАЛИЗ ОБЩЕЙ СТРУКТУРЫ ВОЗМУЩЕНИЙ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЛУНЫ²

2.1 Описание исходных данных

С использованием программного комплекса «Численная модель движения систем ИСЛ» было проведено моделирование движения 5180 объектов в течение 10-летнего интервала времени. Для каждого спутника начальные условия задавались в виде круговой орбиты с определёнными значениями большой полуоси и наклона, при этом остальные орбитальные параметры принимались равными нулю. Параметры a и i изменялись в заданных диапазонах $a \in [1.1R_M, 15R_M]$ и $i \in [0, 180^\circ]$ с шагом $0.1R_M$ и 5° соответственно. В вычислениях учитывались возмущения, обусловленные гравитационным полем Луны, а также гравитационное притяжение Земли и Солнца, которые моделировались как точечные массы. Влияние СД в данном эксперименте не рассматривалось.

В качестве модели гравитационного поля Луны использовалась гравитационная модель GRAIL1200 с учётом гармоник до 50-го порядка и степени. Такой выбор был сделан на основе результатов, представленных на рисунке 2.1. В исследовании использовался модельный объект с высотой орбиты 100 км над поверхностью Луны и почти круговой полярной орбитой. Эксперимент заключался в варьировании порядка и степени селенопотенциала и измерении времени до столкновения с поверхностью Луны (время жизни объекта). Как показано на рисунке, влияние гармоник гравитационного поля на срок существования низкоорбитального окололунного объекта становится незначительным начиная с 47-го порядка и степени.

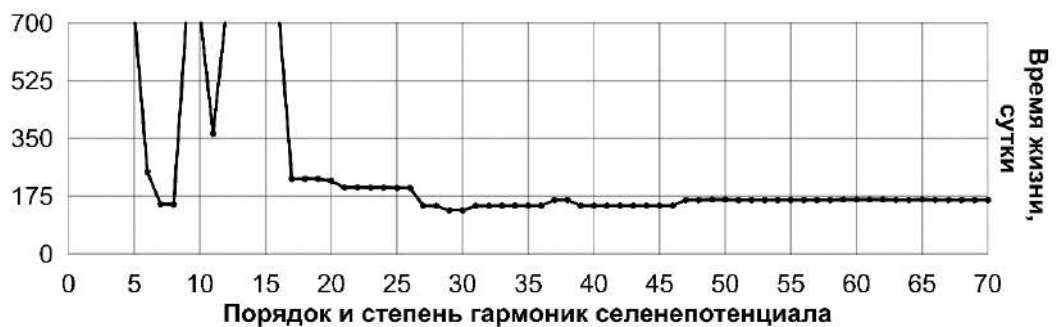


Рисунок 2.1 — Оценки времени существования спутника на круговой полярной орбите с высотой 100 км над поверхностью Луны в зависимости от порядка и степени селенопотенциала

² При написании данной главы использовались материалы публикаций по теме диссертации 2 и 5, выполненных в соавторстве.

2.2 Общий анализ структуры возмущений

Проанализируем влияние различных возмущающих факторов в зависимости от выбора начальных значений большой полуоси и наклона орбиты спутников. Оценки проводились путем сравнения орбиты, рассчитанной с учетом конкретного возмущения, с невозмущённым движением ИСЛ. Прогнозирование движения модельных объектов выполнялось на интервале 0,1 года, при этом оценивалось максимальное отклонение положения спутника на возмущенной орбите относительно его движения без учёта возмущений. В качестве возмущающих факторов рассматривались сжатие Луны, гравитационное поле Луны с разложением до 50-го порядка и степени, а также притяжение Земли и Солнца. Полученные результаты представлены на рисунке 2.2.

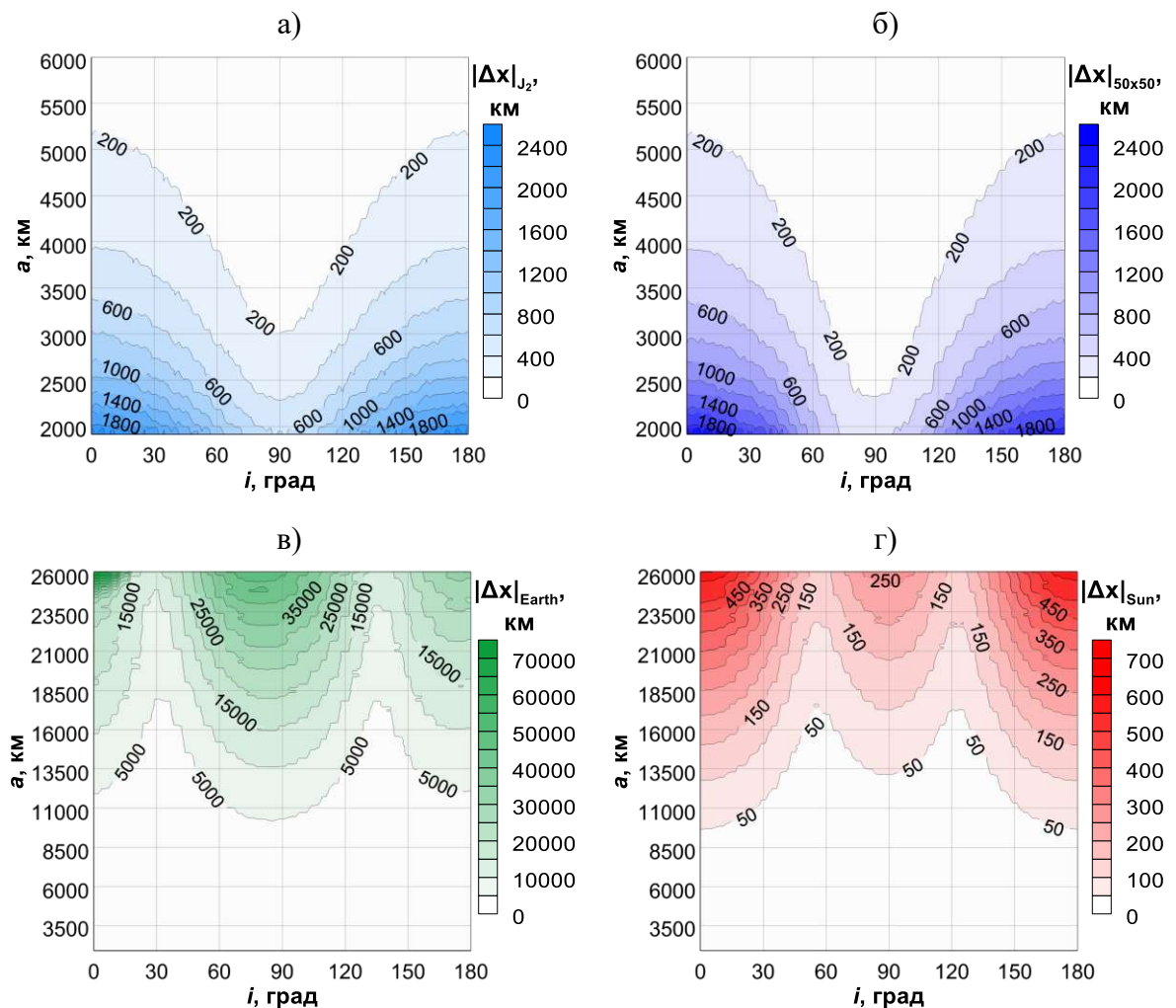


Рисунок 2.2 — Влияние возмущений от: а) сжатия Луны, б) гармоник селенопотенциала до 50-го порядка и степени, в) Земли и г) Солнца на орбитальную эволюцию в зависимости от значений больших полуосей и наклонов орбит спутников

Согласно данным, представленным на рисунке 2.2, влияние возмущающих факторов на положение ИСЛ определяется значениями наклона и большой полуоси орбиты спутника.

Воздействие сжатия Луны и её гравитационного поля снижается с увеличением большой полуоси и становится несущественным при $a \geq 5000$ км. Для полярных орбит влияние гравитационного поля Луны оказывается минимальным.

Графики, иллюстрирующие влияние возмущений от Земли и Солнца (рисунки 2.2в и 2.2г), демонстрируют близкие структуры распределения отклонений в векторе положения спутника. Максимальные значения этих отклонений наблюдаются при наклонениях 0° , 90° и 180° . При этом в околоэкваториальных областях воздействие Земли примерно в 100 раз превышает влияние Солнца.

Одной из ключевых особенностей динамики окололунных объектов является увеличение эксцентриситета их орбит. Рисунок 2.3 иллюстрирует, как начальные значения большой полуоси и наклона орбиты влияют на изменение эксцентриситета при различных наборах возмущающих факторов. На рисунке 2.3а представлены результаты, учитывающие влияние сжатия Луны, а также гравитационное воздействие Земли и Солнца. В свою очередь, на рисунке 2.3б приведены данные, полученные с учётом разложения гравитационного поля Луны до 50-го порядка и степени, а также притяжения Земли и Солнца.

Как видно из рисунка 2.3, наибольший рост эксцентриситета наблюдается у объектов с начальными наклонениями в диапазоне 60° – 120° и для орбит с большой полуосью, превышающей 8500 км. Основное различие между рисунками 2.3а и 2.3б заключается в дополнительном увеличении эксцентриситета низкоорбитальных спутников при включении в расчёты возмущений от гармоник селенопотенциала до 50-го порядка и степени.

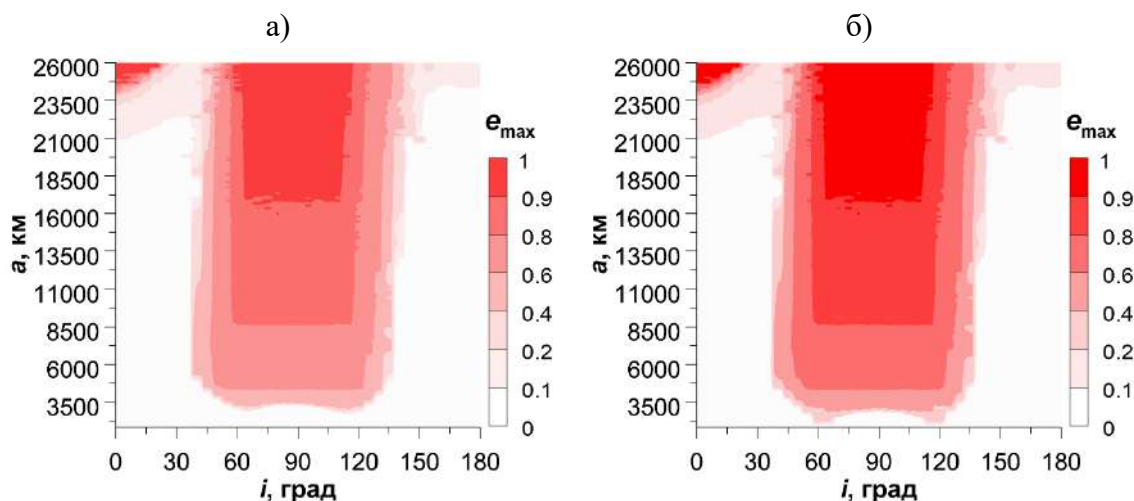


Рисунок 2.3 — Оценки роста эксцентриситетов в зависимости от начальных значений большой полуоси и наклона объектов под влиянием возмущений от Земли, Солнца и а) сжатия Луны, б) гармоник селенопотенциала до 50-го порядка и степени

Увеличение эксцентриситета орбиты может приводить к сокращению времени существования объекта в окололунном пространстве. Влияние начальных орбитальных

параметров спутников на их срок нахождения на орбите отражено на графиках рисунка 2.4. Под временем жизни объекта на орбите подразумевается период от начала его движения до момента столкновения с поверхностью Луны.

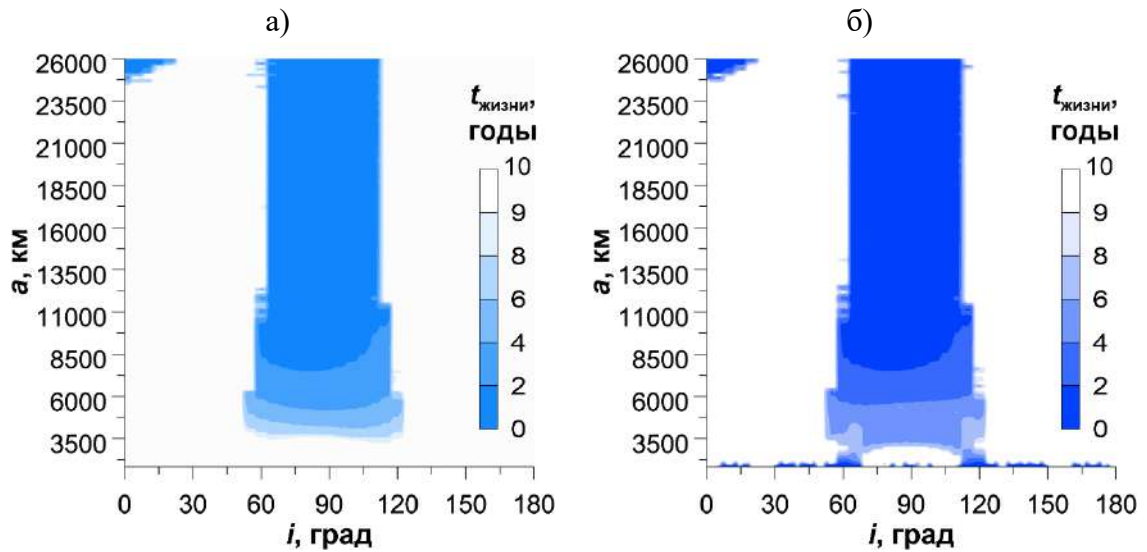
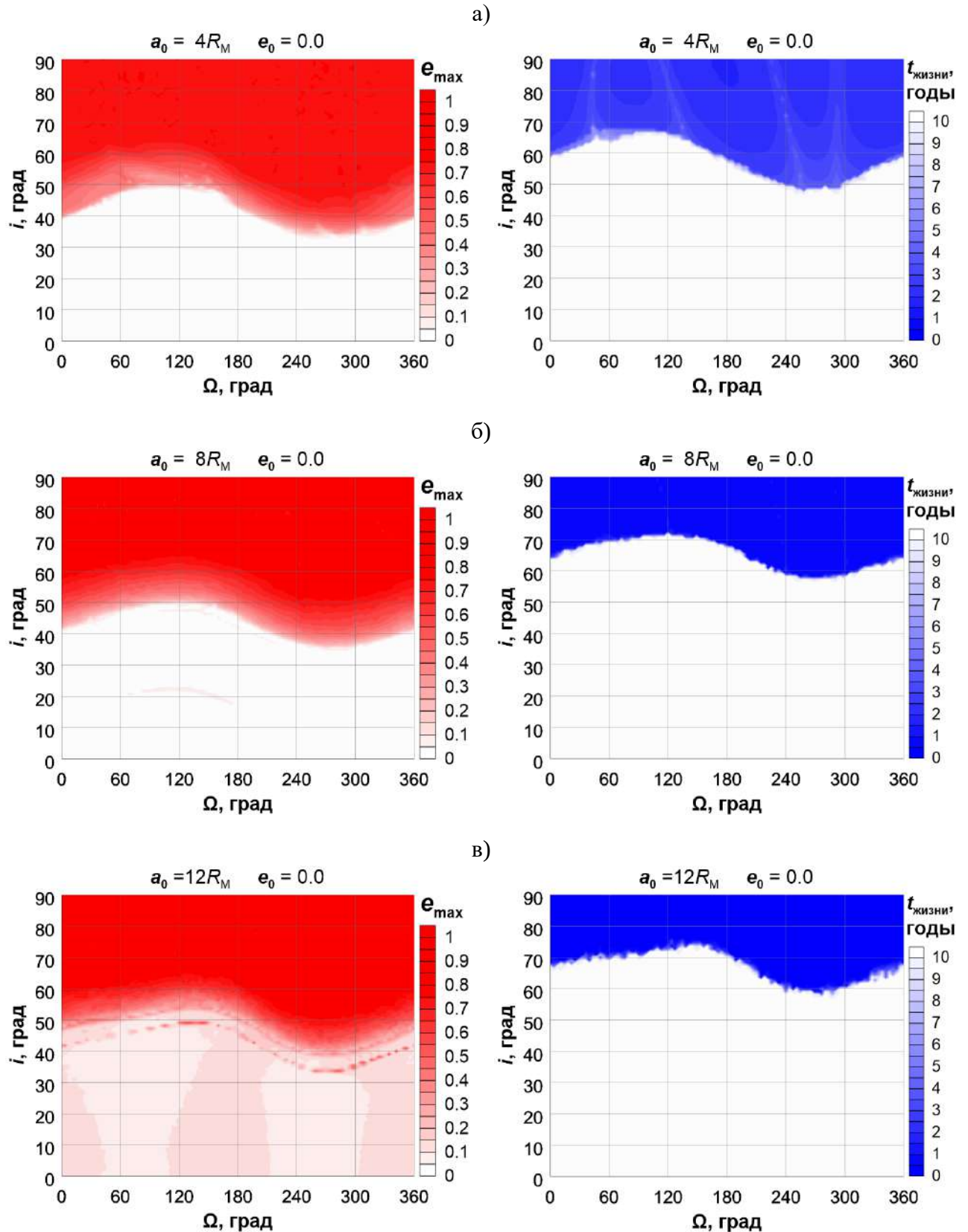


Рисунок 2.4 — Продолжительность жизни объекта на орбите в зависимости от начальной высоты и наклона объектов под влиянием возмущений от Земли и Солнца и а) сжатия Луны, б) гармоник селенопотенциала до 50-го порядка и степени

Как и следовало ожидать, срок существования объектов на орбите тесно связан с ростом их эксцентриситета. Эта взаимосвязь явно прослеживается при сравнении данных, представленных на рисунках 2.3 и 2.4. Существенное сокращение времени нахождения спутников на орбите и рост эксцентриситета начинают проявляться при значении большой полуоси, превышающем 8500 км. Диапазон наклонов, для которых характерен быстрый рост эксцентриситета, находится примерно в пределах 60° – 120° и совпадает с диапазоном наклонов орбит, на которых время существования спутников минимально. Графики на рисунках 2.4а и 2.4б, аналогично предыдущему рисунку, показывают различия во времени нахождения на орбите низкоорбитальных спутников. При учёте влияния селенопотенциала до 50-го порядка и степени объекты, находящиеся на низких орбитах, демонстрируют сокращённое время жизни не только при наклонах около 60° и 120° , но и в ряде других случаев. Особенности эволюции низкоорбитальных спутников будут детально рассмотрены в третьей главе диссертации.

Помимо рассмотренных орбитальных параметров немаловажную роль играет выбор начальной долготы восходящего узла орбиты [71]. Рассмотрим, как меняется время жизни (рисунок 2.5, панель слева) и максимально достижимый эксцентриситет (рисунок 2.5, панель справа) в зависимости от выбора начального значения наклона и долготы восходящего узла. Для большей полноты картины данные зависимости рассмотрены для разных больших полуосей: от 4 до 14 R_m .

На графиках слева (рисунок 2.5) видно, что с повышением высоты граница короткой продолжительности жизни смещается. Это связано с тем, что с повышением высоты интервал изменения эксцентриситета расширяется. Интенсивность роста эксцентриситета также увеличивается (области становятся более темными с повышением высоты) и на графике слева время жизни в приполярной области сокращается.



г)

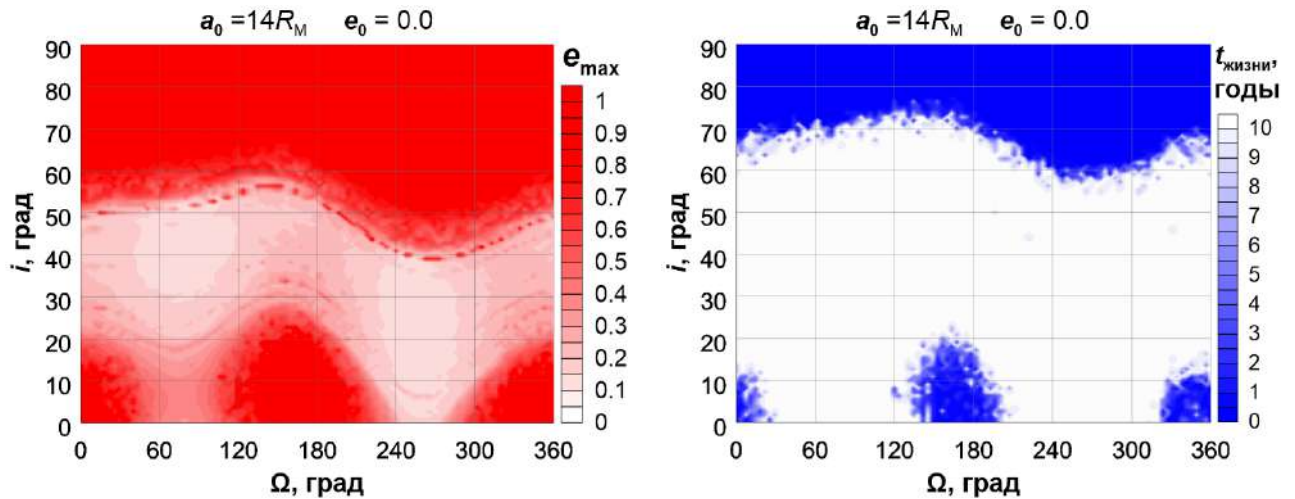


Рисунок 2.5 — Оценки времени жизни спутников и роста эксцентриситетов орбит в зависимости от начального наклонения и долготы восходящего узла на разных высотах:

а) $4R_M$, б) $8R_M$, в) $12R_M$, г) $14R_M$

Стоит отметить, что на рисунках 2.3, 2.4 и 2.5г для высоких орбит в околоэкваториальной области наблюдается быстрый рост эксцентриситета и короткая продолжительность жизни ИСЛ на орбите. Причина данного явления будет рассмотрена в главе 4.

2.3 Орбитальные резонансы в динамике окололунных объектов

В динамике окололунных объектов орбитальные (тессеральные) резонансы, могут быть вызваны неоднородностями гравитационного поля Луны (масконами). Согласно методике, изложенной в разделе 1.9, наличие резонанса проявляется либрационным поведением в эволюции критических аргументов и близости к нулевым значениям резонансных соотношений. В таких случаях небольшие возмущения накапливаются и могут вызывать заметные отклонения в долговременной эволюции орбиты. В контексте окололунных спутников это означает, что при определённых соотношениях между собственной орбитальной частотой спутника и частотой внешнего воздействия (вращения Луны с её масконами) возникают условия для резонансного влияния на движение спутника.

Особенностью динамики Луны является ее медленное вращение вокруг своей оси, поэтому зоны резонансов низких порядков (например, 1:1 или 1:2) располагаются вблизи границы сферы влияния Луны или за её пределами. Так, резонанс 1:1 (равенство периода обращения спутника вокруг Луны и периода вращения Луны, $\sim 27,3$ суток) соответствует орбите с большой полуосью порядка 88 тыс. км, что существенно превышает размер области, где доминирует притяжение Луны (радиус сферы влияния Луны около 66 тыс. км). Резонанс 1:2 (период спутника равен половине лунного месяца, $\sim 13,66$ суток) расположен примерно на

границе области притяжения Луны, при большой полуоси порядка 55,7 тыс. км. Помимо этого, в подобных случаях возмущающее влияние Земли имеет преобладающее значение. По этим причинам влияние орбитальных резонансов на динамику ИСЛ следует рассматривать на более низких высотах и соответственно более высоким порядком резонанса.

В качестве объектов исследования в данной работе были выбраны два высокопорядковых резонанса: 1:9 и 1:27. Резонанс 1:9 соответствует орбите с большой полуосью $a = 20443.284$ км, а для резонанса 1:27 — $a = 9828.106$ км. Выбор этих двух резонансных орбит продиктован стремлением охватить зоны окололунного пространства, где влияние гравитационного поля Луны достаточно велико (резонанс 1:27) при незначительном влиянии (резонанс 1:9). Сравнительный анализ резонансов 1:9 и 1:27 позволяет выявить общие черты и различия в проявлениях резонансов в зависимости от удалённости орбиты от Луны.

В рамках данного численного эксперимента варьировалось начальное значение долготы восходящего узла Ω орбиты спутника в диапазоне от 0° до 360° с шагом 1° . Данная серия расчётов позволяет исследовать зависимость резонансного взаимодействия от пространственной ориентации орбиты относительно распределения масконов. Для моделируемых орбит принято значение наклона, равное 40° . Такой выбор наклона обусловлен необходимостью исключить влияние механизма Лидова–Козаи (подробно рассматривается в главе 4) при исследовании влияния орбитальных резонансов на динамику ИСЛ.

По результатам численного эксперимента (таблица 2.1) выявлено, что признаки устойчивого орбитального резонанса наблюдаются только для двух из пяти рассмотренных компонент мультиплета (Φ_1 и Φ_4) как на орбите резонанса 1:9, так и 1:27. В таблице приведены конкретные значения долготы восходящего узла Ω , при которых соответствующие критические аргументы демонстрируют устойчивую либрацию, подтверждая локальный резонансный характер возмущений. Остальные компоненты мультиплета (Φ_2 , Φ_3 и Φ_5) подобного резонансного поведения не проявляют. Сходство выделенных наборов долгот Ω на разных высотах позволяет предположить, что данные устойчивые резонансные конфигурации обусловлены прохождением спутника над выраженными гравитационными аномалиями поля Луны.

Таблица 2.1 — Долготы восходящего узла, при которых наблюдается либрация критического аргумента при рассмотрении орбитальных резонансов 1:27 и 1:9

Компонент мультиплета	Тип резонанса	Ω , град			
Φ_1	1:27	87	185	276–277	358
	1:9	84–85	189–191	272–273	1–3
Φ_4	1:27	104–105	165	299–300	337–338
	1:9	102–105	166–168	294–297	337–339

В Приложении А представлены результаты численного эксперимента по изучению орбитальной эволюции спутников в условиях действия высоко порядковых резонансов 1:9 и 1:27. На рисунках А.1–А.4 показаны графики эволюции основных орбитальных элементов (a , e , i) и соответствующих резонансных характеристик для мультиплета Φ_1 и Φ в случаях, когда наблюдается наличие резонанса (левый график) и его отсутствия (правый график). При этом орбиты выбирались с близкими значениями больших полуосей, но с разными значениями долгот восходящего узла.

Анализ полученных графиков позволяет выявить различия в характере воздействия компонент мультиплета Φ_1 и Φ_4 . Для компоненты Φ_1 в обоих исследуемых резонансах (1:9 и 1:27) проявляется влияние в виде долгопериодической составляющей в изменении большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника. Эти вариации отсутствуют в нерезонансных случаях, что подчёркивает связь между либрацией критического аргумента внerezонансными изменениями орбитальных параметров.

В свою очередь, компонента мультиплета Φ_4 также демонстрирует устойчивую либрацию критического аргумента при определённых значениях долготы восходящего узла Ω . Анализ показывает, что большая полуось в данном случае сохраняет стабильность и не демонстрирует существенных изменений, аналогичных тем, что возникают при действии Φ_1 . Вместе с тем выявлено, что эксцентриситет орбиты при наличии либрации аргумента Φ_4 показывает небольшой вековой рост в значениях, незначительно превышающие-те, что наблюдаются в нерезонансных конфигурациях.

Таким образом, по результатам проведенного численного эксперимента можно сделать вывод, что существует по крайней мере 8 гравитационных аномалий в поле Луны, которые могут вызывать резонансные явления в динамике окололунных объектов, причем из пяти компонент резонансных мультиплетов лишь Φ_1 и Φ_4 демонстрируют признаки устойчивого резонансного взаимодействия. При этом действие компоненты Φ_1 вызывает выраженные долгопериодические вариации в большой полуоси и эксцентриситете орбит, тогда как действие компоненты Φ_4 характеризуется слабым вековым увеличением среднего значения эксцентриситета орбиты. Оставшиеся компоненты мультиплетов не демонстрируют устойчивых признаков влияния резонанса.

Глава 3. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ОКОЛОЛУННЫХ ОБЪЕКТОВ НА НИЗКИХ ОРБИТАХ³

Наиболее существенное влияние на динамику низколетящих объектов оказывает гравитационное поле Луны. Влияние третьих тел на низкоорбитальных высотах минимально. Этот факт подтверждают результаты изменения высоты перицентра спутника, полученные при разных наборах возмущающих факторов, приведенные на рисунке 1.9. В связи с этим в данной главе учитывались возмущения только от гравитационного поля Луны до гармоник 50-го порядка и степени.

Ранее проведенные исследования [15, 16, 17, 40], а также данные, представленные в главе 2, свидетельствуют о том, что большинство окололунных объектов на низких орбитах обладают коротким временем существования. Продолжительность нахождения спутника на низкой орбите при этом зависит от конкретного значения наклонения орбиты. На рисунке 3.1 представлены оценки времени жизни объектов на орбите высотой 100 км над лунной поверхностью, имеющих почти круговую орбиту и наклонения в диапазоне от 0° до 180° с шагом 0.2° .

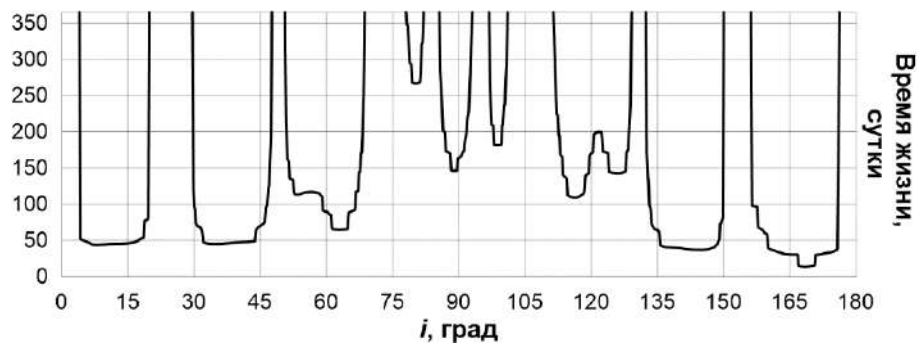


Рисунок 3.1 — Зависимость времени жизни низколетящего спутника от наклонения орбиты

Из анализа рисунка 3.1 видно, что различие в продолжительности существования на низких орбитах при соседних значениях наклонения может быть весьма значительным. Например, спутник с наклонением орбиты 4.0° может находиться на орбите более 1 года, тогда как при наклонении 4.2° продолжительность его жизни составляет всего 52.2 суток.

Резкое изменение времени существования спутника на орбите при изменении наклонения объясняется изменением максимального значения эксцентриситета, достигаемого в течение времени его нахождения на орбите. На данной высоте столкновение объекта с поверхностью Луны происходит при эксцентриситете примерно равном 0.055 (рисунок 3.2).

³ При написании данной главы использовались материалы публикаций по теме диссертации 2, 6 и 8, выполненных в соавторстве.

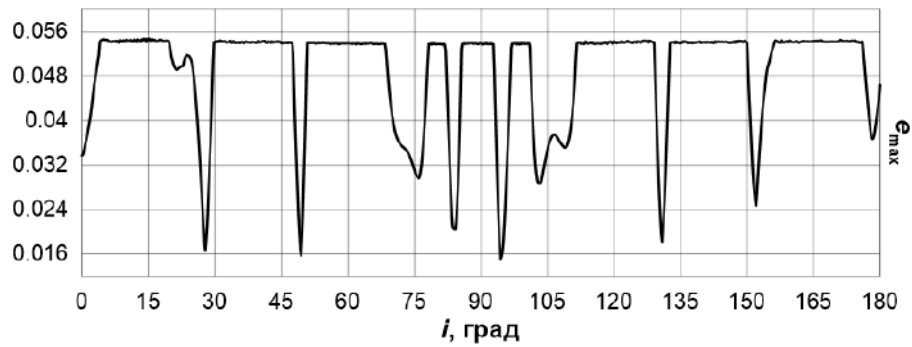
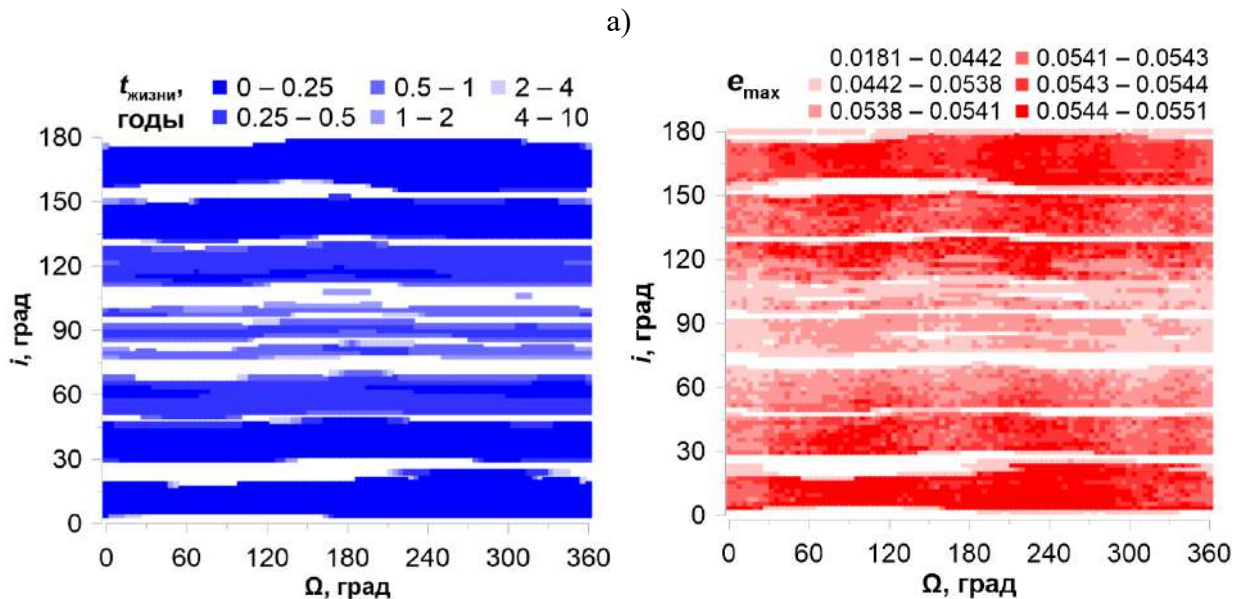


Рисунок 3.2 — Влияние наклонения на рост эксцентриситета орбиты низколетящего ИСЛ

В разделе 2.2 было показано (рисунок 2.5), что величина начальной долготы восходящего узла орбиты влияет на рост эксцентриситета и вследствие этого на продолжительность жизни. В связи с этим рассмотрим отдельно данные оценки для низких высот. На рисунке 3.3 показаны результаты зависимости продолжительности жизни и роста эксцентриситета орбиты от выбора начальных значений наклонения и долготы восходящего узла на двух высотах: 100 и 200 км над поверхность Луны. Оценки показывают, что в отличие от средних и высоких орбит выбор начальной долготы восходящего узла не влияет на рост эксцентриситета и продолжительность жизни для низколетящих ИСЛ.

Для определения источника силы, вызывающей такие изменения (рисунки 3.1 и 3.2), рассмотрим вариации гравитационной силы Луны, действующей на объекты на низких высотах в орбитальной СК. Рисунок 3.4 демонстрирует максимальные по величине воздействия гравитационного поля Луны по следующим составляющим орбитальной СК: радиальной (S), трансверсальной (T) и бинормальной (W) в зависимости от наклонения орбиты.



б)

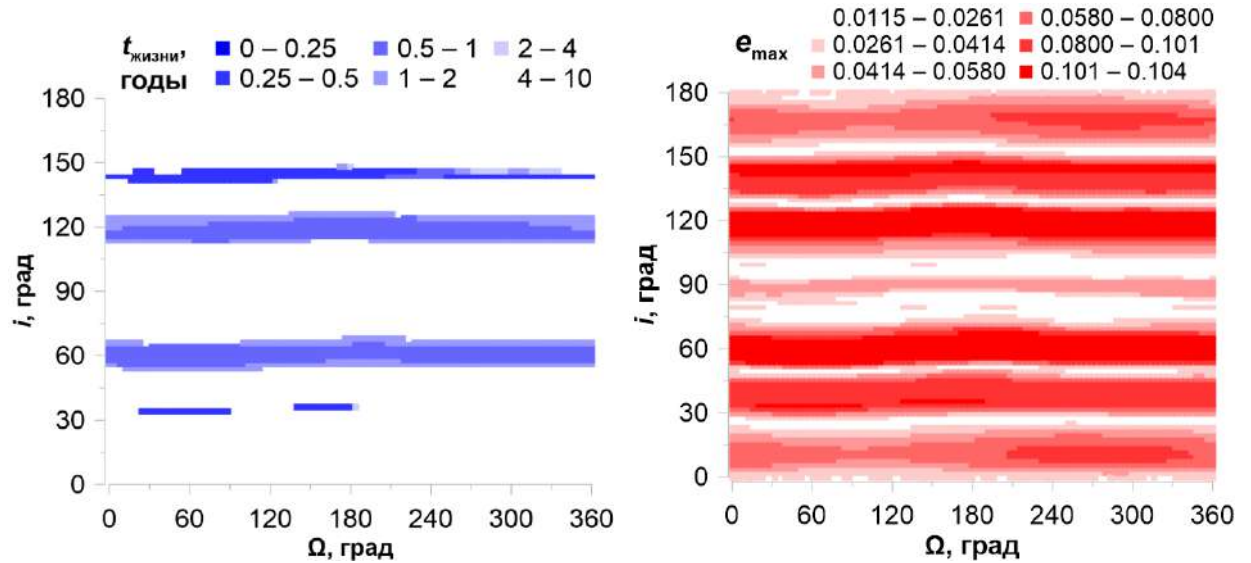


Рисунок 3.3 — Оценки времени жизни спутников и роста эксцентриситетов орбит в зависимости от начального наклонения и долготы восходящего узла на низких окололунных орбитах: а) $a = 1838$ км (100 км над поверхностью) и б) $a = 1938$ км (200 км над поверхностью)

Сопоставление графиков на рисунках 3.3 и 3.4 показывает, что сила, действующая вдоль радиальной составляющей, визуальнo коррелирует с графиком изменения эксцентриситета. При этом воздействие по радиальной составляющей превосходит проекции силы по трансверсальной и бинормальной составляющим на два порядка.

На рисунке 3.5 представлено изменение большой полуоси в зависимости от наклонения орбиты в течение полета окололунных низколетающих объектов. Красным цветом показаны минимальные значения большой полуоси, достигаемые за время жизни объекта, а синей линией — максимальные. Эти оценки указывают на то, что большая полуось орбиты в зависимости от наклонения изменяется на 1–2 км. Это позволяет сделать вывод, что влияние силы вдоль радиальной составляющей приводит к увеличению эллиптичности орбиты, при этом изменение большой полуоси остается незначительным.

Данные, представленные на рисунках 3.3 и 3.4, указывают на то, что кратковременное существование объектов на низких орбитах, вызванное столкновением с поверхностью Луны, обусловлено увеличением эксцентриситета орбиты. Данный рост эксцентриситета происходит под воздействием гравитационного поля Луны, в первую очередь за счет радиальной составляющей этого поля.

