

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Калеева Галина Анатольевна

**Универсальная эквивалентность линейных групп над
кольцами**

Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Диссертация подготовлена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Научные
руководители —

Михалев Александр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор

Бунина Елена Игоревна, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные
оппоненты —

Аржанцев Иван Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет компьютерных наук, декан

Балаба Ирина Николаевна, доктор физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, физико-математический факультет, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии, профессор

Туганбаев Аскар Аканович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МЭИ», кафедра высшей математики, профессор

Защита диссертации состоится 30 октября 2026 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/4008>

Автореферат разослан « » сентября 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4
кандидат физико-математических наук,
доцент

В. А. Кибкало

Общая характеристика работы

Диссертация относится к области теории моделей. Во введении к своей классической книге «Теория моделей» Кейслер и Чэн¹ так определяют эту область:

теория моделей = универсальная алгебра + математическая логика.

Современная теория моделей изучает фундаментальную связь между синтаксисом, который представлен формальным языком, и семантикой, за которую отвечает математическая структура, описанная на этом языке. В диссертационной работе автором решается задача построения критерия универсальной эквивалентности для линейных групп над кольцами.

Актуальность темы и степень ее разработанности

Исследование логических свойств алгебраических структур восходит к работам А. И. Мальцева, который в 1961 году доказал², что элементарная эквивалентность групп $G_n(K)$ и $G_m(L)$, где $G = GL, SL, PGL, PSL$, $n, m \geq 3$, а K и L — поля характеристики 0, равносильна совпадению порядков $m = n$ и элементарной эквивалентности полей K и L . В дальнейшем были получены обобщения этой теоремы на другие типы колец и групп. Большим подспорьем в этой работе стали исследования изоморфизмов линейных групп над ассоциативными кольцами, которыми занимались И. З. Голубчик, А. В. Михалев³ и другие. В дальнейшем К. И. Бейдар и А. В. Михалев разработали⁴ общий подход к доказательству теорем мальцевского типа при помощи ультрапроизведений и обобщили теорему Мальцева на случай тел и простых ассоциативных колец.

Существует и иной путь, по которому может идти изучение вопроса, впервые поставленного Мальцевым, — это рассмотрение других видов эквивалентности. Мы можем обеднить теорию, разрешив использование только одного вида кванторов, и рассматривать алгебраические структуры в рамках этой обедненной — универсальной — теории. Первые кри-

¹Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

²Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Некоторые проблемы математики и механики. — Новосибирск, 1961. — С. 110–132.

³Голубчик И. З., Михалев А. В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 1983. — Вып. 3. — С. 61–72.

⁴Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Mal'cev's theorem on elementary equivalence of linear groups. Proceedings of the International Conference on Algebra // Contemporary Mathematics. — 1992. — Vol. 131, part 1. — P. 29–35.

теории универсальной эквивалентности были установлены Ю. Ш. Гуревичем и А. И. Кокориным для упорядоченных абелевых групп⁵ в 1963 г., Н. Г. Хисамиевым для структурно упорядоченных абелевых групп⁶ в 1966 г., а затем П. С. Эклофом для произвольных абелевых групп⁷ в 1972 г. Позднее другими исследователями были получены результаты об универсальной эквивалентности таких структур, как разрешимые группы (Е. И. Тимошенко⁸), частично коммутативные нильпотентные группы (А. А. Мищенко и Е. И. Тимошенко⁹), частично коммутативные метабелевы алгебры Ли (Е. Н. Порошенко и Е. И. Тимошенко¹⁰).

За последнее время в этой области были получены следующие результаты: доказан критерий мальцевского типа по отношению к элементарной эквивалентности для групп Шевалле с неразложимыми системами корней ранга > 1 над коммутативными кольцами (содержащими дополнительно $1/2$ для типов A_2, B_l, C_l, F_4 и G_2 и $1/3$ для типа G_2) (Е. И. Бунина¹¹), доказано более сильное свойство жесткости первого порядка (first order rigidity) как для групп Шевалле над дедекиндовыми кольцами арифметического типа и локальными кольцами (D. Segal, K. Tent¹²), так и для арифметических решеток (N. Avni, A. Lubotzky, C. Meiri¹³; M. Sohrabi, A. Myasnikov¹⁴).

