

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Соколов Владимир Андреевич

**Эффекты нелинейной электродинамики
вакуума**

Специальность: 1.3.3. Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук
профессор В.И. Денисов

Москва – 2026

Содержание

Введение	2
0.1 Современные модели нелинейной электродинамики вакуума	6
0.2 Общая характеристика диссертации	16
0.2.1 Актуальность темы исследования	16
0.2.2 Цели и задачи исследования	18
0.2.3 Научная новизна	19
0.2.4 Теоретическая и практическая значимость работы . .	20
0.2.5 Объект и предмет исследования	21
0.2.6 Методология и методы исследования	21
0.2.7 Положения, выносимые на защиту	21
0.2.8 Достоверность результатов	22
0.2.9 Апробация работы	23
0.2.10 Публикации и личный вклад автора	24
0.2.11 Структура диссертации	25
1 Развитие тетрадного формализма для описания эффектов нелинейной электродинамики вакуума	27
1.1 Уравнения нелинейной электродинамики вакуума в формализме спиновых коэффициентов	27
1.2 Методика интегрирования уравнений нелинейной электродинамики в формализме спиновых коэффициентов при наличии аксиальной симметрии	38
1.3 Фундаментальные ограничения для моделей нелинейной электродинамики вакуума	43
1.4 Требования унитарности и причинности в моделях нелинейной электродинамики вакуума	43
1.5 Энергетическое доминантное условие для моделей нелинейной электродинамики вакуума	45
1.6 Некоторые обобщения энергетических условий, основанных на моделях нелинейной электродинамики вакуума	48
1.6.1 Проверка для идеальной жидкости	51
1.6.2 Проверка для скалярного поля	53

2	Эффекты нелинейной электродинамики вакуума в поле компактных астрофизических объектов	56
2.1	Излучение пульсаров в моделях параметризованной пост-максвелловской нелинейной электродинамики	58
2.2	Вакуумные поправки к замедлению вращения пульсара	74
2.3	Излучение быстровращающегося пульсара	76
2.4	Вакуумные поправки к замедлению быстровращающегося пульсара	83
2.5	Компактные астрофизические объекты в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда	86
2.5.1	Структура пространства-времени заряженной черной дыры в теории Эйнштейна -Борна-Инфельда	90
2.5.2	Движение фотонов в поле коллапсара в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда	97
2.5.3	Устойчивость круговых орбит массивных частиц в поле черной дыры Эйнштейна-Борна-Инфельда	112
2.6	Цилиндрически-симметричные самосогласованные полевые конфигурации в моделях нелинейной электродинамики	119
2.6.1	Модификация решения Мелвина для CNED	123
2.6.2	Самоподдерживающаяся продольная конфигурация магнитного поля в нелинейной электродинамике вакуума	125
2.6.3	Самоподдерживающаяся радиальная конфигурация магнитного поля в нелинейной электродинамике вакуума	128
2.6.4	Самоподдерживающаяся азимутальная конфигурация магнитного поля в нелинейной электродинамике вакуума	130
3	Распространение электромагнитных волн в поле пульсаров и магнетаров	133
3.1	Распространение импульсов жесткого электромагнитного излучения в магнитном поле пульсара	138
3.2	Влияние электромагнитного поля вращающегося пульсара на транзитное излучение	151
3.3	Наблюдательные возможности эффекта двулучепреломления вакуума	155

4	Пертурбативный и непертурбативный эффект двулучепреломления электромагнитных волн в вакууме	166
4.1	Взаимодействие электромагнитных волн в присутствии магнитного поля в пертурбативном режиме нелинейной электродинамики вакуума	169
4.2	Непертурбативное двулучепреломление в однопетлевой нелинейной электродинамике вакуума	173
5	Конформно-инвариантная модель нелинейной электродинамики вакуума	183
5.1	Эффективные показатели двулучепреломления вакуума для моделей конформно-инвариантной нелинейной электродинамики	188
5.2	Черная дыра Рейснера-Нордстрема с дионным зарядом в моделях CNED	191
5.3	Радиационное решение Вайдья-Боннора	196
5.4	Обобщенное условие дуальности для моделей конформно-инвариантной нелинейной электродинамики вакуума	199
	Заключение	204
	Приложение 1: Альтернативные способы описания моделей нелинейной электродинамики вакуума	206
	Приложение 2: Уравнения Общей теории относительности в формализме Ньюмена-Пенроуза	207
	Литература	210

Введение

Электромагнитный сектор Стандартной модели фундаментальных взаимодействий считается наиболее исследованной областью современной теории поля. Надежное экспериментальное подтверждение множества эффектов электродинамики Максвелла в вакууме со все возрастающей степенью точности не оставляет сомнений в её достоверности, тем не менее, ряд неразре-

шенных задач этой теории в режимах экстремально сильного электромагнитного поля оставляет множество путей для развития нелинейной электродинамики в вакууме. Значительный интерес к этой области исследования поддерживается благодаря приближению возможностей генерации экстремально сильных электромагнитных полей к пределам регистрации эффектов нелинейной электродинамики вакуума в лазерных экспериментах, а также развитию перспективных методов наблюдательной рентгеновской и гамма-астрономии, позволяющих использовать компактные астрофизические объекты в качестве источников экстремально сильного электромагнитного поля.

Одна из первых эмпирических моделей нелинейной электродинамики вакуума была предложена Густавом Ми в работе [1]. В этой модели была предпринята попытка устранения сингулярностей поля для заряженных частиц путем модификации Лагранжиана электродинамики в вакууме. Решение этой задачи потребовало включения в явной форме четырехмерного вектора-потенциала в Лагранжиан, что привело к нарушению калибровочной инвариантности в теории Ми. Тем не менее, обобщения этой теории используются в современных спинорных моделях физики адронов [2].

Последующие попытки решения проблемы регулярности электромагнитного поля точечных заряженных частиц привели к созданию целого ряда моделей электродинамики в вакууме.

Регуляризация решений старшими производными при сохранении линейности теории была предложена в модели Боппа-Подольского [3,4]. Следствием включения старших производных полевой переменной в Лагранжиан стал переход к уравнениям для потенциала четвертого порядка, которые при выборе калибровки специального вида могут быть приведены к двум уравнениям второго порядка. Несомненным достоинством теории Боппа-Подольского является регуляризация самодействия точечного заряда, движущегося с постоянным ускорением. Этот результат был получен относительно недавно в работе [5].

Одна из первых успешных попыток регуляризации энергии электростатического поля точечного заряда в нелинейной теории была выполнена в модели электродинамики Борна-Инфельда [6], как выяснилось в последующем, имеющей приложение в теории струн [7]. В последующие годы

было предложено множество модификаций и обобщений электродинамики Борна-Инфельда, а также построен целый ряд эвристических моделей нелинейной электродинамики вакуума, в том числе, опирающихся на условие регулярности поля точечного заряда.

Еще одно направление развития нелинейной электродинамики вакуума связано с учетом радиационных поправок, являющихся следствием поляризации электрон-позитронного вакуума в теории Дирака. В работе В.Гейзенберга и Г.Эйлера [8] впервые был получен эффективный Лагранжиан спинорной электродинамики, учитывающий однопетлевые радиационные поправки, возникающие при поляризации вакуума в постоянном однородном электромагнитном поле, а в [9] аналогичный результат был получен для скалярной электродинамики. Квантовая электродинамика и эффективная теория Гейзенберга-Эйлера приводят к целому ряду предсказаний наблюдательных проявлений нелинейных эффектов в вакууме, таких как: рассеяние света на свете [10], рождение электрон-позитронных пар в электрическом поле [11] и в поле электромагнитной волны (процесс Брейта-Уиллера) [12], двулучеприломление электромагнитных волн в вакууме [13], расщепление фотона [14], генерацию гармоник для электромагнитной волны, распространяющейся во внешнем электромагнитном поле [15], рассеяние фотонов на атомных ядрах (рассеяние Дельбрюка) [16], возникновение поправок к тонкой структуре энергетических уровней атомов и тяжелых ионов [17, 18], обратный эффект Коттона-Мутона [19], нелинейный эффект Комптона, излучение Черенкова, при движении заряженных частиц в вакуумных конфигурациях электромагнитных полей [20, 21] и другим эффектам.

Модификация электродинамики Гейзенберга-Эйлера для случая некоторых специальных пространственно-неоднородных и переменных во времени полевых конфигураций была получена в работах [22–25]. Попытки учета двупетлевых радиационных поправок в модели Гейзенберга-Эйлера столкнулись с существенными сложностями, вызванными необходимостью перенормировки не только заряда, но и массы электрона при построении эффективной теории. Наиболее известны две модификации Лагранжиана Гейзенберга-Эйлера, полученные в В.И. Ритусом [26] и В. Дитрихом и М. Рейтером [27], приводящие к идентичному разложению Лагранжиана в

пределе сильного поля, но отличающиеся в приближении слабого поля.

Поправки к Лагранжину Гейзенберга-Эйлера для полевой системы, находящейся при конечной температуре (эффекты термализации), были выполнены в [28, 29] и ряде других работ. Учет эффектов термализации приводит к возникновению поправок к эффективной плотности виртуальных зарядов, и как следствие, существенному изменению зависимости потенциала точечного заряда от расстояния до центра.

В настоящее время активно развивается новое направление исследования моделей нелинейной электродинамики вакуума, обладающих свойством полного или частичного, сохранения групповых симметрий электродинамики Максвелла. Среди моделей этого направления следует отметить электродинамику Бялыницкий-Бирула [30, 31], обладающую расширенной симметрией дуального поворота, конформно-инвариантную электродинамику [32, 33] и модифицированную Максвелловскую электродинамику (ModMax) [34, 35], обладающую полным набором групповых симметрий электродинамики Максвелла.

В ряде современных работ рассматриваются абстрактные модели, предполагающие произвольную зависимость Лагранжиана от одного, или в более общем случае, от двух независимых инвариантов тензора электромагнитного поля. Результаты полученные в таких работах особенно ценны в силу своей универсальности. Перечисленные модели нелинейной электродинамики вакуума, и эффекты связанные с ними, более подробно будут описаны в разделе 0.1.

Для идентичности цитирования оригинальных работ в тексте диссертации будут использоваться три системы единиц измерения принятые в современной научной литературе, посвященной нелинейной электродинамике вакуума: симметричная система единиц СГС, естественная система единиц, для которой $G = \hbar = c = 1$, и система единиц Лоренца-Хевисайда. В отдельных случаях будет отмечаться в какой из перечисленных систем единиц проводится описание. В Приложении 1 приводятся альтернативные способы выбора инвариантов тензора электромагнитного поля, принятые в современной литературе, и правила перехода между различными описаниями в терминах этих инвариантов. Сигнатура метрического тензора принята $\{+, -, -, -\}$.

0.1 Современные модели нелинейной электродинамики вакуума

Приведем краткое описание основных современных моделей нелинейной электродинамики вакуума и остановимся на их некоторых наблюдательных проявлениях.

Основополагающим представителем первой группы моделей, опирающихся на требование регуляризации поля электростатических систем точечных зарядов, является электродинамика Борна-Инфельда [6]. Лагранжиан этой эвристической модели имеет точный аналитический вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{E} \mathbf{B})^2} - 1 \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{1 - \frac{a^2}{2} J_2 - \frac{a^4}{4} J_4 + \frac{a^4}{8} J_2^2} - 1 \right],\end{aligned}\quad (0.1)$$

где $J_2 = F_{ik}F^{ki}$, $J_4 = F_{ik}F^{km}F_{mn}F^{mi}$ – независимые инварианты тензора электромагнитного поля, a – параметр модели, по современным представлениям, имеющий значение $a \sim 1.2 \cdot 10^{-32} \text{ Гс}^{-2}$. Физический смысл этого параметра легко установить, используя выражение для электростатического поля точечного заряда q в этой теории $E = q/\sqrt{r^4 + a^2q^2}$, из которого следует, что a – соответствует обратному значению модуля напряженности электрического поля в центре заряда.

В плоском пространстве-времени уравнения электромагнитного поля модели Борна-Инфельда эквивалентны уравнениям электродинамики сплошных сред, дополненных нелинейными материальными соотношениями:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E} + a^2(\mathbf{E} \mathbf{B})\mathbf{B}}{\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{E} \mathbf{B})^2}}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - a^2(\mathbf{E} \mathbf{B})\mathbf{E}}{\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{E} \mathbf{B})^2}},\quad (0.2)$$

вид которых позволяет убедиться в выполнении условия дуальной симметрии $(\mathbf{D}\mathbf{H}) = (\mathbf{E}\mathbf{B})$, также имеющее место, в вырожденной форме, для электродинамики Максвелла в вакууме.

Примечательными особенностями электродинамики Борна-Инфельда являются: отсутствие двулучепреломления электромагнитных волн, распространяющихся во внешнем электромагнитном поле [36, 37], отсутствие

ударных волн [38–40], зависимость значения напряженности поля в центре заряда от направления приближения к нему (для заряда, помещенного в начало координат, значение напряженности электрического поля в его центре будет различаться при приближении к нему со стороны положительной или отрицательной полуоси). Последняя особенность была устранена в модифицированной модели Хофмана-Инфельда [41].

Последующие развитие ряда видоизменений электродинамики Борна-Инфельда было направлено на сохранение регуляризирующих свойств этой теории при добавлении новых специфических возможностей [42]. Среди прочих следует отметить модель [43, 44], отличающуюся от электродинамики Борна-Инфельда степенной функцией в выражении для Лагранжиана, но при этом обладающей свойством двулучепреломления электромагнитных волн в вакууме.

Идея регуляризации поля точечных источников, благодаря нелинейным свойствам теории, оказалась крайне продуктивной и привела к появлению множества новых эвристических моделей электродинамики, Лагранжианы некоторых из которых представлены в Таблице 1 (обозначения сохранены в соответствии с оригинальными работами авторов). Для большинства из этих моделей предсказательная база оказывается идентичной, различаясь лишь деталями при количественном описании эффектов, однако, в некоторых случаях возможны крайне нетривиальные свойства теории. Например, в «квадратичной» модели электродинамики [45], регуляризация проявляется лишь частично: напряженность электростатического поля в центре точечного заряда бесконечна, при этом энергия поля оказывается ограниченной.

В электровакуумных решениях для поля точечных источников (электрических или дионных зарядов) в Общей Теории Относительности (ОТО), регуляризирующие свойства перечисленных моделей вовсе не проявляются [52–56]. Тем не менее, некоторые из них приводят к чрезвычайно необычным сингулярным решениям. Например, для модели «логарифмической» электродинамики минимально связанной с ОТО, в [57] было получено решение для поля точечного заряда названное «чёрной точкой». У этого решения, при определенном наборе параметров, горизонт событий вырождается в точку, совпадающую с положением сингулярности. В последующем,

Ссылка	Название модели	Лагранжиан
[44]	«Модифицированная» модель Борна-Инфельда	$\mathcal{L} = \beta^2 \left(1 - \left[1 + \frac{2}{\beta^2} \mathcal{F} - \frac{1}{\beta^4} \mathcal{G}^2 \right]^p \right)$
[41]	Модель Хофмана-Инфельда	$\mathcal{L} = \frac{\beta^2}{4} [1 - \eta(\mathcal{F}) - \ln \eta(\mathcal{F})]$
[45]	«Квадратичная» модель	$\mathcal{L} = -\mathcal{F} + \frac{\gamma}{2} \mathcal{F}^2$
[46]	«Рациональная» модель	$\mathcal{L} = -\frac{\mathcal{F}}{1 + 2\beta\mathcal{F}}$
[47]	«Двупараметрическая рациональная» модель	$\mathcal{L} = -\mathcal{F} - \frac{a\mathcal{F}}{1 + 2\beta\mathcal{F}}$
[48]	«Логарифмическая» модель	$\mathcal{L} = -\beta^2 \ln \left(1 + \frac{\mathcal{F}}{\beta^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{2\beta^4} \right)$
[49]	«Двойная логарифмическая» модель	$\mathcal{L} = \frac{1}{2\beta} \left[(1 - \mathcal{Y} \ln(1 - \mathcal{Y})) + (1 + \mathcal{Y} \ln(1 + \mathcal{Y})) \right]$
[44]	«Экспоненциальная» модель	$\mathcal{L} = \beta^2 (e^{-X/\beta^2} - 1)$
[50]	Модель «арктангенса»	$\mathcal{L} = -\frac{1}{\beta} \arctan(\beta\mathcal{F})$
[51]	Модель «арксинуса»	$\mathcal{L} = -\mathcal{F} + \frac{C}{\beta} \arcsin(\beta\mathcal{F}) + \frac{\gamma}{2} \mathcal{G}^2$

Таблица 1: Некоторые модели нелинейной электродинамики вакуума, обладающие свойством регуляризации энергии электростатического поля точечного заряда в псевдоевклидовом пространстве-времени. Во всех выражениях сохранены оригинальные обозначения авторов: $\mathcal{F} = 1/4F_{ik}F^{ik}$ – скаляр и $\mathcal{G} = 1/4F_{ik}^*F^{ik}$ – псевдоскаляр тензора электромагнитного поля; β, γ, a, p, C – параметры моделей, а также использованы обозначения $X = \mathcal{F} - \frac{\mathcal{G}^2}{2\beta^2}$, $\mathcal{Y} = \sqrt{\sigma\beta^2\mathcal{G}^2 - 2\beta\mathcal{F}}$.

нами будет показана аналогичная возможность существования чёрных точек и в электродинамике Борна-Инфельда.

Решение же проблемы регуляризации для точечных массивных самогравитирующих источников может быть получено двумя способами. Первый из них заключается в модификации гравитационного сектора теории, например, переход к недавно полученной четырехмерной модели Эйнштейна-Гаусса-Бонне [58, 59] приводит к полностью регулярному решению для поля зараженной черной дыры [60]. Второй подход к решению проблемы заключается в дополнительной модификации нелинейной электродинамики вакуума, такой чтобы устранение сингулярности произошло и для решений в Общей Теории Относительности. Одна из первых успешных реализаций этого подхода была получена Дж. Барденом [61], и привела к появлению нового класса решений уравнений ОТО, называемых регулярными черными дырами.

Пространство-время этих объектов имеет координатные сингулярности, соответствующие горизонтам, но лишено истинных сингулярностей инвариантов тензора кривизны. В Таблице 2 приведены Лагранжианы наиболее известных моделей нелинейной электродинамики вакуума, допускающих решения в виде регулярных черных дыр в ОТО. Особое место занимает модель Айон-Беато и Гарсия [64], авторам которой впервые удалось получить решение для регулярной черной дыры, с массой m и зарядом q , в пределе слабого поля, переходящее к соответствующему решению в электродинамике Максвелла. Метрическая функция, модуль напряженности электрического поля для этого решения, и их асимптотическое поведение при $q, m \ll r$ (величины заданы в естественной системе единиц) имеют вид:

$$g_{00} = 1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + q^2)^{3/2}} + \frac{q^2 r^2}{(r^2 + q^2)^2} \simeq 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (0.3)$$

$$E = qr^4 \left(\frac{r^2 - 5q^2}{(r^2 + q^2)^4} + \frac{15}{4} \frac{m}{(r^2 + q^2)^{7/2}} \right) \simeq \frac{q}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Другие точные аналитические решения для статических и вращающихся регулярных черных дыр можно найти в работах [66–69]. Подробный анализ условий существования решений такого типа для моделей нелинейной электродинамики с Лагранжианом, зависящим только от одного инвариан-

Ссылка	Название модели	Лагранжиан
[61]	Модель Бардина	$\mathcal{L} = \frac{4p}{a} \frac{(aJ_2)^{5/4}}{[1 + \sqrt{aJ_2}]^{1+p/2}}$
[62]	Модель Хейворда	$\mathcal{L} = \frac{4p}{a} \frac{(aJ_2)^{\frac{p+3}{4}}}{[1 + (aJ_2)^{p/4}]^2}$
[63]	Модель Бронникова	$\mathcal{L} = -\frac{J_2}{\cosh^2(a J_2/2 ^{1/4})}$
[64]	Модель Айон-Беато и Гарсия	$\mathcal{L} = P \frac{(1 - 8\sqrt{-2q^2P} - 6q^2P)}{(1 + \sqrt{-2q^2P})^4} - \frac{3}{4q^2s} \frac{(-2q^2P)^{5/4}(3 - 2\sqrt{-2q^2P})}{(1 + \sqrt{-2q^2P})^{7/2}}$
[65]	Модель Дымниковой	$\mathcal{L} = \frac{P(1 - \alpha\sqrt{-P})}{(1 + \alpha\sqrt{-P})^3}$

Таблица 2: Модели электродинамики, допускающие электровакуумные решения в виде регулярных черных дыр; Постоянные параметры a , p , q , s . Для последних двух моделей Лагранжиан в явной форме не определен, так как инвариант $P = -(\partial\mathcal{L}/\partial J_2)^2 J_2$ выражается через J_2 неявно.

та $J_2 = F_{ik}F^{ki}$ был выполнен К.А. Бронниковым в [63], и для более общих случаев, в том числе для модели конформно-инвариантной электродинамики, а также при учете космологической постоянной, в работе [70].

Астрофизические приложения нелинейной электродинамики вакуума не ограничиваются только лишь эффектами в поле компактных объектов. Возможность существования магнитных полей с колоссально большими значениями индукции на ранних этапах эволюции Вселенной, открывают привлекательную перспективу для исследования вакуумных нелинейных эффектов в космологических масштабах. Ограничения на значения индукции магнитного поля, обусловленные нетривиальными неустойчивостями в квантовой хромодинамике [71], при $B > 2.7 \cdot 10^{17}$ Гс (протон становится неустойчивым и распадается на нейтрон, позитрон и нейтрино) и неустойчивостью электрослабого вакуума при $B > 10^{23}$ Гс, значительно превосходят масштабные параметры, определяющие значимость эффектов нелинейной электродинамики вакуума (для модели Борна-Инфельда

$1/a \simeq 10^{16}$ Гс).

Согласно [72, 73] ускоренное расширение Вселенной на настоящем этапе эволюции может объясняться модифицированной теорией гравитации, учитывающий отрицательные степени скалярной кривизны в функционале действия S_G . Аналогичный вид функционала действия S_N , но для электромагнитного поля, предложенный авторами [74–76], позволил получить сразу несколько возможных динамических сценариев изменения масштабного фактора, в том числе включающие переход с замедленного расширения Вселенной к ускоренному:

$$S_G = \frac{M_{pl}^2}{2} \int \sqrt{-g} \left(R + \frac{\alpha^2}{R} \right) d^4x, \quad S_N = \int \sqrt{-g} \left(J_2 - \frac{\gamma}{J_2} \right) d^4x, \quad (0.4)$$

где M_{pl} масса Планка, R скалярная кривизна, J_2 инвариант тензора электромагнитного поля, g определитель метрического тензора, α и γ параметры моделей. В последующем развитии этих работ [77, 78] был получен циклический сценарий эволюции, обусловленный нелинейностью электродинамики в вакууме, и включающий в себя следующие этапы: эра «отскока», соответствующая коллапсирующему состоянию, в котором масштабный фактор $a(t)$ достигает наименьшего значения; «радиационно-доминантная» эра, имеющая аналог в электродинамике Максвелла – расширение Вселенной с замедлением $\ddot{a}(t) < 0$; эра «ускоренного расширения» $\ddot{a}(t) > 0$; эра «повторного отскока», в которой масштабный фактор принимает наибольшее значение, но ускорение изменяет знак, происходит циклический переход к начальному состоянию «отскока». Столь успешное описание динамики привело к появлению целой серии работ, посвященных космологическим приложениям различных моделей нелинейной электродинамики вакуума [79–85], в том числе устраняющих проблему первичной сингулярности [86]. Достаточно наглядная, аналитическая зависимость масштабного фактора от координатного времени была получена в [87] для рациональной модели электродинамики [46]:

$$\sqrt{a^4 + a_c^4} + a_c^2 \ln \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + a_c^4} + a_c^2} = \left(\sqrt{\frac{2}{3\beta}} \frac{a_c^2 t}{M_{pl}} + C \right), \quad (0.5)$$

где a_c критическое значение масштабного фактора, соответствующее переходу от ускоренного расширения к замедлению, β параметр рациональной модели нелинейной электродинамики, M_{pl} масса Планка, C постоянная интегрирования. Решение (0.5) позволяет описать инфляционную фазу эволюции Вселенной и не содержит первичной сингулярности. Согласно этому решению ускоренное расширение происходит от начального момента времени равного нулю до момента $t_f \simeq 0.65\sqrt{\beta}M_{pl}$, а последующая динамика при $t \gg t_f$ соответствует классической радиационно-доминантной фазе в теории Эйнштейна-Максвелла $a(t) \sim \sqrt{t}$.

Основным недостатком большинства перечисленных ранее моделей является их эвристический характер, слабое обоснование точной формы Лагранжиана и отсутствие надежных данных о параметрах модели. В связи с чем, нелинейная электродинамика Гейзенберга-Эйлера, учитывающая радиационные поправки обусловленные поляризацией электрон-позитронного вакуума, представляется более последовательным нелинейным обобщением электродинамики Максвелла. Поправка первого порядка к Лагранжиану Максвелла для спинорной электродинамики в однопетлевом приближении была получена в [8] и может быть представлена в нескольких эквивалентных формах [88]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= \frac{1}{hc} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta e B_c} \left\{ ie^2 \eta^2 (\mathbf{E}\mathbf{B}) \frac{\left[\cos \left(\eta e \sqrt{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i(\mathbf{E}\mathbf{B})} \right) \right] + c.c.}{\left[\cos \left(\eta e \sqrt{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i(\mathbf{E}\mathbf{B})} \right) \right] - c.c.} \right\} + \\
&\quad + 1 - \frac{e^2 \eta^2}{3} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \\
&= \frac{1}{hc} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta e B_c} \left\{ -ie^2 \eta^2 ab \frac{\left[\cosh \left((b+ia)e\eta \right) + \cosh \left((b-ia)e\eta \right) \right]}{\left[\cosh \left((b+ia)e\eta \right) - \cosh \left((b-ia)e\eta \right) \right]} \right\} \\
&\quad + 1 - \frac{e^2 \eta^2}{3} (a^2 - b^2) \\
&= -\frac{1}{hc} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta e B_c} \left\{ \frac{e^2 \eta^2 ab}{\tanh(eb\eta) \tanh(ea\eta)} - 1 + \frac{e^2 \eta^2}{3} (a^2 - b^2) \right\}, \quad (0.6)
\end{aligned}$$

где e заряд и m масса электрона, $B_c = m^2 c^3 / e \hbar$ критическая индукция магнитного поля, а также использованы обозначения для вспомогательных

функций, зависящих от инварианта $\mathcal{F} = -1/4F_{ik}F^{ki}$ и псевдоинварианта электромагнитного поля $\mathcal{G} = -1/4F_{ik}^*F^{ki}$ (звездочкой обозначена операция дуального сопряжения)

$$a = \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} + \mathcal{F}}, \quad b = \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} - \mathcal{F}}. \quad (0.7)$$

Основное условие применимости электродинамики Гейзенберга-Эйлера заключается в требовании пространственной однородности электромагнитного поля на масштабах порядка комптоновской длины волны электрона λ_c и временных интервалах λ_c/c . Для формулировки более детальных ограничений применимости этой модели, удобно перейти к упрощенной форме Лагранжиана \mathcal{L}_P в приближении слабого поля [88] или «пертурбативном» приближении $|\mathbf{E}|, |\mathbf{B}|/B_c \ll 1$:

$$\mathcal{L}_P = \frac{e^4}{360\pi^2 m^4} \left\{ 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) + 7(\mathbf{E}\mathbf{B})^2 \right\}. \quad (0.8)$$

Для этого случая, в [89] было сформулировано обобщение Лагранжиана (0.8) в виде дополнительной поправки \mathcal{L}_D , учитывающей произвольную пространственно-временную неоднородность поля:

$$\mathcal{L}_D = \frac{e^2}{360\pi m^2} \left\{ F_{ik} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) F^{ik} - (\partial^i F_{ik})(\partial_n F^{nk}) \right\}. \quad (0.9)$$

Условие малости этой поправки $|\mathcal{L}_D| \ll |\mathcal{L}_P|$, для монохроматической электромагнитной волны приводит к дополнительному ограничению [90] применимости модели Гейзенберга-Эйлера: $\omega^2 \hbar^2 / m^2 c^4 \ll 4B^2 / \pi B_c^2$, зависящему от частоты ω и индукции магнитного поля \mathbf{B} в волне.

Из формы Лагранжиана (0.6), аналогично модели Борна-Инфельда, следует ограничение максимального значения напряженности электрического поля, однако, природа такого ограничения имеет несколько иной характер: в приближении сверхкритического электрического поля $|\mathbf{E}| \gg B_c$, плотность энергии поля \mathcal{W} приобретает отрицательное слагаемое обусловленное поляризацией электрон-позитронного вакуума [91]:

$$\mathcal{W} = \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} - \frac{e^2}{24\pi^2} \mathbf{E}^2 \ln \frac{e|\mathbf{E}|}{m^2}. \quad (0.10)$$

Обращение плотности энергии поля в ноль при $E = B_c \exp(3\pi/e^2) \sim 10^{560} B_c$ приводит к необходимости рассматривать это значение как предельно возможное. Столь колоссальная абсолютная величина этой напряженности поля, очевидно выходит за границы применимости однопетлевого приближения и требует учета радиационных поправок к Лагранжиану в старших порядках теории возмущения.

Известно множество обобщений и дополнений модели Гейзенберга-Эйлера. Одна из таких эвристическая модификаций, в приближении слабого поля, предложена в [92], и фактически заключается в изменении постоянных коэффициентов перед инвариантами электромагнитного поля в выражении (0.8). Последовательный и обоснованный подход к обобщению однопетлевого Лагранжиана (0.6) для нестационарных, существенно неоднородных полей был развит в [93,94]. Двухпетлевое обобщение модели построено в работах [26, 27, 95, 96]. В частности, в [97] показано, что при постоянных полях, однопетлевые токи, связанные через фотонный пропагатор, обеспечивают нетривиальный вклад в двухпетлевую поправку к эффективному действию Гейзенберга-Эйлера, что ранее не предполагалось. Достаточно необычный результат был получен в [98], где обнаружено, что при конечной температуре двухпетлевая поправка к Лагранжиану Максвелла всегда превышает влияние однопетлевой поправки благодаря тепловому возбуждению внутреннего фотона. В этой работе приводятся вычисления для ряда новых температурных эффектов в экстремально сильных электромагнитных полях, таких как расщепление фотона при низкой температуре, в присутствии магнитного поля, и термически индуцированное рождение электрон-позитронных пар.

Разнообразие моделей нелинейной электродинамики вакуума требует универсального метода описания их эффектов, пригодного, пусть и с учетом некоторых допущений для широкого круга теоретических построений. Большинство из перечисленных ранее моделей подчиняются принципу соответствия, и в приближении слабого поля (по сравнению с характерным масштабным параметром модели) допускают предельный переход в ведущем приближении к электродинамике Максвелла. Учет следующего порядка малости приводит к нелинейным поправкам к Лагранжиану Максвелла,

которые могут быть представлены в виде параметризованного выражения:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32\pi} \left\{ 2J_2 + \xi \left[(\eta_1 - 2\eta_2) J_2^2 + 4\eta_2 J_4 \right] \right\} - \frac{1}{c} A_{kj} j^k, \quad (0.11)$$

где размерный коэффициент связанный с характерной квантовоэлектродинамической индукцией $\xi = 1/B_c^2 = 0.5 \cdot 10^{-27} \text{ Гс}^{-2}$, для инвариантов тензора электромагнитного поля использованы обозначения $J_2 = F_{ik} F^{ki} = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ и $J_4 = F_{ik} F^{kl} F_{lm} F^{mi} = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{E} \mathbf{B})^2$, а безразмерные параметры η_1 и η_2 определяются выбором модели нелинейной электродинамики вакуума. Аналогично пост-ньютоновскому приближению в теории гравитации, разложение Лагранжиана (0.11) принято называть пост-максвелловским приближением. Постмаксвелловские параметры η_1 и η_2 в случае электродинамики Гейзенберга-Эйлера связаны с постоянной тонкой структуры α [99]:

$$\eta_1 = \frac{\alpha}{45\pi} = 5.1 \cdot 10^{-5}, \quad \eta_2 = \frac{7\alpha}{180\pi} = 9.0 \cdot 10^{-5}. \quad (0.12)$$

Для электродинамики Борна-Инфельда эти параметры равны друг другу и могут быть выражены через масштабный параметр напряженности электрического поля $1/a$, характерный для этой теории: $\eta_1 = \eta_2 = a^2 B_c^2 / 4 = 4.9 \cdot 10^{-6}$. Для ранее отмеченных теоретических моделей, зависящих только от одного инварианта J_2 , не тривиальным будет только параметр $\eta_1 \neq 0$.

Уравнения электромагнитного поля в пост-максвелловской приближении с Лагранжианом (0.11) эквивалентны уравнениям электродинамики Максвелла для сплошных сред

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi \rho, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (0.13)$$

дополненных материальными уравнениями с кубичной нелинейностью специального вида, имеющей смысл малой поправки к векторам \mathbf{E} и \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= 4\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{E} + 2\xi \{ \eta_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \mathbf{E} + 2\eta_2 (\mathbf{B} \mathbf{E}) \mathbf{B} \}, \\ \mathbf{H} &= -4\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{B} + 2\xi \{ \eta_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \mathbf{B} - 2\eta_2 (\mathbf{B} \mathbf{E}) \mathbf{E} \}. \end{aligned} \quad (0.14)$$

Следует отметить, что однородные уравнения поля остаются линейными, поэтому для векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , как и в электродинамике Максвелла, выполняется принцип суперпозиции. Влияние нелинейных слагаемых в материальных уравнениях становится существенным, когда абсолютные значения векторов электромагнитного поля становятся близкими к B_c , но при этом вклад первого слагаемого правых частях уравнений (0.14) должен оставаться ведущим. Это требование является условием применимости пост-максвелловского приближения, например, для магнитного поля оно может быть записано в виде $\xi\eta_{1,2}B^2 < 1$. Для большинства доступных в современных условиях источников электромагнитного поля пост-максвелловское приближение выполняется с высокой степенью точности, в то же время, исследование эффектов в непетурбативном режиме, за границами применимости этого приближения, также представляет существенный интерес и может привести к предсказанию новых наблюдательных проявлений нелинейной электродинамики вакуума.

0.2 Общая характеристика диссертации

0.2.1 Актуальность темы исследования

Исследование особенностей электромагнитных процессов в экстремально сильных полях в вакууме в настоящее время является одним из наиболее перспективных направлений развития физики фундаментальных взаимодействий. Выяснение природы таких процессов открывает новые возможности описания широкого круга явлений от субатомных до космологических масштабов. Экспериментальные подтверждения нелинейных электромагнитных явлений в вакууме, таких как рождение электрон-позитронных пар в поле лазерного излучения, расщепление фотона, лэмбовский сдвиг уровней атома водорода, в сочетании с новыми достижениями в физике интенсивных электромагнитных полей и наблюдательной рентгеновской астрономии дают надежду на скорую проверку применимости одного из наиболее разработанных разделов Стандартной модели в новых экстремальных условиях. В связи с чем, изучение возможностей модификации сектора электромагнитных взаимодействий, развитие новых методов описания полевых конфигураций, расширение предсказательной базы эффектов и

способов их регистрации, а также расширение перечня теоретических моделей нелинейной электродинамики вакуума имеет первостепенную актуальность.

В диссертации исследуются наблюдательные проявления различных моделей нелинейной электродинамики вакуума, оценивается возможность их регистрации, как в лабораторных, так и в астрофизических условиях. Полученные в диссертации результаты позволяют выполнить планирование перспективных экспериментальных исследований, направленных на поиск ограничений на значения параметров моделей нелинейной электродинамики вакуума и выяснение корректности этих моделей.

Еще одно актуальное направление исследований современной теории поля связано с изучением структуры пространства-времени компактных астрофизических объектов и особенностей движения частиц вблизи них. В диссертации исследовано регуляризирующее влияние нелинейных моделей электродинамики вакуума на свойства самогравитирующих электровакуумных решений уравнений поля. Показана возможность существования нового класса черных дыр и аксиально симметричных частицеподобных полевых систем.

Для современной теории поля также актуальной является разработка теоретических моделей, построенных на новых принципах, более содержательных чем эвристическое предположение о той или иной форме Лагранжиана. В диссертации предложена новая модель конформно-инвариантной нелинейной электродинамики вакуума, обладающая рядом преимуществ по сравнению с уже известными моделями.

Рассмотренные в диссертации проблемы относятся к области активного научного поиска, что подтверждается значительным числом публикаций по теме исследования в ведущих мировых научных журналах. Планы по созданию перспективных экспериментальных проектов, направленных на выяснение природы электромагнитного вакуума, включенные в программы развития сразу нескольких крупных международных исследовательских центров, позволяют надеяться на скорое появление новых экспериментальных данных и существенный прогресс в этой области.

0.2.2 Цели и задачи исследования

Основной **целью** диссертации является развитие теоретических методов поиска и описания наблюдательных проявлений эффектов нелинейной электродинамики вакуума в экстремально сильных электромагнитных полях. Значительное внимание уделяется описанию электромагнитных процессов, происходящих вблизи компактных астрофизических объектов, разработке новых моделей электродинамики вакуума и принципов их отбора.

В диссертации решаются следующие **основные задачи**.

1. Развитие тетрадного формализма для выявления и анализа новых критериев отбора теоретических моделей нелинейной электродинамики вакуума и проверки их непротиворечивости фундаментальным физическим принципам.
2. Получение решения для поля собственного излучения пульсаров и магнетаров в параметризованном пост-максвелловском приближении, в том числе и при условии быстрого вращения. Определение особенностей диаграммы направленности излучения и влияния поправок нелинейной электродинамики на динамику вращения пульсара.
3. Выявление регуляризирующего воздействия нелинейной электродинамики вакуума на структуру пространства-времени заряженной черной дыры в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда. Определение критических значений параметров, допускающих существование чёрной дыры и её вырожденных состояний.
4. Определение особенностей движения фотонов и массивных частиц в пространстве-времени зараженного коллапсара в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда. Вычисление характеристик орбит частиц и условий их устойчивости, а также получение зависимости размера тени чёрной дыры от её параметров.
5. Проверка возможности существования самосогласованных решений аналогичных геону Мельвина, при различных конфигурациях магнитного поля в моделях нелинейной электродинамики вакуума, обладающих регуляризирующими свойствами, а также в конформно-инвариантной модели.

6. Описание распространения импульсов жесткого рентгеновского излучения в поле пульсаров и магнетаров при произвольном расположении источника и приемника излучения. Исследование влияния нелинейно-электродинамического воздействия поля вращающегося пульсара на транзиентное излучение.
7. Оценка возможностей регистрации эффекта относительного запаздывания нормальных мод излучения в поле пульсара в современных и перспективных астрофизических экспериментах.
8. Исследование эффекта двулучепреломления вакуума в непертурбативном приближении однопетлевой электродинамики Гейзенберга-Эйлера. Получение эффективных показателей преломления электромагнитных волн в экстремально сильном однородном магнитном поле.
9. Построение новой модели нелинейной электродинамики вакуума, обладающей групповыми симметриями теории Максвелла, в том числе конформной инвариантностью. Исследование наблюдательных проявлений новой теоретической модели: двулучепреломления и эффекта оптической невзаимности электромагнитных волн. Поиск точных аналитических решений уравнений Эйнштейна в конформно-инвариантной нелинейной электродинамике вакуума, описывающих компактные астрофизические объекты.
10. Исследование возможных нарушений дуальной симметрии в моделях конформно-инвариантной нелинейной электродинамики. Получение производящего уравнения для новых моделей с произвольным параметром нарушения, при сохранении предельного перехода к электродинамике Максвелла и модели ModMax.

0.2.3 Научная новизна

В работах, составляющих основу диссертации, получен ряд новых научных результатов важных для развития современной теории поля и планирования экспериментального исследования процессов, протекающих в экстремально сильных электромагнитных полях.

Был предложен новый вид энергетического условия, следующего из структуры тензора энергии-импульса нелинейной электродинамики вакуума. Проведена проверка выполнения этого условия для динамики идеальной жидкости и вещественного, массивного скалярного поля.

Была исследована структура пространства-времени зараженной черной дыры в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда. Обнаружена возможность существования особого состояния черной дыры в виде двухкратно вырожденной «черной точки», а также новая нетривиальная зависимость размера тени черной дыры от ее параметров.

Был исследован непертурбативный эффект двулучепреломления вакуума в экстремально сильном магнитном поле в однопетлевой модели электродинамики Гейзенберга-Эйлера. Были установлены новые соотношения между эффективными показателями преломления вакуума и индукцией магнитного поля.

Была предложена новая модель конформно-инвариантной нелинейной электродинамики вакуума, для которой установлено отсутствие зависимости эффективных показателей преломления вакуума от интенсивности электромагнитного поля. Разработана методика построения новых моделей нелинейной электродинамики нарушающих условие дуальной симметрии.

0.2.4 Теоретическая и практическая значимость работы

Разработанные в диссертации методы, и полученные результаты вносят важный вклад в развитие современной теории поля и представляют не только академический интерес, но и имеют прикладное значение для выполнения экспериментальных проектов связанных с созданием интенсивных лазерных источников, наблюдательной рентгеновской астрофизики и других сферах исследований связанных с электромагнитными процессами, протекающими в экстремально сильных полях.

Предложенный в диссертации новый принцип построения моделей нелинейной электродинамики вакуума, заключающийся в наследовании групповых симметрий теории Максвелла, привел к получению нового класса моделей, обладающих конформно-инвариантными свойствами.

Выполненный в диссертации расчет эффекта запаздывания электромагнитных импульсов в поле пульсаров и магнетаров показал возможность

регистрации эффекта двулучепреломления вакуума в перспективных проектах поляриметрических наблюдений компактных астрофизических объектов.

Результаты научных публикаций, составляющих основу диссертации, представляют интерес для научного сообщества и используются в дальнейших исследованиях другими учеными, что подтверждается публикациями в высокорейтинговых журналах, высокими индексами просмотра работ и их цитированием.

0.2.5 Объект и предмет исследования

Объектами исследования являются конфигурации электромагнитного и гравитационного поля в моделях нелинейной электродинамики вакуума, в том числе связанные с компактными астрофизическими объектами, такими как заряженные чёрные дыры, пульсары и магнетары. **Предметами** исследования являются электромагнитные эффекты в экстремально сильном поле, методы их описания и способы регистрации в лабораторных и космических экспериментах.

0.2.6 Методология и методы исследования

В диссертации используется системный методологический подход направленный на разностороннее описание эффектов нелинейной электродинамики вакуума и развитие новых теоретических моделей. Основные результаты диссертации получены с помощью аналитических методов современной классической теории поля, специальных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и численного моделирования. Для выполнения громоздких вычислений, автором диссертации был подготовлен пакет прикладных программ с использованием системы аналитических вычислений «REDUCE».

0.2.7 Положения, выносимые на защиту

1. Структура тензора энергии-импульса Лоренц-инвариантной нелинейной электродинамики вакуума допускает формулировку нового энергетического условия, в виде положительно определенной квадратич-

ной формы, построенной для произвольной степени девиатора тензора энергии импульса, которое также выполняется для произвольной динамики идеальной жидкости, но может нарушаться для некоторых частных конфигураций скалярного поля.

2. Теория Эйнштейна-Борна-Инфельда допускает возможность существования нового, особого состояния заряженной чёрной дыры в виде двухкратно вырожденной чёрной точки, для которой эффективное пространство-время фотонов не имеет особенностей, но при этом псевдориманово пространство содержит времениподобную сингулярность в начале координат. Радиус тени такой чёрной дыры может увеличиваться с ростом её заряда, при некоторых значениях массы, что не характерно для решения Рейснера-Нордстрема с аналогичными параметрами.
3. В непертурбативном режиме однопетлевой нелинейной электродинамики Гейзенберга-Эйлера сохраняется эффект двулучепреломления в вакууме. Общее решение задачи о запаздывании электромагнитных импульсов жесткого рентгеновского и гамма-излучения в поле пульсаров и магнетаров указывает на возможность регистрации эффекта двулучепреломления в вакууме в условиях современного спутникового эксперимента.
4. Принцип наследования групповых симметрий электродинамики Максвелла приводит к модели конформно-инвариантной нелинейной электродинамики вакуума, для которой наблюдаются эффекты двулучепреломления электромагнитных волн и оптической невзаимности в постоянном электромагнитном поле. Эффективные показатели преломления вакуума в конформно-инвариантной модели не зависят от модулей векторов фонового электромагнитного поля.

0.2.8 Достоверность результатов

Результаты диссертации были получены на основании современных методов математической физики и классической теории поля в искривленном пространстве-времени. Предложенные в диссертации новые модели не

противоречат фундаментальным физическим принципам и в предельных случаях соответствуют известным результатам других авторов и научных групп. Для выполнения численного моделирования применялись верифицированные алгоритмы и программные пакеты.

Все основные результаты диссертации были опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах с высоким индексом цитирования, а также были представлены автором диссертации лично на научных семинарах и конференциях.

0.2.9 Апробация работы

Результаты диссертации неоднократно докладывались на научных семинарах кафедры теоретической физики МГУ имени М.В.Ломоносова, семинаре отдела теоретической физики высоких энергий НИИЯФ МГУ имени М.В. Ломоносова, семинаре по гравитации и космологии имени А.Л. Зельманова ГАИШ МГУ, семинаре ИЗМИРАН имени Н.В. Пушкова и научных конференциях:

1. «Класс нелинейных электродинамик вакуума с бесследовым тензором энергии-импульса», XVI Всероссийская школа-семинар «Физика и применение микроволн» имени профессора А.П. Сухорукова («Волны-2017»), 4-9 июня 2017, Красновидово, Россия.
2. «Применение формализма Ньюмена-Пенроуза для поиска точных решений уравнений нелинейной электродинамики в астрофизических приложениях», Международная конференция «Ломоносов», 2009, Москва, Россия.
3. «Исследование эффектов нелинейной электродинамики вакуума.» Международная конференция «Ломоносов», 2006, Москва, Россия.
4. «Применение формализма Ньюмена-Пенроуза к задачам нелинейной электродинамики вакуума», Международная конференции «Ломоносов», 2005, Москва, Россия.

0.2.10 Публикации и личный вклад автора

Результаты диссертации опубликованы в 15 статьях [32, 33, 100–112] в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук, в том числе 10 из них опубликованы в журналах первого квартала (Q1).

Результаты статей получены при непосредственном участии автора диссертации. Во всех публикациях, в том числе и в работах опубликованных в соавторстве, вклад автора диссертации является определяющим. Автор принимал активное участие в постановке задач, построении новых моделей, получении решений, анализе и интерпретации полученных результатов. При этом необходимо отметить следующее.

В работе [100], на основании результатов, полученных автором диссертации, В.И. Денисовым был выполнен анализ некоторых частных свойств метрики пространства-времени заряженной чёрной дыры. В работе [101], на основании решений уравнений геодезических лучей, полученных автором диссертации, М.И. Васильевым была выполнена количественная оценка искривления лучей в поле пульсара и эффекта относительного запаздывания нормальных волн. В работе [102], постановка задачи и получение аналитических результатов были выполнены автором диссертации совместно с В.И. Денисовым. И.П. Денисовой была проведена верификация вычислений и подготовлен литературный обзор. В работе [103], аналитические вычисления были выполнены автором совместно с В.И. Денисовым. М.И. Васильевым был подготовлен обзор астрофизических данных, необходимых для количественной оценки эффекта. В работе [104] В.И. Денисовым была выполнена оценка функций крутящего момента, соответствующих гравитационному излучению пульсара. М.И. Васильевым подготовлены астрофизические данные для пульсаров и литературный обзор. Б.Н. Швилкиным была проведена верификация результатов вычислений. В работе [105], постановка задачи и вычисление характеристик излучения пульсара были выполнены автором диссертации совместно с В.И. Денисовым. А.Б. Пименовым были выполнены количественные оценки некоторых параметров задачи и подготовлен литературный обзор. И.П. Денисовой была проведена верификация результатов аналитических вычислений. В работе [106] В.И.

Денисовым был подготовлен обзор моделей нелинейной электродинамики вакуума. Верификация результатов вычислений для вырожденных круговых орбит была выполнена В.А. Ильиной. В работе [107], непertурбативные коэффициенты двулучепреломления вакуума были получены автором диссертации совместно с В.И. Денисовым. Е.Е. Долгой была выполнена количественная оценка времени запаздывания нормальных мод и подготовка графического материала. В работе [32] Е.Е. Долгой и И.П. Денисовой был подготовлен литературный обзор. В.И. Денисовым была проведена адаптация некоторых фундаментальных ограничений для моделей нелинейной электродинамики, представленных в лоренц-инвариантной форме, и выполнена верификация результатов. В работе [108] постановка и решение задачи о распространении электромагнитных волн в поле пульсара были получены автором диссертации совместно с В.И. Денисовым. Описание методики детектирования и оценка возможностей регистрации эффекта двулучепреломления вакуума в современных астрофизических миссиях были выполнены автором диссертации совместно с С.И. Свертиловым. В работе [33] Б.Д. Гармаевым была проведена проверка возможности комбинирования Лагранжианов для построения моделей конформно-инвариантной нелинейной электродинамики вакуума. И.П. Денисовой был подготовлен литературный обзор и верификация результатов. В работе [109] Б.Д. Гармаевым был выполнен литературный обзор известных энергетических условий. В.С. Ростовский принимал активное участие в постановке задачи и анализе результатов, полученных автором диссертации. Важно отметить, что все результаты, вошедшие в диссертацию, получены автором лично.

0.2.11 Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, двух приложений и списка литературы. Работа изложена на 235 страницах, включает в себя 18 рисунков и 9 таблиц. Общее число ссылок на литературные источники 266.

Во введении описаны основные модели нелинейной электродинамики вакуума и некоторые эффекты, связанные с ними. Изложены основные принципы построения современных моделей, представлена история развития исследований в области физики интенсивных электромагнитных полей

и выполнен литературный обзор современной проблематики. Во Введении также приводится общая характеристика диссертации: обоснована ее актуальность, определены цели, задачи и методология исследования, отмечена научная новизна и указана теоретическая и практическая значимость работы. Перечислены положения, выносимые на защиту, отмечен личный вклад автора, указан список научных работ, содержащих результаты диссертации и степень их достоверности, приведено описание структуры диссертации.

В первой главе рассматривается применение тетрадного формализма для описания эффектов нелинейной электродинамики вакуума и проверки непротиворечивости новых моделей фундаментальными принципам. Выполнено описание критериев унитарности и причинности, а также энегодоминантного условия в тетрадном представлении. Предложено новое энергетическое условие, следующее из структуры тензора энергии-импульса нелинейной электродинамики вакуума произвольного вида. Выполнена проверка применимости нового условия для некоторых динамических систем. Основные результаты первой главы опубликованы в [109]. Также в этой главе для целостности изложения приводится методика получения и интегрирования уравнения нелинейной электродинамики вакуума в формализме спиновых коэффициентов, описанная нами ранее в работе [113].

Во второй главе приводится описание эффектов нелинейной электродинамики вакуума, протекающих вблизи компактных астрофизических объектов. Вычисляются характеристики собственного излучения вращающихся пульсаров и его влияние на замедление вращения. Исследуется структура пространства-времени заряженной черной дыры в теории Эйнштейна-Максвелла; изучаются особенности движения массивных и безмассовых частиц в поле такой черной дыры. Для ряда моделей нелинейной электродинамики вакуума приводятся решения, описывающие частицеподобные самогравитирующие конфигурации магнитного поля, аналогичные геону Мельвина. Результаты второй главы опубликованы в работах [100, 104–106, 111].

В третьей главе рассматривается задача о распространении импульсов электромагнитного излучения в магнитном поле пульсаров и магнетаров. Приводится вычисление эффекта запаздывания нормальных мод для излучения, исходящего из магнитосферы пульсара и для транзиентного излу-

чения; оценивается влияние электромагнитных эффектов, обусловленных вращением пульсара. На основании полученных аналитических результатов, проводится оценка возможности регистрации эффекта двулучепреломления вакуума в современном спутниковом эксперименте. Результаты, обсуждающиеся в третьей главе, опубликованы в статьях [101–103, 108].

Четвертая глава посвящена описанию эффекта двулучепреломления вакуума в пертурбативном и непертурбативном режимах для различных полевых конфигураций. Получены новые зависимости эффективных показателей двулучепреломления вакуума в магнитном поле для однопетлевой электродинамики Гейзенберга-Эйлера. Выполнена оценка эффекта запаздывания электромагнитных волн в магнитном поле пульсара в непетрубативном приближении. Основные результаты четвертой главы опубликованы в работе [107].

В пятой главе приводится описание новой модели конформно-инвариантной нелинейной электродинамики вакуума. Исследованы свойства модели и получены точные аналитические решения уравнений поля для нее. Предложен механизм нарушения дуальной инвариантности, приводящий к частным моделям нелинейной электродинамики с конформно-инвариантными свойствами. Результаты пятой главы опубликованы в работах [32, 33, 110].

1 Развитие тетрадного формализма для описания эффектов нелинейной электродинамики вакуума

1.1 Уравнения нелинейной электродинамики вакуума в формализме спиновых коэффициентов

Получение точных аналитических решений нелинейных уравнений является одним из наиболее актуальных направлений развития современной теории поля. Аналитическая форма решения позволяет установить зависимость от параметров теории, рассмотреть предельные частные случаи, установить условия устойчивости, существования решения и возможности его физической реализации. В большинстве случаев нелинейных задач по-

иск таких решений является эвристическим и сводится к подбору интегрирующих комбинаций, обеспечивающих частное или общее решение уравнений. Чем большее число степеней свободы сохраняется при выборе таких комбинаций, тем выше вероятность получить решение, поэтому применение методов интегрирования, сводящих задачу к переопределенной системе уравнений представляется крайне перспективным. Одним из таких методов, продемонстрировавшим продуктивность при интегрировании нелинейных дифференциальных уравнений в Общей теории относительности и некоторых альтернативных моделях гравитации, является формализм Ньюмена-Пенроуза [114–118] или формализм спиновых коэффициентов.

В основе формализма лежит решение уравнений переноса для четырехмерных векторов нулевой тетрады путем, вычисления или частичного доопределения двенадцати спиновых коэффициентов. Значительная часть точных решений уравнений Общей теории относительности, например, метрики Керра-Ньюмена-Унти-Тамбурино, С-метрики Элерса-Кундта и другие [119–123], получены благодаря использованию именно этого подхода. Столь высокая продуктивность метода кроется в нескольких причинах: в отличие от традиционного Лагранжева формализма, описание полевой системы производится с помощью дифференциальных уравнений первого порядка для скалярных величин, не содержащих свободных индексов; структура уравнений позволяет достаточно просто задавать необходимые симметрии пространства-времени или полевой конфигурации; некоторые из спиновых коэффициентов имеют простую геометрическую интерпретацию, что позволяет налагать на них дополнительные условия, связанные с постановкой задачи.

Последовательное описание процедуры построения уравнений гравитации в формализме Ньюмена-Пенроуза можно найти в обзорах [116, 117]. Уравнения произвольной Лоренц-инвариантной нелинейной электродинамики, в представлении этого формализма, были получены нами в [113], и их краткое описание приводится ниже для целостности изложения.

При наличии источников, Лагранжиан произвольной модели электродинамики в искривленном пространстве-времени имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} L(J_2, J_4) - \frac{\sqrt{-g}}{c} A_k j^k, \quad (1.1)$$

где L – некоторая функция инвариантов тензора электромагнитного поля J_2 и J_4 , а g – определитель метрического тензора. Динамические уравнения нелинейной электродинамики могут быть получены в результате варьирования Лагранжиана (1.1) по переменным электромагнитного поля:

$$\nabla_k F_{nm} + \nabla_m F_{kn} + \nabla_n F_{mk} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \sqrt{-g} \left[\frac{\partial L}{\partial J_2} F^{ki} + 2 \frac{\partial L}{\partial J_4} F_{(3)}^{ki} \right] \right\} = -\frac{4\pi}{c} j^k, \quad (1.3)$$

где для сокращения записи использовано обозначение для третьей степени $F_{(3)}^{ik} = F^{in} F_{nm} F^{mk}$ тензора электромагнитного поля, а также ∇_i – ковариантной производной по координате x^i в пространстве-времени с метрическим тензором g_{ik} , а j^k – четырехмерный вектор плотности тока.

В формализме Ньюмена-Пенроуза, в каждой точке пространства-времени вводится четыре изотропных вектора l_k, n_k, m_k и \bar{m}_k , которые принято называть базисной тетрадой. Векторы l_k, n_k будем считать действительными, а m_k и \bar{m}_k – комплексно сопряженными по отношению друг к другу. Скалярное произведение векторов базисной тетрады определяется в виде:

$$l_k l^k = n_k n^k = m_k m^k = n_k m^k = l_k m^k = 0, \quad l_k n^k = -\bar{m}_k m^k = 1. \quad (1.4)$$

Для перехода к описанию в формализме Ньюмена-Пенроуза, необходимо выполнить проецирование уравнений (1.2)-(1.3) на векторы базисной тетрады (1.4), а также разложить метрический тензор и тензор электромагнитного поля по диадным произведениям базисных векторов:

$$g_{ik} = l_i n_k + l_k n_i - m_i \bar{m}_k - m_k \bar{m}_i. \quad (1.5)$$

Динамическими переменными, в данном случае, являются компоненты векторов изотропной тетрады, выражения для них определяют структуру пространства-времени и вычисляются из уравнений гравитационного поля. Запишем разложение для компонент антисимметричный тензор электромагнитного поля, учитывающее его вещественность:

$$\begin{aligned} F_{ik} = & (l_i n_k - l_k n_i) f_1 + (l_i m_k - m_i l_k) f_2 + (l_i \bar{m}_k - \bar{m}_i l_k) \bar{f}_2 + \\ & + (n_i m_k - m_i n_k) f_3 + (n_i \bar{m}_k - \bar{m}_i n_k) \bar{f}_3 + i(m_i \bar{m}_k - \bar{m}_i m_k) f_4, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где скалярные коэффициенты f_1, f_2, f_3, f_4 имеют смысл новых динамических переменных электромагнитного поля. В общем случае, f_1 и f_4 вещественные функции координат, а f_2 и f_3 – комплексные. Для определения компонент векторов l_k, n_k, m_k, \bar{m}_k и скалярных коэффициентов f_1, f_2, f_3, f_4 необходимо выполнить совместное решение системы уравнений Эйнштейна и уравнений нелинейной электродинамики (1.2) и (1.3), спроецированных на векторы базисной тетрады. Чтобы получить такие проекции, воспользуемся возможностью разложения произвольного тензора по базису тетрады l^k, n^k, m^k, \bar{m}^k , в частности, выполним разложение для ковариантных производных от базисных векторов:

$$\begin{aligned}
\nabla_i l_k &= l_i [a_{11} l_k + a_{12} n_k + a_{13} m_k + a_{14} \bar{m}_k] + n_i [a_{21} l_k + a_{22} n_k + a_{23} m_k + a_{24} \bar{m}_k] + \\
&\quad + m_i [a_{31} l_k + a_{32} n_k + a_{33} m_k + a_{34} \bar{m}_k] + \bar{m}_i [a_{41} l_k + a_{42} n_k + a_{43} m_k + a_{44} \bar{m}_k], \\
\nabla_i n_k &= l_i [b_{11} l_k + b_{12} n_k + b_{13} m_k + b_{14} \bar{m}_k] + n_i [b_{21} l_k + b_{22} n_k + b_{23} m_k + b_{24} \bar{m}_k] + \\
&\quad + m_i [b_{31} l_k + b_{32} n_k + b_{33} m_k + b_{34} \bar{m}_k] + \bar{m}_i [b_{41} l_k + b_{42} n_k + b_{43} m_k + b_{44} \bar{m}_k], \\
\nabla_i m_k &= l_i [c_{11} l_k + c_{12} n_k + c_{13} m_k + c_{14} \bar{m}_k] + n_i [c_{21} l_k + c_{22} n_k + c_{23} m_k + c_{24} \bar{m}_k] + \\
&\quad + m_i [c_{31} l_k + c_{32} n_k + c_{33} m_k + c_{34} \bar{m}_k] + \bar{m}_i [c_{41} l_k + c_{42} n_k + c_{43} m_k + c_{44} \bar{m}_k], \\
\nabla_i \bar{m}_k &= l_i [h_{11} l_k + h_{12} n_k + h_{13} m_k + h_{14} \bar{m}_k] + n_i [h_{21} l_k + h_{22} n_k + h_{23} m_k + h_{24} \bar{m}_k] + \\
&\quad + m_i [h_{31} l_k + h_{32} n_k + h_{33} m_k + h_{34} \bar{m}_k] + \bar{m}_i [h_{41} l_k + h_{42} n_k + h_{43} m_k + h_{44} \bar{m}_k],
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где коэффициенты a_{ij}, b_{il}, c_{ij} и h_{ij} , являются структурными константами и непосредственно связаны с коэффициентами вращения Риччи, при этом не все из них являются независимыми. Найдем наиболее общие ограничения на структурные коэффициенты. Векторы l_k и n_k , действительные, поэтому коэффициенты разложения должны быть таковы, чтобы выполнялось условие:

$$\overline{(\nabla_i l_k)} = \nabla_i l_k, \quad \overline{(\nabla_i n_k)} = \nabla_i n_k,$$

из которого следует, что коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ и $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ являются вещественными, а остальные – комплексными, причем должны вы-

полняться следующие соотношения:

$$a_{14} = \bar{a}_{13}, \quad a_{24} = \bar{a}_{23}, \quad a_{41} = \bar{a}_{31}, \quad a_{42} = \bar{a}_{32}, \quad a_{43} = \bar{a}_{34}, \quad a_{44} = \bar{a}_{33},$$

$$b_{14} = \bar{b}_{13}, \quad b_{24} = \bar{b}_{23}, \quad b_{41} = \bar{b}_{31}, \quad b_{42} = \bar{b}_{32}, \quad b_{43} = \bar{b}_{34}, \quad b_{44} = \bar{b}_{33}.$$

Учтем что векторы m^i и \bar{m}^i являются сопряженными друг к другу, и поэтому из аналогичного условия для их производных

$$\overline{(\nabla_i m_k)} = \nabla_i \bar{m}_k$$

становится возможным связать все коэффициенты h_{ij} и c_{ij} между собой:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \bar{c}_{11}, & h_{12} &= \bar{c}_{12}, & h_{13} &= \bar{c}_{14}, & h_{14} &= \bar{c}_{13}, \\ h_{21} &= \bar{c}_{21}, & h_{22} &= \bar{c}_{22}, & h_{23} &= \bar{c}_{24}, & h_{24} &= \bar{c}_{23}, \\ h_{31} &= \bar{c}_{41}, & h_{32} &= \bar{c}_{42}, & h_{33} &= \bar{c}_{44}, & h_{34} &= \bar{c}_{43}, \\ h_{41} &= \bar{c}_{31}, & h_{42} &= \bar{c}_{32}, & h_{43} &= \bar{c}_{34}, & h_{44} &= \bar{c}_{33}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для получения дополнительных зависимостей между коэффициентами, подействуем ковариантной производной ∇_i в фоновом пространстве-времени с метрическим тензором (1.5) на скалярные произведения базисных векторов (1.4), в результате получим ряд соотношений:

$$l^k \nabla_i l_k = n^k \nabla_i n_k = m^k \nabla_i m_k = 0, \quad l^k \nabla_i n_k = -n^k \nabla_i l_k,$$

$$l^k \nabla_i m_k = -m^k \nabla_i l_k, \quad n^k \nabla_i m_k = -m^k \nabla_i n_k, \quad m^k \nabla_i \bar{m}_k = -\bar{m}^k \nabla_i m_k,$$

подставляя в которые выражения для ковариантных производных базисных векторов, и учитывая соотношения между структурными коэффициентами (1.8) найдем:

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{22} = a_{32} = a_{42} = b_{11} = b_{21} = b_{31} = b_{41} = c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{44} = 0, \\ b_{12} &= -a_{11}, \quad b_{22} = -a_{21}, \quad b_{32} = -a_{31}, \quad b_{42} = \bar{b}_{32} = \bar{a}_{31} = -a_{41}, \quad c_{12} = \bar{a}_{13}, \\ c_{22} &= \bar{a}_{23}, \quad c_{32} = a_{34}, \quad c_{42} = \bar{a}_{33}, \quad c_{11} = \bar{b}_{13}, \\ c_{21} &= \bar{b}_{23}, \quad c_{31} = b_{34}, \quad c_{41} = \bar{b}_{33}, \quad c_{13} = -\bar{c}_{13}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{21} &= \bar{b}_{23}, & c_{31} &= b_{34}, & c_{41} &= \bar{b}_{33}, & c_{13} &= -\bar{c}_{13}, \\
c_{23} &= -\bar{c}_{23}, & c_{33} &= -\bar{c}_{43}, & c_{43} &= -\bar{c}_{33}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

После подстановки найденных связей между коэффициентами, разложения для ковариантных производных векторов базисной тетрады (1.7) примут вид:

$$\begin{aligned}
\nabla_i l_k &= l_i [a_{11} l_k + a_{13} m_k + \bar{a}_{13} \bar{m}_k] + n_i [a_{21} l_k + a_{23} m_k + \bar{a}_{23} \bar{m}_k] + \\
&+ m_i [a_{31} l_k + a_{33} m_k + a_{34} \bar{m}_k] + \bar{m}_i [\bar{a}_{31} l_k + \bar{a}_{34} m_k + \bar{a}_{33} \bar{m}_k], \\
\nabla_i n_k &= l_i [-a_{11} n_k + b_{13} m_k + \bar{b}_{13} \bar{m}_k] + n_i [-a_{21} n_k + b_{23} m_k + \bar{b}_{23} \bar{m}_k] + \\
&+ m_i [-a_{31} n_k + b_{33} m_k + b_{34} \bar{m}_k] + \bar{m}_i [-\bar{a}_{31} n_k + \bar{b}_{34} m_k + \bar{b}_{33} \bar{m}_k], \\
\nabla_i m_k &= l_i [\bar{b}_{13} l_k + \bar{a}_{13} n_k + c_{13} m_k] + n_i [\bar{b}_{23} l_k + \bar{a}_{23} n_k + c_{23} m_k] + \\
&+ m_i [b_{34} l_k + a_{34} n_k + c_{33} m_k] + \bar{m}_i [\bar{b}_{33} l_k + \bar{a}_{33} n_k - \bar{c}_{33} m_k], \\
\nabla_i \bar{m}_k &= l_i [b_{13} l_k + a_{13} n_k - c_{13} \bar{m}_k] + n_i [b_{23} l_k + a_{23} n_k - c_{23} \bar{m}_k] + \\
&+ m_i [b_{33} l_k + a_{33} n_k - c_{33} \bar{m}_k] + \bar{m}_i [\bar{b}_{34} l_k + \bar{a}_{34} n_k + \bar{c}_{33} \bar{m}_k].
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Сохранившиеся четыре вещественных a_{11} , a_{21} , c_{13} , c_{23} и тринадцать комплексных коэффициентов a_{13} , a_{23} , a_{31} , a_{33} , a_{34} , b_{13} , b_{23} , b_{31} , b_{33} , b_{34} , c_{13} , c_{23} , c_{33} в полной мере не являются независимыми и могут быть выражены через двенадцать комплексных величин α , β , γ , ε , λ , μ , ν , π , ρ , σ , τ , χ , называемых спиновыми коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2} [n^i \bar{\delta} l_i - \bar{m}^i \bar{\delta} m_i], & \chi &= m^i D l_i, & \pi &= -\bar{m}^i D n_i, \\
\beta &= \frac{1}{2} [n^i \delta l_i - \bar{m}^i \delta m_i], & \rho &= m^i \bar{\delta} l_i, & \lambda &= -\bar{m}^i \bar{\delta} n_i, \\
\gamma &= \frac{1}{2} [n^i \Delta l_i - \bar{m}^i \Delta m_i], & \sigma &= m^i \delta l_i, & \mu &= -\bar{m}^i \delta n_i, \\
\varepsilon &= \frac{1}{2} [n^i D l_i - \bar{m}^i D m_i], & \tau &= m^i \Delta l_i, & \nu &= -\bar{m}^i \Delta n_i,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где использованы общепринятые в литературе обозначения $D = l^i \nabla_i$, $\delta = m^i \nabla_i$, $\Delta = n^i \nabla_i$ и $\bar{\delta} = \bar{m}^i \nabla_i$ для проекций ковариантных производных на направления базисных векторов. Следует отметить, что возможно альтернативное определение спиновых коэффициентов, однако в дальнейшем

будем придерживаться определения (1.11), как более часто встречающегося в литературе.