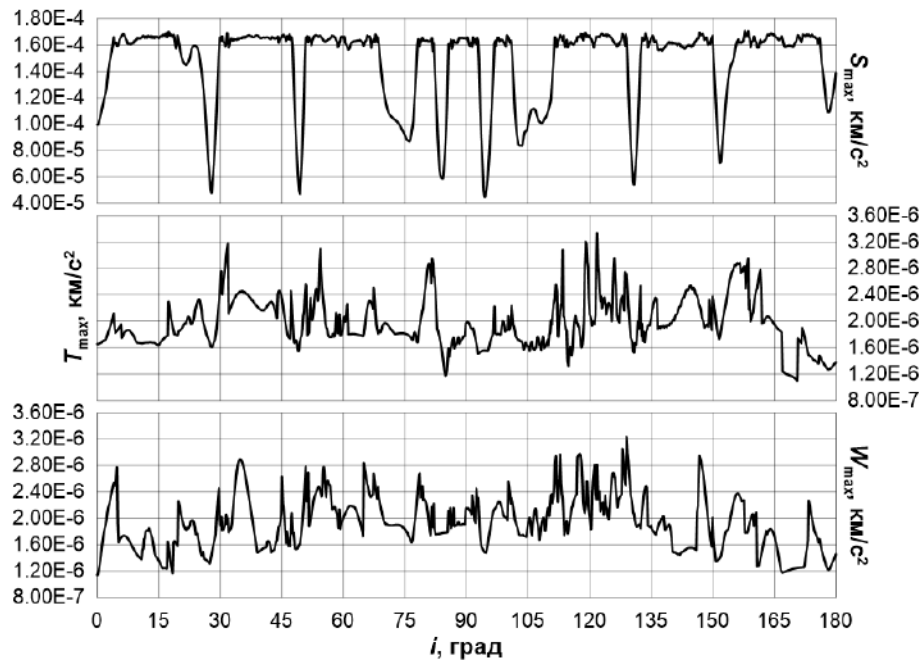


Рисунок 3.4 — Оценки максимального изменения силы гравитационного поля Луны в радиальной (S), трансверсальной (T) и бинормальной (W) составляющих орбитальной СК в зависимости от наклонения орбиты

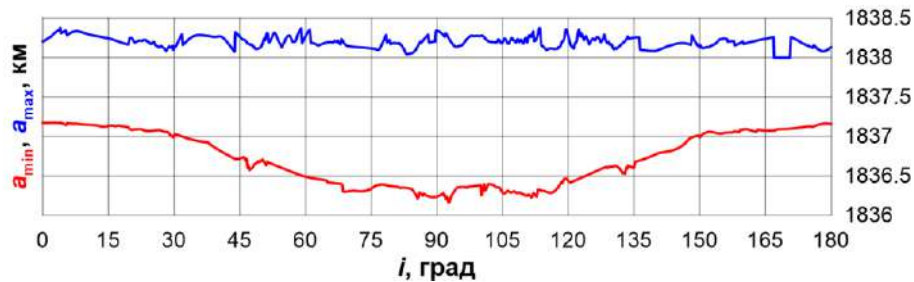


Рисунок 3.5 — Зависимость интервала изменения большой полуоси в течение времени жизни на низкой орбите от наклонения

Рассмотрим далее особенности движения объектов в окололунном пространстве под действием гравитационного поля Луны на интервале больших полуосей от 1800 км до 2500 км с шагом 20 км. Как видно из оценок на рисунке 3.6, по мере увеличения высоты орбиты продолжительность жизни объектов в определенных интервалах наклонений значительно возрастает. Короткое время существования на орбите связано с ростом эксцентриситета, что наглядно показано на рисунке 3.6б. Это особенно заметно в интервалах критических наклонений с увеличением высоты. Увеличение эксцентриситета можно объяснить влиянием гравитационного поля Луны вдоль направления орты S в орбитальной СК, что видно при сопоставлении рисунков 3.6б и 3.6в.

Интересно отметить, что графики изменений в трансверсальной и бинормальной составляющих силы (рисунки 3.6г и 3.6д) также демонстрируют связь с рисунками 3.6а и 3.6б. Однако, поскольку величина действия силы по радиальной составляющей существенно

превосходит остальные, можно заключить, что именно радиальная компонента гравитационного поля Луны является основной причиной роста эксцентриситета на низких высотах окололунного пространства и, следовательно, короткого времени существования низколетящих объектов на орбите.

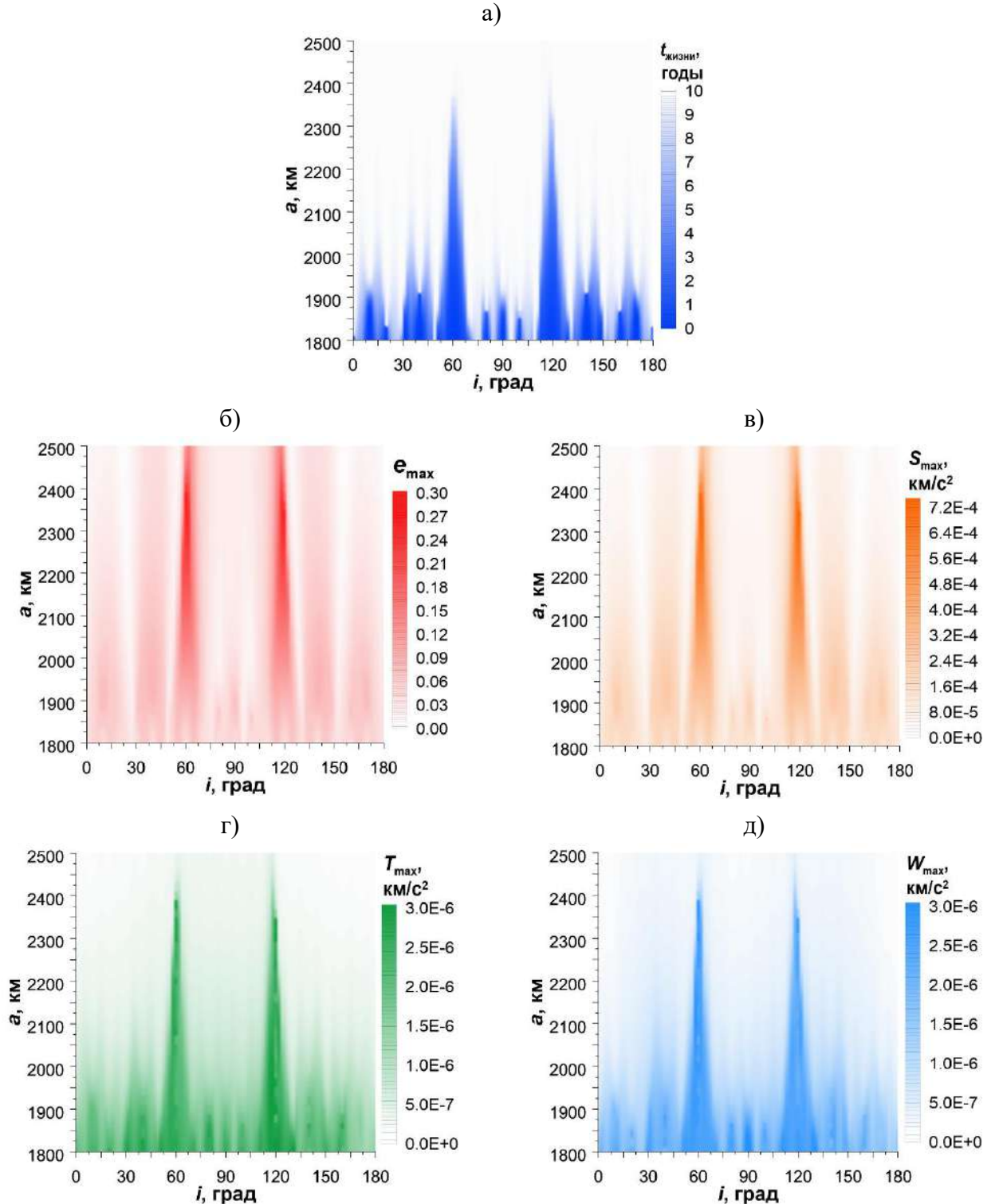


Рисунок 3.6 — Зависимость на низких высотах от наклона: а) продолжительность жизни на орбите; б) максимальное значение эксцентриситета; в) радиальная составляющая силы; г) тангенциальная составляющая силы; д) бинормальная составляющая силы

Глава 4. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ОКОЛОЛУННЫХ ОБЪЕКТОВ НА СРЕДНИХ И ВЫСОКИХ ОРБИТАХ⁴

4.1 Исследование влияния вековых резонансов на динамику ИСЛ

Как показывают приведённые выше результаты, окололунные объекты на средних и высоких орбитах демонстрируют значительный рост эксцентриситета и сокращение времени существования в полярных и приполярных зонах. Известно, что одной из ключевых особенностей воздействия вековых резонансов является увеличение эксцентриситета орбит околопланетных объектов [60]. В связи с этим было проведено углублённое исследование влияния вековых резонансов на динамику ИСЛ.

Для определения типа резонансных характеристик необходимо руководствоваться следующими критериями. Анализ проводится на основе динамики критического аргумента ψ : если наблюдается либрация, резонанс считается устойчивым; сочетание либрации и циркуляции указывает на неустойчивый резонанс, а циркуляция свидетельствует об отсутствии резонанса. Типы резонансов и их цветовые обозначения на резонансных картах, представленных далее, приведены на рисунке 4.1.

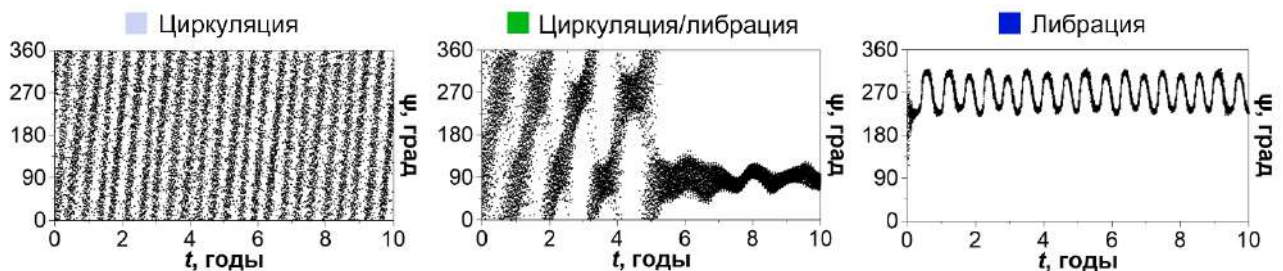


Рисунок 4.1 — Правила выбора типа резонансных характеристик и цветовое обозначение их на резонансных картах

4.1.1 Механизм Лидова–Козаи в динамике окололунных объектов

Выявленные в разделе 2.2 особенности орбитальной эволюции окололунных спутников, как правило, связаны с действием резонанса Лидова–Козаи [43, 44, 45, 72, 73, 74]. Поэтому этот аспект был изучен более детально.

Механизм Лидова–Козаи [43, 44, 45] возникает в иерархических тройных системах, где внешнее возмущающее тело расположено на значительно большем расстоянии от двух других тел (центрального и внутреннего возмущаемого). При выполнении определенных условий орбитальное движение возмущаемого тела характеризуется существенными вариациями

⁴ При написании данной главы использовались материалы публикаций по теме диссертации 1, 2, 3, 4, 5 и 9, выполненных в соавторстве.

эксцентриситета и наклона (эффект Лидова–Козаи), а также изменением аргумента перигея (резонанс Лидова–Козаи).

В литературе существует значительное разнообразие терминов, описывающих данное явление. Согласно анализу, проведённому в работе японских исследователей [75], встречаются такие обозначения, как механизм, эффект, резонанс, цикл и колебание Лидова–Козаи. В рамках настоящего исследования выбран термин «механизм», поскольку «резонанс» и «эффект» представляют собой отдельные проявления этого механизма. Использование терминов «цикл» и «колебание» нами считается некорректным, так как в реальной динамике орбит проявления механизма Лидова–Козаи не всегда имеют циклический или колебательный характер.

Особый интерес вызывают исследования, выполненные в работах [25, 26], где в контексте проектирования лунных орбитальных группировок были выявлены устойчивые («замороженные») орбиты, способные сохранять свою конфигурацию на протяжении значительного временного интервала даже при учёте множества возмущений. В работе [23] подробно рассмотрены «замороженные» орбиты средней высоты, для которых показано, что эксцентриситет испытывает лишь малые изменения, в то время как наклонение практически не варьируется.

При этом, в упомянутых публикациях [23, 25, 26] «замороженные» орбиты не рассматриваются в контексте действия механизма Лидова–Козаи, хотя дальнейшие результаты данного подраздела продемонстрируют, что существование таких орбит непосредственно связано с попаданием объекта в точный резонанс Лидова–Козаи.

Если внешнее возмущающее тело движется по круговой орбите, то усреднённые уравнения движения возмущаемого тела содержат сохраняющуюся величину — третью компоненту орбитального углового момента, известную как интеграл Моисеева–Лидова–Козаи. Этот интеграл можно выразить через эксцентриситет и наклонение относительно плоскости орбиты внешнего тела:

$$c_1 = \sqrt{(1 - e^2)} \cos i = \text{const}. \quad (4.1)$$

Эффект Лидова–Козаи — это долгосрочное явление, действующее на временных масштабах, значительно превышающих орбитальные периоды внутреннего и внешнего небесных тел. Этот эффект характеризуется долгопериодическими изменениями эксцентриситета и наклона орбиты, которые происходят с чрезвычайно большими амплитудами. При этом, чем больше начальное наклонение круговой орбиты внутреннего тела, тем более значительными становятся возмущения в его орбитальных параметрах. В соответствии с теорией Лидова–Козаи, эффект начинает проявляться, если наклонение орбиты превышает критическое значение [43, 44]:

$$i_c = \arccos \sqrt{3/5} \approx 39.2^\circ. \quad (4.2)$$

Как показано в работах [45, 46], эффект Лидова–Козаи носит резонансный характер. Ключевой особенностью орбитальной эволюции объектов, испытывающих это влияние, является рост эксцентриситета. При сохранении интеграла Моисеева–Лидова–Козаи c_1 (4.1) такой рост эксцентриситета приводит к взаимосвязанным колебаниям эксцентриситета и наклона орбиты: при увеличении эксцентриситета наклонение уменьшается, и наоборот. Этот процесс и называется эффектом Лидова–Козаи.

Влияние резонанса Лидова–Козаи определяется наклоном орбиты объекта относительно орбиты возмущающего тела. Согласно теории [76, 77], острый резонанс, приводящий к быстрому увеличению эксцентриситета, возникает, когда долгота перигея относительно узла $\omega = \pm 90^\circ$, значение интеграла c_1 приближается к нулю, а интеграл Лидова $c_2 = \left(\frac{2}{5} - \sin^2 \omega \sin^2 i\right) e^2$ имеет отрицательное значение. Пример орбитальной эволюции, демонстрирующий проявление эффекта Лидова–Козаи, показан на рисунке 4.2.

Особое внимание здесь следует обратить на то, что в возмущенной задаче при изначально круговых, но сильно наклонных орбитах большинство объектов выходят на устойчивый резонанс, несмотря на то что вследствие неопределенности в самом начале аргумент перигея ведет себя почти хаотично (рисунок 4.2в). Причем эффект Лидова–Козаи при таких условиях достаточно сильный, а амплитуда либрации аргумента перигея может достигать 50° (рисунок 4.1). Около какого из двух стационарных значений будет либровать аргумент перигея при начальной круговой орбите предугадать сложно и это зависит, главным образом, от характера влияния возмущающих факторов в начале моделирования.

Интеграл Лидова c_2 полезен тем, что вместе с интегралом (4.1) позволяет свести изучение механизма Лидова–Козаи к исследованию фазовых траекторий в плоскости аргумента перигея и эксцентриситета в зависимости от постоянных c_1 и c_2 (рисунок 4.3).

Несмотря на то что внешнее тело может вызывать значительные возмущения в орбитальных элементах внутреннего тела, в теории Лидова–Козаи имеются стационарные решения [25, 26, 45]

$$a = \text{const}, \quad \omega = \pm 90^\circ, \quad 1 - e^2 = c_1 \sqrt{5/3}, \quad \cos^2 i = c_1 \sqrt{3/5}. \quad (4.3)$$

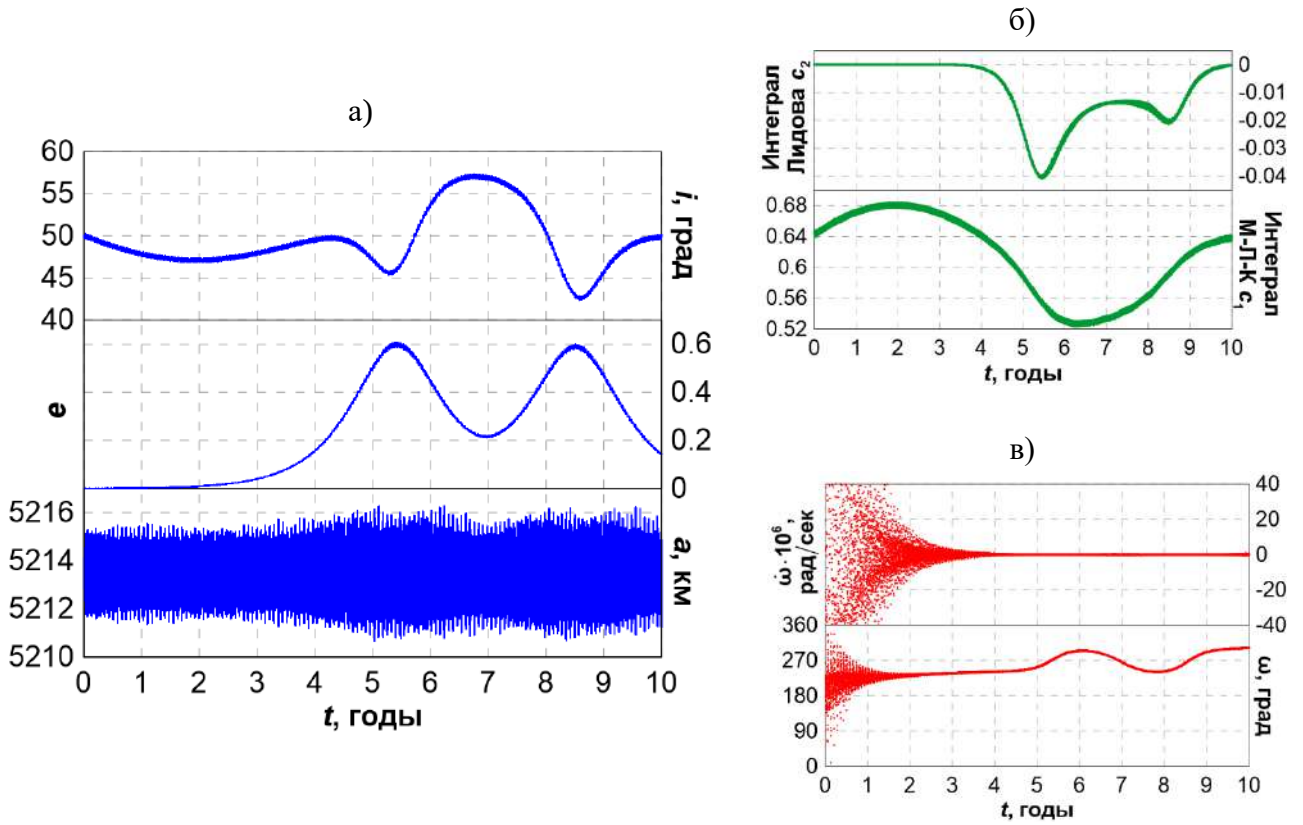


Рисунок 4.2 — Пример орбитальной эволюции окололунного объекта с проявлением эффекта типа Лидова–Козаи: а) орбитальная эволюция (сверху вниз) элементов i , e , a ; б) динамика (сверху вниз) интегралов Лидова и Моисеева–Лидова–Козаи; в) эволюция (сверху вниз) резонансного соотношения $\dot{\omega}$ и критического аргумента ω

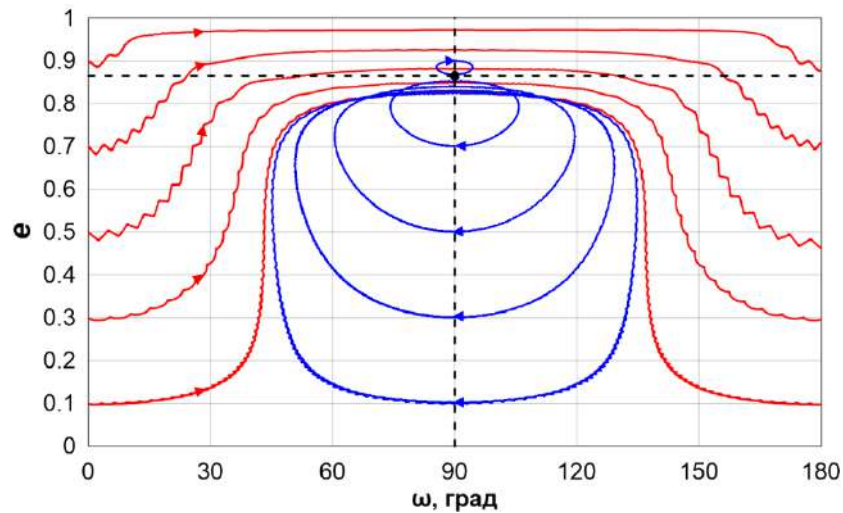


Рисунок 4.3 — Фазовые траектории в нормализованной ограниченной задаче трёх тел при различных начальных условиях: $a = 1$, $e = 0.1–0.9$, $i = 60^\circ$, $\omega = 0^\circ, 90^\circ$. Гравитационный параметр внешнего тела $\mu_p = 0.001$, а радиус его орбиты $a_p = 1.86$. Эффект Лидова–Козаи (аргумент перигентра циркулирует) — красные линии; резонанс Лидова–Козаи (аргумент перигентра либрирует) — синие линии; точный резонанс Лидова–Козаи (стационарные решения) — точка на пересечении пунктирных линий

При начальных значениях орбитальных элементов, близких к стационарным решениям, соответствующие орбитальные параметры демонстрируют либрационное поведение. Ввиду схожести с либрационными возмущениями, возникающими при орбитальных резонансах (рисунок 4.3), это явление называют резонансом Лидова–Козаи, а стационарные решения — точным резонансом Лидова–Козаи.

Стационарные решения существуют только в усредненной задаче, где внешнее тело совершает движение по круговой орбите. Тем не менее, в более сложных практических задачах при высокоточном моделировании возмущения в орбитальных элементах около стационарных решений (4.3) оказываются достаточно малыми, что в действительности является прямым следствием теоретического резонанса Лидова–Козаи.

Таким образом, в рамках данной диссертации под эффектом Лидова–Козаи, обусловленным гравитационным воздействием внешнего небесного тела, будем понимать значительные взаимосвязанные негармонические, но периодические изменения эксцентриситета и наклона в орбитальном движении исследуемого небесного тела с начальной круговой (или слабо эллиптической), но сильно наклонной орбитой. Негармонические возмущения в орбитальных элементах характеризуются стремительным возрастанием эксцентриситета и убыванием наклона до их максимального и минимального значений соответственно с последующим возвращением их к исходным значениям. Причем наклонение убывает до критического (минимального) значения (4.2), а максимальные значения орбитальных элементов соответствуют их стационарным решениям (4.3).

В то же время под резонансом Лидова–Козаи будем понимать либрационные взаимосвязанные изменения эксцентриситета, наклона и аргумента перигея около их стационарных значений. Впрочем, механизм Лидова–Козаи может проявляться и как эффект, и как резонанс, если все орбитальные элементы либрируют с большой амплитудой (рисунок 4.3).

Особый интерес представляет изучение данного явления в динамике окололунных объектов, где существенное влияние оказывают гравитационные воздействия как Луны, так и Земли. На основе численного эксперимента была проведена оценка области, в которой проявляется резонанс типа Лидова–Козаи для окололунных спутников (рисунок 4.4). Оценка выполнялась путём анализа эволюции критического аргумента в зависимости от значений большой полуоси и начального наклона орбиты к экватору Луны. Большие полуоси и наклоны орбит варьировались в диапазонах $a \in [1.1R_M, 15R_M]$ с шагом $0.1R_M$, где R_M — радиус Луны, и $i \in [0^\circ, 180^\circ]$ с шагом 5° . При расчётах учитывалось полное гравитационное поле Луны, разложенное до 50-го порядка и степени, а также влияние Земли и Солнца. Цветовое обозначение областей на рисунке соответствует обозначениям, использованным на рисунке 4.1.

Результаты, приведенные на рисунке 4.4, показывают, что область влияния резонанса

Лидова–Козаи расширяется вдоль большой полуоси примерно до 6000 км. При этом с увеличением высоты зона устойчивого влияния резонанса остается в диапазоне наклонений от 60° до 105° .

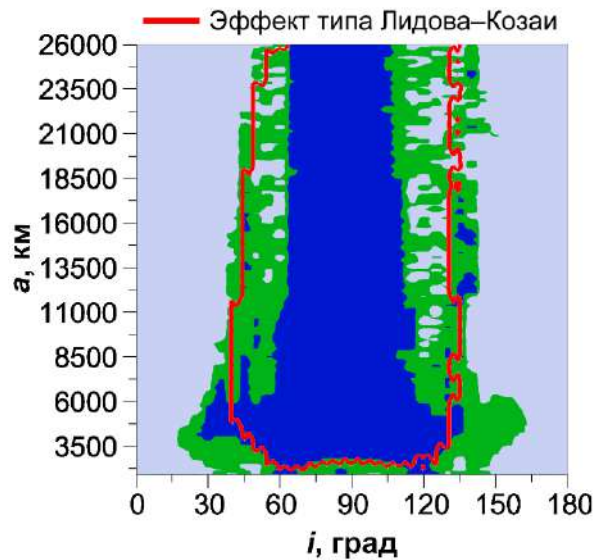


Рисунок 4.4 — Области влияния резонанса типа Лидова–Козаи на динамику окололунных объектов и проявления эффекта типа Лидова–Козаи

Анализ динамики орбитальной эволюции модельных окололунных объектов, находящихся на средних и больших высотах, показал, что для большинства из них характерно проявление эффекта Лидова–Козаи. Граница области, в пределах которой наблюдается данный эффект, обозначена на рисунке 4.4 красной линией. Как видно из рисунка, область проявления эффекта Лидова–Козаи охватывает значительную часть области, в которой этот резонанс оказывает влияние на орбитальную эволюцию спутников.

Важно отметить, что область проявления эффекта Лидова–Козаи имеет заметную корреляцию с зонами окололунного пространства, в которых наблюдается значительный рост эксцентриситета. Для наглядности на рисунке 4.5 граница проявления данного эффекта выделена синей линией, наложенной на карту изменения эксцентриситета орбит ИСЛ. Кроме того, при превышении критического значения наклона i_c (4.2) орбита теряет устойчивость, что приводит к увеличению эксцентриситета. Данный эффект подтверждается результатами, представленными на рисунке 4.5.

Наблюдается также значительный рост эксцентриситета орбит в окололунном пространстве у объектов, движущихся по околоэкваториальным высоким орбитам в области прямого движения. Это явление объясняется прямым воздействием возмущений со стороны Земли (рисунок 2.2в).

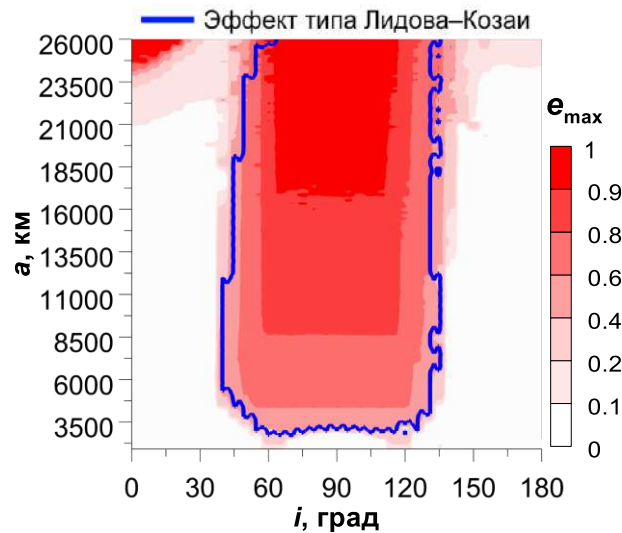


Рисунок 4.5 — Область проявления эффекта типа Лидова–Козаи в сравнении с областями роста эксцентриситета в окололунном пространстве

Интересно отметить, что в проявлении эффекта типа Лидова–Козаи присутствуют свои особенности при учёте несферичности Луны. Рассмотрим их на примере орбитальной эволюции объектов, показанных на рисунке 4.6. Были выбраны два модельных объекта, у которых орбитальные элементы $a = 5500$ км, $e = 0.0$, $i = 41^\circ$, $\omega = 0^\circ$, $M = 0^\circ$ совпадают. На левой панели рисунка 4.6 представлены результаты для объекта с $\Omega = 0^\circ$, а на правой — $\Omega = 270^\circ$. Данный выбор величин долготы восходящего узла обусловлен необходимостью показать влияние эффекта Лидова–Козаи на разнонаправленные движения объектов.

При сравнении левой и правой панели рисунка 4.6 отметим, что для двух объектов эффект типа Лидова–Козаи в динамике проявляется по-разному. При $\Omega = 270^\circ$ эффект возникает быстрее и с большой интенсивностью. Причём на данной высоте такие взаимные колебания между эксцентриситетом и наклоном приводят к падению объекта примерно через 6.5 лет (рисунки 4.6б, 4.6г и 4.6е, графики, отмеченные зелёным цветом).

Особенность реального движения окололунных объектов заключается в том, что на них помимо влияния внешних тел, вызывающих резонанс типа Лидова–Козаи, также воздействует несферичность центрального тела. Как показано на рисунке 4.6 влияние сжатия Луны (графики, отмеченные красным цветом) или всего поля (график синего цвета) частично подавляет чистый эффект типа Лидова–Козаи (графики, отмеченные зелёным цветом). При этом если в движении ИСЛ учитывается полное гравитационное поле Луны, то эффект типа Лидова–Козаи проявляется в его динамике раньше (графики, отмеченные синим цветом).

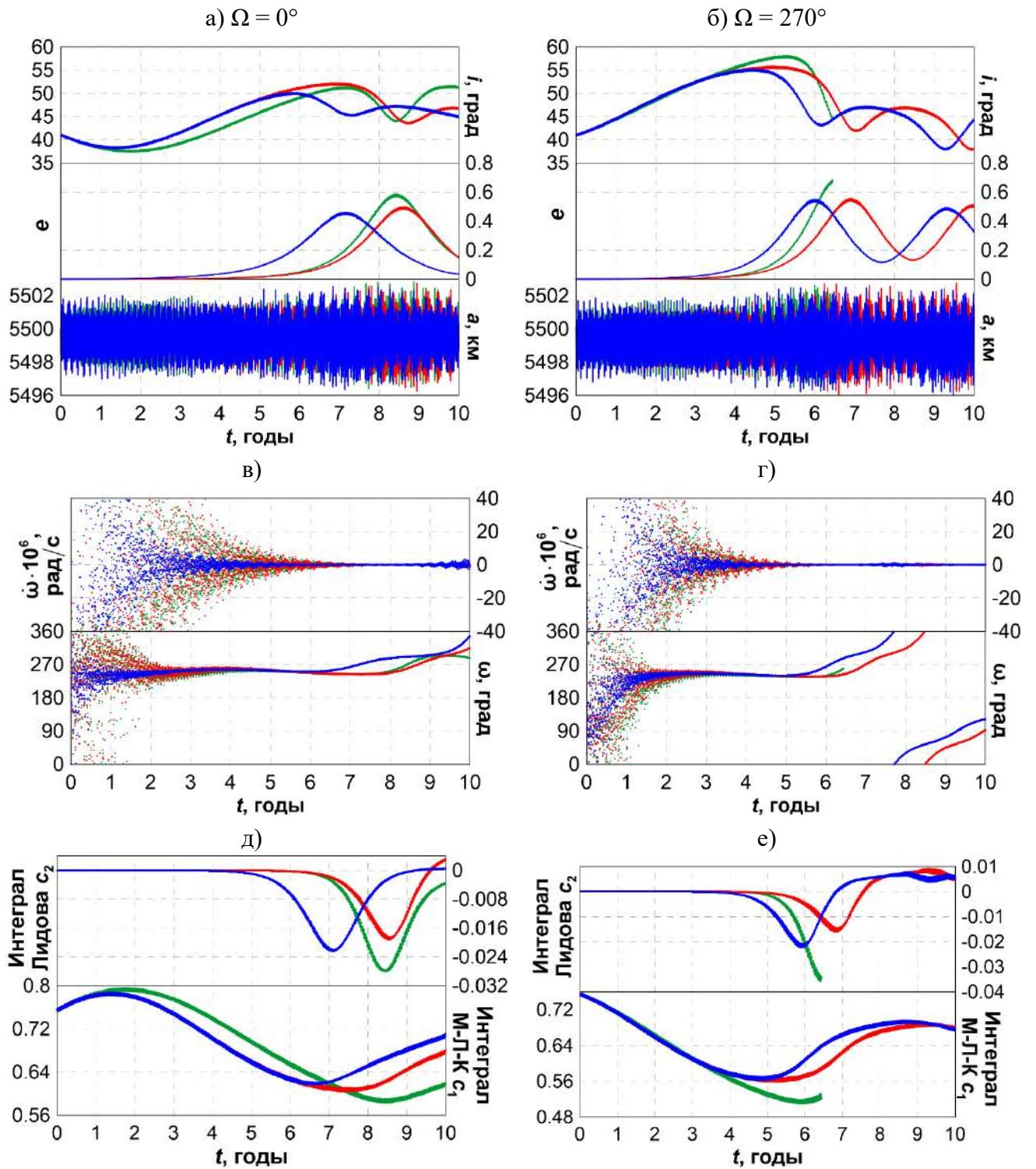


Рисунок 4.6 — Пример проявления эффекта типа Лидова–Козаи при учёте возмущений от полного гравитационного поля Луны, Земли и Солнца (выполнено синим цветом), для случая с возмущениями от сжатия Луны, Земли и Солнца (выполнено красным цветом) и только от Земли и Солнца (выполнено зелёным цветом): орбитальная эволюция (сверху вниз) элементов i , e , a при Ω , равном а) 0° и б) 270° ; динамика (сверху вниз) интегралов Лидова и Моисеева–Лидова–Козаи, при Ω , равном в) 0° и г) 270° ; эволюция (сверху вниз) резонансного соотношения $\dot{\omega}$ и критического аргумента ω при Ω , равном д) 0° и е) 270°

На рисунке 4.7 приведены примеры полностью сформировавшегося эффекта Лидова–Козаи. Учитываются возмущения от сжатия Луны, притяжение Земли и Солнца.

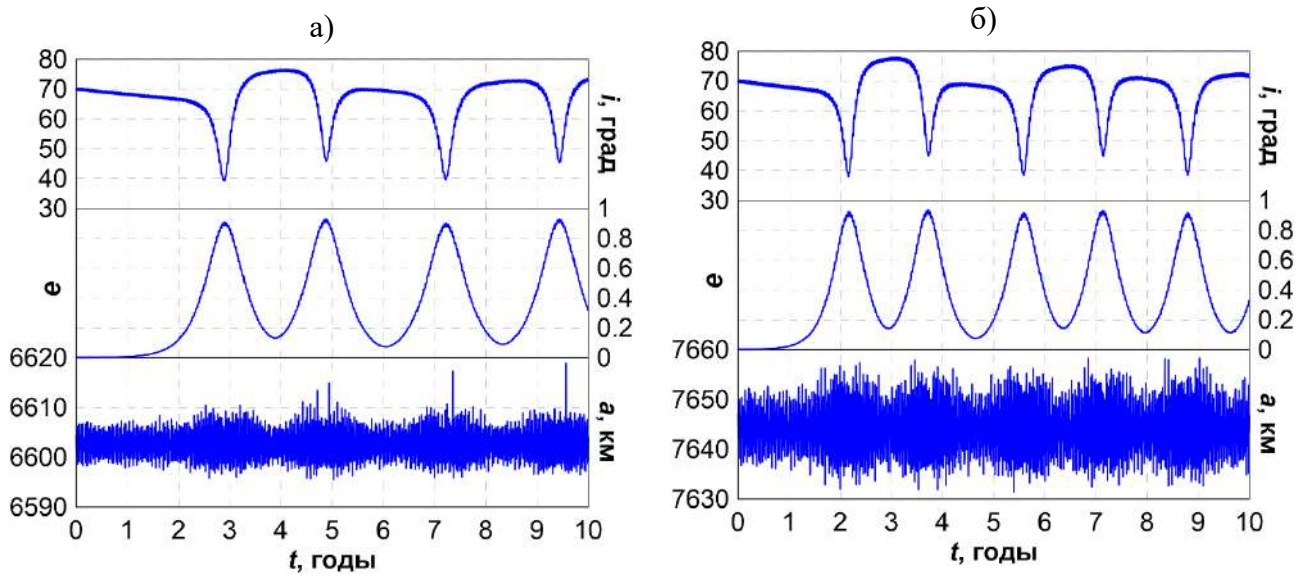


Рисунок 4.7 — Примеры полностью сформировавшегося эффекта Лидова–Козаи: а) $a = 6604.4$ км; б) $a = 7647.2$ км. Учитываются возмущения от сжатия Луны, и влияние притяжения Земли и Солнца

Дополнительно отметим, что вне области, обведённой на рисунке 4.4 красным контуром, механизм Лидова–Козаи может проявляться как постепенный захват в резонанс при довольно слабом эффекте Лидова–Козаи. Пример такого воздействия представлен на рисунке 4.8. Отметим, что на графиках эволюции орбитальных элементов (рисунок 4.8а) между наклоном и эксцентриситетом отсутствует взаимосвязь, присущая проявлению эффекта Лидова–Козаи. Однако на упомянутом рисунке наблюдается небольшой рост эксцентриситета орбиты вследствие влияния резонанса типа Лидова–Козаи, наличие которого подтверждается поведением резонансных характеристик, представленных на рисунках 4.8б и 4.8в.

Далее рассмотрим вопрос, каков характер поведения орбитальных элементов при численном моделировании орбитального движения ИСЛ около стационарных решений (4.3), которые имеют место в двукратно осредненной ограниченной задаче трех тел, где внешнее возмущающее тело совершает движение по круговой орбите.

Главная задача увидеть в численном моделировании позволяют ли эти решения при максимально полном учёте всех гравитационных возмущений минимизировать колебания орбитальных параметров и обеспечить долгосрочную стабильность орбиты. Для её решения был проведен численный эксперимент, направленный на выявление областей и интервалов орбитальных параметров, при которых достигаются минимальные амплитуды колебаний в аргументе перигея (рисунок 4.9). Было выполнено численное моделирование движения

объектов на 10-летнем интервале времени с начальными параметрами: $a/R_M \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$, $e \in [0.0, 0.7]$, $i \in [40^\circ, 65^\circ]$, $\Omega \in \{0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ\}$ и $\omega \in \{90^\circ, 270^\circ\}$.