Естественными направлениями работы в этой области являются обобщения теорем мальцевского типа на другие виды групп или на другие типы логической эквивалентности. Автор настоящей работы следует по

⁵Гуревич Ю. Ш., Кокорин А. И. Универсальная эквивалентность упорядоченных абелевых групп // Алгебра и логика. — 1963. — Т. 2, № 1. — С. 37–39.

⁶Хисамиев Н. Г. Универсальная теория структурно упорядоченных абелевых групп // Алгебра и логика. — 1966. — Т. 5, № 3. — С. 71–76.

⁷Eklöf P. C. Some model theory for Abelian groups // Journal of Symbolic Logic. — 1972. — Vol. 37, № 2. — P. 335–342.

⁸Тимошенко Е. И. Об универсально эквивалентных разрешимых группах // Алгебра и логика. — 2000. — Т. 39, № 2. — С. 227–240.

⁹Mishchenko A. A., Timoshenko E. I. Universal equivalence of partially commutative nilpotent groups // Siberian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 52, № 5. — P. 884–891.

¹⁰Poroshenko E. N., Timoshenko E. I. Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras // Journal of Algebra. — 2013. — Vol. 384. — P. 143–168.

¹¹Бунина Е. И. Изоморфизмы и элементарная эквивалентность групп Шевалле над коммутативными кольцами // Математический сборник. — 2019. — Т. 210, № 8. — С. 3–28.

¹²Segal D., Tent K. Defining R and $G(R)$ // Journal of the European Mathematical Society. — 2023. — Vol. 25, № 8. — P. 3325–3358.

¹³Avni N., Lubotzky A., Meiri C. First order rigidity of non-uniform higher-rank arithmetic groups // Inventiones mathematicae. — 2019. — Vol. 217, № 1. — P. 219–240.

¹⁴Myasnikov A., Sohrabi M. Bi-interpretability with $\mathbb{Z}$ and models of the complete elementary theories of $SL_n(O)$, $T_n(O)$ and $GL_n(O)$, $n \geq 3$ // arXiv:2004.03585. — 2020. — 19 pp.

второму пути, занимаясь изучением универсальной эквивалентности линейных групп. В статье Е. И. Буниной и автора [1] изучена универсальная эквивалентность полных и специальных линейных групп над полями. Этот результат близок описанию изоморфизмов линейных групп, изложенному в уже упоминавшейся работе И. З. Голубчика и А. В. Михалева и статье А. С. Аткарской, Е. И. Буниной, А. В. Михалева¹⁵, и опирается на них. Логическим продолжением предыдущего результата является результат автора для локальных коммутативных колец [2] и его обобщение на случай некоммутативных локальных колец [3].

Цели и задачи диссертации

Целью настоящей работы является построение критерия универсальной эквивалентности линейных групп. Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

- 1) При помощи метода инволюций перенести критерий элементарной эквивалентности линейных групп на случай универсальной эквивалентности линейных групп над полями характеристики, отличной от двойки.
- 2) Распространить критерий на случай полей характеристики 2.
- 3) Обобщить критерий на случай локальных ассоциативных колец, как коммутативных, так и некоммутативных.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся

- 1) Критерий универсальной эквивалентности полных и специальных линейных групп над полями произвольной характеристики.
- 2) Критерий универсальной эквивалентности полных и специальных линейных групп порядков $n \geq 3$ над локальными коммутативными (ассоциативными с 1) кольцами с $1/2$.
- 3) Критерий универсальной эквивалентности полных линейных групп порядков $n \geq 3$ над локальными (ассоциативными с 1) кольцами с $1/2$.

¹⁵Аткарская А. С., Бунина Е. И., Михалев А. В. Изоморфизмы общих линейных групп над ассоциативными кольцами, градуированными абелевой группой // Фундаментальная и прикладная математика. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 5–40.

Научная новизна

Результаты работы являются новыми и получены автором в соавторстве с научным руководителем (глава 2) и самостоятельно (главы 3 и 4).

Методы исследования

В работе используются методы теории моделей, теории групп, теории колец, линейной алгебры. Глава 2 существенно опирается на концепции линейной алгебры. Для случая полей характеристики, отличной от 2, используется классический метод инволюций. В случае полей характеристики 2 доказательство опирается на изучение элементов порядка 3. В дальнейшем в главах 3 и 4 используются методы коммутативной алгебры и теории ассоциативных (некоммутативных) колец, здесь также находит применение метод инволюций.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретический характер. Она дает понимание того, как соотносятся между собой логические свойства линейных групп и их колец коэффициентов. Результаты работы могут найти применение в теории групп и теории моделей. Разработанные методы могут быть полезны при дальнейших исследованиях линейных групп и построении критериев других типов логической эквивалентности.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами. Результаты работы хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами в смежных областях.