Окончательные выражения для ковариантных производных от базисных векторов в представлении спиновых коэффициентов примут вид:

$$\begin{aligned}
\nabla_i l_k &= l_i[(\gamma + \bar{\gamma})l_k - \bar{\tau}m_k - \tau\bar{m}_k] + n_i[(\varepsilon + \bar{\varepsilon})l_k - \bar{\chi}m_k - \chi\bar{m}_k] \\
&\quad + m_i[-(\bar{\beta} + \alpha)l_k + \bar{\sigma}m_k + \rho\bar{m}_k] + \bar{m}_i[-(\beta + \bar{\alpha})l_k + \bar{\rho}m_k + \sigma\bar{m}_k], \\
\nabla_i n_k &= l_i[-(\gamma + \bar{\gamma})n_k + \nu m_k + \bar{\nu}\bar{m}_k]n_i[-(\varepsilon + \bar{\varepsilon})n_k + \pi m_k + \bar{\pi}\bar{m}_k] + \\
&\quad + m_i[(\bar{\beta} + \alpha)n_k - \lambda m_k - \bar{\mu}\bar{m}_k] + \bar{m}_i[(\beta + \bar{\alpha})n_k - \mu m_k - \bar{\lambda}\bar{m}_k], \\
\nabla_i m_k &= l_i[\bar{\nu}l_k - \tau n_k + (\gamma - \bar{\gamma})m_k] + n_i[\bar{\pi}l_k - \chi n_k + (\varepsilon - \bar{\varepsilon})m_k] \\
&\quad + m_i[-\bar{\mu}l_k + \rho n_k - (\alpha - \bar{\beta})m_k] + \bar{m}_i[-\bar{\lambda}l_k + \sigma n_k + (\bar{\alpha} - \beta)m_k], \\
\nabla_i \bar{m}_k &= l_i[\nu l_k - \bar{\tau}n_k + (\bar{\gamma} - \gamma)\bar{m}_k] + n_i[\pi l_k - \bar{\chi}n_k + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\bar{m}_k] \\
&\quad + m_i[-\lambda l_k + \bar{\sigma}n_k + (\alpha - \bar{\beta})\bar{m}_k] + \bar{m}_i[-\mu l_k + \bar{\rho}n_k - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{m}_k].
\end{aligned} \tag{1.12}$$

С помощью выражений (1.5) и (1.12), несложно убедиться в тождественном выполнении равенства нулю ковариантной производной от компонент метрического тензора $\nabla_i g_{nk} = 0$, что позволяет выполнить верификацию вычислений на промежуточном этапе.

Для получения однородных уравнений электромагнитного поля в формализме Ньюмена-Пенроуза выполним подстановку разложения компонент тензора электромагнитного поля по базисной тетраде (1.6) в уравнения (1.2) и учитывая соотношения (1.4), (1.12) выполним проецирование этих уравнений на базисные векторы, в результате чего получим:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\bar{f}_2 - \delta f_2 + i\Delta f_4 - (2\beta - \tau)f_2 + (2\bar{\beta} - \bar{\tau})\bar{f}_2 + \nu\bar{f}_3 - \bar{\nu}f_3 + \\
+ (\bar{\mu} - \mu)f_1 + i(\bar{\mu} + \mu)f_4 = 0, \\
\bar{\delta}\bar{f}_3 - \delta f_3 + iDf_4 - (2\alpha - \pi)\bar{f}_3 + (2\bar{\alpha} - \bar{\pi})f_3 - \bar{\chi}\bar{f}_2 + \chi f_2 + \\
+ (\rho - \bar{\rho})f_1 - i(\rho + \bar{\rho})f_4 = 0, \\
\bar{\delta}f_1 - \Delta\bar{f}_3 + Df_2 + (2\varepsilon - \rho)f_2 + (2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\bar{f}_3 - \lambda\bar{f}_3 + (\pi - \bar{\tau})f_1 - \\
- \bar{\sigma}\bar{f}_2 - i(\pi + \bar{\tau})f_4 = 0, \\
\delta f_1 - \Delta\bar{f}_3 + D\bar{f}_2 + (2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\bar{f}_2 + (2\gamma - \mu)\bar{f}_3 - \bar{\lambda}f_3 + (\bar{\pi} - \tau)f_1 -
\end{aligned}$$

$$-\sigma f_2 + i(\bar{\pi} + \tau)f_4 = 0. \quad (1.13)$$

Последнее уравнение этой системы представляет собой комплексное сопряжение предпоследнего уравнения и может быть исключено из дальнейшего рассмотрения. Выполнив аналогичную процедуру проецирования неоднородных уравнений (1.3) получим:

$$\begin{aligned} & \bar{\delta}\{Y_2\bar{f}_3 + 2Y_4\bar{f}_3[f_1^2 + if_1f_4 + f_2\bar{f}_3 + 3\bar{f}_2f_3 - f_4^2]\} + \delta\{Y_2f_3 + \\ & + 2Y_4f_3[f_1^2 - if_1f_4 + \bar{f}_2f_3 + 3f_2\bar{f}_3 - f_4^2]\} - D\{Y_2f_1 + 2Y_4[f_1^3 + i(f_2\bar{f}_3 - \\ & - \bar{f}_2f_3)f_4 + 2(f_2\bar{f}_3 + \bar{f}_2f_3)f_1]\} - Y_2\{i(\rho - \bar{\rho})f_4 - \pi\bar{f}_3 - \bar{\pi}f_3 - (\rho + \bar{\rho})f_1 - \\ & - \chi f_2 - \bar{\chi}\bar{f}_2 + 2\bar{\alpha}f_3 + 2\alpha\bar{f}_3\} - 2Y_4\{i[\bar{\pi}f_1f_3 - \pi f_1\bar{f}_3 - \chi f_1f_2 + \bar{\chi}f_1\bar{f}_2 + \\ & + 2\alpha f_1\bar{f}_3 - 2\bar{\alpha}f_1f_3 + \rho f_2\bar{f}_3 - \bar{\rho}\bar{f}_2f_3 + 3\rho\bar{f}_2f_3 - 3\bar{\rho}f_2\bar{f}_3 - (\rho - \bar{\rho})f_4^2]f_4 + \\ & + f_1^2[2\alpha\bar{f}_3 + 2\bar{\alpha}f_3 - \bar{\pi}f_3 - \pi\bar{f}_3 - (\rho + \bar{\rho})f_1 - \chi f_2 - \bar{\chi}\bar{f}_2] + f_4^2[\pi\bar{f}_3 + \bar{\pi}f_3 - \\ & - 2\bar{\alpha}f_3 - 2\alpha\bar{f}_3 + \bar{\chi}\bar{f}_2 + \chi f_2] + (2\alpha - \pi)f_2\bar{f}_3^2 + (2\bar{\alpha} - \bar{\pi})f_3^2\bar{f}_2 - \\ & - \chi f_2^2\bar{f}_3 - \bar{\chi}\bar{f}_2^2f_3 - 3\pi\bar{f}_2f_3\bar{f}_3 - 3\bar{\pi}f_2f_3\bar{f}_3 - 3\chi f_2\bar{f}_2f_3 - 3\bar{\chi}f_2\bar{f}_2\bar{f}_3 - \\ & - (\rho + 3\bar{\rho})f_1f_2\bar{f}_3 - (\bar{\rho} + 3\rho)f_1\bar{f}_2f_3 + 6\alpha\bar{f}_2f_3\bar{f}_3 + 6\bar{\alpha}f_2f_3\bar{f}_3\} = -\frac{4\pi}{c}j^L, \quad (1.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{\delta}\{Y_2\bar{f}_2 + 2Y_4\bar{f}_2[f_1^2 - if_1f_4 + \bar{f}_2f_3 + 3f_2\bar{f}_3 - f_4^2]\} + \delta\{Y_2f_2 + 2Y_4f_2[f_1^2 + \\ & + if_1f_4 + f_2\bar{f}_3 + 3\bar{f}_2f_3 - f_4^2]\} + \Delta\{Y_2f_1 + 2Y_4[f_1^3 + i(f_2\bar{f}_3 - \bar{f}_2f_3)f_4 + \\ & + 2(f_2\bar{f}_3 + \bar{f}_2f_3)f_1]\} - Y_2\{i(\mu - \bar{\mu})f_4 - (\mu + \bar{\mu})f_1 - (2\beta - \tau)f_2 + \nu\bar{f}_3 \\ & + \bar{\nu}f_3 - (2\bar{\beta} - \bar{\tau})\bar{f}_2\} - 2Y_4\{i[(\tau - 2\beta)f_1f_2 - (\bar{\tau} - 2\bar{\beta})f_1\bar{f}_2 + \nu f_1\bar{f}_3 - \\ & - \bar{\nu}f_1f_3 + (\mu - 3\bar{\mu})f_2\bar{f}_3 - (\bar{\mu} - 3\mu)\bar{f}_2f_3 + (\bar{\mu} - \mu)f_4^2]f_4 + f_1^2[\nu\bar{f}_3 + \\ & + \bar{\nu}f_3 + (\tau - 2\beta)f_2 + (\bar{\tau} - 2\bar{\beta})\bar{f}_2 - (\mu + \bar{\mu})f_1] + f_4^2[(2\bar{\beta} - \bar{\tau})\bar{f}_2 + \\ & + (2\beta - \tau)f_2 - \nu\bar{f}_3 - \bar{\nu}f_3] + (\tau - 2\beta)\bar{f}_3f_2^2 + (\bar{\tau} - 2\bar{\beta})f_3\bar{f}_2^2 + \\ & - (3\bar{\mu} + \mu)f_1f_2\bar{f}_3 - (3\mu + \bar{\mu})f_1\bar{f}_2f_3 + 3\bar{\nu}f_2f_3\bar{f}_3 + 3\nu\bar{f}_2f_3\bar{f}_3 + \\ & + 3(\tau - 2\beta)f_2\bar{f}_2f_3 + 3(\bar{\tau} - 2\bar{\beta})f_2\bar{f}_2\bar{f}_3 + \nu f_2\bar{f}_3^2 + \bar{\nu}\bar{f}_2f_3^2\} = -\frac{4\pi}{c}j^N, \quad (1.15) \end{aligned}$$

$$D\{Y_2\bar{f}_2 + 2Y_4\bar{f}_2[f_1^2 + \bar{f}_2f_3 - if_1f_4 + 3f_2\bar{f}_3 - f_4^2]\} + \Delta\{Y_2\bar{f}_3 + 2Y_4\bar{f}_3[f_1^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + f_2 \bar{f}_3 + i f_1 f_4 + 3 \bar{f}_2 f_3 - f_4^2 \} + i \delta \{ Y_2 f_4 + 2 Y_4 [i(\bar{f}_2 f_3 - f_2 \bar{f}_3) f_1 - f_4^3 + \\
& + 2(f_2 \bar{f}_3 + \bar{f}_2 f_3) f_4] \} - Y_2 \{ i(\tau - \bar{\pi}) f_4 - (\tau + \bar{\pi}) f_1 + (2\gamma - \mu) \bar{f}_3 + \bar{\lambda} f_3 + \\
& - \sigma f_2 - (2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}) \bar{f}_2 \} - 2 Y_4 \{ i[(2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}) f_1 \bar{f}_2 + (2\gamma - \mu) f_1 \bar{f}_3 - \sigma f_1 f_2 - \\
& - \bar{\lambda} f_1 f_3 + (\tau - 3\bar{\pi}) f_2 \bar{f}_3 + (3\tau - \bar{\pi}) \bar{f}_2 f_3] f_4 + f_1^2 [\bar{\lambda} f_3 + \\
& + (2\gamma - \mu) \bar{f}_3 + (\bar{\rho} - 2\bar{\varepsilon}) \bar{f}_2 - (\tau + \bar{\pi}) f_1 - \sigma f_2] + f_4^2 [(\mu - 2\gamma) \bar{f}_3 + \\
& + \sigma f_2 - \bar{\lambda} f_3 + (2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}) \bar{f}_2 + i(\bar{\pi} - \tau) f_4] + [3(\bar{\rho} - 2\bar{\varepsilon}) \bar{f}_2 \bar{f}_3 + (2\gamma - \mu) \bar{f}_3^2 - \\
& - 3\sigma \bar{f}_2 f_3 - \sigma f_2 \bar{f}_3 + 3\bar{\lambda} f_3 \bar{f}_3] f_2 - [(\tau + 3\bar{\pi}) f_2 \bar{f}_3 + (3\tau + \bar{\pi}) \bar{f}_2 f_3] f_1 + \\
& + (\bar{\rho} - 2\bar{\varepsilon}) \bar{f}_2^2 f_3 + \bar{\lambda} \bar{f}_2 f_3^2 + 3(2\gamma - \mu) \bar{f}_2 f_3 \bar{f}_3 \} = -\frac{4\pi}{c} j^M, \quad (1.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D \{ Y_2 f_2 + 2 Y_4 f_2 [f_1^2 + \bar{f}_2 f_3 + i f_1 f_4 + 3 \bar{f}_2 f_3 - f_4^2] \} + \Delta \{ Y_2 f_3 + 2 Y_4 f_3 [f_1^2 + \\
& + \bar{f}_2 f_3 - i f_1 f_4 + 3 f_2 \bar{f}_3 - f_4^2] \} - i \bar{\delta} \{ Y_2 f_4 + 2 Y_4 [i(\bar{f}_2 f_3 - f_2 \bar{f}_3) f_1 - f_4^3 + \\
& + 2(f_2 \bar{f}_3 + \bar{f}_2 f_3) f_4] \} - Y_2 \{ i(\pi - \bar{\tau}) f_4 - (\bar{\tau} + \pi) f_1 + (2\bar{\gamma} - \bar{\mu}) f_3 + \lambda \bar{f}_3 - \\
& - \bar{\sigma} \bar{f}_2 - (2\varepsilon - \rho) f_2 \} - 2 Y_4 \{ i[\bar{\sigma} f_1 \bar{f}_2 - (2\varepsilon - \rho) f_1 f_2 - (2\bar{\gamma} - \bar{\mu}) f_1 f_3 + \\
& + \lambda f_1 \bar{f}_3 - (\bar{\tau} - 3\pi) \bar{f}_2 f_3 - (3\bar{\tau} - \pi) f_2 \bar{f}_3] f_4 + f_1^2 [\lambda \bar{f}_3 + \\
& + (2\bar{\gamma} - \bar{\mu}) f_3 + (\rho - 2\varepsilon) f_2 - (\bar{\tau} + \pi) f_1 - \bar{\sigma} \bar{f}_2] + f_4^2 [(\bar{\mu} - 2\bar{\gamma}) f_3 + \\
& + \bar{\sigma} \bar{f}_2 - \lambda \bar{f}_3 + (2\varepsilon - \rho) f_2 - i(\bar{\tau} - \pi) f_4] + [3(\rho - 2\varepsilon) f_2 f_3 + (2\bar{\gamma} - \bar{\mu}) \bar{f}_3^2 - \\
& - 3\bar{\sigma} f_2 \bar{f}_3 - \bar{\sigma} \bar{f}_2 f_3 + 3\lambda f_3 \bar{f}_3] \bar{f}_2 - [(\bar{\tau} + 3\pi) \bar{f}_2 f_3 + (3\bar{\tau} + \pi) f_2 \bar{f}_3] f_1 + \\
& + (\rho - 2\varepsilon) f_2^2 \bar{f}_3 + \lambda f_2 \bar{f}_3^2 + 3(2\bar{\gamma} - \bar{\mu}) f_2 f_3 \bar{f}_3 \} = -\frac{4\pi}{c} j^{\bar{M}}, \quad (1.17)
\end{aligned}$$

где введены компактные обозначения для производных модельной функции Лагранжиана:

$$Y_2 = \frac{\partial L}{\partial J_2}, \quad Y_4 = \frac{\partial L}{\partial J_4}. \quad (1.18)$$

Как в случае однородных уравнений, выражение (1.17) является комплексно сопряженным по отношению (1.16) и может не рассматриваться.

Для наибольшей общности и замкнутости системы, к уравнениям (1.13) - (1.16) необходимо добавить уравнения Общей теории относительности, записанные в терминах спиновых коэффициентов. Эти уравнения по форме существенно отличающиеся от уравнений для компонент метрического тензора в координатном представлении. Так, в формализме Ньюмена-

Пенроуза уравнения гравитации получаются путем проецирования на векторы базисной тетрады следующих выражений: первая группа уравнений получатся при проецировании тождества Бианки

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_l R_{ijmk} + \nabla_k R_{ijlm} = 0, \quad (1.19)$$

и состоит из 11 уравнений, вторая группа состоит из 18 уравнений и получается в результате проецирования на базисные векторы коммутационного соотношения:

$$[\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i] A^k = R_{ij}^k A^l, \quad (1.20)$$

наконец, третья группа уравнений гравитации может быть получена при переходе к координатам, связанным с изотропными поверхностями [116]. Уравнения Общей теории относительности, записанные в формализме Ньюмена-Пенроуза, приведены в Приложении 2. Переменными для этих уравнений служат компоненты векторов изотропной тетрады, независимые проекции тензора Вейля, $\Psi_0 \dots \Psi_4$, независимые проекции тензора энергии-импульса Φ_{ik} , след тензора энергии-импульса и спиновые коэффициенты.

Можно отметить три способа формулировки задачи об вычислении полевой конфигурации в формализме Ньюмена-Пенроуза. В задачах первого типа поиск решений уравнений нелинейной электродинамики вакуума (1.13)-(1.16) выполняется на фоне заданного пространства - времени. Например, в случае псевдоевклидового пространства-времени все независимые проекции тензора Вейля и тензора энергии - импульса следует положить равными нулю. Значительная часть спиновых коэффициентов в этом случае, также оказывается тождественно равными нулю (в зависимости от симметрии задачи и выбора координат нетривиальные коэффициенты могут быть различными).

Во втором способе постановки задачи электромагнитное поле вычисляется на фоне заданного пространства-времени специального типа. Например, для задач со сферической симметрией, при наложении дополнительного требования конформно плоской метрики, и соответствующем выборе координат [124], отличающимися от нуля будут только четыре спиновые коэффициента $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$. Интегрирование уравнений гравитационного и электромагнитного секторов производится независимо друг от друга, при

этом предполагается возможными пренебречь вкладом электромагнитного поля в выражение для тензора энергии-импульса материи.

Третий вариант формулировки задачи интегрирования уравнений нелинейной электродинамики вакуума предполагает поиск самосогласованной полевой конфигурации гравитационного и электромагнитного поля, учитывающей вклад тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left\{ [Y_2 + J_2 Y_4] F_{ik}^{(2)} - \frac{1}{4} [L - (2J_4 - J_2^2) Y_4] g_{ik} \right\}, \quad (1.21)$$

в качестве источника в уравнениях гравитационного сектора. В Приложении 2 приводятся выражения для тетрадных проекций девиатора ϕ_{ik} и следа этого тензора Λ :

$$\phi_{ik} = \frac{4\pi G}{c^4} [T_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} T], \quad \Lambda = \frac{\pi G}{3c^4} T,$$

содержащихся в уравнениях гравитационного сектора. В качестве примера можно привести задачу о вычислении метрики пространства-времени Рейсснера-Нордстрема в электродинамике Максвелла, для которого спинорные коэффициенты, векторы базисной тетрады, нетривиальные проекции тензора Вейля и девиатора тензора энергии-импульса имеют вид:

$$\begin{aligned} \beta = -\alpha &= \frac{\sqrt{2} \cot \theta}{4r}, & \mu = \rho &= -\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{2}r^2}, & \varepsilon = \gamma &= \frac{\sqrt{2}(2Mr - Q^2)}{8r^2\sqrt{f}}, \\ l^j &= \frac{1}{\sqrt{2}fr} \{r^2, f, 0, 0\}, & n^j &= \frac{1}{\sqrt{2}fr} \{r^2, -f, 0, 0\}, & m^j &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \{0, 0, 1, i/\sin \theta\}, \\ \Psi_2 &= \frac{2Mr - Q^2}{4r^4}, & \Phi_{11} &= -\frac{Q^2}{2r^4}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где обозначено $f = r^2 - 2Mr + Q^2 r^2/2$, и выражения приводятся в натуральной системе единиц.

Полученная система уравнений нелинейной электродинамики вакуума в формализме Ньюмена-Перроуза является общей (1.13)-(1.16) и может быть использована для поиска решений задач в одной из трех перечисленных выше формулировок. Необходимо отметить, что выбор полевых переменных для нелинейных уравнений является принципиальным и может существенно повлиять на подбор интегрирующих комбинаций. Набор пере-

менных для электромагнитного поля f_i в полученных уравнениях является принципиально новым и отличается от тетрадных представлений принятых в [116, 125].

1.2 Методика интегрирования уравнений нелинейной электродинамики в формализме спиновых коэффициентов при наличии аксиальной симметрии

Для иллюстрации методики интегрирования уравнений (1.13)-(1.16) и их верификации, получим решение для поля неподвижного электрического диполя в электродинамике Борна-Инфельда. Это решение можно сопоставить с полем диполя, вычисленным методом последовательных приближений в традиционном координатном представлении без применения формализма спиновых коэффициентов.

Электрическое поле будем искать в плоском пространстве-времени, что позволит сфокусироваться на решении уравнений электромагнитного поля. Для плоского пространства-времени следует принять все тетрадные проекции тензора Вейля и следующие спиновые коэффициенты равными нулю:

$$\sigma = k = \nu = \lambda = \pi = \tau = \gamma = 0, \quad \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0. \quad (1.23)$$

Для векторов базисной тетрады воспользуемся представлением:

$$l_i = \{1, 1/2U, 0, 0\}, \quad n_i = \{-U, 1/2, 0, 0\}, \quad m_i = -\frac{1}{2p\rho}\{0, 0, 1, i\},$$

$$l^i = \{-1/2U, 1, 0, 0\}, \quad n^i = \{1/2, U, 0, 0\}, \quad m^i = \rho\{0, 0, p, ip\}, \quad (1.24)$$

где U – постоянная, а также принято обозначение $p = 1/\sqrt{2}(1 - U\zeta\bar{\zeta})$ и $\zeta = x^2 + ix^3$ – комплексная переменная, зависящая от выбора координат. Остальные нетривиальные спиновые коэффициенты должны быть связаны между собой соотношениями

$$\rho = -\frac{1}{r}, \quad \mu = -\rho U, \quad \bar{\alpha} + \beta = 0, \quad \alpha = -\frac{U\zeta\rho}{2\sqrt{2}}. \quad (1.25)$$

С помощью уравнений гравитационного сектора, представленных в Приложении 5.4 и выражения (1.5) нетрудно убедиться, что предложенная комбинация спиновых коэффициентов и векторов тетрады описывает плоское пространство-время, при этом значение $U = -1/2$ соответствует сферическому псевдоевклидовому пространству, а $U = 1/2$ псевдосферическому и $U = 0$ евклидовому пространствам. Воспользуемся явным видом компонент (1.24) для построения операторов ковариантного дифференцирования по направлениям векторов базисной тетрады:

$$D = l^i \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \Delta = n^i \nabla_i = UD,$$

$$\delta = m^i \nabla_i = p\rho \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial x^3} \right), \quad \bar{\delta} = \bar{m}^i \nabla_i = p\rho \left(\frac{\partial}{\partial x^2} - i \frac{\partial}{\partial x^3} \right). \quad (2.15)$$

Для более наглядного представления результата, выполним переход от естественных координат x^i к сферическим координатам:

$$x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = 2 \cos \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad x^3 = 2 \sin \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (1.26)$$

Комплексную переменную $\zeta = x^2 + ix^3$, удобную для выполнения вычислений, также выразим через угловые координаты сферической системы:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{\zeta \bar{\zeta}}}{1 + \zeta \bar{\zeta}/4}, \quad \cos \theta = \frac{4 - \zeta \bar{\zeta}}{4 + \zeta \bar{\zeta}}, \quad \cos \varphi = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2\sqrt{\zeta \bar{\zeta}}}, \quad \sin \varphi = \frac{i(\bar{\zeta} - \zeta)}{2\sqrt{\zeta \bar{\zeta}}}. \quad (1.27)$$

От описания фонового псевдоевклидового пространства-времени перейдем к построению полевой конфигурации для электромагнитного поля, соответствующей электрическому диполю. Учитывая обозначения (1.18), запишем выражения для производных Лагранжиана модели Борна-Инфельда (0.1) по инвариантам тензора электромагнитного поля:

$$Y_2 = \frac{\partial L}{\partial J_2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2} J_2}, \quad Y_4 = \frac{\partial L}{\partial J_4} = \frac{a^2}{2\sqrt{1 - a^2 J_2/2}}, \quad (1.28)$$

где учтено, что диполь неподвижен и магнитное поле отсутствует, поэтому инварианты тензора электромагнитного поля оказываются связанными между собой $J_4 = J_2^2/2$. Найдем компоненты тензора электромагнитного

поля с помощью представления (1.6) и явного вида компонент векторов базисной тетрады (1.24):

$$\begin{aligned}
F_{01} &= f_1, & F_{02} &= -\frac{1}{2p\rho} \left\{ [f_2 + \bar{f}_2] - U[f_3 + \bar{f}_3] \right\}, \\
F_{03} &= -\frac{i}{2p\rho} \left\{ [f_2 - \bar{f}_2] - U[f_3 - \bar{f}_3] \right\}, & F_{12} &= -\frac{1}{2p\rho} \left\{ \frac{[f_2 + \bar{f}_2]}{2U} + \frac{1}{2}[f_3 + \bar{f}_3] \right\}, \\
F_{13} &= \frac{-i}{2p\rho} \left\{ \frac{[f_2 - \bar{f}_2]}{2U} + \frac{1}{2}[f_3 - \bar{f}_3] \right\}, & F_{23} &= \frac{f_4}{2p^2\rho^2}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Полученные выражения имеют общий вид и соответствуют произвольному электромагнитному полю. Для перехода к вычислению электрического поля с аксиальной симметрией, свойственной электрическому диполю, выполним преобразование от координат x^i к сферическим координатам, воспользовавшись соотношениями (1.26):

$$\begin{aligned}
F'_{01} &= F_{01}, & F'_{02} &= \frac{F_{02} \cos \varphi + F_{03} \sin \varphi}{2 \cos^2 \theta/2}, \\
F'_{03} &= 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[F_{03} \cos \varphi - F_{02} \sin \varphi \right], & F'_{13} &= \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[F_{13} \cos \varphi - F_{12} \sin \varphi \right], \\
F'_{12} &= \frac{F_{13} \sin \varphi + F_{12} \cos \varphi}{2 \cos^2 \theta/2}, & F'_{23} &= \frac{F_{23}}{2 \cos^2 \theta/2}.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Потребуем выполнения ряда ограничений для компонент тензора F'_{ik} , и прежде всего, учтем отсутствие магнитного поля, приняв $F'_{12} = F'_{13} = F'_{23} = 0$ для произвольных углов φ и θ , что приводит к равенству нулю аналогичных компонент это тензора в тетрадном базисе $F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0$, в следствие чего возникает связь между полевыми переменными электромагнитного поля f_i :

$$f_2 = -U f_3, \quad \bar{f}_2 = -U \bar{f}_3, \quad f_4 = 0. \tag{1.31}$$

Существенно упрощается вид тензора электромагнитного поля, нетривиальные компоненты которого примут вид:

$$F_{01} = f_1, \quad F_{02} = -\frac{1}{p\rho} (f_2 + \bar{f}_2), \quad F_{03} = -\frac{i}{p\rho} (f_2 - \bar{f}_2). \tag{1.32}$$

Для поля электрического диполя, обладающего аксиальной симметрией,

необходимо потребовать, чтобы компонента F'_{20} не зависела от угла φ , а компонента F'_{03} равнялась нулю тождественно. Оба этих условия будут выполнены, если обеспечить выполнение соотношения $f_2\zeta = \bar{f}_2\bar{\zeta}$, а для этого представление полевой переменной f_2 следует искать в виде $f_2 = \bar{\zeta}F(r, \zeta\bar{\zeta})$, где F – некоторая вещественная функция полярного угла. Тогда нетривиальные компоненты тензора электромагнитного поля и его инварианты примут вид:

$$F_{01} = f_1(r, \zeta\bar{\zeta}), \quad F_{02} = -\frac{F(r, \zeta\bar{\zeta})}{p\rho}(\zeta + \bar{\zeta}), \quad F_{03} = -\frac{iF(r, \zeta\bar{\zeta})}{p\rho}(\zeta - \bar{\zeta}),$$

$$J_2 = \frac{2(Uf_1^2 - 4f_2\bar{f}_2)}{U} = \frac{2(Uf_1^2 - 4\bar{\zeta}\zeta F^2)}{U}, \quad J_4 = \frac{J_2^2}{2}. \quad (1.33)$$

Так как f_1 и F зависят только от радиальной координаты r и комплексной координаты ζ , то в уравнениях электромагнитного поля (1.13) - (1.16) удобно выполнить переход к этим координатам. Прежде всего, это потребует преобразования вида операторов производных по направлению векторов m^i и \bar{m}^i :

$$\delta = p\rho\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = 2p\rho\frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (1.34)$$

также удобно выполнить нормировку $\tilde{f}_1 = f_1/\sqrt{2}$. Нетривиальные уравнения электромагнитного поля (1.13) - (1.16) после подстановки в них выражений (1.23), (1.28), (1.2), (1.34) примут вид:

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \rho\left(1 - \frac{Ux}{2}\right)\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} - F\rho = 0,$$

$$2a^2F\left(\left[(Ux - 2)\rho\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} + 2\frac{\partial F}{\partial r}\right]\tilde{f}_1U - (Ux + 2)\rho F^2\right) -$$

$$-\rho U\left[(Ux - 2)x\frac{\partial F}{\partial x} - 2F\right]\left[2a^2\tilde{f}_1^2 - 1\right] - (4a^2xF^2 + U)U\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial r} -$$

$$-2\rho U\tilde{f}_1\left[(2a^2\tilde{f}_1^2 - 1)U - 4a^2xF^2\right] = 0. \quad (1.35)$$

Без существенной потери общности, все дальнейшие вычисления будем проводить для псевдоевклидова пространства со сферической симметрией, поэтому примем $U = -1/2$, при этом уравнения (1.2) существенно упростятся, и для предложенной ранее постановки задачи, примут следу-

ющий окончательный вид:

$$\rho(x+4)\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} + 4\left(\frac{\partial F}{\partial r} - F\rho\right) = 0, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial r} - x(x+4)\frac{\partial F}{\partial x} - 2\rho(\tilde{f}_1 + 2F) + 2a^2\left\{x(x+4)\rho\tilde{f}_1\left(\frac{\partial F}{\partial x}\tilde{f}_1 - F\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\left[(4F^2x + 2F\tilde{f}_1 + \tilde{f}_1^2)\tilde{f}_1\rho - 2xF^2\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial r} + 2xF\tilde{f}_1\frac{\partial F}{\partial r} - (x-4)x\rho F^3\right]\right\} = 0.$$

Если принять параметр нелинейной электродинамики Борна-Инфельда равным нулю $a = 0$, то несложно проверить, что уравнения (1.36) описывают поле электрического диполя электродинамики Максвелла, компоненты которого, в терминах полевых переменных принятых в настоящем разделе, имеют вид:

$$F_{Max} = \frac{2d}{\sqrt{2}r^3(4+x)}, \quad (\tilde{f}_1)_{Max} = \frac{2d}{\sqrt{2}r^3}\left(\frac{4-x}{4+x}\right), \quad (1.37)$$

где d – модуль электрического дипольного момента.

Получим решение уравнений (1.36) методом последовательных приближений, с точностью до первой исчезающей поправки нелинейной электродинамики, принимая в качестве начального приближения поле диполя в электродинамике Максвелла. После несложных, но несколько громоздких вычислений, получим выражения для полевых переменных

$$\tilde{f}_1 = \frac{2d}{\sqrt{2}r^3}\left(\frac{4-x}{4+x}\right) - \frac{2a^2d^3}{11\sqrt{2}r^9}\left[\frac{17}{3}\left(\frac{4-x}{4+x}\right) + 15\left(\frac{4-x}{4+x}\right)^3\right] + \dots,$$

$$F = \frac{2d}{\sqrt{2}r^3(x+4)} - \frac{a^2d^3}{11\sqrt{2}r^9}\left[\frac{76}{3(x+4)} - \frac{360x}{(x+4)^3}\right] + \dots. \quad (1.38)$$

Можно убедиться в полном соответствии полученного решения с полем электрического диполя, вычисленным в сферических координатах без применения формализма Ньюмена-Пенроуза, скалярный потенциал которого имеет вид:

$$\varphi = \frac{d \cos \theta}{r^2} - \frac{a^2d^3}{44r^8}\left[\frac{17}{3} \cos \theta + 15 \cos^3 \theta\right] + \dots. \quad (1.39)$$

Рассмотренный пример, подтверждает корректность полученных уравне-

ний (1.13) - (1.16) и иллюстрирует методику их интегрирования для поиска решения задач нелинейной электродинамики с аксиальной симметрией поля.

1.3 **Фундаментальные ограничения для моделей нелинейной электродинамики вакуума**

Современная теория поля рассматривает множество моделей, проверка экспериментального статуса которых в настоящее время затруднительна или невозможна по разным причинам. Поэтому первостепенное значение приобретает поиск и исследование критериев, нарушение которых, для проверяемой модели, приведет к противоречию фундаментальным физическим принципам. Конечно, нарушение таких критериев не отменяет необходимости всестороннего экспериментального изучения конкретных предсказаний модели, однако, позволяет отнести такую модель к экзотическим.

Среди фундаментальных принципов, таких как требования общей ковариантности и калибровочной инвариантности уравнений поля, особое место отводится критериям причинности, унитарности и энергетическим условиям.

1.4 **Требования унитарности и причинности в моделях нелинейной электродинамики вакуума**

Принцип причинности гарантирует, что групповая скорость элементарных электромагнитных возбуждений не превышает скорости света в вакууме, а требование унитарности обеспечивает положительную определенность нормы таких возбуждений. Чтобы выяснить ограничения для Лагранжиана, следующие из этих принципов, достаточно рассмотреть распространение электромагнитных волн на фоне постоянного электромагнитного поля. Дисперсионное соотношение для таких волн в нелинейной электродинамике с произвольным Лагранжианом получено в [126] и исключительно сложно для анализа. Поэтому, аналогично [127], приведем описание в частном случае, когда для фонового поля имеет место дополнительное условие $(\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0$. В этом случае, из-за эффекта вакуумного двулучепреломления,

электромагнитная волна расщепляется на две ортогонально поляризованные моды. Ограничения, следующие из условий причинности и унитарности, примененные к каждой из этих мод, были получены в [127] как набор неравенств, которые в терминах независимых инвариантов J_2 и J_4 можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} \geq 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \geq 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \geq 0, \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} + 2J_2 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_2^2} + 2J_2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_2 \partial J_4} + J_2^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_4^2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right] \geq 0, \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_2^2} + 2J_2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_2 \partial J_4} + J_2^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_4^2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \geq 0. \quad (1.42)$$

Этот набор неравенств накладывает ограничения на Лагранжиан произвольной модели, однако, в случае электродинамики с конформными свойствами CNED, которая подробно будет рассмотрена в разделе 5, выражения могут быть существенно упрощены. Для этого получим вспомогательные соотношения для Лагранжиана CNED, выполнив дифференцирование уравнения (5.4) по инвариантам J_2 и J_4 :

$$J_2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_2^2} + 2J_4 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_2 \partial J_4} = 0, \quad 2J_4 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_4^2} + J_2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_2 \partial J_4} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} = 0. \quad (1.43)$$

Для рассматриваемой полевой конфигурации при $(\mathbf{E}\mathbf{B}) \rightarrow 0$, инвариант J_4 стремится к $J_4 \rightarrow J_2^2/2$, и при этом $J_2 \neq 0$, вследствие чего выражения (1.43) принимают вид:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_2^2} + J_2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_2 \partial J_4} = 0, \quad J_2^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_4^2} + J_2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial J_2 \partial J_4} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} = 0, \quad (1.44)$$

из которого следует, что неравенство (1.42) выполняется всегда, а (1.41) преобразуется в последнее выражение в (1.40). Подстановка же общего вида Лагранжиана CNED (5.7) в оставшиеся нетривиальными соотношения (1.40) приводит к ограничениям на модельную функцию $W(z)$:

$$W(z = \pm 1) \geq 0, \quad W'(z = \pm 1) \leq 0, \quad (1.45)$$

где $z = J_2/\sqrt{2J_4}$ параметр полевой конфигурации.

1.5 Энергетическое доминантное условие для моделей нелинейной электродинамики вакуума

Энергетические условия имеют вид различных неравенств, налагаемых на компоненты тензора энергии-импульса материи T_{ik} и вытекающих из общего требования, что плотность энергии поля должна быть неотрицательной, при измерении любым наблюдателем. Формулировка энергетических условий может быть весьма разнообразной. Из множества различных типов этих условий [128, 129] следует особенно отметить слабое энергетическое условие (WEC), нулевое энергетическое условие (NEC) и энергодоминантное условие (DEC). Слабое энергетическое условие гарантирует положительную определенность энергии материи для наблюдателя, обходящего любую времениподобную кривую, что выражается в виде неравенства:

$$T_{ik}a^i a^k \geq 0, \quad (1.46)$$

где a^k произвольный времениподобный вектор. Это условие выполняется для большинства известных типов материи, однако есть предположения о его возможном нарушении в некоторых моделях инфляционной Вселенной [130].

Нулевое энергетическое условие по форме похоже на WEC, однако a^k , в этом случае должен быть нулевым вектором. В Общей теории относительности, это условие обеспечивает отсутствие отталкивания для нулевых конгруэнций геодезических, сфокусированных веществом. Его выполнение также является ключевым предположением для теоремы о площади Хокинга [131] и теоремы о сингулярности [128, 132]. Условию NEC удовлетворяет большинство аргументированных моделей классических полей, однако его нарушение ожидается в некоторых моделях скалярно-тензорной гравитации, например, в теории Хорндески [133, 134].

Условия WEC и NEC не исключают сверхсветовую скорость распространения энергии, однако WEC, дополненное требованием, чтобы поток

энергии был причинным вектором, указывающим в будущее,

$$T_{ik}T^{km}a^i a_k \geq 0, \quad (1.47)$$

приводит к энергодоминантному условию (DEC), которое, по широко распространенному мнению, лишено указанного недостатка. Тем не менее, существуют некоторые предположения [129, 135, 136] о недостаточности DEC для решения сверхсветовой проблемы. Эти предположения в частных случаях кажутся непротиворечивыми, однако обобщить их на произвольный вид тензора энергии-импульса крайне сложно.

В случае произвольной нелинейной электродинамики вакуума с тензором энергии-импульса (1.21) неравенства энергетического доминантного условия принимают вид:

$$\begin{aligned} T_{ik}a^i a^k &= 4 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right\} F_{ik}^{(2)} a^i a^k + \left\{ (2J_4 - J_2^2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} - \mathcal{L} \right\} a_k a^k \geq 0, \\ T_{ki}T^{im}a_m a^k &= 8 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right\} \times \left\{ J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + 2J_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} - \mathcal{L} \right\} F_{ik}^{(2)} a^i a^k \quad (1.48) \\ &+ \left\{ 2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right]^2 (2J_4 - J_2^2) + \left[(2J_4 - J_2^2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} - \mathcal{L} \right]^2 \right\} a_k a^k \geq 0. \end{aligned}$$

Как правило, проверка этих неравенств выполняется в координатном представлении для каждого конкретного случая полевой конфигурации. В этом разделе мы предложим альтернативный способ, основанный на тетрадном формализме, который представляется более общим, и в ряде случаев, более удобным для вычислений.

Для этого, выберем два изотропных, указывающих в будущее, действительных, четырехмерных вектора l^k и n^k , и представим произвольный причинный, также указывающий в будущее вектор a^k в виде суперпозиции этих двух неколлинеарных изотропных векторов: $a^k = \alpha l^k + \beta n^k$, где α, β – вещественные постоянные. Без потери общности, можно считать, что $l^k n_k = 1$, при этом, причинность a^k накладывает ограничение на коэффициенты $\alpha\beta \geq 0$. Дополним набор векторов l^k и n^k еще двумя комплексными изотропными векторами m^k и \bar{m}^k , так что в совокупности эти векторы образуют базисную тетраду, со свойствами аналогичными (1.4). Выполним разложение компонент тензора электромагнитного поля по диадным про-

изведениям векторов базисной тетрады, аналогично (1.6), а также, используя (1.5) получим вспомогательные соотношения для свертков:

$$\begin{aligned} J_2 &= F_{ik}F^{ki} = 2\left[f_1^2 - f_4^2 + 2(\bar{f}_2f_3 + \bar{f}_3f_2)\right], \\ J_4 &= F_{ik}F^{kl}F_{lm}F^{mi} = \frac{J_2^2}{2} + 4\left[f_1f_4 + i(f_2\bar{f}_3 - f_3\bar{f}_2)\right]^2, \\ F_{ik}^{(2)}l^in^k &= f_1^2 + \bar{f}_2f_3 + \bar{f}_3f_2. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Подстановка разложения a^k по векторам базисной тетрады и вспомогательных соотношений (1.49) в (1.48) приводит к неравенствам:

$$\begin{aligned} T_{ik}a^ia^k &= 8\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial J_4}\right] \times \left\{\alpha^2|f_3|^2 + \beta^2|f_2|^2 + \frac{\alpha\beta(f_1^2 + f_4^2)}{2}\right\} + 2\alpha\beta T \geq 0, \\ T_{ik}T^{km}a_ma^i &= 16T\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial J_4}\right] \times \left\{\alpha^2|f_3|^2 + \beta^2|f_2|^2 + \frac{\alpha\beta(f_1^2 + f_4^2)}{2}\right\} \\ &\quad + 2\alpha\beta\left\{T^2 + (4J_4 - J_2^2)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial J_4}\right]^2\right\} \geq 0, \end{aligned} \quad (1.50)$$

где T след тензора энергии-импульса. Проверка энергодоминантного условия Хокинга-Эллиса для произвольной Лоренц-инвариантной модели нелинейной электродинамики вакуума заключается в выяснении возможности выполнения неравенств при произвольных постоянных α и β , для выбранной полевой конфигурации, представленной функциями f_i . Несмотря на кажущуюся громоздкость выражений (1.50), их структура предоставляет больше возможностей для поиска контрпримеров, нарушающих выполнение этих неравенств, или же выявления условий для их выполнения.

Помимо рассмотренных традиционных энергетических условий, можно предложить ряд соотношений для компонент тензора энергии-импульса специфичных для определенной теоретико-полевой модели, после чего проверить возможность расширения области их применения в качестве энергетических условий общего вида. Одно из таких условий, и возможность его обобщения, будет рассмотрено в следующем разделе.

1.6 Некоторые обобщения энергетических условий, основанных на моделях нелинейной электродинамики вакуума

Перечисленные выше энергетические условия носят эвристический характер и их выполнение необходимо проверять в каждом конкретном случае для тензора энергии-импульса, рассматриваемой модели материи. В этом разделе будут установлены некоторые новые соотношения, возникающие для тензора энергии-импульса произвольной Лоренц-инвариантной нелинейной электродинамики с наиболее общей зависимостью от инвариантов тензора электромагнитного поля. Чтобы выяснить, универсальны ли найденные соотношения или справедливы только для электромагнитного поля, мы проверим их выполнение и для других видов материи. Для большего удобства в этом разделе будем придерживаться натуральной системы единиц для которой ($G = c = \hbar = 1$).

Запишем функционал действия для нелинейной электродинамики вакуума с произвольной зависимостью Лагранжиана \mathcal{L} от инвариантов электромагнитного поля $J_2 = F_{ik}F^{ki}$ и $J_4 = F_{ik}F^{kl}F_{lm}F^{mi}$:

$$S = \int \sqrt{-g}\mathcal{L}(J_2, J_4)d^4x, \quad (1.51)$$

где g определитель метрического тензора. Симметричный тензор энергии-импульса T_{ik} и его след T для такого функционала действия имеют вид:

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{ik}} = 4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right] F_{ik}^{(2)} + \left[(2J_4 - J_2^2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} - \mathcal{L} \right] g_{ik}, \quad (1.52)$$

$$T = T_i^i = 4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} J_2 + 2J_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} - \mathcal{L} \right], \quad (1.53)$$

где использовано обозначение для второй степени тензора электромагнитного поля $F_{ik}^{(2)} = F_{im}F^m_k$. В общем случае, нет никаких оснований утверждать, что слабое энергетическое условие (1.46) имеет место для произвольной нелинейной электродинамики вакуума. Выполнение этого условия зависит от конкретной феноменологии модели и выбора Лагранжиана.

Тем не менее, оказывается возможным установить некоторые общие соотношения, присущие произвольной нелинейной электродинамике вакуума. Для получения таких соотношений построим девиатор тензора энергии-импульса (1.52)

$$\mathcal{D}_{ik} = T_{ik} - \frac{T}{4}g_{ik} = 4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right] \left\{ F_{ik}^{(2)} - \frac{J_2}{4}g_{ik} \right\}. \quad (1.54)$$

Несложно заметить, что девиатор \mathcal{D}_{ik} конформен тензору энергии-импульса электродинамики Максвелла, который с точностью до постоянного коэффициента соответствует выражению в фигурных скобках. При этом, Лагранжиан \mathcal{L} должен удовлетворять условиям унитарности и причинности, которые рассматривались для произвольной нелинейной электродинамики вакуума, в предположении что $(\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0$, в работе [127]. Эти ограничения приводят к набору неравенств, одно из которых имеет точно такой же вид, как и первый множитель в (1.54)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \geq 0. \quad (1.55)$$

Поскольку слабое энергетическое условие (1.46) выполняется для электродинамики Максвелла, квадратичная форма, построенная для девиатора тензора энергии-импульса, будет неотрицательно определена на множестве причинных векторов и для произвольной модели нелинейной электродинамики вакуума: $\mathcal{D}_{ik}a^i a^k \geq 0$.

Чтобы расширить и обобщить это утверждение, найдем произвольную степень p девиатора тензора энергии-импульса $\mathcal{D}_{ik}^{(p)} = \overbrace{\mathcal{D}_{im_1} \mathcal{D}^{m_1 m_2} \dots \mathcal{D}_{m_{p-1} k}}^p$. После некоторых громоздких вычислений, получим общее выражение для четной и нечетной степени девиатора:

$$\mathcal{D}_{ik}^{(2m)} = 2^m \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right]^{2m} \left[2J_4 - \frac{J_2^2}{2} \right]^m g_{ik}, \quad (1.56)$$

$$\mathcal{D}_{ik}^{(2m+1)} = 2^{m+2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right]^{2m+1} \left[2J_4 - \frac{J_2^2}{2} \right]^m \times \left\{ F_{ik}^{(2)} - \frac{J_2}{4}g_{ik} \right\}, \quad (1.57)$$

где m — произвольное целое число без знака. Множитель (1.55) для всех выражений неотрицателен, как и множитель $2J_4 - J_2^2/2$. Поэтому, вслед-

ствие принципа причинности (1.55), квадратичная форма для произвольной степени p девиатора, определенная на множестве причинных векторов a^k , будет неотрицательна для произвольной нелинейной электродинамики вакуума:

$$\mathcal{D}_{ik}^{(p)} a^i a^k \geq 0, \quad a_k a^k \geq 0. \quad (1.58)$$

Данная формулировка энергетического условия была предложена нами в работе [109]. Последнее выражение можно переписать через девиатор тензора Риччи. Однако для такого представления будет необходимо принять определённую форму уравнений гравитации, например, использовать уравнения Эйнштейна для связи между компонентами тензора Риччи и тензора энергии-импульса. Такой подход предполагает выбор конкретной теоретической модели гравитации и ограничивает общность, поэтому все дальнейшие рассуждения мы будем проводить в терминах представления для тензора энергии-импульса.

Для моделей конформно-инвариантной нелинейной электродинамики, обладающих нулевым следом тензора энергии-импульса [32], утверждение (1.58) будет справедливо не только для девиатора, но и для произвольной степени тензора энергии-импульса, а в случае $p = 1$ произойдет переход к слабому энергетическому условию WEC.

В общем случае выражение (1.58) можно интерпретировать как нелинейное энергетическое условие. Нелинейные энергетические условия, построенные в виде степенных комбинаций компонент тензора энергии-импульса, уже упоминались в научной литературе. Например, в [137] было предложено, так называемое «условие потока энергии» (FEC), в виде квадратичной формы, построенной для второй степени тензора энергии-импульса, усредненного по вакуумным состояниям. В [138] рассматривается квадратичное энергетическое условие в виде:

$$(T_{ai} - \varepsilon \eta_{ai}) \eta^{ik} (T_{bk} - \varepsilon \eta_{bk}) V^a V^b \geq \varepsilon^2, \quad (1.59)$$

где $\eta_{ia} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ метрический тензор пространства Минковского, ε – произвольный положительный коэффициент и V^a компоненты времениподобного вектора. Условие для девиатора (1.58) при определенных предположениях можно переписать в виде, близком к (1.59). Другие

нелинейные энергетические условия, по форме отличающиеся от (1.58), также приводятся в [138]. Например, детерминантное энергетическое условие (DETEC) предполагает, что $\det T_{ik} \geq 0$, а энергетическое условие следа-квадрата тензора энергии-импульса (TOSEC) накладывает ограничение $T_{ik}T^{ik} \geq 0$.

Все перечисленные выше нелинейные энергетические условия, включая (1.58), носят эвристический характер и, как уже отмечалось в [139], к сожалению, не допускают наглядной физической интерпретации. В первую очередь, это связано с тем, что линейные энергетические условия получили физическое объяснение, благодаря совпадению частей некоторых хорошо изученных уравнений с выражениями для этих энергетических условий. Например, в уравнении Райчаудхури, описывающем динамику конгруэнций геодезических лучей, один из членов совпадает по форме с WEC. Нелинейные уравнения пока еще мало изучены, и до сих пор неизвестны уравнения, включающие нелинейные степенные энергетические условия. Более того, если такие уравнения существуют, то интерпретация энергетических условий на их основе будет достаточно нетривиальной. Ввиду описанных трудностей, мы предлагаем рассматривать нелинейные энергетические условия только как алгебраические ограничения для компонент тензора энергии-импульса, установленные для определенного типа материи, которые могут быть распространены на другие типы материи с определенными ограничениями или без них. Изучение возможности такого расширения или поиск ограничений для этого, будет являться основной целью дальнейшего исследования. Чтобы выяснить, является ли свойство дивергатора тензора энергии-импульса (1.58) характерным только для нелинейной электродинамики вакуума, мы проверим его применимость для модели идеальной жидкости и скалярного поля.

1.6.1 Проверка для идеальной жидкости

Проверим, выполнение неравенств (1.58) для произвольной динамики идеальной жидкости, для которой тензор энергии-импульса и его след имеют вид:

$$T_{ik} = (w + p)u_i u_k - p g_{ik}, \quad T = w - 3p, \quad (1.60)$$

где w плотность энергии покоя, p изотропное давление и u_k четырехмерный вектор скорости жидкости с единичной нормой $u_k u^k = 1$. Используя выражения (1.60) несложно найти девиатор тензора энергии-импульса:

$$\mathcal{D}_{ik} = (w + p) \left[u_i u_k - \frac{g_{ik}}{4} \right], \quad (1.61)$$

для которого, вычислив выражения для произвольной четной и нечетной степени, и выполнив подстановку в неравенство (1.58) получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ik}^{(2m+1)} a^i a^k &= \left(\frac{w + p}{4} \right)^{2m+1} \left[(3^{2m+1} + 1)(u_k a^k)^2 - a_k a^k \right], \\ \mathcal{D}_{ik}^{(2m)} a^i a^k &= \left(\frac{w + p}{4} \right)^{2m} \left[(3^{2m} - 1)(u_k a^k)^2 + a_k a^k \right]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Для выяснения знака последних выражений, воспользуемся техникой близкой к формализму Ньюмена-Пенроуза. Введем два вещественных изотропных четырехмерных вектора l^k и n^k . Учтем, что любой причинный вектор a^k , указывающий будущее, можно представить как суперпозицию двух неколлинеарных изотропных векторов, также указывающих в будущее $a^k = \alpha l^k + \beta n^k$, где α, β — вещественные постоянные. Без ограничения общности можно принять, что $l^k n_k = 1$, поэтому условие причинности $a_k a^k \geq 0$ устанавливает ограничение на коэффициенты $\alpha \beta \geq 0$. Дополним набор векторов l^k и n^k двумя другими комплексными изотропными векторами m^k и \bar{m}^k сопряженными друг к другу, так что в совокупности эти векторы образуют тетраду со скалярными произведениями (1.4). Векторы тетрады образуют базис, который может быть использован для разложения четырехмерного вектора скорости:

$$u_k = f_1 l_k + f_2 n_k + f_3 (m_k + \bar{m}_k) + i f_4 (\bar{m}_k - m_k), \quad (1.63)$$

где коэффициенты разложения f являются функциями координат, зависящими от динамики жидкости. Из вещественности четырехмерной скорости $u_k = \bar{u}_k$ можно сделать вывод, что все эти коэффициенты также вещественны. Еще одно свойство разложения следует из нормы $u_k u^k = 1$ четырехмерной скорости:

$$2f_1 f_2 = 1 + 2(f_3^2 + f_4^2) \geq 1. \quad (1.64)$$

Наконец, будет полезно получить некоторые вспомогательные выражения:

$$(u_k a^k)^2 = (\alpha f_2 + \beta f_1)^2, \quad a_k a^k = 2\alpha\beta \geq 0, \quad (1.65)$$

подстановка которых в (1.62) дает:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ik}^{(2m+1)} a^i a^k &= \left(\frac{w+p}{4} \right)^{2m+1} \times \\ &\left[(3^{2m+1} + 1)(\alpha^2 f_2^2 + \beta^2 f_1^2) + 2\alpha\beta \{ (3^{2m+1} + 1)f_1 f_2 - 1 \} \right], \\ \mathcal{D}_{ik}^{(2m)} a^i a^k &= \left(\frac{w+p}{4} \right)^{2m} \left[(3^{2m} - 1)(\alpha f_2 + \beta f_1)^2 + 2\alpha\beta \right]. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Поскольку сумма давления и плотности энергии покоя неотрицательна $p + w \geq 0$ (что также следует из WEC для идеальной жидкости [129]), в силу (1.64) и (1.65) можно заключить, что оба выражения в (1.66) неотрицательны для произвольных коэффициентов разложения α и β , которые зависят от выбора a^k , для произвольных коэффициентов f , которые зависят от динамики жидкости, а также для произвольного показателя степени m . Поэтому утверждение о неотрицательности квадратичной формы, построенной для произвольной степени девиатора тензора энергии-импульса, оказывается справедливым не только для нелинейной электродинамики вакуума, но и для идеальной жидкости.

1.6.2 Проверка для скалярного поля

Выполним проверку утверждения об условии для девиатора тензора энергии-импульса для вещественного однокомпонентного скалярного поля ϕ , в предположении произвольной связи между Лагранжианом и кинетическим членом. Такой тип материи широко обсуждается в Общей теории относительности в качестве моделей к-эссенции, применяемых для описания темной энергии [140]. В этом случае, функционал действия и симметричный тензор энергии-импульса имеют вид:

$$S = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}(X, \phi) d^4x, \quad T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\delta g^{ik}} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \nabla_i \phi \nabla_k \phi - \mathcal{L} g_{ik},$$

где $X = \nabla_k \phi \nabla^k \phi$ кинетический член. Девиатор тензора энергии-импульса, по форме, оказывается близок к аналогичному выражению для идеальной жидкости:

$$\mathcal{D}_{ik} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \left(\nabla_i \phi \nabla_k \phi - \frac{X}{4} g_{ik} \right). \quad (1.67)$$

Однако, следует отметить, что теперь нет ограничений для значений X , и эта величина может быть нулевой или отрицательной, в отличие от $u_k u^k > 0$ в модели идеальной жидкости. Найдем общие выражения для степеней девиатора, которыми воспользуемся для построения квадратичной формы на множестве причинных векторов a^k . Опуская вспомогательные вычисления, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ik}^{(2m)} a^i a^k &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \right)^{2m} \frac{X^{2m-1}}{2^{2m}} \left\{ (3^{2m} - 1) (\nabla_k \phi a^k)^2 + X a_k a^k \right\}, \quad (1.68) \\ \mathcal{D}_{ik}^{(2m+1)} a^i a^k &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \right)^{2m+1} \frac{X^{2m}}{2^{2m+1}} \left\{ (3^{2m+1} + 1) (\nabla_k \phi a^k)^2 - X a_k a^k \right\}. \end{aligned}$$

Для определения знака выражения каждой квадратичной формы, выполним разложение ковариантной производной полевой переменной по базису векторов изотропной тетрады (1.4):

$$\nabla_k \phi = f_1 l_k + f_2 n_k + f_3 (m_k + \bar{m}_k) + i f_4 (\bar{m}_k - m_k), \quad (1.69)$$

где коэффициенты разложения f зависят от полевой конфигурации для скалярного поля, и как и ранее, мы используем следующее разложение для причинного вектора: $a_k = \alpha l_k + \beta n_k$, при условии $\alpha \beta \geq 0$. Представление (1.69) позволяет получить полезные вспомогательные соотношения:

$$X = \nabla_k \phi \nabla^k \phi = 2(f_1 f_2 - f_3^2 - f_4^2), \quad (\nabla_k \phi a^k)^2 = (\alpha f_2 + \beta f_1)^2, \quad (1.70)$$

подстановка которых в (1.68) приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ik}^{(2m)} a^i a^k &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \right)^{2m} \frac{X^{2m-1}}{2^{2m}} \times \\ &\quad \left\{ (3^{2m} - 1) (\alpha f_2 + \beta f_1)^2 + 4\alpha\beta (f_1 f_2 - f_3^2 - f_4^2) \right\}, \quad (1.71) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{ik}^{2m+1} a^i a^k = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \right)^{2m+1} \frac{X^{2m}}{2^{2m+1}} \left\{ (3^{2m+1} - 1) \times \right. \quad (1.72)$$

$$(\alpha f_2 + \beta f_1)^2 + 4\alpha\beta(f_3^2 + f_4^2) + 2(\alpha^2 f_2^2 + \beta^2 f_1^2) \}.$$

Следует учесть, что из-за требования отсутствия духов (условия унитарности) производная Лагранжиана по кинетическому члену $\partial\mathcal{L}/\partial X \geq 0$ неотрицательна [141], и это обуславливает неотрицательность первого множителя в (1.71) и (1.72). Можно заметить, что второй множитель и выражение в фигурных скобках в (1.72) неотрицательны для всех m , начиная с нуля, и для всех α , β и f . На основании этого можно сделать вывод, что квадратичная форма, построенная с нечетной степенью девиатора тензора энергии-импульса, неотрицательна на множестве причинных векторов $\mathcal{D}_{ik}^{(2m+1)} a^i a^k \geq 0$. Этот факт подтверждает наше утверждение о квадратичной форме для девиатора, однако рассмотрение выражения для четной степени (1.71) дает противоположный результат. Обсудим это подробнее и отдельно рассмотрим случаи разного знака кинетического члена.