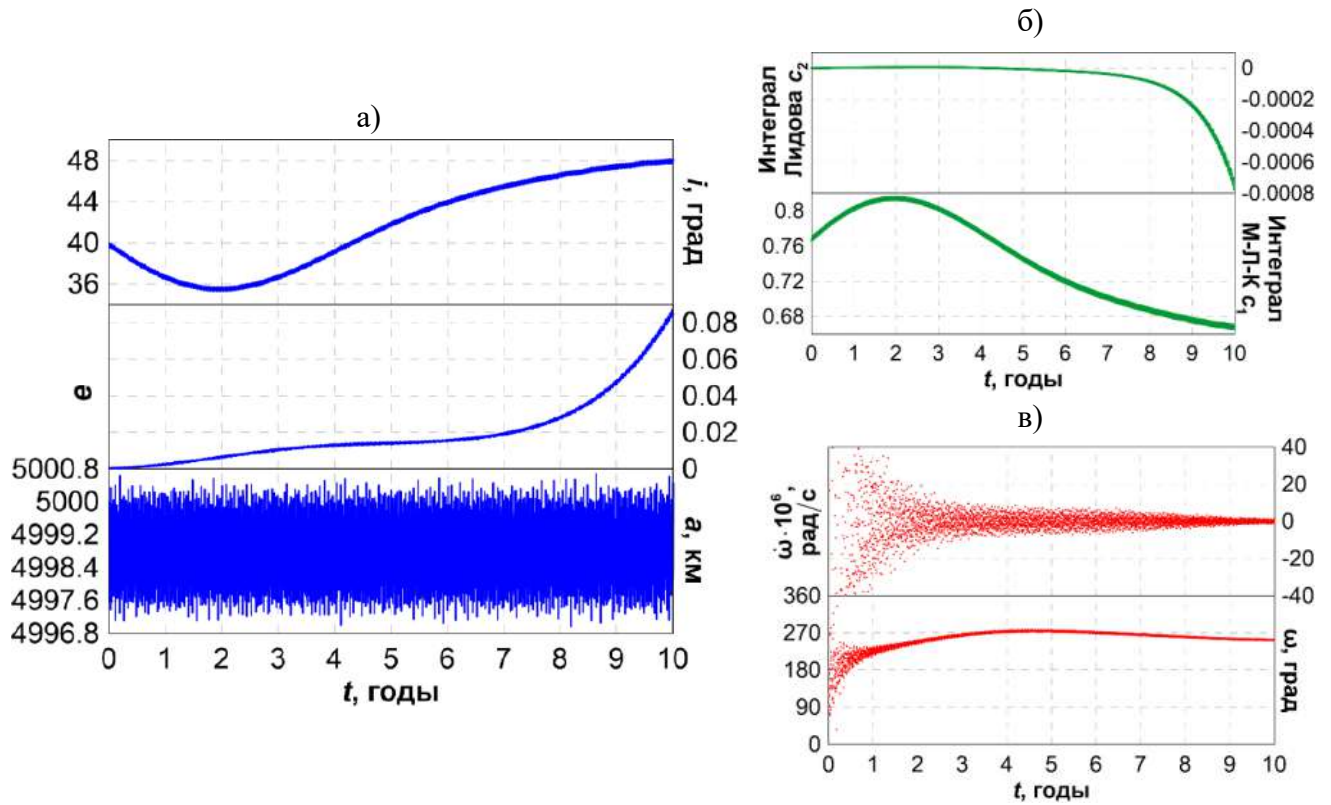
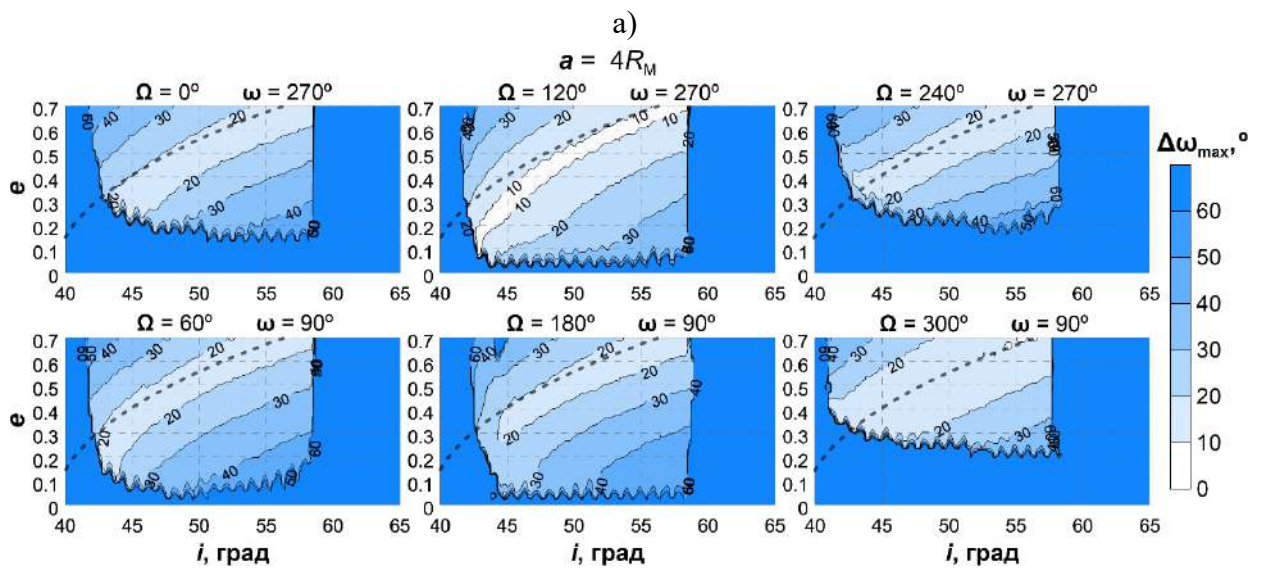
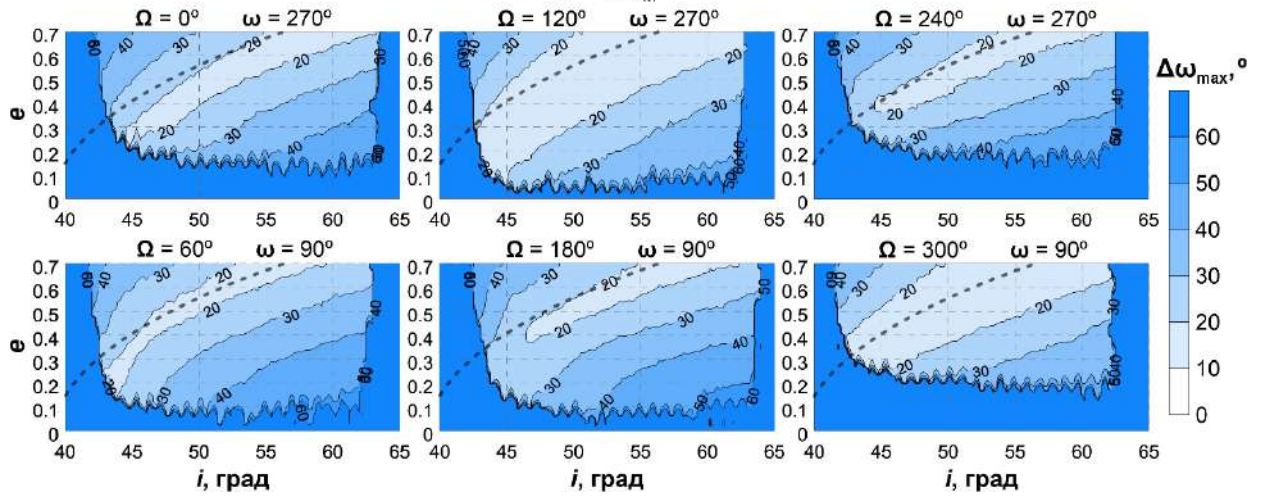


Рисунок 4.8 — Пример проявления слабого резонанса типа Лидова–Козаи при учёте возмущений от полного гравитационного поля Луны, Земли и Солнца: а) орбитальная эволюция (сверху вниз) элементов i , e , a ; б) динамика (сверху вниз) интегралов Лидова и Моисеева–Лидова–Козаи; в) эволюция (сверху вниз) резонансного соотношения $\dot{\omega}$ и критического аргумента ω



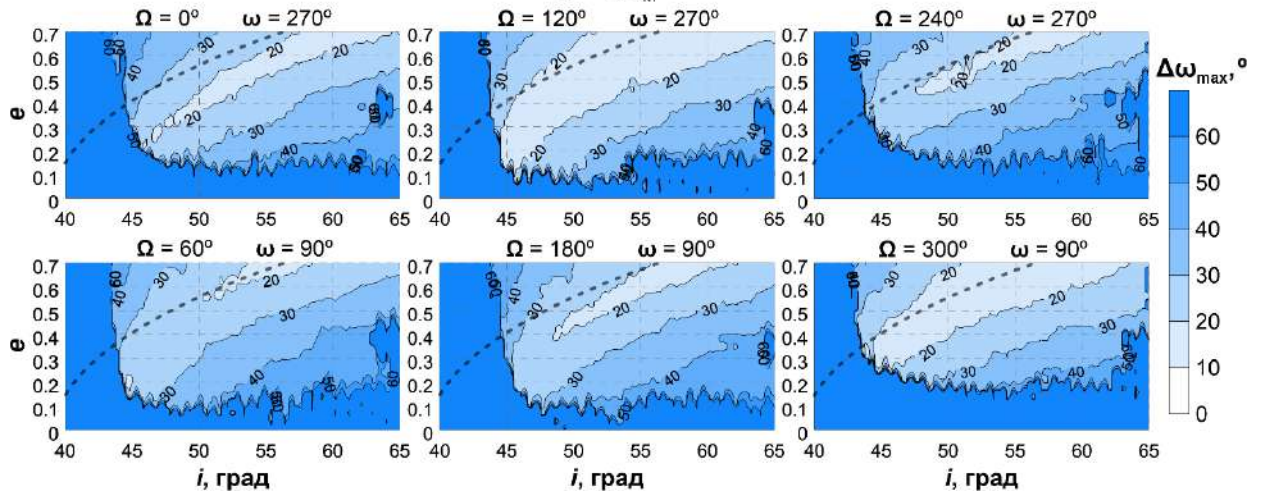
б)

$$a = 6R_M$$



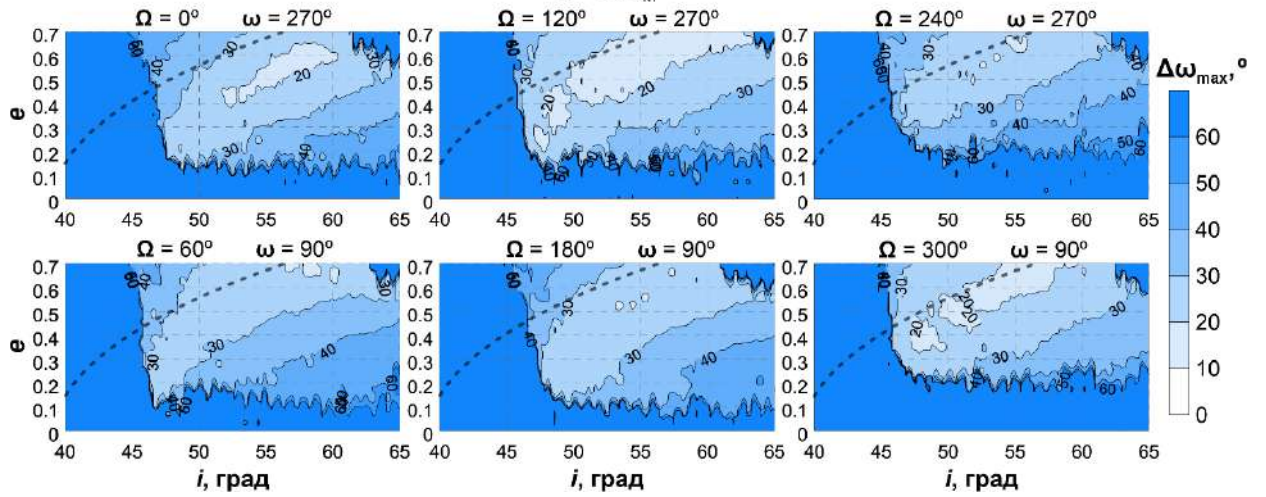
в)

$$a = 8R_M$$



г)

$$a = 10R_M$$



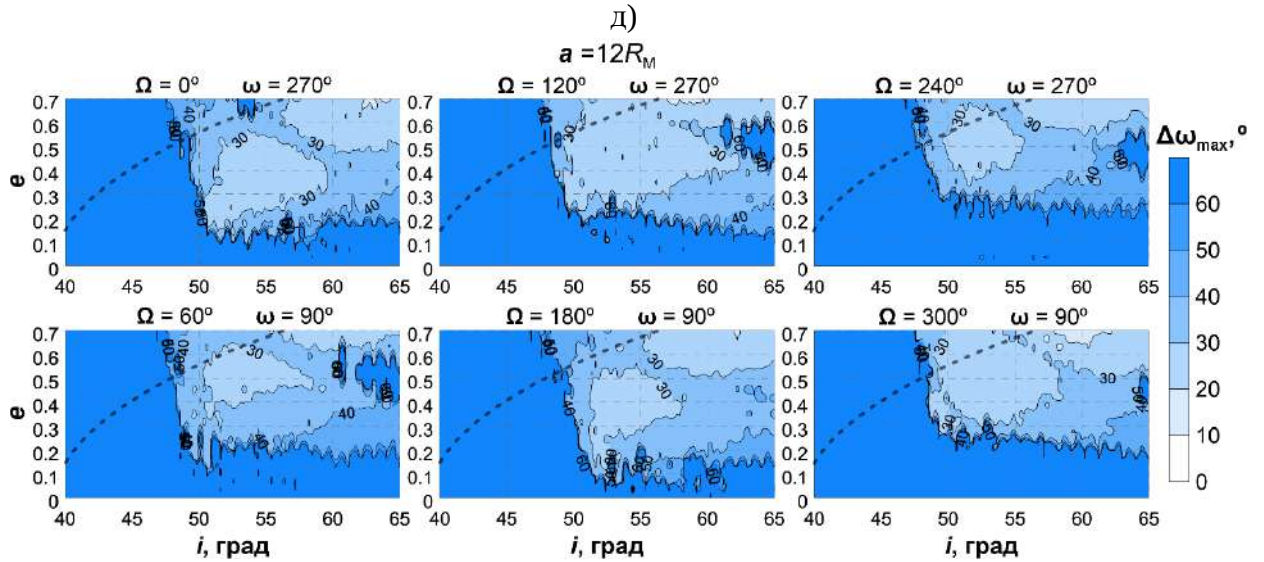


Рисунок 4.9 — Результаты численного эксперимента по оценке амплитуды колебаний аргумента перицентра в зависимости от начальных параметров орбиты, рассмотренных для большой полуоси, равной: а) $4R_M$, б) $6R_M$, в) $8R_M$ г) $10R_M$ д) $12R_M$ (более полное описание в тексте)

Орбитальная эволюция ИСЛ в этом эксперименте рассчитывалась в специальной системе координат, ориентированной на Землю [32]. Данный выбор СК был сделан поскольку стационарные решения в теории Лидова–Козаи отнесены к координатной системе, чья основная плоскость совпадает с орбитальной плоскостью внешнего небесного тела. Эта система, основанная на векторах положения Земли $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ в два близких момента времени, была выбрана для более точного учёта гравитационных влияний Земли на движение НКА. Оси координат в этой системе задаются следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{x}_1 \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_1 \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)|}. \quad (4.4)$$

На рисунке 4.9 представлено 5 составных графиков, каждый из которых содержит 6 карт. Над каждым составным графиком указано начальное значение большой полуоси, с использованием которой построены карты, а над каждой картой указаны соответствующие ей начальные значения аргумента перицентра и долготы восходящего узла. В свою очередь градиентные карты отражают зависимость максимальной амплитуды колебаний аргумента перицентра орбиты ($\Delta\omega_{\max}$) от параметров i и e . Для удобства анализа на картах рядом с каждым уровнем градиентной заливки указан соответствующий ему числовой параметр, обозначающий максимальное отклонение ω от его начального значения за 10 лет. На каждую карту была нанесена пунктирной линией кривая стационарных решений теории Лидова–Козаи (4.3). Наиболее близкие к кривой стационарных решений светлые области показывают размеры зон

максимальной устойчивости орбит в фазовом пространстве $\{e, i\}$ при указанном на панели справа максимальном отклонении долготы перицентра от требований стационарности решения.

Результаты, приведенные на рисунке 4.9 показывают, что на выбранных интервалах наклонения и эксцентриситета области стационарности существуют при максимальных амплитудах колебаний аргумента перицентра, составляющих до 30° при $a = 12R_M$, а в остальных случаях — до 20° . Видно также, что малые изменения в аргументе перицентра характерны для более наклонных и эллиптических орбит для всех рассматриваемых значений большой полуоси. Однако с повышением высоты орбит области с наименьшими колебаниями в ω сокращаются.

Пример орбитальной эволюции, демонстрирующий результат влияния точного резонанса Лидова–Козаи (начальные элементы: $a = 10428$ км, $e = 0.7$, $i = 57.4^\circ$, $\Omega = 120^\circ$, $\omega = 270^\circ$, $M = 0^\circ$) приведён на рисунке 4.10. На левой панели данного рисунка приведены графики с изменениями во времени параметров $L_1 = c_1\sqrt{5/3} - (1 - e^2)$, $L_2 = c_1\sqrt{3/5} - \cos^2 i$, полученных из условий существования стационарных решений (4.3).

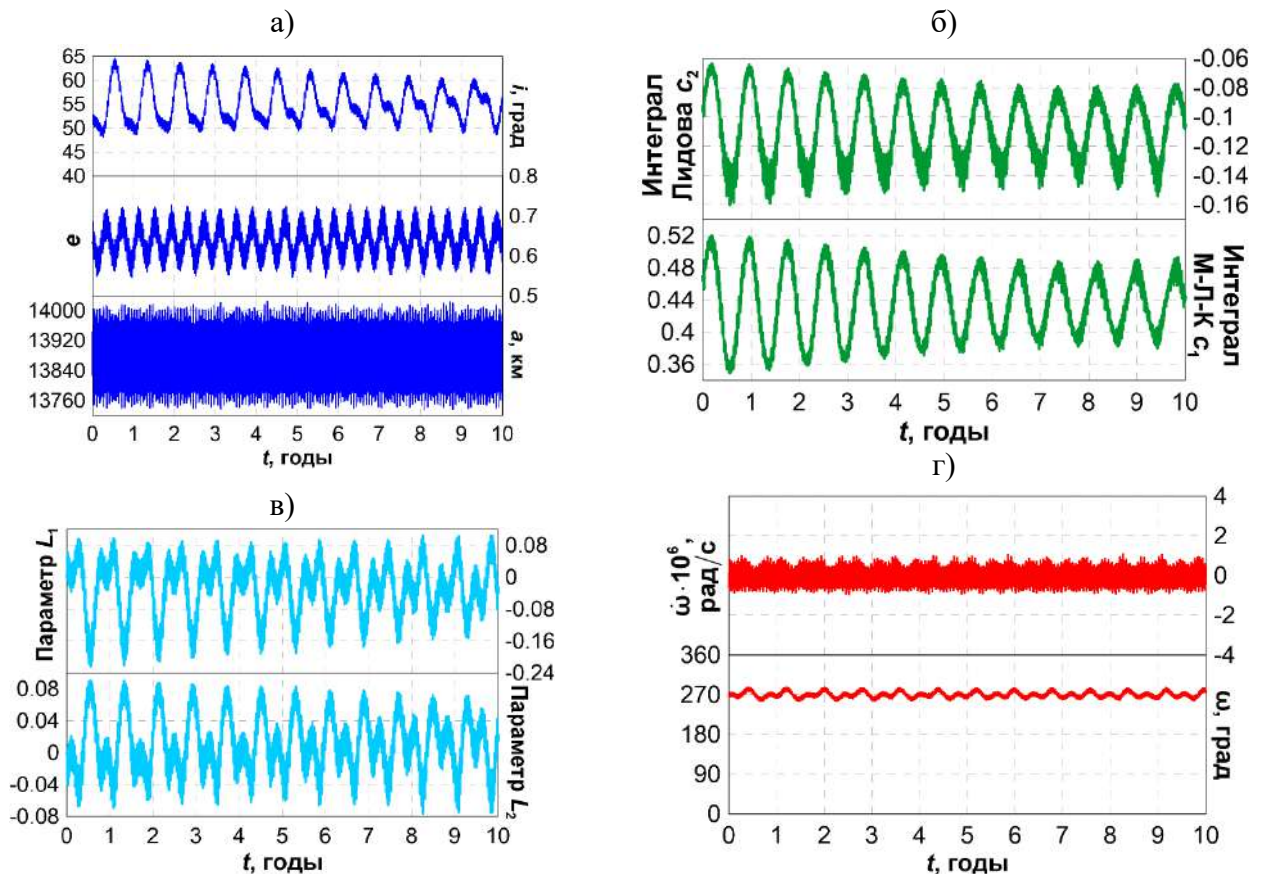


Рисунок 4.10 — Пример орбитальной эволюции, соответствующей стационарному решению:

- а) орбитальная эволюция (сверху вниз) элементов i , e , a ; б) изменение во времени (сверху вниз) интегралов Лидова и Моисеева–Лидова–Козаи; в) изменение со временем (сверху вниз) параметров стационарных решений L_1 и L_2 (описание в тексте); г) эволюция (сверху вниз) резонансного соотношения $\dot{\omega}$ и критического аргумента ω

Как видно, из рисунка 4.10 величины L_1 и L_2 осциллируют около нуля, что подтверждает близость выбранных орбитальных параметров к стационарным решениям. Графики, приведённые на рисунках 4.10б и 4.10г, подтверждают наличие в динамике объекта точного резонанса Лидова–Козаи.

Более подробные результаты исследования стабильности орбитальных параметров вследствие влияния точного резонанса типа Лидова–Козаи будут представлены в главе 6 на примере эскизного проектирования лунной ГНСС.

4.1.2 Оценка областей влияния вековых и полuveковых резонансов низких порядков в окололунном орбитальном пространстве

В данном разделе приведены оценки влияния различных типов вековых и полuveковых резонансов, перечисленных в таблицах 1.4 и 1.5. Для анализа результатов численного моделирования и классификации резонансов по степени устойчивости были использованы два подхода: обученная искусственная нейронная сеть [78] и ручной анализ.

На основе проведённых вычислений были построены карты распределения вековых апсидально-нодальных резонансов, возникающих вследствие соизмеримости параметров прецессии орбиты спутника, обусловленной возмущающими воздействиями, с параметрами прецессии возмущающих тел — Солнца и Земли (рисунки 4.11–4.14). Поскольку большинство резонансов охватывает обширные области окололунного пространства, объединение всех резонансных зон на одной карте оказалось невозможным, поэтому для большинства резонансов были составлены отдельные карты.

Сравнение карт резонансов, включающих частоту долготы перицентра (рисунки 4.11, 4.13 и 4.14), показывает, что их области почти полностью совпадают с зоной действия резонанса Лидова–Козаи. Эта область охватывает зоны окололунного пространства, где происходит значительный рост эксцентриситета орбит. Следовательно, основным фактором увеличения эксцентриситета и существенного сокращения времени существования спутников на орбите средних и больших высот можно считать влияние резонанса Лидова–Козаи на их орбитальную динамику.

Нодальные резонансы низких порядков (рисунок 4.12) сосредоточены вблизи наклонения 90° и накладываются на область апсидально-нодальных резонансов, что усиливает рост эксцентриситета и, как следствие, сокращает время существования объектов на орбите.

Полuveковые резонансы, представленные в таблице 1.5, не оказывают существенного влияния на динамику ИСЛ, так как на всём интервале прогнозирования в их критических аргументах наблюдается циркуляция.

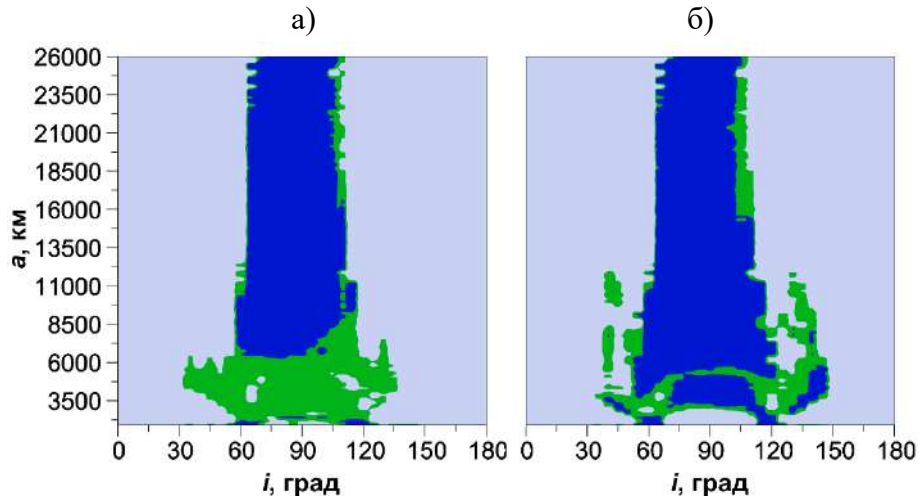


Рисунок 4.11 — Области влияния апсидальных резонансов второго порядка:

а) $\dot{\omega} + \dot{\omega}'_E$, б) $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_E$

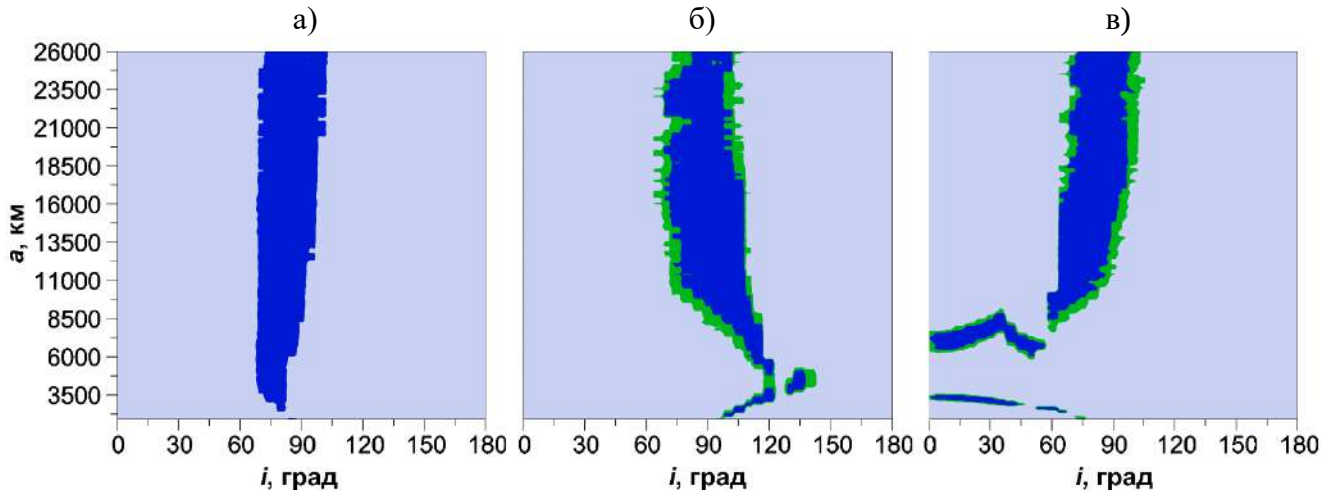


Рисунок 4.12 — Области влияния нодального резонанса и смежных с ним резонансов:

а) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$, б) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) - \dot{\omega}'_E$, в) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) + \dot{\omega}'_E$

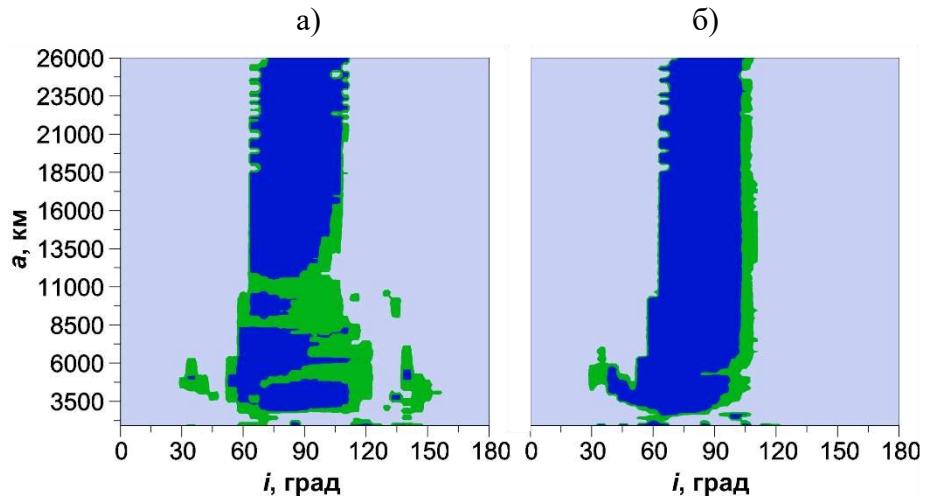


Рисунок 4.13 — Области влияния асидально-нодальных резонансов третьего порядка:

а) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + \dot{\omega}$, б) $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - \dot{\omega}$

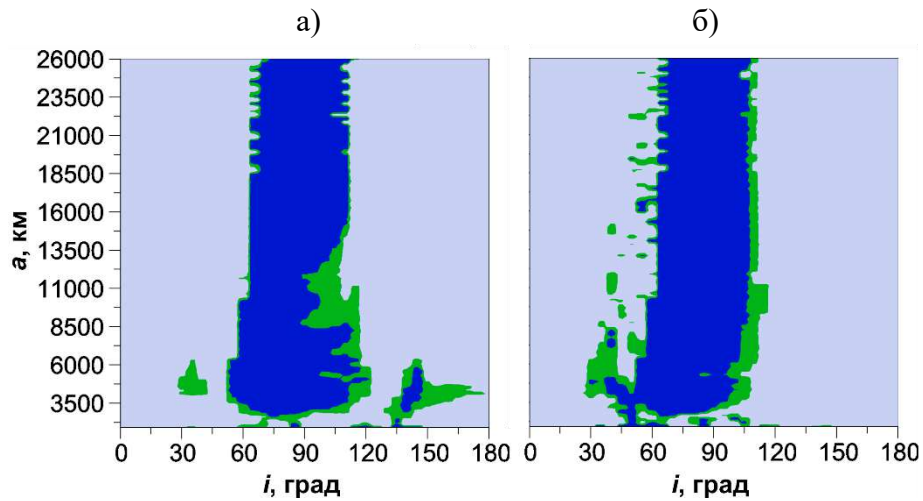


Рисунок 4.14 — Области влияния асидально-нодальных резонансов четвертого порядка:

$$\text{а) } (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + 2\dot{\omega}, \text{ б) } (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - 2\dot{\omega}$$

Как показывают рисунки 4.11–4.14, многие резонансные области пересекаются, что требует анализа их совокупного влияния на динамику ИСЛ. Для этого была построена карта наложения вековых резонансов (рисунок 4.15), на которой в каждой точке плоскости $\{i, a\}$ отображено количество одновременно действующих на объект устойчивых и неустойчивых резонансов. На рисунке 4.15а показано влияние неустойчивых резонансов, на рисунке 4.15б выделены области либрации резонансных аргументов на всём промежутке прогнозирования, а рисунок 4.15в отражает совокупное воздействие как устойчивых, так и неустойчивых резонансов.

Как видно из рисунка 4.15, область действия вековых резонансов охватывает значительную часть окололунного орбитального пространства, подтверждая их важную роль в эволюции спутниковых орбит.

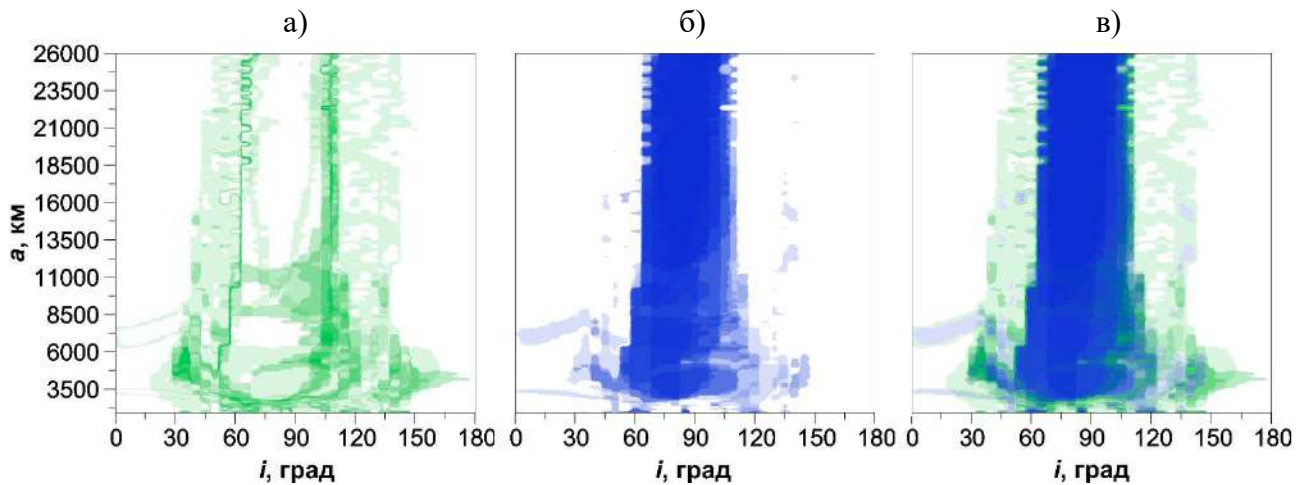


Рисунок 4.15 — Карты наложений вековых резонансов: а) наложение только неустойчивых резонансов; б) наложение только устойчивых резонансов; в) наложение устойчивых и неустойчивых резонансов

Глава 5. ОСОБЕННОСТИ ВЛИЯНИЯ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ НА ДИНАМИКУ ОКОЛОЛУННЫХ ОБЪЕКТОВ⁵

5.1 Влияние СД на динамику объектов в окололунном орбитальном пространстве

Известно, что сила СД способна существенно влиять на орбитальную эволюцию объектов с большой парусностью [79, 80]. В связи с этим был проведен масштабный эксперимент, посвященный изучению особенностей воздействия СД на орбитальную динамику окололунных объектов. В этой главе численное моделирование движения ИСЛ выполнено с использованием исходных данных, описанных в разделе 2.1, с дополнительным учётом влияния СД в наборе возмущающих факторов. В качестве параметров парусности A/m были выбраны две величины: 0.1 и 1 м²/кг.

Для начала рассмотрим оценку влияния СД на положение окололунных объектов, как описано в разделе 2.2. Результаты этого анализа представлены на рисунке 5.1. Сравнение рисунков 5.1а и 5.1б показывает, что максимальные значения отклонений наблюдаются для орбит на больших высотах вблизи наклонений 0° и 180°. Причем величины отклонений в положении ИСЛ при парусности $A/m = 1$ м²/кг на порядок выше по сравнению с оценками при $A/m = 0.1$ м²/кг. Сравнение с рисунком 2.2 из раздела 2.2 позволяет сделать вывод, что влияние СД вносит значительный вклад в динамику окололунных объектов, наряду с другими возмущающими факторами.

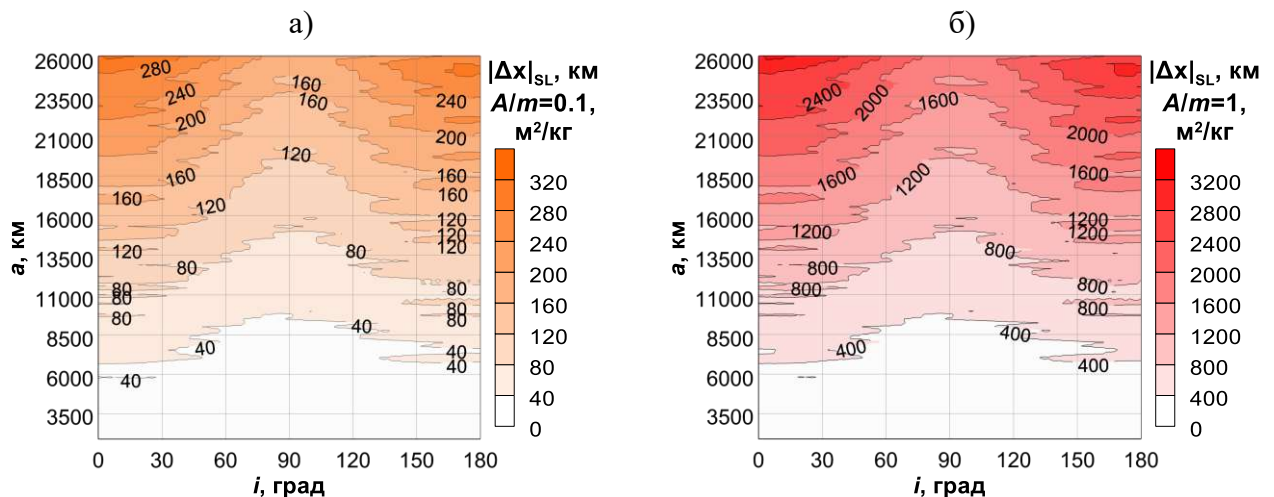


Рисунок 5.1 — Влияние возмущений от СД с использованием параметров парусности

а) $A/m = 0.1$ м²/кг и б) $A/m = 1$ м²/кг

⁵ При написании данной главы использовались материалы публикации по теме диссертации 6, выполненных в соавторстве.

Для оценки влияния СД на орбитальную динамику ИСЛ были рассчитаны показатели роста эксцентриситета (рисунок 5.2а) и продолжительности жизни (рисунок 5.2б) спутников. Эти оценки были выполнены с учётом и без учёта влияния СД. На левой панели представлены результаты без включения СД, на центральной и правой — с учётом СД при разных значениях парусности (0.1 и $1 \text{ м}^2/\text{кг}$ соответственно). Хотя результаты без учёта СД были представлены в предыдущих главах, они были продублированы в данной главе для удобства сравнения.

