

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Пустовойтов Сергей Евгеньевич

**ТОПОЛОГИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ СЛОЕНИЙ
ЛИУВИЛЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
КЛАССИЧЕСКИХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ**

1.1.3. Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Диссертация подготовлена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научные – руководители	Фоменко Анатолий Тимофеевич , доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН Ведюшкина Виктория Викторовна , доктор физико-математических наук
Официальные – оппоненты	Починка Ольга Витальевна , доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Нижегородский филиал, факультет ин- форматики, математики и компьютерных наук, кафедра фундаментальной математики, заведующий кафедрой Соколов Сергей Викторович , доктор физико-математических наук, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), кафедра теоретической ме- ханики, заведующий кафедрой Тюрин Николай Андреевич , доктор физико-математических наук, профессор, профессор РАН, Объединенный институт ядерных исследований (Дубна), ла- боратория теоретической физики имени Н.Н.Боголюбова, на- чальник сектора

Защита диссертации состоится «7» ноября 2025 г. в 18 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3557/>

Автореферат разослан «_____» октября 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук

В.А. Кибкало

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к области дифференциальной геометрии и топологии. Исследование диссертационной работы лежит на стыке теории слоений интегрируемых систем и математических билиардов. Автором решается задача об описании структуры слоения Лиувилля неособых трехмерных изоэнергетических многообразий и четырехмерных полулокальных особенностей классических интегрируемых билиардов, снабженных действием потенциала или магнитного поля. Более точно, исследование посвящено пяти сюжетам: 1. топология слоения Лиувилля плоских билиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик и снабженных упругим потенциалом Гука; 2. топология слоения эллиптического билиярда, снабженного полиномиальным потенциалом; 3. слоение четырехмерных окрестностей слоев, содержащих невырожденную точку ранга 0 или вырожденную орбиту, для эллиптического билиярда с потенциалом малой степени; 4. реализация произвольной полулокальной особенности типа фокус-фокус с помощью билиардных книжек, снабженных потенциалом Гука; 5. топология слоения Лиувилля магнитных топологических билиардов. Результаты, полученные в работе, описаны в терминах атомов и инвариантов Фоменко–Цишанга, изложенных в книге А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко¹ и опираются на методы изучения слоений вполне интегрируемых систем.

Под понятием математического билиярда стоит обширный класс динамических систем. Классическое определение гласит, что математический билиард есть динамическая система, описывающая движение материальной точки по инерции в плоской области, ограниченной некоторым контуром, с абсолютно упругим отражением от границы. Одним из примеров служит билиард в прямоугольнике, хорошо известный по одноименной игре. Другим примером служит классический билиард, ограниченный эллипсом, который известен со времен Биркгофа². Такой билиард может быть рассмотрен как предельный переход задачи Якоби о геодезических на трехосном эллипсоиде при устремлении одной из полуосей к нулю. Таким образом, в частности, была показана интегрируемость билиярда Биркгофа. В явном виде его гамильтониан и дополнительный первый интеграл были предложены, например, В. В. Козловым и Д. В. Трещевым в книге³. Также отметим, что интегрируемость непосредственно связана с теоремой Якоби–Шаля о системе касательных квадрик для геодезического потока на n -мерном эллипсоиде. Исходя из своих наблюдений, Биркгоф выдвинул гипотезу, согласно которой билиарды, ограниченные гладким выпуклым контуром, являются интегрируемыми только в случае эллипса. В своей исходной формулировке вопрос остается открыт, однако были достигнуты значительные продвижения. Так, в случае, когда первые интегралы имеют форму многочленов, гипотеза была доказана А. А. Глущоком в рабо-

¹А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*. Том I, II—Ижевск: РХД, 1999.

²Дж. Биркгоф *Динамические системы* М.; Л.: Гостехиздат, 1941.

³В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991.

те⁴. В. Калашин и А. Соррентино в работе⁵ показали, что малые интегрируемые возмущения граничного эллипса также должны быть эллипсами (т.е. доказана локальная гипотеза). Биллиард Биркгофа был изучен с самых разных точек зрения. Его динамика была описана в уже упомянутой книге В. В. Козлова и Д. В. Трещева, где были изучены регулярные траектории, а также показана устойчивость критических движений. С точностью до лиувиллевой эквивалентности такой биллиард был изучен В. И. Драговичем и М. Раднович в работе⁶, где был построен инвариант Фоменко–Ципанга этой эквивалентности. В работе⁷ В. В. Ведюшкиной этот результат был продолжен до произвольного биллиарда, который ограничен кусочно-гладким контуром, образованным дугами софокусных эллипсов и гипербол и содержащий только углы излома $\frac{\pi}{2}$. Напомним, что две интегрируемые системы, ограниченные на трехмерные неособые уровни гамильтонианов, называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм этих уровней, сохраняющий структуру их слоений Лиувилля. Причем в регулярном случае почти все слои, являющиеся торами, нерезонансны, то есть любая траектория, лежащая на этом торе, есть его иррациональная обмотка. Лиувиллева эквивалентность есть эквивалентность замыканий почти всех решений уравнений Гамильтона, и, тем самым, слабее траекторной эквивалентности. Исследование диссертации лежит в области описания слоений Лиувилля биллиардов, и поэтому последние две работы представляют наибольший интерес.

С развитием теории математических биллиардов появилось множество новых конструкций и задач, расширяющих классическое понятие. Отметим конструкцию проективных биллиардов, введенную С. Л. Табачниковым в работе⁸, конструкцию биллиардов с проскальзыванием, введенную А. Т. Фоменко в работе⁹ и рассмотренную В. В. Ведюшкиной и В. Н. Завьяловым в работе¹⁰, биллиарды в пространстве Минковского, изученные Е. Каргиновой в работе¹¹ с точки зрения лиувиллевой эквивалентности, и работу Г. В. Белозерова¹² по изучению трехмерных биллиардов. Особое внимание заслуживает конструкция биллиардной книжки, введенная В. В. Ведюшкиной в работе¹³. Биллиардная книжка представляет собой обобщение

⁴A. A. Glutsyuk, *On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature*, Journal of the European Mathematical Society, 2021. 23, No 3. 995–1049.

⁵V. Kaloshin, A. Sorrentino, *On the local Birkhoff conjecture for convex billiards*, Ann. of Math. 2018. 188, No1. 315–380.

⁶V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*, Regul. Chaotic Dyn., 14:4-5 (2009), 479-494.

⁷В. В. Фокичева, *Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.

⁸S. Tabachnikov, *Introducing projective billiards*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 17:4, 1997, pp. 957 - 976

⁹А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина, *Billiards with Changing Geometry and Their Connection with the Implementation of the Zhukovsky and Kovalevskaya Cases*// Russian Journal of Mathematical Physics – 2021 – Vol. 28 – p. 317-332

¹⁰В. В. Ведюшкина, В. Н. Завьялов, *Реализация геодезических потоков с линейным интегралом биллиардами с проскальзыванием*// Математический сборник – 2022 – Т. 213 вып. 12 – С. 31-52

¹¹Е. Е. Каргинова, *Слоение Лиувилля топологических биллиардов на плоскости Минковского*, Фундаментальная и прикладная математика. – 2019. – Т. 22, № 6. – С. 123-150

¹²Г. В. Белозеров, *Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве*, Математический сборник. – 2020. –Т. 211, № 11. – С. 3–40

¹³В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Биллиардные книжки моделируют все трехмерные би-*

ние классического понятия бильярда на движение по конечному клеточному комплексу. Материальная точка, двигаясь в двумерной клетке и попадая на ее границу, отражается и переходит на соседнюю клетку по заданному правилу. В частном случае, когда бильярдный комплекс является топологическим многообразием, эта конструкция называется топологическим бильярдом (впервые введена В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) в работе ¹⁴). В. В. Ведюшкиной и И. С. Харчевой в работе ¹⁵ было показано, что такие конструкции позволяют реализовать произвольную базу слоений Лиувилля, тем самым значительно расширяя класс интегрируемых бильярдов с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. Тем не менее, у бильярдных книжек все еще есть ограничения к реализации произвольного инварианта Фоменко–Цишанга. Для преодоления этих ограничений сделаем шаг назад и рассмотрим классические бильярды, добавив к ним интегрируемые возмущения. А именно, действие потенциала или магнитного поля.

Автором диссертации решается задача об описании структуры слоения Лиувилля интегрируемых возмущений классических бильярдов. Задача условно разделена на две части: описание слоения Лиувилля интегрируемых бильярдов, снабженных потенциалом, и бильярдов в магнитном поле. Первая часть диссертации посвящена потенциалу. С изучением классических систем возникает естественный вопрос: сохраняет ли добавление произвольного потенциала интегрируемость, например, классического бильярда Биркгофа. В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Так, де Коста, Деттманном и Леонелем в работе ¹⁶ было показано, что эллиптический бильярд, снабженный линейным потенциалом, имеет хаотическую динамику на некоторых уровнях полной энергии, то есть не является интегрируемым. Тем не менее, В. В. Козлов в статье ¹⁷ выявил критерий, согласно которому эллиптический бильярд имеет дополнительный первый интеграл определенного вида, если и только если потенциал удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных. Поиском решений этого уравнения занимался В. И. Драгович. Так, в статье ¹⁸ он описал решение в классе полиномов Лорана, а в ¹⁹ – в классе функций Аппеля. В частности, можно показать, что классический упругий потенциал Гука также является решением уравнения Козлова, то есть является интегрируемым. С точки зрения лиувиллевой эквивалентности бильярд Биркгофа, снабженный таким потенциалом, был изучен И. Ф. Кобцевым в статье ²⁰. В диссертации этот результат был продолжен в двух направлениях: 1. была изучена

фуркации интегрируемых гамильтоновых систем, Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56

¹⁴В. В. Фокичева, *Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, // Математический сборник – 2015 – Т. 206 вып. 10 – С. 127–176.