При $X \geq 0$ из выражения (1.70) следует, что $f_1 f_2 \geq f_3^2 + f_4^2$, поэтому все члены в фигурных скобках в (1.71) неотрицательны, и, следовательно, эта квадратичная форма тоже неотрицательна.

В противоположном случае, когда $X < 0$, выражения (1.70) приводят к оценке:

$$(\alpha f_2 + \beta f_1)^2 < (\alpha f_2)^2 + (\beta f_1)^2 + 2\alpha\beta(f_3^2 + f_4^2). \quad (1.73)$$

При этом, квадратичная форма, основанная на четной степени девиатора (1.71) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ik}^{(2m)} a^i a^k &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X}\right)^{2m} \frac{X^{2m-1}}{2^{2m}} \left\{ (3^{2m} + 1)(\alpha f_2 + \beta f_1)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(\alpha f_2)^2 - 2(\beta f_1)^2 - 4\alpha\beta(f_3^2 + f_4^2) \right\}, \end{aligned} \quad (1.74)$$

где первый член в фигурных скобках можно ограничить с помощью неравенства (1.73), что приводит к оценке сверху:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ik}^{(2m)} a^i a^k &< \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X}\right)^{2m} \frac{X^{2m-1}}{2^{2m}} \left\{ (3^{2m} + 1) \left[(\alpha f_2)^2 + (\beta f_1)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\alpha\beta(f_3^2 + f_4^2) \right] - 2(\alpha f_2)^2 - 2(\beta f_1)^2 - 4\alpha\beta(f_3^2 + f_4^2) \right\} = \\ &= \left(3^{2m} - 1\right) \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X}\right)^{2m} \frac{X^{2m-1}}{2^{2m}} \left\{ (\alpha f_2)^2 + (\beta f_1)^2 + 2\alpha\beta(f_3^2 + f_4^2) \right\} < 0. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Ввиду того, что $X < 0$, правая часть последнего выражения всегда отрицательна для любых коэффициентов α и β , соответствующих причинному вектору $\alpha\beta \geq 0$, и этот результат свидетельствует о том, что утверждение о положительной определенности квадратичной формы для степеней девиатора может быть нарушено.

Возможность такого нарушения свидетельствует о специфичности моделей нелинейной электродинамики вакуума, поскольку для них это нарушение не наблюдается. Несмотря на то что, в соответствии с (1.75), квадратичная форма для скалярного поля не является знакоопределенной, это же выражение приводит к другому примечательному свойству. Знак квадратичной формы полностью определяется конфигурацией поля и не зависит от выбора причинного вектора a^k , который обычно интерпретируется как четырехмерная скорость наблюдателя. Следовательно, для каждой рассматриваемой конфигурации поля, любой наблюдатель обнаружит, что знак квадратичной формы построенной с произвольной степенью девиатора тензора энергии-импульса не будет зависеть от выбора его вектора скорости. Это утверждение справедливо для нелинейной электродинамики вакуума, модели идеальной жидкости и скалярного поля с произвольной связью кинетического члена в Лагранжиане, однако его следует проверять для других типов материи в каждом конкретном случае.

2 Эффекты нелинейной электродинамики вакуума в поле компактных астрофизических объектов

Исследование электромагнитных процессов в астрофизических условиях дает возможность выполнить разностороннее изучение новых нелинейных эффектов электродинамики вакуума с использованием природных экстремальных режимов сильных электромагнитных и гравитационных полей с напряженностями, недоступными пока в лабораторных условиях. Компактные астрофизические объекты, такие как пульсары, магнетары и черные дыры, с радиусами порядка 10 км, обладающие сильным магнитным полем (от 10^9 до 10^{16} ед. СГС), широким спектром и высокой стабиль-

ностью частоты излучения, являются уникальными инструментами для выполнения таких исследований. В настоящее время существует множество наблюдательных предсказаний для эффектов нелинейной электродинамики вакуума, протекающих в окрестностях пульсаров [142–147]. Некоторые из предсказанных эффекты косвенно подтверждаются астрофизическими наблюдениями. Например, отсутствие «радио-громких» пульсаров с экстремально сильным магнитным полем (индукция поля на поверхности пульсара более $B_p > 10^{13}$ ед. СГС) можно объяснить эффектом подавления рождения электрон-позитронных пар из-за расщепления фотонов [145]. Еще одним, ранее предсказанным эффектом [148], является генерация кратных гармоник для излучения внешних источников, проходящего в поле пульсара. Появление подобного эффекта можно ожидать и для излучения самого пульсара, что в свою очередь, должно найти проявление не только в спектре излучения пульсара, но и повлиять на скорость замедления его вращения. Данные о замедлении вращения пульсаров чрезвычайно важны для современной астрофизики. Они предоставляют возможность выполнить оценки возраста и динамики изменения светимости пульсаров. Например, анализ замедления вращения пульсаров тесной двойной системы PSR 1913₊₁₆ впервые, косвенно, подтвердил существование излучения гравитационных волн [149].

Замедление вращения пульсара обычно вызвано многими факторами, такими как взаимодействие с окружающей магнитосферой [150], диссипацией энергии теллурическими токами в приповерхностной области коры пульсара [151], зависимостью от времени магнитного дипольного момента пульсара, обусловленной процессами протекающими под его поверхностью, наличием магнитного квадрупольного момента и других высших мультипольных составляющих в магнитном поле [152, 153] и гравитационно-волновым излучением.

Тем не менее, основной причиной замедления вращения пульсара является его электромагнитное излучение [154], которое обычно описывается в магнитнодипольном приближении [155] электродинамики Максвелла. В более общих моделях [153] учитываются и высшие мультипольные компоненты, однако для нашего описания достаточно ограничиться наиболее простым случаем. Так как пульсары имеют значительное магнитное поле

$B_p \sim 10^9 - 10^{14}$ ед. СГС, появляется возможность учета новых эффектов в излучении пульсара, связанных с поправками нелинейной электродинамики вакуума. Необходимость таких поправок отмечалась также в [145], а первые оценки по порядку величины были получены в [156, 157].

Последующие разделы будут посвящены получению точных аналитических выражений, учитывающих поправки параметризованной пост-максвелловской электродинамики к излучению пульсара и замедлению его вращения вследствие излучения. В разделе 2.1 будет рассмотрен случай медленного вращения, когда для пульсара с радиусом R_s , вращающегося с угловой скоростью Ω , выполняется условие $\Omega R_s/c \ll 1$, а раздел 2.3 посвящен описанию излучения быстровращающихся пульсаров $\Omega R_s/c \sim 1$.

2.1 Излучение пульсаров в моделях параметризованной пост-максвелловской нелинейной электродинамики

Рассмотрим пульсар с магнитным моментом \mathbf{m} и радиусом R_s , находящийся в начале системы координат. Будем считать, что вектор магнитного дипольного момента наклонен под углом θ_0 к координатной оси z и вращается в угловой скоростью Ω вокруг нее, так что зависимость его компонент от времени имеет вид: $\mathbf{m}(t) = |\mathbf{m}| \{\sin \theta_0 \cos \Omega t, \sin \theta_0 \sin \Omega t, \cos \theta_0\}$.

Для вычисления поправок к собственному излучению пульсара воспользуемся параметризованным пост-максвелловским приближением. Влияние нелинейных поправок электродинамики вакуума становится существенным в достаточно сильных электромагнитных полях, сравнимых характерной квантово-электродинамической индукцией $B_c = m^2 c^2 / e \hbar = 4.41 \cdot 10^{13}$ ед. СГС. В случае, когда векторы электромагнитного поля E и B по модулю значительно меньше B_c возможно воспользоваться пост-максвелловским приближением нелинейной электродинамики вакуума.

Условие применимости пост-максвелловского разложения Лагранжиана (0.11) приводит к ограничению на максимальное значение главного магнитного поля пульсара $\xi \eta_{1,2} B_p^3 < 1$, в результате чего все дальнейшие вычисления будут применимы для описания излучения пульсаров, максимальная индукция магнитного поля которых не превышает $B_p \leq 10^{13}$ Гс.

Для вычисления интенсивности излучения пульсара необходимо учесть что в параметризованной пост-максвелловской электродинамике тензор энергии-импульса в соответствие с (0.11) имеет вид:

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1 + \xi\eta_1 J_2) F_{(2)}^{ik} - \frac{g^{ik}}{8} \left[2J_2 + \xi(\eta_1 + 2\eta_2) J_2^2 - 4\eta_2 \xi J_4 \right] \right\}, \quad (2.1)$$

где $F_{(2)}^{ik} = g^{ni} F_{nm} F^{mk}$ вторая степень тензора электромагнитного поля в пространстве-времени с метрическим тензором g_{ik} . Используя выражение для тензора энергии-импульса несложно вычислить компоненты вектора плотности потока энергии электромагнитного поля:

$$S^\mu = cT^{0\mu} = \frac{c}{4\pi} (1 + \xi\eta_1 J_2) F_{(2)}^{0\mu} = \frac{c}{4\pi} \left\{ 1 + 2\xi\eta_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \right\} [\mathbf{E} \mathbf{B}]^\mu, \quad (2.2)$$

где свободный индекс принимает значения $\mu = 1, 2, 3$. Следует отметить, что несмотря на то что вектор Пойнтинга в пост-максвелловском приближении имеет поправку $\xi\eta_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) [\mathbf{E} \mathbf{B}]$, отличающуюся от нуля в общем случае, её учет при вычислении интенсивности излучения пульсара оказывается излишним, так как она приводит к появлению слагаемых убывающих быстрее чем $1/r^2$ при увеличении расстояния r от пульсара до наблюдателя. Это свойство позволяет использовать традиционное выражение для вектора Пойнтинга электродинамики Максвелла $\mathbf{S} \simeq c[\mathbf{E} \mathbf{B}]/4\pi$, при выполнении последующих вычислений.

Материальные уравнения (0.14) в пост-максвелловском приближении содержат кубическую нелинейность, поэтому можно ожидать, появления в спектре излучения пульсара гармоник, изменяющихся на удвоенной и утроенной частоте вращения. Для определения особенностей излучения на этих частотах, учтем, что для большинства пульсаров линейная скорость точек их поверхности значительно меньше скорости света в вакууме, что позволяет принять ограничение на угловую скорость вращения $\Omega \ll c/R_s$. Излучение быстровращающихся пульсаров будет рассмотрено отдельно в разделе 2.3. Также будем считать, что магнитное поле пульсара \mathbf{B} достаточно слабое $B^2/B_c^2 < 1$, что позволяет воспользоваться пост-максвелловским приближением для Лагранжиана (0.11) и материальных уравнений (0.14). Более того, поправки нелинейной электродинамики вакуума в материальных уравнениях должны быть значительно меньше, по абсолютной вели-

чине, в сравнении со слагаемыми электродинамики Максвелла, что позволяет воспользоваться методом последовательных приближений для вычисления электромагнитного поля пульсара, представив его в виде суммы слагаемых, описывающих поле вращающегося магнитного диполя в электродинамике Максвелла $\mathbf{E}_M, \mathbf{B}_M$, и поправок нелинейной электродинамики вакуума $\mathbf{E}_N, \mathbf{B}_N$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_M + \mathbf{E}_N, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_M + \mathbf{B}_N. \quad (2.3)$$

Во всех последующих выражениях будем предполагать, что $E_N, B_N \ll E_M, B_M$, а вычисления выполнять с точностью по слагаемым линейных по компонентам векторов $\mathbf{E}_N, \mathbf{B}_N$.

Предложенные ограничения позволяют считать, что интенсивность излучения кратных гармоник окажется значительно меньше интенсивности излучения на частоте вращения пульсара в электродинамике Максвелла. Выполним линейризацию материальных уравнений (0.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E}_M + \mathbf{E}_N + 2\xi\{\eta_1(\mathbf{E}_M^2 - \mathbf{B}_M^2)\mathbf{E}_M + 2\eta_2(\mathbf{B}_M\mathbf{E}_M)\mathbf{B}_M\}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B}_M + \mathbf{B}_N + 2\xi\{\eta_1(\mathbf{E}_M^2 - \mathbf{B}_M^2)\mathbf{B}_M - 2\eta_2(\mathbf{B}_M\mathbf{E}_M)\mathbf{E}_M\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

и после подстановки их в уравнения электромагнитного поля (0.13), выполним разделение уравнений, содержащих величины одного порядка малости:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B}_M &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_M}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \text{div } \mathbf{E}_M &= 4\pi\rho, \\ \text{rot } \mathbf{E}_M &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_M}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B}_M &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B}_N &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_N}{\partial t} - 2\xi \text{rot} \{ \eta_1(\mathbf{E}_M^2 - \mathbf{B}_M^2)\mathbf{B}_M - 2\eta_2(\mathbf{B}_M\mathbf{E}_M)\mathbf{E}_M \} + \\ &+ \frac{2\xi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \eta_1(\mathbf{E}_M^2 - \mathbf{B}_M^2)\mathbf{E}_M + 2\eta_2(\mathbf{B}_M\mathbf{E}_M)\mathbf{B}_M \right\}, \\ \text{div } \mathbf{E}_N &= -2\xi \text{div} \{ \eta_1(\mathbf{E}_M^2 - \mathbf{B}_M^2)\mathbf{E}_M + 2\eta_2(\mathbf{B}_M\mathbf{E}_M)\mathbf{B}_M \}, \\ \text{rot } \mathbf{E}_N &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_N}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B}_N = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как правые части уравнений (2.6) включают кубические комбинации

компонент векторов \mathbf{E}_M и \mathbf{B}_M в качестве источников, становится необходимым выполнить решение задачи об определении поля вращающегося пульсара в электродинамике Максвелла. Для этого, будем считать, что вектор плотности тока \mathbf{j} , создающего магнитный дипольный момент звезды, в каждый момент времени ортогонален к радиус-вектору точки внутри пульсара и единичному вектору $\mathbf{N}(t) = \{\sin \theta_0 \exp(i\Omega t), -i \sin \theta_0 \exp(i\Omega t), \cos \theta_0\}$, задающему направление магнитного дипольного момента звезды в данный момент времени: $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{N}(t), \mathbf{r}]f(r)$, где $f(r) \neq 0$ при $r \leq R_s$ и $f(r) = 0$ при $r > R_s$ – модельная функция, со сферически-симметричным распределением, выбор которой определяет абсолютную величину магнитного момента пульсара. Нетрудно убедиться, что такое распределение токов удовлетворяет условию стационарности $\text{div } \mathbf{j} = 0$. Решение уравнений (2.5) удобно получить с помощью запаздывающих скалярного φ_M и векторного \mathbf{A}_M потенциалов электромагнитного поля, выражения для которых, в радиационной калибровке Вейля принимают вид:

$$\begin{aligned} \varphi_M &\equiv 0, \quad \mathbf{A}_M = \frac{1}{c} \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{Re } \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) = \\ &= \frac{1}{c} \left\{ \text{Re} \left[-iJ_1 \mathbf{e}_x - J_1 \mathbf{e}_y + iJ_3 \mathbf{e}_z \right] \sin \theta_0 + \left[\text{Re}(J_3) \mathbf{e}_y - \text{Im}(J_3) \mathbf{e}_x \right] \cos \theta_0 \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где для сокращения записи введены следующие обозначения для вспомогательных функций, связанных с функциями Бесселя полуцелого порядка:

$$\begin{aligned} J_1 &= \exp(i\Omega t) \int \frac{dV' f(r') z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \\ &= -\frac{2i\pi^2 Q H_{3/2}^{(2)}(kr) \cos \theta}{\sqrt{r}} \exp(i\Omega t), \\ J_2 &= \exp(i\Omega t) \int \frac{dV' f(r') r' \sin \theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\varphi') = \\ &= -\frac{2i\pi^2 Q H_{3/2}^{(2)}(kr) \sin \theta}{\sqrt{r}} \exp(i\Omega t - i\varphi), \\ J_3 &= \int \frac{dV' f(r') r' \sin \theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(i\varphi') = \frac{4\pi D \sin \theta}{3r^2}, \end{aligned}$$

$$D = \int_0^{R_s} r'^4 f(r') dr', \quad Q = \int_0^{R_s} r'^{5/2} J_{3/2}(kr) f(r') dr', \quad k = \frac{\Omega}{c}. \quad (2.8)$$

Используя выражение для потенциалов (2.7), вычислим компоненты векторов электромагнитного поля пульсара в электродинамике Максвелла:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_M)_x = & \frac{4\pi D x z \cos \theta_0}{c r^5} + \frac{2\pi^2 Q \sin \theta_0}{c} \cdot \left\{ \left[\frac{k(xy J_{1/2}(kr) - (y^2 + z^2) N_{1/2}(kr))}{r^{5/2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3xy J_{3/2}(kr) - (y^2 - 2x^2 + z^2) N_{3/2}(kr)}{r^{7/2}} \right] \cos(\Omega t) + \right. \\ & \left. + \sin(\Omega t) \left[\frac{k(xy N_{1/2}(kr) + (y^2 + z^2) J_{1/2}(kr))}{r^{5/2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3xy N_{3/2}(kr) + (y^2 - 2x^2 + z^2) J_{3/2}(kr)}{r^{7/2}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_M)_y = & \frac{4\pi D y z \cos \theta_0}{c r^5} - \frac{2\pi^2 Q \sin \theta_0}{c} \cdot \left\{ \left[\frac{k((x^2 + z^2) J_{1/2}(kr) - xy N_{1/2}(kr))}{r^{5/2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3xy N_{3/2}(kr) - (x^2 - 2y^2 + z^2) J_{3/2}(kr)}{r^{7/2}} \right] \cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{k(xy J_{1/2}(kr) + (x^2 + z^2) N_{1/2}(kr))}{r^{5/2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3xy J_{3/2}(kr) + (x^2 - 2y^2 + z^2) N_{3/2}(kr)}{r^{7/2}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_M)_z = & \frac{4\pi D \cos \theta_0 (2z^2 - x^2 - y^2)}{3c r^5} + \frac{2\pi^2 Q \sin \theta_0}{c} \cdot \left\{ \left[\frac{k(yz J_{1/2}(kr))}{r^{5/2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{xz N_{1/2}(kr)}{r^{5/2}} - \frac{3(yz J_{3/2}(kr) + xz N_{3/2}(kr))}{r^{7/2}} \right] \cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{3(xz J_{3/2}(kr) - yz N_{3/2}(kr))}{r^{7/2}} - \frac{k(xz J_{1/2}(kr) - yz N_{1/2}(kr))}{r^{5/2}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{E}_M)_x = \frac{2\pi^2 Q \sin \theta_0 k z}{c r^{3/2}} \cdot \left\{ \cos(\Omega t) N_{3/2}(kr) - \sin(\Omega t) J_{3/2}(kr) \right\},$$

$$(\mathbf{E}_M)_y = \frac{2\pi^2 Q \sin \theta_0 k z}{c r^{3/2}} \cdot \left\{ \cos(\Omega t) J_{3/2}(kr) + \sin(\Omega t) N_{3/2}(kr) \right\},$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_M)_z = & \frac{2\pi^2 Q \sin \theta_0 k}{cr^{3/2}} \cdot \left\{ \sin(\Omega t) \left[x J_{3/2}(kr) - y N_{3/2}(kr) \right] - \right. \\
& \left. - \cos(\Omega t) \left[y J_{3/2}(kr) + x N_{3/2}(kr) \right] \right\}. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Полученное решение для поля вращающегося диполя является общим и содержит слагаемые с различной асимптотикой убывания по степеням r , расстояния от центра до точки наблюдения, в том числе и неволновые слагаемые, не удовлетворяющие условию излучения Зоммерфельда. Присутствие таких слагаемых является принципиальным, так как благодаря им инварианты электромагнитного поля $\mathbf{B}_M^2 - \mathbf{E}_M^2$ и $(\mathbf{B}_M, \mathbf{E}_M)^2$ отличаются от нуля, что обеспечивает нетривиальный вклад в выражения эффективных источников в правой части уравнений (2.6).

Коэффициенты Q и D связаны с магнитным моментом и угловой скоростью вращения пульсара. Выражение для коэффициента D можно получить, выполнив сопоставление с полем магнитного диполя в статическом случае, при $\Omega \rightarrow 0$, а коэффициент Q можно найти сопоставлением с полем излучения вращающегося диполя в длинноволновом приближении, при $kR_s \ll 1$. В результате сопоставления коэффициенты примут вид:

$$D = \frac{3c|\mathbf{m}|}{4\pi}, \quad Q = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} D k^{3/2} = c \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{3/2} |\mathbf{m}|, \quad k = \frac{\Omega}{c}. \tag{2.10}$$

Выражения для компонент поля (2.9) можно факторизовать и представить в векторной форме, явно выделив квазистатические, волновые и неволновые слагаемые:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_M(\mathbf{r}, \tau) = & \frac{3(\mathbf{m}(\tau) \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}(\tau)}{r^5} - \frac{\dot{\mathbf{m}}(\tau)}{cr^2} + \frac{3(\dot{\mathbf{m}}(\tau) \mathbf{r})\mathbf{r}}{cr^4} \\
& + \frac{(\ddot{\mathbf{m}}(\tau) \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\ddot{\mathbf{m}}(\tau)}{c^2r^3}, \\
\mathbf{E}_M(\mathbf{r}, \tau) = & \frac{[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{m}}(\tau)]}{cr^3} + \frac{[\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{m}}(\tau)]}{c^2r^2}, \tag{2.11}
\end{aligned}$$

где точкой обозначена производная по запаздывающему времени $\tau = t - r/c$. Такое представление оказывается полезным для вычисления нелинейных выражений и выделения слагаемых с необходимой асимптотикой.

Вычислим поправки параметризованной пост-максвелловской электро-

динамики к компонентам векторов электромагнитного поля. Перейдем к описанию в терминах скалярного и векторного потенциалов $\mathbf{V}_N = \text{rot} \mathbf{A}_N$, $\mathbf{E}_N = -\text{grad} \varphi_N - \partial \mathbf{A}_N / c \partial t$ для которых потребуем выполнения калибровочного условия Лоренца. Система уравнений (2.6) примет вид:

$$\begin{aligned} \square \varphi_N &= 2\xi \text{div} \left\{ \eta_1 (\mathbf{E}_M^2 - \mathbf{V}_M^2) \mathbf{E}_M + 2\eta_2 (\mathbf{V}_M \mathbf{E}_M) \mathbf{V}_M \right\}, \\ \square \mathbf{A}_N &= 2\xi \text{rot} \left\{ \eta_1 (\mathbf{E}_M^2 - \mathbf{V}_M^2) \mathbf{V}_M - 2\eta_2 (\mathbf{V}_M \mathbf{E}_M) \mathbf{E}_M \right\} \\ &\quad - \frac{2\xi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \eta_1 (\mathbf{E}_M^2 - \mathbf{V}_M^2) \mathbf{E}_M + 2\eta_2 (\mathbf{V}_M \mathbf{E}_M) \mathbf{V}_M \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставив выражения (2.9) или (2.11) для компонент векторов \mathbf{V}_M и \mathbf{E}_M в правую часть уравнений (2.7), получим окончательную форму для уравнений потенциалов электромагнитного поля φ_N , \mathbf{A}_N , связанных с поправками нелинейной электродинамики вакуума. Решение этих уравнений будем искать в длинноволновом приближении, предполагая, малость параметра $kR_s \ll 1$, что выполняется для достаточно широкого круга пульсаров. Процедура получения решений оказывается весьма громоздкой из-за сложности и существенной неоднородности правой части уравнений, поэтому приведем лишь окончательные результаты в виде решений для векторов поля \mathbf{E}_N и \mathbf{V}_N , в которых, сохраним лишь слагаемые относящиеся к полю излучения убывающие не быстрее, чем $\sim 1/r$ в волновой зоне. Направление наблюдения определим единичным вектором \mathbf{n} , составляющим угол θ с осью вращения пульсара.

Выражения для векторов \mathbf{E}_N и \mathbf{V}_N удобно представить в виде суммы, в которой индекс каждого слагаемого указывает на частоту его изменения:

$$\mathbf{E}_N = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{V}_N = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3. \quad (2.13)$$

В таких обозначениях компонента \mathbf{E}_1 соответствует поправке к полю излучения на частоте вращения пульсара Ω , компонента \mathbf{E}_2 соответствует излучению на удвоенной частоте 2Ω , а \mathbf{E}_3 описывает излучение на частоте 3Ω :

$$(\mathbf{E}_1)_x = -\frac{\xi k^4 |\mathbf{m}|^3 \sin \theta_0 n_z}{15 R_s^4 r} \left\{ \left[(3n_x^2 - 7)\eta_1 - (n_x^2 - 3)\eta_2 - (3\eta_1 - \eta_2) \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times (2n_x^2 - 1) \sin^2 \theta_0 \Big] \sin(kr - \Omega t) - (2 \sin^2 \theta_0 - 1)(3\eta_1 - \eta_2) \cos(kr - \Omega t) n_x n_y \Big\}, \\
(\mathbf{E}_1)_y &= -\frac{\xi k^4 |\mathbf{m}|^3 \sin \theta_0 n_z}{15R_s^4 r} \left\{ \left[(3n_y^2 - 7)\eta_1 - (n_y^2 - 3)\eta_2 - (3\eta_1 - \eta_2) \times \right. \right. \\
& \times (2n_y^2 - 1) \sin^2 \theta_0 \Big] \cos(kr - \Omega t) - (2 \sin^2 \theta_0 - 1)(3\eta_1 - \eta_2) \sin(kr - \Omega t) n_x n_y \Big\}, \\
(\mathbf{E}_1)_z &= -\frac{\xi k^4 |\mathbf{m}|^3 \sin \theta_0}{15R_s^4 r} \left\{ (3n_z^2 + 4)\eta_1 - (n_z^2 + 2)\eta_2 - (3\eta_1 - \eta_2)(2n_z^2 - 1) \sin^2 \theta_0 \right\} \times \\
& \times \left[\cos(kr - \Omega t) n_y + \sin(kr - \Omega t) n_x \right], \\
(\mathbf{B}_1)_x &= -\frac{\xi k^4 |\mathbf{m}|^3 \sin \theta_0}{15R_s^4 r} \left\{ \left[(4n_y^2 + 7n_z^2)\eta_1 - (2n_y^2 + 3n_z^2)\eta_2 + (3\eta_1 - \eta_2) \times \right. \right. \\
& \times (n_y^2 - n_z^2) \sin^2 \theta_0 \Big] \cos(kr - \Omega t) + \\
& + \left[(3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta_0 + 2(2\eta_1 - \eta_2) \right] \sin(kr - \Omega t) n_x n_y \Big\}, \\
(\mathbf{B}_1)_y &= \frac{\xi k^4 |\mathbf{m}|^3 \sin \theta_0}{15R_s^4 r} \left\{ \left[(4n_x^2 + 7n_z^2)\eta_1 - (2n_x^2 + 3n_z^2)\eta_2 + (3\eta_1 - \eta_2) \times \right. \right. \\
& \times (n_x^2 - n_z^2) \sin^2 \theta_0 \Big] \sin(kr - \Omega t) + \\
& + \left[(3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta_0 + 2(2\eta_1 - \eta_2) \right] \cos(kr - \Omega t) n_x n_y \Big\}, \\
(\mathbf{B}_1)_z &= \frac{\xi k^4 |\mathbf{m}|^3 \sin \theta_0 n_z}{15R_s^4 r} \left\{ 7\eta_1 - 3\eta_2 - (3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta_0 \right\} \times \\
& \times \left[\cos(kr - \Omega t) n_x - \sin(kr - \Omega t) n_y \right], \tag{2.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_2)_x &= \frac{4\xi |\mathbf{m}|^3 k^4 \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0}{105R_s^4 r} \left\{ n_x \left[3(10n_y^2 + 11n_z^2)\eta_1 - 7(2n_y^2 + n_z^2)\eta_2 \right] \times \right. \\
& \times \sin(2(kr - \Omega t)) + n_y \left[(14n_x^2 - 7)\eta_2 + (15(n_y^2 - n_x^2) + 33n_z^2)\eta_1 \right] \cos(2(kr - \Omega t)) \Big\}, \\
(\mathbf{E}_2)_y &= -\frac{4\xi |\mathbf{m}|^3 k^4 \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0}{105R_s^4 r} \left\{ n_y \left[3(10n_x^2 + 11n_z^2)\eta_1 - 7(2n_x^2 + n_z^2)\eta_2 \right] \times \right. \\
& \times \sin(2(kr - \Omega t)) - n_x \left[(14n_y^2 - 7)\eta_2 + (15(n_x^2 - n_y^2) + 33n_z^2)\eta_1 \right] \cos(2(kr - \Omega t)) \Big\}, \\
(\mathbf{E}_2)_z &= \frac{4\xi |\mathbf{m}|^3 k^4 \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 (7\eta_2 - 33\eta_1)}{105R_s^4 r} n_z \times \\
& \times \left\{ [n_x^2 - n_y^2] \sin(2(kr - \Omega t)) + 2n_x n_y \cos(2(kr - \Omega t)) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}_2)_x &= -\frac{4\xi|\mathbf{m}|^3k^4\sin^2\theta_0\cos\theta_0}{105R_s^4r}n_z\left\{n_y\left[7\eta_2+3\eta_1(n_x^2-11(n_y^2+n_z^2))\right]\times\right. \\
&\times\sin(2(kr-\Omega t))-n_x\left[7\eta_2-\eta_1(15n_x^2+51n_y^2+33n_z^2)\right]\cos(2(kr-\Omega t))\left.\right\}, \\
(\mathbf{B}_2)_y &= -\frac{4\xi|\mathbf{m}|^3k^4\sin^2\theta_0\cos\theta_0}{105R_s^4r}n_z\left\{n_x\left[7\eta_2+3\eta_1(n_y^2-11(n_x^2+n_z^2))\right]\times\right. \\
&\times\sin(2(kr-\Omega t))+n_y\left[7\eta_2-\eta_1(15n_y^2+51n_x^2+33n_z^2)\right]\cos(2(kr-\Omega t))\left.\right\}, \\
(\mathbf{B}_2)_z &= -\frac{4\xi|\mathbf{m}|^3k^4\sin^2\theta_0\cos\theta_0}{105R_s^4r}\left\{7\eta_2-3\eta_1(5(n_x^2+n_y^2)+11n_z^2)\right\}\times \\
&\times\left\{[n_x^2-n_y^2]\cos(2(kr-\Omega t))-2n_xn_y\sin(2(kr-\Omega t))\right\}. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_3)_x &= \frac{81\xi\eta_1|\mathbf{m}|^3k^4\sin^3(\theta_0)}{140R_s^4r}n_z\left\{[n_x^2-n_y^2]\sin(3(kr-\Omega t))+\right. \\
&\quad\left.+2n_xn_y\cos(3(kr-\Omega t))\right\}, \\
(\mathbf{E}_3)_y &= \frac{81\xi\eta_1|\mathbf{m}|^3k^4\sin^3(\theta_0)}{140R_s^4r}n_z\left\{[n_x^2-n_y^2]\cos(3(kr-\Omega t))- \right. \\
&\quad\left.-2n_xn_y\sin(3(kr-\Omega t))\right\}, \\
(\mathbf{E}_3)_z &= -\frac{81\xi\eta_1|\mathbf{m}|^3k^4\sin^3(\theta_0)}{140R_s^4r}\left\{n_y\left[3n_x^2-n_y^2\right]\cos(3(kr-\Omega t))+\right. \\
&\quad\left.+n_x\left[n_x^2-3n_y^2\right]\sin(3(kr-\Omega t))\right\}, \\
(\mathbf{B}_3)_x &= \frac{81\xi\eta_1|\mathbf{m}|^3k^4\sin^3(\theta_0)}{140R_s^4r}\left\{n_xn_y\left[3n_y^2+2n_z^2-n_x^2\right]\sin(3(kr-\Omega t))- \right. \\
&\quad\left.-\left[(3n_y^2+n_z^2)n_x^2-n_y^4-n_y^2n_z^2\right]\cos(3(kr-\Omega t))\right\}, \\
(\mathbf{B}_3)_y &= -\frac{81\xi\eta_1|\mathbf{m}|^3k^4\sin^3(\theta_0)}{140R_s^4r}\left\{\left[(3n_y^2-n_z^2)n_x^2-n_x^4+n_y^2n_z^2\right]\sin(3(kr-\Omega t))+ \right. \\
&\quad\left.+n_xn_y\left[n_y^2-2n_z^2-3n_x^2\right]\cos(3(kr-\Omega t))\right\}, \\
(\mathbf{B}_3)_z &= -\frac{81\xi\eta_1|\mathbf{m}|^3k^4\sin^3(\theta_0)}{140R_s^4r}n_z\left\{n_y\left[3n_x^2-n_y^2\right]\sin(3(kr-\Omega t))- \right. \\
&\quad\left.-n_x\left[n_x^2-3n_y^2\right]\cos(3(kr-\Omega t))\right\}. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Прямым вычислением можно убедиться, что для каждой частотной ком-

поненты выполняется соотношение $\mathbf{V}_\alpha = [\mathbf{n} \mathbf{E}_\alpha]$, где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ единичный вектор в направлении наблюдателя, а индекс $\alpha = 1, 2, 3$ указывает на номер частотной компоненты. В дальнейшем, из-за громоздкости выражений, будем приводить только явный вид вектора напряженности электрического поля.

Выполним оценку эффективности генерации второй и третьей гармоники излучения при вращении магнитного диполя. Для этого воспользуемся выражениями для компонент поля и вычислим усредненную по периоду соответствующей гармоники интенсивность излучения

$$\overline{P}_\alpha = \frac{1}{4\pi} \langle \int [\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{V}_\alpha] r^2 d\Omega \rangle, \quad (2.17)$$

где учтено, что согласно выражения (2.2) для поля излучения в пост-максвелловском приближении не требуется учет поправок в выражении для плотности потока энергии в первом исчезающем приближении.

Будем называть коэффициентом эффективности генерации гармоники $\kappa_\alpha = \overline{P}_\alpha / \overline{P}_M$ отношение усредненной (по периоду гармоники) интенсивности излучения к усредненной интенсивности излучения в ведущем, максвелловском приближении $\overline{P}_M = 2k^4 c |\mathbf{m}|^2 \sin^2 \theta_0 / 3$. Для большей наглядности представления результата, выразим модуль магнитного момента через B_p – характерное значение индукции магнитного поля на поверхности пульсара $|\mathbf{m}| = B_p R_s^3$. Выражения для коэффициентов эффективности генерации второй и третьей гармоники были получены нами в работе [158] и имеют вид:

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \left[\frac{36}{343} \eta_1^2 - \frac{8}{125} \eta_1 \eta_2 + \frac{4}{375} \eta_2^2 \right] (kR_s)^4 \left(\frac{B_p}{B_c} \right)^4 \sin^2(2\theta_0), \\ \kappa_3 &= \left[\frac{3^8 \eta_1^2}{35^3} \right] (kR_s)^4 \left(\frac{B_p}{B_c} \right)^4 \sin^4 \theta_0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Коэффициент κ_2 принимает наибольшее значение, когда угол наклона магнитного момента пульсара к оси вращения $\theta_0 = \pi/4$. Наименьшее значение, равное нулю, этот коэффициент принимает, когда вектор магнитного дипольного момента ортогонален оси вращения $\theta_0 = \pi/2$, при этом коэффициент κ_3 максимален и интенсивность в максвелловском приближении также наибольшая. Надежные наблюдательные данные о фактических значе-

ниях угла θ_0 пока не известны, поэтому ограничимся только упомянутыми выше предельными случаями. Для количественной оценки коэффициентов эффективности генерации кратных гармоник воспользуемся данными каталога пульсаров ATNF. Примем значение радиуса пульсара $R_s = 30$ км, согласно [159]. Оба коэффициента имеют степенную зависимость от угловой скорости вращения пульсара и характерного магнитного поля $\sim \Omega^4 B_p^4$, поэтому эффективность генерации гармоник будет выше для пульсаров с большим значениями этих параметров. При этом необходимо учесть условие применимости пост-максвелловского приближения $B_p/B_c \ll 1$. Согласно данным каталога, пульсары, обладающие сильным магнитным полем $B_p > 10^{12}$ Гс имеют малые угловые скорости вращения $\Omega \sim 100$ с $^{-1}$, такие что $kR_s \sim 10^{-2}$ и наоборот для пульсаров с большей угловой скоростью вращения, магнитное поле оказывается значительно меньше B_c .

В Таблице 3 приведены значения вспомогательных параметров и результаты оценки коэффициентов эффективности генерации кратных гармоник пульсарами, у которых $\Omega > 100$ с $^{-1}$ при $B_p > 10^{12}$ Гс; или $\Omega > 1000$ с $^{-1}$, при этом магнитное поле выбрано наибольшим из представленных для такой угловой скорости вращения.

Имя пульсара	Ω , с $^{-1}$	kR_s	B_p , Гс	B_p/B_c	$\kappa_2/\sin^2 2\theta_0$	$\kappa_3/\sin^4 \theta_0$
B0531+21	188,16	0,019	3,79e+12	0,085	4,487e-22	9,526e-20
B0540-69	124,24	0,012	4,98e+12	0,113	2,543e-22	5,399e-20
J1833-1034	101,53	0,010	3,58e+12	0,081	3,029e-23	6,429e-21
J1747-2809	120,47	0,012	2,88e+12	0,065	2,515e-23	5,338e-21
J1400-6325	201,50	0,020	1,11e+12	0,025	4,343e-24	9,218e-22
B1820-30A	1154,99	0,115	4,34e+9	9,841e-05	1,096e-30	2,325e-28
B1821-24A	2057,14	0,206	2,25e+9	5,102e-05	7,964e-31	1,690e-28
J0024-7204P	1724,71	0,172	1,57e+9	3,560e-05	9,329e-32	1,980e-29
J1803-3002C	1075,81	0,108	2,04e+9	4,626e-05	4,026e-32	8,545e-30

Таблица 3: Коэффициенты эффективности генерации гармоник для некоторых пульсаров.

Полученные значения коэффициентов $\kappa_{2,3}$ оказываются крайне малы, однако их оценка выполнена для электродинамики Гейзенберга-Эйлера в других моделях электродинамики их значения могут существенно возрасти. Кроме того, при обнаружении быстровращающихся пульсаров с сильным магнитным полем, также следует ожидать возрастания оценок для

этих коэффициентов. В разделе 2.3 будут вычислены поправки к полю излучения быстровращающихся пульсаров.

Вычислим пространственное распределение интенсивности излучения пульсара, обусловленное поправками нелинейной электродинамики вакуума. Для этого в выражениях (2.14), (2.15), (2.16) перейдем к угловым координатам вектора указывающего в направлении наблюдателя $\mathbf{n} = \{n_x = \sin \theta \cos \varphi, n_y = \sin \theta \sin \varphi, n_z = \cos \theta\}$, при этом компоненты поля излучения в волновой зоне $r \gg c/\Omega$ примут вид:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_1)_x &= -\frac{\xi |\mathbf{m}|^3 k^4 \cos \theta \sin \theta_0}{30 r R_s^4} \left\{ \left[2(7\eta_1 - 3\eta_2 - (3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta_0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2 \sin^2 \theta_0 - 1)(3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta \right] \sin (\Psi + \varphi) \right. \\
&\quad \left. - (2 \sin^2 \theta_0 - 1)(3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta \sin (\Psi - \varphi) \right\}, \\
(\mathbf{E}_1)_y &= \frac{\xi |\mathbf{m}|^3 k^4 \cos \theta \sin \theta_0}{30 r R_s^4} \left\{ \left[2(7\eta_1 - 3\eta_2 - (3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta_0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2 \sin^2 \theta_0 - 1)(3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta \right] \cos (\Psi + \varphi) \right. \\
&\quad \left. - (2 \sin^2 \theta_0 - 1)(3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta \cos (\Psi - \varphi) \right\}, \\
(\mathbf{E}_1)_z &= \frac{\xi |\mathbf{m}|^3 k^4 \sin \theta \sin \theta_0}{15 R_s^4 r} \sin \Psi \times \\
&\times \left\{ 7\eta_1 - 3\eta_2 - (3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta_0 + (2 \sin^2 \theta_0 - 1)(3\eta_1 - \eta_2) \sin^2 \theta \right\}, \\
(\mathbf{E}_2)_x &= \frac{2\xi |\mathbf{m}|^3 k^4 \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 \sin \theta}{105 r R_s^4} \times \\
&\times \left\{ \left[51\eta_1 \sin^2 \theta - 7\eta_2 \sin^2 \theta - 66\eta_1 + 14\eta_2 \right] \sin (2\Psi + \varphi) \right. \\
&\quad \left. + (15\eta_1 - 7\eta_2) \sin^2 \theta \sin (2\Psi - \varphi) \right\}, \\
(\mathbf{E}_2)_y &= -\frac{2\xi |\mathbf{m}|^3 k^4 \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 \sin \theta}{105 r R_s^4} \times \\
&\times \left\{ \left[51\eta_1 \sin^2 \theta - 7\eta_2 \sin^2 \theta - 66\eta_1 + 14\eta_2 \right] \cos (2\Psi + \varphi) \right. \\
&\quad \left. - (15\eta_1 - 7\eta_2) \sin^2 \theta \cos (2\Psi - \varphi) \right\}, \\
(\mathbf{E}_2)_z &= \frac{4\xi |\mathbf{m}|^3 k^4 (33\eta_1 - 7\eta_2)}{105 r R_s^4} \cos \theta \sin^2 \theta \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 \sin (2\Psi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_3)_x &= -\frac{81\xi|\mathbf{m}|^3 k^4 \eta_1}{140 r R_s^4} \cos \theta \sin^2 \theta \sin^3 \theta_0 \sin (3\Psi + \varphi), \\
(\mathbf{E}_3)_y &= \frac{81\xi|\mathbf{m}|^3 k^4 \eta_1}{140 r R_s^4} \cos \theta \sin^2 \theta \sin^3 \theta_0 \cos (3\Psi + 2\varphi), \\
(\mathbf{E}_3)_z &= \frac{81\xi|\mathbf{m}|^3 k^4 \eta_1}{140 r R_s^4} \sin^3 \theta \sin^3 \theta_0 \sin (3\Psi),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где использовано обозначение $\Psi = \Omega t - kr - \varphi$. Компоненты вектора индукции магнитного поля могут быть получены с помощью выражения $\mathbf{B}_\alpha = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_\alpha]$.

Угловое распределение излучения пульсара (интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega$ в направлении наблюдения, заданном единичным вектором \mathbf{n}) можно найти, как $dI(t)/d\Omega = r^2(\mathbf{S} \mathbf{n})$, при этом, как было показано ранее (2.2), для вычисления вектора Пойнтинга в волновой зоне можно воспользоваться выражением этого вектора в электродинамике Максвелла $\mathbf{S} = c[\mathbf{E}, \mathbf{B}]/4\pi$, где векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} соответствуют суммарному электромагнитному полю для всех гармоник (2.3). Используя выражения (2.19) для электромагнитного поля пульсара, представим угловое распределение излучения в первом порядке малости теории возмущения в виде:

$$\frac{dI(t)}{d\Omega} = \left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_M + \left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_0 + \sum_{l=1}^4 \left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_l \cos(l\Psi), \tag{2.20}$$

где выражение $\left(dI/d\Omega\right)_M$ соответствует излучению в электродинамике Максвелла, а остальные слагаемые относятся к поправкам нелинейной электродинамики вакуума. Индексы указывают на частоту изменения соответствующей компоненты интенсивности излучения, а сами выражения для каждой из компонент были получены нами в работе [104] и имеют вид:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_M &= \frac{Q \sin^2 \theta_0}{4\pi} \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left(1 + \cos(2\Psi)\right)\right], \\
\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_0 &= \frac{AQ \sin^2 \theta_0}{\pi} \left[\frac{\eta_2 - 3\eta_1}{20} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 + \frac{5\eta_1 - 2\eta_2}{30} \sin^2 \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\eta_1 - \eta_2}{30} \sin^2 \theta_0 + \frac{3\eta_2 - 7\eta_1}{30}\right], \\
\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_1 &= \frac{2AQ \cos \theta \cos \theta_0 \sin \theta \sin^3 \theta_0}{35\pi} \left[3\eta_1 \sin^2 \theta - 11\eta_1 + \frac{7\eta_2}{3}\right],
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_2 = \frac{AQ \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0}{4\pi} \left[\frac{81\eta_1}{140} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 - \frac{67\eta_1}{70} \sin^2 \theta_0 - \frac{\eta_2}{15} \sin^2 \theta_0 + \frac{2(2\eta_1 - \eta_2)}{15} \right],$$

$$\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_3 = \frac{6\eta_1 AQ}{35\pi} \cos \theta \cos \theta_0 \sin^3 \theta \sin^3 \theta_0, \quad \left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_4 = \frac{81\eta_1 AQ}{560\pi} \sin^4 \theta \sin^4 \theta_0,$$

где введены обозначения для коэффициентов $A = \left(kR_s B_p / B_c\right)^2$ и $Q = \Omega^4 B_p^2 R_s^6 / c^3$, а модуль магнитного момента пульсара, как и ранее, выражен через характерное магнитное поле на его поверхности $|\mathbf{m}| = B_p R_s^3$. Для устранения быстрых изменений интенсивности излучения, выполним усреднение по периоду вращения пульсара, в результате чего для поправок нелинейной электродинамики сохранится вклад только от постоянного слагаемого $\left(dI/d\Omega\right)_0$, фактически определяющего усредненную диаграмму направленности излучения пульсара в пост-максвелловском приближении.

На Рисунке 1 представлено нормированное распределение интенсивности излучения для электродинамики Максвелла. Аналогичное распределение для поправок электродинамики Гейзенберга-Эйлера и Борна-Инфельда приведено на Рисунке 2 и Рисунке 3, соответственно.

Для построения зависимостей выбраны фиксированные значения угла наклона вектора магнитного момента к оси вращения, отмеченные на графиках. При разных значениях θ_0 угловая зависимость поправок нелинейной электродинамики к интенсивности излучения качественно изменяется, что не характерно для электродинамики Максвелла.

Для поправки, следующей из электродинамики Гейзенберга-Эйлера, изменяется направление главного максимума диаграммы распределения интенсивности излучения (на перпендикулярное к направлению максимума интенсивности излучения в электродинамике Максвелла), и при некотором значении угла наклона магнитного момента распределение интенсивности излучения в поправке становится равномерным и не зависит от выбора направления наблюдения, однако при дальнейшем увеличении угла наклона θ_0 анизотропия в распределении излучения снова восстанавливается.

Для электродинамики Борна-Инфельда, по мере увеличения θ_0 , распределение интенсивности излучения в поправке, стремится к равномерному,

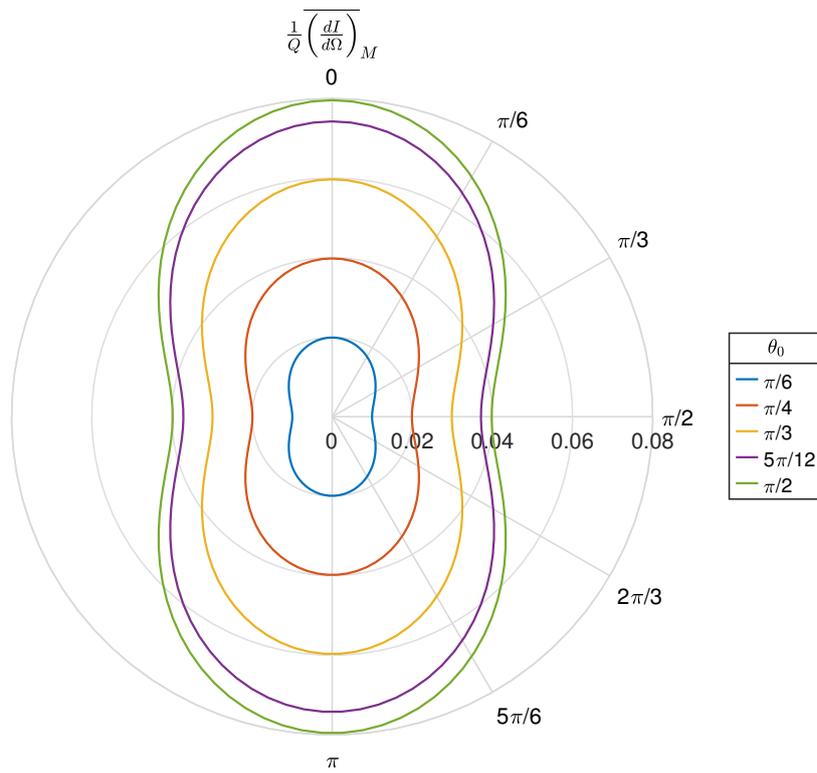


Рис. 1: Угловое распределение интенсивности излучения пульсара, усредненное по периоду вращения, в электродинамике Максвелла.

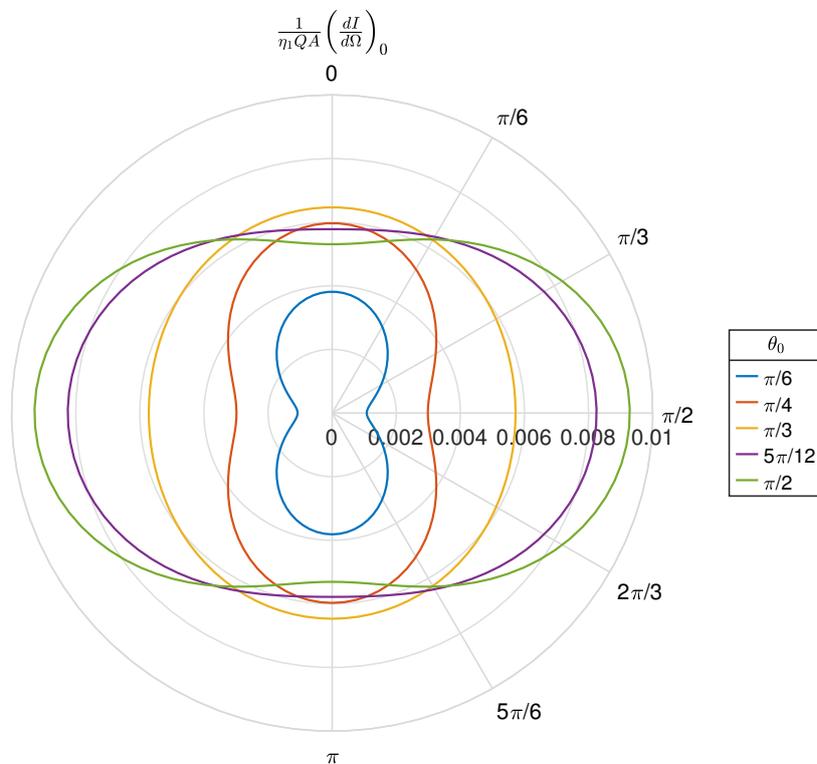


Рис. 2: Поправка первого порядка малости к угловому распределению интенсивности излучения пульсара, усредненному по периоду вращения, в электродинамике Гейзенберга-Эйлера.

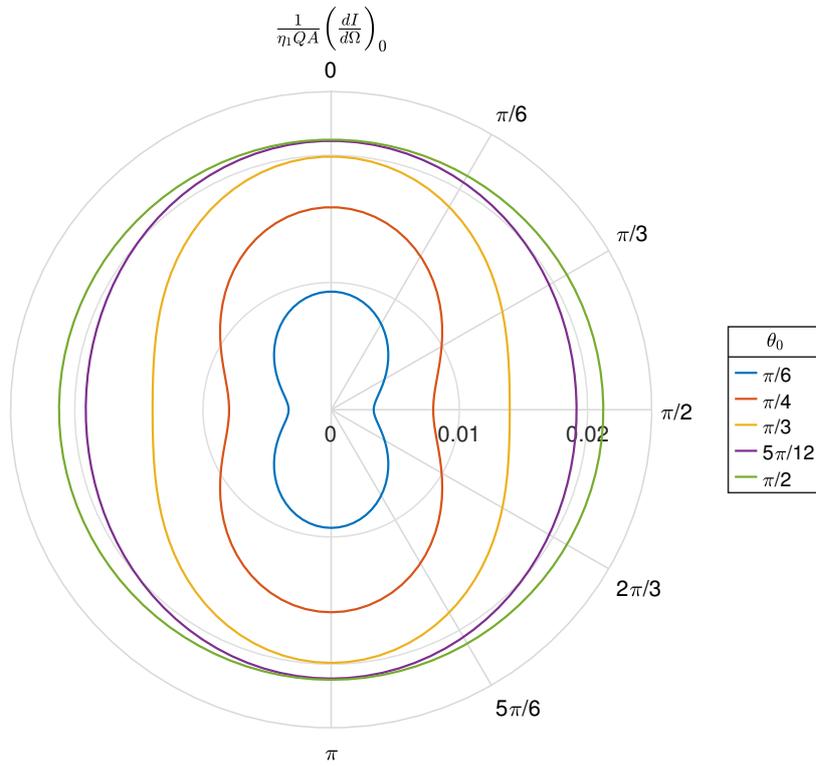


Рис. 3: Поправка первого порядка малости к угловому распределению интенсивности излучения пульсара, усредненному по периоду вращения, в электродинамике Борна-Инфельда.

при этом изменение направления главного максимума не происходит.

Выражения (2.20) и (2.21) позволяют определить полную энергию излучаемую пульсаром за единицу времени по всем направлениям (полную интенсивность излучения):

$$I_{el} = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega = \frac{2Q}{3} \sin^2 \theta_0 \left[1 - \frac{11\eta_1 - 5\eta_2}{15} \left(\frac{B_p}{B_c} k R_s \right)^2 \right]. \quad (2.22)$$

В последующем, это выражение даст возможность оценить скорость замедления пульсара, вызванную его излучением, и хотя поправки нелинейной электродинамики малы $B_p/B_c \cdot k R_s \ll 1$ по сравнению с излучением пульсара в электродинамике Максвелла, их следует сравнить с другими факторами, влияющими скорость его вращения.

2.2 Вакуумные поправки к замедлению вращения пульсара

Для оценки влияния поправок нелинейной электродинамики вакуума на замедление вращения пульсара, аналогично [160, 161], будем считать, что изменение кинетической энергии пульсара $\mathcal{E}_k = J\Omega^2/2$ с моментом инерции J , происходит только за счет излучения электромагнитных и гравитационных волн:

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -I_{el} - \frac{32G}{5} \frac{J^2 \epsilon^2 \Omega^6}{c^5}, \quad (2.23)$$

где потери энергии на гравитационное излучение учтены, согласно известной квадрупольной формуле [162], в которой G гравитационная постоянная, ϵ параметр экваториальной эллиптичности; интенсивность же электромагнитного излучения I_{em} определяется выражением (2.22). Закон изменения энергии (2.23) приводит к уравнению замедления вращения, которое принято записывать в виде разложения по степеням угловой скорости:

$$\frac{d\Omega}{dt} = (K_m + K_{3ned})\Omega^3 + (K_{5ned} + K_{gw})\Omega^5. \quad (2.24)$$

Коэффициенты K принято называть функциями крутящего момента, так K_m функция крутящего момента в электродинамике Максвелла, K_{3ned} и K_{5ned} коэффициенты обусловленные поправками нелинейной электродинамики вакуума, и K_{gw} функция крутящего момента, связанная с гравитационным излучением. Эти коэффициенты, полученные нами в [104], имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} K_m &= -\frac{2}{3c^3} \frac{B_p^2}{J} R_s^6 \sin^2 \theta_0, & K_{3ned} &= \frac{8\eta_1}{15} \left(\frac{B_p}{B_c}\right)^2 K_m, \\ K_{5ned} &= \left[\frac{117\eta_1 + 25\eta_2}{75} + \frac{2(3\eta_1 - 5\eta_2)}{15} \sin^2 \theta_0 \right] \left(\frac{R_s B_p}{c B_c}\right)^2 K_m, \\ K_{gw} &= -\frac{32GJ\epsilon^2}{5c^5}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Как следует из уравнения (2.24), влияние нелинейной электродинамики вакуума в постмаксвелловском приближении приводит к появлению дополнительных поправок, как к функции крутящего момента электродинамики Максвелла так и функции крутящего момента гравитационного излучения

пульсара. Поправки K_{3ned} и K_{5ned} зависят от значения постмаксвелловских параметров η_1 и η_2 . Для моделей Борна-Инфельда и Гейзенберга-Эйлера $K_{3ned} > 0$ и $K_{5ned} > 0$, поэтому эти поправки вызывают дополнительное замедление вращения пульсара. В то же время, выражения (2.2) не исключают существования гипотетической модели нелинейной электродинамики вакуума, для которой $K_{5ned} < 0$. В такой теории нелинейные поправки могут уменьшить скорость потери энергии пульсаром.

Для количественных оценок значений коэффициентов крутящего момента, примем типичные параметры пульсара [159]: радиус $R_s = 30$ км, момент инерции $J = 10^{45} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, а также предположим, что $\theta_0 = \pi/2$. При выборе периода вращения пульсара и индукции магнитного поля следует учитывать принятые ранее ограничения $\Omega R_s/c \ll 1$ и $B_p \ll B_c$. Эти ограничения выполняются для широкого круга пульсаров, например, J007+7303, период вращения которого составляет $P_0 \sim 0.3$ с и $B_p \sim 10^{13}$ Гс или для J1012-5830 с периодом вращения $P_0 \sim 2.1$ с и индукцией магнитного поля на поверхности $B_p \sim 0.9 \cdot 10^{12}$ Гс. Значения пост-максвелловских параметров в теориях Гейзенберга-Эйлера и Борна-Инфельда имеют одинаковый порядок малости, поэтому для оценки мы будем использовать параметры только одной из них, например, теории Гейзенберга-Эйлера.

Для указанных выше характеристик пульсара, соотношение между коэффициентами крутящего момента нелинейной электродинамики и электродинамики Максвелла достаточно мало: $K_{3ned}/K_m \sim 10^{-6}$. Как и ожидалось, основное влияние на замедление вращения пульсара оказывает излучение в электродинамике Максвелла. Однако, соотношение между функциями крутящего момента гравитационного излучения и нелинейной электродинамики вакуума сильно зависит от экваториальной эллиптичности пульсара ε .

Для максимальной оценки эллиптичности $\varepsilon \sim 10^{-4}$ [160] и угловой скорости $\Omega \sim 100 \text{ с}^{-1}$ получим $K_{5ned}/K_{gw} \sim 3.7 \cdot 10^{-4}$, и $\Omega^2 K_{gw}/K_{3ned} \sim 0.7$. В случае пульсаров с меньшей эллиптичностью $\varepsilon \sim 10^{-6}$, соотношение между коэффициентами изменяется $K_{5ned}/K_{gw} \sim 3.5$ и $\Omega^2 K_{gw}/K_{3ned} \sim 7 \cdot 10^{-5}$, поэтому эффекты нелинейной электродинамики вакуума оказывают более значительное влияние на замедление вращения пульсара, чем торможение, вызванное гравитационным излучением. Перейдем к описа-

нию излучения пульсаров, для которых параметр kR_s не является малым и может быть, в предельном случае, сравним с единицей.

2.3 Излучение быстровращающегося пульсара

Исследование особенностей изучения быстровращающихся пульсаров представляет значительный интерес так как, рассмотренные в предыдущем разделе эффекты нелинейной электродинамики вакуума в излучении пульсара потенциально могут быть усилены благодаря отказу от требования малости параметра kR_s . Однако, следует отметить, что согласно современным наблюдательным данным, такие пульсары имеют характерное магнитное поле на поверхности значительно меньшее, чем у пульсаров с медленным вращением, рассмотренным ранее. Тем не менее, не исключая возможность появления новых наблюдательных данных, поэтому, для общности описания, рассмотрим поправки нелинейной электродинамики вакуума к изучению пульсара для случая $kR_s \sim 1$.

Для вычисления поправок к полю излучения пульсара, воспользуемся ковариантной формой уравнений нелинейной электродинамики вакуума с Лагранжианом (0.11):

$$\partial_m F_{ik} + \partial_i F_{km} + \partial_k F_{mi} = 0, \quad \frac{\partial Q^{ki}}{\partial x^i} = -\frac{4\pi}{c} j^k, \quad (2.26)$$

и материальными уравнениями (0.14) в пост-максвелловском приближении, содержащими степенную, кубическую, нелинейность:

$$Q^{ki} = F^{ki} + M^{ki} = F^{ki} + \xi \left[(\eta_1 - 2\eta_2) J_2 F^{ki} + 4\eta_2 F_{(3)}^{ki} \right], \quad (2.27)$$

где $F_{(3)}^{ki} = F^{kn} F_{nm} F^{mi}$ третья степень тензора электромагнитного поля, и тензор M^{ki} имеет смысл, аналогичный тензору поляризации вещества в электродинамике сплошных сред. Тензор энергии-импульса T^{ik} и вектор Пойнтинга \mathbf{S} , необходимые для вычисления интенсивности излучения, в приближении пост-максвелловской параметризованной электродинамики имеют вид (2.1) и (2.2).

Поскольку нелинейность в пост-максвелловском приближении носит характер пертурбативной поправки, то тензор электромагнитного поля F^{ki} и

вспомогательный тензор Q^{ki} можно представить в линеаризованном виде

$$F^{ki} = F_M^{ki} + f^{ki}, \quad Q^{ik} \simeq f^{ik} + F_M^{ik} + M_M^{ik}, \quad (2.28)$$

где F_M^{ki} тензор электромагнитного поля, вращающегося магнитного диполя \mathbf{m} в электродинамике Максвелла, f^{ik} – поправка обусловленная нелинейной электродинамикой вакуума, $M_M^{ik} = M^{ik}(F_M^{nj})$ – тензор поляризации, вычисленный в приближении поля электродинамики Максвелла F_M^{nj} . Выполним подстановку выражений (2.28) в уравнения (2.26) и воспользуемся методом последовательных приближений для решения этих уравнений.