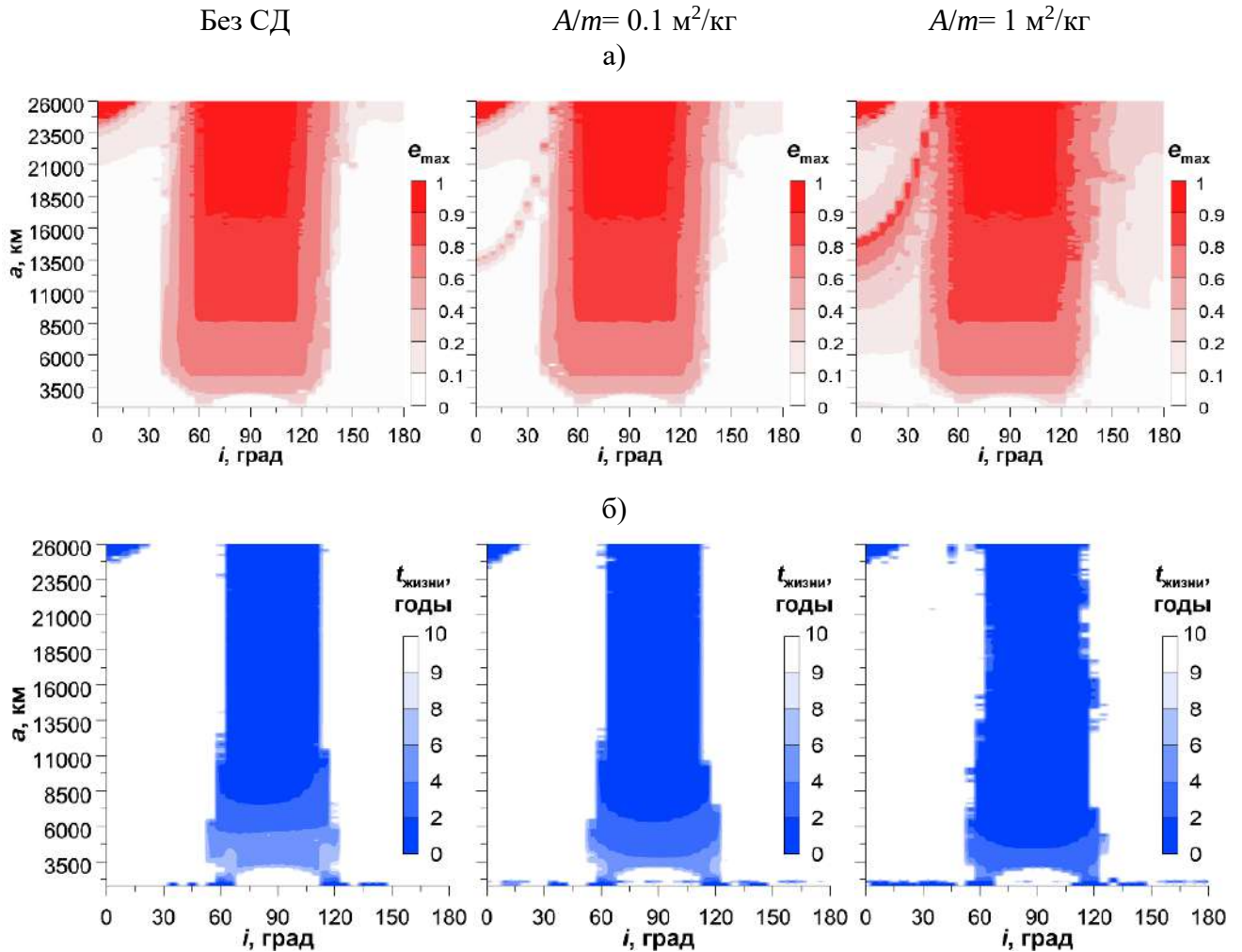


Рисунок 5.2 — Влияние СД на рост эксцентриситета и продолжительность жизни объектов в окололунном пространстве: а) оценки роста эксцентриситетов; б) время жизни на орбите

Результаты на рисунке 5.2 демонстрируют, что воздействие СД приводит к увеличению эксцентриситетов орбит на определенных участках окололунного пространства, что в свою очередь сокращает продолжительность жизни ИСЛ. Это приводит к расширению зон с коротким временем жизни по мере увеличения парусности, особенно на низких орбитах (рисунок 5.2а). На рисунке 5.3 для наглядности показаны различия в росте эксцентриситета и времени жизни, полученные с учётом и без учёта влияния СД. Видно, что воздействие СД способствует дополнительному росту эксцентриситета в диапазоне больших полуосей, начиная примерно с

12.5 тыс. км и выше, а также для наклонений от 0° до 50° и около 140° . Также наблюдается сокращение времени жизни ИСЛ на орбитах с наклонениями около 120° и на низких высотах.

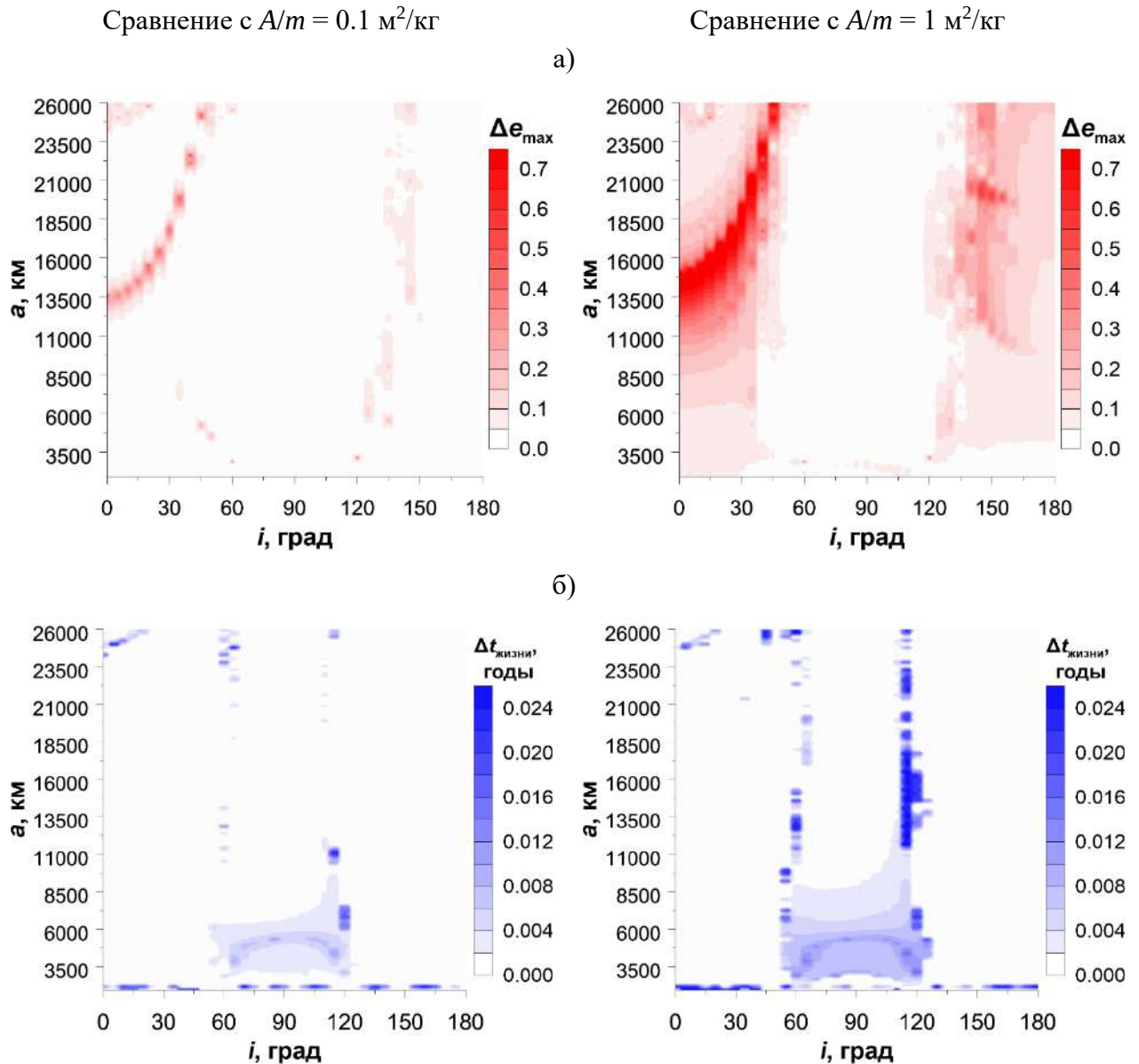


Рисунок 5.3 — Зависимость роста эксцентриситета и продолжительности жизни объектов от воздействия СД в окололунном пространстве: а) оценки увеличения эксцентриситета; б) продолжительность жизни на орбите

Для объяснения причины дополнительного роста эксцентриситета из-за влияния СД обратимся к подходу, примененному в третьей главе для изучения динамики низколетящих ИСЛ. Оценки влияния возмущения от СД были получены следующим образом. Сначала была рассчитана динамика 5180 окололунных объектов с учётом основного набора возмущающих факторов (гравитационное поле Луны, притяжение Земли и Солнца). Затем, отдельно прогнозировалось движение ИСЛ с тем же набором возмущений, но с добавлением влияния СД для двух вариантов парусности. Далее проведено сравнение этих движений с данными,

полученными без учёта СД, что позволило оценить вклад СД в движение окололунных объектов. Оценки представлены на рисунке 5.4. Как и в предыдущих исследованиях, результаты получены в орбитальной СК и представлены отдельно для каждой составляющей.

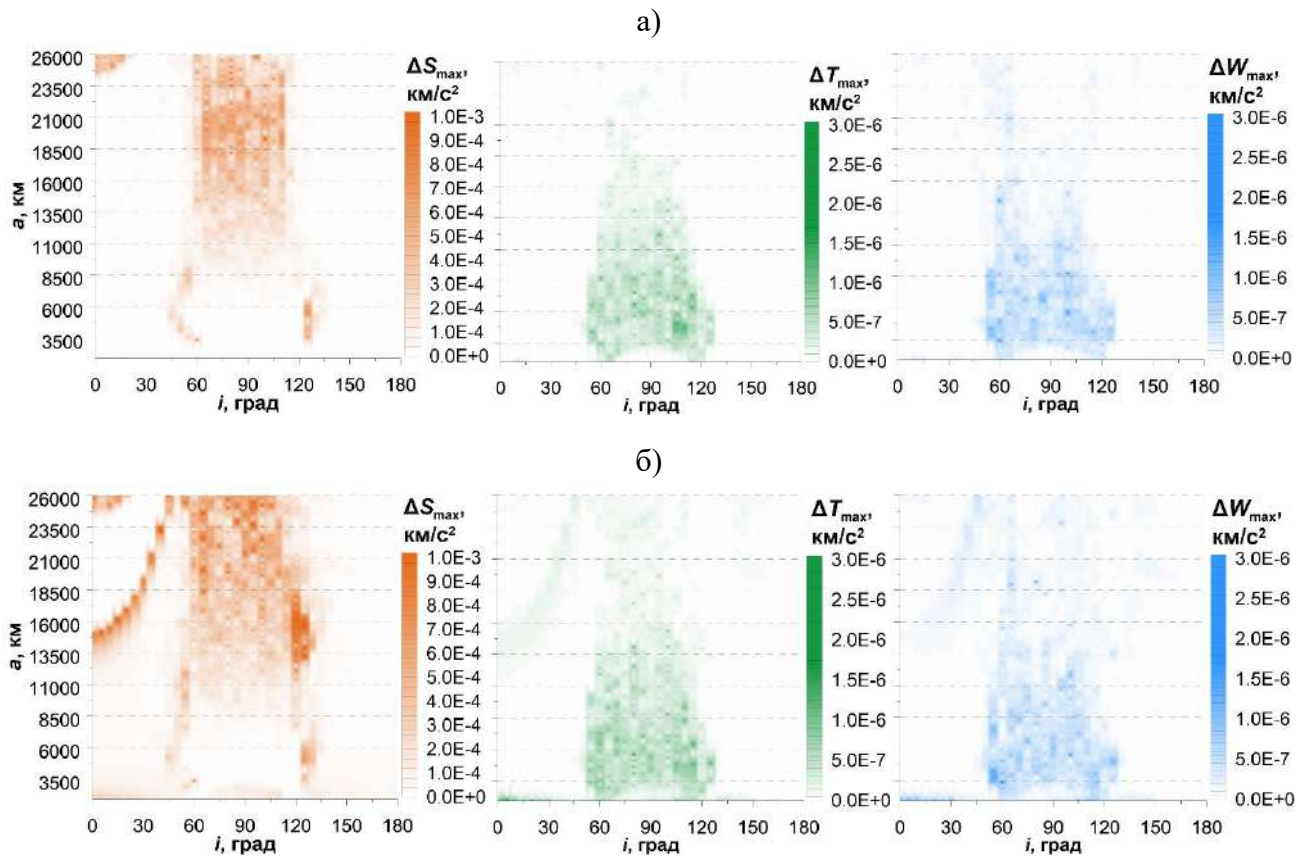


Рисунок 5.4 — Оценка вклада СД в движение ИСЛ при различных значениях парусности:

а) влияние СД при $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$; б) влияние СД при $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$

Сравнение рисунков 5.2 и 5.4 показывает наличие корреляции между ними. Появление дополнительных областей в окололунном пространстве, где отмечаются рост эксцентриситета и сокращение времени жизни, объясняется влиянием СД, действующего преимущественно вдоль радиального направления.

5.2 Влияние СД на резонансную структуру движения окололунных объектов

Влияние СД на резонансную структуру околоземного объекта было впервые теоретически обосновано и подтверждено численным моделированием в работе [81], где на примере геостационарного спутника продемонстрировано возникновение вторичного тессерального резонанса. Последующие исследования [82, 83] также показали, что структура вековых резонансных возмущений околоземных объектов изменяется под влиянием СД.

Предполагается, что на спутник воздействуют следующие факторы: сжатие Луны, моделируемое второй зональной гармоникой селенопотенциала; гравитационное влияние Земли

и Солнца, рассматриваемых как точечные массы, движущиеся по эллиптическим орбитам с прецессирующими линиями апсид и узлов; а также эффект СД. В работах [81, 82] было показано, что включение силы СД в возмущающую функцию приводит к появлению дополнительных тригонометрических членов. Помимо основного члена с аргументом (1.15), возникают два дополнительных члена с аргументами $\psi \pm \lambda'_S$, включающими среднюю долготу Солнца λ'_S , определяемую соответствующей формулой

$$\lambda'_S = M'_S + \Omega_S + \omega_S.$$

При сделанных предположениях аргументы разложения возмущающей функции в однократно осредненной задаче будут иметь вид:

$$\underline{\psi} \pm \underline{\lambda}'_S = (l - 2p' + q')M' - (l - 2p)\omega + (l - 2p')\omega' - \bar{m}(\Omega - \Omega') \pm (M' + \Omega' + \omega'),$$

а в двукратно осредненной задаче они запишутся как

$$\underline{\underline{\psi}} \pm \underline{\underline{\lambda}}'_S = (l - 2p')\omega' - (l - 2p)\omega - \bar{m}(\Omega - \Omega') \pm (\Omega' + \omega').$$

Условие возникновения резонанса может быть представлено следующими выражениями:

$$2\underline{\psi} \pm \underline{\lambda}'_S \approx 0, \quad 2\underline{\underline{\psi}} \pm \underline{\underline{\lambda}}'_S \approx 0.$$

Объекты, находящиеся под воздействием резонансов, обусловленных прецессией орбиты Земли, испытывают лишь прямое влияние СД, которое не изменяет структуру их резонансных возмущений. Однако включение средней долготы Солнца в критический аргумент возмущающей функции приводит к формированию дополнительного набора вековых резонансов, связанных с прецессией орбиты Солнца. Типы этих резонансов низких порядков приведены в таблицах 5.1 и 5.2.

Как отмечалось в четвёртой главе диссертации, полувековые резонансы, возникающие вследствие соизмеримости среднего движения третьего тела в околосолнечном пространстве, отсутствуют, поэтому их анализ в данном разделе не проводится.

Таблица 5.1 — Вековые апсидально-нодальные резонансы $\underline{\underline{\psi}} + \underline{\underline{\lambda}}'_S$ низких порядков, связанные с прецессией орбиты Солнца, возникающие под действием СД

№	Тип РС	№	Тип РС	№	Тип РС
1	$\dot{\Omega}$	4	$\dot{\Omega} + \dot{\omega}'_S$	7	$\dot{\Omega} + \dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$
2	$\dot{\Omega} + \dot{\omega}$	5	$\dot{\Omega} - \dot{\omega}'_S$	8	$\dot{\Omega} - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$
3	$\dot{\Omega} - \dot{\omega}$	6	$\dot{\omega} + \dot{\Omega}'_S$	9	$\dot{\Omega} + 2\dot{\omega}'_S$

Таблица 5.2 — Вековые апсидально-нодальные резонансы $\dot{\psi} - \dot{\lambda}'_S$ низких порядков, связанные с прецессией орбиты Солнца, возникающие под действием СД

№	Тип РС	№	Тип РС	№	Тип РС
1	$\dot{\omega} - \dot{\Omega}'_S$	3	$(\dot{\Omega} - 2\dot{\Omega}'_S)$	5	$(\dot{\Omega} - 2\dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega}'_S$
2	$\dot{\omega} - \dot{\Omega}'_S - \dot{\omega}'_S$	4	$\dot{\omega} - \dot{\Omega}'_S - 2\dot{\omega}'_S$	6	$(\dot{\Omega} - 2\dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega}'_S$

Следует также подчеркнуть, что появление новых вековых резонансов, перечисленных в таблицах 5.1 и 5.2, в динамике ИСЛ выявлено не было. Для дальнейшего исследования влияния СД на резонансную структуру орбитальной динамики ИСЛ рассматриваются карты распределения вековых апсидально-нодальных резонансов, представленные в таблице 1.4. Эти резонансы обусловлены соизмеримостью параметров прецессии орбиты спутника, вызванной различными возмущающими воздействиями, с параметрами прецессии возмущающих тел, таких как Солнце и Земля.

Как и ранее, типы резонансных характеристик определяются в соответствии с критериями, приведёнными на рисунке 4.1. На рисунках 5.5—5.14 представлены карты распределения вековых апсидально-нодальных резонансов 1–4 порядков. Оценки областей их воздействия, аналогично результатам предыдущего раздела, были выполнены для различных параметров парусности с учётом влияния СД.

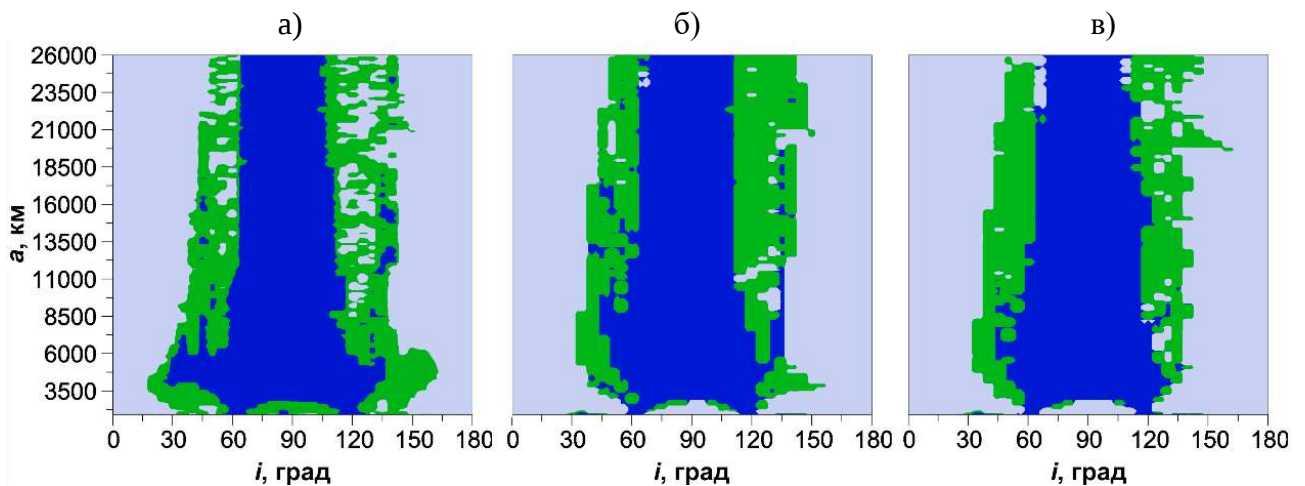


Рисунок 5.5 — Области влияния апсидального резонанса первого порядка $\dot{\omega}$:

а) без СД; б) $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$; в) $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$

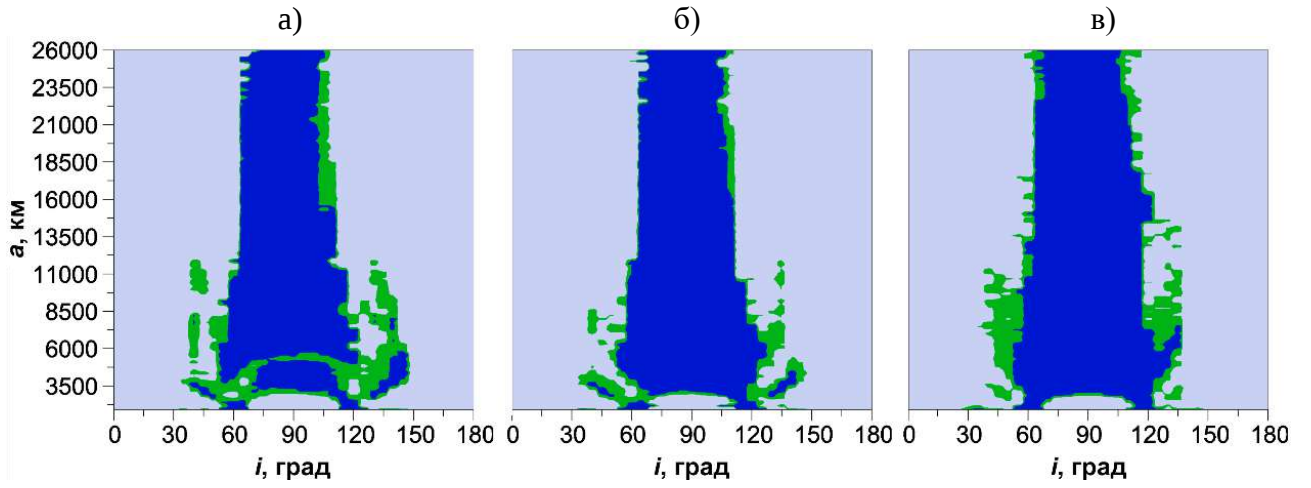


Рисунок 5.6 — Области влияния апсидального резонанса второго порядка $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_S$:

а) без СД; б) $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$; в) $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$

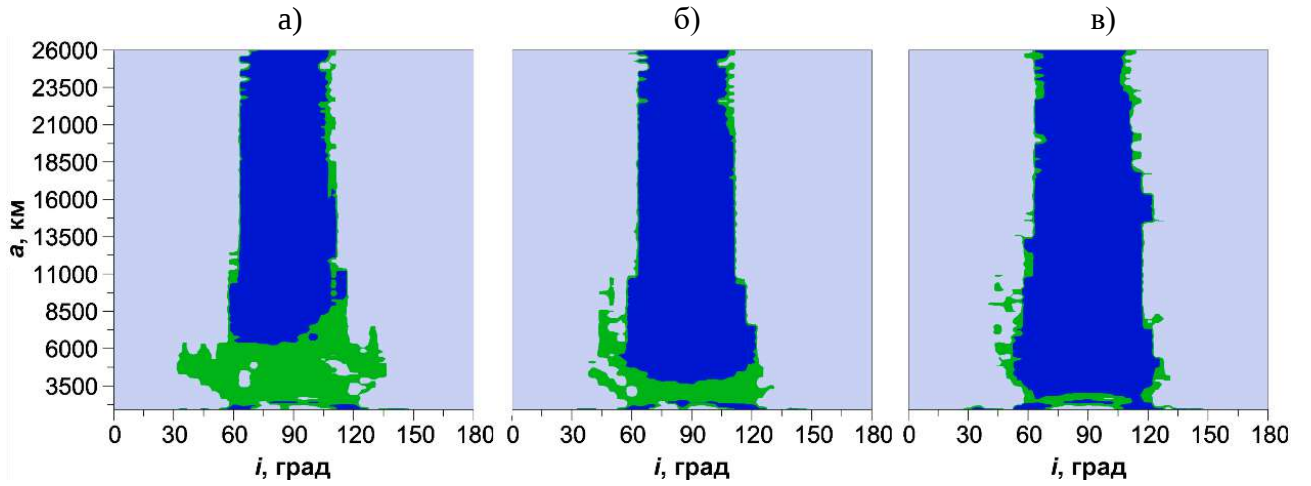


Рисунок 5.7 — Области влияния апсидального резонанса второго порядка $\dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$:

а) без СД; б) $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$; в) $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$

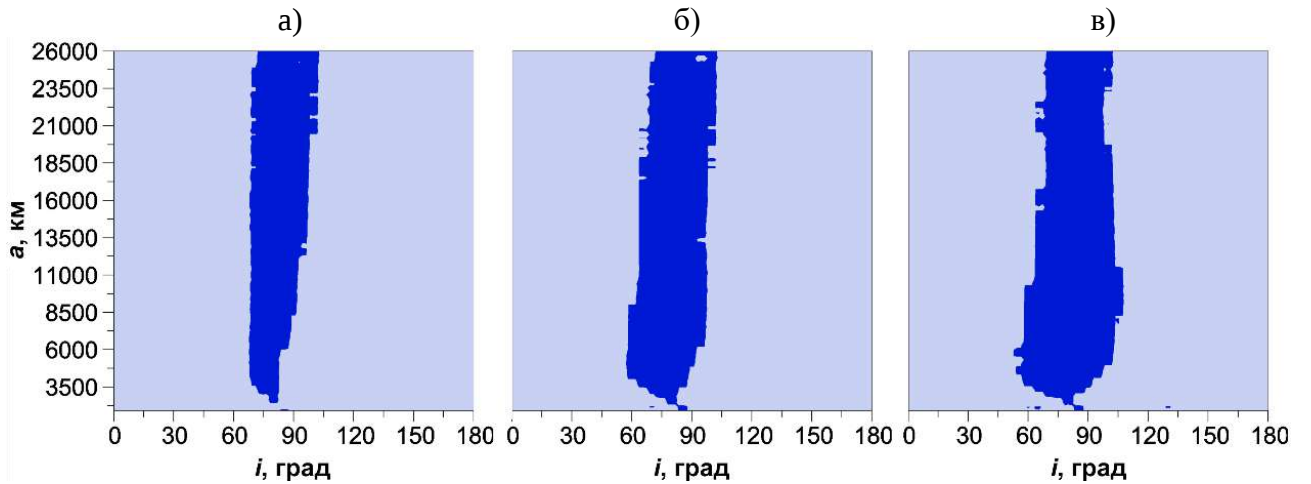


Рисунок 5.8 — Области влияния нодальных резонансов второго порядка $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$:

а) без СД; б) $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$; в) $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$

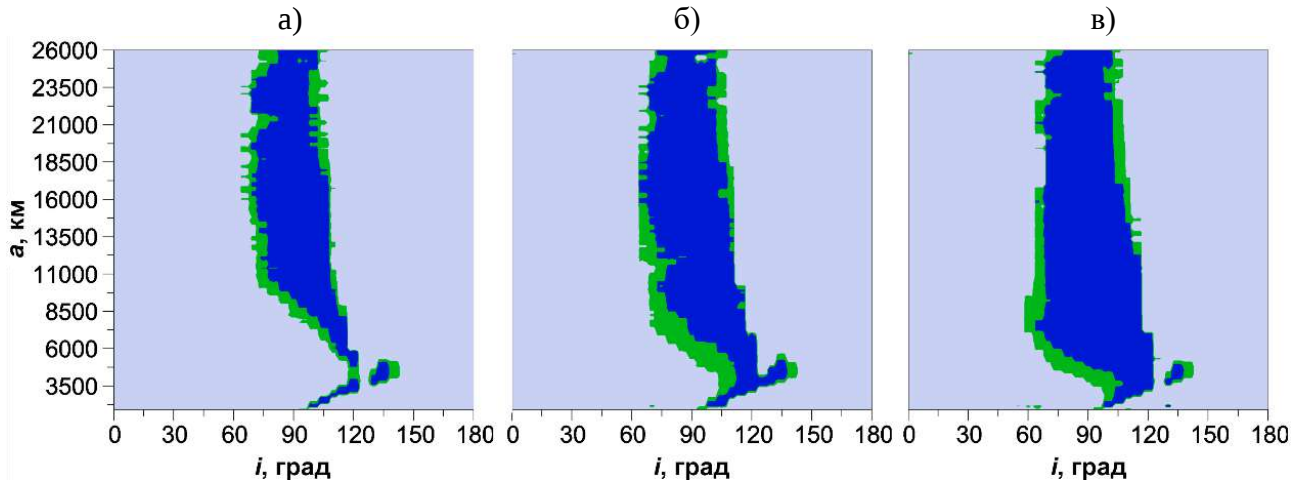


Рисунок 5.9 — Области влияния апсидально-нодального резонанса третьего порядка

$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega}'_S$: а) без СД; б) $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$; в) $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$

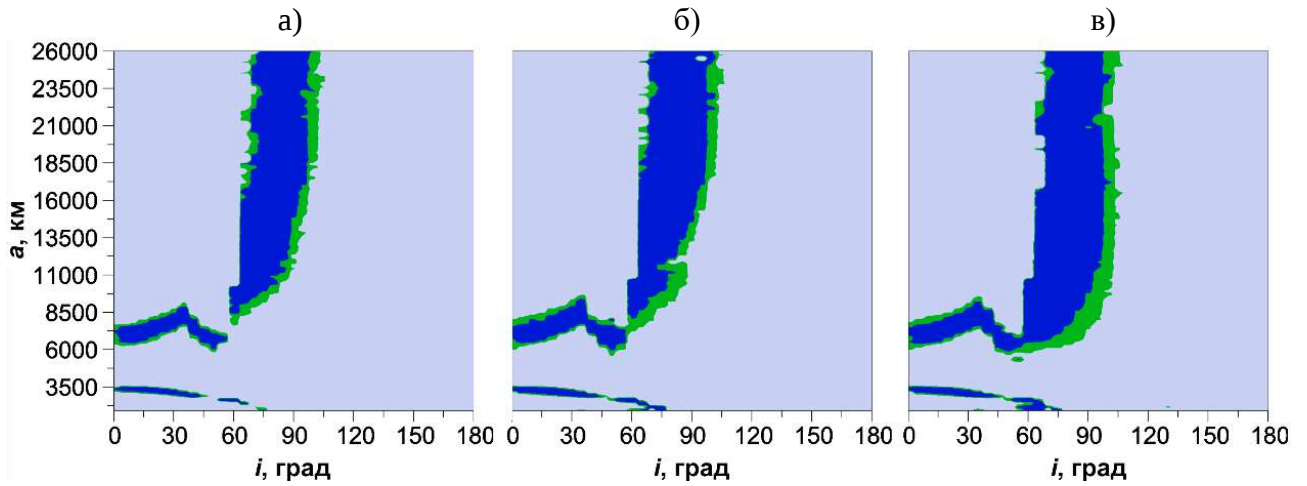


Рисунок 5.10 — Области влияния апсидально-нодального резонанса третьего порядка

$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) + \dot{\omega}'_E$: а) без СД; б) $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$; в) $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$

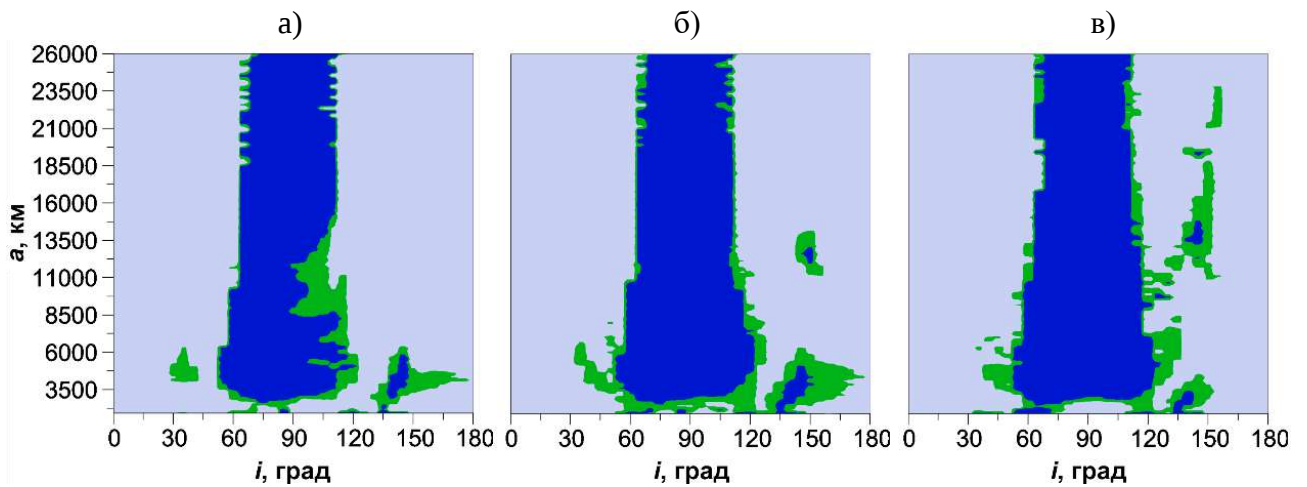


Рисунок 5.11 — Области влияния апсидально-нодальных резонансов третьего порядка

$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - \dot{\omega}$: а) без СД; б) $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$; в) $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$

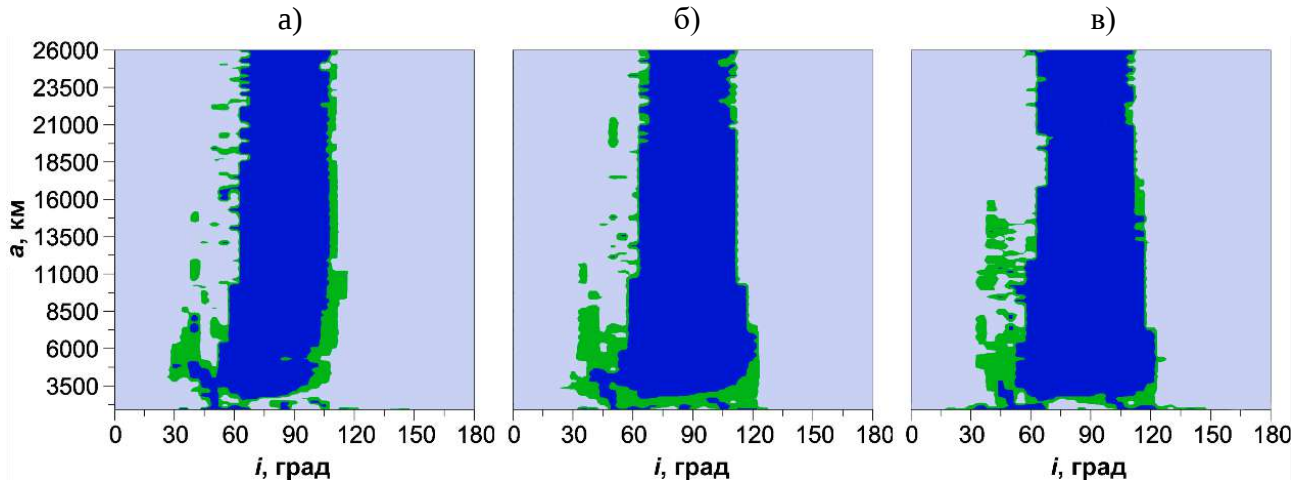


Рисунок 5.12 — Области влияния апсидально-нодальных резонансов третьего порядка

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + \dot{\omega} : \text{а) без СД; б) } A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг; в) } A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$$

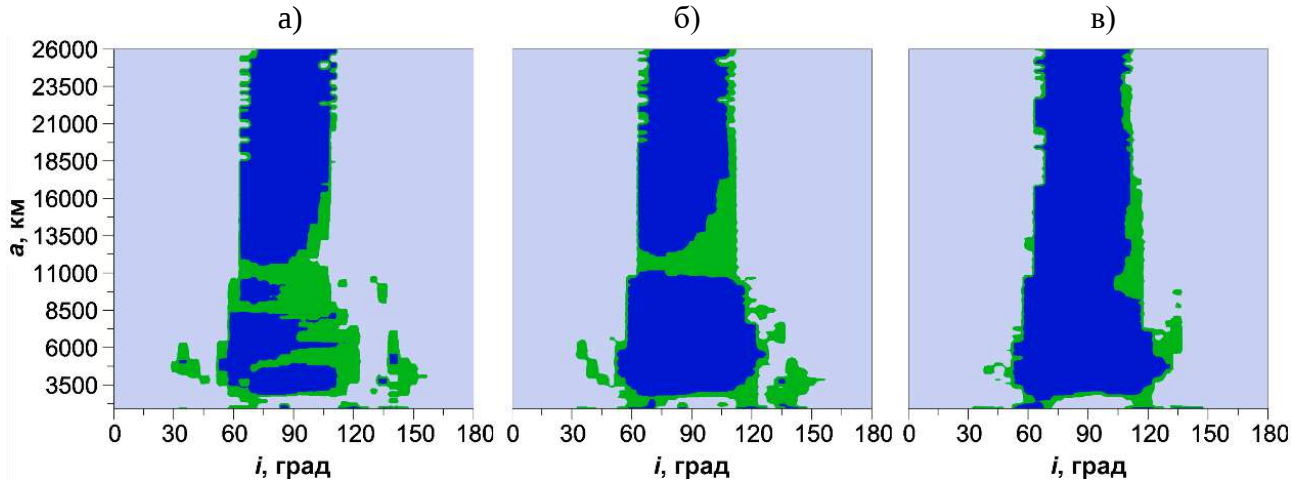


Рисунок 5.13 — Области влияния апсидально-нодальных резонансов четвёртого порядка

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - 2\dot{\omega} : \text{а) без СД; б) } A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг; в) } A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$$

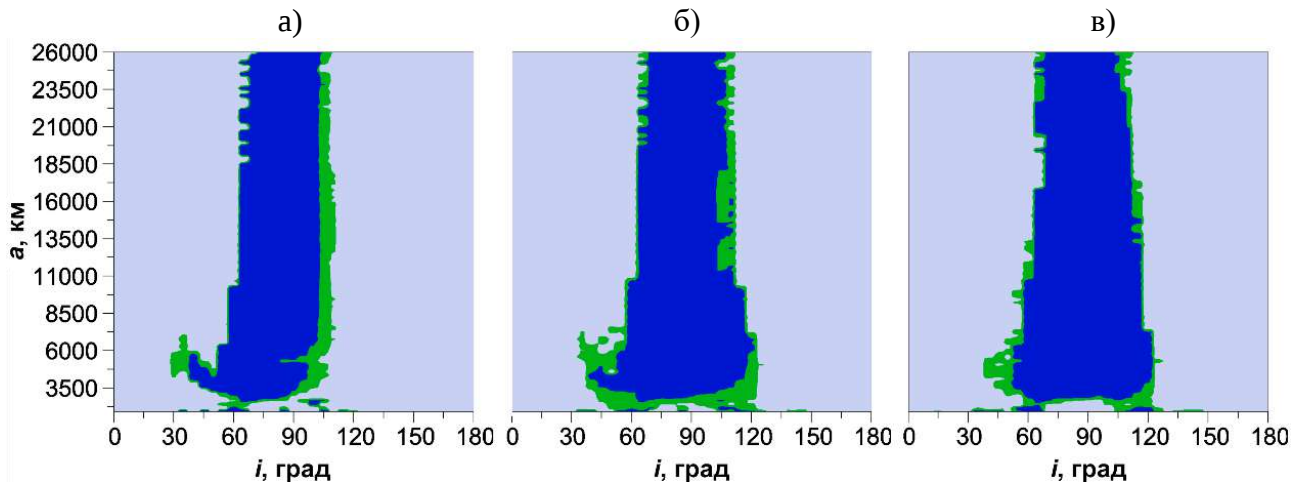
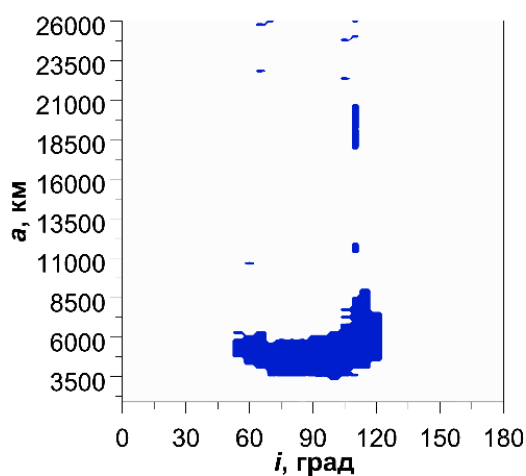


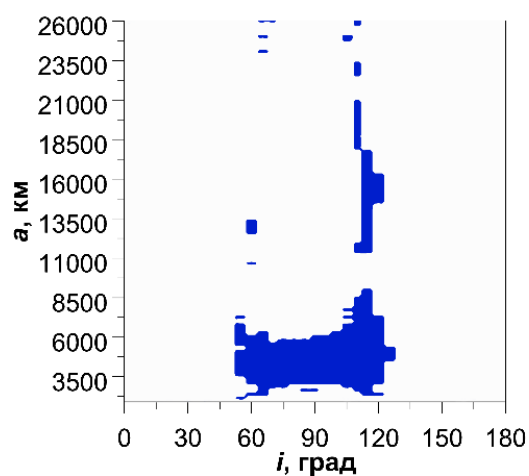
Рисунок 5.14 — Области влияния апсидально-нодальных резонансов четвёртого порядка

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + 2\dot{\omega} : \text{а) без СД; б) } A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг; в) } A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$$

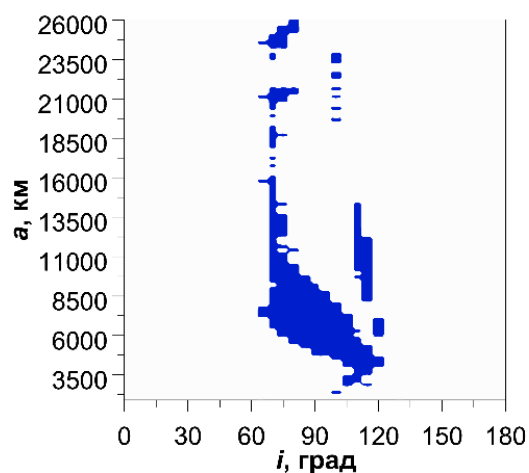
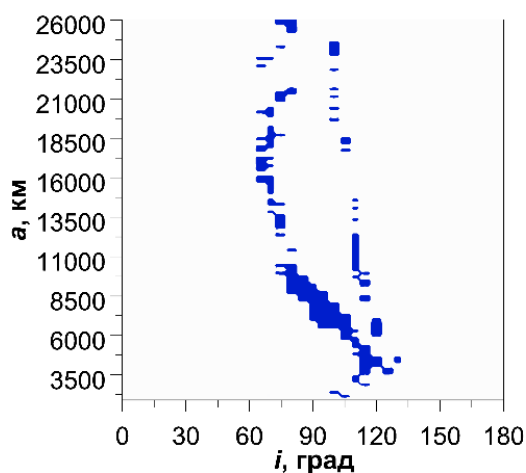
Как уже было упомянуто ранее, для анализа результатов численного моделирования и классификации устойчивых и неустойчивых резонансов применялась обученная искусственная нейронная сеть (ИНС). Эта сеть использовалась для обработки временных рядов, характеризующих эволюцию резонансных характеристик, которые определяют динамическую структуру области околорезонансного пространства. ИНС была реализована с использованием библиотеки `torch` [84] и первоначально разработана авторами для классификации резонансов в околорезонансном пространстве [78]. В рамках данной работы модель была адаптирована для распознавания резонансов в околорезонансном пространстве.