¹⁵В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб., 212:8 (2021), 89–150

¹⁶D. R. da Costa, C. P. Dettmann, E. D. Leonel, *Circular, elliptic and oval billiards in a gravitational field*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, V. 22, Issues 1–3, May 2015, P. 731–746

¹⁷В. В. Козлов *Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде*, Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.

¹⁸V. I. Dragovich, *Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse*, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 62, No. 1, pp. 159–162, 1998

¹⁹Vladimir Dragovic, *The Appell hypergeometric functions and classical separable mechanical systems* 2002 J. Phys. A: Math. Gen. 35 2213

²⁰И. Ф. Кобцев, *Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ*, Матем. сб., 211:7 (2020), 93–120

топология слоения Лиувилля всех плоских эллипτικο-гиперболических билиардов, снабженных потенциалом Гука, на неособых уровнях энергии, и 2. изучена топология слоения эллиптического билиарда, снабженного произвольным полиномиальным интегрируемым потенциалом. Отметим, что все подобные билиарды принадлежат классу алгебраически разрешимых систем, изученных М. П. Харламовым в работе²¹. Следовательно, можно применять уже разработанные методы исследований.

Кроме того, интересен вопрос устройства слоения Лиувилля полулокальных особенностей билиардных систем. Отметим работы^{22,23}, в которых В. А. Кибкало и А. Т. Фоменко реализуют произвольную седловую особенность с помощью билиардных книжек, снабженных потенциалом Гука. В диссертации этот результат автором дополнен реализацией произвольной фокусной особенности также билиардными книжками с потенциалом Гука. Помимо этого, для эллиптических билиардов с потенциалом малой степени была описана топология слоения Лиувилля полулокальных особенностей, соответствующих точкам седло-седло или содержащих вырожденную орбиту.

Вторая часть диссертации посвящена интегрируемым билиардам в постоянном магнитном поле. Здесь также возникает аналогичный вопрос о сохранении интегрируемости классических билиардов. М. Робником и М. Берри в статье²⁴ было показано, что эллиптический билиард с разными полуосями, помещенный в постоянное магнитное поле, допускает хаотичную динамику при больших значениях энергии, то есть не является интегрируемым. В то же время известно, что магнитный билиард, ограниченный окружностью, уже является интегрируемым в силу симметрии относительно поворотов. Полный ответ на вопрос об интегрируемости магнитных билиардов был дан А. Е. Мироновым и М. Бялым в работе²⁵. Оказалось, что в случае выпуклой кусочно-гладкой границы интегрируемость достигается лишь для кругового билиарда. Таким образом, интегрируемыми оказываются лишь магнитные билиарды, ограниченные окружностью либо парой концентрических окружностей, и их траектории можно описать с помощью методов элементарной геометрии. Тем не менее, расширим класс магнитных билиардов, склеив из круговых и кольцевых столов топологический билиард, т.е. билиардную книжку, гомеоморфную ориентируемому двумерному многообразию. Сложность таких систем достигается за счет формы билиарда, а не из физики движения. В диссертации алгоритмически изучены такие билиарды с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

²¹М. П. Харламов *Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам*, Нелинейная динамика, 2010, том 6, №4, с.769-805.

²²А. Т. Fomenko, V. A. Kibkalo, *Saddle singularities in integrable Hamiltonian systems: Examples and algorithms*, In: Sadovnichiy, V.A., Zgurovsky, M.Z. (eds.): Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems, pp. 3–26. Springer, Cham (2021)

²³В. А. Кибкало, “Билиарды с потенциалом моделируют ряд четырехмерных особенностей интегрируемых систем”, Современные проблемы математики и механики, Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко, т. 2, МАКС Пресс, М., 2019, 563-566

²⁴M. Robnik and M. V. Berry *Classical billiards in magnetic fields*, 1985 J. Phys. A: Math. Gen. 18 1361

²⁵М. Bialy, A. E. Mironov, *Algebraic non-integrability of magnetic billiards*, J. Phys. A, 49:45 (2016), 455101, 18 pp.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются плоские интегрируемые математические билиарды в потенциальном или магнитном поле, которые в рамках диссертации рассматриваются как вполне интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Предметом исследования является структура слоения Лиувилля таких билиардов, а также способы ее описания: инварианты Фоменко–Цишанга, бифуркационные диаграммы, а также разнообразные методы описания четырехмерных особенностей.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Описать структуру слоения Лиувилля плоских математических билиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол и снабженных упругим потенциалом Гаука. А именно, вычислить все инварианты Фоменко–Цишанга и построить бифуркационные диаграммы;
2. Определить класс полиномиальных потенциалов, сохраняющих интегрируемость классического эллиптического билиарда. Для такого билиарда вычислить инвариант Фоменко–Цишанга на произвольном неособом уровне энергии H , построить бифуркационные диаграммы и описать топологию неособого изоэнергетического многообразия Q^3 ;
3. Изучить особенности слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического билиарда, снабженного потенциалом малой степени. А именно, описать слоение в окрестности слоев, содержащих невырожденные точки ранга 0 или вырожденные орбиты;
4. Изучить особенности ранга 0 билиардных книжек, снабженных упругим потенциалом Гаука;
5. Описать слоение Лиувилля интегрируемых плоских билиардов в постоянном магнитном поле, а также слоение топологических магнитных билиардов. А именно, вычислить все инварианты Фоменко–Цишанга и построить бифуркационные диаграммы.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту.

1. Любая неособая изоэнергетическая поверхность Q^3 плоского билиарда, ограниченного дугами софокусных эллипсов и гипербол и снабженного упругим потенциалом Гаука, принадлежит одному из 18 различных классов лиувиллевой эквивалентности слоений Лиувилля.
2. Уравнение Козлова, задающее интегрируемые случаи билиарда с потенциалом, решено явно в классе полиномов. Общее решение взаимно однозначно определяется многочленом с вещественными коэффициентами.

3. Инвариант Фоменко–Цишанга интегрируемого эллиптического бильярда, снабженного полиномиальным потенциалом, строится алгоритмически, исходя из параметров системы и неособого значения энергии H . Причем граф инварианта обладает восьмью свойствами, а метки вычисляются явно.
4. Для эллиптического бильярда, снабженного интегрируемым потенциалом четвертой степени, существуют 18 неэквивалентных классов бифуркационных диаграмм. Эволюция бифуркационных диаграмм при росте значения $\frac{c_2}{c_3}$ зависит от соотношений на параметры a и b граничного эллипса и описывается эволюционными графами.
5. Вычисление типов слоений Лиувилля четырехмерных полулокальных особенностей для эллиптического бильярда с потенциалом четвертого степени.
 - Невырожденные особые точки ранга 0 имеют вид центр–центр, центр–седло либо седло–седло, а слоение Лиувилля в окрестности особого слоя имеет один из восьми типов.
 - Вырожденные орбиты ранга 1 потока первых интегралов принадлежат параболическому случаю, либо эллиптическому или гиперболическому удвоению периода. Слоение Лиувилля в окрестности слоев, содержащих вырожденные орбиты, имеет один из шести выявленных типов.
6. Числовая метка монодромии особенности в прообразе точки $(0, 0)$ равна n для бильярдной системы с отталкивающим потенциалом Гука на бильярдной книжке, склеенной из n экземпляров стола D плоского бильярда внутри круга по перестановке $(1, 2, \dots, n)$ на их окружности склейки.
7. Инвариант Фоменко–Цишанга интегрируемого топологического бильярда, склеенного из плоских магнитных бильярдов, строится алгоритмически, исходя из параметров системы и неособого значения энергии H . Причем граф инварианта обладает четырьмя свойствами, а метки вычисляются явно, исходя из топологического типа бильярда.
8. Список интегрируемых систем физики и механики, лиувиллево эквивалентных бильярдам, классифицированных в диссертации, состоит из интегрируемых случаев динамики твердого тела и геодезических потоков на поверхностях вращения с потенциалом.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются оригинальными, получены автором самостоятельно или при равноценном вкладе с соавторами, и заключаются в следующем:

1. Получен список из 18 инвариантов Фоменко–Цишанга, соответствующих математическим бильярдам, ограниченным дугами софокусных эллипсов и гипербола, снабженных упругим потенциалом Гука. Вместе с этим, построены бифуркационные диаграммы таких бильярдов, а также установлены лиувиллево эквивалентные им системы динамики твердого тела.