В начальном приближении решением уравнений Максвелла

$$\partial_m F_{ik}^M + \partial_i F_{km}^M + \partial_k F_{mi}^M = 0, \quad \frac{\partial F_M^{ki}}{\partial x^i} = -\frac{4\pi}{c} j^k, \quad (2.29)$$

являются векторы электромагнитного поля (2.11), вращающегося магнитного диполя \mathbf{m} , составляющие компоненты тензора F_{mi}^M . В первом порядке малости теории возмущений, поправка связанная с нелинейной электродинамикой вакуума f_{ik} может быть получена как решение линеаризованных уравнений:

$$\partial_m f_{ik} + \partial_i f_{km} + \partial_k f_{mi} = 0, \quad \frac{\partial f^{ki}}{\partial x^i} + \frac{\partial M_M^{ki}}{\partial x^i} = 0. \quad (2.30)$$

Чтобы обеспечить выполнение однородных уравнений (2.30) удобно воспользоваться четырехмерным вектором потенциала A^k для представления компонент тензора $f_{ki} = \partial_k A_i - \partial_i A_k$. При выполнении калибровочного условия Лоренца, неоднородные уравнения (2.30) примут вид:

$$\partial_n \partial^n A^k = \frac{\partial M_M^{ki}}{\partial x^i}. \quad (2.31)$$

Так как компоненты тензора поляризации определяются решением уравнений Максвелла в начальном приближении теории возмущений, и считаются заданными, оказывается удобным переписать уравнения (2.31), используя антисимметричный тензор Герца Π^{ki} :

$$A^k = -\frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x^i}, \quad -\partial_n \partial^n \Pi^{ki} = \square \Pi^{ki} = M_M^{ki}, \quad (2.32)$$

где $\square = -\partial_n \partial^n$ – оператор Д’Аламбера. Шесть независимых компонент тензора M_M^{ki} могут быть выражены через эффективные векторы поляризации \mathbf{P}_M и намагничения \mathbf{M}_M :

$$M_M^{\alpha 0} = (\mathbf{P}_M)^\alpha, \quad M_M^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha} (\mathbf{M}_M)_\alpha, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_M &= 2\xi \{ \eta_1 (\mathbf{E}_M^2 - \mathbf{B}_M^2) \mathbf{E}_M + 2\eta_2 (\mathbf{B}_M, \mathbf{E}_M) \mathbf{B}_M \}, \\ \mathbf{M}_M &= 2\xi \{ \eta_1 (\mathbf{E}_M^2 - \mathbf{B}_M^2) \mathbf{B}_M - 2\eta_2 (\mathbf{B}_M, \mathbf{E}_M) \mathbf{E}_M \}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $\epsilon^{\alpha\mu\nu}$ – символ Леви-Чивита, все индексы обозначенные греческой буквой принимают значения $\alpha, \mu, \nu = 1, 2, 3$, а векторы \mathbf{E}_M и \mathbf{B}_M определяются выражениями (2.11). Поскольку нас интересуют только поле излучения пульсара, в запаздывающем решении уравнений (2.32)

$$\Pi^{ik}(\mathbf{r}, t) = -\frac{c}{4\pi} \int \frac{M_M^{ki}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2.35)$$

следует сохранить только слагаемые, удовлетворяющие критерию Зоммерфельда, и убывающие не быстрее, чем $\sim 1/r$ с ростом расстояния до пульсара. При этом ограничение на скорость вращения в виде малости безразмерного параметра kR_s не налагается. Из-за чрезмерной громоздкости мы не будем приводить явный вид решения для компонент тензора Герца, но воспользуемся выражениями для них, чтобы найти компоненты тензора электромагнитного поля f_{ik} , вычислить вектор Пойнтинга \mathbf{S} и полную интенсивность излучения I . Выражение же для вектора Пойнтинга (2.2) в пост-максвелловском приближении можно упростить с помощью радиационного асимптотического условия $S^\mu \sim 1/r^2$, что фактически означает, что для описания излучения мы можем использовать максвелловское определение для этого вектора:

$$S^\mu = cT^{0\mu} \sim \frac{c}{4\pi} F_{(2)}^{0\mu}. \quad (2.36)$$

Полную интенсивность излучения получим, вычислив поток вектора Пойнтинга через поверхность сферы с нормалью \mathbf{n} , направленной к наблюдате-

лю, находящемся в волновой зоне $r \gg c/\Omega$:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2\Omega^4 B_p^2 R_s^6}{3c^3} \sin^2 \theta_0 \left\{ 1 + \frac{2}{35Y^3} \frac{B_p^2}{B_c^2} \left(24Y^9 \left[\frac{1}{15} \eta_1 - \eta_2 \right] \right. \right. \\
&\quad \times Ci(2Y) \sin^2 \theta_0 + 4Y^9 \left[\eta_2 - \frac{311}{45} \eta_1 \right] Ci(2Y) \\
&\quad + Y^3 \left[\frac{\eta_1 - 15\eta_2}{5} (2Y^4 - 3Y^2) - 18\eta_1 - 10\eta_2 \right] \cos(2Y) \sin^2 \theta_0 \\
&\quad + \frac{Y}{6} \left[\frac{45\eta_2 - 311\eta_1}{15} (2Y^6 - 3Y^4) + (172\eta_1 - 60\eta_2) Y^2 \right. \\
&\quad \left. - 336\eta_1 \right] \cos(2Y) + Y^2 \left[\frac{30\eta_2 - 2\eta_1}{5} (2Y^6 - Y^4) \right. \\
&\quad \left. - \frac{41\eta_1 + 85\eta_2}{5} Y^2 + 9\eta_1 + 5\eta_2 \right] \sin(2Y) \sin^2 \theta_0 \\
&\quad + \frac{1}{3} \left[\frac{311\eta_1 - 45\eta_2}{15} (2Y^8 - Y^6 + 3Y^4) \right. \\
&\quad \left. + (15\eta_2 - 141\eta_1) Y^2 + 84\eta_1 \right] \sin(2Y) \left. \right\}, \tag{2.37}
\end{aligned}$$

где для краткости введены следующие обозначения: $k = \Omega/c$, $Y = kR_s$, B_p – характерная индукция магнитного поля на поверхности пульсара и $Ci(x) = \int_{\infty}^x u^{-1} \cos u \, du$ – функция интегрального косинуса.

В полученном выражении для интенсивности, удобно выделить вклад электродинамики Максвелла и поправки нелинейной электродинамики вакуума. Для этого введем «корректирующую функцию» $\Phi(\theta_0, Y)$, которая является множителем перед масштабным коэффициентом B_p^2/B_c^2 , определяющим, влияние нелинейной электродинамики вакуума на излучение пульсара:

$$I = \frac{2\Omega^4 B_p^2 R_s^6}{3c^3} \sin^2 \theta_0 \left\{ 1 + \gamma \frac{B_p^2}{B_c^2} \Phi(\theta_0, Y) \right\}, \tag{2.38}$$

где γ нормировочный коэффициент, равный $\gamma = \eta_1$, для моделей электродинамики, в которых $\eta_1 \neq 0$ и $\gamma = \eta_2$, если $\eta_1 = 0$.

Для известных быстро вращающихся пульсаров [163] с $Y \sim 1$ множитель $B_p^2/B_c^2 \ll 1$ мал, что соответствует требованиям пост-максвелловского приближения, и в то же время ослабляет влияние поправок нелинейной электродинамики. Однако, эта оценка может быть изменена для особых источников излучения, так называемых быстрых радио всплесков (FRB), шесть случаев которых были недавно обнаружены [164]. Одна из гипотез,

объясняющих природу FRB, предполагает, что их источником является быстро вращающаяся нейтронная звезда с сильным поверхностным магнитным полем $B_p \sim B_c$, называемая блицаром [165]. Дальнейшие оценки будут выполнены для случая типичных быстро вращающихся пульсаров, например PSR B1937+21 с $B_p \sim 4.2 \cdot 10^8$ Гс $\ll B_c$, и возможно, для блицаров, но с ограничением $\eta_{1,2} B_p^2 < B_c^2$.

Основной целью анализа, выполненного нами в работе [105], будет выявление новых качественных особенностей излучения пульсара и сравнение нелинейных поправок к электромагнитному излучению с другими слабыми механизмами потери энергии. Для этого рассмотрим некоторые свойства корректирующей функции.

Эта функция $\Phi(\theta_0, Y)$ зависит, как от θ_0 угла наклона магнитного момента к оси вращения, так и от угловой скорости $Y = \Omega R_s / c$, и может быть представлена в виде поверхности, определенной в области $0 \leq Y < 1$ и $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$. Изолинии этой поверхности $\Phi(\theta_0, Y) = const$ определяют зависимости $\theta_0(Y)$, для которых вклад нелинейной электродинамики вакуума в интенсивность излучения имеет заданное значение. Форма изолиний значительно зависит от выбора пост-максвелловских параметров η_1 и η_2 .

На Рисунке 4 представлены изолинии корректирующей функции для электродинамики Гейзенберга-Эйлера. Точки экстремумов $\theta_0(Y)$, принадлежащие разным изолиниям, образуют на графике линию красного цвета, соответствующую «функции наилучшего контраста». Для каждого фиксированного угла θ_0 существует угловая скорость, при которой поправки нелинейной электродинамики вакуума становятся наиболее выраженными. Увеличение Y при постоянном θ_0 увеличивает поправку нелинейной электродинамики вакуума к интенсивности излучения, но только до пересечения с красной линией. Последующее увеличение $Y \rightarrow 1$, после пересечения с красной линией, увеличит общую светимость пульсара, которая равна $I \propto \Omega^4 \sin^2 \theta_0$, но в то же время, это уменьшит поправку нелинейной электродинамики вакуума на фоне излучения в электродинамике Максвелла. Изолинии поверхности корректирующей функции $\Phi(\theta_0, Y)$ в электродинамике Борна-Инфельда отличается, от приведенных на Рисунке 4, лишь количественно.

Изолинии $\Phi(\theta_0, Y) = const$ для моделей электродинамики, зависящих

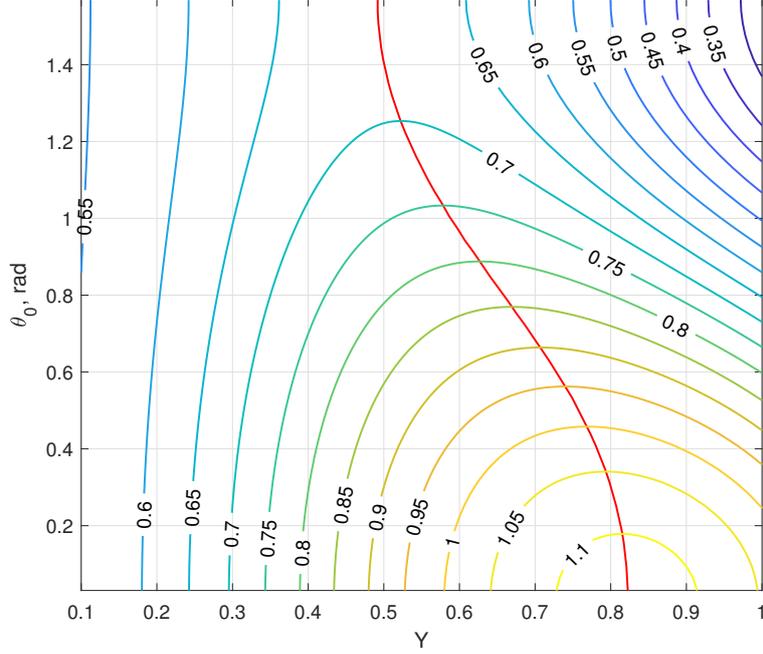


Рис. 4: Изолинии корректирующей функции $\Phi(\theta_0, Y) = const$ для электродинамики Гейзенберга-Эйлера

только от одного параметра η_1 , приведены на Рисунке 5 (например, для «рациональной» электродинамики [46], Лагранжиан которой $\mathcal{L}(J_2)$ является функцией только одного инварианта). Для таких моделей, как и для электродинамики Гейзенберга-Эйлера, есть соотношение $\theta_0(Y)$ для наилучшего наблюдения поправок нелинейной электродинамики – функция наилучшего контраста, нанесенная на график красной линией. Однако, область локализации изолиний с большими значениями $\Phi(\theta_0, Y) = const$ смещена в сторону значений углов $\theta_0 \sim \pi/2$, в отличие от электродинамики Гейзенберга-Эйлера, для которой эта область располагается вблизи $\theta_0 \sim 0$.

На Рисунке 6 приведены изолинии корректирующей функции для еще одного класса моделей, пост-максвелловское приближение которых зависит только от параметра η_2 , например [166]. Для таких моделей линия наилучшего контраста отсутствует, а сама корректирующая функция может быть отрицательной, что приведет к уменьшению интенсивности излучения пульсара из-за влияния нелинейной электродинамики вакуума, или может быть равной нулю, что приведет к исчезновению поправки к Максвелловскому излучению пульсара.

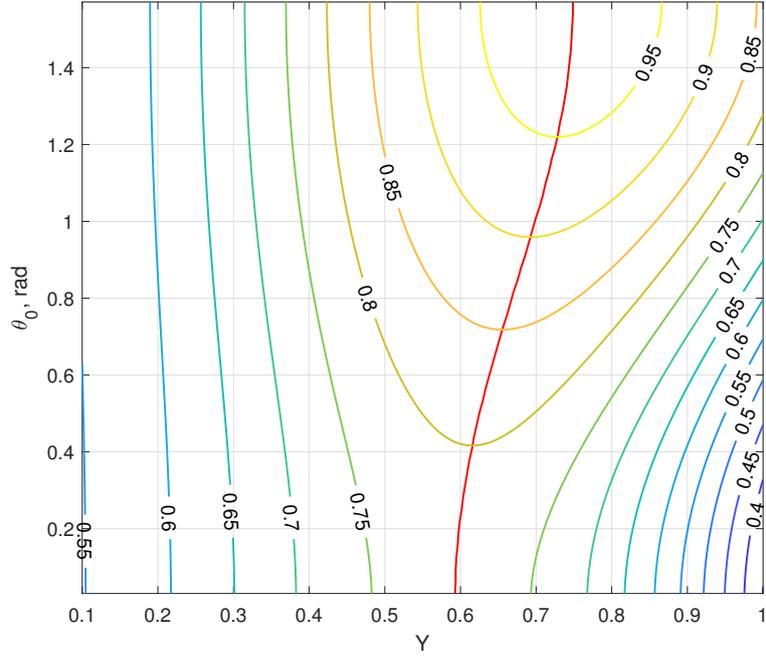


Рис. 5: Изолинии корректирующей функции $\Phi(\theta_0, Y) = const$ для для моделей нелинейной электродинамики с $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 = 0$.

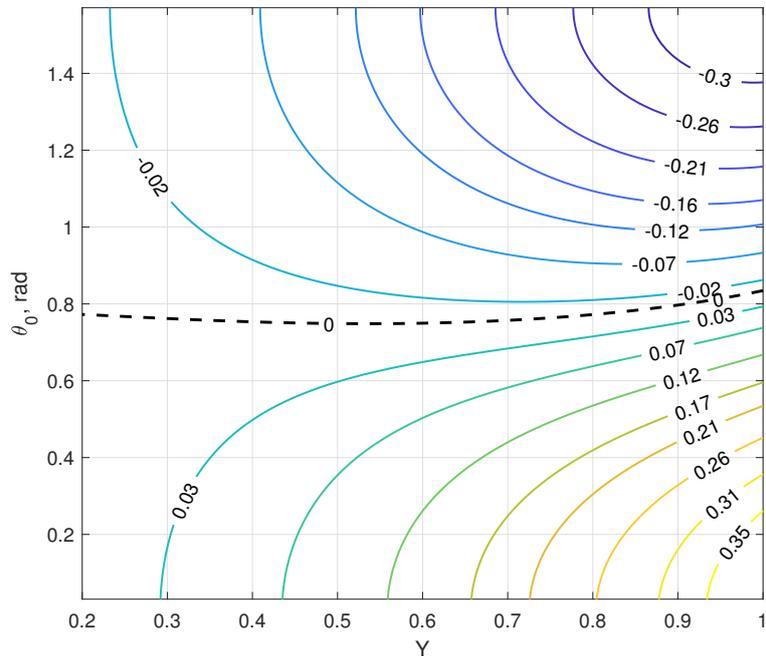


Рис. 6: Изолинии корректирующей функции $\Phi(\theta_0, Y) = const$ для для моделей нелинейной электродинамики с $\eta_1 = 0$, $\eta_2 \neq 0$. Линия соответствующая исчезновению пост-максвелловской поправки в излучении пульсара обозначена пунктиром.

Исследуем особенности замедления вращения пульсара в результате излучения, с учетом поправок нелинейной электродинамики вакуума. Не полиномиальная зависимости между общей интенсивностью излучения пульсара и угловой скоростью, значительно усложняет такой анализ. Выполнение степенной аппроксимации (2.37) позволит нам описать влияние нелинейной электродинамики вакуума на замедление вращения пульсара, в традиционных терминах индексов торможения и функций крутящего момента [160]. Это также даст возможность выполнить сравнение со скоростью замедления вращения пульсара, вызванного различными неэлектромагнитными диссипативными факторами, например, с квадрупольным гравитационным излучением, как это было сделано в разделе 2.2, для случая медленного вращения пульсара.

2.4 Вакуумные поправки к замедлению быстровращающегося пульсара

Запишем уравнение изменения угловой скорости вращения в результате электромагнитного излучения:

$$\dot{\Omega} = -\frac{I}{J\Omega} = -\frac{2B_p^2 R_s^3}{3J} \sin^2 \theta_0 \left\{ Y^3 + \gamma \frac{B_p^2}{B_c^2} Y^3 \Phi \right\}, \quad (2.39)$$

где J момент инерции пульсара, а точкой обозначена производная по времени. Для описания с терминах функций крутящего момента, представим правую часть уравнения (2.39) в виде полинома от угловой скорости:

$$\gamma Y^3 \Phi(\theta_0, Y) = \sum_n^N \alpha_n(\theta_0) Y^n = \sum_n^N \alpha_n(\theta_0) \left(\frac{\Omega R_s}{c} \right)^n, \quad (2.40)$$

где α_n коэффициенты разложения, а количество слагаемых N определяется условием достижения заданной точности разложения. Примем $N = 8$, что обеспечит точность степенной аппроксимации для пульсаров с $Y > 0.6$, лучше чем 0.1%. Ряд разложения не сходится при $Y \sim 1$, но его замена частичной суммой со специально подобранным числом членов позволяет осуществить полиномиальную аппроксимацию, которая обеспечивает хорошее совпадение с точным выражением вблизи $Y \sim 1$, но приводит к суще-

ственным ошибкам при $Y \ll 1$. В Таблице 4 представлены коэффициенты α_n для членов, обеспечивающих наибольший вклад в разложение, в случае электродинамики Гейзенберга-Эйлера. Коэффициенты, не указанные в таблице, малы и могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения.

θ_0	$\alpha_7 \cdot 10^4$	$\alpha_6 \cdot 10^4$	$\alpha_5 \cdot 10^4$	$\alpha_4 \cdot 10^4$	$\alpha_3 \cdot 10^4$
$\pi/2$	1.7	-4.0	2.4	-0.3	-0.2
$\pi/3$	1.5	-3.8	2.7	-0.5	-0.3
$\pi/6$	1.1	-3.6	3.3	-0.9	-0.5

Таблица 4: Коэффициенты разложения функции $\gamma Y^3 \Phi(\theta_0, Y)$ в выражении (2.40), при заданных значениях угла наклона θ_0 .

Для количественной оценки примем угол наклона равным $\theta_0 = \pi/2$. Этот выбор оправдан, поскольку обеспечивает наибольшую суммарную интенсивность излучения пульсара, и приводит к оценке сверху для влияния нелинейной электродинамики на замедление пульсара в сравнении с другими диссипативными факторами.

Уравнение замедления вращения (2.39) после подстановки степенного разложения (2.40) примет вид:

$$\dot{\Omega} = K_M + \sum_n K_n \Omega^n, \quad (2.41)$$

где K_M соответствует функции крутящего момента для магнитодипольного излучения в электродинамике Максвелла, а K_n функции крутящего момента, следующие из поправок нелинейной электродинамики вакуума:

$$K_M = -\frac{2B_p^2 R_s^6}{3Jc^3} \sin^2 \theta_0, \quad K_n = \alpha_n(\theta_0) K_M \left(\frac{B_p}{B_c}\right)^2 \left(\frac{R_s}{c}\right)^{n-3}. \quad (2.42)$$

Выполним сравнение замедления вращения пульсара, вызванного нелинейной электродинамикой вакуума, и диссипацией энергии, обусловленной излучением гравитационных волн. Среди нескольких возможных причин гравитационного излучения изолированного пульсара, мы выберем два наиболее актуальных сценария – квадрупольно-массовое излучение [162], и излучение, вызванное волнами Россби [167], называемыми «г-модами».

Квадрупольное гравитационное излучение может быть вызвано деформацией пульсара, что особенно вероятно при его быстром вращении. Замедление вращения в результате этого вида излучения можно представить как:

$$\dot{\Omega} = K_Q \Omega^5 = -\frac{32 G J \varepsilon^2}{5 c^5} \Omega^5, \quad (2.43)$$

где G гравитационная постоянная и ε эллиптичность пульсара, которая согласно современным представлениям [160] имеет значения не более чем $\varepsilon < 10^{-4}$. Еще одной причиной излучения гравитационных волн изолированным пульсаром являются колебания, возникающие при его вращении. Гравитационное излучение появляется в результате неустойчивости некоторых мод таких колебаний. Согласно результатам [168], для молодых, быстровращающихся пульсаров, замедление вращения, обусловленное «г-модами», можно описать уравнением:

$$\dot{\Omega} = K_R \Omega^7 = -\frac{2^{17} \pi F^2 G M^2 R_s^6 \beta_{sat}^2}{3^7 5^2 J c^7} \Omega^7, \quad (2.44)$$

где M масса пульсара, амплитуда насыщения колебаний «г-мод» $10^{-7} \leq \beta_{sat} \leq 10^{-5}$ была оценена в работе [169], а значения безразмерной постоянной F , согласно [170], строго ограничены в диапазоне $1/(20\pi) \leq F \leq 3/(28\pi)$.

Функцию крутящего момента для квадрупольного гравитационного излучения K_Q можно сравнить с нелинейно-электродинамическим крутящим моментом K_5 , а крутящий момент излучения г-мод K_R можно сравнить с крутящим моментом K_7 . Для такого сравнения мы рассмотрим пульсар с типичным радиусом $R_s = 30$ км, массой $M = 2M_\odot$ и моментом инерции $J = 10^{45}$ г · см². Также мы примем, что угол наклона дипольного момента $\theta_0 = \pi/2$, а пост-максвелловские параметры соответствуют теории Гейзенберга-Эйлера (выбор параметров модели Борна-Инфельда приводит к оценке аналогичного порядка малости). Для пульсара с поверхностным магнитным полем $B_p \sim 10^{11}$ Гс, эллиптичность которого достигает максимального значения $\varepsilon \sim 10^{-4}$, амплитудой насыщения г-моды $\beta_{sat} \sim 10^{-6}$ и $F = 1/(20\pi)$ имеют место следующие оценки $K_5/K_Q \sim 1.3 \cdot 10^{-11}$ и $K_7/K_R \sim 2.6 \cdot 10^{-7}$. Таким образом, функции крутящего момента для квадрупольного гравитационного излучения и для г-мод будут значительно превосходить значения функции нелинейно электродинамического крутя-

щего момента в слагаемых, пропорциональных $\sim \Omega^5$ и $\sim \Omega^7$, в уравнении замедления вращения. Этот результат можно объяснить слабым поверхностным магнитным полем, характерным для популяции быстро вращающихся пульсаров. Для другого набора параметров имеет место противоположный случай. Если экваториальная эллиптичность пульсара на два порядка меньше $\varepsilon \sim 10^{-6}$, а поле пульсара сильнее $B_p \sim 10^{13}$ Гс, тогда $K_5/K_Q \sim 12.6$ и $K_7/K_R \sim 25.6$. Однако, следует отметить, что быстро вращающиеся пульсары с таким сильным полем пока не наблюдались. Тем не менее, теоретические модели, представляющие блицары в качестве источника быстрых радиовсплесков [165], не исключают возможности существования столь сильных магнитных полей у быстро вращающегося пульсара. Поэтому, полученное количественное соотношение между функциями крутящихся моментов, хотя и кажется весьма экзотическим, но все же, не может быть полностью отвергнуто.

2.5 Компактные астрофизические объекты в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда

Возможность существования астрофизических объектов, обладающих значительным электрическим зарядом, рассматривалась еще в ранних работах, посвященных моделям образования и строения звезд [171]. Например, в работе С.Росселанда [172] описан механизм дифференциации заряда в самогравитирующем ионизированном газе. Благодаря разнице масс электронов и положительно заряженных тяжелых ионов, максимальная оценка суммарного равновесного заряда, для такой звезды, не превышает 100 Кулон на одну массу Солнца [173]. В ньютоновой теории гравитации, для моделей холодных звезд, оценка максимального заряда имеет тот же порядок величины [174]. Учет релятивистских эффектов [175] открывает возможность существования компактных астрофизических объектов, параметры которых находятся на грани формирования внешнего горизонта событий, таких что гравитационное притяжение может быть эффективно компенсировано благодаря накопленному огромному количеству заряда, со значением сравнимым с массой звезды (в натуральной системе единиц). Согласно [176], подобные звезды могут обладать колоссальным электрическим

полем, напряженность которого на поверхности может достигать $E \sim 10^{27}$ ед. СГС. Последующий коллапс звезды приводит к формированию заряженной черной дыры, для которой становится принципиален учет непертурбативных эффектов нелинейной электродинамики вакуума. В теории Эйнштейна-Максвелла пространство-время таких черных дыр описывается метрикой Рейснера - Нордстрема [177–179], которая обладает двумя горизонтами:

$$r_+ = \frac{r_g}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{Q^2}{M^2}} \right], \quad r_- = \frac{r_g}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{Q^2}{M^2}} \right], \quad (2.45)$$

где $r_g = 2M$ радиус Шварццильда, M масса и Q заряд коллапсара. Требование отсутствия открытых сингулярностей (принцип космологической этики Пенроуза [128, 180]), и условие вещественности радиусов горизонтов, приводит к ограничению $Q^2 \leq M^2$. В этом случае, r_+ является внешним горизонтом событий, а r_- внутренним горизонтом Коши. При $Q = M$ происходит вырождение и горизонты совпадают. Черные дыры с таким свойством обладают неустойчивостью [181] и называются экстремальными.

Учет эффектов нелинейной электродинамики вакуума при описании заряженных черных дыр может привести к выявлению новых свойств пространства-времени и особенностей физических процессов, происходящих в сильных электромагнитных и гравитационных полях заряженных коллапсаров. Например, электровакуумные решения для регулярных черных дыр, полученные для некоторых моделей нелинейной электродинамики в [70], иллюстрируют возможность устранения истинных сингулярностей при сохранении координатных сингулярностей, играющих роль горизонтов событий. В этом разделе мы исследуем свойства пространства-времени и особенности динамики частиц, движущихся вблизи заряженной черной дыры, в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда. Эта модель относится к наиболее обоснованным и обладает точным выражением для Лагранжина, что принципиально важно для выполнения непертурбативных вычислений в экстремально сильных электромагнитных полях. В качестве первого шага на этом пути получим электровакуумное, сферически симметричное решение для поля точечного неподвижного источника, обладающего массой M , и электрическим зарядом Q .

Воспользуемся выражением Лагранжиана (0.1), чтобы построить уравнения электромагнитного и гравитационного поля в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда:

$$\nabla_j F_{nm} + \nabla_n F_{mj} + \nabla_m F_{jn} = 0, \quad (2.46)$$

$$\nabla_n \left\{ \frac{(2 - a^2 J_2) F^{kn} + 2a^2 F_{(3)}^{kn}}{\sqrt{4 - 2a^2 J_2 - a^4 J_4 + a^4 J_2^2/2}} \right\} = -\frac{4\pi}{c} j^k, \quad (2.47)$$

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R =$$

$$= \frac{2 \left\{ F_{ik}^{(2)} - g_{ik} \left[a^2 J_2 + 2\sqrt{1 - a^2 J_2/2 - a^4 J_4/4 + a^4 J_2^2/8} - 2 \right] / 2a^2 \right\}}{\sqrt{1 - a^2 J_2/2 - a^4 J_4/4 + a^4 J_2^2/8}},$$

где $F_{ik}^{(2)} = F_{im} F_{.k}^m$ и $F_{(3)}^{kn} = F^{kp} F_{pm} F^{mn}$ вторая и третья степень тензора электромагнитного поля, соответственно, ∇_n оператор ковариантного дифференцирования в псевдоримановом пространстве-времени с метрическим тензором g_{pm} , $1/a$ – характерный масштаб напряженности электрического поля электродинамики Борна-Инфельда, в естественной системе единиц имеющий размерность длины.

Получим самосогласованное решение уравнений (2.46) и (2.47) для метрики пространства-времени и электромагнитного поля, источником которого является точечный массивный заряд. Воспользуемся анзацем для компонент тензора F_{ik} , соответствующим радиальному электрическому полю с центральной симметрией и выражением для квадрата интервала статического сферически-симметричного пространства времени:

$$F_{ik} = E(r) \{ \delta_i^0 \delta_k^1 - \delta_i^1 \delta_k^0 \}, \quad ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (2.48)$$

Подстановка выражений (2.48) в уравнения (2.47) приводит к дополнительному условию для метрических функций $A(r) = C_0/B(r)$, где C_0 – произвольная постоянная. При этом, оставшиеся нетривиальными уравнения теории Эйнштейна - Борна - Инфельда вне источника примут вид:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 E \sqrt{C_0}}{\sqrt{C_0 - a^2 E^2}} \right] = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{d}{dr} \left[r \left(A(r) - C_0 \right) \right] = \frac{2C_0 r^2}{a^2} \left[1 - \frac{\sqrt{C_0}}{\sqrt{C_0 - a^2 E^2}} \right],$$

$$\frac{r^2}{2} \frac{d^2 A(r)}{dr^2} + r \frac{dA(r)}{dr} = \frac{2C_0 r^2}{a^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{a^2 E^2}{C_0}} \right].$$

Выполнив интегрирование уравнений, найдем выражение для напряженности электрического поля и метрического коэффициента:

$$E = \frac{Q\sqrt{C_0}}{\sqrt{C_0 r^4 + a^2 Q^2}}, \quad A(r) = C_0 - \frac{C_1}{r} + \frac{2C_0}{a^2 r} \int_r^\infty \left[\sqrt{\eta^4 + \frac{a^2 Q^2}{C_0}} - \eta^2 \right] d\eta, \quad (2.50)$$

где C_1 – некоторая постоянная. Выбор постоянных интегрирования необходимо выполнить так, чтобы при переходе от теории Эйнштейна-Борна-Инфельда к теории Эйнштейна-Максвелла, при $a^2 \rightarrow 0$, выражения (2.48) соответствовали асимптотически плоскому решению Рейснера - Нордстрема, поэтому следует принять $C_0 = 1$, $C_1 = 2M$. В этом случае, решение (2.50) примет окончательный вид:

$$F_{01} = E = \frac{Q}{\sqrt{r^4 + a^2 Q^2}}, \quad g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2}{a^2 r} \int_r^\infty \left[\sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2} - \eta^2 \right] d\eta. \quad (2.51)$$

Метрический коэффициент g_{00} в этом выражении может быть преобразован к виду, содержащему неполный эллиптический интеграл первого рода и элементарные функции:

$$\int_r^\infty \left[\sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2} - \eta^2 \right] d\eta = \frac{r^3}{3} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{a^4 Q^2}{r^4}} \right] + \quad (2.52)$$

$$+ \frac{a^2 Q^2}{3\sqrt{aQ}} F \left(\arccos \left[\frac{(r^2 - aQ)}{(r^2 + aQ)} \right], \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad F(y, k) = \int_y^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}},$$

однако, для дальнейших вычислений оказывается более удобным сохранить явное представление для интеграла в выражении (2.51). Значительная разница между компонентой метрики Эйнштейна-Борна-Инфельда (2.51)

и компонентой метрики Рейсснера-Нордстрема

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (2.53)$$

должна привести к необычным особенностям в динамике массивных частиц, что в свою очередь, может привести к новым наблюдательным проявлениям в астрофизике. Для иллюстрации, рассмотрим радиальную составляющую силы, действующую на частицу с массой m , покоящуюся в гравитационном поле (2.51):

$$F^r = -m\Gamma_{00}^r(u^0)^2 = -\frac{Mm}{r^2} + \quad (2.54)$$

$$+ \frac{mQ^2}{r^2} \left\{ \frac{r}{[\sqrt{r^4 + a^2Q^2} + r^2]} + \int_r^\infty [\sqrt{\eta^4 + a^2Q^2} - \eta^2] d\eta \right\}.$$

Из этого соотношения следует, что при достаточном большом значении заряда Q существует расстояние r , начиная с которого сила притяжения $F^r < 0$ переходит в силу отталкивания $F^r > 0$. Это свойство отсутствует в пространстве-времени Шварцшильда и Рейсснера-Нордстрема. Очевидно, что такое свойство качественно изменяет динамику массивных и безмассовых частиц в сферически-симметричном поле. Детальное изучение этих проявлений важно для выяснения экспериментального статуса нелинейной электродинамики вакуума. Для большей общности, и для последующего описания динамики частиц, сначала подробно исследуем свойства пространства-времени заряженной черной дыры в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда.

2.5.1 Структура пространства-времени заряженной черной дыры в теории Эйнштейна -Борна-Инфельда

Соотношение (2.51) для компоненты метрического тензора g_{00} существенно зависит от параметров, массы M и электрического заряда коллапсара Q . Поэтому в зависимости от их значений компонента g_{00} может вести себя по-разному в области пространства $0 \leq r < \infty$. Анализ структуры пространства-времени чёрной дыры Эйнштейна-Борна-Инфельда был выполнен нами в работах [100, 106]. Рассмотрим свойства функции g_{00} более

подробно. Найдем условия, при которых g_{00} имеет экстремумы, определим их число и расположение. Для этого вычислим производные выражения метрической функции (2.51) по координате r :

$$g'_{00} = \frac{2M}{r^2} - \frac{2}{a^2 r} [\sqrt{r^4 + a^2 Q^2} - r^2] - \frac{2}{a^2 r^2} \int_r^\infty [\sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2} - \eta^2] d\eta, \quad (2.55)$$

$$g''_{00} = -\frac{4M}{r^3} + \frac{4Q^2}{r^2 \sqrt{r^4 + a^2 Q^2}} + \frac{4}{a^2 r^3} \int_r^\infty [\sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2} - \eta^2] d\eta.$$

Обозначив расстояние до точки, в которой g_{00} имеет экстремум, как r_m и приравняв g'_{00} к нулю, получим соотношение:

$$M = \frac{r_m}{a^2} [\sqrt{r_m^4 + a^2 Q^2} - r_m^2] + \frac{1}{a^2} \int_{r_m}^\infty [\sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2} - \eta^2] d\eta. \quad (2.56)$$

Подставив это соотношение во второе равенство (2.55), найдем значение второй производной компоненты g_{00} в точке $r = r_m$:

$$g''_{00}(r_m) = \frac{4}{a^2 \sqrt{r_m^4 + a^2 Q^2}} [\sqrt{r_m^4 + a^2 Q^2} - r_m^2] > 0. \quad (2.57)$$

Так как $g''_{00}(r_m) > 0$, то функция g_{00} имеет минимум в точке $r = r_m$. Подставляя (2.56) в уравнение (2.51), находим значение функции $g_{00}(r_m)$ в ее минимуме:

$$g_{00}(r_m) = 1 - \frac{2}{a^2} [\sqrt{r_m^4 + a^2 Q^2} - r_m^2]. \quad (2.58)$$

Из этого выражения следует, что в зависимости от значения Q^2 компонента g_{00} в точке минимума может иметь положительные, нулевые или отрицательные значения. Однако, если $g_{00}(r_m) > 0$, то метрика (2.51) будет иметь открытую сингулярность, что запрещено принципом космологической цензуры Пенроуза [128]. Поэтому в физически реалистичных случаях должно выполняться соотношение $g_{00}(r_m) = -b^2$, где b — безразмерный параметр. Подставляя левую часть этого уравнения в выражение (2.58) и решая его

относительно r_m , получим:

$$r_m^2 = \frac{1}{(1+b^2)} \left[Q^2 - \frac{(1+b^2)^2 a^2}{4} \right]. \quad (2.59)$$

Поскольку нас интересуют только действительные значения r_m , то можно сделать вывод, что для существования минимума g_{00} при $0 \leq r < \infty$ заряд источника должен удовлетворять неравенству

$$Q^2 > (1+b^2)a^2/4, \quad (2.60)$$

где параметр b^2 определяет значение компоненты $-g_{00}$ в точке минимума $r = r_m$. Следует отметить, что для коллапсара с массой M его заряд Q ограничен сверху, поскольку отношение заряда частиц q , составляющих вещество коллапсара, к их массе m_0 ограничено сверху соотношением: $|q|/m_0 < |e|/m$, где e и m заряд и масса электрона соответственно. Таким образом, функция g_{00} при условии (2.60) имеет только один минимум в точке, заданной выражением (2.59).

После подстановки соотношений (2.56) и (2.59) в выражение (2.51) функция g_{00} может быть переписана в виде

$$g_{00} = 1 - \frac{(1+b^2)r_m}{r} + \frac{2}{a^2 r} \int_r^{r_m} [\sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2} - \eta^2] d\eta. \quad (2.61)$$

Перейдем к нахождению корней r_s функций g_{00} . Эти корни зависят от параметра b и заряда Q^2 . Если $b = 0$, то уравнение $g_{00}(r_s) = 0$ имеет только один двойной корень, совпадающий с точкой минимума $r_s = r_m$. Если $b > 0$, то уравнение $g_{00}(r_s) = 0$ имеет два простых корня, больший из которых определяет горизонт событий в пространстве-времени (2.51), а меньший имеет смысл горизонта Коши. Оба горизонта можно найти, решив трансцендентное уравнение:

$$r_s - (1+b^2)r_m + \frac{2}{a^2} \int_{r_s}^{r_m} [\sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2} - \eta^2] d\eta = 0. \quad (2.62)$$

В последующем вычисление горизонтов будет выполнено численно для

некоторых характерных масс, предполагаемых для различных типов черных дыр.

Значительный интерес представляет случай, когда функция g_{00} не имеет экстремума во всем пространстве $0 \leq r < \infty$. В этом случае g_{00} должна быть монотонной функцией r , а g'_{00} – должна иметь фиксированный знак в этой области. Для большего удобства в расчетах представим функцию g'_{00} в виде:

$$g'_{00} = \frac{[2M - H(r)]}{r^2}, \quad (2.63)$$

$$H(r) = \frac{2}{a^2} \left\{ r [\sqrt{r^4 + a^2 Q^2} - r^2] + \int_r^\infty [\sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2} - \eta^2] d\eta \right\}.$$

Для знакоопределенности g'_{00} необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий $2M > H_{max}$ или $2M < H_{max}$, где H_{max} – максимальное значение функции $H(r)$. Во всех внутренних точках области $0 < r < \infty$ имеет место неравенство:

$$\frac{dH(r)}{dr} = -\frac{4r^2}{a^2 \sqrt{r^4 + a^2 Q^2}} [\sqrt{r^4 + a^2 Q^2} - r^2] < 0 \quad (2.64)$$

и функция $H(r)$ принимает наибольшее значение в точке сингулярности $r = 0$:

$$H_{max} = H(0) = \frac{2}{a^2} \int_0^\infty [\sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2} - \eta^2] d\eta = \quad (2.65)$$

$$= \frac{2G|Q|^{3/2}}{a^{1/2}} \int_0^\infty [\sqrt{\sigma^4 + 1} - \sigma^2] d\sigma = \frac{2(\pi|Q|)^{3/2}}{3\sqrt{a}\Gamma^2(3/4)}. \quad (2.66)$$

Таким образом, функция g_{00} монотонно возрастает в области $0 < r < \infty$, тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$M > \frac{(\pi|Q|)^{3/2}}{3\sqrt{a}\Gamma^2(3/4)}. \quad (2.67)$$

Если же для заданной массы и заряда черной дыры выполняется усло-

вие $2M < H_{max}$, то функция g_{00} монотонно убывает. В этом случае имеет место неравенство $g_{00} > 1$ для всех точек, и следовательно, область $0 < r < \infty$, содержит голую сингулярность, что запрещено принципом космологической цензуры Пенроуза.

Следовательно, в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда пространство-время (2.51) имеет горизонт событий и подчиняется принципу космологической цензуры в случае, если заряд коллапсара, удовлетворяет одному из неравенств:

$$\frac{(1 + b^2)a^2}{4} < Q^2, \quad \text{или} \quad Q^2 < \left[\frac{3\sqrt{a}\Gamma^2(3/4)M}{\pi^{3/2}} \right]^{4/3}. \quad (2.68)$$

В этих случаях заряженные частицы, образующие источник гравитационного поля, закрыты горизонтом событий и, несмотря на электростатическое отталкивание, не могут выйти за его пределы.

Выполним количественное исследование особенностей метрики (2.51), определим её горизонты и сравним их зависимость от параметров массы и заряда с горизонтами (2.45) метрики пространства-времени Рейснера-Нордстрема. Определим диапазон изменения массы черной дыры как параметра численной модели. Традиционно принято разделять черные дыры на две группы, к первой группе относят коллапсары, массы M которых, имеют «звездные» значения $3M_{\odot} < M < 140M_{\odot}$, а ко второй сверхмассивные черные дыры $M > 10^6 M_{\odot}$. В работе [182] отмечена возможность существования не типичных изолированных черных дыр с массой превышающей $260 M_{\odot}$, для которых один из кандидатов, имеющий массу $M = 500M_{\odot}$, был обнаружен [183] в галактике ESO 243-49. Вычислим горизонты метрики (2.51) численно решив уравнение $g_{00} = 0$, в котором примем для массы коллапсара промежуточное значение $M = 350M_{\odot}$.

На Рисунке 7 приведена полученная зависимость радиусов горизонтов, нормированных на радиус Шварцшильда для Солнца $r_{g\odot} = 2M_{\odot}$ от заряда черной дыры, нормированного на максимально допустимый заряд для звезды с массой Солнца $Q_{\odot}^* = M_{\odot}$ в метрике Рейснера-Нордстрема. Линиями нанесены значения горизонтов r_+ и r_- метрики (2.45) при различных значениях заряда, а точками отмечен результат численного решения.

Для выбранного значения массы, метрика пространства-времени чер-

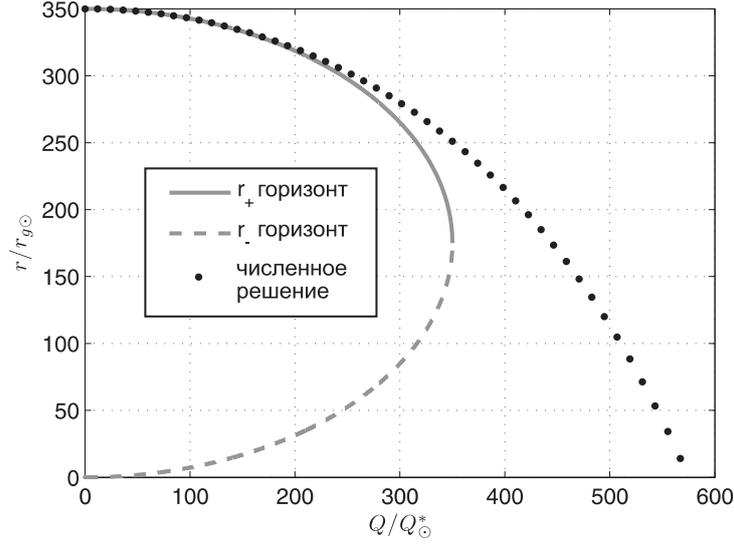


Рис. 7: Зависимость радиуса горизонта метрики (2.51) от заряда черной дыры при $M = 350M_{\odot}$

ной дыры в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда имеет только один горизонт при всех допустимых значениях заряда. По своим свойствам этот горизонт аналогичен r_+ в решении Рейснера-Нордстрема, однако значение заряда, при котором возможно его существование превышает максимально допустимое значение $Q^2 = M^2$ в теории Эйнштейна-Максвелла. При некотором значении заряда Q_0 горизонт совпадает с положением сингулярности, а его радиус становится равным нулю. Решение с таким свойством, названное «черной точкой», впервые было получено для модели логарифмической нелинейной электродинамики [57], но видно, оно также оказывается возможными для теории Борна-Инфельда.

Для большего значения массы черной дыры становится возможным появления двух горизонтов, аналогично решению Рейснера-Нордстрема. В качестве примера на Рисунке 8 приведена зависимость горизонтов метрики (2.51) от заряда для $M = 5000M_{\odot}$.

Согласно [106], наибольшее значение заряда Q' , соответствующее совпадению радиусов обоих горизонтов может быть получено из решения уравнения:

$$1 - \frac{2M}{\sqrt{Q'^2 - a^2/4}} + \frac{2Q'^2}{\sqrt{Q'^2 - a^2/4}} \int_0^{1/\sqrt{Q'^2 - a^2/4}} \frac{d\xi}{1 + \sqrt{1 + a^2Q'^2\xi^4}} = 0. \quad (2.69)$$

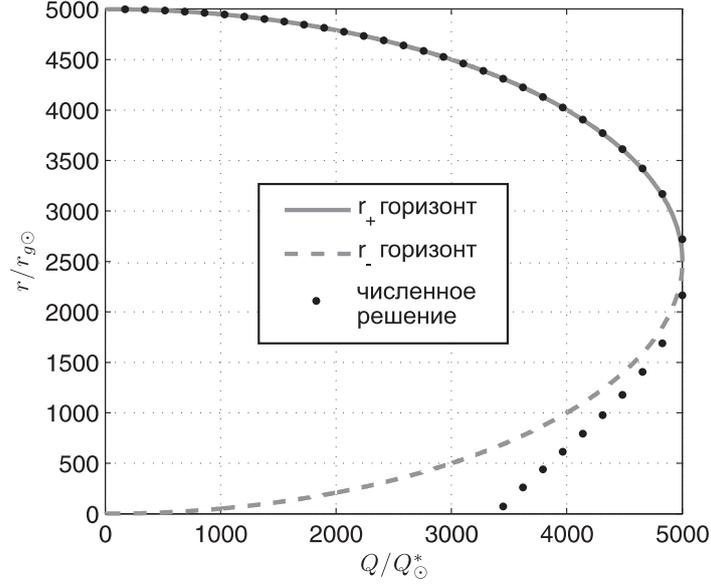


Рис. 8: Зависимость горизонтов от заряда звезды при $M = 5000M_{\odot}$

Вычислим критическую массу M_{cr} черной дыры, при которой становится возможным появление второго горизонта. Для этого необходимо, чтобы максимальное значение заряда Q_0 в решении с одним горизонтом, совпадало с Q' в решении с двумя горизонтами, что эквивалентно требованию $|\partial r/\partial Q| \rightarrow \infty$ при $r = 0$, откуда можно найти $Q_0 = Q' = a/2$. Тогда критическое значение массы будет определяться решением уравнения $[rg_{00}(M_{cr})] = 0$ при выполнении дополнительного условия $|\partial r/\partial Q| \rightarrow \infty$, при $r \rightarrow 0$, что приводит к окончательному выражению

$$M_{cr} = \frac{a^2}{4} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{1 + \sqrt{1 + a^4\eta^4/4}} = \frac{1}{3\Gamma^2(3/4)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} a \simeq 0.437a. \quad (2.70)$$

Аналогичный результат можно получить из уравнения (2.69), если принять в нем $Q' = Q_0 = a/2$. Для выполнения количественной оценки, удобно выполнить переход от естественной системы единиц к системе СГС, воспользовавшись соотношением $(a^2)_{\text{ест}} = c^4(a^2)_{\text{СГС}}/G$, тогда, критическая масса, выраженная в единицах массы Солнца, будет определяться выражением:

$$\frac{M_{cr}}{M_{\odot}} \simeq 1.0378 \cdot 10^{19} a [\text{ед. СГС}], \quad (2.71)$$

и для принятого в литературе значения параметра Борна-Инфельда $a =$

10^{-16}Гс^{-1} предельная масса равна $M_{cr} \approx 1037.8 M_{\odot}$. Полученная оценка для M_{cr} привлекает внимание к изучению черных дыр с промежуточным значением массы [183], так как для них может наблюдаться, описанный выше, переход между состояниями с разным числом горизонтов.

В целом, возможность устранения одного из горизонтов, в случае если масса черной дыры не превосходит критического значения M_{cr} , является новым свойством, в котором проявляется регуляризирующее действие теории Эйнштейна-Борна-Инфельда, отсутствующее в электродинамике Максвелла. В последующих разделах мы исследуем движение массивных и безмассовых частиц в поле черной дыры, обращая особое внимание на особенности их динамики при переходе массой черной дыры через это критическое значение. Результаты этого исследования опубликованы нами в работах [100, 106].

2.5.2 Движение фотонов в поле коллапсара в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда

Описание распространения электромагнитных волн в нелинейных теориях поля представляет нетривиальную задачу, особенно в моделях электродинамики, содержащих нелинейность в слагаемых со старшими производными полевых переменных, таких как теория Борна-Инфельда. Значительный прогресс на этом пути достигнут благодаря применению геометризованного подхода или концепции естественной геометрии к описанию физических взаимодействий [102, 126, 184]. Эта концепция опирается на утверждение о том, что дисперсионное соотношение для четырехмерного волнового вектора k_i электромагнитной волны в нелинейной электродинамике имеет тот же вид $C^{ijmn}k_ik_jk_mk_n = 0$, что и в линейной теории [185], но отличается видом тензора C^{ijmn} . Как было показано в [186], для пост-максвелловского приближения нелинейной электродинамики вакуума, этот тензор может быть факторизован в виде $C^{ijmn} = G_{(1)}^{ij}G_{(2)}^{mn}$, где $G_{(1)}^{ij}$ и $G_{(2)}^{mn}$ компоненты метрического тензора эффективного пространства-времени, зависящие от эйнштейновского метрического тензора g^{ik} и тензора электромагнитного поля F^{ik} :

$$G_{(1)}^{ij} = g^{ij} + 4\eta_1\xi F^{im}F_m^j, \quad G_{(2)}^{mn} = g^{kn} + 4\eta_2\xi F^{mk}F_k^n. \quad (2.72)$$

В приближении электродинамики Максвелла или при полном отсутствии внешнего электромагнитного поля, движение фотонов происходит по геодезическим линиям пространства с метрическим тензором g_{ik} , но учет нелинейных уравнений электромагнитного поля приводит к изменению эффективной геометрии пространства-времени для фотонов, изотропные геодезические линии которых теперь определяются метрическим тензором $G_{(1,2)}^{ik}$. Индекс в круглых скобках указывает на поляризационное состояние фотона, поэтому в общем случае, при $\eta_1 \neq \eta_2$ будет наблюдаться эффект двулучепреломления в вакууме. Однако, для электродинамики Борна-Инфельда в пост-максвелловском приближении параметры разложения Лагранжиана совпадают, в следствие чего в этой теории эффективный метрический тензор пространства-времени не зависит от поляризации волны. Этот факт и отсутствие ударных волн при столкновении встречных фронтов [39], делает теорию Борна-Инфельда выделенной по отношению к другим моделям нелинейной электродинамики вакуума. Это утверждение косвенно усиливается эмпирическим наблюдением отсутствия двулучепреломления в космических условиях [187], проверенным с относительной точностью 10^{-38} .

Как отмечается в [188], выражения (2.72) не приводят к нарушению принципа эквивалентности Эйнштейна для фотонов в нелинейной электродинамике вакуума. Появление слагаемых, зависящих от параметров $\eta_{1,2}$ в выражениях (2.72) означает, что внешнее электромагнитное поле оказывает прямое влияние на распространение электромагнитных волн, а не только косвенное через минимальную связь с гравитационным сектором взаимодействия. Аналогично, в линейной теории Эйнштейна-Максвелла, электрически заряженная частица движется в присутствии гравитационного и электромагнитного полей иначе, чем только под действием гравитационного поля.

Напряженность электрического поля заряженной черной дыры может быть такова, что условия пост-максвелловского приближения не будут выполнены [176], поэтому для описания движения фотонов в поле черной дыры получим непертурбативное выражение для метрического тензора эффективного пространства-времени G_{ik} .

Рассмотрим вакуумное решение уравнений (2.46), описывающее распространение слабой электромагнитной волны, поле которой составляет

компоненты тензора f_{ik} , на фоне заданного, сильного статического электромагнитного поля $F_{ik}(\mathbf{r})$. Учитывая сохранение принципа суперпозиции для однородных уравнений (2.46), представим суммарный тензор электромагнитного поля в виде:

$$F_{nm} = F_{nm}(\mathbf{r}) + f_{nm}(\mathbf{r}, S(\mathbf{r}, t)), \quad (2.73)$$

где $S(\mathbf{r}, t)$ – эйконал. Потребуем выполнения приближения геометрической оптики, для которого необходимо чтобы внешнее электромагнитное поле изменялось медленно на расстояниях порядка характерной длины волны:

$$|f_{pj} \nabla_n F_{km}(\mathbf{r})| \ll \left| F_{km}(\mathbf{r}) \frac{\partial f_{pj}}{\partial S} \nabla_n S \right|. \quad (2.74)$$

Это условие будет обеспечено для длин волн λ значительно меньше гравитационного радиуса. Например, в случае черной дыры с промежуточной массой $M \simeq 350M_\odot$ приближение эйконала (2.74) выполняется при $\lambda \ll r_g \simeq 1$ км.

Выполним линейризацию уравнений (2.46) относительно компонент поля слабой электромагнитной волны. В нулевом приближении, уравнения описывают статическое внешнее поле $F_{nm}(\mathbf{r})$. В первом же приближении, получим систему однородных дифференциальных уравнений относительно компонент тензора f_{ik} :

$$\nabla_0 f_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha f_{\beta 0} + \nabla_\beta f_{0\alpha} = 0, \quad \nabla_n Q_\alpha^n = 0, \quad (2.75)$$

где для сокращения записи введено обозначение:

$$\begin{aligned} Q_\alpha^n = & \left\{ (2 - a^2 J_2) f_\alpha^n + 2a^2 \left[F_{\alpha m}^{(2)}(\mathbf{r}) f^{mn} + F_\alpha^m(\mathbf{r}) f_{mp} F^{pn}(\mathbf{r}) + f_{\alpha m} F_{(2)}^{mn}(\mathbf{r}) \right] - \right. \\ & \left. - 2a^2 f_{km} F^{mk}(\mathbf{r}) F_\alpha^n(\mathbf{r}) \right\} \left\{ 4 - 2a^2 J_2 - a^4 J_4 + \frac{a^4}{2} J_2^2 \right\}^{-1/2} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ (2 - a^2 J_2) F_\alpha^n + 2a^2 F_\alpha^{(3)n} \right\} \left\{ 4a^2 f_{km} F^{mk}(\mathbf{r}) + 4a^4 f_{km} F_{(3)}^{mk}(\mathbf{r}) - \right. \\ & \left. - 2a^4 J_2 f_{km} F^{mk}(\mathbf{r}) \right\} \left\{ 4 - 2a^2 J_2 - a^4 J_4 + \frac{a^4}{2} J_2^2 \right\}^{-3/2}, \quad (2.76) \end{aligned}$$

где инварианты $J_2 = F_{km}(\mathbf{r}) F^{mk}(\mathbf{r})$, $J_4 = F_{km}(\mathbf{r}) F^{mp}(\mathbf{r}) F_{pj}(\mathbf{r}) F^{jk}(\mathbf{r})$ вычис-

лены только на основании компонент тензора внешнего электромагнитного поля, а индексы, обозначенные греческими буквами, принимают пространственные значения $\alpha, \beta = 1..3$.

Выделим асимптотически главную часть уравнений (2.75) в приближении эйконала (2.74), предварительно вычислив ковариантную дивергенцию от компонент тензора Q_α^n . Результат вычисления представим в виде системы алгебраических уравнений, аналогичных оптическим уравнениям Френеля

$$A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} \frac{\partial f_{\beta 0}}{\partial S} = 0, \quad (2.77)$$

где матрица коэффициентов имеет смысл поляризационного оператора:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} = & \left[8 - 4a^2 J_2 - 2a^4 J_4 + a^4 J_2^2 \right] \left\{ [(a^2 J_2 - 2)g^{ik} - 2a^2 F_{(2)}^{ik}] \nabla_i S \nabla_k S \delta_\alpha^\beta - \right. \\ & - (a^2 J_2 - 2)g^{\beta i} \nabla_i S \nabla_\alpha S + 2a^2 [F_{(2)\alpha}^{\cdot i} g^{\beta k} + F_{(2)}^{\beta k} \nabla_\alpha S] \nabla_k S - \\ & \left. - 2a^2 g^{ik} \nabla_i S \nabla_k S F_{(2)\alpha}^{\cdot\beta} - 2a^2 F_{\alpha\cdot}^{\cdot i} F^{\beta k} \nabla_i S \nabla_k S \right\} + \left\{ 16a^6 F_{(3)\alpha}^{\cdot i} F_{(3)}^{\beta k} + \right. \\ & \left. + 4a^2 (a^2 J_2 - 2)^2 F_{\alpha\cdot}^{\cdot i} F^{\beta k} - 8a^4 (a^2 J_2 - 2) [F_{(3)\alpha}^{\cdot i} F^{\beta k} + F_{\alpha\cdot}^{\cdot i} F_{(3)}^{\beta k}] \right\} \nabla_i S \nabla_k S. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Для существования нетривиального решения ($\partial f_{\beta 0} / \partial S \neq 0$) системы уравнений (2.77) потребуем вырожденность матрицы поляризационного оператора: $\text{Det} \|A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\| = 0$. Согласно следствия теоремы Кэли–Гамильтона [189], определитель матрицы тензора $A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$ может быть представлением в виде разложения по инвариантам $A_{(N)}$, образованными степенями этого тензора:

$$\text{Det} \|A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\| = \frac{1}{3} A_{(3)} - \frac{1}{2} A_{(1)} A_{(2)} + \frac{1}{6} A_{(1)}^3,$$

где $A_{(N)} = \overbrace{A_{\alpha\mu_1} A^{\mu_1\mu_2} \dots A_{\mu_{N-1}\beta}}^N g^{\alpha\beta}$ определяет инвариант степени N . Условие существования нетривиального решения системы линейных уравнений (2.74) приводит к уравнению эйконала или дисперсионному соотношению для слабой электромагнитной волны в электродинамике Борна - Инфельда:

$$2A_{(3)} - 3A_{(1)}A_{(2)} + A_{(1)}^3 = 0. \quad (2.79)$$

Несмотря на то, что дисперсионное уравнение содержит только трехмерные инварианты поляризационного оператора, его релятивистская инва-

риантность не нарушена. В противном случае метрический тензор эффективного пространства-времени, компоненты которого неявно содержатся в выражении (2.79), включал бы в себя индексные конструкции не имеющие общековариантной структуры, частично состоящие из трехмерных и четырехмерных сверток тензора внешнего электромагнитного поля.

Для обоснования релятивистской инвариантности выражения (2.79) построим четырехмерное обобщение B_p^m трехмерного тензора $A_{\alpha}^{\cdot\beta}$, предполагая, что $A_{\alpha}^{\cdot\beta}$ является трехмерной редукцией тензора B_p^m : $B_{\alpha}^{\cdot\beta} = A_{\alpha}^{\cdot\beta}$. Изменим представление выражения (2.79) так, чтобы оно в явной форме содержало только отдельные компоненты тензора B_p^m , его степени и инварианты трех младших степеней этого тензора $B_{(1)} = B_m^m$, $B_{(2)} = B_{(2)m}^m$, $B_{(3)} = B_{(3)m}^m$. Для этого выразим инварианты тензора $A_{\alpha}^{\cdot\beta}$:

$$\begin{aligned} A_{(1)} &\equiv A_{\alpha}^{\alpha} = B_{(1)} - B_0^0, & A_{(2)} &\equiv A_{(2)\alpha}^{\alpha} = B_{(2)} - 2B_{(2)0}^0 + (B_0^0)^2, \\ A_{(3)} &\equiv A_{(3)\alpha}^{\alpha} = B_{(3)} - 3B_{(3)0}^0 + 3B_{(2)0}^0 B_0^0 - (B_0^0)^3, \end{aligned} \quad (2.80)$$

и выполним их подстановку в дисперсионное соотношение (2.79), в результате чего, последнее примет вид уравнения

$$2B_{(3)} - 3B_{(1)}B_{(2)} + B_{(1)}^3 - 6B_{(3)0}^0 - 3B_0^0 B_{(1)}^2 + 6B_{(2)0}^0 B_{(1)} + 3B_0^0 B_{(2)} = 0, \quad (2.81)$$

явно содержащего инвариантную $2B_{(3)} - 3B_{(1)}B_{(2)} + B_{(1)}^3$ и неинвариантную $-6B_{(3)0}^0 - 3B_0^0 B_{(1)}^2 + 6B_{(2)0}^0 B_{(1)} + 3B_0^0 B_{(2)}$ части относительно произвольных координатных преобразований. Равенство нулю суммы обеих этих частей должно быть обеспечено при любом выборе координат, так как в целом уравнение фронта электромагнитной волны не должно зависеть от выбора наблюдателя, что возможно обеспечить только лишь в том случае, если инвариантная и неинвариантная части дисперсионного уравнения (2.81) независимо друг от друга обращаются в ноль.

Подстановка выражения для компонент тензора B_n^m в каждое из этих соотношений приводит к уравнению эйконала в четырехмерной, релятивистски инвариантной форме:

$$\left\{ \left[g^{ik} \left(1 - \frac{a^2}{2} J_2 \right) + a^2 F_{(2)}^{ik} \right] \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} \right\}^2 = 0, \quad (2.82)$$

согласно которому распространение электромагнитных волн на фоне заданного гравитационного и электромагнитного поля определяется решением уравнения Гамильтона-Якоби для безмассовых частиц, движущихся в эффективном пространстве-времени, метрический тензор которого имеет вид:

$$G^{ik} = \left[1 - \frac{a^2}{2} J_2\right] g^{ik} + a^2 F_{(2)}^{ik}, \quad G_{kn} = \frac{g_{kn} - a^2 F_{kn}^{(2)}}{1 - \frac{a^2}{2} J_2 - \frac{a^4}{4} J_4 + \frac{a^4}{8} J_2^2}. \quad (2.83)$$

При этом, для компонент эффективного метрического тензора выполняется соотношение $G^{ik} G_{kn} = \delta_n^i$, а также $G^{ik} g_{ki} + a^2 J_2 = 4$.