Сравнение с $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$ Сравнение с $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$

а)



б)



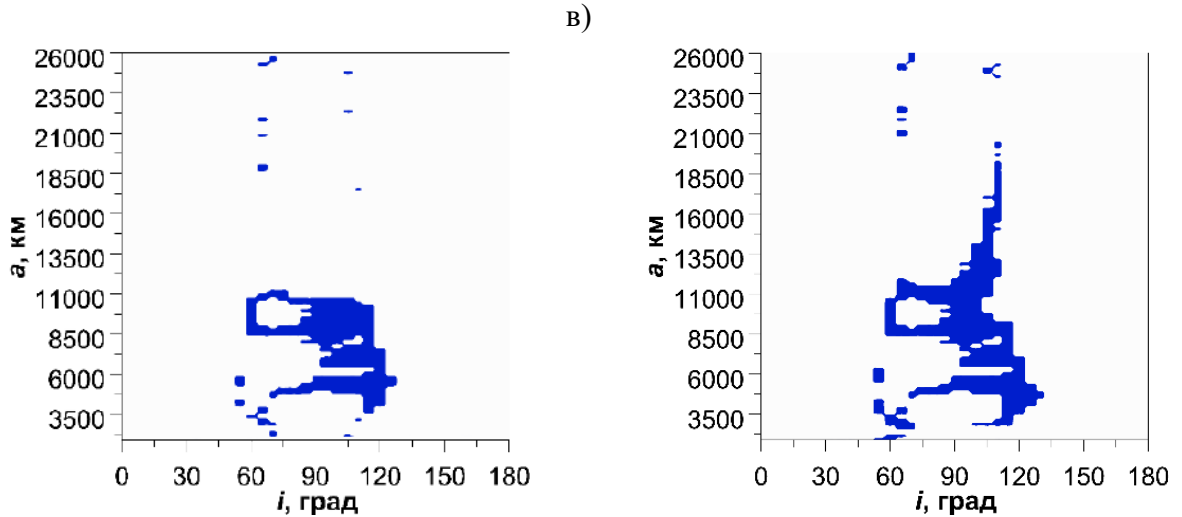


Рисунок 5.15 — Примеры разностей областей влияния апсидально-нодальных резонансов, полученных с учётом и без учёта воздействия СД. Левые части рисунков демонстрируют сравнение с $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$, а в правой — с $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$. Показаны разности областей действия нескольких резонансов разных порядков: а) для резонанса $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_E$; б) для резонанса

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) - \dot{\omega}'_E; \text{ в) для резонанса } (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) - 2\dot{\omega}$$

Применение ИНС было обусловлено необходимостью обработки большого объема временных рядов, связанных с эволюцией резонансных характеристик. Общее количество рядов составило около 250 тысяч, и их ручная обработка потребовала бы значительных временных затрат. Традиционные аналитические методы классификации оказались недостаточно точными для автоматизации данного процесса, поэтому были использованы методы машинного обучения, а именно классификатор на основе ИНС.

Анализ графиков на рисунках 5.5–5.14 демонстрирует, что воздействие СД изменяет область влияния вековых резонансов в окололунном пространстве. На рисунке 5.15 показаны различия в областях действия нескольких резонансов разных порядков в качестве примера.

Изменения наблюдаются также в областях наложения резонансов (рисунок 5.16). Полученные оценки позволяют заключить, что области наложения устойчивых и неустойчивых резонансов имеют более четкие границы на низких и средних высотах при учёте влияния СД и увеличении параметра парусности. Основным следствием воздействия СД на орбитальную динамику ИСЛ является расширение всей области влияния вековых резонансов, что видно на рисунке 5.16в.

Если обратиться к рисункам 5.2а и 5.3а и сравнить их с рисунком 5.16, становится ясно, что дополнительное увеличение эксцентриситета на средних и высоких орбитах, возникающее при учёте влияния СД, не связано с изменением резонансной структуры возмущений,

воздействующих на окололунные объекты. Этот рост эксцентриситета является прямым следствием воздействия СД.

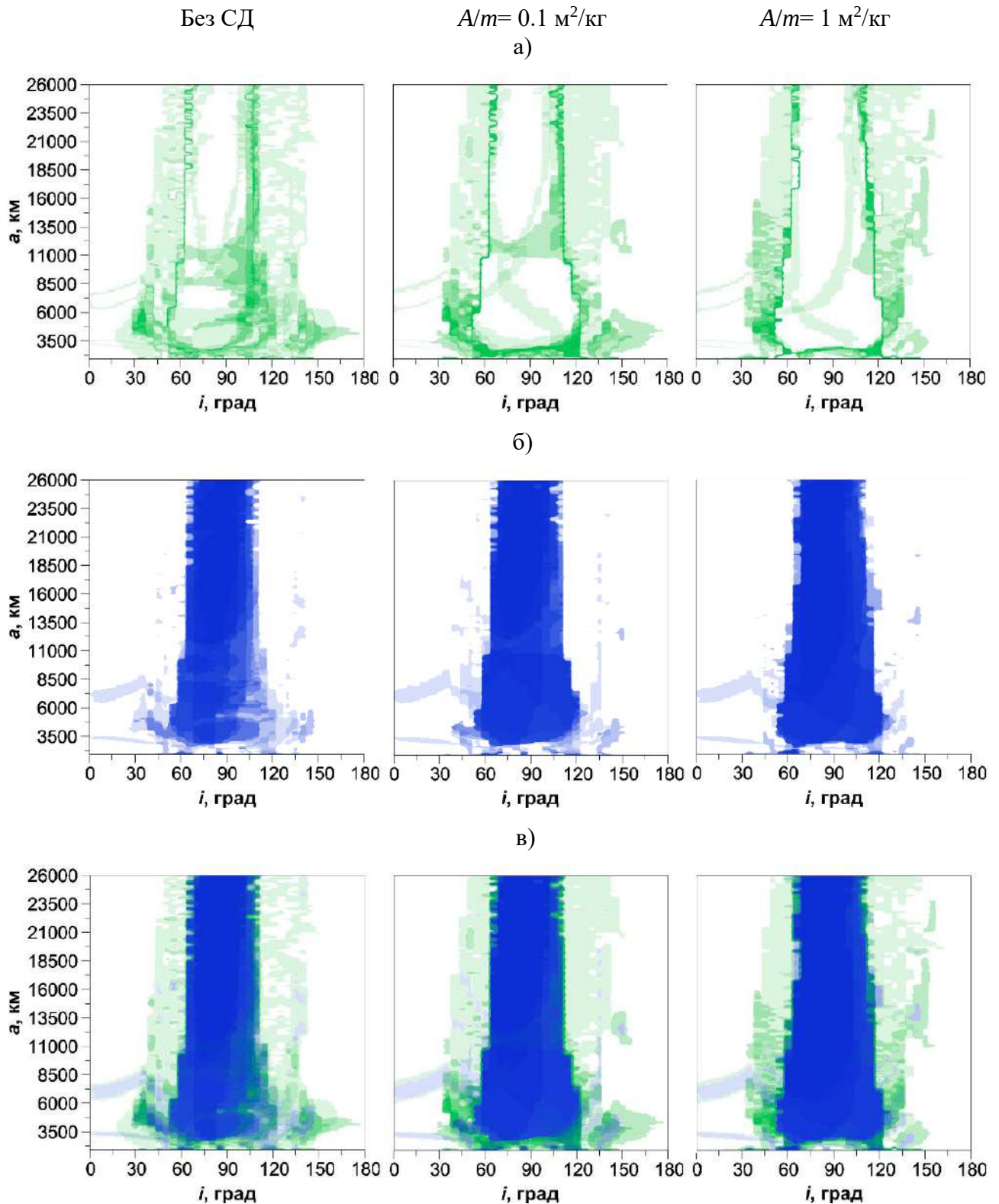


Рисунок 5.16 — Карты наложений вековых резонансов при учёте и отсутствии влияния СД:
а) наложение только неустойчивых резонансов; б) наложение только устойчивых резонансов;
в) наложение устойчивых и неустойчивых резонансов

Глава 6. ЭСКИЗНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЛУННОЙ ГНСС⁶

6.1 Динамическая неустойчивость круговых орбит и применение эффекта Лидова–Козаи

Исследования, проведенные в предыдущих главах, показали, что круговые орбиты окололунных спутников не сохраняют свою конфигурацию в долгосрочной перспективе. Воздействие гравитационного поля Луны и притяжение Земли, а также воздействие других внешних факторов, вызывает значительные возмущения в орбитальных параметрах. Особенно это заметно на орбитах с большим значением наклона, когда эксцентриситет орбиты увеличивается настолько, что спутник может столкнуться с поверхностью Луны. Это явление объясняется эффектом Лидова–Козаи.

Как было описано в главе 4, в теории Лидова–Козаи выделяют стационарные решения (4.3), позволяющие минимизировать колебания орбитальных параметров и обеспечивают долгосрочную стабильность орбиты. Так называемые «замороженные» орбиты, предложенные теорией, являются ключевыми для построения стабильной спутниковой системы на Луне, поскольку при высокоточном моделировании возмущения в орбитальных элементах около стационарных решений (4.3) оказываются достаточно малыми и уменьшают необходимость в частых орбитальных коррекциях.

Применим эти знания в данной главе для поиска и исследования устойчивой конфигурации лунной ГНСС [85].

6.2 Выбор угловых орбитальных элементов ГНСС

Конфигурация лунной ГНСС была выбрана на основе необходимости обеспечения постоянной видимости спутниковой группировки с поверхности Луны при минимальных затратах на орбитальную коррекцию. В данной работе под оптимальной понимается ГНСС, конфигурация которой одновременно удовлетворяет двум ключевым требованиям:

- минимальные возмущения в эксцентриситете и наклоне в течение срока активного существования орбитальной группировки (структурная устойчивость);
- максимальная плотность навигационного покрытия ГНСС всей поверхности Луны.

Для достижения этой цели была разработана система, включающая три высокоэллиптические орбиты, которые обслуживают северное полушарие Луны, и три орбиты, предназначенные для южного полушария. Спутники лунной ГНСС равномерно распределены по

⁶ При написании данной главы использовались материалы публикации по теме диссертации 7, выполненных в соавторстве.

средней аномалии на каждой орбите, что подробно представлено в таблице 6.1. На рисунке 6.1 представлена схема расположения орбит ГНСС.

Таблица 6.1 — Орбитальные параметры Ω , ω , M лунной ГНСС

Орбитальная группировка	ω , °	Ω , °	M , °
Северная	270	0	0, 90, 180, 270
		120	30, 120, 210, 300
		240	60, 150, 240, 330
Южная	90	60	0, 90, 180, 270
		180	30, 120, 210, 300
		300	60, 150, 240, 330

Все шесть орбит характеризуются высокой эллиптичностью, что позволяет спутникам долгое время находиться вблизи апоцентра, обеспечивая стабильную видимость с лунной поверхности, особенно в полярных областях Луны. Долготы восходящих узлов были выбраны таким образом, чтобы орбиты равномерно распределялись вокруг Луны, что обеспечивает максимальное покрытие поверхности. Кроме того, распределение спутников по средней аномалии каждой орбиты гарантирует, что в зоне видимости всегда будет несколько НКА, что обеспечивает непрерывную навигационную поддержку.

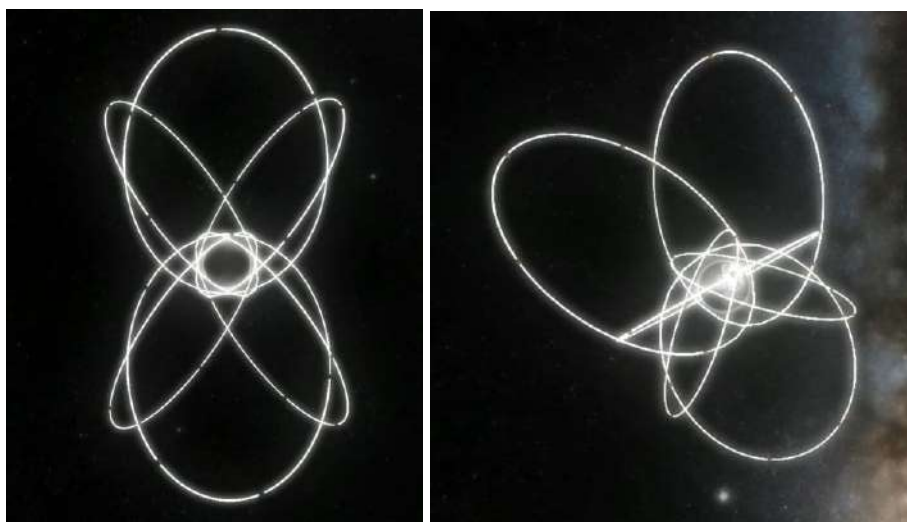


Рисунок 6.1 — Графическое представление лунной ГНСС

На следующем этапе проектирования необходимо определить ключевые орбитальные параметры группировки, такие как большая полуось, эксцентриситет и наклонение. Важно, чтобы выбранные параметры минимизировали влияние внешних гравитационных возмущений и способствовали длительной стабильности орбит. Особое внимание будет уделено выбору таких орбит, которые обеспечат стабильное покрытие и оптимальную видимость НКА с поверхности Луны. Эти аспекты будут детально рассмотрены в последующих разделах.

6.3 Выбор позиционных орбитальных элементов ГНСС. Оценка устойчивости орбитальной группировки

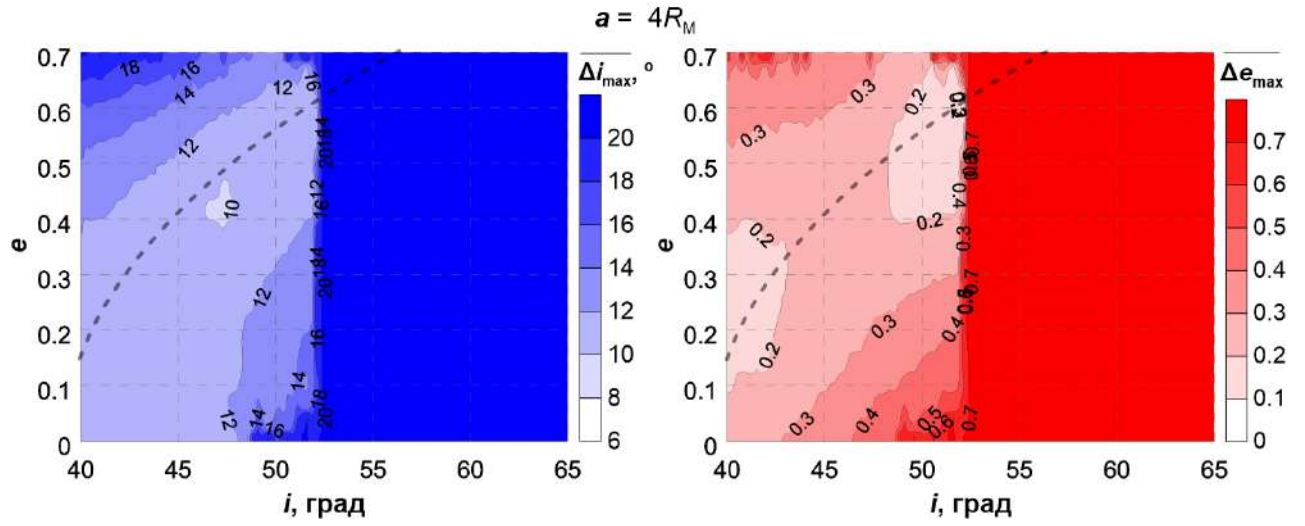
Для поиска устойчивой конфигурации лунной ГНСС была выполнена серия расчетов эфемерид на 10-летний временной интервал для каждой орбиты спутниковой группировки, при этом варьировались начальные орбитальные элементы в селеноэквиаториальной СК: $i \in [40^\circ, 65^\circ]$, $e \in [0.0, 0.7]$ и $a/R_M \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$. В модель силовых факторов, влияющих на движение лунных НКА, были включены гравитационное поле Луны с учётом гармоник до 50-го порядка и степени, а также притяжение Земли и Солнца, которые рассматривались как материальные точки. В результате прогнозирования орбитального движения были получены максимальные значения амплитуд колебаний эксцентриситета и наклона орбит по сравнению с их начальными значениями. Эти данные позволили определить начальную конфигурацию орбит лунной ГНСС, обеспечивающую их долговременную либрацию в малых пределах без необходимости орбитальных коррекций.

На рисунке 6.2 представлены зависимости максимальных амплитуд колебаний эксцентриситета ($\Delta e_{\max}$) и наклона ($\Delta i_{\max}$) от параметров i , e и a . Для улучшения визуализации оценок структурной устойчивости ГНСС эти графики были получены путем осреднения величин ($\Delta e_{\max}$) и ($\Delta i_{\max}$) по шести орбитам лунной ГНСС. Детализированные результаты структурной устойчивости системы для каждой из орбит, без осреднения, приведены в приложении на рисунках Б.1 и Б.2. Для сопоставления с оценками возмущений на графиках рисунка 6.2 также приведены стационарные решения теории Лидова–Козаи (4.3) (пунктирная кривая).

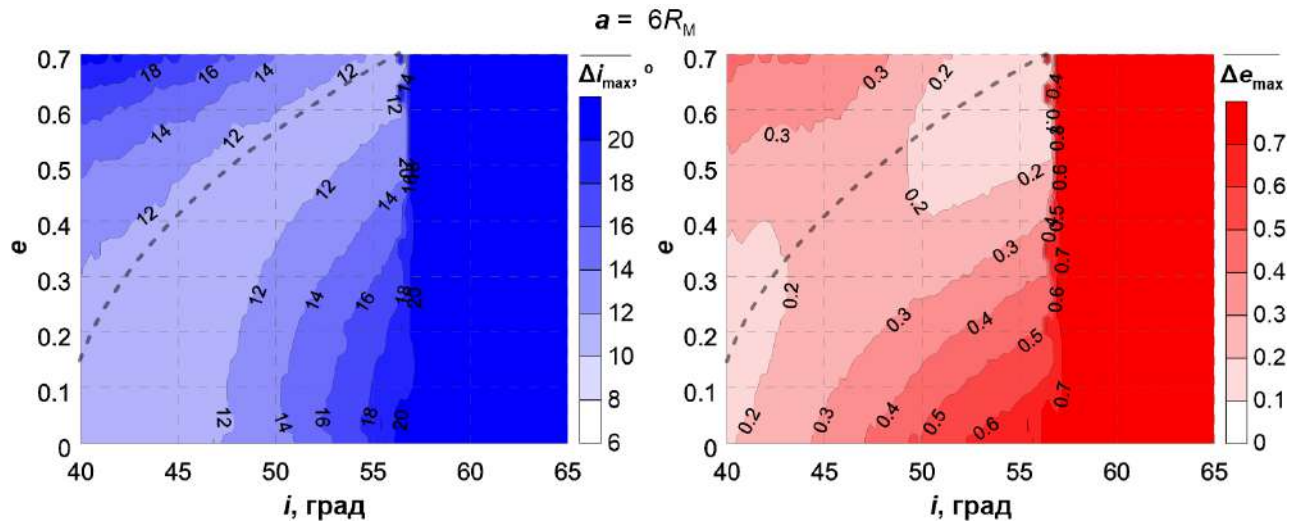
Оценки, представленные на рисунке 6.2, демонстрируют, что существуют области, где амплитуды колебаний эксцентриситетов окололунных орбит не превышают 0.2, а наклонов — 10° . Следует отметить, что на представленных графиках для орбит с большими значениями наклона, наблюдается сокращение продолжительности жизни орбит до менее чем 10 лет из-за значительного роста эксцентриситета. Эти орбиты отмечены на графиках с максимальными амплитудами колебаний параметров. Отметим также, что области минимальных возмущений на всех графиках локализованы вблизи стационарных решений теории Лидова–Козаи.

Области с минимальными амплитудами колебаний эксцентриситета и наклона, представленные на рисунке 6.2, свидетельствуют о том, что, несмотря на их сравнительно малые значения, для поддержания стабильности конфигурации лунной ГНСС в долгосрочной перспективе потребуются значительные затраты на орбитальные коррекции.

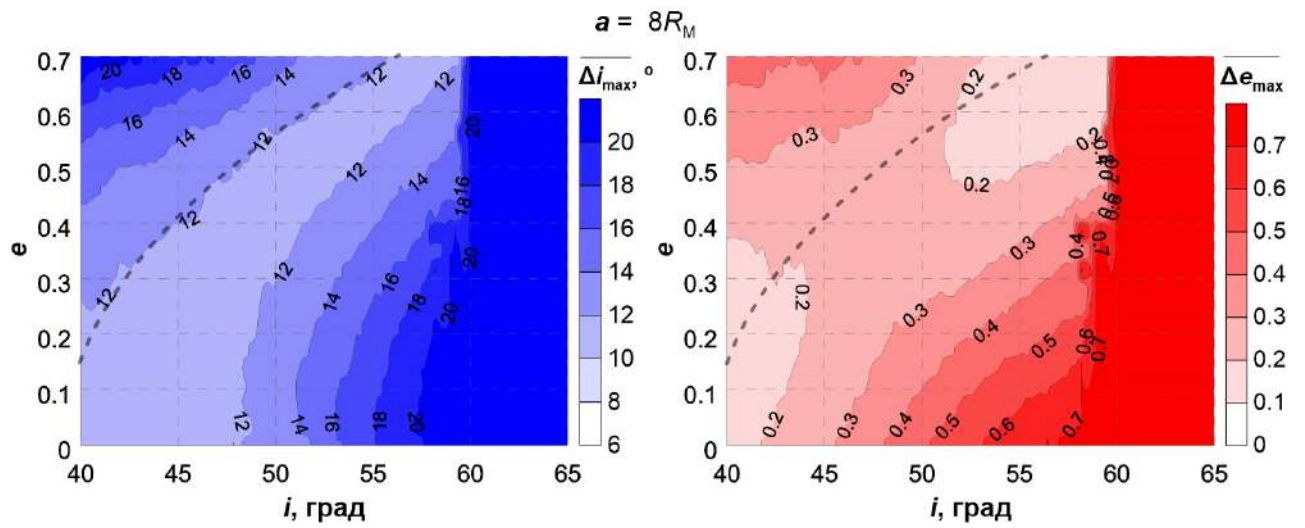
a)



б)



в)



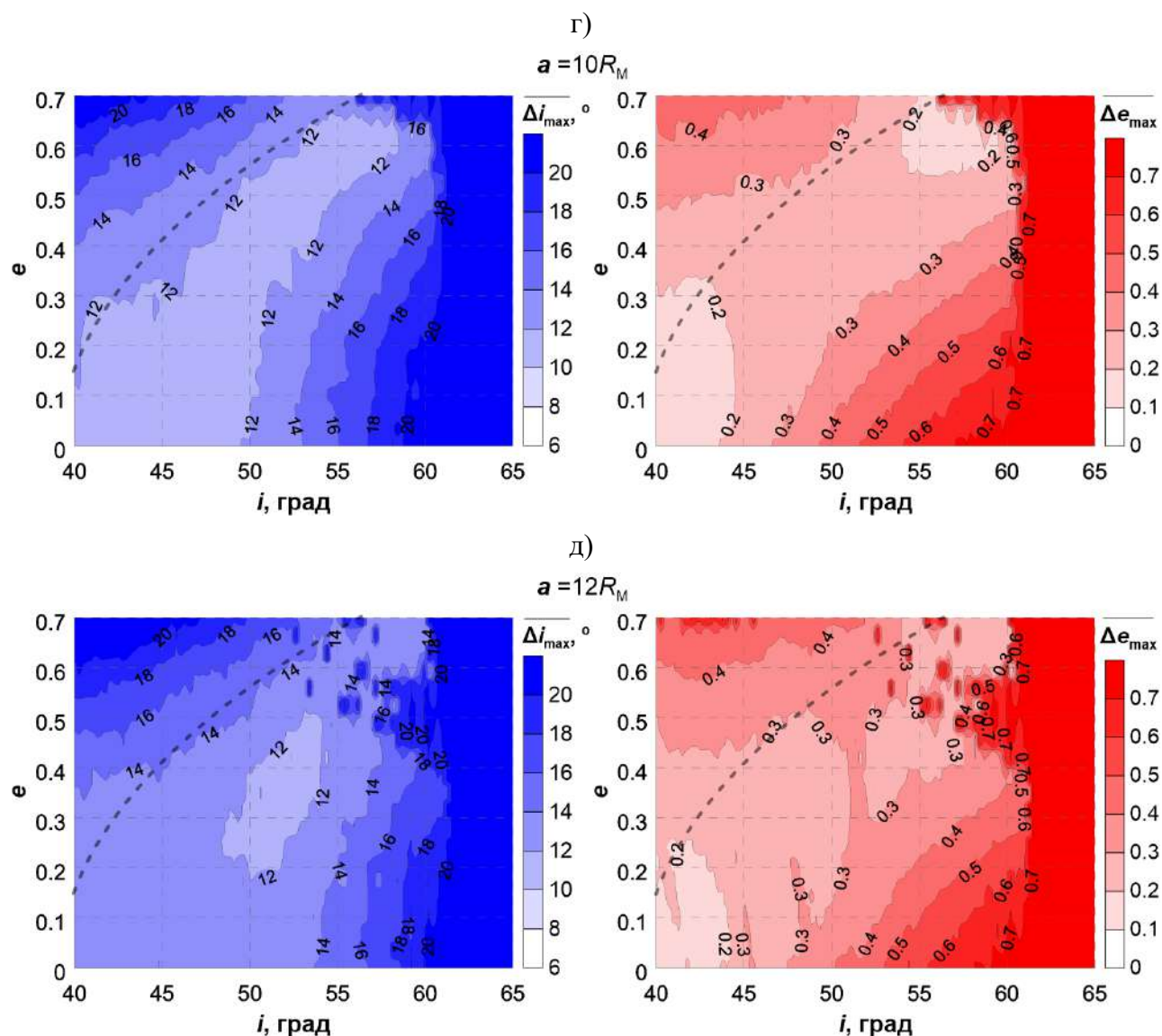


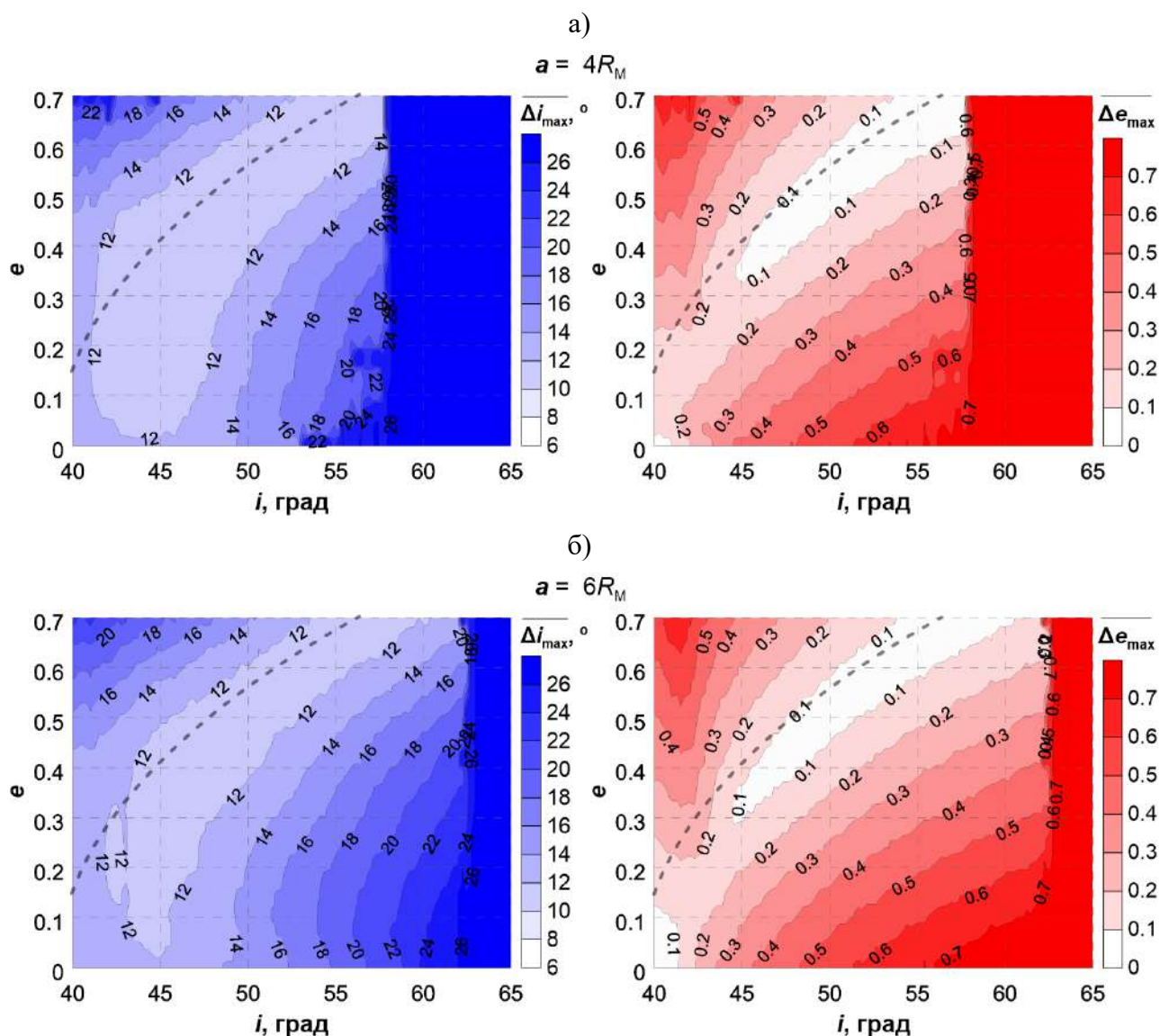
Рисунок 6.2 — Осредненные по шести орбитам оценки максимальных амплитуд колебаний наклонения и эксцентриситета, рассчитанные с использованием СК относительно лунного экватора и рассмотренных при a , равной: а) $4R_M$, б) $6R_M$, в) $8R_M$, г) $10R_M$, д) $12R_M$

Исходя из этого, предпримем попытку исследования орбитальной эволюции навигационных спутников в специальной СК, ориентированной на Землю [32]. Описание представлено в разделе 4.1.1.

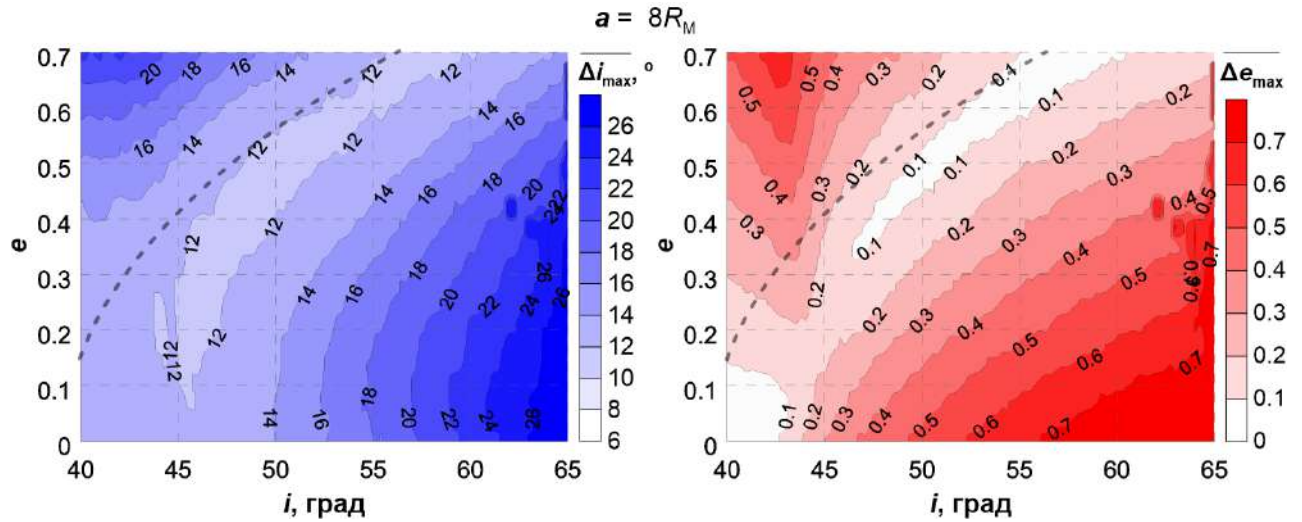
Исследование проводилось с использованием тех же исходных данных, описанных для рисунка 6.2, однако начальные орбитальные элементы варьировались в СК, связанной с плоскостью орбиты Земли (4.4). Результаты оценивания представлены на рисунке 6.3. Как и ранее оценки получены путем осреднения величин $(\Delta e_{\max})$ и $(\Delta i_{\max})$ по шести орбитам лунной ГНСС, а с результатами без осреднения можно ознакомиться на рисунках Б.3 и Б.4. Для корректного анализа и интерпретации оси координат графиков согласованы с исходной СК,

построенной относительно орбитальной плоскости Земли, а оценки устойчивости представлены относительно экватора Луны.

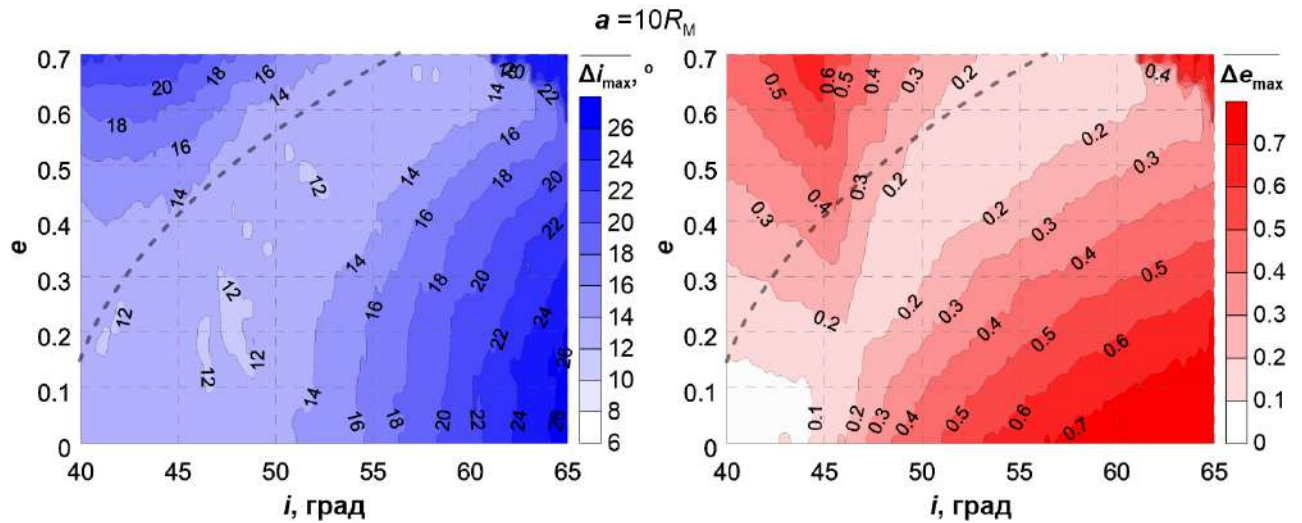
Оценки, представленные на рисунке 6.3, демонстрируют, что для орбит с большими полуосями $a = 4R_M$, $6R_M$ и $8R_M$ существуют области, где орбиты с соответствующими начальными параметрами обладают высокой степенью устойчивости. В этих областях амплитуды колебаний эксцентриситета не превышают 0.1, что свидетельствует о благоприятных условиях для долгосрочной стабильности орбит навигационной системы. Однако колебания наклона до величины, равной 12° , могут существенно повлиять на видимость спутников с поверхности Луны.



в)



г)



д)

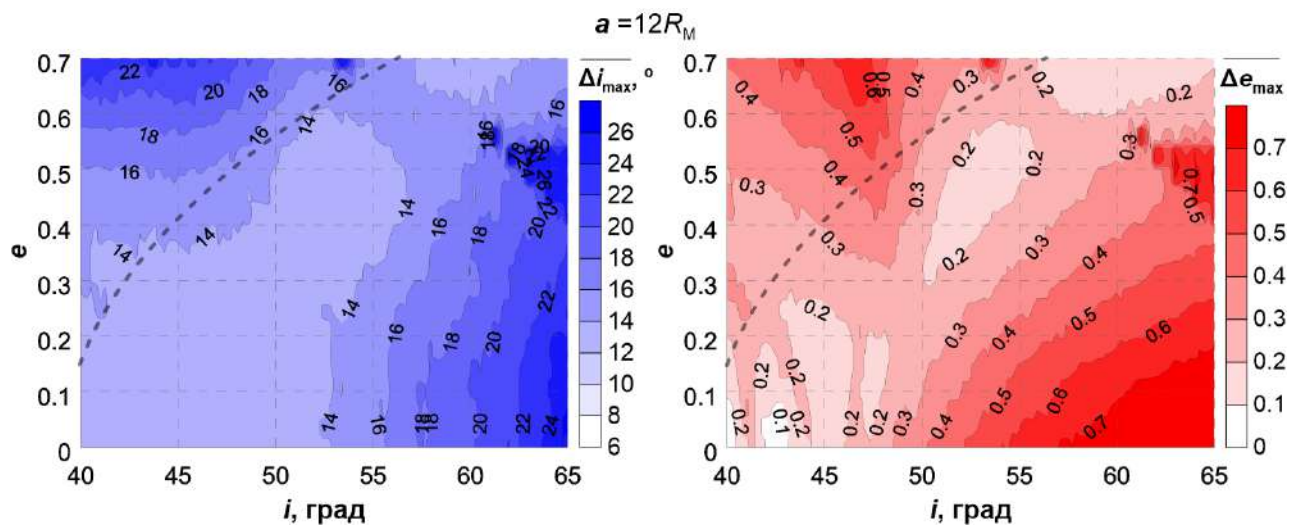


Рисунок 6.3 — Осредненные по шести орбитам оценки максимальных амплитуд колебаний наклона и эксцентриситета, рассчитанных с использованием СК, связанной с плоскостью орбиты Земли и рассмотренных при a , равной: а) $4R_M$, б) $6R_M$, в) $8R_M$, г) $10R_M$, д) $12R_M$

На рисунках 6.3г и 6.3д размеры таких устойчивых областей существенно уменьшаются, что указывает на рост амплитуд колебаний и снижение устойчивости орбитальных параметров. Таким образом, для минимизации колебаний орбитальных параметров и обеспечения их долгосрочной стабильности предпочтение следует отдавать орбитам с большими полуосями $4R_M$, $6R_M$ и $8R_M$, где изменения эксцентриситета и наклона остаются в пределах, обеспечивающих наибольшую стабильность.