2. В явном виде найден класс полиномиальных потенциалов, сохраняющих интегрируемость классического бильярда, ограниченного эллипсом.
3. Для интегрируемого эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом были получены неявные формулы бифуркационных кривых, а также построен алгоритм, вычисляющий инвариант Фоменко–Цишанга на произвольном неособом уровне энергии H . Кроме того, было показано, что неособое изоэнергетическое многообразие Q^3 такого бильярда гомеоморфно либо трехмерной сфере, либо связной сумме декартовых произведений окружности на двумерную сферу.
4. В случае бильярда с потенциалом, степень которого не превосходит четырех, был получен список из 18 неэквивалентных бифуркационных диаграмм, а также описана их эволюция при изменении параметров потенциала. Кроме того, для такого бильярда были изучены особенности слоения Лиувилля. Было показано, что невырожденные особые точки ранга 0 имеют вид центр-центр, центр-седло либо седло-седло, а слоение Лиувилля в окрестности особого слоя имеет один из восьми типов. Слоение Лиувилля в окрестности слоев, содержащих вырожденные орбиты, имеет один из шести выявленных типов.
5. Реализована произвольная фокальная особенность с помощью бильярдных книжек, склеенных из круговых бильярдов, снабженных центральным отталкивающим потенциалом Гука. Количество листов книжки при этом должно совпадать с меткой монодромии особенности.
6. Изучено слоение Лиувилля интегрируемых плоских бильярдов в постоянном магнитном поле, а также слоение их обобщений – ориентируемых топологических магнитных бильярдов. А именно, был построен алгоритм, определяющий по форме топологического бильярда соответствующий ему инвариант Фоменко–Цишанга, и обратный алгоритм, строящий топологический бильярд по инварианту.

Методология и методы исследования

В диссертации применяются методы и результаты теории интегрируемых систем и топологических инвариантов слоений Лиувилля, разработанной А. Т. Фоменко, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым, С. В. Матвеевым, Н. Зунгом, Л. М. Лерманом и другими. Непосредственное значение имеет метод областей возможного движения, разработанный М. П. Харламовым, а также методы работы с математическими бильярдами, разработанные В. В. Ведюшкиной.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Метод областей возможного движения, адаптированный для рассмотренных в диссертации систем, может быть использован для дальнейшего изучения топологии слоений Лиувилля бильярдов и их обобщений. Например, ведется работа по обобщению результатов, полученных автором в главах 3 и 4 диссертации, от случая потенциалов четвертой степени

до случая произвольного полиномиального потенциала, а также для произвольного эллиптического-гиперболического стола. Полученные результаты уже показывают большой скачок в разнообразии особенностей слоения при переходе от упругого потенциала второй степени к четвертой, и это разнообразие будет расти квадратично.

Кроме того, рассмотренные автором модификации классических бильярдов с добавлением потенциального или магнитного поля можно комбинировать с другими уже хорошо изученными бильярдными конструкциями, такими как бильярдные книжки. Полученные комбинированные системы сильно расширяют динамику, а значит и структуру слоений Лиувилля. Примером такой комбинации можно привести результат А. Т. Фоменко и В. А. Кибкало о реализации произвольной седловой особенности бильярдными книжками, снабженными упругим потенциалом Гука. Комбинирование бильярдных систем значительно расширяет их класс, что дает надежду на доказательство гипотезы А. Т. Фоменко о реализации любого класса лиувиллевой эквивалентности интегрируемыми бильярдами.

В дополнении упомянем недавно обнаруженную связь уравнений разделения, приведенных автором в главе 3 диссертации, с уравнением Кортвега–де Фриза и его решениями. Это позволит, с одной стороны, применять методы теории решений КдФ для бильярдов, и, с другой стороны, применять наглядность динамики бильярдов для описания решений КдФ.

Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация диссертации

Результаты диссертации опубликованы в семи статьях в журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней МГУ, а также прошли апробацию на следующих международных и российских конференциях:

- Студенческая школа-конференция «Математическая весна» 2023, НИУ ВШЭ Нижний Новгород, Россия, 27-30 марта 2023 с докладом “Топология особенностей эллиптического бильярда в потенциальном поле”;
- Dynamics in Siberia 2023, Новосибирск, Россия, 27 февраля - 4 марта 2023 с докладом “Structure of semilocal singularities of an elliptic billiard in a polynomial potential field”;
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2023», МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 10-21 апреля 2023 с докладом “Полулокальные особенности эллиптического бильярда с потенциалом малого порядка”;

- Международная конференция “Лобачевские чтения”, г. Казань, Россия, 30 июня - 4 июля 2022 с докладом “Слоение Лиувилля эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом”;
- Научная школа “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, Воронеж, 14 - 15 ноября 2022 с докладом “Исследование особенностей слоения Лиувилля эллиптического бильярда с потенциалом малого порядка”;
- Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2022, Воронеж, Россия, 22 - 26 января 2022 с докладом “Интегрируемый топологический бильярд в магнитном поле”;
- Dynamics in Siberia-2022, Новосибирск, НГУ, институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия, 28 февраля-5 марта 2022 с докладом “Topology of the Liouville foliation of an integrable magnetic billiard”;
- V-ая Международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», Воронежский государственный педагогический университет, 15-17 ноября 2021 с докладом “Монодромия особенности типа фокус-фокус бильярда в потенциальном поле”;
- Международная конференция “Классическая и современная геометрия”, Московский педагогический государственный университет, 1-4 ноября 2021 с докладом “Реализация особенностей фокус-фокус бильярдами книжками”;
- The third International Conference on “Integrable Systems and Nonlinear Dynamics 2021”, Ярославский государственный университет, Ярославль, 4-9 октября 2021 с докладом “Monodromy of the focus-focus point of the circular billiard in the potential field”;
- Конференция международных математических центров мирового уровня, математический центр Sirius, Сочи, 9-13 августа 2021 с докладом “Исследование слоения Лиувилля топологических магнитных бильярдов”;
- XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2021”, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 12-23 апреля 2021 с докладом “Интегрируемый бильярд в эллипсе в потенциальном поле высокой степени”;
- Student Educational School-Conference Mathematical Spring 2021 Invitation to Dynamical Systems, National Research University Higher School of Economics, Россия, 30 марта - 2 апреля 2021 с докладом “Topology of the Liouville foliation of an integrable magnetic billiard”;
- Ломоносовские чтения 2020, Москва, Россия, 19-28 октября 2020 с докладом “Интегрируемый бильярд в эллипсе с полиномиальным потенциалом малого порядка”;

- Workshop on Mathematical Billiards: 2019, Сидней, Австралия, 24-27 июня 2019 с докладом “Integrable Planar Billiards with Potential”;

Также результаты излагались на известных научных семинарах:

- “Современные геометрические методы” под руководством профессора А. С. Мищенко и академика А. Т. Фоменко в МГУ (неоднократно в 2020–2024 годах),
- Семинар кафедры “Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством академика А. Т. Фоменко в МГУ (неоднократно с 2020 по 2025 год),
- Заседание Нижегородского математического общества под руководством профессора О. В. Починки, НИУ ВШЭ Нижний Новгород, 19 марта 2025

Публикации автора по теме работы

Основные результаты диссертации представлены в 7 работах в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология и индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus, RSCI и РИНЦ.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения, пяти глав, списка литературы и заключения. Текст диссертации изложен на 207 страницах и содержит 178 иллюстраций. Список литературы содержит 43 наименования.

Краткое содержание работы

Во **введении** излагаются цели работы, ее результаты и краткое содержание. Также приведена краткая история развития теории математических бильярдов и контекст диссертационного исследования в ней.

Первая глава посвящена основным положениям теории интегрируемых систем и математических бильярдов. Бильярд, заданный в плоской замкнутой области $\mathcal{B}$, рассматривается как гамильтонова система на фазовом пространстве $M^4 = \{(\mathbf{x}, p) : \mathbf{x} \in \mathcal{B}, p \in T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^2\} / \sim$, где отношение эквивалентности $(\mathbf{x}_1, p_1) \sim (\mathbf{x}_2, p_2)$ подчиняется закону отражения на границе бильярда. Иными словами, точки $(\mathbf{x}_1, p_1)$ и $(\mathbf{x}_2, p_2)$ объявляются эквивалентными, если $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \in \partial\mathcal{B}$, а импульсы p_1 и p_2 переходят друг в друга при абсолютно упругом отражении в точке $\mathbf{x}_1$. Симплектическая структура ω на M^4 полагается канонической. Гамильтонианом такой системы является полная механическая энергия $H(\mathbf{x}, p) = |p|^2/2 + W(\mathbf{x}, p)$, где W есть потенциал. Функция H сохраняется на всех траекториях бильярда в силу абсолютной упругости отражения, и, следовательно, является *первым интегралом*. В случае, если существует еще одна функция $F(\mathbf{x}, p)$, функционально независимая с H почти всюду и сохраняющаяся вдоль траекторий системы, бильярд $\mathcal{B}$ будем называть *вполне интегрируемым по Лиувиллю* (или просто *интегрируемым*). Предметом изучения диссертации является *слоение Лиувилля* таких бильярдов, то есть слоение фазового пространства M^4 на совместные поверхности уровней первых интегралов $T_{h,f} = \{(\mathbf{x}, p) \in M^4 : H(\mathbf{x}, p) = h, F(\mathbf{x}, p) = f\}$.

Определение. *Отображением момента* называется отображение $\mathcal{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\mathcal{F}(\mathbf{x}, p) = (H(\mathbf{x}, p), F(\mathbf{x}, p))$. *Бифуркационной диаграммой* $\Sigma(\mathcal{F})$ называется образ всех особых точек отображения момента (точек, в которых дифференциалы dH и dF линейно зависимы).