Результаты работы докладывались на следующих международных конференциях и научных семинарах:

- 1) Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2017).
- 2) Международная конференция «77th British Mathematical Colloquium» (Кардифф, Великобритания, 2026).
- 3) Семинар отдела математической логики «Теория доказательств» и «Logic Online Seminar» совместно с семинаром С. И. Адяна, МИАН (Москва, 2026).

- 4) Международная конференция «Logic Colloquium 2026 in conjunction with the British Logic Colloquium 2026» (Суонзи, Великобритания, 2026).
- 5) Научный семинар «Теория моделей» кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ под руководством проф. Буниной Е. И., многократные доклады с 2014 по 2021 гг.

Публикации автора

Результаты по теме диссертации изложены в 3 работах, все работы опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Полный объем работы составляет 79 страниц. Список литературы содержит 28 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** описываются цели работы, освещается история и современное состояние области исследования, приводится краткая формулировка основных результатов.

В **главе 1** изложены необходимые сведения из теории моделей и теории колец.

В **первом параграфе** главы 1 вводятся определения универсальных и экзистенциальных формул, частичного изоморфизма, универсальной эквивалентности, а также приводится критерий универсальной эквивалентности.

Во **втором параграфе** главы 1 собраны необходимые факты о локальных кольцах (в коммутативном и некоммутативном случаях).

В **третьем параграфе** главы 1 определены сигнатуры рассматриваемых структур.

Глава 2 посвящена полным и специальным линейным группам над полями. Сначала формулируется основная теорема для случая полей:

Теорема 1. Пусть K и L — бесконечные поля. Группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ ($G = GL, SL, n, m \geq 2$) универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$ и поля K и L универсально эквивалентны.

Затем конечный случай сводится к изоморфизму.

В **первом параграфе** второй главы доказываемся более легкая импликация: из универсальной эквивалентности полей следует универсальная эквивалентность групп. Доказательство использует тот факт, что все соотношения между матрицами можно записать поэлементно. Эта же идея позволяет доказать аналогичную импликацию и в случае более общих колец в дальнейших главах.

Далее доказательство разбито на два случая: 1) поле имеет характеристику 2, 2) характеристика поля отлична от 2. Во втором случае в доказательстве можно применить стандартный метод — метод инволюций, который не сработает при характеристике 2. Поэтому он претерпевает модификацию: вместо элементов порядка 2 мы рассматриваем элементы порядка 3. В обоих случаях доказательство идет по следующему плану. Сначала выделяется максимальное семейство попарно коммутирующих инволюций или элементов порядка 3. Далее выделяются элементарные трансвекции, и с их помощью — матрицы, кодирующие сложение и умножение. Случай характеристики 2 дополнительно осложняется тем, что не всегда удается диагонализировать элементы порядка 3, но это ограничение удастся обойти, если отдельно рассмотреть случай, когда в базовом поле не извлекаются корни третьей степени из единицы — доказано, что и в этом случае элементы порядка 3 приводятся к «красивому» виду.

В **главе 3** теорема обобщается на случай коммутативных локальных колец. В начале главы сформулирована основная теорема и обозначены ограничения на кольцо и размерность, в рамках которых мы её доказываем (здесь мы требуем обратимость двойки, которая необходима для метода инволюций):

Теорема 2. Пусть R_1 и R_2 — локальные коммутативные кольца с $1/2$. Группы $G_n(R_1)$ и $G_m(R_2)$ ($G = GL, SL, n, m \geq 3$) универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$ и кольца R_1 и R_2 универсально эквивалентны.

В **первом параграфе** главы 3 доказана импликация от колец к группам, которая в коммутативном случае полностью аналогична случаю полей. Также случай конечных коммутативных колец сводится к известному ранее результату об изоморфизме.

Во **втором параграфе** главы 3 непосредственно применяется метод инволюций: выделяется максимальный набор попарно коммутирующих инволюций, которые диагональны в общем базисе. Далее при помощи инволюций выделяются матрицы, похожие на матрицы перестановок. С их помощью удастся выделить трансвекции, кодирующие сложение и умножение в кольце.