При сравнении рисунков 6.2 и 6.3 следует отметить, что при формировании начальных элементов орбит в СК, связанной с плоскостью орбиты Земли, достигаются наименьшие амплитуды колебаний эксцентриситета по сравнению с расчётами, выполненными с использованием СК относительно экватора Луны. Однако оценки стабильности в наклоне в обоих случаях остаются примерно на том же уровне.

Объединим результаты, представленные в данном разделе с оценками устойчивости аргумента перигея $\Delta\omega_{\max}$ (раздел 4.1.1). В таблице 6.2 приведены результаты, позволяющие оценить устойчивость тройки орбитальных параметров $\{e, i, \omega\}$. Здесь представлены данные о минимальных значениях максимальных амплитуд колебаний орбитальных элементов — эксцентриситета ($\Delta e_{\max}$), наклона ($\Delta i_{\max}$) и аргумента перигея ($\Delta\omega_{\max}$) — для ИСЛ за 10-летний период. Эти значения получены в результате численного моделирования с целью выявления таких условий, при которых максимальные колебания всех трёх элементов $\{e, i, \omega\}$ достигают своих наименьших возможных величин. Иными словами, таблица отражает оптимальные начальные конфигурации орбит, обеспечивающие наибольшую стабильность по указанным параметрам.

Анализ данных из таблицы 6.2 показывает, что с увеличением большой полуоси амплитуды колебаний оцениваемых орбитальных параметров возрастают, указывая на снижение устойчивости спутниковых орбит на больших высотах. На более низких орбитах, наоборот, колебания оказываются минимальными, особенно при определенных начальных условиях, что может быть полезно для создания долговременных стабильных траекторий.

В областях минимальных амплитуд колебаний орбитальных параметров наблюдается близость к стационарным решениям механизма Лидова–Козаи (рисунки 4.7, 6.3), что подтверждает соответствие найденных устойчивых орбит точному резонансу Лидова–Козаи (таблица 6.2). Оптимальные значения e всех рассмотренных орбит сосредоточены около 0.7, а для i — примерно в интервале от 56° до 58° . Согласно условиям (4.3), такие орбиты удовлетворяют резонансным критериям, минимизируя изменения наклона и эксцентриситета при сохранении устойчивого аргумента перигея.

Таблица 6.2 — Оценки максимальных амплитуд колебаний параметров e , i и ω в течение 10 лет на орбитах, близких к стационарным решениям

a, R_M	$\omega, ^\circ$	$\Omega, ^\circ$	$i, ^\circ$	e	$\Delta\omega_{\max}, ^\circ$	$\Delta e_{\max}$	$\Delta i_{\max}, ^\circ$
4	90	60	57.2	0.700	14.9	0.025	9.6
		180	57.4	0.700	14.0	0.038	9.3
		300	57.0	0.700	10.0	0.040	12.3
	270	0	57.0	0.700	15.4	0.030	9.0
		120	57.2	0.700	8.6	0.029	12.9
		240	57.0	0.700	14.3	0.039	9.9
6	90	60	57.2	0.700	17.0	0.038	10.4
		180	58.0	0.700	15.6	0.049	9.6
		300	57.6	0.700	12.1	0.046	13.1
	270	0	57.4	0.700	17.2	0.042	9.7
		120	57.4	0.700	11.1	0.041	13.7
		240	57.6	0.700	15.8	0.047	11.0
8	90	60	56.0	0.665	18.9	0.053	11.1
		180	56.6	0.630	17.1	0.076	9.1
		300	57.8	0.700	13.8	0.073	14.1
	270	0	58.8	0.700	17.9	0.063	10.4
		120	58.4	0.700	13.6	0.060	14.2
		240	56.0	0.665	17.6	0.069	11.0
10	90	60	56.8	0.700	14.7	0.058	11.6
		180	58.4	0.630	20.4	0.064	8.9
		300	57.2	0.700	19.8	0.081	14.8
	270	0	58.4	0.630	15.6	0.042	9.7
		120	57.2	0.700	16.5	0.074	13.4
		240	57.0	0.700	21.5	0.080	11.0
12	90	60	56.8	0.700	23.3	0.112	11.5
		180	58.4	0.630	21.5	0.122	9.6
		300	57.2	0.700	17.5	0.115	17.3
	270	0	58.4	0.630	21.6	0.120	13.1
		120	57.2	0.700	20.2	0.125	14.5
		240	57.0	0.700	22.4	0.105	13.1

6.4 Исследование видимости окололунных навигационных спутников

В ходе исследования видимости окололунных навигационных спутников была проведена оценка покрытия поверхности Луны спутниковой системой. Видимость навигационных спутников зависит от их орбитальных параметров и положения относительно наблюдателя на поверхности. Для иллюстрации результатов были построены карты, позволяющие визуализировать покрытие лунной поверхности системой спутников и оценить плотность навигационного покрытия.

Для оценки видимости спутника с точки на поверхности Луны необходимо определить, находится ли ИСЛ над горизонтом относительно наблюдателя. Это достигается путем анализа

геометрического взаиморасположения двух векторов: вектора, направленного от центра Луны к точке наблюдения на её поверхности, и вектора, направленного от точки наблюдения к спутнику. Если угол между этими двумя векторами является острым, то спутник находится над горизонтом и, следовательно, виден с данной точки поверхности Луны. Для определения остроты угла используется скалярное произведение, которое характеризует взаимную направленность векторов. Положительное значение скалярного произведения указывает на то, что угол между векторами острый, а значит, ИСЛ находится выше горизонта относительно наблюдателя.

Условие видимости ИСЛ с точки зрения наблюдателя на поверхности Луны можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{y}_0 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) > 0, \quad (6.1)$$

где $\mathbf{y}_0$ — вектор положения точки наблюдения на лунной поверхности, жестко связанной с Луной, а $\mathbf{y}$ — как и ранее вектор положения ИСЛ в селеноцентрической вращающейся СК.

С целью количественного анализа покрытия лунной поверхности спутниковой системой была проведена оценка площади каждого элементарного участка на сфере. В рамках этого подхода поверхность Луны была разделена на области размером $1^\circ \times 1^\circ$. Площадь каждого такого участка зависит от его положения на поверхности Луны и вычисляется с учётом широты. Площадь элементарного участка на заданной широте φ_0 рассчитывалась по формуле:

$$S_0 = \left(R_M \frac{\pi}{180^\circ} \right)^2 \cos(\varphi_0).$$

Для каждого такого участка на поверхности Луны с помощью суммирования и условия (6.1) рассчитывалось количество одновременно видимых спутников, обозначаемое как N_{vis} . Затем проводилось суммирование площадей по долготе λ_0 и широте φ_0 тех элементарных участков лунной поверхности, для которых плотность видимости спутников равна N_{vis} :

$$S_{N_{\text{vis}}} = \sum_{\varphi_0} \sum_{\lambda_0} S_0, \quad N_{\text{vis}} \in [0, 24].$$

После этого суммарная площадь $S_{N_{\text{vis}}}$ для каждого варианта плотности видимости спутников нормировалась на общую площадь поверхности Луны и выражалась в процентах:

$$P_{N_{\text{vis}}} = \frac{S_{N_{\text{vis}}}}{4\pi R_M^2} \cdot 100\%, \quad N_{\text{vis}} \in [0, 24].$$

Для визуализации навигационного покрытия поверхности Луны были построены карты видимости на единичные моменты времени. Эти карты отображают количество видимых

спутников в различных точках поверхности Луны и позволяют наглядно оценить навигационное покрытие для конкретной конфигурации лунной ГНСС.

В качестве примера на рисунке 6.4 представлены карты видимости окололунных навигационных спутников для ГНСС с параметрами: $a = 4R_M$, $e = 0.4$, $i = 40^\circ$. Данные карты иллюстрируют видимость спутников на двух различных моментах времени: начальный момент (рисунок 6.4а) и через два часа прогнозирования движения спутников навигационной системы (рисунок 6.4б). На графиках показаны различные вариации плотности видимых спутников на всех участках поверхности Луны, обозначенные в цветном градиенте.

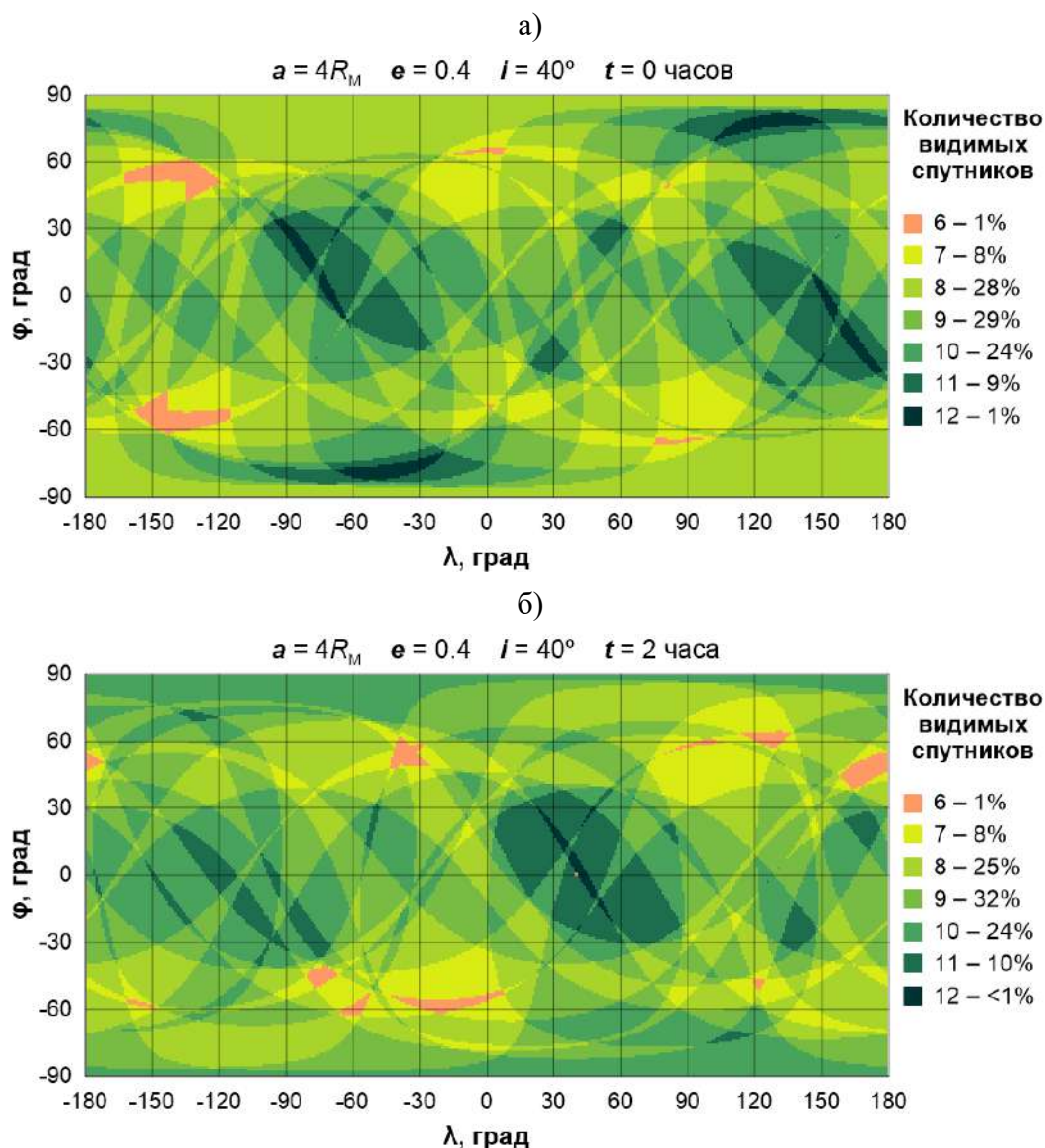


Рисунок 6.4 — Примеры карт видимости для конфигурации лунной ГНСС: $a = 4R_M$, $e = 0.4$, $i = 40^\circ$, построенных на два момента времени: а) начальный момент и б) через два часа прогнозирования движения ИСЛ

Как видно из представленных графиков, с течением времени изменяется видимость спутников на поверхности Луны в результате их орбитального движения. На начальном этапе

(рисунок 6.4а) на значительной части лунной поверхности одновременно наблюдается от 8 до 10 спутников. Через два часа (рисунок 6.4б) происходит перераспределение количества видимых спутников на поверхности Луны, что связано с изменением взаимного положения спутников относительно наблюдателя. Несмотря на то, что в результате сравнения графиков количественные оценки площадей покрытия остаются относительно стабильными, наблюдаются локальные изменения видимости ИСЛ на отдельных участках поверхности Луны. Для учёта таких локальных вариаций и более точного анализа покрытия следует использовать интегральные оценки, полученные путём осреднения карт видимости спутников за определенные интервалы времени.

Учитывая, что спутники ГНСС равномерно распределены на орбитах (таблица 6.1) и их движение приводит к повторению конфигурации через $1/4$ орбитального периода, целесообразно построить выборку карт на единичные моменты времени в течение этого интервала. Осреднение таких карт позволяет получить интегральную оценку видимости, что дает более полное представление о покрытии поверхности Луны системой спутников в течение полного цикла движения.

Пример одной осредненной карты видимости показан на рисунке 6.5. Осреднение было выполнено по 16 картам видимости, полученные на отдельные моменты времени с шагом $1/64$ оборота навигационной системы в течение интервала времени, равного $1/4$ оборота ГНСС. В легенде к графику указано в цветовом обозначении какое среднее количество видимых спутников наблюдается в определенной точке поверхности Луны, а также в процентном соотношении охватываемая площадь покрытия.

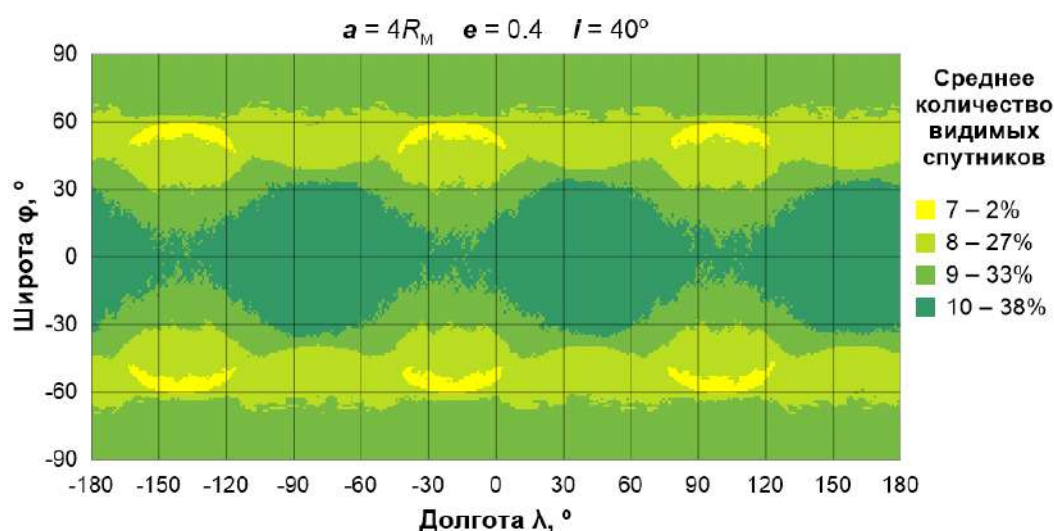


Рисунок 6.5 — Пример осредненной карты видимости для конфигурации лунной ГНСС:

$$a = 4R_M, e = 0.4, i = 40^\circ$$

Данные оценки позволяют количественно определить, на каких участках Луны и с какой плотностью система спутников обеспечивает непрерывное навигационное покрытие. Например,

как видно из рисунка 6.5, примерно с 70% поверхности Луны одновременно наблюдают в среднем 9–10 навигационных спутников. Минимальное количество видимых ИСЛ составляет 7. Заметим, что вследствие медленного вращения Луны осредненные карты видимости не являются стационарными и смещаются с востока на запад приблизительно на 13.2° за земные сутки. Таким образом, данный подход позволяет в процентном отношении от общей площади поверхности Луны интерпретировать качество покрытия и частоту одновременной видимости определенного числа спутников из всей группировки.

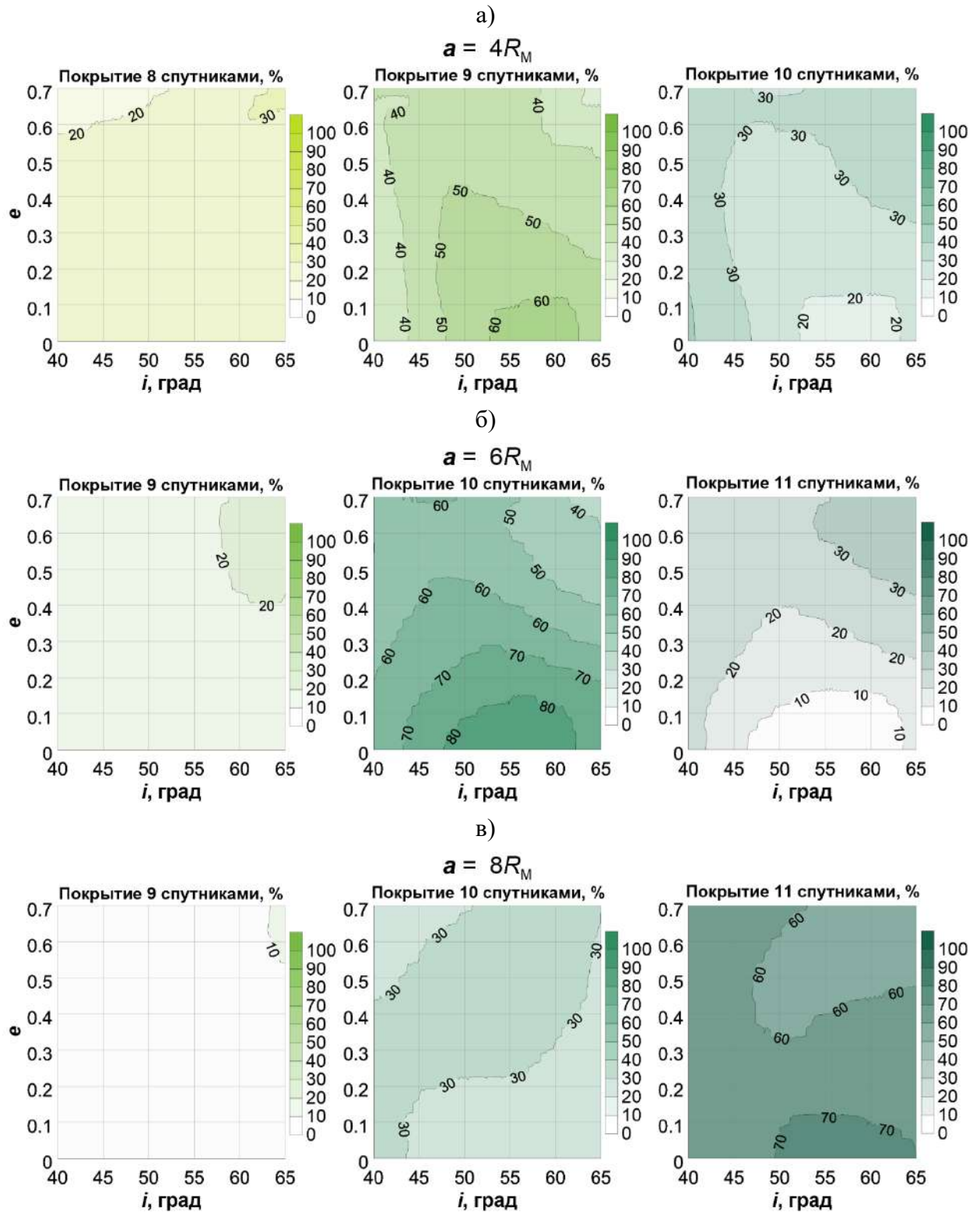
Пример осредненной карты видимости, представленный на рисунке 6.5, демонстрирует распределение среднего количества видимых спутников для конкретной конфигурации системы ГНСС. Однако, чтобы получить полное представление о возможностях видимости навигационной системы, необходимо проанализировать видимость ИСЛ для различных орбитальных конфигураций ГНСС. В связи с этим было проведено численное моделирование для ряда других конфигураций орбит ГНСС, варьируя значения орбитальных параметров a , e и i . Результаты такого анализа представлены на рисунке 6.6, где для каждой конфигурации ГНСС показаны оценки покрытия лунной поверхности в зависимости от среднего количества видимых спутников. Интервалы варьирования орбитальных параметров a , e и i рассмотрены в тех же числовых пределах, что и в разделе 6.3. Над каждым графиком рисунка 6.6 указано, какое среднее количество видимых спутников оценивалось и при каком значении большой полуоси.

Результаты моделирования на рисунке 6.6 демонстрируют, что с увеличением высоты орбиты увеличивается количество одновременно видимых навигационных спутников на поверхности Луны. При $a = 4R_M$ количество видимых спутников варьируется от 8 до 10, при $6R_M$ и $8R_M$ — от 9 до 11, а при $10R_M$ и $12R_M$ — от 10 до 12 спутников, что отражает постепенное расширение покрытия с ростом высоты орбиты.

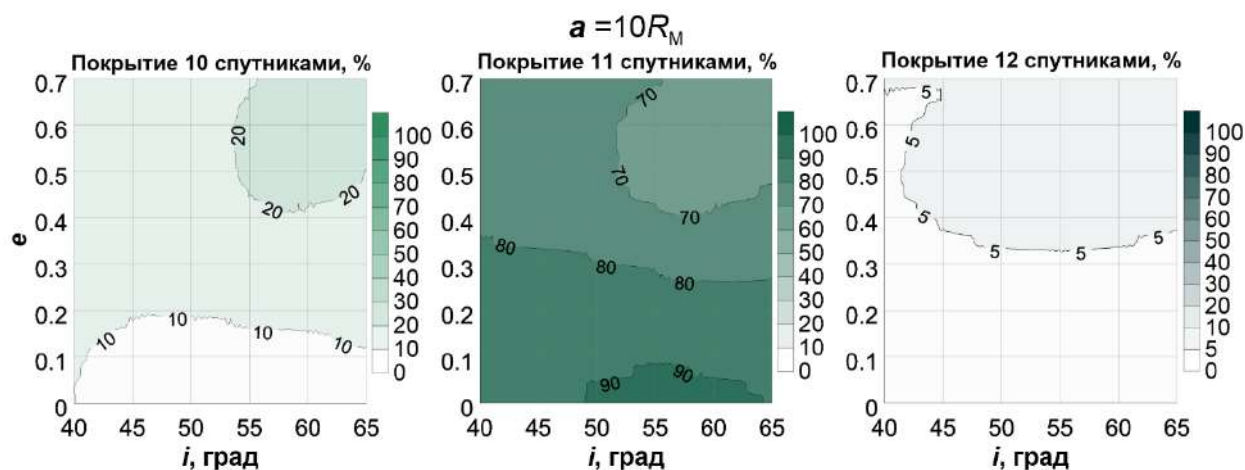
Наиболее оптимальные конфигурации с точки зрения видимости при a , равных $4R_M$ и $6R_M$, достигаются при больших величинах наклонения орбит и вблизи средних значений эксцентриситета. Для $8R_M$ и $10R_M$ наилучшее покрытие наблюдается при сочетании близких к круговым и наклонных орбит, а при $a = 12R_M$ наибольшая плотность покрытия достигается при конфигурации ГНСС с наклонными высокоэллиптическими орбитами.

Следует также учитывать, что данные графики предоставляют количественные оценки покрытия, которые могут не всегда соответствовать навигационным требованиям для определённых областей поверхности Луны. Например, наиболее плотное покрытие поверхности Луны спутниками системы для некоторых конфигураций ГНСС может быть достигнуто в зонах, которые не представляют приоритет для выполнения поставленных задач. Поэтому при выборе конфигурации орбитальной группировки ГНСС необходимо учитывать не только

количественные характеристики плотности покрытия, но и расположение областей с наибольшей видимостью, исходя из специфики задач навигационной системы.



г)



д)

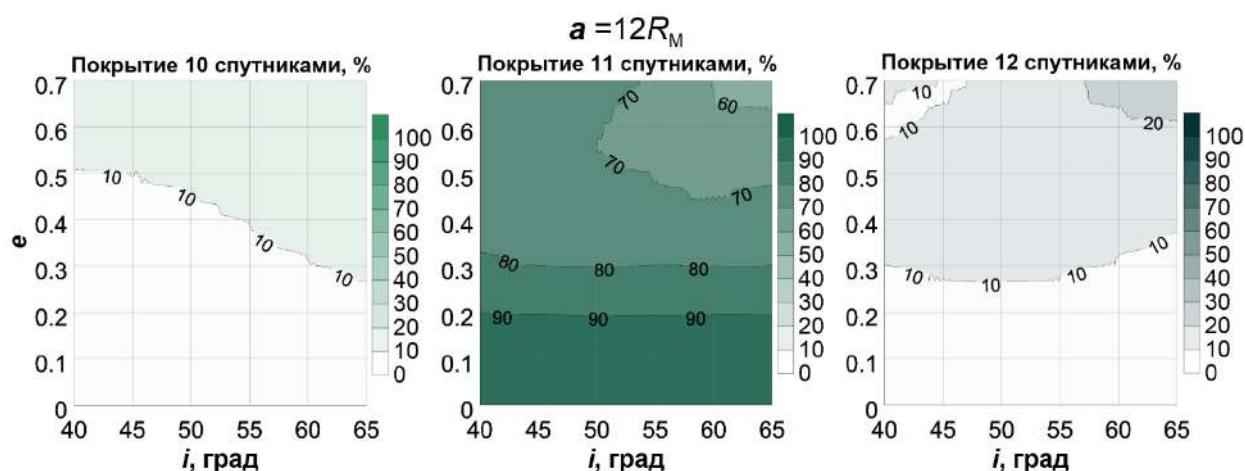


Рисунок 6.6 — Оценки видимости среднего количества НКА на поверхности Луны в зависимости от a , равной: а) $4R_M$, б) $6R_M$, в) $8R_M$, г) $10R_M$, д) $12R_M$

6.5 Оптимальная конфигурация лунной ГНСС

На основании проведённого в разделе 6.3 анализа устойчивости орбитальной группировки лунной ГНСС установлено, что для поддержания стабильности орбит навигационных спутников предпочтительно использовать орбиты с большими полуосями в диапазоне от $4R_M$ до $8R_M$. Одновременно с этим, анализ видимости спутников лунной ГНСС, представленный в разделе 6.4, показал, что наиболее плотное покрытие поверхности Луны спутниками системы достигается на орбитах с высокими значениями наклонения, а выбор эксцентриситета обусловлен значением высоты орбиты. Хотя видимость спутников улучшается с увеличением большой полуоси, превышение значения $8R_M$ приводит к ухудшению структурной устойчивости ГНСС. Поэтому оптимальная конфигурация лунной ГНСС ограничивается семейством орбит с большими полуосями от $4R_M$ до $8R_M$.

Путём экспериментального подбора были определены оптимальные начальные параметры орбит лунной ГНСС: $a = 8R_M$, $e = 0.7$ и $i = 58^\circ$, при которых достигаются

минимальные возмущения эксцентриситета за десятилетний период (таблица 6.3). Карта видимости для этой навигационной системы представлена на рисунке 6.7.

Таблица 6.3 — Максимальные возмущения в эксцентриситете и наклонении за 10 лет для оптимальной конфигурации лунной ГНСС: $a = 8R_M$, $e = 0.7$, $i = 58^\circ$

Номер ИСЛ	1	5	9	13	17	21
$\omega, ^\circ$	270			90		
$\Omega, ^\circ$	0	120	240	60	180	300
$\Delta e_{\max}$	0.065	0.068	0.075	0.055	0.077	0.073
$\Delta i_{\max}$	9.86	14.34	10.90	10.73	10.79	14.09
$\Delta \omega_{\max}$	20.05	13.45	16.27	18.85	17.35	13.74

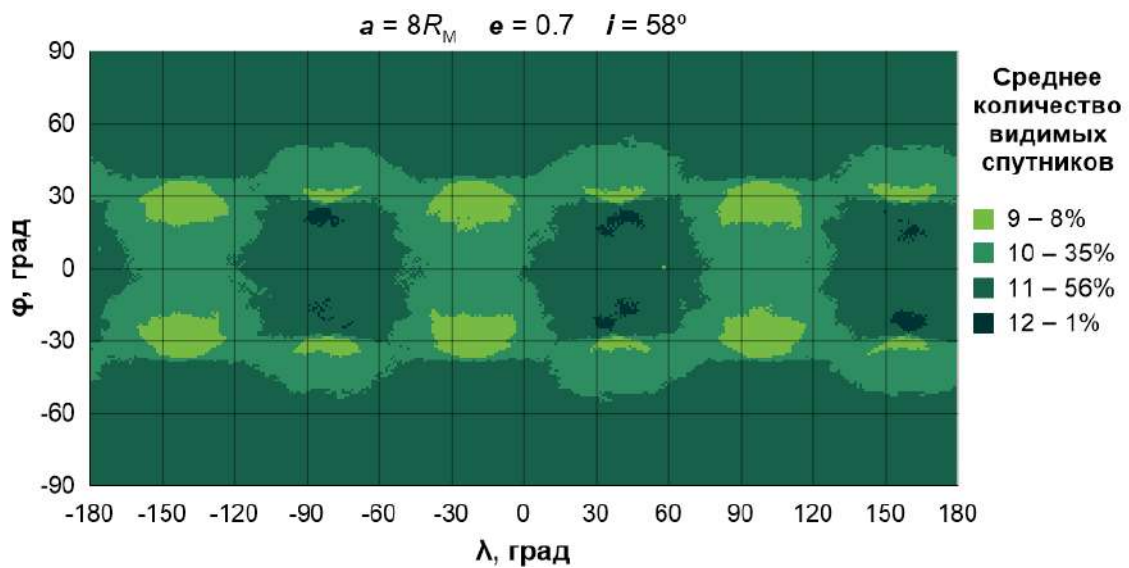


Рисунок 6.7 — Карта видимости НКА для оптимальной конфигурации лунной ГНСС:

$$a = 8R_M, e = 0.7, i = 58^\circ$$

Данные таблицы 6.3 демонстрируют, что даже при больших значениях наклонения и эксцентриситета колебания остаются в допустимых пределах, что подтверждает устойчивость предложенной орбитальной конфигурации. Минимальные значения максимальных изменений эксцентриситета $\Delta e_{\max}$ составляют 0.052, а максимальные достигают 0.073, что является удовлетворительным показателем для долгосрочной стабильности орбиты. Колебания наклонения $\Delta i_{\max}$ варьируются от 8.76° до 13.85° , что также указывает на приемлемый уровень стабильности орбит. Как видно из карты видимости на рисунке 6.7, для оптимальной конфигурации лунной ГНСС на значительной части поверхности Луны одновременно наблюдаются 10 или 11 навигационных спутников, что обеспечивает высокий уровень покрытия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данной диссертационной работы были получены следующие результаты:

1. Разработана численная модель движения систем ИСЛ, учитывающая воздействие гравитационного поля Луны до высокого порядка и степени, притяжение Земли и Солнца, рассматриваемых как материальные точки, а также влияние светового давления. Модель основана на численном решении системы ДУ второго порядка с использованием интегратора Lobbie, обеспечивающего высокую точность и адаптивность при сложных условиях движения спутников. ПМО разработано для среды параллельных вычислений, что существенно повышает быстродействие вычислительного процесса за счёт одновременного моделирования движения нескольких ИСЛ. Разработан программный интерфейс, который упрощает взаимодействие пользователя с программой.

2. Реализована методика анализа вековых резонансов, основанная на изучении поведения аргументов резонансных соотношений, что позволяет более детально исследовать влияние вековых резонансов на орбитальную динамику ИСЛ.

3. Выполнено тестирование модели, подтвердившее её соответствие современным требованиям точности и эффективности. Кроме того, проведено сравнение с результатами других авторов, что позволило убедиться в достоверности получаемых с помощью данного ПМО результатов.

4. Проведено моделирование динамики большого количества объектов в течение 10-летнего периода. Начальные условия задавались в виде круговых орбит с уникальными значениями большой полуоси и наклона.

5. Выполнен общий анализ влияния гравитационного поля Луны, а также притяжения от Земли и Солнца на ИСЛ, который показал, что вариации начальных значений большой полуоси и наклона орбит существенно влияют на прогнозируемые положения окололунных объектов. Так учёт полного гравитационного поля Луны приводит к резкому сокращению времени жизни объектов на низких орбитах вследствие роста эксцентриситетов орбит. Установлено, что при наклонениях 60° – 120° и больших полуосях свыше 8500 км эволюция эксцентриситетов орбит достигает величин, приводящих к значительному сокращению времени жизни спутников на их орбитах. Выявлено также, что начальные значения долгот восходящего узла существенно влияет на орбитальную эволюцию, определяя долгосрочную стабильность орбит.

6. Выявлено в гравитационном поле Луны 8 аномальных зон, способных генерировать резонансы в движении ИСЛ. На основе численного анализа высокопорядковых орбитальных резонансов (1:9 и 1:27) установлено, что на динамику ИСЛ они оказывает малое влияние. Компоненты Φ_1 и Φ_4 резонансных мультиплетов демонстрируют устойчивые признаки

резонансного взаимодействия, приводя к незначительным долгопериодическим вариациям большой полуоси и слабому вековому росту эксцентриситета орбит. Остальные компоненты резонансных мультиплетов устойчивого влияния не оказывают.

7. Исследованы особенности динамики объектов на низких орбитах в окололунном пространстве. Установлено, что основным фактором, влияющим на динамику спутников, является составляющая полного гравитационного поля Луны вдоль радиального направления, которая приводит к значительному росту эксцентриситета орбит. Выявлены диапазоны наклонений и больших полуосей, при которых воздействие гравитационного поля наиболее сильно влияет на эволюцию орбитальных параметров, что приводит к сближению ИСЛ с лунной поверхностью. Проведён также анализ влияния начальной долготы восходящего узла на орбитальную эволюцию ИСЛ, показано, что её выбор оказывает незначительное влияние на динамику низкоорбитальных спутников.

8. Рассмотрена динамика объектов в средневысотном и высокоорбитальном сегментах окололунного пространства. Установлено, что влияние вековых резонансов, и прежде всего механизма Лидова–Козаи, имеющего резонансную природу, очень существенно в этой области окололунного пространства. Показано, что полученные в рамках осредненной задачи трёх тел, особенности действия механизма Лидова–Козаи актуальны и при учёте всех гравитационных возмущений в движении окололунных объектов. Численное моделирование даёт все три проявления механизма Лидова–Козаи: слабый резонанс, который приводит к не катастрофическому росту эксцентриситетов орбит; точный резонанс или стационарное решение, который стабилизирует орбиту на больших интервалах времени, и эффект Лидова–Козаи, представляющий собой взаимосвязанные колебания эксцентриситетов и наклонений орбит с большими амплитудами. Проведён анализ влияния вековых резонансов и построены карты зон наложения их устойчивого и неустойчивого влияния в окололунном пространстве. Установлено, что области наложения резонансов коррелируют с зонами значительного роста эксцентриситетов орбит, что приводит к сокращению времени жизни спутников. Полученные результаты позволяют определить орбитальные параметры, которые минимизируют рост эксцентриситета и увеличивают стабильность орбит.

9. Рассмотрено влияние СД на орбитальную динамику окололунных объектов. В качестве параметров парусности были использованы значения 0.1 и 1 м²/кг. Проведён анализ роста эксцентриситетов орбит и сокращения времени их существования под воздействием СД. Установлено, что рост эксцентриситета усиливается с увеличением парусности на всех высотах орбит, включая низкие, что приводит к расширению зон с коротким временем жизни. При учёте СД наблюдаются значительные изменения динамики объектов: появляются области роста эксцентриситета, обусловленные дополнительным вкладом СД в радиальную составляющую

силы, действующей на ИСЛ. Проведено исследование влияния СД на резонансную структуру, показавшее расширение областей влияния вековых апсидально-нодальных резонансов и возникновение новых зон их наложения.

10. Проведено эскизное проектирование лунной ГНСС, основанной на высокоэллиптических орбитах. Для поиска оптимальной конфигурации навигационной системы были выполнены численные моделирования движения на множестве орбит с варьированием больших полуосей (4–12 радиусов Луны), эксцентриситетов (до 0.7) и наклонений (40° – 65°). Для оценки стабильности орбит построены карты устойчивости в параметрическом пространстве аргумента перигея, наклона и эксцентриситета, на которых выделены области долговременной стабильности орбит. Дополнительно проведён анализ видимости спутников: составлены карты покрытия поверхности Луны, подтвердившие, что выбранная конфигурация лунной навигационной системы обеспечивает высокий уровень охвата. В результате получена оптимальная конфигурация, включающая шесть орбит с позиционными параметрами: большая полуось — 8 радиусов Луны, эксцентриситет — 0.7, наклонение — 58° . Полученная конфигурация обеспечивает структурную устойчивость орбит в течение 10 лет и плотное навигационное покрытие с одновременной видимостью в среднем 10–11 спутников ГНСС на всей поверхности Луны.