Для гладких вполне интегрируемых систем с двумя степенями свободы справедлива известная *теорема Лиувилля*, локально описывающая слоение в регулярном случае.

Теорема 1.3 (Лиувилль). *Пусть на M^4 задана вполне интегрируемая система с гамильтонианом H . Пусть значение интегралов $H = h$, $F = f$ не принадлежит бифуркационной диаграмме, то есть слой $T_{h,f}$ регулярный. Рассмотрим компактную связную компоненту $\hat{T}$ этого слоя. Тогда:*

1. $\hat{T}$ диффеоморфно двумерному тору T^2 (этот тор называется *тором Лиувилля*);
2. слоение Лиувилля в некоторой окрестности тора Лиувилля диффеоморфно прямому произведению тора на двумерный диск D^2 ;
3. в окрестности тора Лиувилля $T^2 \times D^2$ существуют координаты (s_1, s_2, t_1, t_2) (координаты действие-угол) такие, что $s_i = s_i(H, F)$, t_i — координаты на торе T^2 , и в этих координатах структура ω принимает канонический вид, а векторное поле $v = \text{sgrad}(H)$ выпрямляется.

Отметим, что эта теорема справедлива и в общем случае произвольного конечного количества степеней свободы. Однако, в приведенном определении билиардная система не является гладкой, но кусочно-гладкой. Гладкость нарушается в точках фазового пространства M^4 , соответствующих границе билиярда. Таким образом, теорему Лиувилля нельзя применять в ее исходной формулировке. Тем не менее будет показано, что ее утверждения справедливы для всех билиардных систем, рассмотренных в диссертации, т.е. будет доказан кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля в каждом конкретном случае.

Важнейшим понятием теории интегрируемых систем с двумя степенями свободы является понятие *лиувиллевой эквивалентности* двух систем. Ограничим систему на поверхность уровня гамильтониана $Q_h^3 = \{(\mathbf{x}, p) \in M^4 : H(\mathbf{x}, p) = h\}$. Потребуем, чтобы эта поверхность была компактной и неособой, т.е. $\forall (\mathbf{x}, p) \in Q_{h_0}^3 : dH(\mathbf{x}, p) \neq 0$. Полученное трехмерное многообразие называется *изоэнергетическим*.

Определение. *Вполне интегрируемые системы $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, F_2)$, ограниченные на неособые изоэнергетические многообразия Q_1^3 и Q_2^3 соответственно, называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, который переводит слои одного слоения Лиувилля в слои другого слоения, при этом сохраняющий ориентацию как самих изоэнергетических многообразий, так и ориентацию критических окружностей (заданных потоками гамильтонианов).*

Иными словами, эквивалентными называются системы, имеющие одну и ту же структуру слоения Лиувилля на неособых изоэнергетических многообразиях. Ин-

вариантом такой эквивалентности служит инвариант Фоменко–Цишанга, или меченая молекула. Он представляет собой граф – базу слоения Лиувилля, – вершинам которого сопоставлены 3-атомы, то есть классы лиувиллевой эквивалентности расслоенных окрестностей нерегулярных слоев. Кроме того, построенный граф снабжен числовыми метками r , ε и n , задающими диффеоморфизм склейки торov Лиувилля из окрестностей смежных 3-атомов. Подробнее об инварианте Фоменко–Цишанга и 3-атомах см. в книге А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко²⁶ и первой главе диссертации.

Построенный инвариант является полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности. Иными словами, справедлива теорема.

Теорема 1.7 (Фоменко–Цишанг). *Вполне интегрируемые системы $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, F_2)$, ограниченные на неособые изознергетические многообразия Q_1^3 и Q_2^3 соответственно, лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Классическим примером интегрируемого билиарда служит билиард Биркгофа, т.е. плоский билиард, ограниченный эллипсом. Дополнительный первый интеграл F приходит из геометрических соображений. А именно, все прямолинейные сегменты траектории касаются квадрики, софокусной с граничным эллипсом, а в качестве интеграла возьмем функцию Λ , равную параметру этой квадрики в однопараметрическом семействе. Для такого билиарда соответствующий инвариант Фоменко–Цишанга был построен В. И. Драговичем и М. Раднович в работе²⁷. Этот пример может быть расширен на любой плоский билиард, ограниченный дугами софокусных эллипсов и гипербол и содержащий углы излома $\frac{\pi}{2}$. Оказывается, та же самая функция Λ остается первым интегралом. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности были классифицированы В. В. Ведюшкиной в статье²⁸. Так же, как и в случае эллиптического билиарда, были построены все меченые молекулы для каждого билиарда. Сами плоские эллиптико-гиперболические билиарды в дальнейшем будем называть *элементарными*.

В работе²⁹ В. В. Ведюшкиной и И. С. Харчевой вводится понятие *билиардной книжки*. Рассмотрим несколько элементарных билиардов $B_1, \dots, B_n$, имеющих попарно совпадающие дуги границ, и склеим их вдоль этих дуг в один конечный двумерный CW -комплекс. Полученный комплекс $K = K_0 \cup K_1 \cup K_2$ назовем *билиардным комплексом*. Занумеруем двумерные клетки этого комплекса. Рассмотрим произвольную дугу склейки $e \in K_1$, входящую в границы клеток с номерами $i_1, \dots, i_k$, и сопоставим ей перестановку $\sigma_e = (i_1, \dots, i_k)$. Зададим билиардное движение следующим образом: при движении билиардного шара в клетке B_j он, попадая на дугу e , отражается от нее, переходя на следующую клетку $B_{\sigma_e(j)}$ согласно переста-

²⁶А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*. Том I, II— Ижевск: РХД, 1999.

²⁷V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*, Regul. Chaotic Dyn., 14:4-5 (2009), 479-494.

²⁸В. В. Фокичева, *Топологическая классификация билиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.

²⁹В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Билиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб., 209:12 (2018), 17-56

новке. Как было показано, такая билиардная система задает корректно определенную кусочно-гладкую интегрируемую систему. Так, И. С. Харчевой в работе³⁰ было показано, что пространство M^4 является топологическим кусочно-гладким многообразием, а функция Λ остается первым интегралом. В свою очередь, множество билиардных книжек заметно расширяет класс интегрируемых билиардов с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. Так, В. В. Ведюшкиной и И. С. Харчевой в работе³¹ было показано, что билиардными книжками можно реализовать любую наперед заданную грубую молекулу, то есть инвариант Фоменко–Ципанга без числовых меток. Более подробно про билиардные книжки см. в оригинальных работах В. В. Ведюшкиной и И. С. Харчевой и первой главе диссертации.

Дополнительно к вышесказанному, в первой главе освещается часть теории интегрируемых систем, посвященная четырехмерным особенностям слоения Лиувилля. Именно, обозначается понятие *невыврожденной особой точки ранга 0* интегрируемой системы, а также понятие *вырожденной орбиты ранга 1*. Приводится локальная структура слоения Лиувилля в окрестности точек типа центр-центр, центр-седло, седло-седло и фокус-фокус, а также конструкция *почти прямого произведения*, предложенная Н. Зунгом, как способ описания полулокальной структуры слоения. Кроме того, приведены типичные примеры вырожденных орбит потоков первых интегралов, появляющиеся в известных интегрируемых системах, и соответствующие им четырехмерные особенности.

Вторая глава диссертации посвящена изучению топологии слоения Лиувилля плоских эллиптико-гиперболических билиардов, снабженных потенциалом Гука. Исследование является идейным продолжением работы В. В. Ведюшкиной о классификации классических билиардов в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, и работы³² И. Ф. Кобцева о топологическом анализе билиарда в эллиптической области с упругим потенциалом. Более подробно, заострим внимание на двенадцати областях, приведенных на рис. 1. Список областей был получен

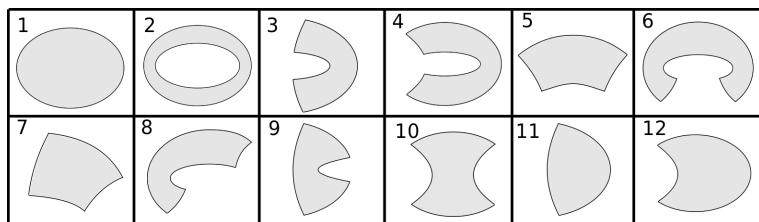


Рисунок 1 – Элементарные билиардные столы

на основе классификации В. В. Ведюшкиной, учитывая также пересечение области с осью, ортогональной к фокальной прямой. Гладкие дуги границ принадлежат софокусным эллипсам и гиперболам, заданным в декартовых координатах пара-

³⁰И. С. Харчева, *Изоэнергетические многообразия интегрируемых билиардных книжек*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 4 (2020), 12–22

³¹В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Билиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб., 212:8 (2021), 89–150

³²И. Ф. Кобцев, *Эллиптический билиард в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ*, Матем. сб., 211:7 (2020), 93–120

метрическим уравнением

$$x^2(b + \lambda) + y^2(a + \lambda) = (a + \lambda)(b + \lambda),$$

где $a > b > 0$ – параметры семейства, число λ – параметр квадрики. Также положим, что внешний граничный эллипс имеет параметр $\lambda = 0$. Зададим в таких областях билиардное движение материальной точки (в дальнейшем, билиардного шара), полагая, что на шар действует упругий потенциал Гука $W = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$, который притягивает или отталкивает его от центра координат. Продолжая устойчивую терминологию, будем называть такие билиарды *элементарными с потенциалом Гука*.