Появление особого эффективного метрического тензора G_{kn} , необходимого для описания движения фотонов, не означает нарушения принципа эквивалентности или перехода к биметрической теории гравитации. Геометрические свойства пространства-времени для всех видов материи определяются эйнштейновским метрическим тензором g_{kn} . В теории Эйнштейна-Борна-Инфельда фотоны испытывают нелинейное воздействие со стороны внешнего электромагнитного поля и поэтому, при его наличии, движение фотонов в пространстве-времени с метрическим тензором g_{kn} перестает быть геодезическим, однако это движение можно описать как свободное геодезическое в эффективном пространстве времени с метрическим тензором G_{kn} .

Используя выражения (2.83) и (2.51), вычислим компоненты метрического тензора G^{ik} для заряженной черной дыры:

$$G_{00} = g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2Q^2}{r} \int_r^\infty \frac{d\eta}{\eta^2 + \sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2}}, \quad G_{11} = g_{11} = -1/g_{00},$$

$$G_{22} = \frac{r^4 + a^2 Q^2}{r^4} g_{22} = -\left(r^2 + \frac{a^2 Q^2}{r^2}\right), \quad G_{33} = \frac{r^4 + a^2 Q^2}{r^4} g_{33} = G_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.84)$$

Отметим существенные различия свойств эйнштейновского g_{kn} и эффективного G_{kn} метрических тензоров. Для этого вычислим скалярную кривизну пространства-времени, описываемого каждым из них. В электродинамике Максвелла след тензора энергии-импульса равен нулю, и как след-

ствие этого факта, скалярная кривизна пространства-времени Рейснера-Нордстрема также равна нулю. В теории Эйнштейна-Борна-Инфельда скалярная кривизна заряженного коллапсара, отрицательна во всех точках пространства, имеет сингулярность в центре коллапсара, не зависит от его массы, и определяется выражением:

$$R = \frac{4Q^2}{r^2 \sqrt{r^4 + a^2 Q^2}} \left[\frac{r^2 - \sqrt{r^4 + a^2 Q^2}}{r^2 + \sqrt{r^4 + a^2 Q^2}} \right]. \quad (2.85)$$

Скалярная кривизна \mathcal{R} , вычисленная для эффективного метрического тензора (2.84) зависит от массы коллапсара и имеет существенно более сложный вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \frac{16a^2 Q^2 (3r^4 + 2a^2 Q^2)}{r^3 (r^4 + a^2 Q^2)^2} \left[Q^2 \int_r^\infty \frac{d\eta}{\eta^2 + \sqrt{\eta^4 + a^2 Q^2}} - M \right] \\ & + \frac{2(4r^{10} + 9r^4 Q^2 a^4 + 5a^6 Q^4 - 4r^2 a^4 Q^4)}{a^2 r^2 (r^4 + a^2 Q^2)^2} + \frac{4(3Q^2 a^2 - 2r^4)}{a^2 r^2 \sqrt{r^4 + a^2 Q^2}}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Определим асимптотическое поведение скалярной кривизны для обоих типов метрического тензора вблизи центра коллапсара:

$$\begin{aligned} R \Big|_{r \rightarrow 0} & \simeq \frac{8}{a^2} - \frac{4|Q|}{ar^2} - \frac{6r^2}{a^3|Q|} + \mathcal{O}(r^3), \\ \mathcal{R} \Big|_{r \rightarrow 0} & \simeq \frac{32(M_{cr} - M)}{r^3} + \frac{10}{r^2} \left(1 - \frac{2|Q|}{a} \right) + \frac{8}{3a^2} \\ & - \frac{16(M_{cr} - M)r}{a^2 Q^2} + \frac{2(|Q| - a)r^2}{Q^2 a^3} + \mathcal{O}(r^3), \end{aligned} \quad (2.87)$$

где критическая масса M_{cr} определяется выражением (2.70). В общем случае, оба выражения для скалярной кривизны расходятся, однако при частном выборе параметров $M = M_{cr}$ и $|Q| = a/2$, соответствующем черной точке с двукратно вырожденным горизонтом, скалярная кривизна $\mathcal{R} \simeq 8/(3a^2)$ остается регулярной при $r \rightarrow 0$, в то время как R , по-прежнему, расходится. Утверждение о отсутствии сингулярности эффективного пространства-времени черной точки, невозможно сделать только на основании выражения для скалярной кривизны. В работах [63–65] и ряде дру-

гих, для проверки решений регулярных черных дыр, используются, как правило, три инварианта тензора кривизны: скалярная кривизна, квадратичный инвариант тензора Риччи и скаляр Кречмана. Однако этот набор инвариантов не является единственно возможным. Среди известных наборов инвариантов можно отметить: инварианты Гехениау-Дебевера [190], инварианты Виттена [191], наборы Петрова [192], Снеддона [193] и другие. Особое место занимает набор инвариантов, предложенный Карминати и Макленаханом в работе [194]. При построении этого набора, авторы стремились обеспечить выполнение двух условий: набор должен быть построен из инвариантов с наименьшей степенью тензорных величин, и он должен содержать минимальное количество независимых инвариантов в каждом из пространств по классификации Петрова-Сегре. Набор инвариантов Карминати-Макленахана включает в себя следующие выражения:

$$\begin{aligned}
R &= R_m^m, \\
R_1 &= \frac{1}{4} S_a^b S_b^a, \\
R_2 &= -\frac{1}{8} S_a^b S_b^c S_c^a, \\
R_3 &= \frac{1}{16} S_a^b S_b^c S_c^d S_d^a, \\
M_1 &= \frac{1}{8} S^{ab} S^{cd} (C_{acdb} + i^* C_{acdb}), \\
M_2 &= \frac{1}{16} S^{bc} S_{ef} (C_{abcd} C^{aefd} + {}^* C_{abcd} {}^* C^{aefd}) + \frac{1}{8} i S^{bc} S_{ef} {}^* C_{acdb} C^{aefd}, \\
M_3 &= \frac{1}{16} S^{bc} S_{ef} (C_{abcd} C^{aefd} + {}^* C_{abcd} {}^* C^{aefd}), \\
M_4 &= -\frac{1}{32} S^{ag} S^{ef} S_c^d (C_{ac}{}^{db} C^{befg} + {}^* C_{ac}{}^{db} {}^* C^{befg}), \\
M_5 &= \frac{1}{32} S^{cd} S^{ef} (C^{aghb} + i^* C^{aghb}) (C_{acdb} C_{gefh} + {}^* C_{acdb} {}^* C_{gefh}), \\
W_1 &= \frac{1}{8} (C_{abcd} + i^* C_{abcd}) C^{abcd}, \\
W_2 &= -\frac{1}{16} (C_{ab}{}^{cd} + i^* C_{ab}{}^{cd}) C_{cd}{}^{ef} C_{fe}{}^{ab}, \tag{2.88}
\end{aligned}$$

где использованы обозначения $S_{ab} = R_{ab} - Rg_{ab}/4$ для девиатора тензора Риччи, и C_{abcd} для компонент тензора Вейля. В работе [195] было пока-

зано, что этот набор инвариантов является полным для всех известных типов пространств, связанных с электровакуумными решениями в теории Эйнштейна-Маквелла, а также для ряда пространств, в которых другие наборы инвариантов полнотой не обладают. Не смотря на то, что на сегодняшний день отсутствует доказательство полноты этого набора для всех 90 типов пространств по классификации Петрова-Сегре, мы воспользуемся им для выяснения регулярности пространства-времени черной точки в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда.

В Таблице 5 приведены результаты вычисления инвариантов Карминати-Макленахана для черной точки с двукратно вырожденным горизонтом, при значениях параметров $M = M_{cr}$ и $|Q| = a/2$. Выражения представлены в виде отрезков разложения в ряд вблизи центра черной дыры, и вычислены как для эйнштейновской метрики g_{ik} так и для метрики эффективного пространства-времени G_{ik} . Выражения для всех инвариантов эффективного пространства-времени регулярны в центре, что подтверждает ранее высказанное предположение о регулярности этого пространства-времени. Этот результат был получен нами в работе [112] и иллюстрирует новое, крайне необычное, свойство черных дыр Эйнштейна-Борна-Инфельда, пространство-время которых может иметь сингулярность для массивных частиц, и в тоже время, быть регулярным для фотонов. Подобное свойство требует детального изучения особенностей движения массивных и безмассовых частиц в поле такого коллапсара.

Исследуем особенности движения фотонов в пространстве с эффективной метрикой (2.84). Следует отдельно рассмотреть случай радиального движения, так как компоненты g_{00} эйнштейновской метрики и G_{00} эффективной метрики совпадают; а также случай движения фотонов с моментом импульса отличающимся от нуля, например, кругового движения, для которого можно ожидать дополнительного проявления эффектов нелинейной электродинамики благодаря множителям в (2.84), связывающим компоненты G_{22} и G_{33} с аналогичными компонентами эйнштейновской метрики.

а) радиальное движение фотона

Вычислим координатное время необходимое для распространения светового сигнала в радиальном направлении из точки с радиальной координатой

Инвариант	для метрики G_{ik}	для метрики g_{ik}
R	$\frac{8}{3a^2} - \frac{4r^2}{a^4} + \mathcal{O}(r^3)$	$-\frac{2}{r^2} + \frac{8}{a^2} - \frac{12r^2}{a^4} + \mathcal{O}(r^3)$
R_1	$\frac{8}{9a^4} + \mathcal{O}(r^3)$	$\frac{1}{4r^4} + \mathcal{O}(r^3)$
R_2	$-\frac{8r^2}{3a^8} + \mathcal{O}(r^3)$	$\mathcal{O}(r^3)$
R_3	$\frac{32}{81a^8} + \mathcal{O}(r^3)$	$\frac{1}{64r^8} + \mathcal{O}(r^3)$
M_1	$\frac{16}{81a^6} - \frac{16r^2}{27a^8} + \mathcal{O}(r^3)$	$\frac{1}{12r^6} + \mathcal{O}(r^3)$
$M_2 = M_3$	$\frac{32}{729a^8} - \frac{64r^2}{243a^{10}} + \mathcal{O}(r^3)$	$\frac{1}{36r^8} + \mathcal{O}(r^3)$
M_4	$\frac{32r^2}{243a^{12}} + \mathcal{O}(r^3)$	$\mathcal{O}(r^3)$
M_5	$\frac{64}{6561a^{10}} - \frac{64r^2}{729a^{12}} + \mathcal{O}(r^3)$	$\frac{1}{108r^{10}} + \mathcal{O}(r^3)$
W_1	$\frac{8}{27a^4} - \frac{16r^2}{9a^6} + \mathcal{O}(r^3)$	$\frac{1}{6r^4} + \mathcal{O}(r^3)$
W_2	$-\frac{16}{243a^6} + \frac{16r^2}{27a^8} + \mathcal{O}(r^3)$	$\frac{1}{36r^6} + \mathcal{O}(r^3)$

Таблица 5: Разложения инвариантов Карминати-Макленахана для эйнштейновского g_{ik} и эффективного G_{ik} метрических тензоров вблизи центра черной точки.

натой r_0 к точке с координатой r :

$$x^0 = \pm \int \frac{dr}{g_{00}(r)} = \pm T(r) + const, \quad (2.89)$$

где знак минус соответствует удалению фотона от силового центра, а знак плюс приближению к нему. Так как метрика (2.51) может иметь разное число горизонтов, в зависимости от параметров черной дыры, могут реализовываться следующие виды движения.

Если $M < M_{cr}$, существует только один горизонт, по свойствам аналогичный горизонту Шварцшильда, координатное время приближения к

которому стремится к бесконечности $x^0 \rightarrow \infty$, и частота фотонов на самом горизонте испытывают бесконечно большое красное смещение.

В случае же $M > M_{cr}$ и $Q > Q_0$, метрический тензор (2.51) имеет два горизонта, и движение фотонов качественно не будет отличаться от движения в пространстве-времени Рейснера-Нордстерма.

Существенный интерес представляет предельный случай «чёрной точки» $M = M_{cr}$ и $Q = Q_0 = a/2$, для которого компонента метрического тензора g_{00} может быть представлена в виде:

$$g_{00} = 1 - \frac{a}{2r} \int_{a/r}^{\infty} \frac{d\xi}{1 + \sqrt{1 + \xi^4/4}} = \quad (2.90)$$

$$= \frac{4r^3}{3a^3} \left({}_2F_1 \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{a^4}{4r^4} \right) - 1 \right) - \frac{\Gamma(-3/4)\Gamma(5/4)}{\sqrt{2\pi}},$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция. Выражение для компоненты g_{00} оказывается регулярным при любых значениях r , в том числе и в начале координат. Асимптотическое поведение этой метрической функции вблизи центра черной дыры и на большом удалении от него имеет вид:

$$g_{00} \Big|_{r \rightarrow 0} \simeq \frac{2r^2}{3a^2} - \frac{2r^4}{5a^5} + \mathcal{O} \left(\frac{r^9}{a^9} \right), \quad g_{00} \Big|_{r \rightarrow \infty} \simeq 1 - \frac{2M_{cr}}{r} + \frac{a^2}{4r^2} + \mathcal{O} \left(\frac{r^6}{a^6} \right). \quad (2.91)$$

Тем не менее, координатное время, необходимое для приближения фотона к центру, имеет степенную расходимость $x^0 \sim \mathcal{O}(3a^2/2r)$, что должно быть вполне ожидаемым свойством, так как для «чёрной точки» положение горизонта совпадает с началом координат.

б) круговые орбиты фотона

Исследуем особенности движения фотона с энергией \mathcal{E}_0 и моментом импульса L в эффективном пространстве-времени с метрическим тензором (2.84). Для удобства вычислений перейдем к обратной радиальной координате $u = 1/r$, а также введем обозначение для прицельного параметра $b = L/\mathcal{E}_0$. Уравнение траектории фотона и метрическая функция g_{00} в этом

случае примут вид:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = u^4 G_{22} \left[\frac{G_{22}}{b^2} + G_{00} \right] = (1 + a^2 Q^2 u^4) \left[\frac{1 + a^2 Q^2 u^4}{b^2} - u^2 g_{00}(u) \right] = \Psi(u), \quad (2.92)$$

$$g_{00}(u) = 1 - 2Mu + 2Q^2 u \int_0^u \frac{d\xi}{1 + \sqrt{1 + a^2 Q^2 \xi^4}}. \quad (2.93)$$

Радиус круговой орбиты, при заданных параметрах черной дыры и фотона, определяется из решения уравнения $\Psi(u) = 0$. Большой интерес представляет изучение устойчивых круговых орбит с минимальным радиусом, имеющих свойства предельных циклических траекторий. Множество таких орбит с одинаковым радиусом, принадлежащих разным плоскостям, проходящим через центр черной дыры, образуют «фотонную сферу».

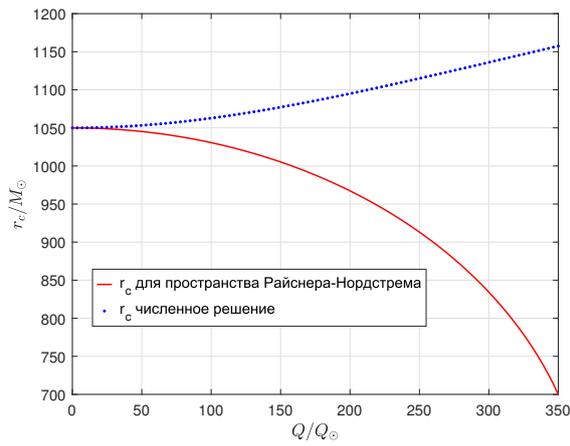
Для существования критической круговой орбиты, необходимо чтобы функция $\Psi(u)$ имела ноль второго порядка, соответствующий минимуму этой функции. В пространстве-времени Рейснера-Нордстрема это условие приводит к уравнению $2Q^2 u_c^2 - 3Mu_c + 1 = 0$, решение которого определяет радиус фотонной сферы:

$$r_c = 1/u_c = \frac{3M}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right]. \quad (2.94)$$

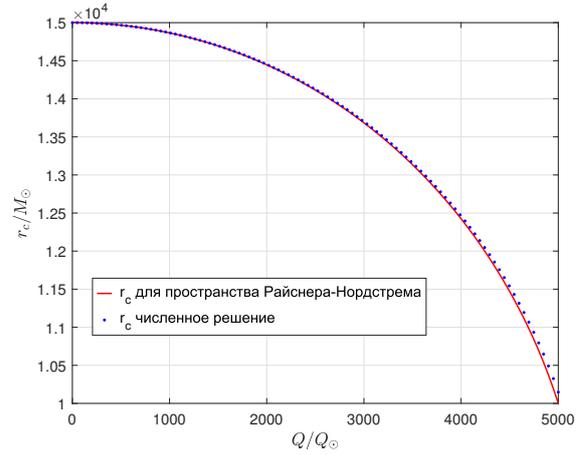
В теории Эйнштейна-Борна-Инфельда выражение (2.92) приводит к трансцендентному уравнению для вычисления радиуса критической круговой орбиты:

$$\begin{aligned} (1 - a^2 Q^2 u_c^4) + (3 - a^2 Q^2 u_c^4) \left[Q^2 \int_0^{u_c} \frac{d\xi}{1 + \sqrt{1 + a^2 Q^2 \xi^4}} - M \right] u_c + \\ + \frac{Q^2 u_c^2 (1 + a^2 Q^2 u_c^4)}{1 + \sqrt{1 + a^2 Q^2 u_c^4}} = 0, \end{aligned} \quad (2.95)$$

переходящему в аналогичное уравнение в пространстве Рейснера-Нордстрема при $a \rightarrow 0$. Результат численного решения уравнения (2.95) для черной дыры с массой $M = 350M_\odot$ и $M = 5000M_\odot$, при различных значениях заряда, приведен на Рисунке 9.



(а) Радиус круговой орбиты фотона для $M = 350M_{\odot}$



(б) Радиус круговой орбиты фотона для $M = 5000M_{\odot}$

Рис. 9: Зависимость радиуса критической круговой орбиты от заряда черной дыры Эйнштейна-Борна-Инфельда при для различных значений ее массы. Заряд нормирован на значение максимально допустимого заряда черной дыры с массой Солнца в решении Рейснера-Нордстрема; значение радиуса круговой орбиты нормировано на массу Солнца, заданную в естественных единицах.

Для выбранных значений массы, характер изменения r_c с изменением заряда Q оказывается принципиально разным. При $M = 350M_{\odot}$ радиус фотонной сферы, проявляет качественно новое поведение, возрастая с увеличением Q вплоть до максимального значения соответствующего, предельному заряду Q' , допустимому для черной дыры с данной массой. При $M = 5000M_{\odot}$ зависимость радиуса фотонной сферы от заряда оказывается убывающей и практически полностью повторяет аналогичную зависимость в решении Рейснера-Нордстрема. Для обоих значений массы M круговая орбита фотона лежит вне горизонта событий для всех значений заряда.

Отдельного рассмотрения требует предельный случай $M = M_{cr}$ и $Q = Q_0 = a/2$, соответствующий «чёрной точке». Уравнение для радиуса фотонной сферы (2.95) в этом случае принимает вид:

$$2y^2(1 - y^4) + \left(1 - \frac{y^4}{3}\right) \left[1 - {}_2F_1\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -y^4\right) - \frac{y^3\Gamma^2(1/4)}{2\sqrt{\pi}}\right] + \frac{y^4(1 + y^4)}{1 + \sqrt{1 + y^4}} = 0, \quad y = \frac{au_c}{\sqrt{2}}. \quad (2.96)$$

Численное решение этого уравнения приводит к радиусу орбиты фотона со значением: $r_c/a \simeq 0.959$.

Изменение зависимости радиуса круговой орбиты фотона от заряда черной дыры, полученное при численном моделировании, напрямую сказывается на изменении характеристик тени черной дыры. Недавнее успешное наблюдение теней сверхмассивных чёрных дыр M87* и Sgr A*, выполненное коллаборацией Event Horizon Telescope [196] открывает новые возможности проверки эффектов теории поля в экстремальных условиях черных дыр. В работе [197] рассматривается возможность использования наблюдательных данных о тени для определения заряда черных дыр Рейснера-Нордстрема. Для черной дыры Эйнштейна-Борна-Инфельда описание движения фотонов требует использования эффективной метрики (2.84), поэтому определение характеристик тени для этого типа черных дыр представляет существенный интерес.

Вычислим угловой размер тени, измеренный наблюдателем, находящимся в точке с радиальной координатой $r = R$, как угол между световым лучом, касающимся поверхности фотонной сферы, а в последующем, приходящим в точку наблюдения, и радиальным направлением:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\sqrt{|G_{33}|}}{\sqrt{|G_{11}|}} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) \Big|_{r=R} = \sqrt{|G_{22}|G_{00}} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) \Big|_{r=R}, \quad (2.97)$$

где учтено выражение (2.84) эффективного метрического тензора для фотонов, движущихся в плоскости $\theta = \pi/2$. После несложного преобразования, учитывающего уравнение траектории фотона (2.95), выражение для углового размера тени может быть представлено в более удобном для анализа виде:

$$\begin{aligned} \sin^2 \phi &= \left[1 + \frac{1}{G_{00}|G_{22}|} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{-1} \Big|_{r=R} = \frac{G_{00}(R)}{|G_{22}(R)|} \frac{|G_{22}(r_c)|}{G_{00}(r_c)} = \\ &= \frac{r_c^2 + a^2 Q^2 / r_c^2}{R^2 + a^2 Q^2 / R^2} \left(\frac{g_{00}(R)}{g_{00}(r_c)} \right), \end{aligned} \quad (2.98)$$

где учтено, что прицельный параметр должен быть выбран так, чтобы траектория луча касалась поверхности фотонной сферы, поэтому значение

этого параметра должно определяться выражением $b^2 = |G_{22}(r_c)|/G_{00}(r_c)$. Для удаленного наблюдателя $R \rightarrow \infty$ и асимптотически плоской метрики $g_{00}(R) \rightarrow 1$, выражение для геометрического размера тени принимает вид

$$R^2 \sin^2 \phi_\infty = \left(1 + \frac{a^2 Q^2}{r_c^4}\right) \frac{r_c^2}{g_{00}(r_c)}, \quad (2.99)$$

и отличается от аналогичного, ранее известного, выражения в теории Эйнштейна-Максвелла множителем в круглой скобке.

На Рисунке 10 приведен результат численного моделирования радиуса тени черной дыры для различных значений ее массы. Значение параметра модели Борна-Инфельда было принято равными $a = 2.37 \cdot 10^3 M_\odot$, в естественной системе единиц, что соответствует значению 10^{-16} Гс^{-1} в системе единиц СГС. Для каждого заданного значения массы, величина заряда изменялась вплоть до максимально допустимого значения в решении Рейснера-Нордстрема. В модели Эйнштейна-Борна-Инфельда максимально допустимое значение заряда при заданной массе оказывается несколько больше, но так как при этом исчезает возможность сравнения с решением Рейснера-Нордстрема, такие значения заряда были исключены из рассмотрения.

Аналогично радиусу фотонной сферы, радиус тени убывает при увеличении заряда, как это происходит в пространстве-времени Рейснера-Нордстрема, однако при массе черной дыры меньше $M \lesssim 467 M_\odot$ наблюдается качественно противоположная зависимость – радиус тени увеличивается при увеличении заряда. Подобное поведение радиуса тени не характерно для известных типов черных дыр, обусловлено нелинейными особенностями электродинамики Борна-Инфельда, и может быть использовано для выяснения экспериментального статуса этой теории в перспективных астрофизических экспериментах, связанных с определением параметров тени черных дыр.

В завершение отметим, что в случае чёрной точки, при $M = M_{cr}$ и $Q = Q_0 = a/2$ радиус тени связан с параметром Борна-Инфельда линейным соотношением $R \sin \phi_\infty \simeq 1.827a$. Завершая исследование особенностей движения фотонов, перейдем к описанию движения массивных частиц в поле черной дыры Эйнштейна-Борна-Инфельда.

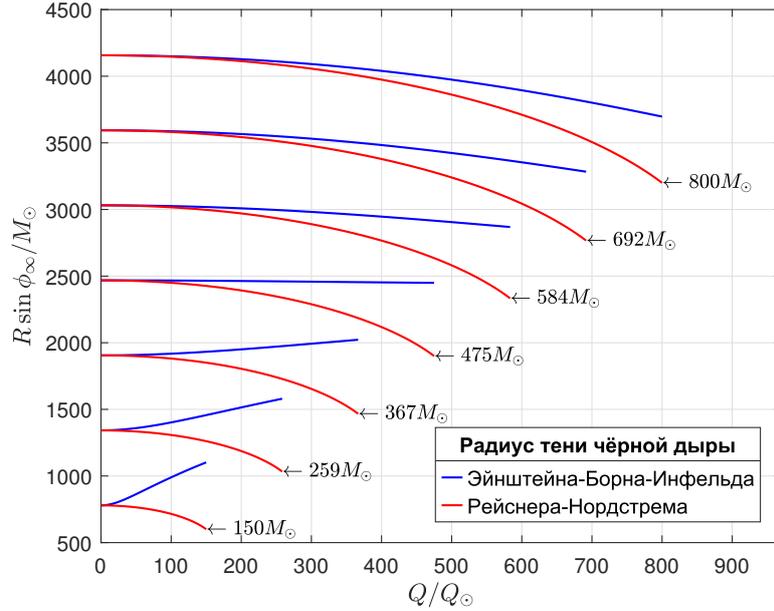


Рис. 10: Зависимость радиуса тени чёрной дыры от её заряда для значений масс от $150M_\odot$ до $800M_\odot$. Заряд нормирован на максимально допустимое значение заряда для черной дыры с массой Солнца в пространстве-времени Рейснера-Нордстрема.

2.5.3 Устойчивость круговых орбит массивных частиц в поле черной дыры Эйнштейна-Борна-Инфельда

Вопрос об устойчивости круговых орбит массивных незаряженных частиц, движущихся вокруг коллапсара, представляет значительный интерес. Такие орбиты, как правило, являются сепаратрисами траекторий с различающимися свойствами. Минимальный радиус устойчивой круговой орбиты по большей части определяет энергию, выделяемую при аккреции вещества на коллапсаре [198]. Рассмотрим устойчивость круговых орбит массивной незаряженной частицы, движущейся в сферически-симметричном пространстве-времени черной дыры Эйнштейна-Борна-Инфельда.

Уравнение траектории для массивной незаряженной частицы можно получить, используя метод Гамильтона-Якоби:

$$\frac{1}{g_{00}(u)} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - u^4 g_{00}(u) \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 - u^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = m^2, \quad (2.100)$$

где S функция действия, m масса частицы, и $u = 1/r$ обратная радиальная координата. Решение этого уравнения несложно получить методом разде-

ления переменных:

$$S = -\mathcal{E}_0 t + L_0 \varphi \pm \int \frac{du}{u^2 g_{00}(u)} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - [m^2 + L_0^2 u^2] g_{00}(u)}, \quad (2.101)$$

где \mathcal{E}_0 , и L_0 – энергия и момент импульса частицы, а знак перед интегралом определяется начальными условиями.

Уравнение траектории, соответствующее действию (2.101) удобно записать, используя обозначения для приведенной энергии $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0/m$ и момента импульса $L = L_0/m$ частицы:

$$\varphi(u) = \varphi_0 \pm \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}}, \quad f(u) = \frac{\mathcal{E}^2}{L^2} - \left[u^2 + \frac{1}{L^2} \right] g_{00}(u). \quad (2.102)$$

Существование круговых орбит возможно в случае, если функция $f(u)$ имеет двукратный корень, поэтому для круговой орбиты с радиусом $r_c = 1/u_c$ должны быть выполнены условия $f(u_c) = 0$, $df(u_c)/du_c = f'(u_c) = 0$, позволяющие определить энергию и момент импульса частицы, движущейся по круговой орбите с данным радиусом:

$$\mathcal{E}^2 = \frac{2u_c g_{00}^2(u_c)}{[2u_c g_{00}(u_c) + u_c^2 g'_{00}(u_c)]}, \quad L^2 = -\frac{g'_{00}(u_c)}{[2u_c g_{00}(u_c) + u_c^2 g'_{00}(u_c)]}. \quad (2.103)$$

Для того, чтобы орбита была устойчивой [179], должно быть выполнено дополнительное условие $f''(u_c) < 0$, поэтому радиус такой круговой орбиты должен быть нулем функции f третьего порядка. Выполнение этого требования позволяет исключить выражения для энергии и момента импульса частицы, и представить уравнение для вычисления радиуса устойчивой круговой орбиты массивной частицы в пространстве-времени с метрической функцией g_{00} в виде:

$$u_c g_{00}(u_c) g''_{00}(u_c) = g'_{00}(u_c) [g_{00}(u_c) + 2u_c g'_{00}(u_c)], \quad (2.104)$$

Рассмотрим решения этого уравнения в различных случаях сферически симметричных пространств коллапсаров.

В пространстве-времени Шварцшильда уравнение (2.104) имеет единственное решение, соответствующее радиусу устойчивой круговой орбиты

$r_c = 1/u_c = 6M$, где M масса коллапсара.

Для заряженного коллапсара в пространстве-времени Рейснера-Нордстрема, уравнение (2.104) для радиуса устойчивой круговой орбиты r_c сводится к кубическому уравнению:

$$r_c^3 - 6Mr_c^2 + 9Q^2r_c - \frac{4Q^4}{M} = 0, \quad (2.105)$$

для которого число нулей и их кратность зависит от знака дискриминанта:

$$\Delta = \frac{108Q^4(9M^2Q^2 - 5M^4 - 4Q^4)}{M^2}. \quad (2.106)$$

Если $\Delta > 0$, то уравнение (2.105) имеет три различных действительных корня, каждый из которых соответствует устойчивой круговой орбите массивной частицы. Однако этот случай оказывается нереалистичным, поскольку в пространстве-времени Рейснера-Нордстрема заряд коллапсара ограничен величиной $Q \leq M$.

При $\Delta < 0$ уравнение (2.105) имеет только один действительный корень, соответствующий круговой орбите, и два комплексно-сопряженных корня, не имеющих физического смысла.

Наиболее интересный случай соответствует $\Delta = 0$, при критическом значении заряда $Q = M$. В этом случае сингулярность в пространстве-времени Рейснера-Нордстрема окружена двукратно вырожденным горизонтом с радиусом M . Для такого критического значения заряда коллапсара, уравнение (2.105) имеет два корня, один, $r_{c1} = M$, двукратный, а другой, $r_{c2} = 4M$, однократный. Стоит отметить, что для круговой орбиты с радиусом r_{c1} (радиус горизонта) энергия частицы становится равной нулю, $\mathcal{E}(r_{c1}) = 0$, что не представляется возможным. Поэтому следует рассматривать только орбиту с радиусом $r_{c2} = 4M$, как физически реалистичную устойчивую круговую орбиту в пространстве-времени коллапсара Рейснера-Нордстрема с критическим зарядом $Q = M$. Для частицы, движущейся по этой круговой орбите, энергия и импульс имеют конечные значения $\mathcal{E}(r_{c2}) = 27/32$ и $L^2 = 8M^2$.

Необходимо отметить, что уравнение (2.105) допускает решение в виде нуля третьего порядка $r_{trip} = 2M$. Заряд коллапсара, необходимый для этого, должен иметь значение $Q^2 = M^2(9 - \sqrt{17})/4$.

Выясним условия существования устойчивых круговых орбит массивных частиц в пространстве-времени коллапсара Эйнштейна-Борна-Инфельда. Как и ранее, для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение $f(u) = 0$ имело ноль третьего порядка в точках на искомой круговой орбите $u = u_c$. Это требование эквивалентно уравнению (2.105), которое для метрического тензора (2.51) может быть приведено к виду:

$$\begin{aligned} & \left\{ 12M^2 a^4 u^6 W - 2Ma^2 u^3 [6a^2 u^3 W I(u) + a^2 u^2 W + 10W^2 - 14W + 4] \right. \\ & \quad + 8W^3 + 2W^2 [5a^2 u^3 I(u) + a^2 u^2 - 8] + W [3a^4 u^6 I(u)^2 + \\ & \quad \left. + a^4 u^5 I(u) - 14a^2 u^3 I(u) - 6a^2 u^2 + 8] + 4a^2 u^2 [1 + uI(u)] \right\} \times \\ & \quad \times \left\{ a^2 u^2 W [2W + a^2 u^3 I(u) - 2Ma^2 u^3 - 2] \right\}^{-1} = 0, \end{aligned} \quad (2.107)$$

где для краткости использованы обозначения:

$$W = \sqrt{1 + a^2 Q^2 u^4}, \quad I(u) = 2Q^2 u \int_0^u \frac{d\xi}{1 + \sqrt{1 + a^2 Q^2 \xi^4}}. \quad (2.108)$$

Предполагая, что $[2W + a^2 u^3 I(u) - 2Ma^2 u^3 - 2] \neq 0$ на круговой орбите $u = u_c$, выразим массу коллапсара M из уравнения (2.107):

$$M = \frac{10W^2 + W[6a^2 u^2 I(u) + a^2 u^2 - 14] + 4 \pm \sqrt{D}}{12W a^2 u^3}, \quad (2.109)$$

где использовано обозначение:

$$D = 4W^4 - 4W^3[a^2 u^2 + 22] + W^2[a^4 u^4 + 44a^2 u^2 + 180] - 8W[5a^2 u^2 + 14] + 16. \quad (2.110)$$

Для выполнения принципа соответствия и предельного перехода решений уравнения (2.109) к выражениям для радиусов круговых орбит в пространстве Рейснера-Нордстрема, при $a \rightarrow 0$, в уравнении (2.109) следует выбрать знак плюс перед слагаемым, содержащем квадратный корень.

Рассмотрим решение этого уравнения в одном из наиболее интересных случаев, когда сингулярность пространства-времени коллапсара окружена двукратно вырожденным горизонтом. В пространстве-времени Рейснера-Нордстрема аналогом этого случая является коллапсар с критическим за-

рядом $Q = M$, имеющий горизонт с радиусом M , и устойчивую круговую орбиту с радиусом $4M$.

Выясним возможность существования аналогичной круговой орбиты у критически заряженного коллапсара в пространстве-времени Эйнштейна-Борна-Инфельда. Для этого выполним численное решение уравнения (2.109) для значения заряда $Q = Q'$ максимально допустимого при заданной массе M . На Рисунке 11 приведена, полученная зависимость, радиуса круговой орбиты от массы коллапсара.

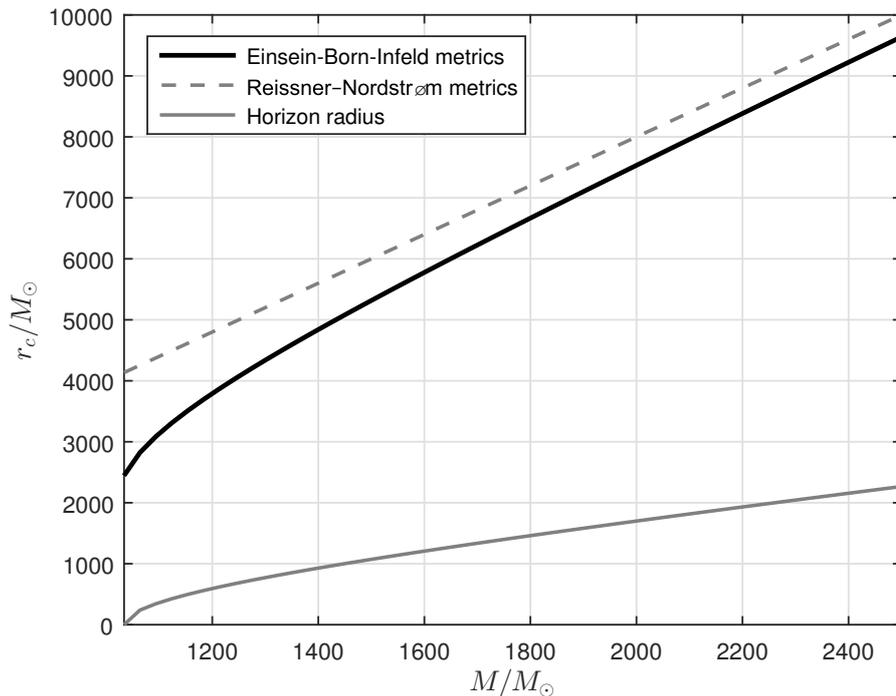


Рис. 11: Зависимость радиуса круговой орбиты частиц и радиуса горизонта от массы коллапсара при критическом значении его заряда. Для наглядности, радиус орбиты и масса коллапсара нормированы на массу Солнца. Сплошная серая линия на этом рисунке соответствует зависимости радиуса двукратно вырожденного горизонта от массы коллапсара. Сплошная черная линия представляет радиус устойчивой круговой орбиты массивной частицы в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда, а пунктирная линия соответствует радиусу аналогичной орбиты в пространстве-времени Рейснера-Нордстрема.

Как следует из результатов численного решения, с ростом массы коллапсара радиус устойчивой круговой орбиты в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда асимптотически приближается к соответствующему радиусу в

решении Рейснера-Нордстрема. Однако, между этими двумя вариантами пространства-времени имеется существенное различие при массах коллапсара, близких к $M \sim a/2 \sim 1038M_{\odot}$, для которой в пространстве-времени Эйнштейна-Борна-Инфельда реализуется случай чёрной точки, не имеющий аналога в пространстве Рейснера-Нордстрема. Радиус круговой орбиты массивных частиц в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда, при таких значениях параметров массы коллапсара и заряда, примерно в 1.5 раза ближе к сингулярности, чем в пространстве-времени Рейснера-Нордстрема, что может приводить к увеличению выделения энергии при аккреции вещества на коллапсар.

В завершение покажем, что пространство-время коллапсара в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда допускает существование круговых орбит с нулем функции $f(u)$ четвертого порядка. В этом случае скорость приближения асимптотических траекторий к таким орбитам будет выше, чем к орбитам, радиусы которых являются нулями функции $f(u)$ меньшей кратности. Для существования таких круговых орбит следует потребовать, чтобы кроме предыдущих условий для функции f дополнительно выполнялось требование $f'''(u_c) = 0$, совместно с остальными условиями, приводящее к соотношению между обратным радиусом орбиты u_c и зарядом Q :

$$\begin{aligned} & \{8W^6 - 4W^5(2a^2u^2 + 49) + 2W^4(a^4u^4 + 48a^2u^2 + 68) + \\ & + W^3(a^4u^4 - 68a^2u^2 + 212) - 8W^2(7a^2u^2 + 22) + \\ & + 16W(2a^2u^2 - 1) + 16(a^2u^2 + 2)\} \{2[1 - W] + a^2u^2\} \times \\ & \times \{[5W^2 - 2W - 2][2W^4 - W^3(a^2u^2 - 30) - 40W^2 + 8]\}^{-1} = 0, \end{aligned} \quad (2.111)$$

а также, предоставляющее возможность определить массу, при которой корень u_c четвертого порядка существует:

$$\begin{aligned} 2M = & \left\{ 4W^5 - 2W^4[a^2u^2 - a^2u^3I(u) - 8] + W^3[30a^2u^3I(u) + \right. \\ & + 22a^2u^2 - a^4u^5I(u) - 44] - 4W^2[10a^2u^3I(u) + 7a^2u^2 - 6] + \\ & \left. + 8a^2u^2[1 + uI(u)] \right\} \times \left\{ a^2u^3[2W^4 - W^3(a^2u^2 - 30) - 40W^2 + 8] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Исключение выражения для $u = u_c$ из обоих соотношений (2.111)-(2.112)

приводит к зависимости $M = M(Q)$, необходимой для реализации четырехкратно вырожденной устойчивой орбиты.

Результаты исследования описанные в этом разделе показывают, как нелинейная электродинамика влияет на пространственно-временную структуру электрически заряженного коллапсара в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда.

Благодаря нелинейным свойствам электродинамики Борна-Инфельда структура пространства-времени коллапсара приобрела новые необычные свойства, которые отличают ее от пространства-времени Рейснера-Нордстрема. Была установлена возможность монотонного убывания метрической функции g_{00} в решении (2.51) при всех значениях радиальной координаты. Аналогичное свойство в метрике Рейснера-Нордстрема отсутствует. Исследованы условия изменения числа горизонтов, окружающих коллапсар Эйнштейна-Борна-Инфельда, в частности, определены значения параметров, приводящие к исчезновению горизонта Коши. Установлена возможность существования черных точек, окруженных двукратно вырожденным горизонтом, для которых обнаружено новое необычное свойство – регулярность инвариантов тензора кривизны эффективного пространства-времени для фотонов, при сохранении сингулярности аналогичных инвариантов для эйнштейновского пространства-времени. Подробно исследованы особенности движения массивных и безмассовых частиц; вычислена зависимость радиуса тени черной дыры Эйнштейна-Борна-Инфельда от её заряда. Установлены условия существования круговых орбит с различной степенью вырождения для массивных частиц и получены уравнения для численного определения радиусов таких орбит при заданных параметрах коллапсара. Полученные результаты открывает новые перспективы для исследования физики черных дыр в моделях нелинейной электродинамики вакуума аналогично теории Борна-Инфельда, основанных на принципах регуляризации характеристик поля.

2.6 Цилиндрически-симметричные самосогласованные полевые конфигурации в моделях нелинейной электродинамики

Электроракуумные решения уравнений Эйнштейна-Максвелла представляют значительный интерес для современной теории гравитации и космологии в связи с их возможными применениями для описания компактных астрофизических объектов или ранних стадий эволюции Вселенной. Один из наиболее интересных типов электроракуумных решений описывает самогравитирующую конфигурацию электромагнитного поля без источника, называемую геонем [199].

Цилиндрически симметричное статическое решение уравнений Эйнштейна-Максвелла, описывающее геон, как набор электрических или магнитных силовых линий, связанных собственным гравитационным взаимодействием, было получено М. А. Мелвином [200]. В настоящее время известен ряд обобщений для решения Мелвина, например, в [201] решение Мелвина было распространено на случай ненулевой космологической постоянной, в [202] предложено обобщение этого решения для Теории струн. Довольно интересное приложение решения Мелвина было найдено для описания намагниченных черных дыр [203–206].

В работе [207] получено решение уравнения Дирака в пространстве-времени Мелвина, которое может быть применено для описания фермионов в экстремально намагниченных нейтронных звездах; неабелево решение, соответствующее черной дыре с «волосами», пространство-время которой имеет асимптотику к фону Мелвина, представлено в [208]. В работе [209] получено вращающееся решение типа Мелвина для идеальной жидкости с круговым электрическим током, а в [210] предложено многомерное обобщение, связанное со скалярным полем.

Для ряда эмпирических моделей электродинамики, основанных на требовании регуляризации энергии поля точечных источников, известна точная форма Лагранжиана, что позволяет рассматривать задачу поиска обобщения решения Мелвина на случай таких моделей. Нами были предложены интегрирующие комбинации [111], позволяющие привести уравнения гравитации Эйнштейна и нелинейной электродинамики к относительно

простым обыкновенным дифференциальным уравнениям. Интегрирование этих уравнений можно проводить не только с граничным условием, асимптотическим к решению Мелвина, что потенциально позволяет получать новые решения с заданным поведением на пространственной бесконечности. Также, в отличие от [211], мы не будем требовать наличия регулярной оси симметрии и плоской или «струноподобной» асимптотики на пространственной бесконечности. Напротив, в контексте данного исследования представляется интересным рассмотреть сингулярные полевые конфигурации в моделях нелинейной электродинамики вакуума с регуляризирующими свойствами.

Построим уравнения для гравитационного и электромагнитного поля в случае произвольной Лоренц-инвариантной модели нелинейной электродинамики вакуума с Лагранжианом \mathcal{L} , в отсутствие источников, с учетом цилиндрической симметрии полевой конфигурации:

$$H_{ik} = R_{ik} - \frac{R}{2}g_{ik} = 8\pi T_{ik}, \quad (2.113)$$

$$\partial_n F_{ik} + \partial_k F_{ni} + \partial_i F_{kn} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{-g} Q^{kn}}{\partial x^n} = 0, \quad (2.114)$$

где тензор энергии-импульса T_{ik} и вспомогательный тензор Q^{kn} выражаются через вторую $F_{ik}^{(2)} = F_{im}F_{.k}^{.m}$ и третью $F_{(3)}^{kn} = F^{kl}F_{lm}F^{mn}$ степени тензора электромагнитного поля:

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{ik}} = 4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right] F_{ik}^{(2)} + \left[(2J_4 - J_2^2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} - \mathcal{L} \right] g_{ik}, \quad (2.115)$$

$$Q^{kn} = 4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} F^{kn} + 8 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} F_{(3)}^{kn}, \quad (2.116)$$

а также использованы стандартные обозначения g для определителя метрического тензора и $J_2 = F_{ik}F^{ki}$, $J_4 = F_{ik}F^{kl}F_{lm}F^{mi}$ для инвариантов тензора электромагнитного поля.

В дальнейшем мы сосредоточимся на изучении самоподдерживающихся полевых конфигураций с цилиндрической симметрией, поэтому будем учитывать, что в цилиндрических координатах статические осесимметричные

решения уравнений Эйнштейна задаются метрикой Вейля [212, 213]:

$$ds^2 = e^{2\alpha} dt^2 - e^{2\beta} [d\rho^2 + dz^2] - \rho^2 e^{-2\gamma} d\varphi^2, \quad (2.117)$$

где в общем случае метрические функции α , β , γ зависят от координат ρ и z , однако мы ограничимся частным случаем, предполагая зависимость только от радиальной координаты ρ . Для большего удобства в вычислениях, будем использовать физическое представление для компоненты тензора электромагнитного поля:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_\rho e^{\alpha+\beta} & \rho E_\varphi e^{\alpha-\gamma} & E_z e^{\alpha+\beta} \\ -E_\rho e^{\alpha+\beta} & 0 & -\rho B_z e^{\beta-\gamma} & B_\varphi e^{2\beta} \\ -\rho E_\varphi e^{\alpha-\gamma} & \rho B_z e^{\beta-\gamma} & 0 & -\rho B_\rho e^{\beta-\gamma} \\ -E_z e^{\alpha+\beta} & -B_\varphi e^{2\beta} & \rho B_\rho e^{\beta-\gamma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.118)$$

где E_ρ , E_φ , E_z и B_ρ , B_φ , B_z – координатные компоненты электрического и магнитного поля. В этом случае, инварианты электромагнитного поля можно вычислить с помощью евклидовой метрики, что значительно упрощает выражения для них. Для выбранной формы интервала пространства-времени левая часть уравнений Эйнштейна принимает вид:

$$\begin{aligned} H_0^0 &= e^{-2\beta} \left[\frac{2\gamma'}{\rho} - \gamma'^2 + \gamma'' - \beta'' \right], \\ H_1^1 &= e^{-2\beta} \left[\alpha'\gamma' + \beta'\gamma' - \alpha'\beta' - (\alpha' + \beta')/\rho \right], \\ H_2^2 &= -e^{-2\beta} \left[\alpha'' + \beta'' + \alpha'^2 \right], \\ H_3^3 &= e^{-2\beta} \left[\alpha'\beta' - \alpha'' - \alpha'^2 + (\alpha' - \beta')\gamma' + \gamma'' - \gamma'^2 + (\beta' - \alpha' + 2\gamma')/\rho \right], \end{aligned} \quad (2.119)$$

где штрихом обозначена производная по радиальной координате.

В дальнейшем, за исключением случая модели конформно-инвариантной нелинейной электродинамики вакуума (CNED), мы сосредоточимся на поиске решений уравнений (2.113) и (2.114) только для магнитного поля ($\mathbf{B} \neq 0$, $\mathbf{E} = 0$ и, как следствие, $J_2^2 = 2J_4$). Как следует из [214], существование самосогласованных решений этих уравнений возможно только для определенных конфигураций полей, а именно: радиальных, азимутальных и продольных.

Для радиальной конфигурации поля $B_\rho \neq 0$, $B_\varphi = 0$, $B_z = 0$, тензор энергии-импульса (2.115) имеет дополнительную симметрию, выражающуюся в равенстве некоторых его компонент между собой:

$$T_{0\cdot}^{\cdot 0} = T_{1\cdot}^{\cdot 1} = Y, \quad T_{2\cdot}^{\cdot 2} = T_{3\cdot}^{\cdot 3} = Y - B_\rho^2 X, \quad (2.120)$$

где для краткости введены обозначения для следующих коэффициентов

$$Y = -\mathcal{L} \Big|_{J_2^2=2J_4}, \quad X = 4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right] \Big|_{J_2^2=2J_4}. \quad (2.121)$$

Для азимутального магнитного поля $B_\rho = 0$, $B_\varphi \neq 0$, $B_z = 0$, соотношение между компонентами тензора энергии-импульса изменяется:

$$T_{0\cdot}^{\cdot 0} = T_{2\cdot}^{\cdot 2} = Y, \quad T_{1\cdot}^{\cdot 1} = T_{3\cdot}^{\cdot 3} = Y - B_\varphi^2 X. \quad (2.122)$$

И, наконец, для наиболее интересного случая продольного поля $B_\rho = 0$, $B_\varphi = 0$, $B_z \neq 0$ дополнительная симметрия тензора энергии-импульса следующая:

$$T_{0\cdot}^{\cdot 0} = T_{3\cdot}^{\cdot 3} = Y, \quad T_{1\cdot}^{\cdot 1} = T_{2\cdot}^{\cdot 2} = Y - B_z^2 X. \quad (2.123)$$

Для получения решений уравнений нелинейной электродинамики и гравитации во всех трех вышеперечисленных случаях необходимо найти интегрирующие комбинации для метрических функций α , β , γ , подстановка которых в уравнения (2.113) обеспечивает согласованность дополнительных симметрий для правой и левой частей этих уравнений. Это означает, что симметрия $T_{a\cdot}^{\cdot b}$, скажем, $T_{1\cdot}^{\cdot 1} = T_{2\cdot}^{\cdot 2}$ требует $H_{1\cdot}^{\cdot 1} = H_{2\cdot}^{\cdot 2}$, и для выполнения этого условия необходимо найти некоторую связь между метрическими функциями. Прежде чем перейти к поиску таких соотношений в общем случае, рассмотрим более подробно случай продольного магнитного поля для специальной модели, называемой конформно-инвариантной электродинамикой (CNED), для которой можно получить аналитическое решение, аналогичное геону Мелвина.

2.6.1 Модификация решения Мелвина для CNED

Модели конформно-инвариантной электродинамики основаны на принципе наибольшего соответствия ряду свойств электродинамики Максвелла. Как и электродинамика Максвелла, модели CNED имеют нулевой след тензора энергии-импульса и характеризуются теми же групповыми симметриями, что и теория Максвелла, но в отличие от нее предсказывают двулучепреломление электромагнитных волн в вакууме. Еще одним преимуществом CNED является отсутствие размерного параметра, необходимого для описания нелинейности в других моделях, таких как электродинамика Борна-Инфельда. Модели CNED и их особенности будут подробно рассмотрены нами в разделе 5.

В общем случае Лагранжиан модели конформно-инвариантной электродинамики может быть представлен в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{J_2}{16\pi} W(\eta), \quad (2.124)$$

где W произвольная функция безразмерного отношения инвариантов тензора электромагнитного поля $\eta = J_2/\sqrt{2J_4}$, принимающего значения от $\eta = -1$ для чисто магнитного поля, до $\eta = 1$ для чисто электрического поля. При $W(\eta) \equiv 1$, выполняется переход к электродинамике Максвелла.

Рассмотрим электрическое поле с напряженностью E и магнитное поле с индуктивностью B , направленное вдоль оси z . Для такой, продольной, конфигурации уравнения электромагнитного поля (2.114) легко интегрируются и приводят к выражениям:

$$\begin{aligned} e^{\alpha+\beta} E &= E_0, \\ e^{\alpha+\beta} B \left[W + \eta W' \left(\frac{E^2(E^2 + B^2)}{E^4 + B^4} \right) \right] &= B_0, \end{aligned} \quad (2.125)$$

где E_0 и B_0 – константы интегрирования, и здесь и далее штрих у модельной функции W соответствует производной по ее аргументу η . Можно заметить, что выражение в квадратных скобках второго уравнения в (2.125) можно полностью выразить через отношение $\lambda = B/E$, благодаря чему отношение индукции магнитного поля к напряжённости электрического поля оказывается постоянно в любой точке пространства. Это легко проверить,

если мы разделим второе уравнение в (2.125) на первое уравнение и воспользуемся параметром λ в качестве новой переменной

$$\lambda \left[W(\eta) + \frac{1 - \lambda^4}{(1 + \lambda^4)^{3/2}} W'(\eta) \right] = \lambda_0, \quad (2.126)$$

где $\lambda_0 = B_0/E_0$, а аргумент модельной функции $W(\eta)$ должен быть выражен через λ с помощью соотношения: $\eta = (1 - \lambda^2)/\sqrt{1 + \lambda^4}$.

Уравнение (2.126) подразумевает, что для каждой модели конформно-инвариантной нелинейной электродинамики с заданной функцией W отношение λ определяется только константой интегрирования λ_0 и не зависит от координат.

Для определения явного вида электрического и магнитного поля необходимо дополнить алгебраические уравнения (2.125) гравитационными уравнениями для метрических функций, которые можно получить с использованием (2.113), (2.119) и тензора энергии-импульса (2.115).

Учтем, что для рассматриваемой конфигурации поля дополнительная симметрия компонент тензора энергии-импульса такая же, как и для продольного чистого магнитного поля (2.123), а сами компоненты имеют вид:

$$\begin{aligned} T_{0\cdot}^{\cdot 0} = T_{3\cdot}^{\cdot 3} &= \frac{E^2}{8\pi} \left[W + \frac{2\lambda^2(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^4)^{3/2}} W' \right] (1 + \lambda^2), \\ T_{1\cdot}^{\cdot 1} = T_{2\cdot}^{\cdot 2} &= -\frac{E^2}{8\pi} \left[W + \frac{2\lambda^2(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^4)^{3/2}} W' \right] (1 + \lambda^2). \end{aligned} \quad (2.127)$$

Для обеспечения соответствия правой и левой частей уравнений Эйнштейна необходимо ввести дополнительные ограничения на метрические функции. Используя (2.119), можно установить, что симметрия левой части уравнений (2.113), соответствующая симметрии компонент (2.127), будет обеспечена, если принять:

$$\alpha = \beta, \quad \gamma = \ln(c_0 \rho / \alpha'), \quad (2.128)$$

где c_0 – произвольная константа, которую можно использовать для нормировки координат, а штрих над метрической функцией α означает производную по ρ .

В этом случае, в силу закона сохранения энергии-импульса, существует только одно независимое уравнение Эйнштейна, более удобная форма записи которого:

$$H_{1.}^1 = -e^{-2\alpha}(2\alpha'' + \alpha'^2) = 8\pi T_{1.}^1 = -E^2 \left[W + \frac{2\lambda^2(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^4)^{3/2}} W' \right] (1+\lambda^2). \quad (2.129)$$

Используя первое из соотношений (2.125) для электрического поля, уравнение (2.129) можно привести к виду автономного уравнения:

$$2\alpha'' + \alpha'^2 = \frac{4}{R^2} e^{-2\alpha}, \quad (2.130)$$

решение которого $\alpha = \ln(1 + \rho^2/R^2)$ отличается от классического решения Мелвина только выбором константы нормировки R для радиальной координаты

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{4} E_0^2 (1 + \lambda^2) \left[W + \frac{2\lambda^2(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^4)^{3/2}} W' \right]. \quad (2.131)$$

Таким образом, геоноподобное решение, соответствующее продольным электрическому и магнитному полю в произвольной модели CNED, по форме совпадает с классическим решением Мелвина, несмотря на существенную нелинейность этих моделей. Однако, для ряда моделей отличных от CNED, нелинейные свойства могут проявляться иначе, и интересно выяснить насколько в этом случае решения будут отличаться от геона Мелвина. Поэтому в следующем разделе мы перейдем к описанию конфигураций магнитного поля для целого ряда других моделях.

2.6.2 Самоподдерживающаяся продольная конфигурация магнитного поля в нелинейной электродинамике вакуума

Рассмотрим продольное магнитное поле $B_\rho = B_\varphi = 0$, $B_z \neq 0$, $\mathbf{E} = 0$ в произвольной модели нелинейной электродинамики. В этом случае легко получить первый интеграл для уравнений электромагнитного поля (2.114), который имеет следующий вид

$$e^{\alpha+\beta} B_z \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} - 2B_z^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right] = \frac{B_0}{16\pi}, \quad (2.132)$$

где B_0 – константа интегрирования с размерностью индукции магнитного поля. Для обеспечения симметрии правой и левой частей уравнений Эйнштейна в случае продольного магнитного поля (2.123), следует принять соотношение между метрическими функциями аналогичное (2.128), в результате чего выражения (2.113), (2.119) и (2.123) приводят только к одному нетривиальному линейно независимому уравнению:

$$2\alpha'' + \alpha'^2 = 8\pi e^{2\alpha}[B_z^2 X - Y]. \quad (2.133)$$

Проведем нормировку для индукции магнитного поля $b = B_z/B_0$, координаты $r = \rho/R$, где $R = 2/B_0$, а также для коэффициентов, зависящих от выбора модели нелинейной электродинамики $U = 4\pi X$ и $V = 4\pi Y/B_0^2$, в терминах которых уравнения (2.133) и (2.132) можно представить в виде:

$$2\alpha'' + \alpha'^2 = 8e^{2\alpha}[Ub^2 - V], \quad e^{2\alpha}Ub = 1, \quad (2.134)$$

где штрих означает производную по нормированной координате r .

Легко проверить, что для электродинамики Максвелла $U = 1$, $V = b^2/2$, и в этом случае общее решение уравнений (2.134) можно получить в аналитическом виде:

$$\alpha = \ln\left[\frac{c_1^2(r + c_2)^2 + 16}{4c_1}\right], \quad b = \frac{16c_1^2}{[c_1^2(r + c_2)^2 + 16]^2}, \quad (2.135)$$

где c_1 и c_2 – константы интегрирования, частный выбор которых $c_1 = 4$ и $c_2 = 0$, приводит к классическому представлению решения Мелвина: $\alpha = \ln(1 + r^2)$ и $b = 1/(1 + r^2)^2$.

Выполним поиск решений уравнений (2.134) для некоторых моделей нелинейной электродинамики вакуума, которые приводят к регуляризации поля точечных зарядов. Для таких моделей, как электродинамика Борна-Инфельда [6], логарифмическая [48], экспоненциальная [44] и рациональная электродинамика [46], коэффициенты для уравнений (2.134) представлены в Таблице 6.

Ввиду существенной нелинейности уравнения (2.134) были решены численно. В качестве граничного условия, при больших значениях $r \rightarrow \infty$, было принято требование соответствия решений этих уравнений и реше-

Модель	Лагранжиан	U	V
Электродинамика Максвелла	$\mathcal{L} = \frac{J_2}{16\pi}$	1	$\frac{b^2}{2}$
Электродинамика Борна-Инфельда	$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{1 - \frac{a^2}{2} J_2 - \frac{a^4}{4} J_4 + \frac{a^4}{8} J_2^2} - 1 \right]$	$\frac{1}{\sqrt{1 + k^2 b^2}}$	$\frac{1}{k^2} (\sqrt{1 + k^2 b^2} - 1)$
Логарифмическая электродинамика	$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi a^2} \ln \left(1 - \frac{a^2}{2} J_2 \right)$	$\frac{1}{1 + k^2 b^2}$	$\frac{1}{2k^2} \ln(1 + k^2 b^2)$
Экспоненциальная электродинамика	$\mathcal{L} = \frac{J_2}{16\pi} \left[\exp \left(\frac{a^2}{2} J_2 \right) - 1 \right]$	$\exp(-k^2 b^2)$	$-\frac{1}{2k^2} (\exp(-k^2 b^2) - 1)$
Рациональная электродинамика	$\mathcal{L} = \frac{J_2}{16\pi \left(1 - \frac{a^2}{2} J_2 \right)^p}$	$\frac{1 + (1 - p)k^2 b^2}{(1 + k^2 b^2)^{p+1}}$	$\frac{b^2}{2(1 + k^2 b^2)^p}$

Таблица 6: Коэффициенты U и V для некоторых моделей нелинейной электродинамики вакуума. Параметр модели a имеет размерность обратной индукции магнитного поля, а p безразмерен (частный случай при $p = 1$ рассмотрен в [46]). Во всех выражениях безразмерный параметр $k = aB_0$ связан с постоянной интегрирования B_0 .

ния (2.135) для электродинамики Максвелла.

На Рисунке 12а представлена зависимость индукции магнитного поля от координаты (сплошная линия), полученная в результате численного интегрирования для электродинамики Борна-Инфельда при значении параметра $k = aB_0 = 1.345$. Штрихованной линией на этом рисунке показано решение Мелвина (2.135) при $c_1 = 4$ и $c_2 = -3$, которое было принято в качестве асимптотического граничного условия.

В силу нелинейных особенностей электродинамики Борна-Инфельда, полученное решение имеет выраженную резонансную форму, соответствующую концепции геонов как частицеподобных решений.

На Рисунке 12b показано «сжатие» солитоноподобного решения для индукции магнитного поля при возрастании параметра k , для электродинамики Борна-Инфельда. Плоскость с $k = 0$, залитая зеленым цветом, соответствует решению Мелвина. С ростом этого параметра происходит не только резкое увеличение амплитуды, но и смещение максимума в сторону увеличения значений радиальной координаты относительно положения

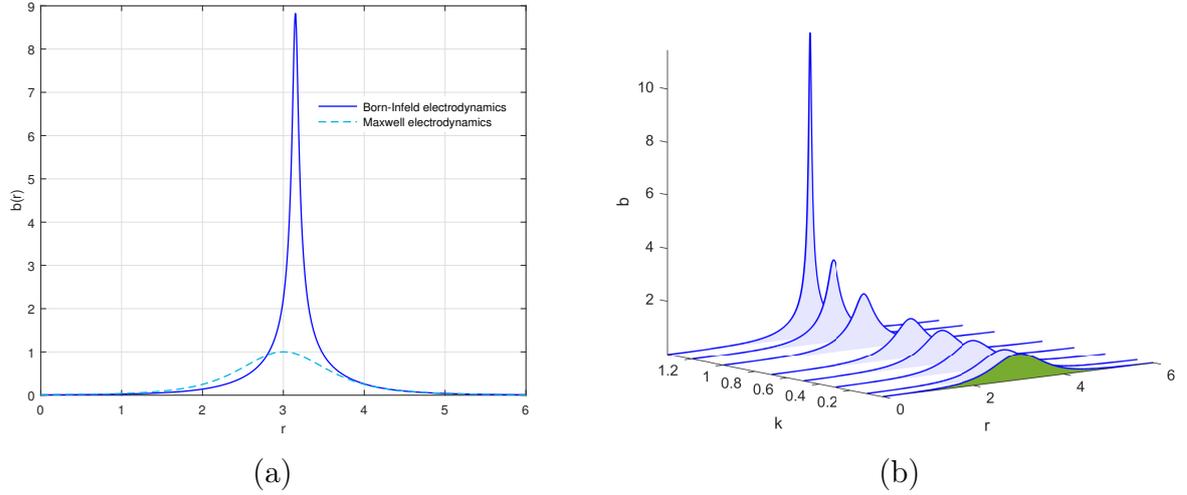


Рис. 12: а) Нормированная индукция магнитного поля как функция радиальной координаты r . б) Эволюция решения для продольного магнитного поля при изменении параметра k в электродинамике Борна-Инфельда.