Полученные результаты вносят значительный вклад в понимание динамики окололунных объектов, включая особенности влияния гравитационного поля Луны, притяжения третьих тел, СД, и резонансных явлений на эволюцию орбитальных параметров. Разработанные ПМО и методы анализа позволяют более детально изучить особенности динамики ИСЛ. Полученные результаты создают основу для проектирования высокоэффективных лунных навигационных систем, обеспечивающих стабильное покрытие поверхности Луны и минимизацию затрат на орбитальную коррекцию за счет структурной устойчивости ГНСС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. NASA. Программа "Artemis" // NASA. URL: [<https://www.nasa.gov/specials/artemis>] (<https://www.nasa.gov/specials/artemis>) (дата обращения: 19.05.2024).
2. Petrov G. I., Inocente D., Haney M., Katz N., Koop C., Makaya A., Arnhof M., Lakk H., Cowley A., Haignere C., Messina P., Sumini V., Hoffman J. A. Moon Village Reference Masterplan and Habitat Design // 49th International Conference on Environmental Systems, 7–11 July 2019, Boston, Massachusetts. URL: [<https://www.media.mit.edu/publications/moon-village-reference-masterplan-and-habitat-design/>] (дата обращения: 19.05.2024).
3. Honniball C.I., Lucey P.G., Li S., Shenoy S., Orlando T.M., Hibbitts C.A., Hurley D.M., Farrell W.M. Molecular water detected on the sunlit Moon by SOFIA // *Nature Astronomy*. 2021. № 5. P. 121—127. DOI: 10.1038/s41550-020-01222-x
4. Bhandari N., Srivastava N. Active moon: evidences from Chandrayaan-1 and the proposed Indian missions // *Geoscience Letters*. 2014. № 1. Article №: 11. DOI: 0.1186/s40562-014-0011-y
5. Chen Y., Tang Y., Fan Y., Yan J., Wang C., Zou Y. Overview of the Latest Scientific Achievements of Chang'E-4 Mission of China's Lunar Exploration Project // *Chinese Journal of Space Science*. 2022. 42(4). P. 519—535 DOI: 10.11728/cjss2022.04.yg30
6. Институт космических исследований РАН. Научная миссия «Луна-25» // ИКИ РАН. URL: [<https://iki.cosmos.ru/research/missions/luna-25>] (<https://iki.cosmos.ru/research/missions/luna-25>) (дата обращения: 19.05.2024).
7. Oesterwinter C. The motion of a lunar satellite // *The Astronomical Journal*. 1966. V. 71. P. 9—17.
8. Giacaglia G. E. O., Murphy J. P., & Felsentreger T. L. A semi-analytic theory for the motion of a lunar satellite // *The Astronomical Journal*. 1970. V. 75. P. 508—514.
9. Konopliv A. S., Asmar S. W., Carranza E., Sjogren W. L., Yuan D. N. Recent gravity models as a result of the Lunar Prospector mission // *Icarus*. 2001. V. 150(1). P. 1—18. <https://doi.org/10.1006/icar.2000.6573>
10. Matsumoto K., Goossens S., Ishihara Y., Liu Q., Kikuchi F., Iwata T., Namiki N., Noda H., Hanada H., Kawano N., Lemoine F. G., Rowlands D. D. A new lunar gravity field model from SELENE Doppler tracking data: Model development and initial assessment // *Journal of Geophysical Research: Planets*. 2010. V. 115(E6). P. E06007. <https://doi.org/10.1029/2009JE003499>
11. Konopliv A. S., Park R. S., Yuan D. N., Asmar S. W., Watkins M. M., Williams J. G., Fahnstock E., Kruizinga G., Paik M., Strelak D., Harvey N., Smith D. E., Zuber M. T. The JPL lunar gravity field to spherical harmonic degree 660 from the GRAIL Primary Mission // *Journal of Geophysical Research: Planets*. 2013. V. 118(7). P. 1415—1434. <https://doi.org/10.1002/jgre.20097>

12. Goossens S., Sabaka T. J., Wieczorek M. A., Neumann G. A., Mazarico E., Lemoine F. G., Nicholas J. B., Smith D. E., Zuber M. T. High-resolution gravity field models from GRAIL data and implications for models of the density structure of the Moon's crust // *Journal of Geophysical Research: Planets*. 2020. V. 125(3). P. e2019JE006086. <https://doi.org/10.1029/2019JE006086>.
13. Gousidou-Koutita M. Numerical models for the study of motion of lunar satellites // *Earth, Moon, and Planets*. 1985. V. 32(1). P. 21—45. DOI: 10.1007/BF00054336.
14. Wang H.-H., Liu L. A study on the relationship between the orbital lifetime and inclination of low lunar satellites // *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*. 2005. V. 5(6). P. 665—670.
15. Ramanan R.V., Adimurthy V. An analysis of near circular lunar mapping orbits // *J. Earth Syst. Sci.* 2005. V. 114 (6). P. 619—626.
16. Song Y.J., Park S.Y., Kim H.D., Sim E.S. Development of precise lunar orbit propagator and lunar polar orbiter's lifetime analysis // *J. Astron. and Space Sci.* 2010. V. 27 (2). P. 97—106. DOI: 10.5140/JASS.2010.27.2.097
17. Gupta S., Sharma R. Effect of Altitude, Right Ascension of Ascending Node and Inclination on Lifetime of Circular Lunar Orbits // *International Journal of Astronomy and Astrophysics*. 2011. V. 1. No. 3. P. 155—163. DOI: 10.4236/ijaa.2011.13020
18. Carvalho J. P. S., Moraes R. V., Prado A. Some orbital characteristics of lunar artificial satellites // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2010. V. 108(4). P. 371—388. DOI: 10.1007/S10569-010-9310-6.
19. Saedeleer B. D. Analytical theory of a lunar artificial satellite with third body perturbations // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2006. V. 95(4). P. 407—423. DOI: 10.1007/S10569-006-9029-6.
20. Gonçalves L., Rocco E., Prado A. Orbital Disturbance Analysis due to the Lunar Gravitational Potential and Deviation Minimization through the Trajectory Control in Closed Loop // *Mathematical Problems in Engineering*. 2013. Article ID 529268. DOI: 10.1155/2013/529268.
21. Condoleo E. Lunar High precision Orbit Propagator // *MATLAB Central File Exchange*. 2017. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/64408-lunar-high-precision-orbit-propagator>.
22. Gordienko E. S., Ivashkin V. V., Simonov A. V. Analyzing stability of orbits of artificial satellites of the Moon and choosing the configuration of the lunar navigation satellite system // *Solar System Research*. 2017. V. 51(7). P. 654—668. DOI: 10.1134/S0038094617070061.
23. Sirwah M., Tarek D., Radwan M., Ibrahim A. A study of the moderate altitude frozen orbits around the Moon // *Results in Physics*. 2020. V. 17. P. 103148. DOI: 10.1016/j.rinp.2020.103148
24. Khattab E. H., Radwan M., Rahoma W. A. Frozen Orbits Construction for a Lunar Solar Sail // *Journal of Astronomy and Space Sciences*. 2020. V. 37. P. 1—8. DOI: 10.5140/JASS.2020.37.1.1

25. Ely T. A. Stable Constellations of Frozen Elliptical Inclined Lunar Orbits // *The Journal of the Astronautical Sciences*. 2005. V. 53(3). P. 301—316.
26. Ely T. A., Lieb E. Constellations of elliptical inclined lunar orbits providing polar and global coverage // *The Journal of the Astronautical Sciences*. 2006. V. 54(1). P. 53—67.
27. Gao Z., Wang J., Wang Z., Zhou Z. Coverage Analysis of Lunar Communication/Navigation Constellations Based on Halo Orbits and Distant Retrograde Orbits // *Advances in Space Research*. 2020. V. 66(4). P. 1102—1118. DOI: 10.1016/j.asr.2020.05.031
28. Wang J., Li Z., Zhang L., Sun J. Multi-orbit Lunar GNSS Constellation Design with Distant Retrograde Orbit and Halo Orbit Combination // *Scientific Reports*. 2023. V. 13. P. 4567. DOI: 10.1038/s41598-023-37348-x
29. Andreev A. O., Demina N. Yu., Nefedyev Yu. A., Petrova N. K., Zagidullin A. A. Creation of a Simulation Model of Spacecrafts' Navigation Referencing to the Digital Map of the Moon // *Cyber-Physical Systems: Modelling and Intelligent Control. Studies in Systems, Decision and Control*. 2021. V. 338. P. 193–204. DOI: 10.1007/978-3-030-66077-2_15.
30. Микрин Е.Л., Михайлов М.В., Орловский И.В., Рожков С.П., Краснополяский И.А. Спутниковая навигация окололунных космических аппаратов и объектов на поверхности Луны // *Гироскопия и навигация*. 2019. С. 22—31.
31. Дмитриев А.О., Москатынцев И.В., Нестерин И.М., Сысоев В.К. Анализ вариантов навигационных систем для Луны // *Труды МАИ*. 2021. N 118. С. 1—38.
32. Carosi M., Capolicchio J., Tosti M., Eleuter M., Stallo C., Musacchio D., Di Lauro C. Comparison Among Orbital Constellation for a Global Lunar Satellite Navigation System // *Joint 26th Ka and Broadband Communications Conference and the 38th International Communications Satellite Systems Conference*. 2021.
33. Russell R.P., Lara M. Long-Lifetime Lunar Repeat Ground Track Orbits // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2007. V. 30(4). P. 982–993. DOI: 10.2514/1.27104.
34. Legnaro E., Efthymiopoulos C. Secular dynamics and the lifetimes of lunar artificial satellites under natural force-driven orbital evolution // *Acta Astronautica*. 2024. V. 225. P. 768–787. DOI: 10.1016/j.actaastro.2024.09.051.
35. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В. К обоснованию численно-аналитической методики выявления вековых резонансов // *Известия вузов. Физика*. 2022. Т. 65. № 6(775). С. 47–52. DOI: 10.17223/00213411/65/6/47.
36. Cook G. E. Luni-solar perturbations of the orbit of an Earth satellite // *Geophysical Journal International*. 1962. V. 6(3). P. 271–291. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1962.tb00351.x

37. Бордовицына Т. В., Томилова И. В., Чувашов И. Н. Влияние вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию объектов спутниковых радионавигационных систем в области МЕО // *Астрономический вестник*. 2012. Т. 46, № 5. С. 356.

38. Бордовицына Т. В., Томилова И. В. Особенности структуры вековых резонансов в динамике околоземных космических объектов // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2016. Т. 59, № 3. С. 41—48. DOI: 10.1007/s11182-016-0781-0

39. Александрова А.Г., Бордовицына Т.В., Попандопуло Н.А., Томилова И.В. Новый подход к вычислению вековых частот в динамике околоземных объектов на орбитах с большими эксцентриситетами // *Известия вузов. Физика*. 2020. Т. 63. № 1(745). С. 57–62. DOI: 10.17223/00213411/63/1/57.

40. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Томилова И.В., Авдюшев В.А., Бордовицына Т.В. Численное моделирование динамики искусственных спутников Луны // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*. 2022а. Т. 56. № 4. С. 266–284. DOI: 10.31857/S0320930X22040077.

41. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В. Анализ динамической структуры вековых резонансов в окололунном орбитальном пространстве // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022с. № 77. С. 110–124. DOI: 10.17223/19988621/77/9.

42. Авдюшев В.А. Коллокационный интегратор Loblie в задачах орбитальной динамики // *Астрономический вестник*. 2022. Т. 56. № 1. С. 36—46 DOI: 10.31857/S0320930X22010017

43. Lidov M.L. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies // *Planetary and Space Science*. 1962. V. 9. P. 719—759.

44. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // *Astron. J.* 1962. Vol. 67. P. 591—598.

45. Shevchenko I.I. The Lidov–Kozai Effect – Applications in Exoplanet Research and Dynamical Astronomy // Springer. 2017. 198 p.

46. Naoz S. The Eccentric Kozai–Lidov Effect and Its Applications // *Annu. Rev. in Astronomy & Astrophysics*. 2016. V. 54. P. 441—489.

47. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Кучерявченко Н.А., Бордовицына Т.В., Красавин Д.С. Усовершенствованная численная модель движения искусственных спутников Луны и её применение в исследовании особенностей динамики окололунных объектов // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*. 2024. Т. 58. № 6. С. 783–806. DOI: 10.31857/S0320930X24060139.

48. Archinal B.A., A’Hearn M.F., Bowell E., Conrad A., Consolmagno G.J., Courtin R., Fukushima T., Hestroffer D., Hilton J.L., Krasinsky J.L., Neumann G., Oberst J., Seidelmann P.K.,

Stooke P., Tholen D.J., Thomas P.C., Williams I.P. Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009 // *Celest Mech Dyn Astr.* 2011. V. 109. P. 101—135. DOI: 10.1007/s10569-010-9320-4

49. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли // М.: Наука, 1977, 360 с.

50. Cunningham L.E. On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // *Cel. Mech.* 1970. V. 2. P. 207—216. DOI: 10.1007/BF01229495

51. Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике // М.: Наука, 1976, 864 с.

52. Folkner W.M., Park R.S. // Planetary ephemeris DE438 for Juno, Tech. Rep. IOM392R-18-004. Pasadena, CA: Jet Propulsion Laboratory, 2018.

53. Авдюшев В.А. Интегратор Гаусса – Эверхарта // *Вычисл. технологии.* 2010. Т. 15. № 4. С. 31—47.

54. Александрова А.Г., Авдюшев В.А., Попандопуло Н.А., Бордовицына Т.В. Численное моделирование движения околоземных объектов в среде параллельных вычислений // *Известия высших учебных заведений. Физика.* 2021. Т. 64. № 8. С. 168—175. DOI: 10.17223/00213411/64/8/168

55. Breiter S. Lunisolar resonances revisited // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2001b. V. 81. P. 81—91. DOI: 10.1023/A:1008379908163

56. Breiter S. On the coupling of lunisolar resonances for Earth satellite orbits // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2001a. V. 80. P. 1—20. DOI: 10.1023/A:1012284224340

57. Rosengren A.J., Alessi E.M., Rossi A., Valsecchi G.B. Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion of the Moon // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 2015. V. 449 (4). P. 3522—3526. DOI: 10.1093/mnras/stv534

58. Daquin J., Rosengren A.J., Alessi, E.M. Deleflie F., Valsecchi G.B. Rossi A. The dynamical structure of the MEO region: long-term stability, chaos, and transport // *Celest Mech Dyn Astr.* 2016. V. 124. pp. 335—366. DOI: 10.1007/s10569-015-9665-9

59. Rossi A. Resonant dynamics of Medium Earth Orbits: space debris issues // *Celest Mech Dyn Astr.* 2008. V. 100. P. 267—286. DOI:10.1007/s10569-008-9121-1

60. Бордовицына Т. В., Томилова И. В. Вековые резонансы в динамической эволюции околоземных космических объектов на вытянутых орбитах // *Изв. вузов. Физика.* 2014. Т. 57. № 4. С. 84—91. DOI: 10.1007/s11182-014-0269-8

61. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения ИСЗ. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во ТГУ. 2016. 262 с.

62. Мюрей К., Дермот С. Динамика Солнечной системы. – М.: Физматлит. 2010. 588 с.
63. Morbidelli A. Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics. Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics, by Alessandro Morbidelli. London: Taylor & Francis. 2002. ISBN 0415279399. 380 p.
64. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные методы и задачи. М.: Наука. 1968. 800 с.
65. Тимашкова Е.И., Холшевников К.В. Лунно-солнечные возмущения в движении спутников планеты // Уч. Зап. ЛГУ. 1974. № 373. С. 141—156.
66. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы: учебное пособие для вузов. М.: Наука. 1963. 586 с.
67. Allan R.R. Resonance effects due to the longitude dependence of the gravitational field of a rotating primary // Planetary and Space Science. 1967a. V. 15. P. 53–76. DOI: 10.1016/0032-0633(67)90067-0.
68. Allan R.R. Satellites resonance with the longitude dependent gravity. II. Effects involving the eccentricity // Planetary and Space Science. 1967b. V. 15. P. 1829–1845. DOI: 10.1016/0032-0633(67)90020-7.
69. Кузнецов Э.Д., Захарова П.Е., Гламазда Д.В., Шагабутдинов А.И., Кудрявцев С.О. О влиянии светового давления на орбитальную эволюцию объектов, движущихся в окрестности резонансов низких порядков // Астрономический вестник. 2012. Т. 46. № 6. С. 480–488. DOI: 10.1134/S0038094612050073.
70. Томилова И.В., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В. Особенности динамики объектов, движущихся в окрестности резонанса 1:3 с вращением Земли // *Астрономический вестник*. 2019. Т. 53. № 5. С. 323–338. DOI: 10.1134/S0320930X19050074.
71. Popandopulo N.A., Aleksandrova A.G. Searching For Optimal Areas of Circumlunar Space for Placement of Satellites Moving in Circular Orbits // Russ. Phys. J. 2024. V. 67. № 7. P. 1058–1064. DOI: 10.1007/s11182-024-03215-z.
72. Popandopulo N.A., Avdyushev V.A., Tomilova I.V., Bordovitsyna T.V. Numerical Modeling of the Influence of the Lidov–Kozai Mechanism on the Dynamics of Nearlunar Objects // Astronomical and Astrophysical Transactions. 2025. Vol. 35(1). P. 17–28.
73. Прохоренко В.И. Исследование времени баллистического существования эллиптических орбит, эволюционирующих под влиянием гравитационных возмущений внешних тел // Космич. исслед. 2002. Т. 40. № 3. С. 285—294.
74. Александрова А.Г., Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Резонанс Лидова–Козаи и его влияние на орбитальную эволюцию околоземных космических объектов // М.Л. Лидов – яркое имя в космической науке: сб. докладов / под ред. М.А. Вашковьяка. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. С. 49—66.

75. Ito T., Ohtsuka K. The Lidov–Kozai Oscillation and Hugo von Zeipel // *Monogr. Environ. Earth Planets*. 2019. Vol. 7. No. 1. P. 1–113
76. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников под воздействием гравитационных возмущений внешних тел // *Искусственные спутники Земли: журнал*. 1961. Т. 8. С. 5—45.
77. Вашковьяк М. А. Качественные особенности эволюции некоторых полярных спутниковых орбит // *Астрон. вестн. Исследования солнечной системы*. 2016. Т. 50. № 1. С. 37—47.
78. Красавин Д.С., Александрова А.Г., Томилова И.В. Применение искусственных нейронных сетей в исследовании динамической структуры околоземного орбитального пространства // *Изв. вузов. Физика*. 2021. Т. 64. № 10. С. 38—43. DOI: 10.17223/00213411/64/10/38
79. Кузнецов Э.Д. О влиянии светового давления на орбитальную эволюцию геосинхронных спутников // *Астрон. вестн.* 2011. Т. 45. № 5. С. 444—457.
80. Кузнецов Э.Д., Захарова П.Е., Гламазда Д.В., Кудрявцев С.О. Влияние резонансов высоких порядков на орбитальную эволюцию объектов в окрестности геостационарной орбиты // *Астрон. вестн.* 2014. Т. 48. № 6. С. 482—494.
81. Valk S., Delsate N., Lemaitre A., Carletti T. Global dynamics of high area-to-mass ratios GEO space debris by means of the MEGNO indicator // *Adv. Space Res.* 2009. V. 43. P. 1509—1526.
82. Belkin S.O., Kuznetsov E.D. Orbital flips due to solar radiation pressure for space debris in near-circular orbits // *Acta Astronautica*. 2021. 178. P. 360—369.
83. Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В. Исследование совместного влияния светового давления и вековых резонансов, связанных со средним движением Солнца, на динамику объектов в области LEO // *Астрон. вестн.* 2022. Т. 56. № 4. С. 219—236. DOI: 10.31857/S0320930X22040028
84. Описание библиотеки torch для python – URL: <https://github.com/pytorch/pytorch> (06.12.2023)
85. Авдюшев В.А., Попандопуло Н.А. Анализ окололунных орбитальных структур для проектирования космического сегмента глобальной навигационной спутниковой системы на Луне // *Космические исследования*. 2025. Т. 63. № 4.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Численные результаты по исследованию влияния орбитальных резонансов на динамику окололунных объектов

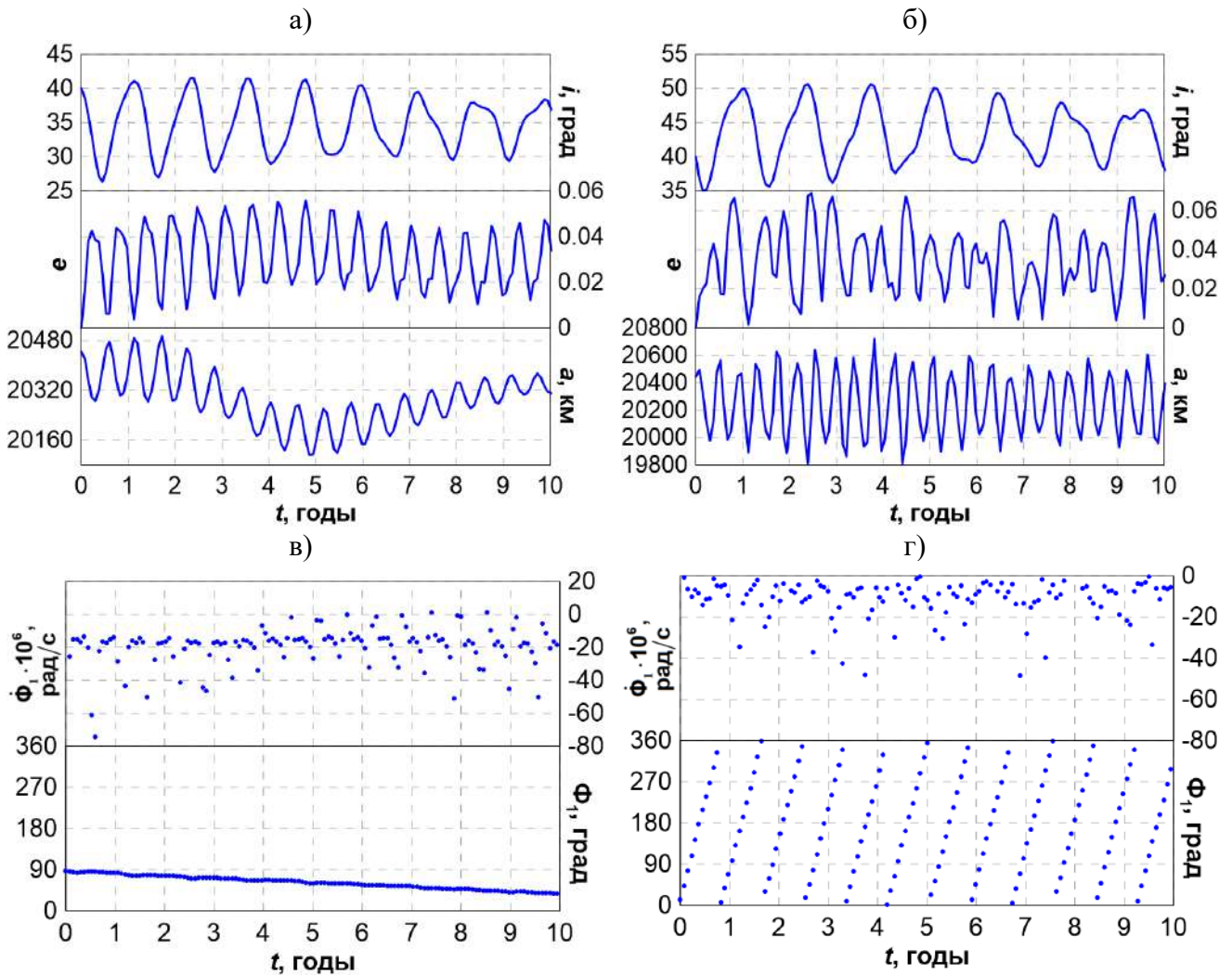


Рисунок А.1 — Сравнение орбитальной эволюции объектов, демонстрирующих наличие (объект на левой панели; $a = 20443.284$ км, $e = 0.0$, $i = 40^\circ$, $\Omega = 87^\circ$) и отсутствие (объект на правой панели; $a = 20443.284$ км, $e = 0.0$, $i = 40^\circ$, $\Omega = 12^\circ$) влияния мультиплета Φ_1 орбитального резонанса 1:9 на динамику ИСЛ. На графиках а), б) орбитальная эволюция (сверху вниз) элементов i , e , a ; в), г) эволюция (сверху вниз) резонансного соотношения $\dot{\Phi}_1$ и критического аргумента Φ_1

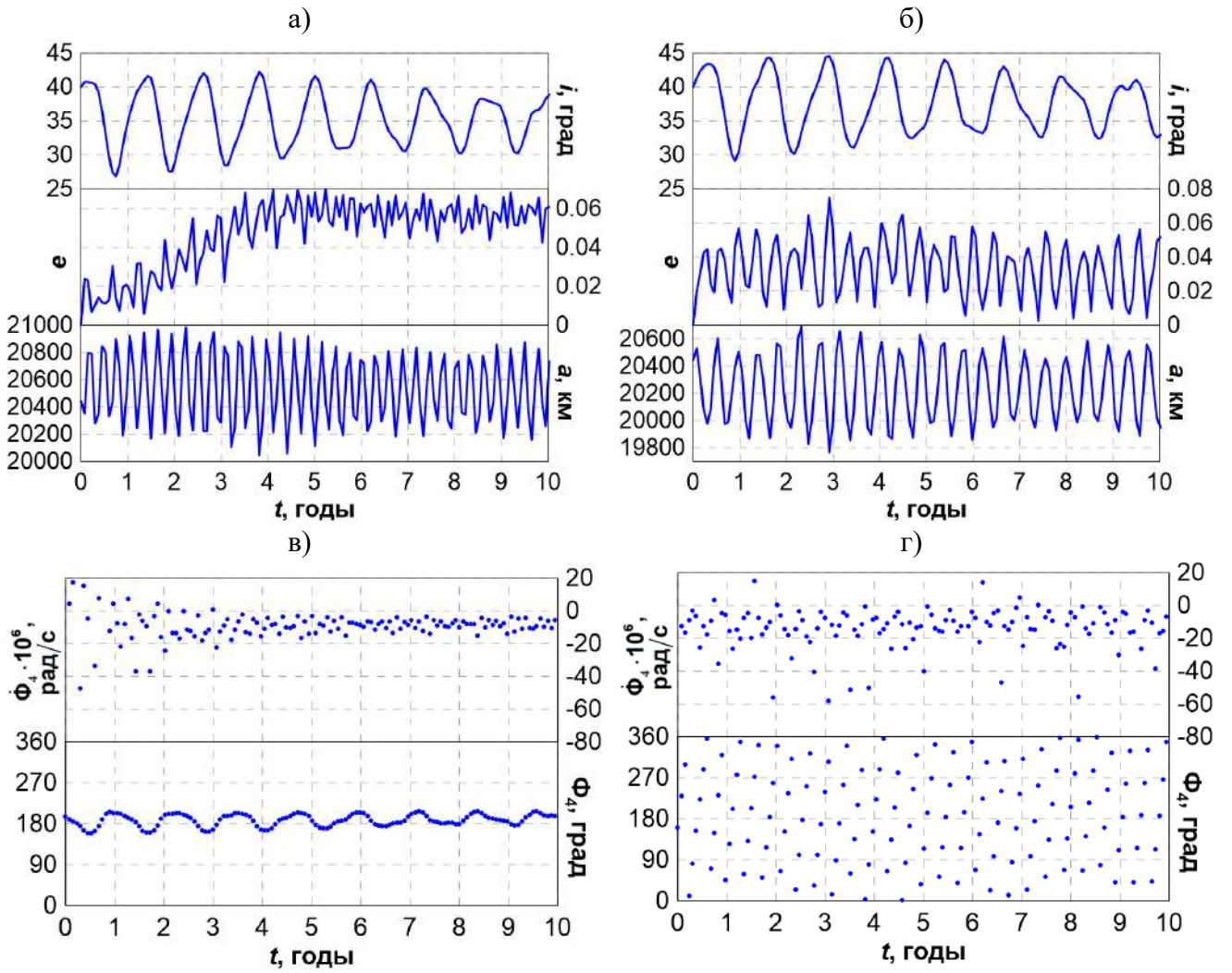


Рисунок А.2 — Сравнение орбитальной эволюции объектов, демонстрирующих наличие (объект на левой панели; $a = 20443.284$ км, $e = 0.0$, $i = 40^\circ$, $\Omega = 165^\circ$) и отсутствие (объект на правой панели; $a = 20443.284$ км, $e = 0.0$, $i = 40^\circ$, $\Omega = 199^\circ$) влияния мультиплета Φ_4 орбитального резонанса 1:9 на динамику ИСЛ. На графиках а), б) орбитальная эволюция (сверху вниз) элементов i , e , a ; в), г) эволюция (сверху вниз) резонансного соотношения Φ_4 и критического аргумента Φ_4

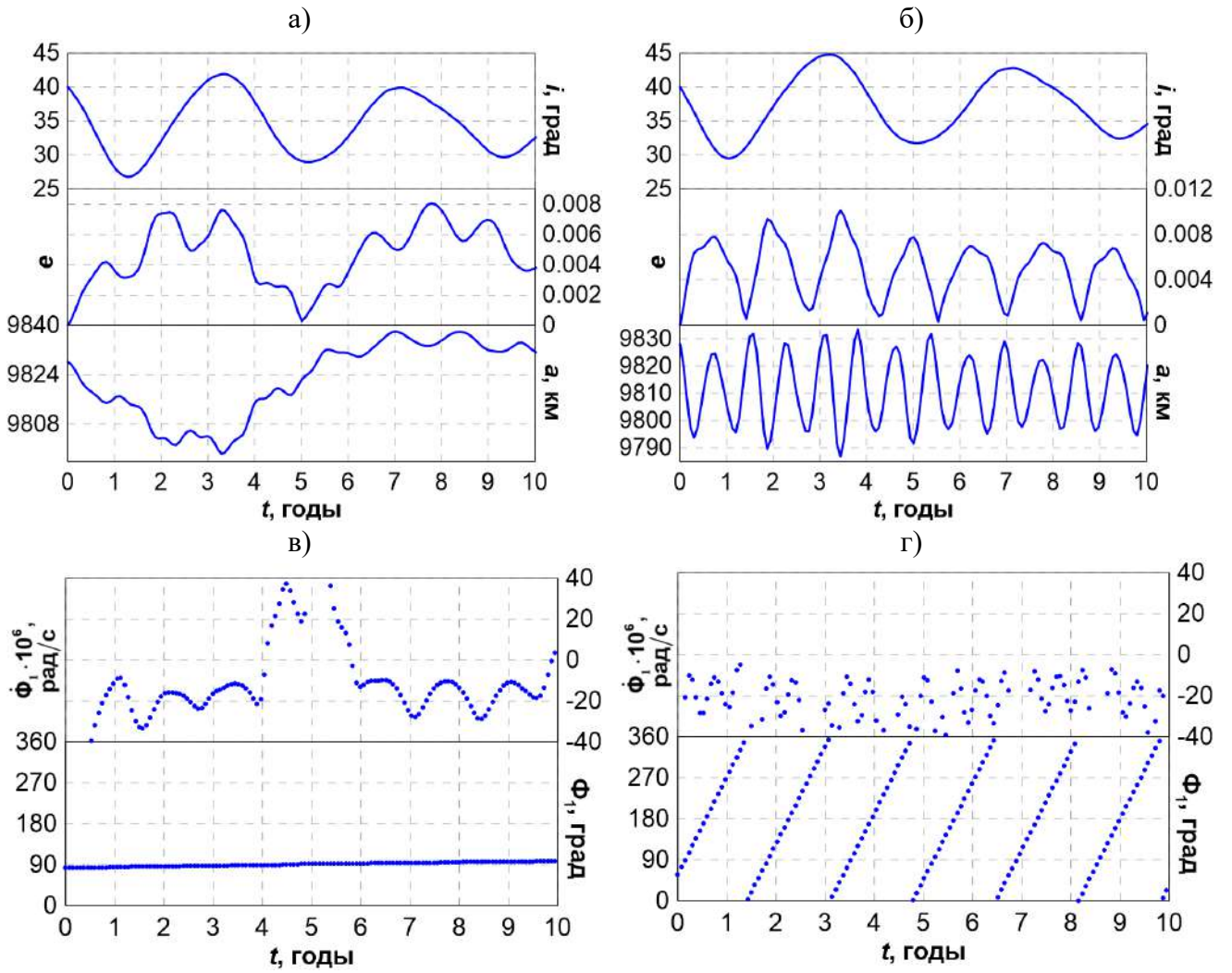


Рисунок А.3 — Сравнение орбитальной эволюции объектов, демонстрирующих наличие (объект на левой панели; $a = 9828.106$ км, $e = 0.0$, $i = 40^\circ$, $\Omega = 83^\circ$) и отсутствие (объект на правой панели; $a = 9828.106$ км, $e = 0.0$, $i = 40^\circ$, $\Omega = 58^\circ$) влияния мультиплета Φ_1 орбитального резонанса 1:27 на динамику ИСЛ. На графиках а), б) орбитальная эволюция (сверху вниз) элементов i , e , a ; в), г) эволюция (сверху вниз) резонансного соотношения $\dot{\Phi}_1$ и критического аргумента Φ_1

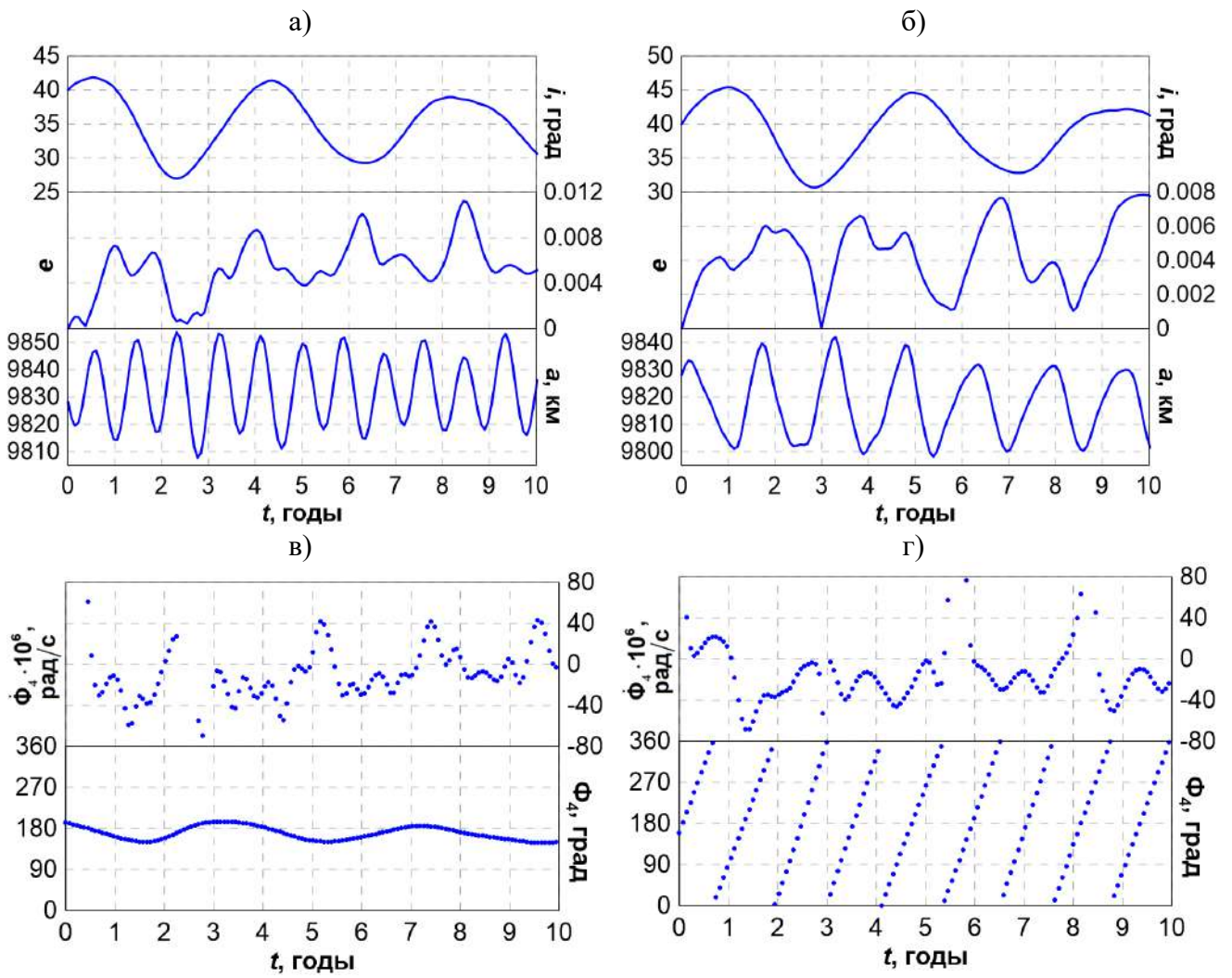
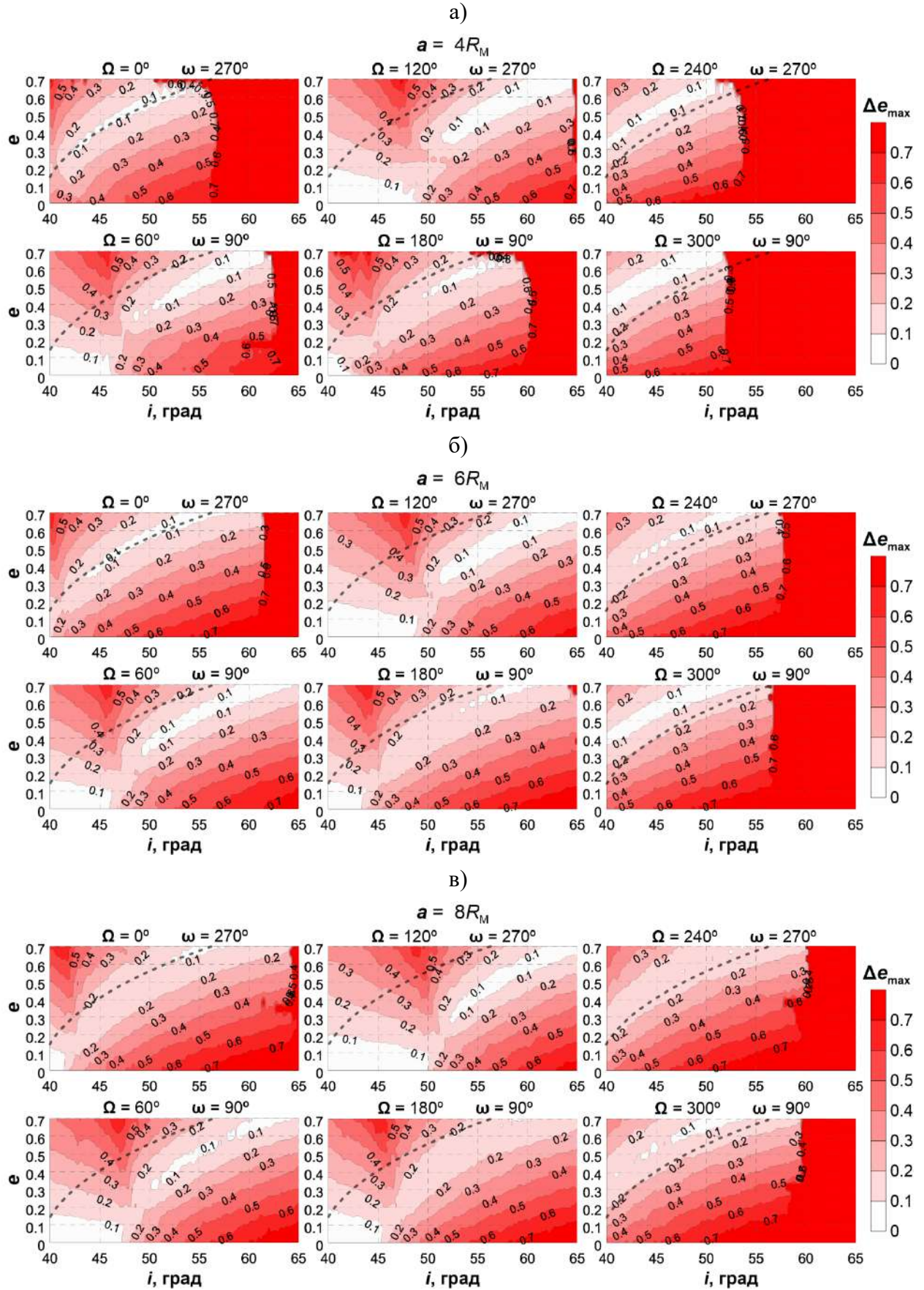