Рассмотрим их как гамильтоновы системы на своих четырехмерных фазовых многообразиях. Гамильтонианом таких систем является полная энергия, которая имеет вид

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2).$$

Как оказалось, заданные билиарды являются интегрируемыми. Впервые интегрируемость гармонического осциллятора внутри эллипса была показана Биркгофом, который свел аналогичную задачу на эллипсоиде, устремив одну из полуосей к нулю. Тем не менее, это справедливо и для любой из двенадцати приведенных областей.

Утверждение 2.1.1. *Элементарный билиард с потенциалом Гука, ограниченные софокусными эллипсами и гиперболами, допускает дополнительный первый интеграл вида*

$$F = \frac{p_x^2}{a} + \frac{p_y^2}{b} - \frac{(xp_y - p_xy)^2}{ab} + k\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)$$

Более того, было показано, что элементарные билиарды с потенциалом Гука являются алгебраически разрешимыми системами (термин, введенный М. П. Харламовым в работе³³). Это означает, что система редуцируется к системе уравнений разделения

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{\left(-\frac{k}{2}\lambda_1^2 + H\lambda_1 + F\right)(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)} \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{\left(-\frac{k}{2}\lambda_2^2 + H\lambda_2 + F\right)(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}, \end{cases}$$

где (λ_1, λ_2) задают эллиптические координаты, для которых гладкие сегменты границ билиардов лежат на координатных линиях. Следовательно, применим метод областей возможного движения, позволяющий изучать слоения Лиувилля интегрируемых систем с помощью проекций слоев на конфигурационное пространство переменных разделения.

Определение. Зафиксируем значения первых интегралов $H = h$ и $F = f$, то есть слой слоения Лиувилля. Областью возможного (допустимого) движения называется замыкание объединения всех билиардных траекторий, соответствующих

³³М. П. Харламов *Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приближения к классическим системам*, Нелинейная динамика, 2010, том 6, №4, с.769-805.

фиксированным значениям первых интегралов. Иными словами, это замкнутая область на бильярде, в которой бильярдный шар может находиться при фиксированных значениях интегралов h и f .

Очевидно, что любая область возможного движения есть образ слоя слоения Лиувилля при естественной проекции на бильярдный стол. Бифуркации торov Лиувилля задают бифуркацию областей возможного движения. И наоборот, из вида бифуркаций областей можно восстановить бифуркацию торov Лиувилля, то есть 3-атом. Из уравнений разделения следует, что область возможного движения определяется положением корней ξ и η многочлена $V(z) = -\frac{k}{2}z^2 + hz + f$ относительно значений hyp_1 , hyp_2 , ell_1 , $ell_2 = 0$, задающих параметры граничных дуг бильярда. Таким образом, топологический анализ слоения сводится к анализу поведения функций $\xi(h, f)$ и $\eta(h, f)$. Результатом этого анализа служат следующие две теоремы.

Теорема 2.4. *Бифуркационная диаграмма элементарного бильярда с потенциалом Гаука, ограниченного софокусными квадраками, имеет следующий вид.*

1. При $k > 0$ она включает в себя

- луч $f = -hyp_1h + \frac{k}{2}hyp_1^2$, где $h \geq \frac{k}{2}(hyp_1 + ell_1)$,
- дугу параболы $f = -\frac{h^2}{2k}$, где $h \in [k ell_1, 0]$,
- отрезок прямой $f = -ell_1h + \frac{k}{2}ell_1^2$, где $h \in [\frac{k}{2}(hyp_1 + ell_1), k ell_1]$,
- луч $f = 0$ при $h \geq 0$,
- луч $f = bh + \frac{k}{2}b^2$, где $h \geq \frac{k}{2}(-b + ell_1)$, если $ell_1 = -b$ или $hyp_2 = -b$.

2. При $k < 0$ она включает в себя

- луч $f = -hyp_1h + \frac{k}{2}hyp_1^2$, где $h \geq k hyp_1$,
- дугу параболы $f = -\frac{h^2}{2k}$, где $h \in [k hyp_2, k hyp_1]$,
- отрезок прямой $f = -hyp_2h + \frac{k}{2}hyp_2^2$, где $h \in [\frac{k}{2}hyp_2, k hyp_2]$,
- луч $f = 0$ при $h \geq \frac{k}{2}hyp_2$,
- луч $f = bh + \frac{k}{2}b^2$, где $h \geq \frac{k}{2}(-b + hyp_2)$, если $ell_1 = -b$ или $hyp_2 = -b$,
- отрезок $f = ah + \frac{k}{2}a^2$, где $h \in [-\frac{k}{2}a, -ka]$, если $hyp_1 = -a$.

Теорема 2.7. *Элементарным эллиптико-гиперболическим бильярдам с потенциалом Гаука соответствуют 18 различных классов лиувиллевой эквивалентности слоений Лиувилля на неособых изoэнергетических многообразиях Q^3 . Полный список инвариантов Фоменко–Цишанга представлен на рис. 2.*

Третья глава диссертации посвящена вопросу интегрируемости эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом и топологическому анализу такого бильярда. Как известно, бильярд Биркгофа (как классический, так и с добавлением упругого потенциала) допускает дополнительный первый интеграл, то есть является интегрируемым. Возникает естественный вопрос: является ли эллиптический бильярд, снабженный произвольным потенциалом, интегрируемым. В общем

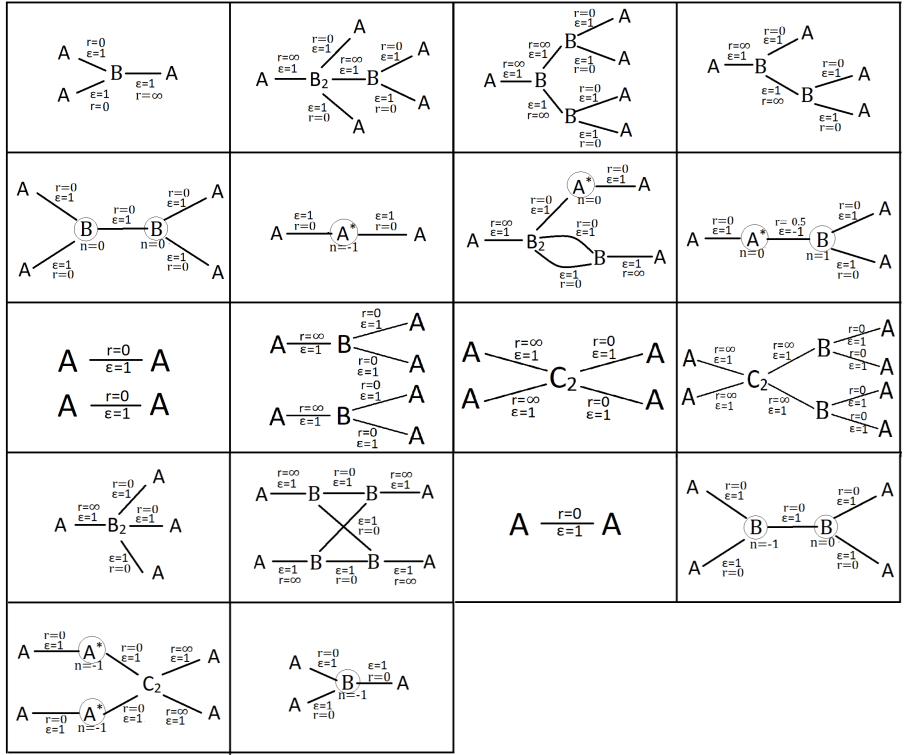


Рисунок 2 – Список инвариантов Фоменко–Цишанга элементарных билиардов с потенциалом Гука

случае это оказалось неверным. Тем не менее, В. В. Козловым в статье³⁴ был предложен критерий интегрируемости потенциала.

Утверждение 3.1.1 (Козлов). *Билиард в эллипсе с полюсами $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$, снабженный потенциалом $W \in C^\infty(\mathcal{B})$, допускает первый интеграл вида*

$$F = -2\left(\frac{p_x^2}{a} + \frac{p_y^2}{b} - \frac{(xp_y - p_x y)^2}{ab}\right) + f(x, y),$$

если и только если потенциал W удовлетворяет следующему уравнению:

$$(a - b)W_{xy} + 3(yW_x - xW_y) + W_{xy}(y^2 - x^2) + xy(W_{xx} - W_{yy}) = 0$$

Остается открытой задача поиска общего решения этого уравнения в классе гладких функций. Однако, оно решено при некоторых ограничениях. Так, В. И.

³⁴В. В. Козлов *Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде*, Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.

Драгович в работе³⁵ предложил общее решение в классе многочленов Лорана, а в работе³⁶ – в классе функций Аппеля. Одним из результатов диссертации является явный вид полиномиального решения.

Теорема 3.3. *Уравнение Козлова в эллиптических координатах имеет следующий вид:*

$$x(\lambda_1, \lambda_2)y(\lambda_1, \lambda_2)\left(\frac{W_1 - W_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - W_{12}\right) = 0,$$

где W_i — частная производная функции W по λ_i .