максимума в решении Мелвина. Интересно отметить, что для других моделей, представленных в Таблице 6, солитоноподобный характер решения уравнений (2.134) сохраняется, отличаясь от представленного на Рисунке 12а лишь количественно. Перейдем к рассмотрению радиальной конфигурации поля.

2.6.3 Самоподдерживающаяся радиальная конфигурация магнитного поля в нелинейной электродинамике вакуума

Предположим, что только радиальная составляющая магнитного поля отлична от нуля: $B_\rho \neq 0$, $B_\varphi = B_z = 0$, $\mathbf{E} = 0$. В этом случае нетривиальные уравнения для электромагнитного поля являются линейными (2.114) и могут быть легко проинтегрированы, что приводит к выражению, которое не зависит явно от выбора модели нелинейной электродинамики:

$$e^{\beta-\gamma} \rho B_\rho = B_0, \quad (2.136)$$

где B_0 , как и ранее, – постоянная интегрирования. Для обеспечения дополнительной симметрии правой и левой частей уравнений Эйнштейна, которая следует из (2.120) для радиальной конфигурации поля, необходимо

принять следующие соотношения между метрическими функциями:

$$\alpha = \ln(c_3\beta'), \quad \gamma = \ln(c_4\rho) - \beta, \quad (2.137)$$

где штрих обозначает производную по координате ρ , а константы c_3 и c_4 могут быть использованы для нормировки.

Для таких соотношений между метрическими функциями уравнения Эйнштейна (2.113), с учетом выражений (2.119) и (2.120), могут быть сведены к одному нетривиальному независимому уравнению:

$$2\beta'' + \beta'^2 = -8\pi e^{2\beta}Y. \quad (2.138)$$

Полезно выполнить нормировку в уравнениях (2.136) и (2.138), аналогично тому как это было сделано для продольного магнитного поля в предыдущем разделе, в результате чего эти уравнения примут вид:

$$2\beta'' + \beta'^2 = -8e^{2\beta}V, \quad e^{2\beta}b = 1, \quad (2.139)$$

где $b = B_\rho/B$, производные вычислены по координате $r = \rho/R$ при $R = 2/B_0$, а коэффициенты V для различных моделей нелинейной электродинамики вакуума приведены в Таблице 6.

Решение уравнений (2.139) для электродинамики Максвелла имеет вид:

$$\beta = \ln \left[\frac{c_5^2(r + c_6)^2 - 16}{4c_5} \right], \quad b = \frac{16c_5^2}{[c_5^2(r + c_6)^2 - 16]^2}, \quad (2.140)$$

где c_5 и c_6 – постоянные интегрирования, которые, в отличие от продольного случая (2.135), можно выбрать так, что индукция магнитного поля будет сингулярной и будет стремиться к бесконечности для двух значений радиальной координаты $r_h = -c_6 \pm 4/|c_5| \geq 0$.

Было бы интересно использовать такое максвелловское решение, с двумя сингулярностями, в качестве асимптотического граничного условия при $r \rightarrow \infty$ для уравнений (2.139) в случае, когда рассматриваются нелинейные модели электродинамики, и выяснить, можно ли подавить сингулярности за счет регуляризующих свойств этих моделей. Результат численного интегрирования уравнений (2.139) для электродинамики Борна-Инфельда при

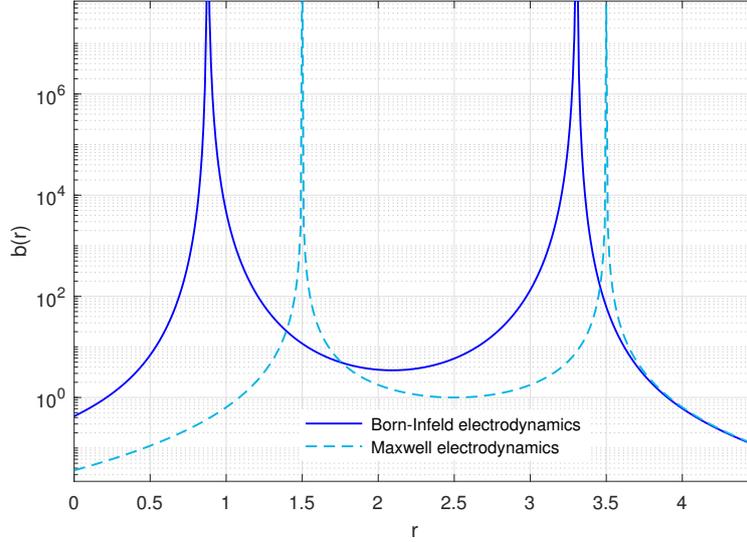


Рис. 13: Нормированная индукция магнитного поля как функция r . В качестве граничного условия использовались выражения (2.140) с константами $c_5 = 4$ и $c_6 = -2.5$.

$k = 1$, представленный на Рисунке 13, свидетельствует о том, что сингулярности в решении сохраняются (следует обратить внимание на логарифмическую шкалу на графике). Для других моделей нелинейной электродинамики, перечисленных в Таблице 6, решение отличается от представленного только количественно.

2.6.4 Самоподдерживающаяся азимутальная конфигурация магнитного поля в нелинейной электродинамике вакуума

Рассмотрим последнюю возможную конфигурацию, соответствующую азимутальному магнитному полю $B_\rho = B_z = 0$, $B_\varphi \neq 0$, $\mathbf{E} = 0$. Введем ограничения для метрических функции, позволяющие соблюсти симметрию (2.122):

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \ln(c_7\alpha')), \quad \gamma = \ln(c_8\rho) - \alpha, \quad (2.141)$$

где c_7 и c_8 – постоянные, а штрих обозначает производную по ρ . Нетривиальное уравнение для метрической функции, следующее из уравнений Эйнштейна, с учетом (2.122) и (2.141), принимает вид

$$\alpha'' + 2\alpha'^2 = 8\pi(\alpha'c_7)e^\alpha(B_\varphi^2X - Y), \quad (2.142)$$

в то время как уравнения электромагнитного поля (2.114) для азимутального случая приводят к выражению:

$$e^{2\alpha} X B_\varphi = B_0, \quad (2.143)$$

где B_0 – постоянная с размерностью индукции магнитного поля. Как и прежде, удобно выполнить нормировку, приняв $r = \rho/R$, где $R = c_7 = 2/B_0$, а определения для b , U , V сохранить такими же, как для радиальной и продольной конфигураций. Также довольно удобно ввести новую переменную для метрической функции $A = e^\alpha$, в терминах которой уравнения (2.142) и (2.143) примут вид:

$$AA'' + A'^2 = 8A^2A'(Ub^2 - V), \quad A^2Ub = 1, \quad (2.144)$$

где штрих обозначает производную по нормированной координате r , а коэффициенты U и V для моделей нелинейной электродинамики вакуума приведены в Таблице 6.

Очевидно, что одним из тривиальных решений этих уравнений является $A \equiv const$, что соответствует однородному магнитному полю. В случае электродинамики Максвелла $U = 1$ и $V = b^2/2$ первый интеграл уравнений (2.144) имеет вид $A'A + 4/A = c_9$, где c_9 – произвольная постоянная. Последующее решение для $A(r)$ можно получить аналитически, но оно имеет неявный вид, что затрудняет анализ его свойств. Поэтому ограничимся случаем $c_9 = 0$, для которого:

$$A = (c_{10} - 12r)^{1/3}, \quad b = \frac{1}{(c_{10} - 12r)^{2/3}}, \quad (2.145)$$

где c_{10} – постоянная интегрирования, в случае положительности которой индукция магнитного поля будет сингулярной. Интересно выяснить, можно ли подавить эту особенность в случае нелинейной электродинамики. Для этого мы используем (2.145) в качестве асимптотического граничного условия при $r \rightarrow \infty$ и выполним интегрирование уравнений (2.144) в случае нелинейной электродинамики. Результат численного решения этих уравнений для электродинамики Борна-Инфельда с различными значениями параметра k представлен на Рисунке 14. Как следует из результатов

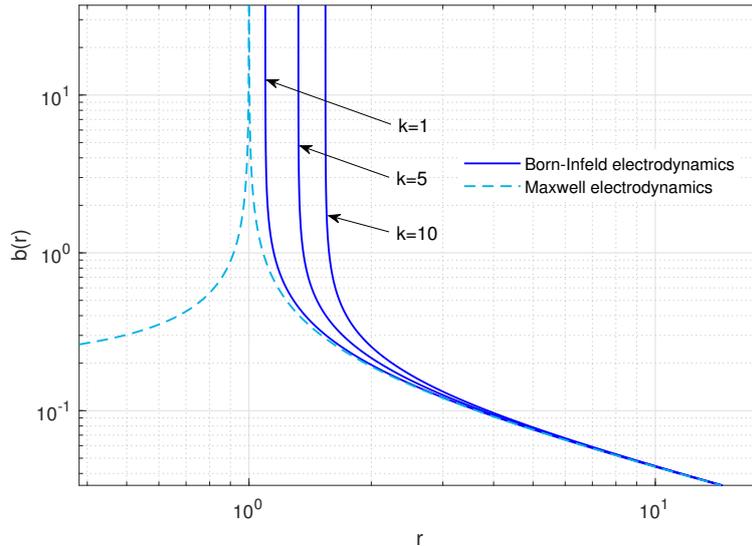


Рис. 14: Нормированная индукция магнитного поля как функция радиальной координаты r . Решение получено для электродинамики Борна-Инфельда с граничным условием (2.145) при $r \rightarrow \infty$ и константой $c_{10} = 12$.

моделирования, сингулярность не подавляется при увеличении параметра k , связанного с нелинейностью модели.

В завершение, перечислим основные новые результаты, полученные в этом разделе.

Для конформно-инвариантной нелинейной электродинамики исследован случай конфигурации с продольно направленным электрическим и магнитным полем. Показано, что в этом случае решение, описывающее конфигурацию поля, с точностью до изменения масштаба радиальной координаты совпадает с решением Мелвина при произвольном выборе модели CNED.

Для моделей нелинейной электродинамики с регуляризирующими свойствами, таких как электродинамика Борна-Инфельда, были исследованы конфигурации магнитного поля, зависящие только от радиальной координаты. Для произвольной Лоренц-инвариантной модели нелинейной электродинамики вакуума, получены уравнения для метрических функций цилиндрически симметричного пространства-времени и индукции магнитного поля, в случае продольных, радиальных и азимутальных магнитных полей.

Для продольного магнитного поля обнаружено существенное усиление солитоноподобных свойств решения в моделях нелинейной электродина-

мики, что более соответствует представлению о геоне, как о частицеподобном решении. В случае радиального и азимутального магнитных полей рассмотрена возможность регуляризации особенностей в решениях, возникающих в электродинамике Максвелла. Установлено, что рассмотренные модели нелинейной электродинамики, несмотря на то, что они основаны на условии регуляризации поля точечного заряда в плоском пространстве-времени, не приводят к устранению сингулярностей магнитного поля в описываемых самогравитирующих решениях. Это свойство нельзя отнести к недостаткам таких моделей, поскольку в некоторых случаях сингулярность решений может быть устранена дополнительной модификацией гравитационного сектора [59]. Изучение возможности такой регуляризации представляет значительный интерес для дальнейших исследований.

3 Распространение электромагнитных волн в поле пульсаров и магнетаров

В жестком рентгеновском и гамма-диапазоне открыто около нескольких сотен пульсаров и их временные и спектральные параметры изучены с хорошей точностью, однако, нет достаточно полных данных о поляризационных свойствах этих астрофизических объектов. Было проведено лишь ограниченное число космических экспериментов, которые могли бы изучить поляризацию в жестком излучении. В основном, это были наблюдения солнечных вспышек, такие как измерения поляризации на советских и российских спутниках ИнтерКосмос [215] и Коронас-Ф [216] и космической обсерватории RHESSI, которые дают принципиальную возможность поляризационного обнаружения гамма-излучения солнечных вспышек и космических гамма-всплесков (GRB).

Поляриметрия является мощным диагностическим инструментом для определенных явлений в радиоволновом и оптическом диапазонах энергии, связанных с космическими источниками. Однако наблюдательных данных для фотонов высоких энергий доступно немного: единственным значимым наблюдением в диапазоне энергий рентгеновского гамма-излучения на сегодняшний день является измерение линейной поляризационной составляющей $P = (19 \pm 1)\%$ 2.6 кэВ излучения Крабовидной туманности с помощью

поляриметра Брэгга на борту OSO-8 [217]. При более высоких энергиях телескопы жесткого рентгеновского и мягкого гамма-излучения, которые летали в космос в прошлом (например, COMPTEL CGRO), не были оптимизированы для поляриметрии, и их чувствительность к поляризации была низкой. В настоящее время активные миссии INTEGRAL IBIS [218] и SPI [219, 220], обеспечили некоторое улучшение, предоставив, в частности, умеренно значимые измерения $P = (28 \pm 6)\%$ (от 130 до 440 кэВ), [221] и $P = (47^{+19}_{-13})\%$ (от 200 до 800 кэВ), [222] для Крабовидной туманности.

На сегодняшний день рассматривается целый ряд проектов поляриметров/телескопов Комптона, некоторые из которых также предполагают регистрацию превращения фотонов в пары e^+e^- . В этих проектах, были рассмотрены различные технологии, такие как сцинтилляционные матрицы POGO, GRAPE, POLAR, микрополосковые детекторы Si или Ge ASTROGAM, MEGA или их комбинации (Si + LaBr₃ для GRIPS, Si + CsI(Tl) для TIGRE, полупроводниковые пиксельные детекторы CIPHER, жидкий ксенон LXeGRIT и газовая смесь CF₄), проекционные временные камеры (TPC), IXPE, XIPE, газовые пиксельные детекторы (GPD) на основе пропорциональных счетчиков.

Предполагается, что жесткое излучение астрофизических источников, включающих сильно намагниченные нейтронные звезды, должно быть поляризованным. Прежде всего, поляризация излучения может быть обусловлена геометрией излучающих областей, т. е. аккреционным диском (в случае нейтронной звезды в двойной системе) или крупномасштабной структурой магнитного поля излучающей области, а также высокой анизотропией первичных электронных пучков. Другая причина поляризации излучения может быть связана с влиянием на распространение рентгеновских и гамма-лучей физических условий в магнитосфере нейтронной звезды, в том числе влияние эффектов обусловленных нелинейностью электродинамики в вакууме, для которых критическим параметром является так называемое поле Швингера $B_c = m^2c^3/(e\hbar) = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс, выше которого нелинейные электродинамические эффекты в вакууме становятся существенными. Реализовать такие поля в наземных экспериментах в макроскопических объемах, не представляется возможным, поэтому астрофизические наблюдения являются принципиально важным способом проверки нелинейных

электродинамических моделей, тем более, что столь сильное магнитное поле не так уж и редко встречается во Вселенной.

Некоторые гамма-пульсары характеризуются магнитными полями, близкими к значению B_c , но для так называемых магнетаров оно может быть даже выше и достигать около 10^{15} Гс. В таких объектах в окрестностях сильно намагниченной нейтронной звезды существуют благоприятные условия для вакуумного двулучепереломления [223]. Этот эффект может иметь различные проявления. Одним из них является резкое увеличение линейной поляризации теплового излучения в изолированных нейтронных звездах [224], от уровня нескольких процентов до даже 100 процентов, в зависимости от геометрии наблюдения и механизма поверхностного излучения. В настоящее время это предсказание нелинейной электродинамики вакуума можно проверить, измерив степень поляризации теплового излучения изолированной нейтронной звезды.

Предсказания для высокой степени поляризации излучения пульсара, вызванной вакуумным двулучепереломлением, были получены в нескольких работах. Систематический анализ для теплового излучения можно найти в [225]. Широкодиапазонное описание излучения вращающихся пульсаров было получено в [226] и показало, что степень поляризации синхротронного излучения, испускаемого снаружи светового цилиндра, меньше 20%, в то время как для «изгибаемого» излучения может составлять до 40% – 60%.

В большинстве цитируемых работ используется эффективный эмпирический подход, который учитывает, что электромагнитное излучение с частотой ω на расстояниях $r < l_A = (90\pi c/\alpha\omega)(B_c/B)^2$ (где α – постоянная тонкой структуры) распространяется в магнитном поле B адиабатически, т. е. его поляризация мгновенно подстраивается под изменение напряженности магнитного поля. Для расстояний $l_B = B/|\mathbf{n} \cdot \nabla B|$ (где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении распространения) поляризация волны не может точно следовать за изменением магнитного поля, и во внешней области $r \gg l_B$ состояние поляризации замораживается. Учет области пространства, где поляризация волны существенно меняется, позволяет значительно сократить расчеты. В то же время, такое описание требует дополнительных допущений и соглашений. В дополнение к результатам перечисленных выше работ, мы предлагаем полностью аналитический подход, исследовании

геодезических лучей в эффективном пространстве-времени.

Первые наблюдения [227] оптической поляризации излучения изолированной нейтронной звезды RX J1856.5-3754 показали, что степень линейной поляризации теплового излучения составляет $16,43 \pm 5,26$ %. Как утверждается в этой работе, независимо от способа образования тепловых фотонов, столь высокое значение линейной поляризации в сигнале крайне трудно объяснить моделями, в которых не учитываются эффекты нелинейной электродинамики и двулучепреломления вакуума.

Двулучепреломление в вакууме и его влияние на спектр излучения и распространение фотонов в магнитосфере нейтронной звезды подробно обсуждалось в [228], где было показано, что вакуумные эффекты определяют поляризационные свойства нормальных мод электромагнитных волн, распространяющихся в окрестности нейтронной звезды. Также было показано, что магнитные вакуумные эффекты могут изменять спектральные параметры излучения, что должно приводить к особенностям в энергетических спектрах рентгеновских и гамма-пульсаров [229].

В целом, описание переноса поляризованного излучения в магнитосфере пульсара требует учета различных эффектов деполяризации, в основном вызванных влиянием плазмы магнитосферы. Сочетание вакуумного и плазменного двулучепреломления может существенно влиять на наблюдаемую поляризацию волны даже при низких значениях локального магнитного поля. Совместное рассмотрение этих факторов можно найти в [230]. Однако, как было отмечено в [224], для излучения с достаточно высокой частотой вакуумное двулучепреломление становится доминирующим, а плазма лишь пренебрежимо мало влияет на распространение волны. Диапазоны энергий фотонов, для которых плазменные эффекты подавляются вакуумным двулучепреломлением, зависят от плотности плазмы n_e и могут быть оценены как:

$$E_\gamma > 0.035\text{eV} \left(\frac{B}{10^{12}\text{G}} \cdot \frac{P}{1\text{s}} \cdot \frac{n_{GJ}}{n_e} \right), \quad (3.1)$$

где B индукция магнитного поля, P период вращения пульсара, а n_{GJ} параметр Голдрайха-Джулиана [231]. В дальнейшем мы предполагаем, что энергия фотона достаточна для удовлетворения условия доминирования вакуумных эффектов, поэтому мы можем обойти детали об источнике излучения и эффектах деполяризации, связанных с плазмой магнитосферы.

Нелинейно-электродинамические эффекты, обусловленные неоднородным и нестационарным магнитным полем нейтронной звезды, включая искривление лучей в дипольном магнитном поле, рождение электрон-позитронных пар, расщепление фотонов и модуляция рассеяния низкочастотных электромагнитных волн в магнитном поле наклонного ротатора обсуждаются в [232]. Квантово-электродинамические эффекты для аккреционных нейтронных звезд, в частности, одно- и двухфотонное комптоновское рассеяние в сильном магнитном поле и его воздействие на процессы излучения рассмотрены в [233].

Следует отметить, что пульсары обладают сильным гравитационным полем, которое также может влиять на процесс переноса электромагнитного излучения. Поскольку гравитационное поле может только искривлять траектории электромагнитных лучей, и не изменяет их поляризацию, в последующем гравитационные эффекты учитываться не будут.

Расчеты и моделирование нелинейного электродинамического воздействия магнитного поля пульсара на поляризацию электромагнитного импульса ранее проводились в частных случаях, с использованием различных систем координат [223, 234, 235]. Однако, в всех этих случаях координаты выбирались из соображений удобства и простоты аналитических вычислений, и часто не подходили для интерпретации результатов наблюдений. В результатах представленных в данной главе, во избежание этого недостатка, расчет влияния магнитного поля пульсара на поляризацию электромагнитного импульса выполнен в наиболее общем виде, при произвольном взаимном расположении источника излучения, пульсара и наблюдателя, что позволяет использовать результаты для обработки данных космических экспериментов. В разделе 3.1 будет описано распространение импульсов электромагнитного излучения жесткого рентгеновского и гамма-диапазонов в магнитном поле пульсара с учетом эффектов нелинейной электродинамики вакуума в параметризованном пост-максвелловском приближении, а в разделе 3.2 будут учтены поправки к этим эффектам, возникающие при учете электрического поля вращающегося пульсара.

3.1 Распространение импульсов жесткого электромагнитного излучения в магнитном поле пульсара

Рассмотрим пульсар радиусом R_N , магнитный дипольный момент \mathbf{M} которого жестко связан с «телом» пульсара, а начало прямоугольной системы координат совпадает с его центром. Направим оси системы координат таким образом, чтобы ось Z проходила через центр Земли, а направления осей X , Y будут уточнены позже. Будем считать, что в некоторый момент времени t_0 в точке $\mathbf{r}_s = \{x_s, y_s, z_s\}$ магнитосферы пульсара произошел короткий всплеск рентгеновского или гамма-излучения с произвольной поляризацией. Кроме того, пусть детектор позволяющий измерять поляризацию импульса жесткого излучения, расположен в точке $\mathbf{r}_d = \{x_d, y_d, z_d\}$, на спутнике в окрестности Земли. Результаты для некоторых частных случаев взаимного расположения источника излучения, пульсара и детектора были опубликованы нами в работах [102, 103], а общий случай был рассмотрен нами в [108].

Вычислим поляризационное состояние импульса, поступающего в детектор. Как было показано в [102, 234], распространение электромагнитного импульса во внешнем постоянном электромагнитном поле в параметризованной пост-максвелловской нелинейной электродинамике вакуума, может быть описано уравнениями для изотропной геодезической линии в эффективном пространстве-времени с метрическим тензором $G_{pm}^{(1,2)}$:

$$\frac{dk^i}{d\sigma} + G_{(1,2)}^{im} \left[\frac{\partial G_{mn}^{(1,2)}}{\partial x^p} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_{np}^{(1,2)}}{\partial x^m} \right] k^n k^p = 0, \quad (3.2)$$

где σ аффинный параметр, $k^n = dx^n/d\sigma$ изотропный четырехмерный волновой вектор:

$$G_{mi}^{(1,2)} \frac{dx^m}{d\sigma} \frac{dx^i}{d\sigma} = 0. \quad (3.3)$$

Метрический тензор $G_{pm}^{(1,2)}$ в пост-максвелловском приближении нелинейной электродинамики вакуума зависит от метрического тензора g_{im} псевдориманова пространства-времени, а также от тензора внешнего электромагнитного поля F_{ip} и от поляризации рассматриваемой электромагнитной

ВОЛНЫ:

$$G_{(1,2)}^{im} = g^{mi} + 4\eta_{1,2}\xi F^{in} F_n^m, \quad G_{mn}^{(1,2)} = g_{mn} - 4\eta_{1,2}\xi F_{mk} F_n^k, \quad (3.4)$$

где индексы «1» и «2» относятся к двум разным нормальным модам, со взаимноортогональной поляризацией. Индексы тензора электромагнитного поля F_{mk} в соотношении (3.4) можно поднять, используя метрический тензор псевдориманова пространства-времени g^{mi} . Компоненты тензора $G_{(1,2)}^{im}$ и $G_{mn}^{(1,2)}$ с постмаксвелловской точностью обратны друг другу:

$$G_{(1,2)}^{im} G_{mn}^{(1,2)} = \delta_n^i + O(\xi^2 F^{ip} F_{pm} F^{mk} F_{kn}). \quad (3.5)$$

Появление двух разных соотношений $G_{mn}^{(1)}$ и $G_{mn}^{(2)}$ для метрического тензора эффективного пространства-времени приводит к двулучепреломлению электромагнитной волны, поэтому при $\eta_1 \neq \eta_2$ произвольная электромагнитная волна расщепляется на две нормальные моды с взаимно ортогональной линейной поляризацией, которые распространяются во внешнем поле с неравными скоростями.

Поиск решения уравнений (3.2) и (3.3) значительно упрощается, если перейти от аффинного параметра σ , выбрав в качестве независимой переменной координату z . В этом случае уравнения (3.2) и (3.3) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{dz^2} &= \left\{ G_{(1,2)}^{3m} \frac{dx^0}{dz} - G_{(1,2)}^{0m} \right\} \left\{ \frac{\partial G_{nm}^{(1,2)}}{\partial x^p} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_{np}^{(1,2)}}{\partial x^m} \right\} \frac{dx^n}{dz} \frac{dx^p}{dz}, \quad (3.6) \\ \frac{d^2 x}{dz^2} &= \left\{ G_{(1,2)}^{3m} \frac{dx}{dz} - G_{(1,2)}^{1m} \right\} \left\{ \frac{\partial G_{nm}^{(1,2)}}{\partial x^p} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_{np}^{(1,2)}}{\partial x^m} \right\} \frac{dx^n}{dz} \frac{dx^p}{dz}, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \left\{ G_{(1,2)}^{3m} \frac{dy}{dz} - G_{(1,2)}^{2m} \right\} \left\{ \frac{\partial G_{nm}^{(1,2)}}{\partial x^p} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_{np}^{(1,2)}}{\partial x^m} \right\} \frac{dx^n}{dz} \frac{dx^p}{dz}, \\ G_{mn}^{(1,2)} \frac{dx^m}{dz} \frac{dx^n}{dz} &= 0. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Поскольку соотношение (3.7) является первым интегралом уравнений (3.6), то система уравнений (3.6) - (3.7) линейно зависима и одно из уравнений этой системы можно исключить из дальнейшего рассмотрения. В качестве такового удобнее выбрать первое уравнение системы (3.6). Оставшиеся уравнения позволяют найти уравнение лучей в виде зависимости $x = x(z)$,

$y = y(z)$ и закон распространения электромагнитного импульса вдоль этих лучей $x^0 = ct = x^0(z)$. Поскольку для каждой нормальной моды нас интересует только один луч, по которому импульс проходит из точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$ в точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}_d$, мы должны рассматривать соотношения

$$x^0(z_s) = ct_0, \quad x(z_s) = x_s, \quad y(z_s) = y_s, \quad x(z_d) = x_d, \quad y(z_d) = y_d \quad (3.8)$$

в качестве начальных условий для уравнений (3.6) - (3.7). Для поиска решений с пост-максвелловской точностью достаточно воспользоваться Максвелловским приближением для индукции магнитнодипольного поля пульсара: $\mathbf{B} = 3(\mathbf{M} \mathbf{r})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{M}/r^3$, поэтому нетривиальные компоненты тензора электромагнитного поля в выражении (3.4) будут иметь вид:

$$F_{21} = -F_{12} = B_z, \quad F_{13} = -F_{31} = B_y, \quad F_{32} = -F_{23} = B_x. \quad (3.9)$$

Пренебрегая влиянием гравитационного поля на кривизну превдориманова пространства-времени $g_{ik} = \text{diag}\{+1, -1, -1, -1, 1\}$, выполним подстановку компонент тензора электромагнитного поля (3.9) в выражения (3.4) для получения нетривиальных компонент метрического тензора эффективного пространства-времени:

$$G_{00}^{(1,2)} = 1, \quad (3.10)$$

$$G_{\alpha\beta}^{(1,2)} = -\delta_{\alpha\beta} \left\{ 1 + 4\xi\eta_{1,2} \left[\frac{3(\mathbf{M} \mathbf{r})^2}{r^8} + \frac{\mathbf{M}^2}{r^6} \right] \right\} +$$

$$+ 4\xi\eta_{1,2} \left[\frac{9(\mathbf{M} \mathbf{r})^2}{r^{10}} x_\alpha x_\beta + \frac{M_\alpha M_\beta}{r^6} - \frac{3(\mathbf{M} \mathbf{r})}{r^8} (M_\alpha x_\beta + x_\alpha M_\beta) \right],$$

где индексы $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ принимают пространственные значения, кроме того $x_\alpha = \{-x, -y, -z\}$, $M_\alpha = \{-M_x, -M_y, -M_z\}$.

Получим решение уравнений (3.6)-(3.7) с начальными условиями (3.8). Используя выражения (3.10) запишем первый интеграл (3.7) в виде:

$$c^2 \left(\frac{dt}{dz} \right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dz} \right)^2 \left\{ 1 + 4\xi\eta_{1,2} \left[\frac{3(\mathbf{M} \mathbf{r})^2}{r^8} + \frac{\mathbf{M}^2}{r^6} \right] \right\} +$$

$$+\frac{4\xi\eta_{1,2}}{r^6}\left[\frac{3(\mathbf{M}\mathbf{r})}{r^2}\left(\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dz}\right)-\left(\mathbf{M}\frac{d\mathbf{r}}{dz}\right)\right]^2=0. \quad (3.11)$$

Выполнив подстановку компонент эффективного метрического тензора (3.10) в остальные линейно независимые уравнения системы (3.6) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dz^2} &= \eta_{1,2}\xi\left\{\left[\frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M}\mathbf{r})^2x^2z+\frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M}\mathbf{r})[9(\mathbf{M}\mathbf{r})z-z(14xM_x+8yM_y)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+(3x^2+8y^2)M_z\right]+\frac{12}{r^8}[z(\mathbf{M}^2+M_z^2)-9(\mathbf{M}\mathbf{r})M_z+(3xM_x+yM_y)M_z]\right\}\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \\ &\quad +\left[\frac{360}{r^{12}}(\mathbf{M}\mathbf{r})^2xyz-\frac{24}{r^{10}}(\mathbf{M}\mathbf{r})[3z(yM_x+xM_y)+5xyM_z]+\right. \\ &\quad \left.+\frac{24}{r^8}M_z[xM_y+yM_x]\right]\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\left(\frac{dy}{dz}\right)+ \\ &\quad +\left[\frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M}\mathbf{r})^2y^2z+\frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M}\mathbf{r})[9(\mathbf{M}\mathbf{r})z+(8x^2+3y^2)M_z-z(8xM_x+14yM_y)]+\right. \\ &\quad \left.+\frac{12}{r^8}[z(\mathbf{M}^2+M_z^2)+(xM_x+3yM_y)M_z-9(\mathbf{M}\mathbf{r})M_z]\right]\left(\frac{dx}{dz}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+ \\ &\quad +\left[\frac{24}{r^{10}}(\mathbf{M}\mathbf{r})[15(\mathbf{M}\mathbf{r})y+3(2x^2+y^2)M_y+8y(xM_x-zM_z)]-\frac{360}{r^{12}}(\mathbf{M}\mathbf{r})^2y(2x^2+\right. \\ &\quad \left.+y^2)+\frac{24}{r^8}[(zM_z-xM_x)M_y-3(\mathbf{M}\mathbf{r})M_y+y(M_z^2-M_x^2)]\right]\left(\frac{dx}{dz}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)+ \\ &\quad +\left[\frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M}\mathbf{r})[21(\mathbf{M}\mathbf{r})x+25x^2M_x+8x(yM_y-zM_z)+6y^2M_x]-\right. \\ &\quad \left.-\frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M}\mathbf{r})^2x(3x^2+2y^2)-\frac{12}{r^8}[5(\mathbf{M}\mathbf{r})M_x+x(4M_x^2+M_y^2-M_z^2)+\right. \\ &\quad \left.+(yM_y-zM_z)M_x]\right]\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left[\frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M}\mathbf{r})[(8x^2+5y^2)M_x-9(\mathbf{M}\mathbf{r})x+x(14yM_y+\right. \\ &\quad \left.+8zM_z)]-\frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M}\mathbf{r})^2xy^2+\frac{12}{r^8}[(\mathbf{M}\mathbf{r})M_x-x(2M_x^2+M_y^2+M_z^2)-\right. \\ &\quad \left.-(3yM_y+zM_z)M_x]\right]\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+\left[\frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M}\mathbf{r})[24z(\mathbf{M}\mathbf{r})+(25x^2+19y^2)M_z+\right. \\ &\quad \left.+8z(xM_x-yM_y)]-\frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M}\mathbf{r})^2z(3x^2+y^2)-\frac{12}{r^8}[20(\mathbf{M}\mathbf{r})M_z+(xM_x-yM_y)M_z+\right. \\ &\quad \left.+z(M_x^2-M_y^2-4M_z^2)]\right]\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left[\frac{24}{r^{10}}(\mathbf{M}\mathbf{r})[3xyM_z+3xzM_y+5yzM_x]-\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{360}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2 xyz - \frac{24}{r^8}(yM_z + zM_y)M_x \left] \left(\frac{dy}{dz} \right) + \frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2 x(x^2 + y^2) + \right. \\
& + \frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M} \mathbf{r})[(3x^2 - 5y^2)M_x - 24(\mathbf{M} \mathbf{r})x + x(8yM_y + 14zM_z)] + \\
& \left. + \frac{12}{r^8}[6(\mathbf{M} \mathbf{r})M_x - x(2M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) - (yM_y + 3zM_z)M_x] \right\}, \\
\\
& \frac{d^2y}{dz^2} = \eta_{1,2}\xi \left\{ \left[\frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2 y^2 z + \frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M} \mathbf{r})[9(\mathbf{M} \mathbf{r})z - z(14yM_y + 8xM_x) \right. \right. \\
& + (3y^2 + 8x^2)M_z] + \frac{12}{r^8}[z(\mathbf{M}^2 + M_z^2) - 9(\mathbf{M} \mathbf{r})M_z + (3yM_y + xM_x)M_z] \left. \right] \left(\frac{dy}{dz} \right)^3 \\
& + \left[\frac{360}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2 xyz - \frac{24}{r^{10}}(\mathbf{M} \mathbf{r})[3z(xM_y + yM_x) + 5xyM_z] + \right. \\
& \left. + \frac{24}{r^8}M_z[xM_y + yM_x] \right] \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \left(\frac{dx}{dz} \right) + \\
& + \left[\frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2 x^2 z + \frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M} \mathbf{r})[9(\mathbf{M} \mathbf{r})z + (8y^2 + 3x^2)M_z - z(8yM_y + 14xM_x)] + \right. \\
& \left. + \frac{12}{r^8}[z(\mathbf{M}^2 + M_z^2) + (yM_y + 3xM_x)M_z - 9(\mathbf{M} \mathbf{r})M_z] \right] \left(\frac{dy}{dz} \right) \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \\
& + \left[\frac{24}{r^{10}}(\mathbf{M} \mathbf{r})[15(\mathbf{M} \mathbf{r})x + 3(2y^2 + x^2)M_x + 8x(yM_y - zM_z)] - \frac{360}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2 x(2y^2 + \right. \\
& \left. + x^2) + \frac{24}{r^8}[(zM_z - yM_y)M_x - 3(\mathbf{M} \mathbf{r})M_x + x(M_z^2 - M_y^2)] \right] \left(\frac{dy}{dz} \right) \left(\frac{dx}{dz} \right) + \\
& + \left[\frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M} \mathbf{r})[21(\mathbf{M} \mathbf{r})y + 25y^2M_y + 8y(xM_x - zM_z) + 6x^2M_y] - \right. \\
& \left. - \frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2 y(3y^2 + 2x^2) - \frac{12}{r^8}[5(\mathbf{M} \mathbf{r})M_y + y(4M_y^2 + M_x^2 - M_z^2) + \right. \\
& \left. + (xM_x - zM_z)M_y] \right] \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + \left[\frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M} \mathbf{r})[(8y^2 + 5x^2)M_y - 9(\mathbf{M} \mathbf{r})y + y(14xM_x + \right. \\
& \left. + 8zM_z)] - \frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2 yx^2 + \frac{12}{r^8}[(\mathbf{M} \mathbf{r})M_y - y(2M_y^2 + M_x^2 + M_z^2) - \right. \\
& \left. - (3xM_x + zM_z)M_y] \right] \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left[\frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M} \mathbf{r})[24z(\mathbf{M} \mathbf{r}) + (25y^2 + 19x^2)M_z + \right. \\
& \left. + 8z(yM_y - xM_x)] - \frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2 z(3y^2 + x^2) - \frac{12}{r^8}[20(\mathbf{M} \mathbf{r})M_z + (yM_y - xM_x)M_z + \right. \\
& \left. + z(M_y^2 - M_x^2 - 4M_z^2)] \right] \left(\frac{dy}{dz} \right) + \left[\frac{24}{r^{10}}(\mathbf{M} \mathbf{r})[3xyM_z + 3yzM_x + 5xzM_y] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{360}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2xyz - \frac{24}{r^8}(xM_z + zM_x)M_y \left] \left(\frac{dx}{dz} \right) + \frac{180}{r^{12}}(\mathbf{M} \mathbf{r})^2y(x^2 + y^2) + \right. \\
& + \frac{12}{r^{10}}(\mathbf{M} \mathbf{r})[(3y^2 - 5x^2)M_y - 24(\mathbf{M} \mathbf{r})y + y(8xM_x + 14zM_z)] + \\
& \left. + \frac{12}{r^8}[6(\mathbf{M} \mathbf{r})M_y - y(2M_y^2 + M_x^2 + M_z^2) - (xM_x + 3zM_z)M_y] \right\}.
\end{aligned}$$

Уравнения (3.11) и (3.12) нелинейны, однако содержат малый параметр $\xi \mathbf{M}^2/r^6$, поэтому их решение, с пост-максвелловской точностью, может быть получено методом последовательных приближений. Для этого представим $x = x_{1,2}(z)$, $y = y_{1,2}(z)$ и $t = t_{1,2}(z)$ в виде разложения по малому параметру:

$$t_{1,2}(z) = T(z) + \eta_{1,2}\xi [\tilde{t}(z) - \tilde{t}(z_s)], \quad (3.13)$$

$$x_{1,2}(z) = X(z) + \eta_{1,2}\xi \left[\tilde{x}(z) - \tilde{x}(z_d) + \frac{(z_d - z)}{(z_d - z_s)} [\tilde{x}(z_d) - \tilde{x}(z_s)] \right],$$

$$y_{1,2}(z) = Y(z) + \eta_{1,2}\xi \left[\tilde{y}(z) - \tilde{y}(z_s) + \frac{(z_d - z)}{(z_d - z_s)} [\tilde{y}(z_d) - \tilde{y}(z_s)] \right],$$

где $T(z)$, $X(z)$, $Y(z)$ неизвестные функции нулевого приближения, а $\tilde{t}(z)$, $\tilde{x}(z)$, $\tilde{y}(z)$ соответствуют приближению первого порядка по малому параметру. Из выражений (3.8) следует, что начальные условия для перечисленных функций примут вид:

$$T(z_s) = ct_0, \quad X(z_s) = x_s, \quad Y(z_s) = y_s, \quad X(z_d) = x_d, \quad Y(z_d) = y_d. \quad (3.14)$$

В ведущем, максвелловском приближении, (3.11) и (3.12) приводят к уравнениям:

$$c^2 \frac{d^2 T(z)}{dz^2} = \frac{d^2 X(z)}{dz^2} = \frac{d^2 Y(z)}{dz^2} = 0, \quad c^2 \left(\frac{dT(z)}{dz} \right)^2 - \left(\frac{dX(z)}{dz} \right)^2 - \left(\frac{dY(z)}{dz} \right)^2 = 1, \quad (3.15)$$

для которых несложно получить решение, удовлетворяющее начальным условиям (3.14):

$$T(z) = t_0 + \frac{N}{c}(z - z_s), \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_s + (z - z_s)\mathbf{N}, \quad (3.16)$$

где для удобства последующих вычислений, использованы обозначения:

$$\mathbf{R} = \{X(z), Y(z), z\}, \quad N = |\mathbf{N}|, \quad N_x = \frac{(x_d - x_s)}{(z_d - z_s)}, \quad N_y = \frac{(y_d - y_s)}{(z_d - z_s)}, \quad N_z = 1. \quad (3.17)$$

Уравнения (3.12), с учетом выражений (3.16), в постмаксвелловском приближении примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{x}(z)}{dz^2} = & \frac{1}{N^{12}} \left\{ \left[\frac{180}{\rho^{12}} (\mathbf{M} \mathbf{R})^2 X^2 z + \frac{12N^2}{\rho^{10}} (\mathbf{M} \mathbf{R}) [9(\mathbf{M} \mathbf{R})z - z(14XM_x + 8YM_y) + \right. \right. \\ & + (3X^2 + 8Y^2)M_z] + \frac{12N^4}{\rho^8} [z(\mathbf{M}^2 + M_z^2) - 9(\mathbf{M} \mathbf{R})M_z + (3XM_x + YM_y)M_z] \Big] N_x^3 + \\ & + \left[\frac{360}{\rho^{12}} (\mathbf{M} \mathbf{R})^2 XY z + \frac{24N^4}{\rho^8} M_z [XM_y + YM_x] - \frac{24N^2}{\rho^{10}} (\mathbf{M} \mathbf{R}) [3YzM_x + 3XzM_y + \right. \\ & + 5XYM_z] \Big] N_x^2 N_y + \left[\frac{180}{\rho^{12}} (\mathbf{M} \mathbf{R})^2 Y^2 z + \frac{12N^2}{\rho^{10}} (\mathbf{M} \mathbf{R}) [9(\mathbf{M} \mathbf{R})z + (8X^2 + 3Y^2)M_z \right. \\ & \left. - z(8XM_x + 14YM_y)] + \frac{12N^4}{\rho^8} [z(\mathbf{M}^2 + M_z^2) + (XM_x + 3YM_y)M_z \right. \\ & \left. - 9(\mathbf{M} \mathbf{R})M_z] \right] N_x N_y^2 + \left[\frac{24N^2}{\rho^{10}} (\mathbf{M} \mathbf{R}) [15(\mathbf{M} \mathbf{R})Y + 3(2X^2 + Y^2)M_y + \right. \\ & + 8Y(XM_x - zM_z)] - \frac{360}{\rho^{12}} (\mathbf{M} \mathbf{R})^2 Y(2X^2 + Y^2) + \frac{24N^4}{\rho^8} [(zM_z - XM_x)M_y \\ & - 3(\mathbf{M} \mathbf{R})M_y + Y(M_z^2 - M_x^2)] \Big] N_x N_y + \left[\frac{12N^2}{\rho^{10}} (\mathbf{M} \mathbf{R}) [21(\mathbf{M} \mathbf{R})X + 25X^2 M_x + \right. \\ & + 6Y^2 M_x + 8X(YM_y - zM_z)] - \frac{180}{\rho^{12}} (\mathbf{M} \mathbf{R})^2 X(3X^2 + 2Y^2) - \frac{12N^4}{\rho^8} [5(\mathbf{M} \mathbf{R})M_x + \\ & + X(4M_x^2 + M_y^2 - M_z^2) + (YM_y - zM_z)M_x] \Big] N_x^2 + \left[\frac{12N^2}{\rho^{10}} (\mathbf{M} \mathbf{R}) [(8X^2 + 5Y^2)M_x \right. \\ & \left. - 9(\mathbf{M} \mathbf{R})X + X(14YM_y + 8zM_z)] - \frac{180}{\rho^{12}} (\mathbf{M} \mathbf{R})^2 XY^2 + \right. \\ & \left. + \frac{12N^4}{\rho^8} [(\mathbf{M} \mathbf{R})M_x - X(2M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) - (3YM_y + zM_z)M_x] \right] N_y^2 + \\ & + \left[\frac{12N^2}{\rho^{10}} (\mathbf{M} \mathbf{R}) [24z(\mathbf{M} \mathbf{R}) + (25X^2 + 19Y^2)M_z + 8z(XM_x - YM_y)] \right. \\ & \left. - \frac{180}{\rho^{12}} (\mathbf{M} \mathbf{R})^2 z(3X^2 + Y^2) - \frac{12N^4}{\rho^8} [20(\mathbf{M} \mathbf{R})M_z + (XM_x - YM_y)M_z + \right. \\ & \left. + z(M_x^2 - M_y^2 - 4M_z^2)] \right] N_x + \left[\frac{24N^2}{\rho^{10}} (\mathbf{M} \mathbf{R}) [3XYM_z + 3XzM_y + 5YzM_x] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{360}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2XYz - \frac{24N^4}{\rho^8}(YM_z + zM_y)M_x \Big] N_y + \frac{180}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2X(X^2 + Y^2) + \\
& + \frac{12N^2}{\rho^{10}}(\mathbf{M R})[(3X^2 - 5Y^2)M_x - 24(\mathbf{M R})X + X(8YM_y + 14zM_z)] + \\
& + \frac{12N^4}{\rho^8}[6(\mathbf{M R})M_x - X(2M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) - (YM_y + 3zM_z)M_x] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\tilde{y}(z)}{dz^2} = & \frac{1}{N^{12}} \left\{ \left[\frac{180}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2Y^2z + \frac{12N^2}{\rho^{10}}(\mathbf{M R})[9(\mathbf{M R})z - z(14YM_y + 8XM_x) + \right. \right. \\
& + (3Y^2 + 8X^2)M_z] + \frac{12N^4}{\rho^8}[z(\mathbf{M}^2 + M_z^2) - 9(\mathbf{M R})M_z + (3YM_y + XM_x)M_z] \Big] N_y^3 + \\
& + \left[\frac{360}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2XYz + \frac{24N^4}{\rho^8}M_z[XM_y + YM_x] - \frac{24N^2}{\rho^{10}}(\mathbf{M R})[3z(XM_y + YM_x) + \right. \\
& + 5XYM_z] \Big] N_y^2N_x + \left[\frac{180}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2X^2z + \frac{12N^2}{\rho^{10}}(\mathbf{M R})[9(\mathbf{M R})z + (8Y^2 + 3X^2)M_z \right. \\
& \left. - z(8YM_y + 14XM_x)] + \frac{12N^4}{\rho^8}[z(\mathbf{M}^2 + M_z^2) + (YM_y + 3XM_x)M_z \right. \\
& \left. - 9(\mathbf{M R})M_z] \right] N_yN_x^2 + \left[\frac{24N^2}{\rho^{10}}(\mathbf{M R})[15(\mathbf{M R})X + 3(2Y^2 + X^2)M_x + \right. \\
& + 8X(YM_y - zM_z)] - \frac{360}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2X(2Y^2 + X^2) + \frac{24N^4}{\rho^8}[(zM_z - YM_y)M_x - \\
& - 3(\mathbf{M R})M_x + X(M_z^2 - M_y^2)] \Big] N_yN_x + \left[\frac{12N^2}{\rho^{10}}(\mathbf{M R})[21(\mathbf{M R})Y + 25Y^2M_y \right. \\
& + 6X^2M_y + 8Y(XM_x - zM_z)] - \frac{180}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2Y(3Y^2 + 2X^2) - \frac{12N^4}{\rho^8}[5(\mathbf{M R})M_y + \\
& + Y(4M_y^2 + M_x^2 - M_z^2) + (XM_x - zM_z)M_y] \Big] N_y^2 + \left[\frac{12N^2}{\rho^{10}}(\mathbf{M R})[(8Y^2 + 5X^2)M_y \right. \\
& \left. - 9(\mathbf{M R})Y + Y(14XM_x + 8zM_z)] - \frac{180}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2YX^2 \right. \\
& + \frac{12N^4}{\rho^8}[(\mathbf{M R})M_y - Y(2M_y^2 + M_x^2 + M_z^2) - (3XM_x + zM_z)M_y] \Big] N_x^2 + \\
& + \left[\frac{12N^2}{\rho^{10}}(\mathbf{M R})[24z(\mathbf{M R}) + (25Y^2 + 19X^2)M_z + 8z(YM_y - XM_x)] \right. \\
& \left. - \frac{180}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2z(3Y^2 + X^2) - \frac{12N^4}{\rho^8}[20(\mathbf{M R})M_z + (YM_y - XM_x)M_z + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +z(M_y^2 - M_x^2 - 4M_z^2)]N_y + \left[\frac{24N^2}{\rho^{10}}(\mathbf{M R})[3XYM_z + 3YzM_x + 5XzM_y] \right. \\
& - \frac{360}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2XYz - \frac{24N^4}{\rho^8}(XM_z + zM_x)M_y \left. \right]N_x + \frac{180}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2Y(X^2 + Y^2) \\
& + \frac{12N^2}{\rho^{10}}(\mathbf{M R})[(3Y^2 - 5X^2)M_y - 24(\mathbf{M R})Y + Y(8XM_x + 14zM_z)] + \\
& + \frac{12N^4}{\rho^8}[6(\mathbf{M R})M_y - Y(2M_y^2 + M_x^2 + M_z^2) - (XM_x + 3zM_z)M_y] \left. \right\}, \quad (3.18)
\end{aligned}$$

где использованы следующие обозначения для вспомогательных величин:

$$\rho = \sqrt{(z+p)^2 + q^2}, \quad X = x_s + N_x(z - z_s), \quad Y = y_s + N_y(z - z_s), \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{[(x_d - x_s)(x_s z_d - z_s x_d) + (y_d - y_s)(y_s z_d - z_s y_d)]}{(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s)^2}, \\
q^2 &= \frac{(z_d - z_s)^2}{(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s)^4} [(x_s y_d - y_s x_d)^2 + (x_s z_d - z_s x_d)^2 + (y_s z_d - z_s y_d)^2]. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Первый интеграл (3.11) приводит к уравнению для определения поправки $\tilde{t}(z)$ в пост-максвелловском приближении:

$$\begin{aligned}
& cN \frac{d\tilde{t}(z)}{dz} - 2[N_x^2 + N_y^2 + 1] \left[\frac{3(\mathbf{M R})^2}{N^8 \rho^8} + \frac{\mathbf{M}^2}{N^6 \rho^6} \right] - \\
& - \left[N_x \frac{d\tilde{x}(z)}{dz} + N_y \frac{d\tilde{y}(z)}{dz} \right] + \frac{2}{N^6 \rho^6} \left[\frac{3(\mathbf{M R})}{N^2 \rho^2} (\mathbf{R N}) - (\mathbf{M N}) \right]^2 = 0. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Предварительно, перед интегрированием уравнений (3.18) и (3.21) следует выполнить некоторые оценки. Согласно постановке задачи, источник жесткого излучения находится на поверхности нейтронной звезды или в ее магнитосфере. Принимая радиус нейтронной звезды равным 10 км, можно считать, что $\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2} < 10^2$ км. Детектор жесткого излучения находится на околоземном спутнике. Обычно для таких наблюдений подходят два типа орбит. Первый – низкая околоземная круговая орбита, которая в основном лежит под радиационными поясами Земли. Ее радиус не более примерно $7 \cdot 10^3$ км. Другой тип орбиты – высокоапогейная эллиптическая, на которой спутник в основном находится вне магнитосферы Земли. Высота апогея для таких орбит (например, космической обсерватории

INTEGRAL) может составлять около 10^5 км. Поэтому мы можем использовать приближения $|x_d| \leq 10^5$ км и $|y_d| \leq 10^5$ км для координат x_d и y_d .

Значение координаты z_d в выбранной системе координат совпадает с расстоянием от пульсара до Земли. Поскольку ближайший пульсар находится на расстоянии около нескольких килопарсек, т. е. $\sim 10^{17}$ км от Земли, мы предполагаем, что $z_d \sim 10^{17}$ км. Подставляя эти значения в выражения (3.17), получаем следующие оценки: $N_x \sim N_y \sim 10^{-12}$, $N_z = 1$. Поэтому мы можем существенно упростить уравнения (3.18) и (3.21), сохранив в них только асимптотически главные члены в разложении по малым параметрам N_x и $N_y \sim 10^{-12}$.

В этом случае из уравнений (3.16) и (3.19) следует, что $\mathbf{R} = \{x_s, y_s, z\}$, $X = x_s$, $Y = y_s$, $N_x = N_y = 0$, $N = 1$, $p = 0$, $q^2 = x_s^2 + y_s^2$, $\rho = \sqrt{z^2 + q^2}$, и уравнения (3.18) принимают значительно более компактный и простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{x}(z)}{dz^2} &= \frac{180}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2 x_s(x_s^2 + y_s^2) + \frac{12}{\rho^{10}}(\mathbf{M R}) \left[(3x_s^2 - 5y_s^2)M_x - 24(\mathbf{M R})x_s + \right. \\ &\quad \left. + x_s(8y_sM_y + 14zM_z) \right] + \frac{12}{\rho^8} \left[6(\mathbf{M R})M_x - x_s(2M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) \right. \\ &\quad \left. - (y_sM_y + 3zM_z)M_x \right], \\ \frac{d^2\tilde{y}(z)}{dz^2} &= \frac{180}{\rho^{12}}(\mathbf{M R})^2 y_s(x_s^2 + y_s^2) + \frac{12}{\rho^{10}}(\mathbf{M R}) \left[(3y_s^2 - 5x_s^2)M_y - 24(\mathbf{M R})y_s + \right. \\ &\quad \left. + y_s(8x_sM_x + 14zM_z) \right] + \frac{12}{\rho^8} \left[6(\mathbf{M R})M_y - y_s(2M_y^2 + M_x^2 + M_z^2) \right. \\ &\quad \left. - (x_sM_x + 3zM_z)M_y \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Первый интеграл (3.21) также значительно упрощается:

$$c \frac{d\tilde{t}(z)}{dz} - 2 \left[\frac{3(\mathbf{M R})^2}{\rho^8} + \frac{\mathbf{M}^2}{\rho^6} \right] + \frac{2}{\rho^6} \left[\frac{3(\mathbf{M R})}{\rho^2} z - M_z \right]^2 = 0. \quad (3.23)$$

Выполнив решение уравнений (3.22) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(z) &= \frac{3}{64q^9} \operatorname{atan}\left(\frac{z}{q}\right) \left[2M_xM_zq^4 - 175zx_s(M_x x_s + M_y y_s) \right]^2 + \\ &+ 10q^2(5M_zx_s - 3zM_x)(M_x x_s + M_y y_s) - 5zx_sq^2(16M_y^2 + 15M_z^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +80y_s z q^2 M_x M_y] + \frac{1}{64\rho^2 q^6} [30(5x_s z M_z + M_x q^2)(M_x x_s + M_y y_s) + \\
& +2q^2 M_x (3M_z z - 40M_y y_s) + 5x_s q^2 (16M_y^2 + 15M_z^2) + 175x_s (M_x x_s + \\
& + M_y y_s)^2] + \frac{1}{32\rho^4 q^4} [x_s q^2 (16M_y^2 + 15M_z^2) + (6M_x q^2 + 50x_s z M_z) \times \\
& \times (M_x x_s + M_y y_s) + 2q^2 M_x (M_z z - 8M_y y_s) + 35x_s (M_x x_s + M_y y_s)^2] + \\
& + \frac{5}{8\rho^6 q^2} [x_s (M_x x_s + M_y y_s)^2 + q^2 (2M_z M_x z - M_z^2 x_s) + 2(M_x q^2 + \\
& + M_z x_s z)(M_x x_s + M_y y_s)] - \frac{9x_s (\mathbf{M R})^2}{4\rho^8},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(z) = & \frac{3}{64q^9} \operatorname{atan}\left(\frac{z}{q}\right) [2M_y M_z q^4 - 175z y_s (M_x x_s + M_y y_s)^2 + \\
& +10q^2 (5M_z y_s - 3M_y z)(M_x x_s + M_y y_s) - 5z y_s q^2 (16M_x^2 + 15M_z^2) + \\
& +80x_s z q^2 M_x M_y] + \frac{1}{64\rho^2 q^6} [30(5M_z y_s z + M_y q^2)(M_x x_s + M_y y_s) - \\
& +2q^2 M_y (3M_z z - 40M_x x_s) + 5y_s q^2 (16M_x^2 + 15M_z^2) + 175y_s (M_x x_s + \\
& + M_y y_s)^2] + \frac{1}{32\rho^4 q^4} [y_s q^2 (16M_x^2 + 15M_z^2) + (6M_y q^2 + 50M_z y_s z) \times \\
& \times (M_x x_s + M_y y_s) + 2q^2 M_y (M_z z - 8M_x x_s) + 35y_s (M_x x_s + M_y y_s)^2] + \\
& + \frac{5}{8\rho^6 q^2} [y_s (M_x x_s + M_y y_s)^2 + q^2 (2M_z M_y z - M_z^2 y_s) + \\
& +2(M_y q^2 + M_z y_s z)(M_x x_s + M_y y_s)] - \frac{9y_s (\mathbf{M R})^2}{4\rho^8}. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Выполнив интегрирование уравнения (3.23), получим явную зависимость $\tilde{t}(z)$, т.е. закон движения импульсов жесткого излучения по лучам от их общего источника к детектору:

$$\begin{aligned}
\tilde{t}(z) = & [25(M_x x_s + M_y y_s)^2 + q^2 (16\mathbf{M}^2 - M_z^2)] \left[\frac{z(3\rho^2 + 2q^2)}{64\rho^4 q^6} + \frac{3}{64q^7} \operatorname{atan}\left(\frac{z}{q}\right) \right] + \\
& + \frac{1}{8\rho^6 q^2} [5z(M_x x_s + M_y y_s)^2 + 16q^2 M_z (M_x x_s + M_y y_s) + 3M_z^2 q^2 z] + \\
& + \frac{9}{4\rho^8} [z(M_x x_s + M_y y_s)^2 - q^2 M_z (2M_x x_s + 2M_y y_s + M_z z)]. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Выражения (3.24) и (3.25) являются частными решениями неоднородных уравнений (3.22) и (3.23) и их следует дополнить общими решениями соответствующих однородных уравнений, выполнив замену

$$\tilde{t}(z) \rightarrow \tilde{t}(z) + a_0, \quad \tilde{x}(z) \rightarrow \tilde{x}(z) + a_1 + b_1 z, \quad \tilde{y}(z) \rightarrow \tilde{y}(z) + a_2 + b_2 z, \quad (3.26)$$

где a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 произвольные постоянные.

Однако, если выполнить подстановку этих общих решений в выражения (3.13), то все постоянные a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 сократятся. Поэтому в дальнейшем будем использовать более простые выражения (3.24) и (3.25).

Рассмотрим частный случай, в котором, используя полученный общий закон распространения произвольного электромагнитного импульса, опишем электромагнитный импульс, проходящий по лучу $x^0 = x^0(z)$, соединяющему точки \mathbf{r}_s и \mathbf{r}_d :

$$t_{1,2}(z) = t_0 + \frac{(z - z_s)}{c} + \eta_{1,2} \xi [\tilde{t}(z) - \tilde{t}(z_s)], \quad (3.27)$$

где для краткости введены обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{t}(z) = & [25(M_x x_s + M_y y_s)^2 + q^2(16\mathbf{M}^2 - M_z^2)] \left[\frac{z(3\rho^2 + 2q^2)}{64\rho^4 q^6} + \frac{3}{64q^7} \operatorname{atan}\left(\frac{z}{q}\right) \right] + \\ & + \frac{1}{\rho^6 q^2} [5z(M_x x_s + M_y y_s)^2 + 16q^2 M_z (M_x x_s + M_y y_s) + 3M_z^2 q^2 z] + \\ & \frac{9}{4\rho^8} [z(M_x x_s + M_y y_s)^2 - q^2 M_z (2M_x x_s + 2M_y y_s + M_z z)]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Для изучения проявлений дупреломления вакуума в магнитном поле пульсара необходимо провести поляризационные измерения импульсного жесткого излучения. Рассмотрим импульс жесткого излучения конечной длительности, возникающий в полярной области из-за аккреции вещества. В области с сильным магнитным полем он расщепляется на две моды, с взаимно ортогональными линейными поляризациями таким образом, что фронты обеих мод в начальный момент времени совпадают. Нормальные моды будут распространяться в магнитном поле пульсара с неравными скоростями. Фронт быстрой моды приходит к детектору раньше, чем фронт медленной моды на интервал времени равный $\Delta t = |t_2(z_d) - t_1(z_d)|$, поэтому

в течение этого отрезка времени детектор будет регистрировать линейную поляризацию проходящего излучения.

Через время Δt на детектор приходит фронт медленной моды импульса. Суперпозиция обоих нормальных мод приводит к регистрации детектором излучения с эллиптической или круговой поляризацией. Благодаря эффекту двулучепреломления в вакууме, фронтальная часть любого импульса жесткого излучения длительностью Δt , исходящего от пульсара, должна быть линейно поляризована в отличие от остальной части импульса, которая в общем случае будет иметь эллиптическую поляризацию. Аналогично, часть импульса длительностью Δt , предшествующая заднему фронту, также будет иметь линейную поляризацию, ортогональную поляризации переднего фронта импульса, поэтому для проверки эффекта двулучепреломления вакуума необходимо контролировать состояние поляризации импульсов жесткого излучения, исходящих от пульсаров и магнетаров, на всей их длительности. Используя выражения (3.13) и (3.25) вычислим длительность линейно поляризованной части импульса $\Delta t = |\Delta\tau|$:

$$\begin{aligned} \Delta\tau = t_2(z_d) - t_1(z_d) = (\eta_2 - \eta_1)\xi \left\{ \left[\frac{3\pi}{128q^7} - \frac{z_s(3\rho^2 + 2q^2)}{64r_s^4q^6} - \frac{3}{64q^7} \operatorname{atan}\left(\frac{z_s}{q}\right) \right] \times \right. \\ \times \left[25(M_x x_s + M_y y_s)^2 + q^2(16M^2 - M_z^2) \right] - \frac{1}{8r_s^6q^2} \left[5z_s(M_x x_s + M_y y_s)^2 + \right. \\ \left. + 16q^2 M_z(M_x x_s + M_y y_s) + 3M_z^2 q^2 z_s \right] \\ \left. - \frac{9}{4r_s^8} \left[z_s(M_x x_s + M_y y_s)^2 - q^2 M_z(2M_x x_s + 2M_y y_s + M_z z_s) \right] \right\}, \quad (3.29) \end{aligned}$$

где обозначено $r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}$.

Временной интервал Δt существенно зависит от разности постмаксвелловских параметров $\eta_1 - \eta_2$, поэтому будет различен в различных моделях нелинейной электродинамики вакуума. В частности, в электродинамике Гейзенберга - Эйлера это время задержки может составлять около 1 мкс для типичного пульсара, тогда как в теории Борна - Инфельда оно строго равно нулю. В следующем разделе, результаты которого опубликованы нами в работе [101], будет рассмотрен аналогичный эффект относительно запаздывания нормальных мод, но уже для источника излучения, расположенного вне магнитосферы пульсара, на значительном удалении от него.

3.2 Влияние электромагнитного поля вращающегося пульсара на транзиентное излучение

Рассмотрим эффект двулучепреломления излучения, проходящего вблизи пульсара с учетом индуцированного электрического поля, обусловленного вращением пульсара [101]. Ввиду существенной громоздкости вычислений, ограничимся описанием частного случая взаимного расположения пульсара, источника и детектора излучения. Как и ранее, совместим начало координат с центром пульсара и будем считать, что лучи обеих нормальных волн начинаются в одной и той же точке с координатами $x = x_0$, $y = y_0$, $z = -L$ в момент времени $t = t_0$ и проходят через точку $x = x_0$, $y = y_0$, $z = L$, в которой находится детектор рентгеновского или гамма-излучения.