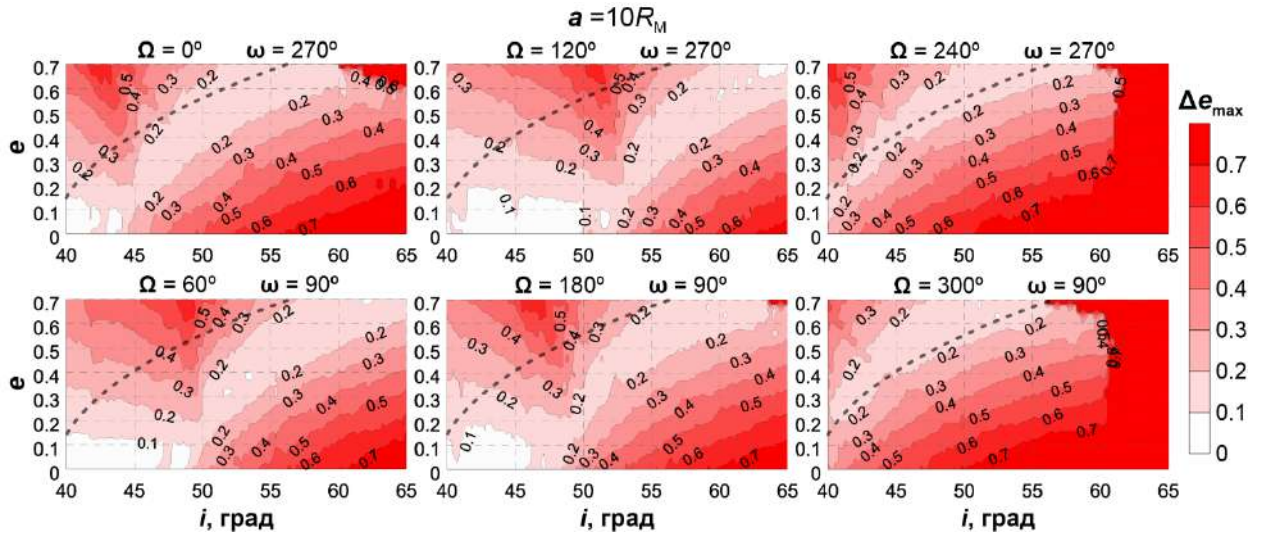
Рисунок А.4 — Сравнение орбитальной эволюции объектов, демонстрирующих наличие (объект на левой панели; $a = 9828.106$ км, $e = 0.0$, $i = 40^\circ$, $\Omega = 167^\circ$) и отсутствие (объект на правой панели; $a = 9828.106$ км, $e = 0.0$, $i = 40^\circ$, $\Omega = 200^\circ$) влияния мультиплета Φ_4 орбитального резонанса 1:27 на динамику ИСЛ. На графиках а), б) орбитальная эволюция (сверху вниз) элементов i , e , a ; в), г) эволюция (сверху вниз) резонансного соотношения $\dot{\Phi}_4$ и критического аргумента Φ_4

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Карты стабильности эксцентриситета и наклонения орбит лунной ГНСС



г)



д)

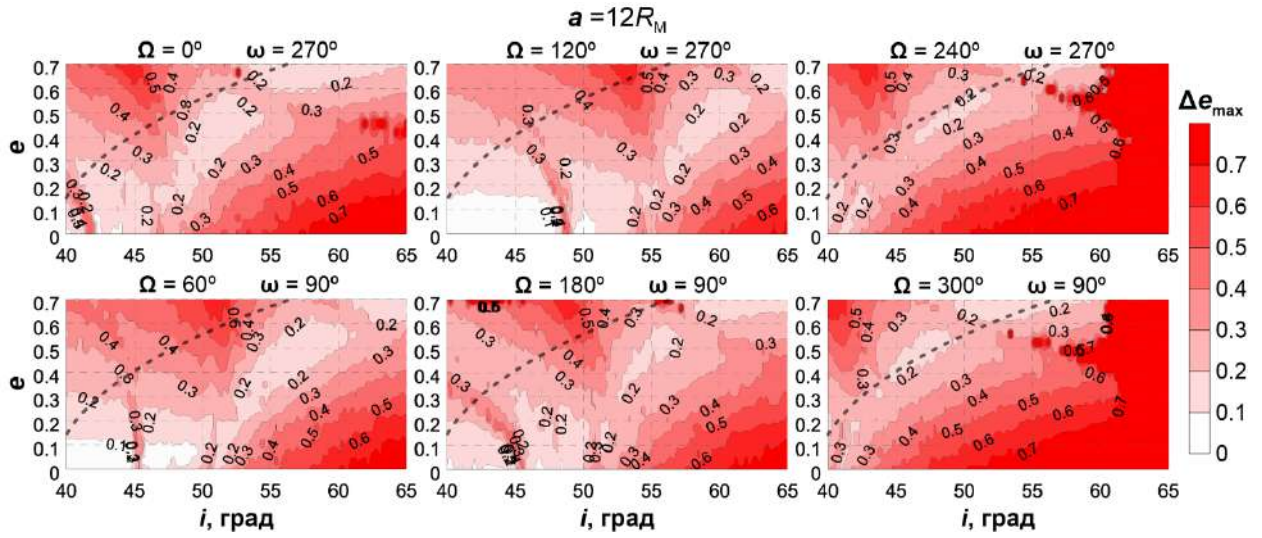
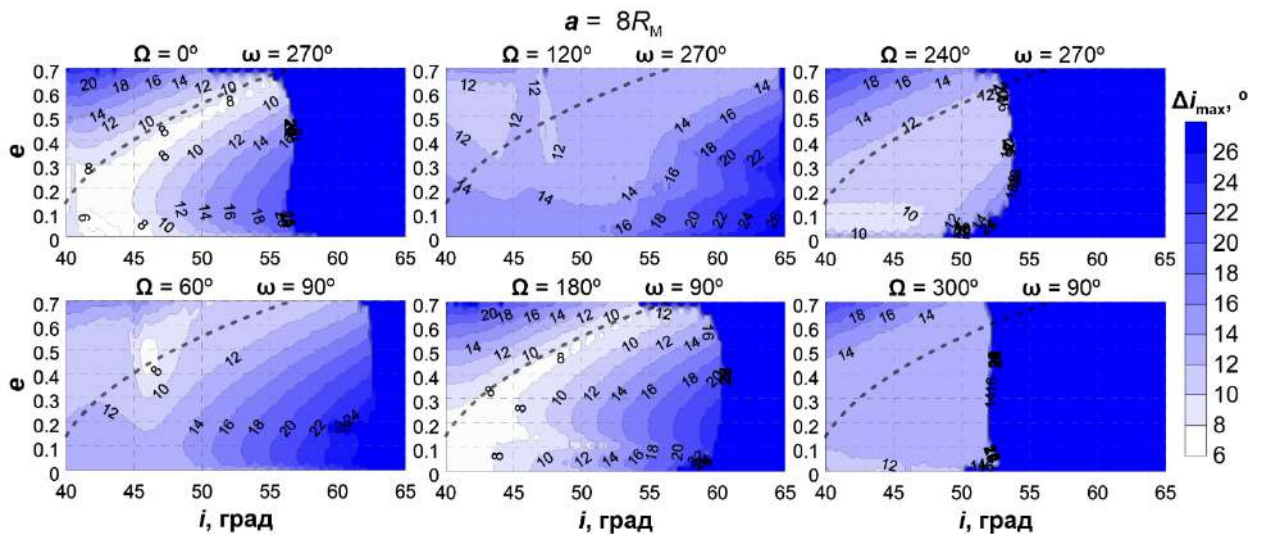


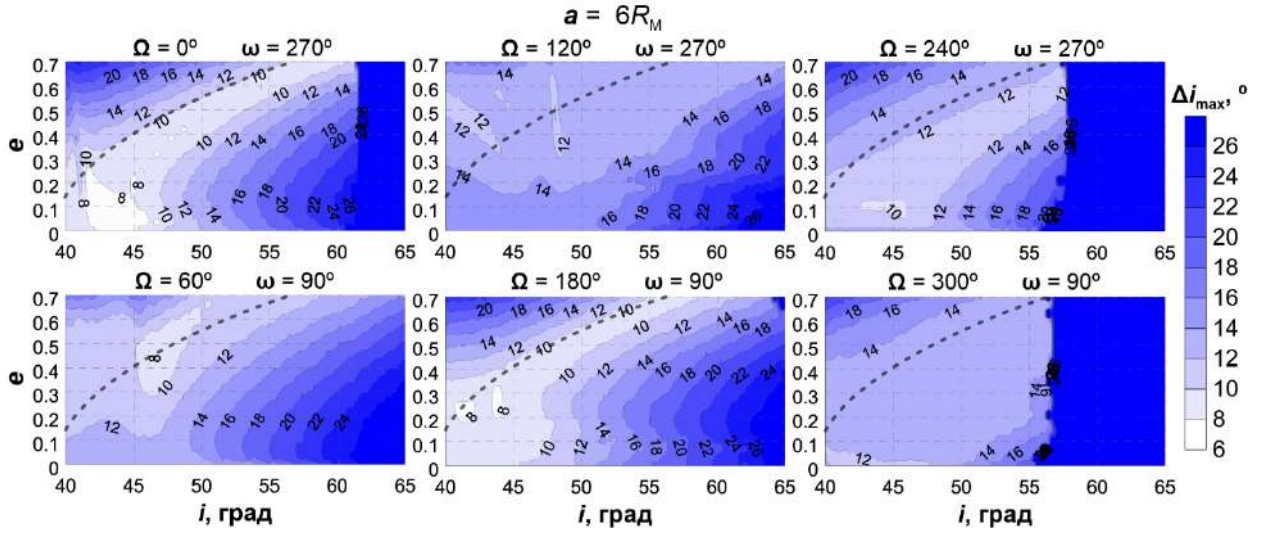
Рисунок Б.1 — Оценки максимальных амплитуд колебаний эксцентриситета, рассчитанных с использованием СК относительно лунного экватора и рассмотренных при a , равной:

а) $4R_M$, б) $6R_M$, в) $8R_M$, г) $10R_M$, д) $12R_M$

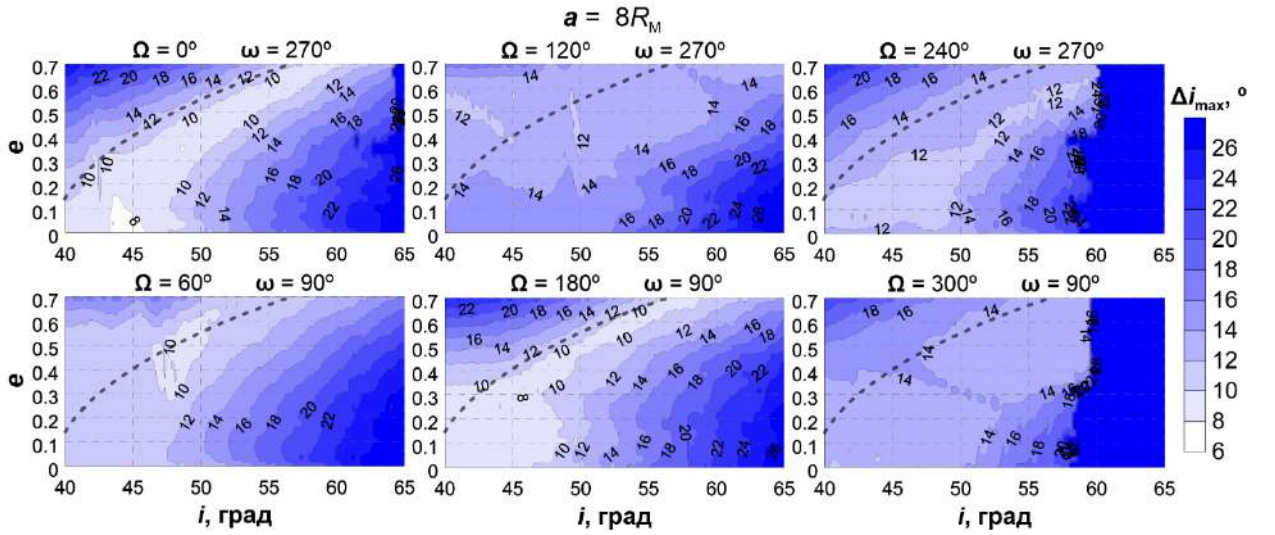
а)



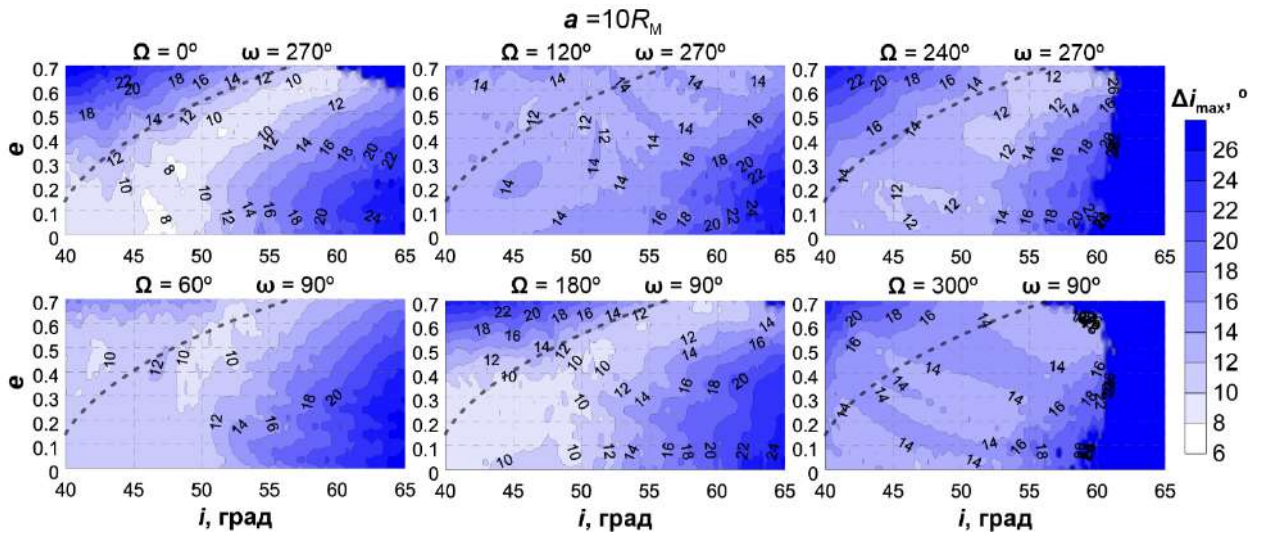
б)



в)



г)



д)

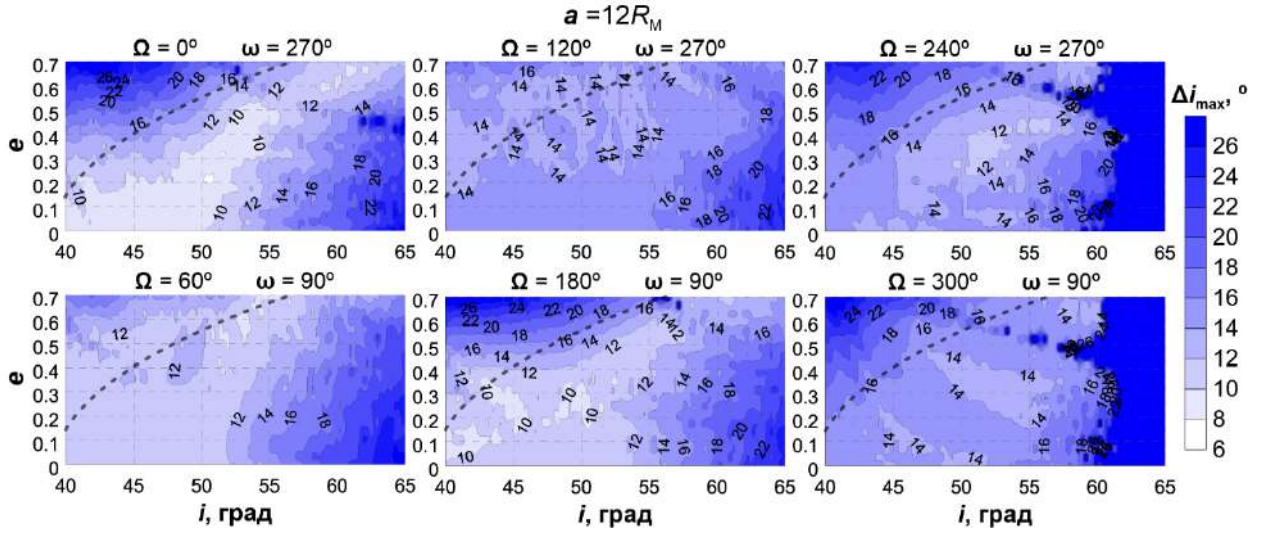
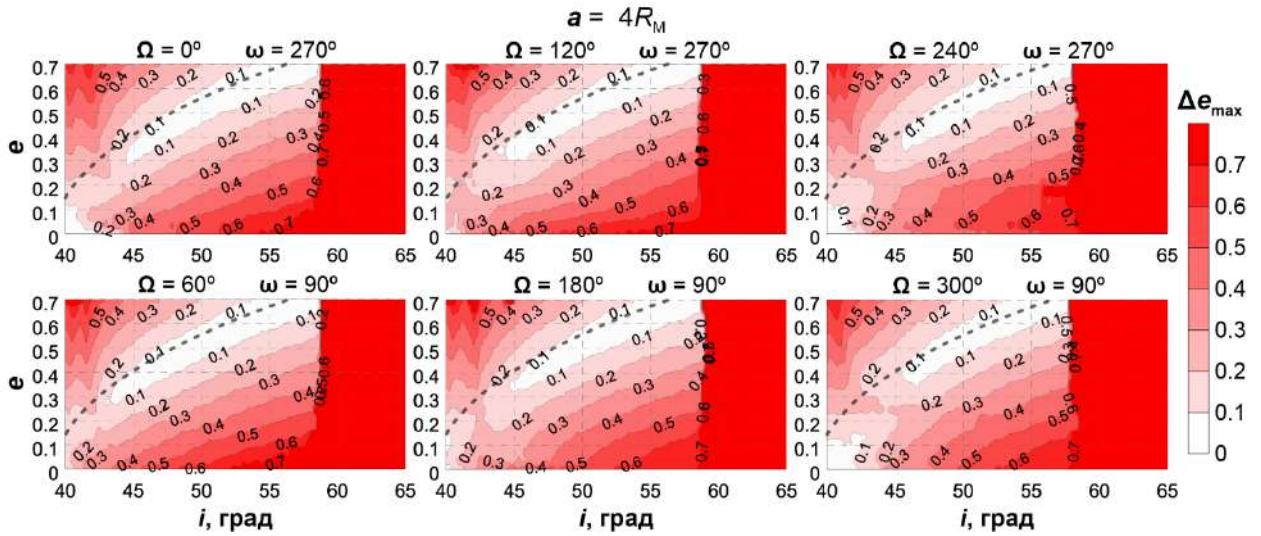


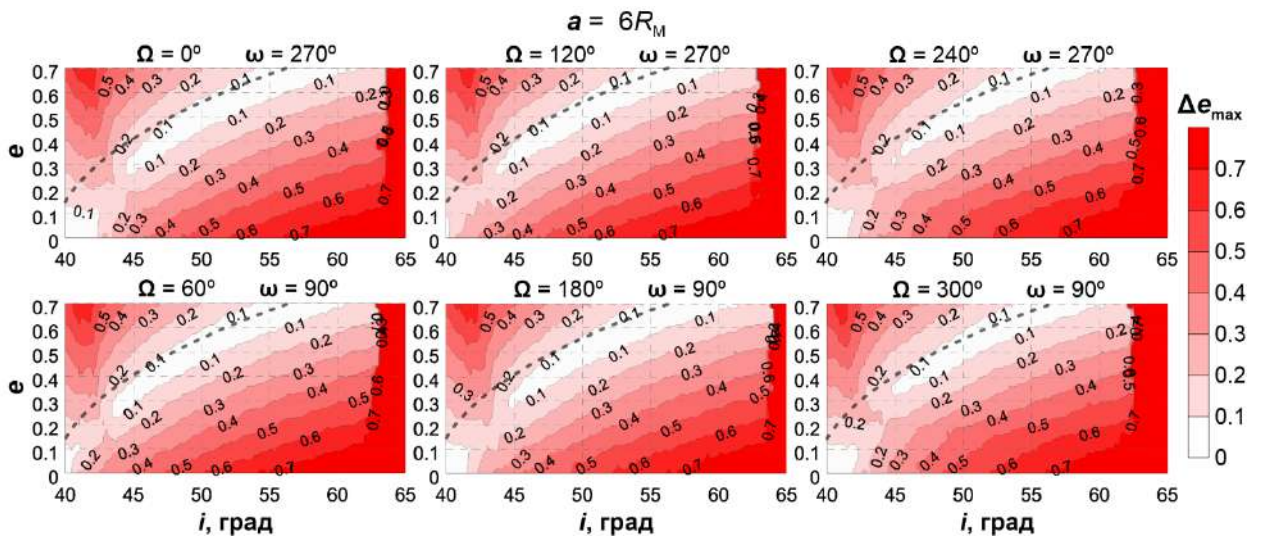
Рисунок Б.2 — Оценки максимальных амплитуд колебаний наклона, рассчитанных с использованием СК относительно лунного экватора и рассмотренных при a , равной:

а) $4R_M$, б) $6R_M$, в) $8R_M$, г) $10R_M$, д) $12R_M$

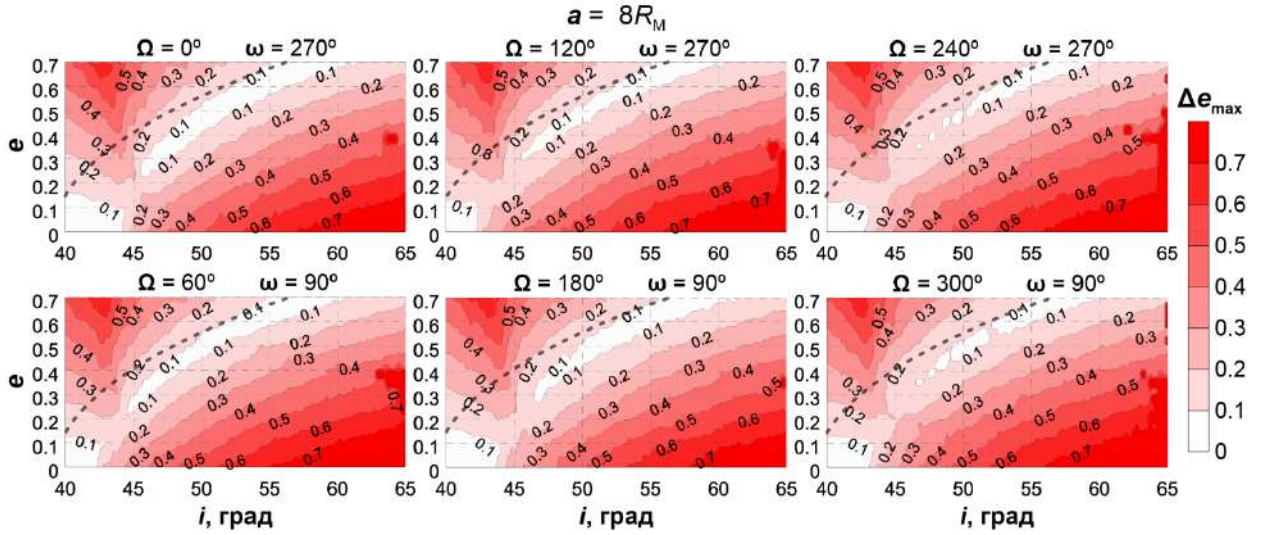
а)



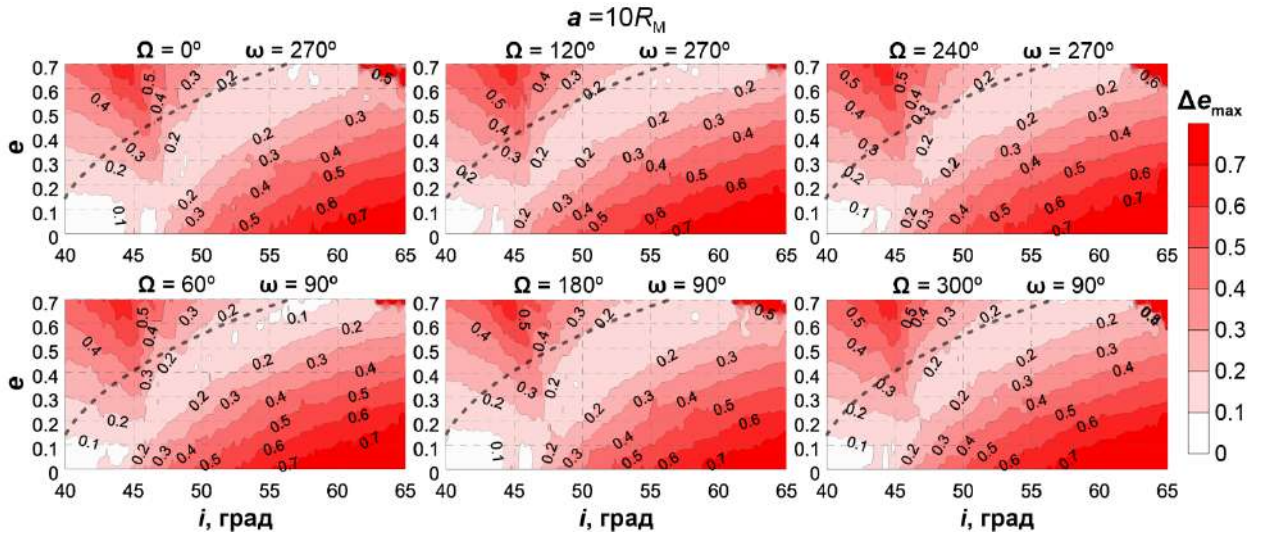
б)



В)



Г)



Д)

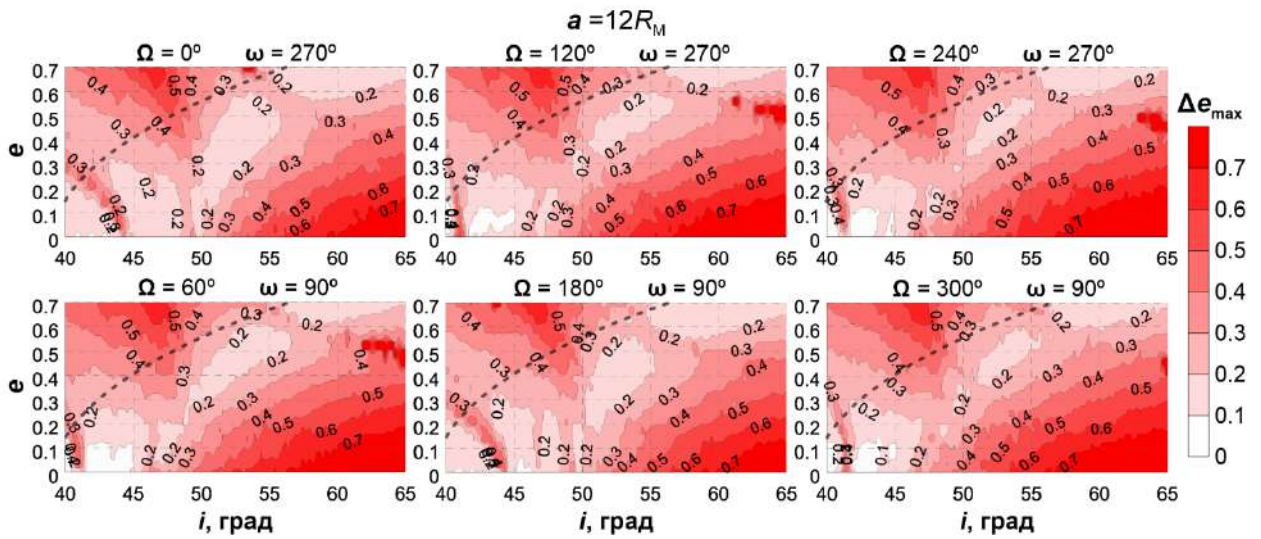
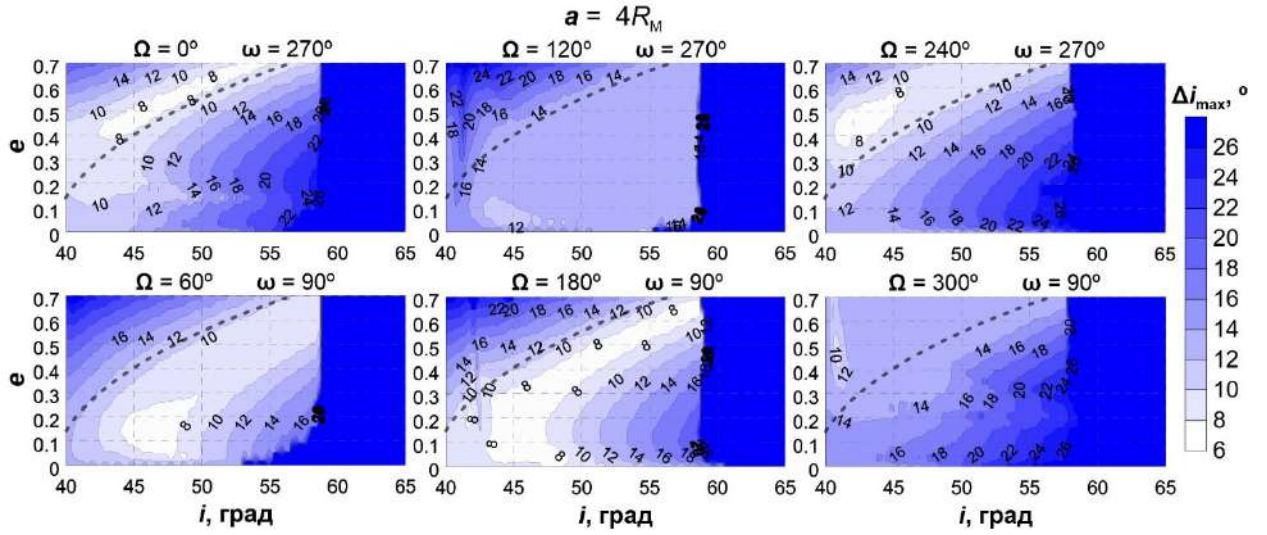


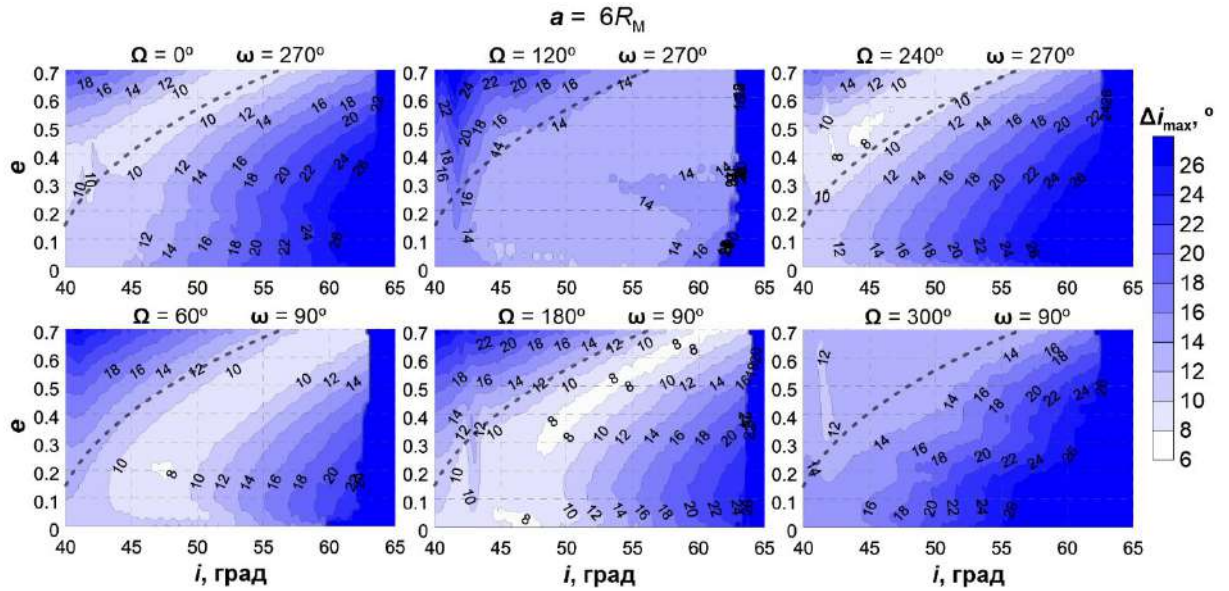
Рисунок Б.3 — Оценки максимальных амплитуд колебаний эксцентриситета, рассчитанных с использованием СК, связанной с плоскостью орбиты Земли и рассмотренных при a , равной:

а) $4R_M$, б) $6R_M$, в) $8R_M$, г) $10R_M$, д) $12R_M$

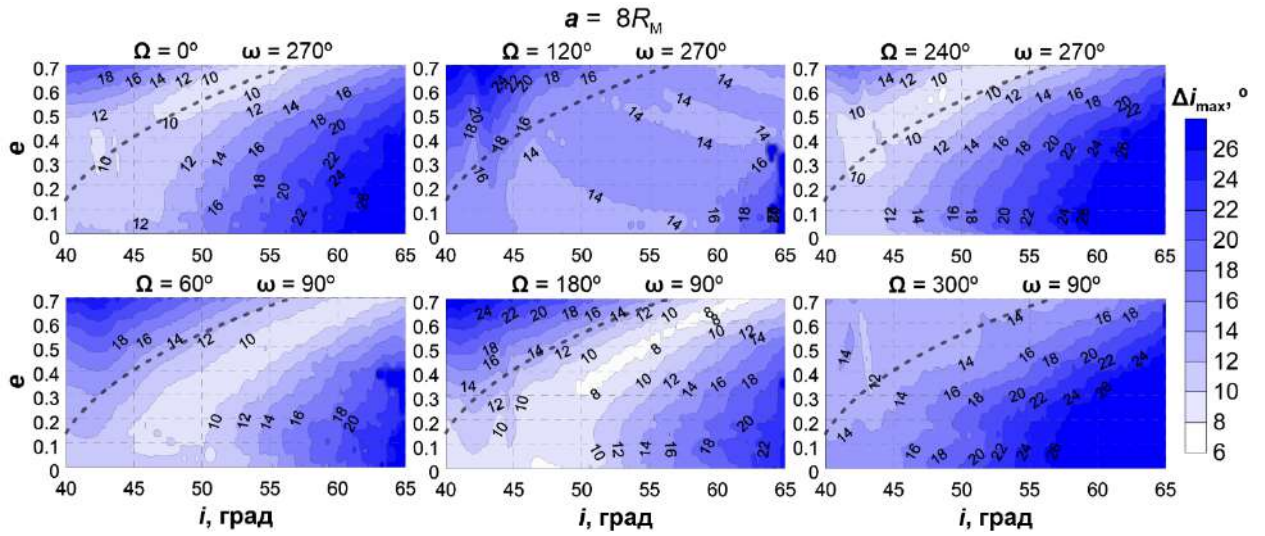
a)



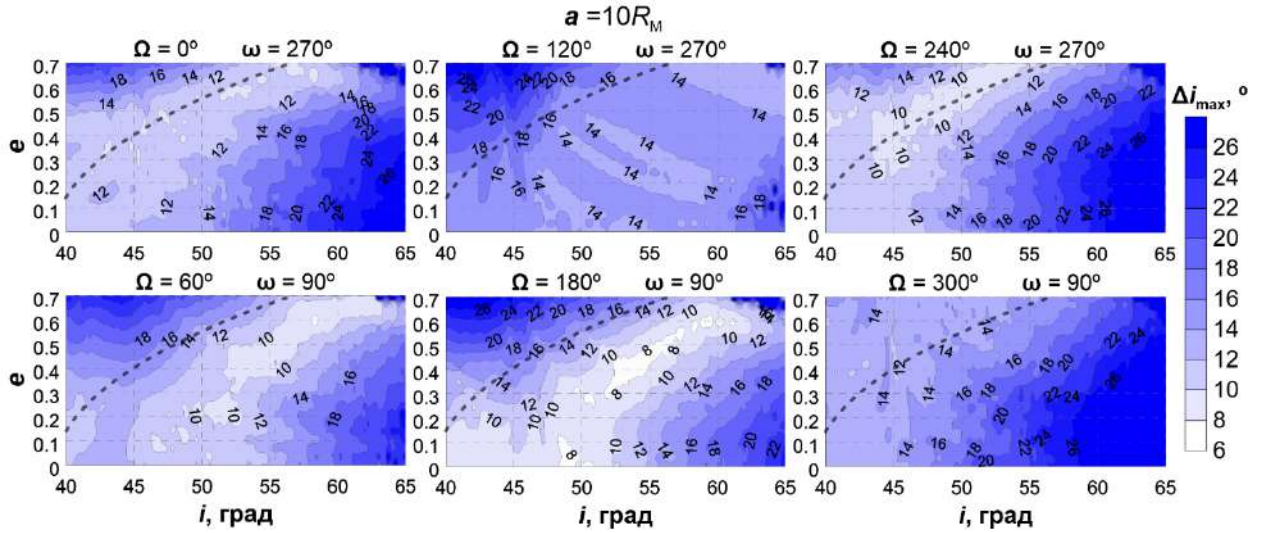
б)



в)



г)



д)

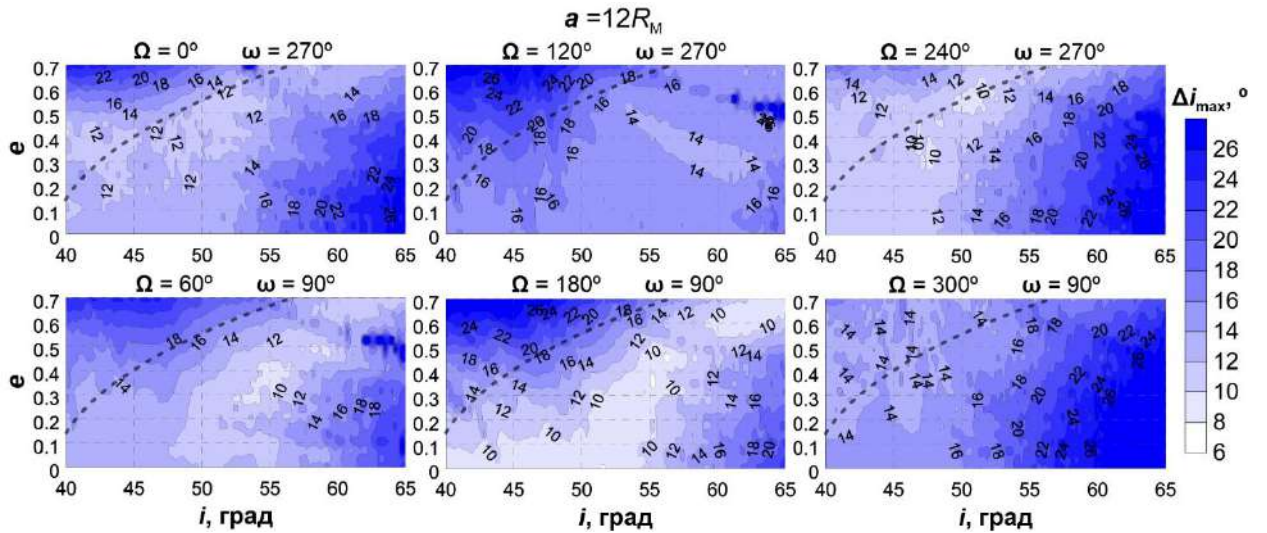


Рисунок Б.4 — Оценки максимальных амплитуд колебаний наклонения, рассчитанных с использованием СК, связанной с плоскостью орбиты Земли и рассмотренных при a , равной:

а) $4R_M$, б) $6R_M$, в) $8R_M$, г) $10R_M$, д) $12R_M$