Общее решение уравнения в классе полиномов имеет следующий вид:

$$W = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где P — произвольный многочлен.

Таким образом, интегрируемый полиномиальный потенциал полностью определяется многочленом P . В частности, потенциал Гука является таким потенциалом с соответствующим многочленом $P(z) = \frac{k}{2}z^2$. Оказывается, эллиптический бильярд, снабженный описанным потенциалом, также является алгебраически разрешимой системой. Уравнения разделения, записанные в эллиптических координатах, примут следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{(-P(\lambda_1) + H\lambda_1 + F)(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)} \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{(-P(\lambda_2) + H\lambda_2 + F)(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}, \end{cases}$$

Так же, как и для элементарных бильярдных с потенциалом Гука, применим метод областей возможного движения, который позволяет сводить описание бифуркаций торов Лиувилля к анализу многочлена $V(z) = -P(z) + hz + f$ на отрезке $[-a, 0]$. А именно, критическим значениям первых интегралов $H = h$, $F = f$ соответствуют следующие условия на многочлен V :

- C1) существует точка $z = e \in (-a, -b)$, которая является точкой экстремума многочлена V , и $V(e) = 0$;
- C2) существует точка $z = e \in (-b, 0)$, которая является точкой экстремума многочлена V , и $V(e) = 0$;
- C3) $V(0) = 0$, и V возрастает в окрестности нуля;
- C4) $V(-a) = 0$;
- C5) $V(-b) = 0$.

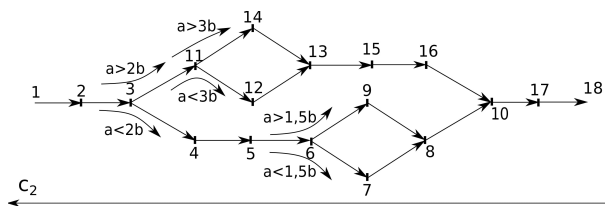
³⁵V. I. Dragovich, *Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse*, J. Appl. Maths Mech, Vol. 62, No. 1, pp. 159-162, 1998

³⁶Vladimir Dragovic, *The Appell hypergeometric functions and classical separable mechanical systems* 2002 J. Phys. A: Math. Gen. 35 2213

Теорема 3.9. Пусть $e_i(h)$ – неявные функции точек экстремумов многочлена V . Тогда бифуркационная диаграмма эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом состоит из дуг следующих кривых (возможно, не всех):

- $d1_i) \ V(e_i(h)) = 0 \ \text{npu} \ e_i(h) \in [-a, -b]$
- $d2_i) \ V(e_i(h)) = 0 \ \text{npu} \ e_i(h) \in [-b, 0]$;
- $d3) \ f = 0 \ \text{npu} \ h \geq 0$;
- $d4) \ V(-a) = 0$;
- $d5) \ V(-b) = 0$.

Теорема 3.11 Для эллиптического бильярда, снабженного интегрируемым потенциалом четвертой степени с параметром $c_3 < 0$, существуют 16 неэквивалентных классов бифуркационных диаграмм. Эволюция бифуркационных диаграмм при росте значения $\frac{c_2}{c_3}$ зависит от соотношений на параметры a и b граничного эллипса и описывается эволюционным графом 3.



Теорема 3.12. Для эллиптического бильярда, снабженного потенциалом четвертой степени с параметром $c_3 > 0$, существуют 4 неэквивалентных класса бифуркационных диаграмм. Эволюция бифуркационных диаграмм при росте значения $\frac{c_2}{c_3}$ описывается линейным графом-путем

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4.$$

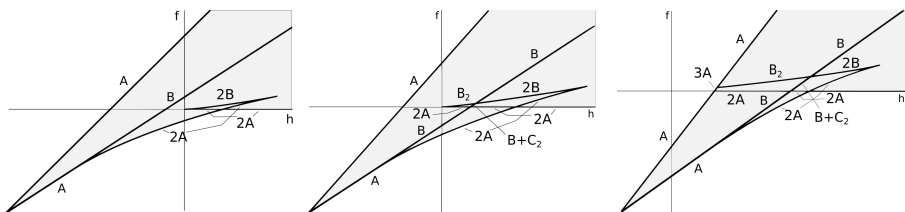


Рисунок 4 – Примеры бифуркационных диаграмм

Вернемся к общему случаю потенциала произвольной степени. Метод областей возможного движения позволяет определить как локальные бифуркации торов Лиувилля (то есть, 3-атомы), так и глобальную структуру слоения Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии Q_h^3 , исходя из вида многочлена P . В работах И. Ф. Кобцева³⁷ и С. Е. Пустовойтова³⁸ представлен список инвариантов Фоменко-Цишанга, соответствующих многочленам степени 2 и 3 соответственно. Однако, с ростом степени многочлена P количество соответствующих инвариантов растет экспоненциально. В связи с этим был разработан алгоритмический подход построения инварианта. Результатом построенного алгоритма служит частичное описание грубой молекулы.

Теорема 3.4.1. *Алгоритмически построенная грубая молекула неособого изоэнергетического многообразия эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом удовлетворяет следующим свойствам:*

- вершинам молекулы соответствуют 3-атомы A , A^* , 3-атомы серии B_k , C_{2k} , где k есть положительное целое число;
- существует расположение молекулы в плоскости, при котором она является симметричной относительно некоторой оси, причем 3-атомы, переходящие друг в друга под действием этой симметрии, соответствуют одинаковому уровню интеграла F ;
- все 3-атомы вида C_{2k} лежат на некотором одном уровне интеграла F (обозначим его $F = f_C$), причем число k для всех них одинаковое;
- ниже уровня $F = f_C$ молекула является непересекающимся объединением нескольких симметричных деревьев с корнями в вершине C_{2k} ;
- на фокальном уровне интеграла F , при котором $V(-b) = 0$ (обозначим его $F = f_F$), лежат либо несколько минимаксных 3-атомов A , либо два атома A^* и несколько 3-атомов B_k , либо один 3-атом B и несколько атомов C_{2k} ;

³⁷И. Ф. Кобцев, *Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ*, Матем. сб., 211:7 (2020), 93–120

³⁸С. Е. Пустовойтов, *Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2021

- в общем случае молекула не является деревом, т.е. могут существовать циклы;
- молекула может содержать кратные ребра, причем они могут соединять только 3-атомы C_{2k} с 3-атомами B_k , расположенными не ниже фокального уровня;
- если $V(z_1) < V(-b) < V(z_2)$ для любых $z_1 \in [-a, -b]$ и $z_2 \in (-b, 0]$, молекула является деревом.

Метки грубой молекулы могут быть вычислены также алгоритмически. Для этого разобьем 3-атомы на шесть групп.

1. минимальные 3-атомы A ;
2. максимальные 3-атомы A ;
3. седловые 3-атомы, соответствующие бифуркациям области возможного движения типа “слияние”;
4. седловые 3-атомы, соответствующие бифуркациям типа “разрыв”;
5. 3-атомы A^* ;
6. 3-атом B , соответствующий бифуркации через два фокуса.

Тогда числовые метки описываются следующей теоремой.

Теорема 3.17. *Зафиксируем ориентацию изоэнергетического многообразия Q_h^3 таким образом, чтобы все циклы λ на минимальных 3-атомах A стали согласованными. Таблица 1 полностью описывает метки, соответствующие ребрам построенной выше грубой молекулы.*

Таблица 1 – Ячейка таблицы соответствует ребру, соединяющего атомы из обозначенных групп. Здесь Θ обозначает вклад ребра в метку n семьи, не содержащей атомов 5 и 6, а Θ' обозначает вклад в метку n семьи 3-атома из группы 5 или 6

Верхний атом Нижний атом	2	3	4	5	6
1	$r=0 \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$
3	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$
4	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	—
5	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	—	—
6	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=1 \quad \Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=0$	—	—

Таким образом, было приведено алгоритмическое построение инварианта Фоменко–Цишанга интегрируемого эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом. Дополнительно был определен топологический тип неособого изоэнергетического многообразия, слоение которого описывается построенным инвариантом.

Теорема 3.21. *Изоэнергетическое многообразие Q^3 эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом состоит из нескольких компонент связности, каждая из которых гомеоморфна либо трехмерной сфере S^3 , либо связной сумме $(S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2)$ нескольких многообразий $S^1 \times S^2$.*

Четвертая глава посвящена описанию слоения Лиувилля четырехмерных полулокальных особенностей бильярдов с потенциалом. Глава условно разделена на две части. В первой части рассматривается интегрируемый эллиптический бильярд с полиномиальным потенциалом четвертой степени, бифуркационные диаграммы которого были построены в явном виде в предыдущей главе. Были вычислены всевозможные невырожденные особые точки фазового пространства, в которых ранг дифференциала отображения момента становится равным нулю, и определены типы этих точек. Как оказалось, реализуются случаи центр-центр, центр-седло и седло-седло. Затем с помощью метода областей возможного движения была установлена топология слоения Лиувилля четырехмерных окрестностей особых слоев, содержащих полученные особые точки. Результатом анализа является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Невырожденные особые точки ранга 0 эллиптического бильярда с потенциалом четвертого порядка имеют тип центр-центр, центр-седло или седло-седло. Слоение Лиувилля четырехмерной окрестности точек центр-центр послойно гомеоморфно прямому произведению двух 2-атомов A . Слоение Лиувилля окрестностей слоев, содержащих точки центр-седло, послойно гомеоморфно прямому произведению 2-атома A и одного из 2-атомов B , B_2 , C_2 или C_4 . Слоение Лиувилля окрестностей слоев, содержащих точки седло-седло, послойно гомеоморфно почти прямому произведению $B \times C_2/\mathbb{Z}_2$, $B_2 \times C_2/\mathbb{Z}_2$ или $B \times C_4/\mathbb{Z}_2$.*

Отметим, что для почти прямого произведения фактор берется на всем прямом произведении под действием некоторой послойной инволюции. Кроме того, для того же бильярда были установлены вырожденные критические траектории движения бильярдного шара и вычислены уровни первых интегралов, для которых эти траектории достигаются. И опять, была установлена топология слоения Лиувилля четырехмерных окрестностей соответствующих особых слоев. А именно, доказана теорема.