В главе 4 происходит дальнейшее ослабление требований к кольцам — они становятся не обязательно коммутативными (но остаются локальными). Основная теорема формулируется только для полных линейных групп:

Теорема 3. Пусть R_1 и R_2 — локальные (не обязательно коммутативные) кольца с $1/2$. Группы $\mathrm{GL}_n(R_1)$ и $\mathrm{GL}_m(R_2)$ ($n, m \geq 3$) универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$ и кольца R_1 и R_2 универсально эквивалентны либо $n = m$ и кольца R_1 и R_2^{op} универсально эквивалентны.

Интересно, что из-за некоммутативности колец критерий уже не формулируется в виде «группы универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда кольца универсально эквивалентны», вместо этого возникает еще одна альтернатива: кольца могут быть «антиэквивалентны», то есть одно кольцо универсально эквивалентно кольцу, противоположному другому кольцу. Это хорошо согласуется с ранее известными результатами об изоморфизмах.

Соответственно, в простой импликации возникает дополнительный случай: из универсальной «антиэквивалентности» колец получить универсальную эквивалентность групп. Это утверждение доказано в первом параграфе.

Также в некоммутативном случае усложняется обоснование конечного случая, но его удастся провести через промежуточные результаты для матричных колец (соответствующих группам) — это сделано во втором параграфе.

Далее проводится обобщение метода инволюций на некоммутативный случай. Благодаря локальности кольца удастся доказать результат, полностью аналогичный коммутативному случаю: получен максимальный набор попарно коммутирующих инволюций; все они диагонализированы в общем базисе, а на главной диагонали у них стоят ± 1 .

В заключение доказательства показано, что трансвекции «почти» сохраняют вид. Благодаря трансвекциям снова удастся выписать соотношения, в которых трансвекции кодируют операции в исходном или противоположном кольце. На этом доказательство теоремы полностью завершается.

Заключение

В данной диссертации была достигнута основная цель — построение критерия универсальной эквивалентности линейных групп. В процессе работы удалось решить все поставленные задачи, сформулировать и до-

казать критерий универсальной эквивалентности для полных и специальных линейных групп над произвольными полями и коммутативными локальными кольцами с $1/2$, а также для полных линейных групп над (не обязательно коммутативными) локальными кольцами с $1/2$.

Часть результатов (при наличии обратимой двойки) удалось получить методом инволюций, для других потребовалось использовать дополнительные методы. В случае локальных некоммутативных колец также потребовалось расширить формулировку результата, чтобы учесть возникающее в этом случае противоположное кольцо.

Полученные результаты расширяют знания об универсальной эквивалентности и могут стать основой для новых исследований. Естественным образом ставится вопрос об обобщении полученного результата на более широкий класс групп и колец. Также полезно исследовать, какие приложения существуют у построенного при доказательстве соответствия между линейными группами и кольцами. Отдельно хочется отметить такую задачу: описать все группы, универсально эквивалентные $GL_n(K)$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физико-математических наук, профессору Буниной Елене Игоревне — за постановку задач, постоянное внимание к работе и внимательное и доброе отношение — и доктору физико-математических наук, профессору Михалеву Александру Александровичу — за поддержание мотивации при подготовке диссертации и ценные советы. Автор хранит память об Александре Васильевиче Михалеве и благодарность за теплые воодушевляющие беседы и помощь в постановке задач. Автор выражает признательность сотрудникам кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ за доброжелательность и творческую атмосферу.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

- [1] Бунина Е. И., Калеева Г. А. Универсальная эквивалентность общих и специальных линейных групп над полями // Фундаментальная и прикладная математика. — 2016. — Т. 21, № 3. — С. 73–106.
EDN: BUOZFJ. Импакт-фактор: 0,1 (SJR). Объем: 3,93 п.л./ авторский вклад: 1,97 п.л.
- [2] Калеева Г. А. Универсальная эквивалентность линейных групп над локальными коммутативными кольцами с $1/2$ // Алгебра и логика. — 2019. — Т. 58, № 4. — С. 467–478.
EDN: IFALNG. Импакт-фактор: 0,196 (РИНЦ). Объем: 1,39 п.л.
- [3] Калеева Г. А. Универсальная эквивалентность полных линейных групп над локальными кольцами с $1/2$ // Математический сборник. — 2025. — Т. 216, № 10. — С. 29–41.
EDN: USRTEW. Импакт-фактор: 0,845 (РИНЦ). Объем: 1,5 п.л.