Появление электрического поля при вращении пульсара приводит к изменению компонент метрического тензора эффективного пространства-времени (3.4):

$$G_{00}^{(1,2)} = 1 - 4\xi\eta_{1,2}\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, \tau), \quad G_{0\alpha}^{(1,2)} = -4\xi\eta_{1,2}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{B}(\mathbf{r}, \tau)]_\alpha, \quad (3.30)$$

$$G_{\alpha\beta}^{(1,2)} = -\delta_{\alpha\beta} - 4\xi\eta_{1,2}\left\{\mathbf{B}^2(\mathbf{r}, \tau)\delta_{\alpha\beta} - E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta\right\}, \quad (3.31)$$

где для векторов электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{B} могут быть использованы выражения (2.11), в приближении электродинамики Максвелла, учитывающие вращение пульсара.

Получим уравнения геодезических лучей. Для этого выполним подстановку выражений (3.30) в систему уравнений (3.6), и проведем усреднение этих уравнений по периоду вращения пульсара, для исключения быстроосциллирующих слагаемых:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 ct}{dz^2} + \frac{\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2}{r^{12}} \left\{ \sin^2 \alpha \left[2k^4 r^4 [4r^4(z-r) + (10r^3 - 8r^2 z)(x^2 + y^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + (3z - 5r)(x^2 + y^2)^2] + 24k^2 r^2 z(x^2 + y^2)^2 + 6z[2r^4 - 8r^2(x^2 + y^2) \right. \right. \\ \left. \left. + 15(x^2 + y^2)^2] \right] + 36z(x^2 + y^2)[4r^2 - 5(x^2 + y^2)] \cos^2 \alpha \right\} = 0, \\ \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2}{r^{12}} \left\{ \sin^2 \alpha \left[2k^4 r^4 x [2r^3(r-z) + 3z^2(x^2 + y^2)] - 4k^3 r^5 y [4r(z-r) \right. \right. \\ \left. \left. + 5(x^2 + y^2)] + 6k^2 r^2 x [5r^2(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2)^2] \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -24kr^4yz + 18x[7r^2(x^2 + y^2) - 5(x^2 + y^2)^2 - r^4] + \\
& + 12x \cos^2 \alpha [11r^4 - 25r^2(x^2 + y^2) + 15(x^2 + y^2)^2] \Big\} = 0, \\
\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2}{r^{12}} & \left\{ \sin^2 \alpha [2k^4r^4y[2r^3(r - z) + 3z^2(x^2 + y^2)] + 4k^3r^5x[4r(z - r) \right. \\
& + 5(x^2 + y^2)] + 6k^2r^2y[5r^2(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2)^2] \\
& + 24kr^4xz + 18y[7r^2(x^2 + y^2) - 5(x^2 + y^2)^2 - r^4] \\
& \left. + 12y \cos^2 \alpha [11r^4 - 25r^2(x^2 + y^2) + 15(x^2 + y^2)^2] \right\} = 0, \quad (3.32)
\end{aligned}$$

где обозначено $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, α – угол наклона вектора магнитного момента пульсара \mathbf{m} к оси z , а параметр $k = \Omega/c$ выражается через угловую скорость вращения пульсара Ω . Учитывая соотношение (3.7), выполним поиск решений уравнений (3.2). В результате несложных, но громоздких вычислений получим закон движения импульсов электромагнитного поля в поле пульсара $ct(z)$ и уравнение лучей $x(z)$ и $y(z)$:

$$\begin{aligned}
ct(z) = \xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2 & \left\{ \sin^2 \alpha \left[k^4 \left[\frac{r_0^2 z}{4(r_0^2 + z^2)^2} + \frac{19}{8r_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) - \frac{13z}{8(r_0^2 + z^2)} + \right. \right. \\
& + \frac{4}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} - \frac{2r_0^2}{3\sqrt{(r_0^2 + z^2)^3}} \Big] + k^2 \left[\frac{15z}{16r_0^2(r_0^2 + z^2)} + \frac{5z}{8(r_0^2 + z^2)^2} + \right. \\
& + \frac{15}{16r_0^3} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) + \frac{r_0^2 z}{2(r_0^2 + z^2)^3} \Big] + \frac{171z}{128r_0^4(r_0^2 + z^2)} + \frac{57z}{64r_0^2(r_0^2 + z^2)^2} + \\
& + \frac{5z}{16(r_0^2 + z^2)^3} + \frac{9zr_0^2}{8(r_0^2 + z^2)^4} + \frac{171}{128r_0^5} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) \Big] - 9 \cos^2 \alpha \left[\frac{z(5r_0^2 - z^2)}{24(r_0^2 + z^2)^4} - \right. \\
& \left. \left. - \frac{5z(5r_0^2 + 3z^2)}{192r_0^4(r_0^2 + z^2)^2} - \frac{5}{64r_0^5} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) \right] \right\} + z + C_0, \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(z) = zC_1 + C_2 + \xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2 & \left\{ \sin^2 \alpha \left[k^4 x_0 \left[\frac{z^2 - r_0^2}{8(z^2 + r_0^2)^2} - \frac{19z}{8r_0^3} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) - \right. \right. \\
& - \frac{4z}{3r_0^2 \sqrt{z^2 + r_0^2}} \Big] - k^3 y_0 \left[\frac{2z}{r_0^2(z^2 + r_0^2)} + \frac{2}{r_0^3} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) + \frac{4}{3\sqrt{(z^2 + r_0^2)^3}} \right] + \\
& \left. + k^2 x_0 \left[\frac{3z^2 - r_0^2}{8(z^2 + r_0^2)^3} - \frac{45z}{16r_0^5} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) + \frac{15}{16r_0^2(z^2 + r_0^2)} \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ky_0}{r_0^5} \left[\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) + \frac{zr_0(5r_0^2 + 3z^2)}{2(z^2 + r_0^2)^2} \right] - \frac{855zx_0}{128r_0^7} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) + \\
& + \frac{57x_0}{64r_0^2(z^2 + r_0^2)^2} + \frac{285x_0}{128r_0^4(z^2 + r_0^2)} + \frac{3x_0(5z^2 - r_0^2)}{16(z^2 + r_0^2)^4} \Big] + \\
& + x_0 \cos^2 \alpha \left[\frac{15(7r_0^2 + 5z^2)}{64r_0^4(r_0^2 + z^2)^2} - \frac{5r_0^2 + 23z^2}{8(r_0^2 + z^2)^4} - \frac{225z}{64r_0^7} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(z) = zC_3 + C_4 + \xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2 \Big\{ \sin^2 \alpha \Big[k^4 y_0 \Big[\frac{z^2 - r_0^2}{8(z^2 + r_0^2)^2} - \frac{19z}{8r_0^3} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) - \\
- \frac{4z}{3r_0^2 \sqrt{(z^2 + r_0^2)}} \Big] + k^3 x_0 \Big[\frac{2z}{r_0^2(z^2 + r_0^2)} + \frac{2}{r_0^3} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) + \frac{4}{3\sqrt{(z^2 + r_0^2)^3}} \Big] + \\
+ k^2 y_0 \Big[\frac{3z^2 - r_0^2}{8(z^2 + r_0^2)^3} - \frac{45z}{16r_0^5} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) + \frac{15}{16r_0^2(z^2 + r_0^2)} \Big] + \\
+ \frac{kx_0}{r_0^5} \left[\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) + \frac{zr_0(5r_0^2 + 3z^2)}{2(z^2 + r_0^2)^2} \right] - \frac{855zy_0}{128r_0^7} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) + \\
+ \frac{57y_0}{64r_0^2(z^2 + r_0^2)^2} + \frac{285y_0}{128r_0^4(z^2 + r_0^2)} + \frac{3y_0(5z^2 - r_0^2)}{16(z^2 + r_0^2)^4} \Big] + \\
+ y_0 \cos^2 \alpha \Big[\frac{15(7r_0^2 + 5z^2)}{64r_0^4(r_0^2 + z^2)^2} - \frac{5r_0^2 + 23z^2}{8r_0^4(r_0^2 + z^2)^4} - \frac{225z}{64r_0^7} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) \Big] \Big\}, \quad (3.34)
\end{aligned}$$

где C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 , – постоянные интегрирования, значения которых могут быть определены из начальных условий о расположении источника излучения и детектора, приведенных ранее при постановке задачи, r_0 – прицельное расстояние луча, удовлетворяющее условию $R < r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, R – радиус пульсара.

Значительная удаленность пульсаров от Земли, на расстояние порядка 10 кпс, позволяет принять $|z| \sim L \rightarrow \infty$, и ограничиться в дальнейшем рассмотрении только асимптотически главной части всех выражений:

$$\begin{aligned}
ct(z) = ct_0 + z + L + \frac{\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2}{r_0^5} \Big\{ \left[\frac{19k^4 r_0^4}{8} + \frac{15k^2 r_0^2}{16} + \frac{171}{128} \right] \sin^2 \alpha + \\
+ \frac{45}{64} \cos^2 \alpha \Big\} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$x(z) = x_0 + \frac{\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2 x_0}{r_0^7} \Big\{ \left[\frac{19k^4 r_0^4}{8} + \frac{45k^2 r_0^2}{16} + \frac{855}{128} \right] \sin^2 \alpha +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{225}{64} \cos^2 \alpha \left\{ \left[\frac{\pi L}{2} - z \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) \right] + \frac{4\xi \eta_{1,2} |\mathbf{m}|^2 k^4 x_0}{3r_0^2} \left[\frac{z}{L} - \operatorname{sgn}(z) \right] \sin^2 \alpha + \right. \\
& \quad \left. + \frac{ky_0}{4r_0^5} (4k^2 r_0^2 + 3) \left[\frac{\pi z}{L} - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) \right] \sin^2 \alpha, \right. \\
& y(z) = y_0 + \frac{\xi \eta_{1,2} |\mathbf{m}|^2 y_0}{r_0^7} \left\{ \left[\frac{19k^4 r_0^4}{8} + \frac{45k^2 r_0^2}{16} + \frac{855}{128} \right] \sin^2 \alpha + \right. \\
& + \frac{225}{64} \cos^2 \alpha \left\{ \left[\frac{\pi L}{2} - z \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) \right] + \frac{4\xi \eta_{1,2} |\mathbf{m}|^2 k^4 y_0}{3r_0^2} \left[\frac{z}{L} - \operatorname{sgn}(z) \right] \sin^2 \alpha - \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{kx_0}{4r_0^5} (4k^2 r_0^2 + 3) \left[\frac{\pi z}{L} - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{r_0} \right) \right] \sin^2 \alpha. \right. \right. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Полученные соотношения позволяют найти время запаздывания нормальных мод относительно друг друга, при распространении сигнала от источника к детектору:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\pi \xi (\eta_2 - \eta_1) |\mathbf{m}|^2}{cr_0^5} \left\{ \left[\frac{45}{64} \cos^2 \alpha + \left[\frac{19k^4 r_0^4}{8} + \frac{15k^2 r_0^2}{16} + \frac{171}{128} \right] \sin^2 \alpha \right\}, \quad (3.36)$$

которое оказывается наибольшим при значении угла наклона магнитного дипольного момента пульсара к оси вращения $\alpha = \pi/2$ и наименьшим при $\alpha = 0$.

Выражения (3.35) также позволяют вычислить углы искривления геодезических лучей $\beta_{1,2}$ для каждой нормальной моды. Для этого найдем компоненты касательных векторов к лучу $\mathbf{K}^s = (d\mathbf{r}/dz)|_{z=-L}$ в точке расположения источника и $\mathbf{K}^d = (d\mathbf{r}/dz)|_{z=L}$ в точке размещения детектора (луч, по которому распространяется мода излучения, определяется выбором пост-максвелловского параметра η_1 или η_2):

$$\begin{aligned}
K_x^s &= -K_x^d = \frac{\pi \xi \eta_{1,2} |\mathbf{m}|^2 x_0}{2r_0^7} \left\{ \left[\frac{19k^4 r_0^4}{8} + \frac{45k^2 r_0^2}{16} + \frac{855}{128} \right] \sin^2 \alpha + \frac{225}{64} \cos^2 \alpha \right\}, \\
K_y^s &= -K_y^d = \frac{\pi \xi \eta_{1,2} |\mathbf{m}|^2 y_0}{2r_0^7} \left\{ \left[\frac{19k^4 r_0^4}{8} + \frac{45k^2 r_0^2}{16} + \frac{855}{128} \right] \sin^2 \alpha + \frac{225}{64} \cos^2 \alpha \right\}, \\
K_z^s &= K_z^d = 1.
\end{aligned}$$

Вычислим угол между касательными направлениями к лучам, в предпо-

ложении малого отклонения от прямолинейного распространения сигналов каждой из нормальных мод:

$$\sin \beta_{1,2} \approx \beta_{1,2} = \frac{\pi \xi \eta_{1,2} |\mathbf{m}|^2}{r_0^6} \left\{ \left[\frac{19k^4 r_0^4}{8} + \frac{45k^2 r_0^2}{16} + \frac{855}{128} \right] \sin^2 \alpha + \frac{225}{64} \cos^2 \alpha \right\}. \quad (3.37)$$

Количественная оценка выражений (3.36) и (3.37) для характерных параметров пульсаров показывает увеличение времени Δt в 3.5 раза и угла отклонения в 1.7, по сравнению с [223], благодаря учету влияния электрического поля быстро вращающегося пульсара (при $kr_0 \sim 1$). Ввиду малости эффекта искривления лучей и существенной удаленности пульсаров от Земли, экспериментальная регистрация этого эффекта в настоящее время представляется трудно осуществимой, в то время как эффект запаздывания нормальных мод может быть обнаружен в современных спутниковых экспериментах. Подробное обоснование возможности обнаружения этого эффекта будет выполнено в следующем разделе.

3.3 Наблюдательные возможности эффекта двулучепреломления вакуума

С экспериментальной точки зрения эффект запаздывания электромагнитных сигналов, излучаемых с полюсов вращающейся нейтронной звезды, будет по-разному проявляться в случае медленно меняющегося и импульсного излучения. В случае медленно меняющегося излучения, временная зависимость регистрируемой интенсивности на одной поляризационной моде будет смещена относительно временной зависимости интенсивности ортогональной моды. Это время задержки будет зависеть от угла между вектором магнитного момента нейтронной звезды и радиусом-вектором точки расположения детектора. Эффект запаздывания по-другому проявится в случае импульсного излучения (пучка фотонов), длительность которого больше времени Δt , определяемого выражением (3.29).

В этом случае, если излучаются произвольно поляризованные импульсы, то регистрируемые импульсы будут иметь поляризацию переменную по длине, т.е. при $\eta_1 > \eta_2$ передняя часть импульса, длительностью $T = \Delta t$, должна быть поляризована нормально к плоскости магнитного меридиана

нейтронной звезды, а остальная часть импульса будет поляризована случайным образом в общем случае. Если предположить, что угловая скорость нейтронной звезды Ω достаточно мала, то линейная скорость точек на поверхности нейтронной звезды будет много меньше скорости света в вакууме. По этой причине время распространения электромагнитного сигнала в области $r \sim 5R_N$ сильного магнитного поля, где нелинейные электродинамические и гравитационные воздействия на эти сигналы наиболее существенны, будет много меньше периода вращения звезды. Таким образом, область нелинейного электромагнитного воздействия будет находиться в ближней зоне магнитодипольного излучения. В работе [103] было показано, что время задержки сигналов для обоих поляризационных мод будет модулировано, из-за вращения звезды. Хорошо известно, что временные профили рентгеновского и гамма-излучения пульсара выглядят как последовательность импульсов с периодом, равным периоду вращения нейтронной звезды, а длительность импульса определяется в основном шириной пучка излучения.

В случае очень узкого пучка, временной профиль излучения пульсара можно представить в виде периодических импульсов, длительность которых много меньше периода. При $\eta_1 > \eta_2$ очевидно, что фронт импульса будет поляризован линейно, в плоскости перпендикулярной магнитному меридиану нейтронной звезды. Длительность этого поляризованного фронта импульса будет изменяться от нуля до максимального значения согласно (3.29). Поскольку длительность импульса τ меньше периода $2\pi/\Omega$, периодическое изменение интенсивности за время τ не будет существенным, поэтому для реального анализа можно считать, что поляризованная часть импульса постоянна. Ее величина будет зависеть от направления линии наблюдения относительно плоскости меридиана нейтронной звезды.

Как уже отмечалось ранее, эффекты нелинейной электродинамики вакуума, вызванные действием очень сильных полей (включая двулучепреломление), аналогичны нелинейным эффектам в веществе. В этом случае сильное магнитное поле можно рассматривать как «эффективную материю». Таким образом, параметры излучения, определяемые эффектами нелинейной электродинамики вакуума, могут быть замаскированы нелинейным влиянием вещества. В частности, из-за эффекта Фарадея неполя-

ризованное излучение, рассеиваясь на электронах плазмы, становится частично линейно поляризованным из-за неоднородного распределения углов поворота плоскости поляризации.

Этот эффект был проанализирован для случаев распространения света в замагниченном звездном ветре [236], сильно замагниченном оптически толстом аккреционном диске [237] и замагниченной конической оболочке, которую можно рассматривать как модель релятивистского джета [238]. Однако нелинейные электродинамические эффекты, обусловленные влиянием материи, будут доминировать над вакуумными эффектами, в основном для фотонов длинноволновых диапазонов электромагнитного спектра: оптического и радио. Действительно, поляризационные свойства материи в значительной степени определяются диэлектрической проницаемостью ε , для которой хорошо известно выражение [239]:

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N_e \hbar^2 e^2}{m_e E_\gamma^2}, \quad (3.38)$$

где E_γ энергия фотона, N_e концентрация электронов в плазме, m_e масса электрона. При подстановке в (3.38) характерного значения $N_e \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$ получим оценку $\varepsilon - 1 = -10^{-11}$ для $E_\gamma = 0.1 \text{ МэВ}$. Следовательно, влияние вещества на поляризационные свойства рентгеновского и гамма-излучения незначительно. Этот вывод подтверждается результатами численного моделирования, которые показывают, что степень поляризации излучения после прохождения им замагниченной плазмы уменьшается с уменьшением длины волны [240].

Нелинейные эффекты вакуума также могут быть связаны с некоторыми экзотическими процессами, например, с взаимным превращением в магнитном поле фотонов и легких голдстоуновских бозонов (аксионов). Электромагнитное излучение, возникающее при распаде аксиона в магнитном поле, может быть сильно поляризовано. Однако, согласно [241] вклад аксиона в диэлектрическую проницаемость обратно пропорционален квадрату частоты (или энергии) фотона, следовательно, такие процессы не могут быть существенными для определения поляризационных свойств высокоэнергетических фотонов.

Для оценки ожидаемой степени поляризации излучения, как для пуль-

саров, так и для магнетаров, конечно, необходимо учитывать реалистичные значения параметров энергетического спектра. Однако, в данном случае мы сосредоточимся именно на эффектах нелинейной электродинамики вакуума, которые должны быть наиболее выразительными в рентгеновском и гамма-излучении, для которого поляризационными эффектами, вызванными взаимодействием фотонов с веществом, можно было бы пренебречь. Поскольку такой эффект, как вакуумное двулучепреломление, не зависит от энергии фотона, ниже мы оцениваем возможность его наблюдения только по ожидаемым значениям интенсивности источника аналогичного пульсару Крабовидной туманности, в различных диапазонах энергий, без детального моделирования для различных типов энергетического спектра.

Как было показано выше, нелинейно-электродинамическое двулучепреломление рентгеновских и гамма-лучей в сильном магнитном поле пульсаров и магнетаров может быть выявлено как относительная задержка, около 1 мкс, двух мод сигнала поляризованных во взаимно ортогональных плоскостях, со степенью поляризации почти 100%. Для экспериментального измерения такой задержки необходимо реализовать точные поляризационные измерения, позволяющие получить среднюю кривую пульсаций для линейно поляризованных и неполяризованных компонент импульса с высоким временным разрешением (около 0.1 мкс). Также необходимо с высокой точностью (~ 0.1 мкс) измерять время прибытия зарегистрированных квантов за все время наблюдений.

Эффект двулучепреломления имеет место для фотонов, распространяющихся в сильном магнитном поле, и не зависит от типа источника фотонов. В случае магнетаров это подразумевает одно и то же предсказание для спокойного состояния и для вспышек. Однако типичная длительность вспышек магнетаров составляет около нескольких или десятков миллисекунд и соответствует области излучения около сотен километров. Это означает, что излучение вспышки было сгенерировано в магнитосфере, где магнитное поле слабее, чем вблизи поверхности нейтронной звезды. С другой стороны, предполагается, что периодическая пульсация, наблюдаемая в спокойном состоянии, была вызвана излучением из полярных областей, где вещество аккрецирует вдоль линий магнитного поля, т. е. источник расположен вблизи поверхности. Поэтому можно ожидать, что двулучепрелом-

ление вакуума будет более значительным в случае пульсаций в спокойном состоянии, и приведенные ниже оценки были выполнены только для этого случая.

Для окончательного выбора в пользу того или иного метода наблюдений проанализируем основные факторы, определяющие чувствительность поляризационных измерений. Например, рассмотрим метод комптоновского рассеяния, как наиболее универсальный метод поляризационных измерений в жесткой рентгеновской и гамма-астрономии. Пусть общее количество отсчетов сигнала будет I , а N – фоновые (шумовые) отсчеты. Тогда для ожидаемого отношения сигнал/шум, выраженного в количестве стандартных отклонений σ , для заданного времени экспозиции поляризационных измерений можно воспользоваться выражением:

$$\sigma = \frac{\mu IP}{\sqrt{2(I + N)}}, \quad (3.39)$$

где P – степень поляризации, а μ – инструментальный фактор поляризации, в котором также учитывается положение источника на небе.

Возможно получить оценку минимально обнаруживаемой степени поляризации P_{min} . Как следует из (3.39), для повышения чувствительности необходимо минимизировать шум, увеличить полезный сигнал и увеличить инструментальный фактор поляризации μ . Количество же отсчетов полезного сигнала зависит от обнаруженной интенсивности потока J , которая выражается в $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$ и равна

$$I = JS_{(eff)}\delta t, \quad (3.40)$$

где S_{eff} – эффективная площадь детектора, δt – временной набор статистики сигнала, который в случае пакета импульсов равен длительности пакета, а в случае медленно меняющихся сигналов определяется временем экспозиции. Из выражения (3.40) следует, что для увеличения полезного сигнала на фоне шума необходимо максимально увеличить эффективную площадь детектора и время экспозиции. В свою очередь, увеличение площади детектора неизбежно связано с увеличением его массы и размеров. Необходимо оценить разумные пределы, которые определяются, конечно, светимостью наблюдаемого источника.

Для оценки условий обнаружения 100% поляризации, т. е. $P_{min}=1$, положим $\mu=1$ и пренебрежем шумом. Тогда на каждом временном интервале (бине), на котором измеряется поляризация, должно быть обнаружено не менее 25 отсчетов, чтобы обеспечить уровень значимости 3σ . Временной бин также должен быть не более 1 мкс, по крайней мере, чтобы выявить задержку примерно в 1 мкс.

Тогда в случае непрерывного сигнала от пульсара за период пульсации T должно накопиться не менее $25T/(2(1 \text{ мкс}))$ отсчетов. Для простоты будем считать, что профиль пульсации прямоугольный с длительностью фазы импульса, равной периоду пульсации T .

Если интенсивность импульсной составляющей сигнала равна J (в единицах $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$), то в случае детектора с эффективной площадью S_{eff} за один период пульсации будет зарегистрировано $J \cdot T \cdot S_{eff}/2$ отсчетов. Тогда для выполнения условия детектирования 100% поляризации излучения, с временным разрешением 1 мкс, должно быть справедливо следующее выражение:

$$\frac{25T}{(1 \text{ мкс})} = JS_{eff}Tn = JS_{eff} \delta t, \quad (3.41)$$

где n – число периодов пульсации за общее время экспозиции δt .

Хорошо известно, что пульсар в Крабовидной туманности является наиболее интенсивным в различных энергетических диапазонах среди других пульсаров. Его спектр можно очень хорошо аппроксимировать в широком диапазоне энергий степенным законом с показателем мощности ~ 2 [242]. Для интенсивности пульсара в Крабовидной туманности можно получить следующие оценки для различных энергий: $J(E = 20-100 \text{ кэВ}) = 4.6 \cdot 10^{-2}$ фот./($\text{см}^2\text{с}$), $J(E = 0.1-1.0 \text{ МэВ}) = 1.2 \cdot 10^{-2}$ фот./($\text{см}^2\text{с}$). Учитывая, что период пульсации источника в Крабовидной туманности равен 33 мс, из (3.41) получаем оценки фактора $S_{eff}\delta t$.

Для диапазона энергий 20–100 кэВ эффект можно обнаружить при интенсивности 1 Краб, если $S_{eff} = 10^3 \text{ см}^2$, $\delta t \sim 100 \text{ кс}$ и для интенсивности 1 мКраб, если $S_{eff} = 10^4 \text{ см}^2$, $\delta t \sim 3 \text{ Мс}$. Для диапазона энергий 0.1–1.0 МэВ оценки имеют следующие значения, если $S_{eff} = 10^4 \text{ см}^2$, $\delta t \sim 100 \text{ кс}$ для интенсивности 1 Краб, и если $S_{eff} = 10^4 \text{ см}^2$, $\delta t \sim 10 \text{ Мс}$ для интенсивности 1 мКраб. Необходимо отметить, что эффективная площадь определяется не только геометрической площадью детектора, но и эффективностью рассе-

	Диапазоны энергии, МэВ			
SNR	0.002 - 0.001	0.05 - 0.1	0.5 - 1.0	100-500
$\frac{I}{N_{diff}}$	1	6	150	250
$\frac{I}{(N_{diff}+N_{int})}$	1	5	6	0.25

Таблица 7: Отношение сигнал/шум (SNR) поляризованной части излучения пульсара в различных диапазонах энергий для разных моделей фона.

яния или эффективностью протекания любого другого процесса, который используется для измерения поляризации. Для известных поляризационных методик, включая поляриметры Комптона, эффективность составляет не более 10%, обычно несколько процентов. Таким образом, геометрическую площадь поляриметра следует выбрать как минимум на порядок больше полученных выше оценок его эффективной площади.

Для выбора оптимального метода наблюдений необходимо проанализировать основные фоновые факторы в различных энергетических диапазонах. В общем случае фоновые отсчеты детектора N можно представить в виде суммы частей, обусловленных естественным или галактическим и метagalacticким диффузным фоном N_{diff} и собственным фоном детектора и спутника N_{int} . Возможное отношение сигнал/шум (SNR) можно оценить по энергетическому спектру пульсара, который обычно можно принять в виде спектра пульсара подобного Крабовидному. Соответствующие значения SNR представлены в Таблице 7 в относительных единицах, для которых SNR в диапазоне 2 – 20 кэВ принято равным 1. Эти значения получены для прибора с полем зрения 2π стерадиан, т. е. интенсивности всех фоновых компонент были умножены на 2π .

Как следует из Таблицы 7, если учитывать только естественный фон, то наилучшее значение SNR получается для диапазонов мягкого (0.1 – 1.0 МэВ) и высокоэнергетического (0.1 – 0.5 ГэВ) гамма-излучения. Однако следует отметить, что при энергиях менее 0.1 МэВ преобладающим является метagalacticкий диффузный фон, вклад которого в отсчеты детектора пропорционален полю зрения прибора. В то время как при энергиях > 0.1 МэВ шумовые отсчеты определяются, в основном, собственным фоном космического аппарата и детектора и слабо зависят от поля зрения.

Значения SNR, в которых учтен вклад собственного фона, также представлены в Таблице 7. В этом случае SNR имеет благоприятные значе-

ния для диапазона жесткого рентгеновского излучения и мягкого гамма-излучения. Это можно объяснить тем, что энергетический спектр собственного фона чрезвычайно жесткий, в представлении E^J он может даже возрасти с увеличением энергии. Конечно, собственный фон сильно зависит от массы космического аппарата, которая должна быть как можно меньше, но такая энергетическая зависимость интенсивности собственного фона характерна для спутников.

Таким образом, можно сделать вывод, что для исследования эффекта двулучепреломления нелинейной электродинамики вакуума оптимальным диапазоном энергий является 0.05 – 1.0 МэВ, который может быть расширен примерно до 10 МэВ. Что касается фактора $S_{eff}\Delta t$, то следует принять во внимание, что увеличение площади геометрии прибора не может быть бесконечным из-за ограниченности ресурсов космических экспериментов. Очевидно, что площадь детектора около 10^4 см² находится вблизи предела, который еще может быть реализован в космическом эксперименте. Что касается времени экспозиции, то оно может занять примерно все время эксперимента, которое может занять годы, в случае постоянной ориентации прибора на источник или в случае мониторинговых наблюдений с широкоугольным телескопом.

Именно длительные мониторинговые наблюдения необходимы для поиска и выявления эффектов нелинейной электродинамики. Учитывая обсуждаемые выше особенности, представляется, что использование мониторинговых приборов, основанных на поляриметрах Комптона, является наиболее реалистичным способом поиска и наблюдения двулучепреломления в вакууме. Поляриметры Комптона имеют реальное преимущество с точки зрения оптимизации SNR, поскольку они основаны на обнаружении парных совпадений падающих и рассеянных фотонов, что позволяет эффективно устранять фон прибора. Кроме того, такие приборы дают возможность локализовать источник регистрируемых гамма-квантов, выявляя полезные сигналы из фона, вызванного собственным шумом космических аппаратов и детекторов, а также гамма-излучением атмосферы (в случае околоземных наблюдений). При этом случайные совпадения наиболее опасны в пределах времени срабатывания τ тех шумовых событий, которые могут быть обнаружены независимо в диффузоре и детекторе рассеянных

квантов. Как известно, если количество шума N постоянно и одинаково в диффузоре и детекторе, то количество случайных совпадений M равно $M = N^2$. Таким образом, величину M можно сделать пренебрежимо малой в случае очень малого временного окна τ , что соответствует обсуждаемому выше временному разрешению около 0.1 мкс.

Поскольку в комптоновском процессе кванты рассеиваются предположительно под углом 90° относительно направления падения, а в случае линейной поляризации они рассеиваются нормально к плоскости поляризации, интенсивность рассеянных квантов будет гармонически модулирована по азимутальному углу. Измерения комптоновскими поляриметрами подразумевают получение гистограммы распределения пар совпадений по азимутальному углу и ее аппроксимацию гармонической функцией. Амплитуду этой функции можно использовать в качестве меры степени поляризации. Основным фактором, ухудшающим поляризационные возможности прибора, является кулоновское рассеяние, которое экспоненциально уменьшает поляризационный фактор прибора и минимально обнаруживаемую степень поляризации соответственно. Например, прибор CGRO EGRET, предназначенный для наблюдений в диапазоне гамма-лучей высокой энергии, эффективно уменьшает фактор поляризации в 10^{-4} раз, что сделало данный эксперимент нечувствительным к поляризационным измерениям.

Для повышения эффективности поляриметрических измерений необходимо максимально увеличить число парных совпадений, соответствующих взаимодействиям в двух соседних пикселях детектора. Для этого радиус пикселя детектора должен быть около одной массовой длины поглощения λ . В случае наиболее популярных кристаллов для детектирования гамма-квантов, с плотностью характерной для полупроводников, например, $CdZnTe$, или как сцинтилляторы $LaBr_3$, $CeBr_3$ и $Ce : GAGG$, радиус пикселя следует выбирать около 0.5 – 1.0 см. Таким образом, прибор поляриметра Комптона, который может быть использован для наблюдений двулучепреломления в нелинейной электродинамике вакуума, должен быть основан на детекторе большой площади ($\sim 10^4$ см²), состоящем из мелких пикселей размером около 1 см.

Одна из самых многообещающих будущих миссий гамма-поляриметрии, упомянутая выше, e-ASTROGAM. Ее полезная нагрузка состоит из крем-

ниевое трекера, пиксельного калориметра $CsI(Tl)$ и системы антисовпадений. Линейная поляризация падающих потоков фотонов может быть измерена как с помощью комптоновского рассеяния, так и с помощью образования пар. В диапазоне энергий 0.2 – 2 МэВ e-ASTROGAM сможет достичь минимальной обнаруживаемой поляризации (MDP) со значением всего лишь 0.7% при уровне достоверности 99% для источника типа «Краб» за 1 Мс. Это означает, что для обнаружения 100% поляризации на фронте импульса 1 мкс в случае источника типа «Краб» (с учетом длительности его импульса около десятков миллисекунд) время экспозиции должно быть около 10^2 Мс.

Следует учитывать, что в большинстве телескопов Комптона реконструкция направления падающего фотона дает область неопределенности, имеющую форму тонкой конической дуги. Однако существует альтернативный способ использования газовой трековой позиционной камеры, которая также называется Electron Tracking Compton Camera (ETCC), позволяющий обеспечить отслеживание электрона отдачи от первого взаимодействия Комптона с измерением направления импульса отдачи. Это позволяет уменьшить длину дуги и, следовательно, резко повысить чувствительность детектора.

Некоторые из этих телескопов чувствительны к энергиям фотонов до десятков МэВ в комптоновском режиме, но их чувствительность к поляризации излучения в диапазоне энергий выше нескольких МэВ либо отсутствует, либо не документирована. Метод GPD, основанный на пропорциональных счетчиках, дает хорошие возможности для рентгеновской поляриметрии. Например, миссии IXPE или XIPE обеспечивают $\sim 1\%$ MDP за 300 кс для источников 10 мКраб в диапазоне 2 – 8 кэВ. Это означает, что аналогичное время экспозиции всего около 300 кс необходимо для обнаружения 100% поляризации на фронте импульса в случае источника типа «Краб». Такое время экспозиции вполне достижимо в этих миссиях. Однако необходимо отметить, что в мягком рентгеновском диапазоне поляризационные эффекты нелинейной электродинамики вакуума могут быть замаскированы поляризацией излучения обусловленной рассеянием фотонов в веществе магнитосферы пульсара.

Широкоугольный гамма-телескоп (0.02 – 3.0 МэВ) Gammascope, кото-

рый сейчас разрабатывается в НИИЯФ МГУ в рамках российской космической программы, способен осуществлять поляризационные измерения на основе комптоновской методики. Этот прибор представляет собой поляризационно-чувствительный детектор (ПЧД) с кодирующей маской квазисферической (додекаэдрической) конфигурации. Его поле зрения около 2π стерадиан обеспечивает непрерывное наблюдение половины неба во время космического эксперимента.

Инструмент должен состоять из шести модулей ПЧД, размещенных на нижних частях рамы додекаэдра, и из шести панелей кодирующих масок, размещенных на верхних частях рамы додекаэдра, т. е. каждый модуль ПЧД имеет противоположную панель кодирующих масок, и вся система наблюдает половину неба. Благодаря такой конфигурации время экспозиции каждого источника в поле зрения прибора составит примерно все время эксперимента, т. е. несколько лет. Предполагается, что ПЧД должен состоять из большого числа пикселей цилиндрического сцинтиллятора ($CeBr_3$ или $Ce : GAGG$) диаметром около 0.5 см и высотой 2 см. В качестве активного экрана будет использоваться плотный сцинтиллятор типа $CsI(Tl)$ или BGO . Общая площадь в компактной конфигурации должна составлять $\sim 10^3$ см² и $\sim 10^4$ см² в оптимальном случае. Для измерения поляризации в инструменте предусмотрен специальный режим двойных совпадений.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что современная техника наблюдений предоставляет хорошие возможности для обнаружения эффектов нелинейной электродинамики вакуума, в частности, двулучепреломления вакуума в жестком излучении пульсаров и магнетаров. Однако для этого необходимы весьма сложные поляризационные измерения с использованием инструментов большой площади, в течение длительного отрезка времени непрерывных наблюдений.

4 Пертурбативный и непертурбативный эффект двулучепреломления электромагнитных волн в вакууме

Флуктуаций виртуальных пар заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле, приводят появлению радиационных поправок к Лагранжиану Квантовой Электродинамики (КЭД) и нелинейным эффектам в вакууме. В однопетлевом приближении, для однородного электромагнитного поля, такие поправки описываются с помощью эффективного Лагранжиана Гейзенберга-Эйлера (0.6).

Масштабный параметр нелинейности в электродинамике Гейзенберга-Эйлера (характерная квантовая электродинамическая индукция или критическая напряженность поля) $B_c = E_c = m^2 c^3 / e \hbar = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс определяет различные режимы теории. Принято выделять два режима «пертурбативный» или «пост-максвелловский» режим – приближение слабого поля, когда $E, B \ll E_c, B_c$ и «непертурбативный» режим, при котором подобное ограничение на компоненты электромагнитного поля не налагается. Следует отметить, что термин «пертурбативный» также используется для описания приближения слабой связи (петлевого приближения). Чтобы избежать неточностей, здесь мы будем использовать первый смысл этого термина.

В непертурбативном режиме КЭД плохо изучена и предоставляет новые возможности как для теоретических, так и для экспериментальных исследований. В частности, в этом режиме проявляется одно из самых удивительных свойств – нестабильность вакуума из-за рождения электрон-позитронных пар [11], и, хотя этот эффект пока не был обнаружен в прямых измерениях, достижения физики высокоинтенсивных лазеров и реализация таких проектов, как ELI, XCELS [243, 244] открывают новые перспективы в этой области.

Пертурбативный режим КЭД изучен хорошо, и многие из его предсказаний были экспериментально обнаружены. Например, аномальный магнитный момент электрона остается прекрасным примером беспрецедентного соответствия между теоретическими и экспериментальными результатами [245]. Другое проявление пертурбативной КЭД заключается в явлении

вакуумного двулучепреломления, при распространении электромагнитной волны во внешнем поле. Это явление похоже на оптическое двулучепреломление в кристалле, за исключением того, что для поляризации вакуума и возбуждения его нелинейности требуется присутствие внешнего поля. Экспериментальное подтверждение эффекта двулучепреломления в вакууме было получено относительно недавно в двух экспериментах. В работе [227] сообщается об обнаружении эффекта двулучепреломления вакуума для теплового излучения пульсара RX J1856.5-3754 в оптическом диапазоне. Авторы работы выполнили фильтрацию всех возможных механизмов поляризации излучения, в том числе связанных с процессами в веществе магнитосферы и показали, что обнаруженная высокая степень поляризации излучения этого пульсара не может быть объяснена никаким иными эффектами, кроме как двулучепреломлением вакуума. Еще одно косвенное подтверждение эффекта двулучепреломления в вакууме было получено как результат обнаружения рассеяния света на свете в эксперименте по периферийному рассеянию в канале $Pb + Pb(\gamma\gamma) = Pb^{(*)} + Pb^{(*)}\gamma\gamma$, выполненному коллаборацией ATLAS [246, 247]. Этот эффект, как и двулучепреломление вакуума, обусловлен четырех-фотонными взаимодействиями с двумя свободными фотонными линиями. После применения всех критериев отбора, в эксперименте было обнаружено 59 событий, при этом ожидавшиеся фоновые события составляли всего 12 ± 3 . Статистическая значимость в отношении фона составила 8.2 стандартных отклонения. К сожалению, результаты обоих экспериментов не позволяют однозначно установить параметры модели нелинейной электродинамики и зависимость эффективных коэффициентов двулучепреломления вакуума от характеристик электромагнитного поля.

Границы для наблюдения двулучепреломления в вакууме были получены в эксперименте PVLAS [248], в котором исследовалось распространение слабой электромагнитной волны в дипольном магнитном поле с индукцией $B_{ext} = 2.5 \cdot 10^4$ Гс. Результаты PVLAS установили новый предел вакуумного магнитного двулучепреломления выше уровня, предсказанного в КЭД. По мнению авторов, возможное расхождение может быть объяснено за пределами Стандартной Модели взаимодействием с аксионами. Эксперимент также ограничил константу связи аксионоподобных частиц и фо-

тонов [249, 250].

Поскольку вакуумное двулучепреломление является очень малым макроскопическим квантовым эффектом, для его обнаружения необходим достаточно сильный источник магнитного поля, который трудно реализовать в лабораторных условиях. В то же время использование компактных астрофизических объектов в качестве источников естественного магнитного поля открывает широкие возможности для исследования двулучепреломления вакуума, поскольку для многих пульсаров и магнетаров магнитное поле близко или даже превышает B_c . Вакуумное двулучепреломление в этом случае может быть обнаружено путем измерения поляризации рентгеновского и гамма-излучения, проходящего через область сильного магнитного поля вблизи пульсара. Расчеты в пертурбативном режиме КЭД, выполненные нами в разделе 3.1, показывают хорошие перспективы регистрации эффекта при современных возможностях космического эксперимента, однако существование пульсаров с полем, превышающим критическое значение (например, B1509-58 с $B \sim 1.5 \cdot 10^{14}$ Гс), позволяет надеяться на улучшение оценки величины эффекта и возможностей его регистрации, но для этого требуется получить описание двулучепреломления вакуума вне пертурбативного приближения.

Еще одна возможность исследования двулучепреломления в вакууме в пертурбативном режиме, при использовании источников электромагнитного поля с интенсивностями доступными в современных лабораторных условиях, опирается на увеличение чувствительности методики детектирования эффекта с помощью кольцевых лазерных интерферометров. В дальнейшем мы сосредоточимся на обсуждении двух вопросов. В разделе 4.1 будет рассмотрена возможность использования кольцевых лазеров для регистрации эффекта двулучепреломления, возникающего при распространении слабой электромагнитной волны в поле интенсивного лазерного излучения, в присутствии магнитного поля. Результаты этого раздела были опубликованы нами в работе [251] и приводятся для полноты описания, так как эффект оптической невзаимности, обнаруженный в нами в моделях конформно-инвариантной нелинейной электродинамики (5.21), также может быть зарегистрирован в экспериментах с кольцевым лазером. В разделе 4.2 будет получено описание эффекта двулучепреломления ва-

куума в непертурбативном режиме однопетлевых радиационных поправок КЭД. Основная цель данного исследования – расширить предсказания вакуумного двулучепреломления для различных экспериментов до значений сильных магнитных полей, близких к характерной квантовой электродинамической индукции. Результаты этого раздела опубликованы нами в работе [107].

4.1 Взаимодействие электромагнитных волн в присутствии магнитного поля в пертурбативном режиме нелинейной электродинамики вакуума

В параметризованном пост-максвелловском приближении (0.11) исследуем распространение слабой, плоской электромагнитной волны в поле плоской волны интенсивного лазерного излучения, в сильном постоянном, однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B}_0 . Векторы поля слабой волны обозначим \mathbf{e}_w и \mathbf{b}_w , а сильной волны \mathbf{E}_s , и \mathbf{B}_s . В силу линейности однородных уравнений электромагнитного поля, суммарные векторы напряженности электрического и индукции магнитного поля можно записать в виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{e}_w, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}_w, \quad (4.1)$$

при этом, в качестве условия применимости пост-максвелловского приближения, потребуем выполнения соотношений $|\mathbf{e}_w| \sim |\mathbf{b}_w| \ll |\mathbf{E}_s| \sim |\mathbf{B}_s| \sim |\mathbf{B}_0| \ll B_c = m^2 c^3 / e \hbar$, а также будем считать, что характерная длина сильной и слабой электромагнитной волны значительно превышает комптоновскую длину волны электрона.

В нулевом приближении по \mathbf{e}_w и \mathbf{b}_w уравнения (0.13) описывают распространение плоской сильной волны в постоянном магнитном поле. В этом случае, согласно [252], благодаря эффекту двулучепреломления вакуума, возникают две нормальные моды, одна из которых поляризована в плоскости, образованной волновым вектором сильной волны \mathbf{k} и направлением постоянного магнитного поля и имеет частоту $\omega_1(\mathbf{k})$:

$$(\mathbf{E}_s, [\mathbf{B}_0, \mathbf{k}]) = 0, \quad \omega_1 = kc \left(1 - \frac{2\xi\eta_1[\mathbf{k}, \mathbf{B}_0]^2}{k^2} \right), \quad (4.2)$$

а вторая мода поляризована перпендикулярно этой плоскости и имеет дисперсионное соотношение $\omega_2(\mathbf{k})$:

$$(\mathbf{E}_s, \mathbf{B}_0) = 0, \quad \omega_2 = kc \left(1 - \frac{2\xi\eta_2[\mathbf{k}, \mathbf{B}_0]^2}{k^2} \right). \quad (4.3)$$

Воспользуемся приближением эйконала для поиска поля слабой электромагнитной волны $\mathbf{b}_w = \mathbf{b}_0 \exp(iS)$, $\mathbf{e}_w = \mathbf{e}_0 \exp(iS)$ считая амплитуды \mathbf{b}_0 и \mathbf{e}_0 медленно изменяющимися по сравнению с функцией эйконала $S(\mathbf{r}, t)$. Неоднородные уравнения электромагнитного поля в пост-максвелловском приближении (0.13), после линеаризации по компонентам поля слабой волны (в приближении эйконала) приводят к однородным уравнениям $\Phi_{\alpha\beta} e_w^\beta = 0$, где введено обозначение для поляризационного оператора

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta} = & \left[(\nabla \mathbf{S})^2 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \right] \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} - \\ & - 4\xi \left[\eta_1 \left(\frac{k^\alpha}{k} (\nabla \mathbf{S}, \mathbf{E}_s) - E_s^\alpha \left\{ \frac{(\mathbf{k}, \nabla \mathbf{S})}{k} + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right\} + [\nabla \mathbf{S}, \mathbf{B}_0]^\alpha \right) \times \right. \\ & \times \left(\frac{k^\beta}{k} (\nabla \mathbf{S}, \mathbf{E}_s) - E_s^\beta \left\{ \frac{(\mathbf{k}, \nabla \mathbf{S})}{k} + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right\} + [\nabla \mathbf{S}, \mathbf{B}_0]^\beta \right) + \\ & + \eta_2 \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \left\{ \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{E}_s]^\alpha}{k} + B_0^\alpha \right\} + [\nabla \mathbf{S}, \mathbf{E}_s]^\alpha \right) \times \\ & \left. \times \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \left\{ \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{E}_s]^\beta}{k} + B_0^\beta \right\} + [\nabla \mathbf{S}, \mathbf{E}_s]^\beta \right) \right]. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Условие существования нетривиальных решений для компонент $(\mathbf{e}_w)^\beta$ удобно рассмотреть отдельно для состояний сильной электромагнитной волны с линейной поляризацией, соответствующей двум нормальным модам с дисперсионными соотношениями (4.2) и (4.3).

Если сильная электромагнитная волна $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_\parallel = \mathbf{E}_\parallel^0 \cos(\omega_1 t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))$ поляризована в плоскости внешнего магнитного поля $(\mathbf{E}_\parallel, [\mathbf{B}_0, \mathbf{k}]) = 0$, условие существования нетривиального решения для поля слабой волны $\det \|\Phi_{\alpha\beta}\| = 0$ приводит к двум независимым уравнениям эйконала:

$$\begin{aligned} (\partial_0 S)^2 - (\nabla \mathbf{S})^2 + 4\xi\eta_1 \mathbf{E}_\parallel^2(\mathbf{n}, \mathbf{g})^2 + 4\xi\eta_1 \left[(\nabla \mathbf{S})^2 \mathbf{B}_0^2 - (\nabla \mathbf{S}, \mathbf{B}_0)^2 - \right. \\ \left. - 2(\mathbf{g}, \mathbf{n})(\nabla \mathbf{S}, [\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_\parallel]) - 2(\nabla \mathbf{S}, \mathbf{E}_\parallel)(\nabla \mathbf{S}, [\mathbf{n}, \mathbf{B}_0]) \right] = 0, \quad (4.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\partial_0 S)^2 - (\nabla \mathbf{S})^2 + 4\xi\eta_2 \mathbf{E}_{\parallel}^2(\mathbf{n}, \mathbf{g})^2 + 4\xi\eta_2 \left[(\partial_0 S)^2 \mathbf{B}_0^2 - (\nabla \mathbf{S}, \mathbf{B}_0)^2 - \right. \\
& \left. - 2\partial_0 S (\nabla \mathbf{S}, [\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_{\parallel}]) + 2(\nabla \mathbf{S}, \mathbf{B}_0)(\mathbf{n}, [\nabla \mathbf{S}, \mathbf{E}_{\parallel}]) \right] = 0, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

где введено обозначение для единичного вектора ориентированного в направлении распространения сильной волны $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ и вспомогательного вектора $\mathbf{g} = \mathbf{n}\partial_0 S + \nabla \mathbf{S}$.

Решения $(S_1)_{\parallel}$ и $(S_2)_{\parallel}$ уравнений (4.5) и (4.6) соответственно, с пост-максвелловской точностью, могут быть получены методом последовательных приближений и имеют вид [251]:

$$\begin{aligned}
(S_1)_{\parallel} = & -\Omega t + (\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \frac{\xi\eta_1 (\mathbf{E}_{\parallel}^0)^2 \sin 2(\omega_1 t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))}{2k} \left\{ \frac{\Omega}{c} - (\mathbf{n}, \mathbf{q}) \right\} - \\
& - \frac{4\xi\eta_1 \sin(\omega_1 t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))}{k} \left\{ \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{E}_{\parallel}^0)(\mathbf{q}, [\mathbf{n}, \mathbf{B}_0])}{\Omega/c - (\mathbf{q}, \mathbf{n})} - (\mathbf{q}, [\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_{\parallel}^0]) \right\}, \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S_2)_{\parallel} = & -\Omega t + (\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \frac{\xi\eta_2 (\mathbf{E}_{\parallel}^0)^2 \sin 2(\omega_1 t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))}{2k} \left\{ \frac{\Omega}{c} - (\mathbf{n}, \mathbf{q}) \right\} - \\
& - \frac{4\xi\eta_2 \sin(\omega_1 t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))}{k\{\Omega/c - (\mathbf{q}, \mathbf{n})\}} \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{B}_0)(\mathbf{n}, [\mathbf{q}, \mathbf{E}_{\parallel}^0]) + \frac{\Omega}{c}(\mathbf{q}, [\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_{\parallel}^0]) \right\}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

где Ω частота и \mathbf{q} волновой вектор слабой волны.

Если сильная электромагнитная волна $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp}^0 \cos(\omega_2 t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))$ имеет линейную поляризацию ортогональную к плоскости содержащей волновой вектор \mathbf{k} и вектор индукции внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 , так что $(\mathbf{E}_{\perp}, \mathbf{B}_0) = 0$, то условие $\det \|\Phi_{\alpha\beta}\| = 0$, как и ранее, приводит к двум независимым уравнениям для эйконала:

$$\begin{aligned}
& (\partial_0 S)^2 - (\nabla \mathbf{S})^2 + 4\xi\eta_1 \mathbf{E}_{\perp}^2(\mathbf{n}, \mathbf{g})^2 + 4\xi\eta_1 \left[(\nabla \mathbf{S})^2 \mathbf{B}_0^2 - (\nabla \mathbf{S}, \mathbf{B}_0)^2 - \right. \\
& \left. - 2(\mathbf{g}, \mathbf{n})(\nabla \mathbf{S}, [\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_{\perp}]) - 2(\nabla \mathbf{S}, \mathbf{E}_{\perp})(\nabla \mathbf{S}, [\mathbf{n}, \mathbf{B}_0]) \right] = 0, \quad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\partial_0 S)^2 - (\nabla \mathbf{S})^2 + 4\xi\eta_2 \mathbf{E}_{\perp}^2(\mathbf{n}, \mathbf{g})^2 + 4\xi\eta_2 \left[(\partial_0 S)^2 \mathbf{B}_0^2 - (\nabla \mathbf{S}, \mathbf{B}_0)^2 - \right. \\
& \left. - 2(\partial_0 S)^2 (\mathbf{E}_{\perp}, [\mathbf{n}, \mathbf{B}_0]) - 2\partial_0 S (\nabla \mathbf{S}, [\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_{\perp}]) + 2(\nabla \mathbf{S}, \mathbf{B}_0)(\mathbf{n}, [\nabla \mathbf{S}, \mathbf{E}_{\perp}]) \right] = 0. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Следует отметить, что уравнение (4.9) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (4.5). Несложно получить соответствующие решения

$(S_1)_\perp$ и $(S_2)_\perp$ уравнений эйконала (4.9) и (4.10) в пост-максвелловском приближении

$$(S_1)_\perp = -\Omega t + (\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \frac{\xi\eta_1(\mathbf{E}_\perp^0)^2 \sin 2(\omega_2 t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))}{2k} \left\{ \frac{\Omega}{c} - (\mathbf{n}, \mathbf{q}) \right\} - \quad (4.11)$$

$$- \frac{4\xi\eta_1 \sin(\omega_2 t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))}{k} \left\{ \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{E}_\perp^0)(\mathbf{q}, [\mathbf{n}, \mathbf{B}_0])}{\Omega/c - (\mathbf{q}, \mathbf{n})} - (\mathbf{q}, [\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_\perp^0]) \right\}.$$

$$(S_2)_\perp = -\Omega t + (\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \frac{\xi\eta_2(\mathbf{E}_\perp^0)^2 \sin 2(\omega_2 t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))}{2k} \left\{ \frac{\Omega}{c} - (\mathbf{n}, \mathbf{q}) \right\} - \quad (4.12)$$

$$- \frac{4\xi\eta_2 \sin(\omega_2 t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))}{k\{\Omega/c - (\mathbf{q}, \mathbf{n})\}} \times$$

$$\times \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{B}_0)(\mathbf{n}, [\mathbf{q}, \mathbf{E}_\perp^0]) + \frac{\Omega}{c}(\mathbf{q}, [\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_\perp^0]) - \frac{\Omega^2}{c^2}(\mathbf{E}_\perp^0, [\mathbf{n}, \mathbf{B}_0]) \right\}.$$

Все четыре решения для слабой электромагнитной волны (4.7)-(4.8) и (4.11)-(4.12) имеют одинаковый закон дисперсии:

$$\frac{\Omega^2}{c^2} - \mathbf{q}^2 + 2\xi\eta_{1,2} \left(\frac{\Omega}{c} - (\mathbf{n}, \mathbf{q}) \right)^2 \mathbf{E}^2 + 4\xi\eta_{1,2} [\mathbf{q}, \mathbf{B}_0]^2 = 0, \quad (4.13)$$

для обобщенной записи которого, амплитуда напряженности электрического поля для каждой из указанных ранее поляризаций сильной электромагнитной волны \mathbf{E}_\parallel^0 или \mathbf{E}_\perp^0 обозначена \mathbf{E} . Воспользуемся выражением (4.13) для вычисления частот генерации кольцевого лазера, аналогично [253]. Для увеличения значения поправок нелинейной электродинамики вакуума будем считать, что слабая волна распространяется в направлении перпендикулярном \mathbf{B}_0 и противоположном направлению распространения сильной волны. В этом случае частоты генерации кольцевого лазера будут определяться выражениями:

$$\nu_{1,2} = \frac{c}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{2\xi\eta_{1,2}l}{P} (2\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}_0^2) \right\}, \quad \nu_0 = \frac{c}{\lambda}, \quad (4.14)$$

где l – длина активного участка кольцевого лазера, области резонатора в которой локализовано магнитное поле \mathbf{B}_0 и поле сильной электромагнитной волны (в остальной части резонатора присутствует только поле слабой волны), P периметр кольцевого лазера, а $\lambda = 2\pi c/\Omega$.

Для выполнения количественных оценок воспользуемся параметрами кольцевого лазера [254, 255], общий периметр которого $P = 348$ см, дли-

на волны $\lambda = 633$ нм, а длина активного участка может достигать $L \sim 5 \cdot 10^{-2}$ см. В качестве источника сильных электромагнитных волн, может быть использован хром-форстеритовый лазер, обеспечивающий напряженность электрического поля в сильной электромагнитной волне $E \sim 1.3 \cdot 10^7$ ед. СГС., а источник постоянного внешнего магнитного поля может быть реализован на основе гибридных сверхпроводящих магнитов с индукцией магнитного поля $B_0 = 5 \cdot 10^5$ Гс. Оценки разности частот генерации $\Delta\nu_{01} = \nu_0 - \nu_1$, $\Delta\nu_{02} = \nu_0 - \nu_2$ и $\Delta\nu_{12} = \nu_1 - \nu_2$ при указанных характеристиках кольцевого лазера и значениях внешних электромагнитных полей, для электродинамики Гейзенберга-Эйлера и модели Борна-Инфельда приведены в Таблице 8.

Электродинамика	$\Delta\nu_{01}, 10^{-7}$ Гц	$\Delta\nu_{02}, 10^{-7}$ Гц	$\Delta\nu_{12}, 10^{-7}$ Гц
Гейзенберга-Эйлера	11.9	21.1	9.2
Борна-Инфельда	1.17	1.17	0

Таблица 8: Разность частот генерации кольцевого лазера.

В кольцевом лазере [254] может быть зарегистрирована минимальная разность частот генерации $\Delta\nu = 1.4 \cdot 10^{-7}$ Гц, что вполне достаточно для надежного экспериментального обнаружения поправок нелинейной электродинамики Гейзенберга-Эйлера. Усиление эффекта двулучепреломления вакуума может быть достигнуто в непертурбативном режиме, при переходе к более интенсивным источникам электромагнитного поля. В следующем разделе будет построено описание этого эффекта в сильном магнитном поле для электродинамики Гейзенберга-Эйлера вне ограничений пост-максвелловского приближения.

4.2 Непертурбативное двулучепреломление в однопетлевой нелинейной электродинамике вакуума

Расширение границ применимости предсказаний параметризованной пост-максвелловской электродинамики в непертурбативный режим дает новый взгляд на особенности протекания процессов в экстремально сильном электромагнитном поле и позволяет усилить оценки для наблюдательных проявлений эффектов нелинейной электродинамики вакуума.

Однопетлевые радиационные поправки КЭД приводят к эффективной поправке к Лагранжиану свободного электромагнитного поля, которая в непертурбативном режиме имеет следующий вид [88]:

$$L_1 = -\frac{\alpha B_c^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{s^3} \left[sa \cot(sa) \cdot sb \coth(sb) - 1 - \frac{s^2}{3}(b^2 - a^2) \right] ds, \quad (4.15)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ – постоянная тонкой структуры и параметры a и b выражаются через компоненты векторов электромагнитного поля:

$$a = -\frac{i}{\sqrt{2}B_c} \left(\sqrt{F+iG} - \sqrt{F-iG} \right), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}B_c} \left(\sqrt{F+iG} + \sqrt{F-iG} \right), \quad (4.16)$$

где использованы обозначения для инварианта $F = (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)/2$ и псевдоскаляра $G = (\mathbf{E}\mathbf{B})$. Представление этих величин через компоненты тензора электромагнитного поля приведено в Приложении 5.4.

Вспомогательные параметры $\pm a$ и $\pm b$ в случае постоянного электромагнитного поля являются собственными значениями тензора электромагнитного поля F_{ik} , и это делает задачу вычисления радиационных поправок КЭД разрешимой [88] аналитически.

В полуклассическом подходе теория Гейзенберга-Эйлера может быть интерпретирована как нелинейная электродинамика сплошных сред со специальными материальными уравнениями, в которых вектор поляризации \mathbf{P} и вектор намагниченности \mathbf{M} , индуцированные внешними полями \mathbf{E} и \mathbf{B} , могут быть вычислены с помощью Лагранжиана (4.15):

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{B}}. \quad (4.17)$$

Для получения явного вида этих векторов полезно ввести некоторые вспомогательные соотношения:

$$\frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial b}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E}a + \mathbf{B}b}{2\sqrt{F^2 + G^2}}, \quad \frac{\partial a}{\partial \mathbf{B}} = -\frac{\partial b}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E}b - \mathbf{B}a}{2\sqrt{F^2 + G^2}}, \quad (4.18)$$

подстановка которых в (4.17) приводит к окончательному виду эффектив-

ных материальных уравнений для непertурбативной однопетлевой КЭД:

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha}{8\pi^2(a^2 + b^2)} [I_1 \mathbf{E} + I_2 \mathbf{B}], \quad \mathbf{M} = -\frac{\alpha}{8\pi^2(a^2 + b^2)} [I_1 \mathbf{B} - I_2 \mathbf{E}], \quad (4.19)$$

где для краткости использованы следующие обозначения для интегралов:

$$I_1 = \int_0^\infty \left\{ \frac{ab[a \sinh(2sb) - b \sin(2sa)]}{2 \sinh^2(sb) \sin^2(sa)} - \frac{2(a^2 + b^2)}{3s} \right\} e^{-s} ds, \quad (4.20)$$

$$I_2 = \int_0^\infty \left\{ \frac{ab[a \sin(2sa) + b \sinh(2sb)]}{2 \sinh^2(sb) \sin^2(sa)} - \frac{(a^2 + b^2)}{s} \cot(sa) \coth(sb) \right\} e^{-s} ds. \quad (4.21)$$

Легко проверить выполнение предельного перехода соотношений (4.19) к материальным уравнениям (0.14) в пертурбативном приближении, имеющем место при относительно слабых полях $|\mathbf{E}|, |\mathbf{B}| \ll B_c$.

Рассмотрим слабую электромагнитную волну $\mathbf{e}_w, \mathbf{b}_w$, распространяющуюся в сильном внешнем магнитном поле \mathbf{B}_0 . Будем считать что напряженность поля в волне достаточно мала, поэтому $|\mathbf{e}_w|, |\mathbf{b}_w| \ll B_c, |\mathbf{B}_0|$. Поскольку в нелинейной электродинамике вакуума сохраняется принцип суперпозиции для однородных уравнений поля, в непertурбативных материальных соотношениях (4.19) могут быть использованы суммарные векторы $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}_w$ и $\mathbf{E} = \mathbf{e}_w$. Также следует учесть слабость поля волны и разложить эти соотношения в ряд до ведущего порядка по \mathbf{e}_w и \mathbf{b}_w , что приводит к линеаризованным материальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \mathbf{e}_w - 2\xi \left\{ \eta_1 Y_1 \mathbf{B}_0^2 \mathbf{e}_w - 2\eta_2 Y_2 (\mathbf{B}_0 \mathbf{e}_w) \mathbf{B}_0 \right\}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}_w - 2\xi \eta_1 \left\{ Y_1 \mathbf{B}_0^2 \mathbf{b}_w + 2Y_3 (\mathbf{B}_0 \mathbf{b}_w) \mathbf{B}_0 + Y_1 \mathbf{B}_0^2 \mathbf{B}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

в которых используются линеаризованные выражения для параметров a и b

$$a = \frac{(\mathbf{B}_0 \mathbf{e}_w)}{B_c B_0}, \quad b = \frac{B_0}{B_c} \left\{ 1 + \frac{(\mathbf{B}_0 \mathbf{b}_w)}{B_0^2} \right\}, \quad (4.23)$$

а также введены следующие обозначения для вспомогательных функций:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= -\frac{45}{4b_0^2} \int_0^\infty \frac{e^{-z/b_0}}{z^2} \left\{ \coth(z) - \frac{z}{\sinh^2(z)} - \frac{2z}{3} \right\} dz, \\
Y_2 &= \frac{45}{14b_0^2} \int_0^\infty \frac{e^{-z/b_0}}{z^2} \left\{ \frac{2z^2 - 3}{3} \coth(z) + \frac{z}{\sinh^2(z)} \right\} dz, \\
Y_3 &= -\frac{45}{8b_0^2} \int_0^\infty \frac{e^{-z/b_0}}{z^2} \left\{ \frac{2z^2 \coth(z) - z}{\sinh^2(z)} - \coth(z) \right\} dz,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

и безразмерного параметра индукции внешнего магнитного поля $\mathbf{b}_0 = \mathbf{B}_0/B_c$. Переход а пертурбативному режиму может быть получен при $B_0 \ll B_c$, что приводит к асимптотическому разложению интегралов:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= 1 - \frac{6}{7}b_0^2 + \frac{16}{7}b_0^4 + \dots, & Y_2 &= 1 - \frac{26}{49}b_0^2 + \frac{176}{147}b_0^4 + \dots, \\
Y_3 &= 1 - \frac{12}{7}b_0^2 + \frac{48}{7}b_0^4 + \dots.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Графики точной (4.24) и приближенной (4.25) зависимости функций Y от нормированной напряженности магнитного поля представлены на Рисунке 15. Как видно, даже при малых значениях поля $b_0 \ll 1$ приближенное описание может вносить существенные неточности, исправление которых потребует учета новых членов в разложении (4.25). Следует отметить, что, поскольку единица является ведущим членом во всех перечисленных выше разложениях, линеаризованные материальные уравнения (4.22) в пределе слабого поля содержат пертурбативные выражения для векторов поляризации и намагничивания:

$$\mathbf{P} = \frac{\xi}{2\pi} \left\{ \eta_1(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\mathbf{E} + 2\eta_2(\mathbf{E}\mathbf{B})\mathbf{B} \right\}, \quad \mathbf{M} = -\frac{\xi}{2\pi} \left\{ \eta_1(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\mathbf{B} - 2\eta_2(\mathbf{E}\mathbf{B})\mathbf{E} \right\}. \tag{4.26}$$

Кроме того, переход от пертурбативного к непертурбативному режиму в материальных уравнениях заключается в замене «постмаксвелловских» констант η_1 и η_2 на функции $\zeta_1 = \eta_1 Y_1(b_0)$, $\zeta_2 = \eta_2 Y_2(b_0)$, $\zeta_3 = \eta_1 Y_3(b_0)$, что приводит к более сложной зависимости закона дисперсии электромагнитной волны от индукции внешнего магнитного поля.