Теорема 4.2. *Вырожденные орбиты потоков первых интегралов, встречающиеся в эллиптическом бильярде с потенциалом четвертого порядка, соответствуют перестройкам параболического типа или типам эллиптического или гиперболического удвоения периода невырожденных окружностей. Четырехмерные окрестности слоев слоения Лиувилля, содержащих такие орбиты, лиувиллево эквива-*

лентны одному из шести типов, изображенных на рис. 5.

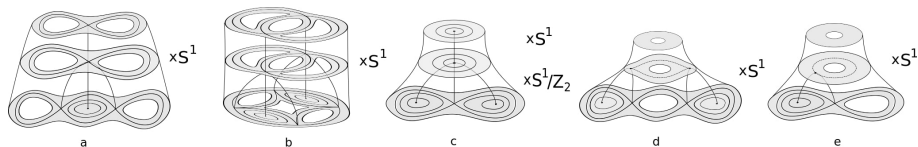


Рисунок 5 – Шесть типов слоений Лиувилля в окрестности вырожденных слоев ранг 1. На рис. с изображены два типа слоения, соответствующие ориентируемому и неориентируемому случаю эллиптического удвоения периода. Здесь фактор по действию группы $\mathbb{Z}_2$ берется на всем прямом произведении изображенной базы и окружности S^1 .

Вторая часть четвертой главы посвящена реализации произвольной фокальной особенности билиардными книжками с потенциалом Гаука. Вопрос реализации различных структур, появляющихся в теории интегрируемых систем, с помощью билиардов был поставлен А. Т. Фоменко в свете появления конструкции билиардных книжек. Например, в работах^{39,40} А. Т. Фоменко и В. А. Кибкало были реализованы произвольные полулокальные особенности типа седло-седло с помощью билиардных книжек, склеенных из элементарных эллипτικο-гиперболических билиардов с потенциалом Гаука. Однако, до сих пор оставался открытым вопрос реализации особенностей типа фокус-фокус. Напомним, что с точностью до лиувиллевой эквивалентности такие особенности определяются числовой меткой монодромии, которая полностью задает диффеоморфизм тора Лиувилля, возникающий при обходе по контуру вокруг изолированного особого значения первых интегралов. Рассмотрим плоский билиард, ограниченный окружностью, в центр которого помещен отталкивающий потенциал Гаука. Такой билиард есть вырожденный случай эллиптического билиарда, рассмотренного во второй главе. Таким образом, он является интегрируемым. Неустойчивое положение равновесия в центре билиарда, как оказалось, является невырожденной особой точкой ранга 0, которая имеет тип фокус-фокус. Ее матрица монодромии имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тем самым было показано, что числовая метка монодромии равняется 1.

Теперь рассмотрим n копий кругового билиарда с отталкивающим потенциалом Гаука и склеим из них билиардную книжку по общей граничной окружности (перестановку на единственном корешке книжки положим циклической $(1, 2, \dots, n)$). Таким образом, полученная система допускает n точек типа фокус-фокус, которые, в свою очередь, лежат на одном слое слоения Лиувилля, соответствующем значениям $H = 0$, $F = 0$. Матрица монодромии в этом случае имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$. Тем

³⁹А. Т. Fomenko, V. A. Kibkalo, *Saddle singularities in integrable Hamiltonian systems: Examples and algorithms*, In: Sadovnichiy, V.A., Zgurovsky, M.Z. (eds.): Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems, pp. 3–26. Springer, Cham (2021)

⁴⁰В. А. Кибкало, “Билиарды с потенциалом моделируют ряд четырехмерных особенностей интегрируемых систем”, Современные проблемы математики и механики, Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко, т. 2, МАКС Пресс, М., 2019, 563-566

самым, была доказана следующая теорема.

Теорема 4.4. *Числовая метка монодромии особенности в прообразе точки $(0, 0)$ равна n для бильярдной системы с отталкивающим потенциалом Гау на книжке $\mathcal{B}_n$, склеенной из n экземпляров стола D плоского бильярда внутри круга по перестановке $(1, 2, \dots, n)$ на их окружности склейки.*

Таким образом, с помощью бильярдных книжек была получена произвольная метка монодромии. Иными словами, была реализована произвольная фокальная особенность.

Последняя **пятая глава** диссертации посвящена исследованию топологических магнитных бильярдов с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. Рассмотрим сначала плоские бильярды, помещенные в постоянное магнитное поле индукции β , ортогональное к плоскости бильярдного стола. Магнитное поле действует на бильярдный шар единичного заряда, отклоняя его траекторию по окружности Лармора. Эта система гамильтонова на своем фазовом пространстве со стандартной симплектической структурой и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}((p_x - \frac{\beta}{2}y)^2 + (p_y + \frac{\beta}{2}x)^2)$$

В работе⁴¹ А. Е. Миронов и М. Бялый доказали следующую теорему, отвечающую на вопрос интегрируемости такого бильярда.

Теорема 5.1 (Миронов, Бялый). *Пусть магнитный бильярд задан в выпуклой области $\mathcal{B}$, ограниченной кусочно-гладкой кривой, и магнитное поле имеет индукцию β . Если граница $\partial\mathcal{B}$ не есть окружность, магнитный бильярд не является алгебраически интегрируемым для любых значений индукции β , кроме, быть может, конечного числа таких значений.*

В связи с этим рассмотрим интегрируемые магнитные бильярды, ограниченные окружностью или парой концентрических окружностей (будем называть их круговым и кольцевым бильярдом). Их траектории представляют собой кусочно-гладкие кривые, состоящие из дуг окружностей Лармора общего радиуса, центры которых равноудалены от центра бильярда. Геометрическое описание траекторий позволяет определить области возможного движения и, тем самым, описать слоеное Лиувилля на неособых изоэнергетических многообразиях. Результатом анализа служит следующая теорема.

Теорема 5.5. *Для кругового магнитного бильярда изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно трехмерной сфере S^3 при любом значении интеграла L . Соответствующий инвариант Фоменко-Цишанга имеет вид $A - A$ с метками $r = 0$ и $\varepsilon = 1$.*

Для кольцевого магнитного бильярда изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно произведению $S^1 \times S^2$ при любом значении интеграла L . Инвариант

⁴¹М. Bialy, A. E. Mironov, *Algebraic non-integrability of magnetic billiards*, J. Phys. A, 49:45 (2016), 455101, 18 pp.

Фоменко–Цишанга имеет вид $A - A$ с метками $r = \infty$ и $\varepsilon = 1$.

Теперь рассмотрим круговые и кольцевые магнитные бильярды как элементарные и построим с помощью них топологический бильярд, т.е. бильярдную книжку, бильярдный комплекс которой является ориентируемым компактным двумерным многообразием. Возможны четыре случая: конфигурационное пространство бильярда гомеоморфно диску (бильярд bD), замкнутому цилиндру (bC), сфере (bS) или тору (bT). Конструкция топологического бильярда (как и общая конструкция бильярдной книжки) сохраняет дополнительный первый интеграл, т.е. система является интегрируемой. Для таких систем был разработан алгоритмический подход, который позволяет строить инвариант Фоменко–Цишанга, исходя из формы топологического бильярда. Результатом построенного алгоритма служит частичное описание грубой молекулы.

Теорема 5.7. *Алгоритмически построенная грубая молекула неособого изознергетического многообразия топологического магнитного бильярда удовлетворяет следующим свойствам.*

- Вершинам молекулы соответствуют 3-атомы A , 3-атомы серии B_τ (или атомы с плюсами и минусами в терминологии работы Е. А. Кудрявцевой и А. А. Ошемкова⁴²), а также 3-атомы из серии C_τ в случае бильярда bT , где τ есть последовательность положительных целых чисел.
- Бильярд bT может допускать лишь два 3-атома серии C_τ , лежащих на соседних уровнях дополнительного интеграла F . Причем эти 3-атомы единственные на своих уровнях.
- Граф грубой молекулы бильярдов bC , bD и bS является деревом. Граф бильярда bT допускает кратные ребра (которые образуют единственные циклы) между 3-атомами серии C_τ .
- При достаточно больших значениях энергии грубая молекула имеет симметричный вид $W - W$, где W – это корневое поддерево, причем обе симметричные части в молекуле соединены ребром (либо кратными ребрами), инцидентным обоим корням. В такой молекуле 3-атомы имеют вид A , B_n и C_n .

Теперь вычислим числовые метки, которые вместе с построенной грубой молекулой определяют инвариант Фоменко–Цишанга. Как оказалось, они зависят только от топологического типа бильярда. Разобьем 3-атомы на две группы: **1)** минимальный атом A , 3-атом B_k , перестраивающий (склеивающий) $k + 1$ тор Лиувилля в один тор, и 3-атом C_k , перестраивающий (склеивающий) k торов Лиувилля в два тора; **2)** максимальный атом A , 3-атом B_k , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в $k + 1$ тор, и 3-атом C_k , перестраивающий (разделяющий) два тора Лиувилля в k торов.

⁴²Е. А. Кудрявцева, А. А. Ошемков, Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения, Чебышевский сб., 21:2 (2020), 244–265

Теорема 5.12. *Инвариант Фоменко–Цишанга неособого изоэнергетического многообразия топологического магнитного бильярда имеет следующий вид:*

1. *грубая молекула строится по алгоритму, приведенному в теореме 5.7;*
2. *метка g равна нулю на всех ребрах, инцидентных 3-атомам A , и бесконечности на остальных ребрах (и следовательно, существует лишь одна семья);*
3. *метка ϵ равна $+1$ на всех ребрах, соединяющих два 3-атома из одной группы либо два 3-атома A , и -1 в остальных случаях;*
4. *метка p единственной семьи равна нулю в случае бильярдов bC и bT , ± 1 в случае бильярда bD и ± 2 в случае бильярда bS .*

Таким образом, были классифицированы топологические магнитные бильярды с точки зрения их слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях. Кроме того, был приведен алгоритм, обратный к алгоритму построения инварианта Фоменко–Цишанга. А именно, алгоритм строит топологический магнитный бильярд по представленному инварианту, удовлетворяющему определенным свойствам. С помощью этого алгоритма было доказано, что топологическими магнитными бильярдами реализуются интегрируемые системы на поверхностях вращения в потенциальном поле, рассмотренные Е. О. Кантонистой в работе⁴³, с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Заключение

В диссертации был получен ряд результатов, описывающих топологию слоения Лиувилля и его особенностей интегрируемых бильярдов, снабженных потенциалом или помещенных в магнитное поле. Основным методом анализа таких систем стал метод областей возможного движения, идущий от формальных алгебраически разрешимых систем и адаптированный для специфики бильярдов. На его основе во второй главе были вычислены инварианты Фоменко–Цишанга лиувиллевой эквивалентности для элементарных эллиптико-гиперболических бильярдов, снабженных потенциалом Гаука. Кроме того, были построены бифуркационные диаграммы таких бильярдов. На основе полученного списка инвариантов была установлена лиувиллева эквивалентность с рядом уже изученных интегрируемых систем с двумя степенями свободы.

Автором был установлен явный вид полиномиальных потенциалов, сохраняющих интегрируемость эллиптического бильярда. Как оказалось, множество интегрируемых полиномиальных потенциалов взаимно однозначно множеству вещественных многочленов одной переменной, а свойства слоения Лиувилля бильярда с потенциалом W зависят от поведения соответствующего ему многочлена $P(z)$. Кроме того стоит отметить, что полученный класс потенциалов сохраняет интегрируемость не только эллиптического, но и произвольного эллиптико-гиперболического бильярда, границы которого софокусны с исходным эллипсом.

⁴³Е. О. Кантонистова, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле*, Матем. сб., 207:3 (2016), 47–92

Для эллиптического бильярда с потенциалом был предложен алгоритм, вычисляющий инвариант Фоменко–Цишанга для любого неособого изоэнергетического многообразия Q^3 , исходя из параметров системы. Дополнительно была установлена топология этого многообразия. Как оказалось, сложность инварианта зависит экспоненциально от степени потенциала. Тем не менее, для эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом, степень которого не превышает четырех, были явно построены бифуркационные диаграммы, а также установлена их зависимость от параметров потенциала и значений полуосей граничного эллипса. Затем была изучена топология слоений полулокальных особенностей такого бильярда. А именно, автором были установлены типы невырожденных точек ранга 0 и вырожденных траекторий, и также описано слоение Лиувилля четырехмерных окрестностей особых слоев, содержащих эти точки и траектории.

Кроме того, автором были рассмотрены бильярдные книжки, снабженные потенциалом Гука. Как оказалось, книжки, склеенные из круговых бильярдов с отталкивающим потенциалом, реализуют произвольную фокальную особенность, встречающуюся в интегрируемых системах с двумя степенями свободы. Этот результат дополняет уже известные результаты по реализации седловых особенностей с помощью бильярдов.

Наконец, в заключительной главе диссертации автором были изучены топологические магнитные бильярды с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. Был предложен алгоритм, позволяющий вычислять инвариант Фоменко–Цишанга топологического магнитного бильярда на любом неособом изоэнергетическом многообразии, исходя из формы бильярда, а также обратный алгоритм, строящий бильярд по заданному инварианту. С помощью этих алгоритмов удалось установить лиувиллеву эквивалентность топологических бильярдов с интегрируемыми системами на поверхностях вращения с потенциалом.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям академику РАН, профессору А. Т. Фоменко и профессору В. В. Ведюшкиной за постановку задач и многократные обсуждения. Автор выражает благодарность В. И. Драговичу за обсуждения и важные комментарии. Автор выражает благодарность доценту А. Ю. Коняеву и доценту В. А. Кибкало за важные обсуждения. Автор искренне благодарит коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений за дружелюбную атмосферу, а также за предоставленные возможности реализации творческой деятельности.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

1. С. Е. Пустовойтов, *Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом*// Чебы-

- шевский сборник. – 2024 – Т. 25, вып. 1 – С. 62–102.
EDN: VGGFKI. Импакт фактор 0.262 (SJR), 0.293 (РИНЦ). Объем 2.562 п.л.
2. S. E. Pustovoitov, *Classification of Singularities of the Liouville Foliation of an Integrable Elliptical Billiard with a Potential of Fourth Degree*// Russian Journal of Mathematical Physics. – 2023 – vol. 30, no 4 – pp. 643–673.
EDN: MRNNQG. Импакт фактор 0.602 (SJR), 1,680 (РИНЦ). Объем 1.937 п.л.
 3. В. В. Ведюшкина, С. Е. Пустовойтов, *Классификация слоений Лиувилля интегрируемых математический бильярдов в магнитном поле*// Математический сборник. — 2023. — Т. 214, вып. 2. — С. 23–57.
EDN: HVQURH. Импакт фактор 0.548 (SJR), 0.979 (РИНЦ). Объем 2.187 п.л.
Перевод: V. V. Vedyushkina, S. E. Pustovoitov, *Classification of Liouville foliations of integrable topological billiards in magnetic fields*// Sbornik: Mathematics – 2023 – vol. 214, no 2 – pp. 166–196
EDN: QIRXDJ. Импакт фактор 0.548 (SJR), 0,772 (РИНЦ). Объем 1.937 п.л.
С. Е. Пустовойтовым были получены результаты разделов 7–9. Диссертант внес значительный вклад в доказательство утверждений разделов 5 и 6. Общая доля диссертанта составляет 63%
 4. В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало, С. Е. Пустовойтов, *Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем бильiardными книжками с потенциалом Гау*// Чебышевский сборник. – 2021 – Т. 22, вып. 5. – С. 44–57.
EDN: AHMFAX. Импакт фактор 0.262 (SJR), 0.293 (РИНЦ). Объем 0.875 п.л.
С. Е. Пустовойтовым было доказано утверждение 1. Диссертант внес значительный вклад в доказательство теоремы 1. Общая доля диссертанта составляет 40%
 5. С. Е. Пустовойтов, *Топологический анализ бильярда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле*// Математический сборник. — 2021 — Т. 212, вып. 2. — С. 81–105.
EDN: FRGHGU. Импакт фактор 0.548 (SJR), 0.979 (РИНЦ). Объем 1.562 п.л.
Перевод: S. E. Pustovoitov, *Topological analysis of a billiard bounded by confocal quadrics in a potential field*// Sbornik: Mathematics – 2021 – vol. 212, no 2 – pp. 211–233
EDN: LXFABV. Импакт фактор 0.548 (SJR), 0.772 (РИНЦ). Объем 1.437 п.л.
 6. С. Е. Пустовойтов, *Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка*// Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика — 2021 — вып. 5. — С. 8–19.
EDN: NTRMZL. Импакт фактор 0.243 (SJR), 0.313 (РИНЦ). Объем 0.75 п.л.
Перевод: S. E. Pustovoitov, *Topological Analysis of an Elliptic Billiard in a Fourth-Order Potential Field*// Moscow University Mathematics Bulletin – 2021 – vol. 76 – pp. 193–205
EDN: RVBKSБ. Импакт фактор 0.243 (SJR), 0.313 (РИНЦ). Объем 0.812 п.л.
 7. S. E. Pustovoytov, *Topological analysis of a billiard in elliptic ring in a potential field*// Journal of Mathematical Sciences. – 2021 – vol. 259 – pp. 712–729.
EDN: SJICLQ. Импакт фактор 0.280 (SJR). Объем 1,187 п.л.