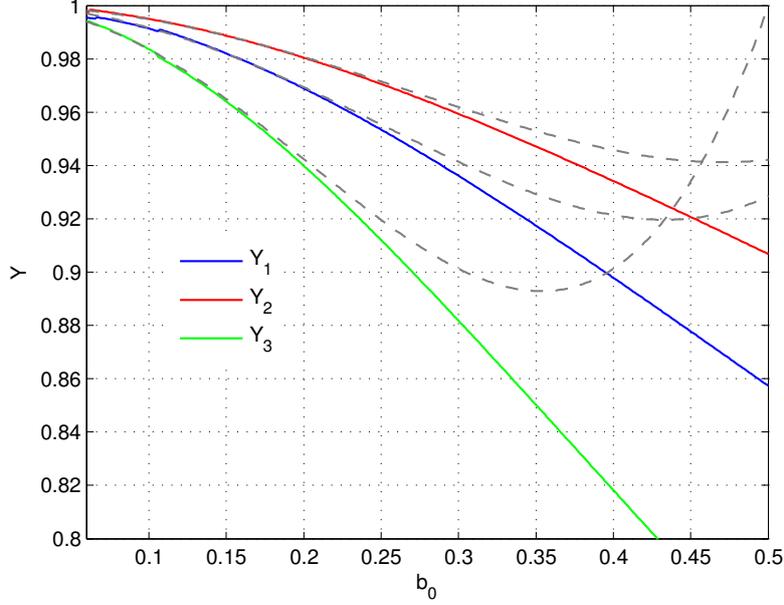


Рис. 15: Сравнение точных и пертурбативных функций Y . Приближенные функции нанесены серыми пунктирными линиями.

Для получения дисперсионных соотношений, воспользуемся приближением эйконала и представим поле волны в виде: $\mathbf{e}_w = \mathbf{e} \exp \{iS(\mathbf{r}, t)\}$, $\mathbf{b}_w = \mathbf{b} \exp \{iS(\mathbf{r}, t)\}$, где \mathbf{e} и \mathbf{b} векторы амплитуда, а S эйконал. Как обычно для эйконального приближения, будем считать, что изменения амплитуды вдоль луча распространения волны малы и в вычислениях ими можно пренебречь. Подстановка \mathbf{e}_w , \mathbf{b}_w и материальных соотношений (4.22) в уравнения аналогичные уравнениям электродинамики сплошных сред, приводит к выражениям однородным относительно компонент напряженности электрического поля волны:

$$\Pi_{\alpha\beta} e_w^\beta = 0, \quad (4.27)$$

где индексы принимают значения $\alpha, \beta = 1..3$, а тензор поляризации $\Pi_{\alpha\beta}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta} = & \left\{ \left((\nabla S)^2 - (\partial_0 S)^2 \right) \delta_{\alpha\beta} - \partial_\alpha S \partial_\beta S \right\} \times \left\{ 1 - 2\zeta_1 b_0^2 \right\} \\ & - 4\zeta_3 \left[\nabla S \mathbf{b}_0 \right]_\alpha \left[\nabla S \mathbf{b}_0 \right]_\beta - 4\zeta_2 (\partial_0 S)^2 (\mathbf{b}_0)_\alpha (\mathbf{b}_0)_\beta, \end{aligned} \quad (4.28)$$

квадратными скобками обозначено векторное произведение. Существование нетривиальных решений уравнений (4.27) требует выполнения условия

$\det\|\Pi_{\alpha\beta}\| = 0$, что в конечном итоге приводит к дисперсионным соотношениям для электромагнитной волны в приближении эйконала:

$$\begin{aligned} & \left\{ (\nabla S)^2 - (\partial_0 S)^2 + 4\zeta_3 \left[(\mathbf{b}_0 \nabla S)^2 - b_0^2 (\nabla S)^2 \right] + 2\zeta_1 b_0^2 \left[(\partial_0 S)^2 - (\nabla S)^2 \right] \right\} \\ & \times \left\{ (\nabla S)^2 - (\partial_0 S)^2 + 4\zeta_2 \left[(\mathbf{b}_0 \nabla S)^2 - b_0^2 (\partial_0 S)^2 \right] + 2\zeta_1 b_0^2 \left[(\partial_0 S)^2 - (\nabla S)^2 \right] \right\} \\ & \times \left\{ 2\zeta_1 b_0^2 - 1 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Мультипликативная структура полученных дисперсионных соотношений указывает на сохранение двулучепреломления вакуума даже в случае однопетлевой непертурбативной КЭД.

Первый множитель в (4.29) соответствует закону дисперсии для нормальной волны, поляризованной перпендикулярно внешнему магнитному полю (\perp -мода), тогда как второй множитель описывает моду, поляризованную вдоль поля \mathbf{B}_0 (\parallel -мода). Последний множитель в (4.29) не зависит от параметров волны и его равенство нулю ожидается при колоссально больших значениях индукции магнитного поля $B_0 \sim B_c \exp(1/\alpha)$, для которых была предсказана неустойчивость вакуума КЭД [127]. Чтобы избежать такого режима, в будущем, мы будем рассматривать магнитные поля с индукцией близкой к B_c .

Рассмотрим свойства нормальных волн более подробно, а также воспользуемся полученными дисперсионными соотношениями для усиления некоторых оценок относительно возможности обнаружения вакуумного двулучепреломления в эксперименте. Существуют два традиционных подхода к интерпретации дисперсионных соотношений для нелинейной электродинамики вакуума. Первый опирается на представление о вакууме как о эффективной сплошной среде. Двулучепреломление вакуума в этом случае объясняется несовпадением показателей преломления нормальных мод $n_\perp \neq n_\parallel$. Вторым подходом предполагается, что электромагнитная волна распространяется в пространстве-времени с эффективной геометрией, следующей из дисперсионных соотношений. Такая интерпретация объясняет двупреломление вакуума различием метрических тензоров эффективного пространства-времени $G_\perp^{ik} \neq G_\parallel^{ik}$ для разных нормальных мод. Для полноты изложения мы используем каждый из этих подходов при анализе полученных дисперсионных соотношений.

Для описания в терминах показателей преломления следует выполнить подстановку эйконала $S(t, \mathbf{r}) = \omega t - (\mathbf{k}\mathbf{r})$ в дисперсионные соотношения (4.29), и учесть связь между волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω , которая является обычной для однородной волны в сплошной среде $\mathbf{k} = \omega n \mathbf{q}/c$, где n показатель преломления, а \mathbf{q} единичный вектор в направлении распространения волны. Такая подстановка дает явные выражения для показателей преломления нормальных мод:

$$n_{\perp}^2 = 1 + \frac{4\zeta_3 b_0^2 \sin^2 \theta}{1 - 2b_0^2[\zeta_1 + 2\zeta_3 \sin^2 \theta]}, \quad n_{\parallel}^2 = 1 + \frac{4\zeta_2 b_0^2 \sin^2 \theta}{1 - 2b_0^2[\zeta_1 - 2\zeta_2 \cos^2 \theta]}, \quad (4.30)$$

где θ угол между волновым вектором \mathbf{k} и вектором индукции магнитного поля \mathbf{B}_0 . Эти соотношения уточняют выражения, полученные ранее [256], в которых зависимость от угла θ имеет более простой вид:

$$n_{\perp}^2 \approx 1 + 4\zeta_3 b_0^2 \sin^2 \theta, \quad n_{\parallel}^2 \approx 1 + 4\zeta_2 b_0^2 \sin^2 \theta, \quad (4.31)$$

что также близко к результатам работы [257], полученным на основе квантового подхода с фиксированным выбором калибровки.

Поскольку зависимость от индукции магнитного поля в точных выражениях (4.30) отличается от (4.31), становится возможным выяснить, существуют ли условия, при которых $n_{\perp} = n_{\parallel}$ и двулучепреломление подавляется. Равенство показателей преломления приводит к соотношению, которое справедливо для любого угла θ :

$$(\zeta_3 - \zeta_2)(1 - 2\zeta_1 b_0^2) + 4\zeta_3 \zeta_2 b_0^2 = 0. \quad (4.32)$$

Однако, численное решение показывает отсутствие нулей этого уравнения при произвольном магнитном поле, близком к B_c , поэтому эффект двулучепреломления вакуума сохраняется.

Для анализа зависимости показателей преломления от величины магнитного поля выберем $\theta = \pi/2$, что наиболее ценно для экспериментальных исследований, так как в этом случае показатели преломления максимальны. Как следует из результатов численного моделирования, показатель преломления n_{\parallel} увеличивается практически линейно при $1 < b_0 < 100$ и показывает нелинейный рост в более широком диапазоне значений индук-

ции магнитного поля. Тогда как n_{\perp} стремится к насыщению при значении $(n_{\perp})_{sat} - 1 \approx 4 \cdot 10^{-4}$ и перестает зависеть от индукции поля. Зависимость $n_{\perp,||} - 1$ для $b_0 < 3$ представлена на левом графике на Рисунке 16. На правом графике построена точная разность $n_{||} - n_{\perp}$, следующая из (4.30), и эта же разность соответствующая пертурбативной КЭД: $n_{||} - n_{\perp} \approx 2(\eta_2 - \eta_1)b_0^2$, нанесена на график серой линией.

Несмотря на приближенный характер пертурбативного описания, наблюдается хорошее соответствие точному результату вплоть до значений индукции поля $b_0 \approx 2$. Это указывает на то, что расхождение более чем на порядок между пертурбативным предсказанием двулучепреломления КЭД и экспериментальным результатом, полученным в PVLAS [248], не связано с неточностью пертурбативного описания и должно иметь более глубокую физическую причину.

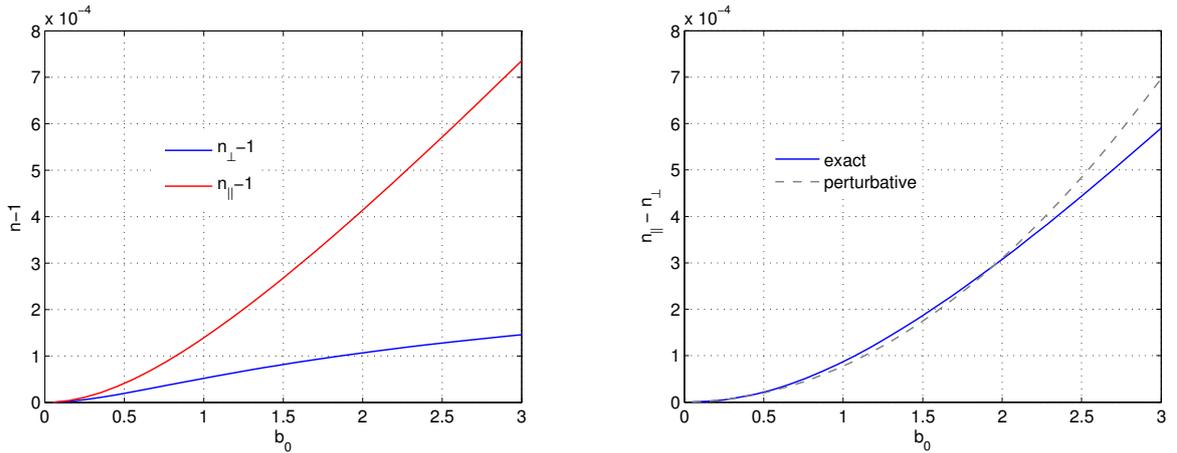


Рис. 16: Показатели преломления и их разность в зависимости от величины нормированной индукции магнитного поля $b_0 = B_0/B_c$.

Другой традиционный подход к интерпретации дисперсионных соотношений основан на представлении об эффективной геометрии [102]. Он предполагает, что волна распространяется в искривленном пространстве-времени, геометрия которого зависит от внешнего магнитного поля. Дисперсионные соотношения (4.29) теперь интерпретируются, как уравнение Гамильтона-Якоби для безмассовой частицы в эффективном пространстве-времени с метрическим тензором $G_{\perp,||}^{ik}$, соответствующим каждой нормальной моде:

$$\left[G_{\perp}^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} \right] \times \left[G_{||}^{mn} \frac{\partial S}{\partial x^m} \frac{\partial S}{\partial x^n} \right] = 0. \quad (4.33)$$

Как следует из (4.29), компоненты эффективного метрического тензора в

непертурбативном режиме имеют вид:

$$G_{\perp}^{00} = g^{00}, \quad G_{\perp}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \frac{4\zeta_3}{1 - 2\zeta_1 b_0^2} \times (b_0^2 \delta^{\alpha\beta} - b_0^\alpha b_0^\beta), \quad (4.34)$$

$$G_{\parallel}^{00} = g^{00}, \quad G_{\parallel}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \frac{4\zeta_2}{1 - 2\zeta_1 b_0^2 + 4\zeta_2 b_0^2} \times (b_0^2 \delta^{\alpha\beta} - b_0^\alpha b_0^\beta), \quad (4.35)$$

где g^{ik} метрический тензор пространства Минковского (или другого фонового псевдориманова пространства), а индексы обозначенные греческой буквой соответствуют пространственным координатам $\alpha, \beta = 1..3$. Легко проверить, что в пределе слабого поля $b_0 \ll 1$ выражения (4.34) принимают форму эффективного метрического тензора пост-максвелловского приближения (3.4):

$$G_{\perp, \parallel}^{ik} \approx g^{ik} + 4\eta_{1,2}(b_0^2 \delta^{\alpha\beta} - b_0^\alpha b_0^\beta). \quad (4.36)$$

Такое соответствие позволяет распространить некоторые предсказания для проявлений двулучепреломления вакуума, полученные на основе пертурбативного метрического тензора (4.36), в непертурбативный режим путем простой замены пост-максвелловских параметров:

$$\eta_1 \rightarrow \frac{\zeta_3}{1 - 2\zeta_1 b_0^2}, \quad \eta_2 \rightarrow \frac{\zeta_2}{1 - 2\zeta_1 b_0^2 + 4\zeta_2 b_0^2}. \quad (4.37)$$

Такое расширение особенно актуально для описания эффектов в сильном электромагнитном поле вблизи пульсаров и магнетаров. Магнитные поля этих астрофизических источников могут значительно превышать критический предел $b_0 = B_0/B_c \gg 1$. Одно из наблюдательных проявлений вакуумного двулучепреломления в окрестности пульсара связано с относительной задержкой нормальных мод для импульсов жесткого рентгеновского и гамма-излучения. Благодаря эффекту вакуумного двулучепреломления скорость распространения \perp -моды больше, чем \parallel -моды, поэтому она достигнет детектора раньше, и как следствие ведущая часть импульса, приходящего от рентгеновского источника к детектору, будет линейно поляризована из-за \perp -моды. Эта часть импульса будет иметь длительность Δt . По истечении этого времени, \parallel -мода достигнет детектора и состояние поляризации импульса изменится на эллиптическое. В разделе 3.1 нами было получено выражение для времени Δt в пост-максвелловском приближении

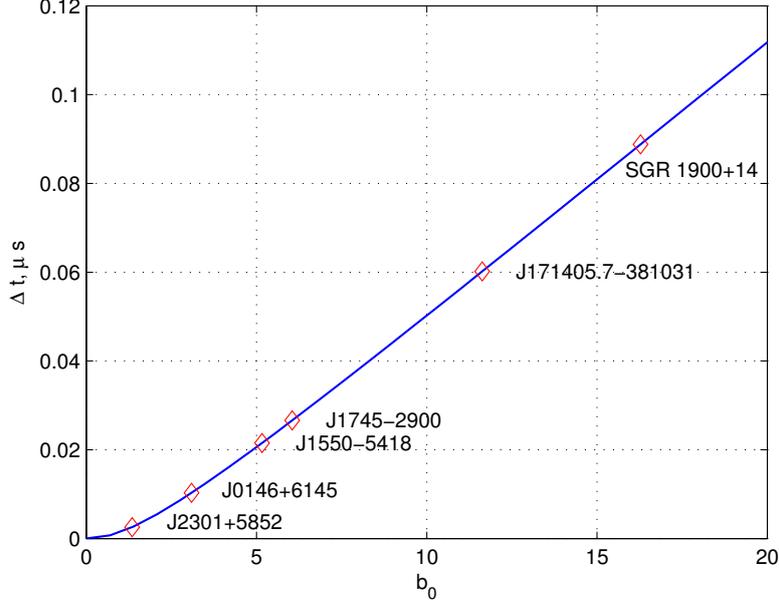


Рис. 17: Время задержки между приходом фронтов \perp и \parallel -мод в детектор.

для произвольного расположения источника излучения и детектора. Это выражение достаточно громоздко, поэтому для выполнения оценок воспользуемся его упрощенным аналогом [223]:

$$\Delta t = \frac{123\pi(\eta_2 - \eta_1)b_0^2 R_s}{128c}, \quad (4.38)$$

где R_s радиус пульсара. Расширение описания двулучепреломления (4.37) позволяет оценить порядок временной задержки Δt в непертурбативном режиме:

$$\Delta t \simeq \frac{b_0^2 R_s}{c} \left[\frac{\zeta_3}{1 - 2\zeta_1 b_0^2} - \frac{\zeta_2}{1 - 2\zeta_1 b_0^2 + 4\zeta_2 b_0^2} \right]. \quad (4.39)$$

Зависимость времени задержки от напряженности магнитного поля и ее оценки для некоторых пульсаров и магнетаров представлены на Рисунке 17. Для оценок были использованы данные о пульсарах из каталогов McGill [258] и ATNF [259], радиус пульсара принят равным $R_s = 10$ км. Например, для объекта J1808-2024, обладающего магнитным полем с индукцией $B_0 \sim 2.06 \cdot 10^{15}$ Гс, задержка может достигать $\Delta t \sim 0.3$ мкс. Такое значение времени задержки оказываются достаточными для экспериментальной регистрации эффекта двулучепреломления вакуума при современных возможностях рентгеновской и гама-поляриметрии, и согласуется с оценками выполненными ранее в разделе 3.3. Следует обратить внимание,

что зависимость между временем задержки и индукцией магнитного поля практически линейная, а не квадратичная, как в пертурбативном режиме (4.38), поэтому прямая интерполяция пертурбативного описания в область $b_0 > 1$ приведет к завышенной оценке для времени Δt . Во избежание такой неточности, зависимость между задержкой и значением индукции магнитного поля в непертурбативном режиме, для $2 < b_0 < 100$ может быть аппроксимирована выражением $\Delta t = (5.8b_0 - 7) \times 10^{-3}$ мкс, которое может быть использовано при планировании будущих астрофизических миссий, направленных на исследование эффектов нелинейной электродинамики вакуума, таких как XIRE [260] и IXRE [261].

5 Конформно-инвариантная модель нелинейной электродинамики вакуума

Отсутствие надежных экспериментальных данных в пользу одной из моделей нелинейной электродинамики вакуума привело к появлению целого ряда новых теоретических построений, выбор Лагранжиана для которых, как правило, является эвристическим, и в некоторых случаях может быть основан только на возможности нахождения точного аналитического решения для рассматриваемого частного случая полевой конфигурации. Существенно больший интерес представляет изучение моделей нелинейной электродинамики вакуума (NED), основанных на более глубоких принципах, в качестве одного из которых можно постулировать максимальное сохранение свойств теории Максвелла и одновременно предсказание нелинейного отклика вакуума. Общим правилом при построении большинства NED является соответствие электродинамике Максвелла в пределе слабого поля (в качестве исключения можно привести модели [61, 62], для которых это правило не выполняется), в то же время, большинство моделей не обладают симметриями, присущими теории Максвелла.

Электродинамика Максвелла инвариантна относительно 15-параметрической группы Ли [262], включающей в себя группу Пуанкаре (10 параметров), преобразование скейлинга координат (1 параметр), и конформную группу преобразований (4 параметра). Кроме того, эта теория обладает такими свойствами, как дуальная инвариантность, нулевой след тензора

энергии-импульса и, безусловно, удовлетворяет фундаментальным принципам, таким как причинность, унитарность и энергодоминантному условию Хокинга-Эллиса. Соответствие симметриям теории Максвелла может быть мощным инструментом отбора для новых моделей нелинейной электродинамики вакуума.

В этой главе будет рассмотрен общий случай конформно-инвариантных моделей нелинейной электродинамики (CNED), обладающих большинством из перечисленными выше симметриями. Отличительной чертой таких моделей является отсутствие размерного параметра, описывающего нелинейность. Например, в модели Борна-Инфельда таким параметром является значение напряженности поля в центре точечного заряда, а в теории Гейзенберга-Эйлера – характерная квантовая индукция. Для рассматриваемых в настоящем разделе моделей, этот параметр должен быть безразмерным, и, вероятно, может быть выражен в виде комбинации фундаментальных констант. Для моделей CNED будут определены условия двулучепреломления электромагнитных волн и оптической невзаимности, опубликованные нами в работе [32]; будут получены точные аналитические решения, описывающие компактные астрофизические объекты, опубликованные нами в работе [33]; будет предложена методика генерации моделей CNED с расширенной дуальной инвариантностью, опубликованная нами в работе [111].

Рассмотрим общий случай функционала действия свободного электромагнитного поля нелинейной электродинамики вакуума, в пространстве-времени с метрическим тензором g_{ik}

$$S = \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \mathcal{L}(J_2, J_4) d^4x, \quad (5.1)$$

где $J_2 = F_{ik}F^{ki}$ и $J_4 = F_{ik}F^{kl}F_{lm}F^{mi}$ и $g = \det||g_{ik}||$. Выполнив варьирование по компонентам метрики, и используя обозначение $F_{ik}^{(2)} = F_{im}F^m \cdot_k$ для второй степени тензора электромагнитного поля, несложно получить симметричный тензор энергии-импульса для действия (5.1):

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{ik}} = 4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \right] F_{ik}^{(2)} + \left[(2J_4 - J_2^2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} - \mathcal{L} \right] g_{ik}, \quad (5.2)$$

след для которого имеет вид:

$$T = T_i^i = 4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} J_2 + 2J_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} - \mathcal{L} \right]. \quad (5.3)$$

В качестве основного критерия построения нашей модели, мы примем максимальное соответствие симметриям электродинамики Максвелла. Прежде всего, мы потребуем бесследовости тензора энергии-импульса $T = 0$, что приводит к уравнению для Лагранжиана:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} J_2 + 2J_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} - \mathcal{L} = 0. \quad (5.4)$$

В последующем, мы покажем, что модели, Лагранжиан которых удовлетворяет уравнению (5.4), обладают инвариантностью относительно конформно-метрической группы преобразований, поэтому такие модели мы будем называть конформно-инвариантными (CNED).

Лагранжианы CNED имеют еще одну отличительную особенность: комбинация таких Лагранжианов при определенном условии может быть также Лагранжианом CNED. Для получения этого условия рассмотрим функцию $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ Лагранжианов \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , каждый из которых в отдельности удовлетворяет условию бесследовости тензора энергии-импульса. После подстановки \mathcal{L} в уравнение (5.4)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{L}_1} \left[J_2 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial J_2} + 2J_4 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial J_4} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{L}_2} \left[J_2 \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial J_2} + 2J_4 \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial J_4} \right] - \mathcal{L}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = 0, \quad (5.5)$$

и принимая во внимание, что \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 также являются конформно-инвариантными Лагранжианами, получаем уравнение, любое решение которого сохранит конформные свойства модели:

$$\mathcal{L}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{L}_1} + \mathcal{L}_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{L}_2} - \mathcal{L}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = 0. \quad (5.6)$$

Общее решение уравнения (5.4) может быть получено методом характеристик и имеет вид:

$$\mathcal{L} = J_2 W \left(\frac{J_2}{\sqrt{2J_4}} \right) = J_2 W(z), \quad (5.7)$$

где W произвольная функция отношения инвариантов $z = J_2/\sqrt{2J_4}$, принимающего значения от $z = -1$ для чисто магнитного поля, до $z = 1$, для чисто электрического поля. Аргумент z безразмерен, поэтому в моделях CNED отсутствует параметр для масштаба нелинейности модели. Этот факт приводит к весьма специфической особенности характерной и для теории Максвелла – отсутствию возможности определить условия перехода к приближению слабого поля (пертурбативному режиму). Эта особенность, возможно, разрешится после квантования CNED и вычисления радиационных поправок, тогда квантовая индукция B_c будет играть роль полевого масштаба модели. Следует отметить, что при $W = 1$ CNED совпадает с электродинамикой Максвелла. Поэтому принцип соответствия, в нашем случае, можно сформулировать в виде требования, чтобы единица была ведущим членом разложения модельной функции W по малому безразмерному параметру, который связан с нелинейностью.

Модели нелинейной электродинамики с Лагранжианом (5.7), помимо бесследового тензора энергии-импульса, обладают и другими симметриями электродинамики Максвелла. Очевидна инвариантность таких моделей относительно группы Пуанкаре и масштабирования координат. Чтобы показать инвариантность относительно конформной группы, рассмотрим преобразование метрического тензора: $g_{ik} \rightarrow \tilde{g}_{ik} = \Omega(x)g_{ik}$, где Ω произвольный, положительно определенный, масштабный множитель. Инварианты тензора электромагнитного поля при конформно-метрическом отображении изменяются по правилу:

$$J_2 \rightarrow \tilde{J}_2 = J_2/\Omega^2, \quad J_4 \rightarrow \tilde{J}_4 = J_4/\Omega^4. \quad (5.8)$$

Принимая во внимание, что определитель метрического тензора преобразуется как $\sqrt{-g} \rightarrow \sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^2\sqrt{-g}$, а также, используя (5.7) и (5.8), получим утверждение об инвариантности действия для моделей с Лагранжианом (5.7) относительно конформной группы. Более того, тензор энергии-импульса этих моделей оказывается пропорционален тензору энергии-импульса теории Максвелла:

$$T_{ik} = 4 \left[W + z(1 - z^2)W' \right] \left\{ F_{ik}^{(2)} - \frac{g_{ik}}{4} J_2 \right\}, \quad (5.9)$$

где штрих W' обозначает производную модельной функции по аргументу z . Не смотря на то, что условие бесследовости тензора энергии-импульса, в силу структуры соотношения (5.9), будет выполнено для произвольной функции W , следует учесть некоторые ограничения, вытекающие из фундаментальных принципов.

Выбор функции $W(z)$ для каждой конкретной модели CNED должен быть согласован с фундаментальными принципам, основными из которых являются условия унитарности и причинности (1.40)-(1.42). Принимая во внимание, что в общем случае Лагранжиан CNED имеет вид (5.7), можно значительно упростить эти неравенства, что в конечном итоге приводит только к двум нетривиальным ограничениям:

$$W(z = \pm 1) \geq 0, \quad W'(z = \pm 1) \leq 0. \quad (5.10)$$

Данные ограничения не являются единственными, поскольку Лагранжиан также должен быть согласован с энергодоминантным условием Хокинга-Эллиса (1.46)-(1.47), которое выполняется для электродинамики Максвелла, и поэтому важно сохранить соответствие ему и для моделей CNED. Класс конформных моделей электродинамики является особым, так как имеет очень простые ограничения, вытекающие из этого условия:

$$T_{ik}a^i a^k = \frac{1}{4\pi} \left[W + z(1 - z^2)W' \right] \times \left\{ F_{ik}^{(2)} a^i a^k - \frac{J_2}{4} a_k a^k \right\} \geq 0, \quad (5.11)$$

$$T_{ki}T^{im}a_m a^k = \frac{J_4}{64\pi^2} \left[W + z(1 - z^2)W' \right]^2 \times \left\{ 1 - \frac{z^2}{2} \right\} a_k a^k \geq 0.$$

Последнее неравенство выполняется всегда, в силу того что $|z| \leq 1$ и $J_4 \geq 0$, тогда как последний множитель в первом из неравенств (5.11) также не является отрицательным, так как представляет собой энергетическое условие для теории Максвелла, и поэтому выполнение энергодоминантного условия для CNED будет иметь место при:

$$W(z) + z(1 - z^2)W'(z) \geq 0. \quad (5.12)$$

Это неравенство соответствует первому выражению в (5.10) для чистого электрического или магнитного поля, когда $z = \pm 1$. Условия в виде нера-

венств (5.10) и (5.12) позволяют наложить некоторые ограничения на параметры модели, и будут использованы в последующем для анализа соответствия частных решений полевых уравнений фундаментальным принципам.

После обсуждения общих свойств и особенностей модели, перейдем к описанию наблюдательных проявлений конформной нелинейной электродинамики.

5.1 Эффективные показатели двулучепреломления вакуума для моделей конформно-инвариантной нелинейной электродинамики

Как уже отмечалось ранее, вакуумное двулучепреломление электромагнитных волн во внешнем поле – один из наиболее ярких эффектов, присущий многим моделям нелинейной электродинамики, и его исследование является перспективным способом проверки их экспериментального статуса. Получим показатели преломления вакуума для нормальных мод в CNED. Для этого рассмотрим возбуждение в виде электромагнитной волны $\tilde{f}_{ik} = f_{ik} \exp\{-iS\}$, с амплитудой f_{ik} и эйконалом $S(\mathbf{r}, t)$, распространяющееся на фоне постоянного и однородного поля F_{ik} . Будем предполагать, что возбуждение слабое по сравнению с внешним полем $|f_{ik}| \ll |F_{ik}|$.

Общая форма закона дисперсии для таких возбуждений, в случае произвольной Лоренц-инвариантной нелинейной электродинамики ранее была получена в [126]. Закон дисперсии для CNED с Лагранжианом (5.7) в псевдоримановом пространстве-времени с метрическим тензором g_{ik} имеет вид:

$$\left[G_{(1)}^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} \right] \times \left[G_{(2)}^{mn} \frac{\partial S}{\partial x^m} \frac{\partial S}{\partial x^n} \right] = 0, \quad (5.13)$$

где введены обозначения для компонент метрического тензора эффективного пространства-времени:

$$G_{(1)}^{ik} = U g^{ik} + V \frac{F_{(2)}^{ik}}{\sqrt{2J_4}}, \quad G_{(2)}^{mn} = g^{mn}, \quad (5.14)$$

а также для вспомогательных коэффициентов

$$\begin{aligned} U &= z^2(z^2 - 1)(z^2 - 2)W'' + z(3z^4 - 7z^2 + 3)W' - W, \\ V &= -2(z^2 - 2)\left\{z(z^2 - 1)W'' + (3z^2 - 2)W'\right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Как следует из (5.14), электромагнитное возбуждение, как и в оптическом кристалле, расщепляется на две моды, каждая из которых распространяется в эффективном пространстве-времени с метрическим тензором, зависящим от поляризации волны. Фазовая скорость одной из мод не зависит от внешнего поля. Эту волну, аналогично кристаллооптике, будем называть обыкновенной волной. Показатель преломления для нее всегда равен единице $n_2 = 1$. Для другой же моды скорость распространения и показатель преломления существенно зависят от внешнего поля. Чтобы получить эту зависимость будем считать, что фоновое пространство-время является псевдоевклидовым $g^{ik} = \text{diag}\{+1, -1, -1, -1\}$, а эйконал волны представим в виде $S = \omega t - (\mathbf{k}\mathbf{r})$. Также предположим, что волновой вектор \mathbf{k} является вещественным и связан с показателем преломления n соотношением, свойственным однородным волнам в сплошных средах $\mathbf{k} = \omega n \mathbf{q}/c$, где \mathbf{q} – единичный вектор. Воспользуемся вспомогательным выражением для свертки

$$\begin{aligned} F_{(2)}^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} &= \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}^2 - \frac{2\omega}{c} (\mathbf{k}[\mathbf{E}\mathbf{B}]) + [\mathbf{k}\mathbf{B}]^2 - (\mathbf{k}\mathbf{E})^2 = \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \mathbf{E}^2 + n^2 \left([\mathbf{q}\mathbf{B}]^2 - (\mathbf{q}\mathbf{E})^2 \right) - 2n(\mathbf{q}[\mathbf{E}\mathbf{B}]) \right\}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

чтобы представить закон дисперсии (5.13) в виде:

$$\begin{aligned} n^2 \left\{ 1 + \frac{V \left((\mathbf{q}\mathbf{E})^2 - [\mathbf{q}\mathbf{B}]^2 \right)}{2U \sqrt{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 2(\mathbf{E}\mathbf{B})^2}} \right\} + \frac{nV(\mathbf{q}[\mathbf{E}\mathbf{B}])}{U \sqrt{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 2(\mathbf{E}\mathbf{B})^2}} &= \\ &= 1 + \frac{VE^2}{2U \sqrt{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 2(\mathbf{E}\mathbf{B})^2}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Из этого уравнения может быть получено общее решение для показателя преломления n , однако оно будет крайне громоздким и сложным для анализа, поэтому рассмотрим несколько частных случаев такого решения,

наиболее простой и важный из которых, соответствует распространению волны в чисто магнитном поле $\mathbf{B} \neq 0$, $\mathbf{E} = 0$. Для этой полевой конфигурации $z = z_1 = -1$, а также $U = W'_1 - W_1$, $V = 2W'_1$, где производные функции W следует вычислить в точке z_1 , как отмечено индексом. Закон дисперсии (5.17) для этого случая примет более простой вид:

$$n^2 = \left[1 - \frac{W'_1}{W'_1 - W_1} \sin^2 \theta \right]^{-1} \Big|_{z=-1}, \quad (5.18)$$

где $\theta = (\widehat{\mathbf{q} \mathbf{B}})$ угол связан с направлением распространения волны. Отличительной особенностью данного выражения является независимость показателя преломления вакуума от абсолютной величины магнитного поля (двулучепреломление определяется безразмерной константой, которая является параметром функции W), в отличие от показателей преломления электродинамики Гейзенберга-Эйлера, в пертурбативном режиме квадратично зависящих от индукции фонового магнитного поля:

$$n_1 = 1 + \frac{4\alpha^2 B^2}{90\pi m^4} \sin^2 \theta, \quad n_2 = 1 + \frac{7\alpha^2 B^2}{90\pi m^4} \sin^2 \theta, \quad (5.19)$$

где m масса электрона, α постоянная тонкой структуры. Также следует отметить, что зависимость показателя преломления (5.18) от угла θ в пертурбативном режиме будет отличаться от аналогичной зависимости в модели Гейзенберга-Эйлера, что может быть использовано для экспериментального исследования двулучепреломления вакуума в магнитном поле.

Рассмотрим еще один частный случай, когда волна распространяется в чистом электрическом поле $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{B} = 0$, для которого $z = z_2 = 1$, а также $U = -W'_2 - W_2$ и $V = 2W'_2$. Несложно получить выражение для показателя преломления из закона дисперсии (5.17):

$$n^2 = \left[1 + \frac{W'_2}{W_2} \sin^2 \psi \right]^{-1} \Big|_{z=1}, \quad (5.20)$$

где $\psi = (\widehat{\mathbf{q} \mathbf{E}})$ угол между направлением распространения волны и вектором напряженности внешнего электрического поля.

Из условий унитарности и причинности (5.10) следует, что показатель преломления для необыкновенной волны (5.18) и (5.20), при любом направ-

лении распространения волны, больше или равен единице, а для обыкновенной волны, строго равен единице.

В завершение опишем случай, когда $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{B} \neq 0$, но при этом $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Будем считать, что в выбранной системе отсчета $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, и поэтому для такой конфигурации поля $z = 1$. Закон дисперсии (5.17) содержит слагаемые, нечетные относительно операции инверсии \mathbf{q} , что приводит к различию показателей преломления для волн, распространяющихся во взаимно противоположных направлениях и проявлению эффекта оптической невязимности в вакууме. Разность показателей преломления для таких волн может быть получена из закона дисперсии с учетом (5.15):

$$n_+ - n_- = \frac{2W'(\mathbf{q}[\mathbf{E}\mathbf{B}])}{W(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + W'([\mathbf{q}\mathbf{E}]^2 - (\mathbf{q}\mathbf{B})^2)}. \quad (5.21)$$

Экспериментальные возможности по обнаружению эффекта оптической невязимности в пост-максвелловском приближении описаны в разделе 4.1. Выражения (5.21) позволяют расширить оценки этих возможностей для непертурбативного режима CNED.

Полная аналитическая форма Лагранжиана конформно-инвариантных моделей нелинейной электродинамики позволяет выполнить поиск точных самосогласованных решений уравнений электромагнитного и гравитационного поля. Перейдем к описанию таких решений для компактных астрофизических объектов.

5.2 Черная дыра Рейснера-Нордстрема с дионным зарядом в моделях CNED

Прежде всего, получим решение для стационарной черной дыры с электрическим и магнитным зарядами в гравитации Эйнштейна с ненулевой космологической постоянной Λ . Функционал действия в этом случае в естественной системе единиц $G = c = 1$ можно записать в виде:

$$S = - \int \frac{R - 2\Lambda}{16\pi} \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.22)$$

где \mathcal{L} общий Лагранжиан моделей CNED (5.7) и R скалярная кривизна.

Варьируя функционал действия, несложно получить уравнения электромагнитного поля и уравнения Эйнштейна:

$$R_{ik} - \frac{R}{2}g_{ik} + \Lambda g_{ik} = 8\pi T_{ik}, \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} Q^{kn}}{\partial x^n} = -4\pi j_{(e)}^k, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} {}^*F^{kn}}{\partial x^n} = -4\pi j_{(m)}^k, \quad (5.24)$$

где T_{ik} тензор энергии-импульса CNED (5.9), ${}^*F^{kn} = e^{knlm} F_{lm}/2\sqrt{-g}$ дуально-сопряженный тензор электромагнитного поля, $j_{(e)}^k$ и $j_{(m)}^k$ четырехмерные векторы плотности тока для электрических и магнитных зарядов, а вспомогательный тензор Q^{kn} может быть представлен в виде:

$$Q^{kn} = W F^{kn} + z \left(F^{kn} - \frac{J_2}{J_4} F_{(3)}^{kn} \right) W', \quad (5.25)$$

где штрих обозначает производную функции $W(z)$ по ее аргументу и $F_{(3)}^{kn} = F^{kl} F_{lm} F^{mn}$ третья степень тензора электромагнитного поля. Воспользуемся выражением для интервала статического сферически-симметричного пространства-времени:

$$ds^2 = e^{2\alpha(r)} dt^2 - e^{2\beta(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.26)$$

и также представим в общей форме тензор электромагнитного поля для статического дионного заряда, находящегося в начале системы координат:

$$F_{ik} = E(r) \{ \delta_i^0 \delta_k^1 - \delta_i^1 \delta_k^0 \} - B(r) r^2 \sin \theta \{ \delta_i^2 \delta_k^3 - \delta_i^3 \delta_k^2 \}, \quad (5.27)$$

где $E(r)$ и $B(r)$ радиальное электрическое и магнитное поле. При выбранных симметриях, инварианты тензора электромагнитного поля и безразмерный параметр $z = J_2/\sqrt{2J_4}$ принимают вид:

$$J_2 = 2[e^{-2(\alpha+\beta)} E^2 - B^2], \quad J_4 = 2[e^{-4(\alpha+\beta)} E^4 + B^4], \quad (5.28)$$

$$z = \frac{e^{-2(\alpha+\beta)} E^2 - B^2}{[e^{-4(\alpha+\beta)} E^4 + B^4]^{1/2}}.$$

Поскольку точечный источник расположен в начале координат, ненулевые

компоненты четырехмерных векторов плотности тока равны:

$$j_{(e)}^0 = \frac{Q_c}{4\pi r^2} e^{-(\alpha+\beta)} \delta(r), \quad j_{(m)}^0 = \frac{Q_t}{4\pi r^2} \delta(r), \quad (5.29)$$

где Q_c электрический заряд и Q_t топологический заряд магнитного монополя. Для получения решений уравнений электромагнитного поля воспользуемся подстановкой:

$$E(r) = Q_e e^{\alpha+\beta}/r^2, \quad B(r) = Q_t/r^2, \quad (5.30)$$

где Q_e постоянная интегрирования, связанная с электрическим и магнитным зарядом черной дыры. Так как компоненты напряженности электрического поля и индукции магнитного поля имеют одинаковую зависимость от координат, аргумент z принимает постоянное значение и может изменяться от $z = 1$ для чистого электрического поля до $z = -1$ для чистого магнитного поля. Используя вспомогательные выражения (5.28) и (5.25), нетрудно найти что (5.30) является решением уравнений электромагнитного поля, при условии что постоянная интегрирования Q_e и заряды Q_c и Q_t связаны соотношением:

$$Q_e \left\{ W(z) + \frac{z(1-z^2)}{2} \left[1 + \frac{1-z^2}{1 + \operatorname{sgn}(z) \sqrt{1 - (1-z^2)^2}} \right] W'(z) \right\} = Q_c, \quad (5.31)$$

где аргумент также выражается через заряды $z = Q_e^2 - Q_t^2 / (Q_e^4 + Q_t^4)^{1/2}$.

Появление двух констант с размерностью заряда в описании поля точечного источника можно сопоставить с возможной разницей между инертной и гравитационной массами для точечной частицы. Поскольку константа Q_e содержится в выражении напряженности электрического поля, ее можно назвать «зарядом-силой», в отличие от константы Q_c , которая является множителем в плотности источника, ее можно назвать «зарядом-источником» или кулоновским зарядом. Интересно найти условие, при выполнении которого «заряд-источник» и «заряд-сила» совпадают $Q_e = Q_c$, при наличии топологического заряда $Q_t \neq 0$. Это требование будет выполнено, когда выражение в фигурных скобках в (5.31) равно единице, что

можно обеспечить приняв:

$$W(z) = 1 + \frac{c_1}{z} \sqrt{1 - \operatorname{sgn}(z) \sqrt{1 - (1 - z^2)^2}}, \quad (5.32)$$

где c_1 произвольная безразмерная постоянная. Легко проверить, что ограничения, следующие из условий унитарности и причинности (5.10), теперь можно выразить в виде $W'(z = \pm 1) = -\sqrt{2}c_1 \leq 0$, поэтому постоянная $c_1 \geq 0$ должна быть положительной. В то же время, энергодоминантное условие (5.12) приводит к неравенству:

$$W + z(1 - z^2)W' = 1 - \frac{c_1 z \sqrt{1 - \operatorname{sgn}(z) \sqrt{1 - (1 - z^2)^2}}}{\operatorname{sgn}(z) \sqrt{1 - (1 - z^2)^2}} \geq 0, \quad (5.33)$$

второе слагаемое в котором ограничено, принимает наименьшее значение $-c_1\sqrt{2}$ при $z = -1$ и монотонно возрастает до нуля при $z = 1$, поэтому энергодоминантное условие для данной модели CNED будет выполнено, когда $0 \leq c_1 \leq \sqrt{2}$. Из наблюдательных данных для эффектов нелинейной электродинамики вакуума следует, что нелинейность является малой поправкой к электродинамике Максвелла, поэтому $c_1 \ll 1$ и выполнение неравенства (5.33) надежно обеспечивается.

Другой отличительный случай CNED имеет место, когда $Q_c = 0$ и $Q_e \neq 0$, что означает, что топологический заряд Q_t будет источником как для электрического, так и для магнитного поля. В этом случае модельная функция $W(z)$ будет определяться выражением (5.32), из которого следует вычесть единицу. Однако, из предыдущего рассмотрения очевидно, что такая модель противоречит условиям унитарности и причинности (5.10), и вряд ли имеет отношение к реальному миру.

Перейдем к решению уравнений Эйнштейна (5.23), среди которых для статического пространства-времени с интервалом (5.26) нетривиальными и независимыми остаются только два уравнения:

$$e^{-2\beta} \left[\frac{2\beta'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2} + \Lambda = 8\pi T_0^0, \quad -e^{-2\beta} \left[\frac{2\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2} + \Lambda = 8\pi T_1^1, \quad (5.34)$$

где ненулевые компоненты тензора энергии-импульса для выбранной кон-

фигурации электромагнитного поля имеют вид:

$$T_{0\cdot}^{\cdot 0} = T_{1\cdot}^{\cdot 1} = -T_{2\cdot}^{\cdot 2} = -T_{3\cdot}^{\cdot 3} = \frac{Q_e^2 + Q_t^2}{8\pi r^4} \left[W(z) + z(1 - z^2)W'(z) \right], \quad (5.35)$$

а штрих обозначает производную по соответствующему аргументу. Выполнив вычитание второго уравнения (5.34) из первого, получим условие $\alpha + \beta = f(t)$, где произвольную функцию f можно принять равной нулю, после выбора масштаба времени, что позволит записать решение для обоих уравнений в следующем виде:

$$g_{00}(r) = e^{2\alpha(r)} = e^{-2\beta(r)} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\mathcal{K}}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda r^2. \quad (5.36)$$

Постоянные интегрирования были выбраны для получения асимптотического предела решения в теории Эйнштейна-Максвелла, поэтому M масса черной дыры, и аналогично [263], использовано обозначение для величины, имеющий смысл квадрата эффективного заряда:

$$\mathcal{K} = \{Q_e^2 + Q_t^2\} \left[W(z) + z(1 - z^2)W'(z) \right]. \quad (5.37)$$

Полученное решение соответствует черной дыре Рейснера-Нордстрема в CNED. Анализ термодинамики такой черной дыры, выполненный ранее в [263], может быть полностью применен к решению (5.36). Авторы данной работы, выделяют три различных класса черных дыр. Первый тип соответствует случаю, когда $\mathcal{K} > \Lambda/12$ и был назван «быстрыми черными дырами». Для таких черных дыр отсутствуют термодинамические фазовые переходы. Для второго класса, называемого «медленными черными дырами», $0 < \mathcal{K} < \Lambda/12$, есть два фазовых перехода. Медленные и быстрые черные дыры имеют свои аналоги в теории Эйнштейна-Максвелла. Третий класс «обратных черных дыр» соответствует $\mathcal{K} < 0$ и обладает только одним фазовым переходом. Этот тип черных дыр характерен для конформно-инвариантной электродинамики, а в более частном случае для модели «обратной» электродинамики, предложенной в [263]. Однако, следует отметить, что авторы не рассматривали фундаментальных ограничений на параметры модели. В частности, существование класса обратных черных дыр противоречит энергодоминантному условию (5.12), следстви-

ем которого является неравенство $\mathcal{K} \geq 0$. Глобальное нарушение этого условия делает возможность существования таких черных дыр весьма сомнительной.

Перейдем описанию еще одного точного аналитического решения для компактного астрофизического объекта в конформно-инвариантной нелинейной электродинамике вакуума.

5.3 Радиационное решение Вайдья-Боннора

Рассмотрим решение уравнений Эйнштейна-CNED, описывающие излучение заряженной «нулевой-жидкости» из сферически симметричной звезды, обладающей электрическим и магнитным зарядами. Подобное решение будет обобщением метрики Вайдья-Боннора [264] на произвольный тип конформной нелинейной электродинамики.

Для описания процессов излучения или аккреции удобно воспользоваться координатами Эддингтона-Финкельштейна, в которых квадрат интервала для сферически-симметричного пространства-времени имеет вид:

$$ds^2 = G(u, r)du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (5.38)$$

где G метрическая функция и u запаздывающее время. Как и ранее, представим тензор электромагнитного поля в виде (5.27) и предположим зависимость его компонент от координат в виде: $B = Q_t/r^2$, $E = Q_e/r^2$. Однако, в отличие от решения Рейснера-Нордстрема, топологический заряд $Q_t = Q_t(u)$, «заряд источника» $Q_c = Q_c(u)$, «силовой заряд» $Q_e = Q_e(u)$ и масса звезды $M = M(u)$ являются произвольными функциями запаздывающего времени.

Не сложно убедиться, что электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям (5.50) с прежней формой тензора Q^{kn} (5.25) при следующих выражениях плотности тока для электрического и магнитного зарядов:

$$j_{(e)}^k = \frac{1}{4\pi r^2} \left[Q_c \delta(r) \delta_0^k - \dot{Q}_c(u) \delta_1^k \right], \quad j_{(m)}^k = \frac{1}{4\pi r^2} \left[Q_t \delta(r) \delta_0^k - \dot{Q}_t(u) \delta_1^k \right], \quad (5.39)$$

где точкой обозначена производная по запаздывающему времени, а заряды $Q_c(u)$ и $Q_e(u)$, как и ранее, связаны между собой соотношением (5.31).

Для получения модифицированной метрики учтем тензор энергии-импульса «нулевой-жидкости» в правой части уравнений Эйнштейна:

$$R_{ik} - \frac{R}{2}g_{ik} + \Lambda g_{ik} = 8\pi(T_{ik} + V_i V_k), \quad (5.40)$$

где V_i вектор тока «нулевой-жидкости», для которого $g_{ik}V^iV^k = 0$. В завершение, для более полного соответствия классической постановке задачи Вайдья-Боннора предположим, что Лямбда-член также является функцией запаздывающего времени $\Lambda = \Lambda(u)$. Уравнения Эйнштейна в этом случае принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}[rG(u, r)] = 1 + r^2\Lambda(u) - 8\pi r^2(T_0^0 + V_0V^0), \quad \frac{1}{r}\frac{\partial G(u, r)}{\partial u} = 8\pi V_0V^1, \quad (5.41)$$

где компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля задаются выражением (5.35). Аналогично оригинальной работе Вайдья и Боннора [264] предположим, что плотность тока нулевой-жидкости радиальна, и определяется в помощью скаляра $N = N(u, r)$ в форме: $V^i = N\delta_1^i$.

Принятые условия позволяют получить аналитическое решение уравнений (5.41):

$$G(u, r) = 1 - \frac{2M(u)}{r} + \frac{\mathcal{K}(u)}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda(u)r^2, \quad N^2 = \frac{3\dot{\mathcal{K}} - 6\dot{M}r + \dot{\Lambda}r^4}{24\pi r^3}, \quad (5.42)$$

где выражение квадрата эффективного заряда \mathcal{K} совпадает с (5.37) и его производная по запаздывающему времени имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{K}} &= \frac{d}{du} \left\{ \left[Q_e^2(u) + Q_t^2(u) \right] \times \left[W(z) + z(1 - z^2)W'(z) \right] \right\} = \\ &= 2Q_e\dot{Q}_e \left\{ W + a_1W' + a_2W'' \right\} + 2Q_t\dot{Q}_t \left\{ W + b_1W' + b_2W'' \right\}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

где также введены обозначения для вспомогательных коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 - z^2) \left[z + \frac{(2 - z^2)(2 - 3z^2)}{\sqrt{2 + 2\text{sgn}(z)\sqrt{1 - (1 - z^2)^2}}} \right], \\ a_2 &= \frac{z(2 - z^2)(1 - z^2)^2}{\sqrt{2 + 2\text{sgn}(z)\sqrt{1 - (1 - z^2)^2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= (1 - z^2) \left[z - \frac{(2 - z^2)(2 - 3z^2)}{\sqrt{2 - 2\operatorname{sgn}(z)\sqrt{1 - (1 - z^2)^2}}} \right], \\
b_2 &= -\frac{z(2 - z^2)(1 - z^2)^2}{\sqrt{2 - 2\operatorname{sgn}(z)\sqrt{1 - (1 - z^2)^2}}},
\end{aligned} \tag{5.44}$$

зависимость которых от z представлена на Рисунке 18. Следует отметить, что $a_2 = 0$, $b_2 = 0$ для только магнитного или только электрического поля, при $z = \pm 1$. Эти коэффициенты также равны нулю, когда $z = 0$ при $Q_e = \pm Q_t$. Для перечисленных случаев, значения производной квадрата эффективного заряда $\dot{\mathcal{K}}$, представленные в Таблице 9, определяются частными значениями W и W' , ограниченными условиями унитарности и причинности (5.10).

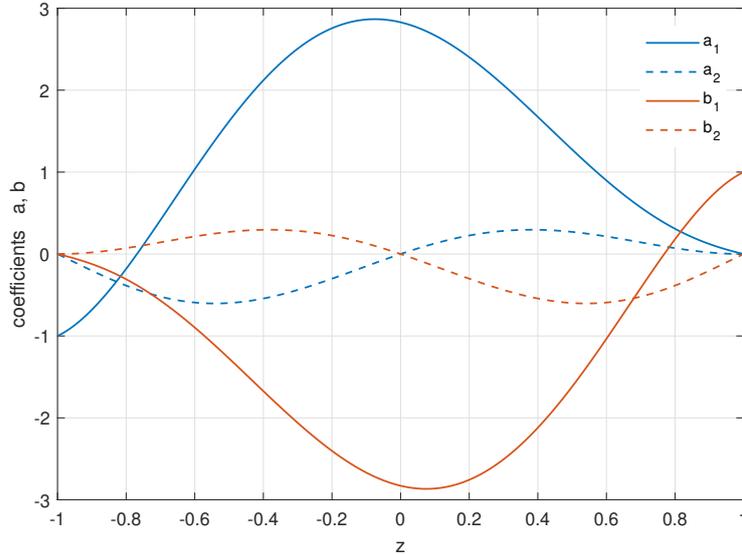


Рис. 18: Зависимость вспомогательных коэффициентов a и b от параметра полевой конфигурации z .

Чтобы гарантировать, что N^2 не является отрицательным для произвольного расстояния до центра звезды, необходимо потребовать, чтобы масса звезды уменьшалась с ростом запаздывающего временем $\dot{M} \leq 0$, лямбда-член должен изменяться, следуя космологической динамике $\dot{\Lambda} \geq 0$, а квадрат эффективного заряда \mathcal{K} должен увеличиваться за счет ионизационных процессов в звезде. По сути, условие $N^2 \geq 0$ необходимо проверять для каждого конкретного случая модельной функции W , однако, как

Таблица 9: Частные выражения для $\dot{\mathcal{K}}$ при некоторых особых значениях параметра полевой конфигурации z .

$z = -1$	$a_1 = -1, b_1 = 0$ $a_2 = 0, b_2 = 0$	$\dot{\mathcal{K}} = 2Q_t\dot{Q}_t(W - W')$
$z = 0$	$a_1 = 2\sqrt{2},$ $b_1 = -2\sqrt{2}$ $a_2 = 0, b_2 = 0$	$\dot{\mathcal{K}} = 2Q_e[\dot{Q}_e(W + 2\sqrt{2}W') + \dot{Q}_t(W - 2\sqrt{2}W')]$
$z = 1$	$a_1 = 0, b_1 = 1$ $a_2 = 0, b_2 = 0$	$\dot{\mathcal{K}} = 2Q_e\dot{Q}_e(W + W')$

следует из выражения (5.43), оно будет заведомо выполнено при

$$\frac{d}{du} \left[W(z) + z(1 - z^2)W'(z) \right] \geq 0. \quad (5.45)$$

Более того, поскольку коэффициенты a и b конечны, выполнение этого условия следует ожидать и в случае, когда производные $W'(z)$ и $W''(z)$ ограничены и пропорциональны малому параметру, описывающему нелинейность модели.

В целом, вид полученного решения отличается от оригинальной метрики Вайдья-Боннора переопределением зарядового члена: $Q_e^2 + Q_t^2 \rightarrow \mathcal{K}$, при этом, поскольку плотность тока нулевой-жидкости зависит от $\dot{\mathcal{K}}$, которая теперь является сложной функцией зарядов, динамика жидкости может существенно отличаться от аналогичных предсказаний в электродинамике Максвелла и зависеть от выбора конкретной модели CNED.

5.4 Обобщенное условие дуальности для моделей конформно-инвариантной нелинейной электродинамики вакуума

Среди моделей CNED особое место отводится тем, для которых, помимо конформной инвариантности, выполняется еще и условие дуальной инвариантности, присущей электродинамике Максвелла. Лагранжиан для одной из таких моделей, названной ModMax, был предложен в [34, 265]. Представ-

ляется интересным исследовать возможность нарушения дуальной инвариантности в специальной форме, которая приводит к новым моделям CNED, в предельном случае переходящим к теории Максвелла или ModMax. Такое нарушение обычного условия дуальной инвариантности, которое можно трактовать как расширенную дуальную инвариантность, будет рассмотрено в дальнейшем.

Запишем функционал действия произвольной Лоренц-инвариантной нелинейной электродинамики вакуума, учитывающий взаимодействие с токами:

$$S_m = \int \sqrt{-g} [\mathcal{L}(J_2, J_4) - A_k j^k] d^4x. \quad (5.46)$$

Выполним преобразование Лежандра, рассматривая компоненты тензора Q_{ik} в качестве новой полевой переменной:

$$\mathcal{L}(J_2, J_4) = \frac{1}{8\pi} F_{ik} Q^{ik} - \mathcal{U}(K_2, K_4), \quad (5.47)$$

где \mathcal{U} функция инвариантов тензора Q_{ik} , компоненты которого следует интерпретировать как эффективную электрическую индукцию \mathbf{D} и эффективную напряженность магнитного поля \mathbf{H} , а сами инварианты этого тензора имеют вид:

$$K_2 = Q_{ik} Q^{ki} = 2(\mathbf{D}^2 - \mathbf{H}^2), \quad K_4 = Q_{ik} Q^{kl} Q_{lm} Q^{mi} = \frac{1}{2} K_2^2 + 4(\mathbf{D}, \mathbf{H})^2. \quad (5.48)$$

Следует отметить, что функция аналогичная \mathcal{U} иногда в литературе называется гамильтоновоподобной, хотя она не является истинным Гамильтонианом, поскольку определяется в терминах переменных \mathbf{D} и \mathbf{H} , в отличие от Гамильтониана, зависящего от полевых переменных \mathbf{D} и \mathbf{V} . Кроме того, плотность Гамильтониана не является Лоренц-инвариантной, в отличие от функции \mathcal{U} , поэтому для нее больше подходит термин дуальный Лагранжиан, который будет использоваться нами в дальнейшем.

Рассматривая компоненты тензоров F_{ik} и Q_{ik} в качестве независимых переменных, выполнив варьирование функционала действия (5.46), при заданных источниках электромагнитного поля, и как обычно, предполагая значения полевых переменных фиксированными на границе области интегрирования:

$$\delta S = \int \sqrt{-g} [\delta \mathcal{L}(J_2, J_4) - j^k \delta A_k] d^4x = \int d^4x \left(\sqrt{-g} \left[\frac{1}{8\pi} F_{ik} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Q^{ik}} \right] \delta Q^{ki} - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{-g} Q^{ki} + 4\pi \sqrt{-g} j^k \right] \delta A_k \right) + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_3} \sqrt{-g} \delta A_k Q^{ki} dS_i = 0, \quad (5.49)$$

получим уравнения электромагнитного поля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} Q^{kn}}{\partial x^n} = -4\pi j^k, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} {}^* F^{kn}}{\partial x^n} = 0, \quad (5.50)$$

с прямыми и обратными эффективными материальными соотношениями:

$$F_{ik} = -8\pi \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Q^{ik}}, \quad Q_{ik} = -8\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^{ik}}, \quad (5.51)$$

где использовано обозначение ${}^* F^{kn} = e^{knlm} F_{lm} / 2\sqrt{-g}$ для дуально-сопряженного тензора электромагнитного поля. Компоненты тензора Q^{kn} для моделей CNED с Лагранжианом (5.7), по-прежнему, определяются выражением (5.25), из которого следует вспомогательное соотношение $F_{nk} Q^{kn} = W(z) J_2$, благодаря которому дуальный Лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{U} = \frac{J_2(K_2, K_4)}{16\pi} W(z(K_2, K_4)), \quad (5.52)$$

где J_2 и z следует выразить в терминах K_2 и K_4 . Для определения соотношения между этими величинами вычислим инварианты тензора Q^{kn} :

$$K_2 = J_2 \left[W^2 - \frac{1}{2} W' z^2 (2 - z^2) (1 - z^2) \right], \quad (5.53)$$

$$K_4 = J_4 \left[W^4 + 2z W^3 W' (2 - z^2) (1 - z^2) + 3z^2 W^2 W'^2 (2 - z^2) (1 - z^2)^2 + z^3 (2 - z^2)^2 (1 - z^2)^2 W'^3 \left(W + \frac{1}{4} W' z \right) \right]. \quad (5.54)$$

В случае чисто электрического или чисто магнитного поля, когда $z^2 = 1$ наборы инвариантов K_2 , K_4 и J_2 , J_4 отличаются только множителем в виде степени модельной функции W , которая в этом случае постоянна. Поэтому CNED может приводить к нетривиальным отличиям от электродинамики

Максвелла только для конфигураций поля с $(\mathbf{BE}) \neq 0$.

Используя выражения (5.53) и (5.54) можно построить безразмерный параметр $y = K_2/\sqrt{2K_4}$, который для заданной модельной функции W определяется аргументом z . Также с помощью (5.53) инвариант J_2 можно записать в терминах K_2 и $z = z(y)$, что принципиально позволяет найти дуальный Лагранжиан (5.52), соответствующий CNED с заданной модельной функцией W .

К сожалению, на практике далеко не всегда удается однозначно выразить один набор тензорных инвариантов через другой, ввиду существенной нелинейности выражений (5.53) и (5.54), например, выражение для Лагранжиана в модели Айон-Беато и Гарсия [64] известно только в терминах одного набора тензорных инвариантов.

Условие дуальности можно представить как дополнительное соотношение между векторами электромагнитного поля или тензорными инвариантами, принадлежащими к разным наборам:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = (\mathbf{D}, \mathbf{H}), \quad J_4 - \frac{J_2^2}{2} = K_4 - \frac{K_2^2}{2}. \quad (5.55)$$

Впервые условие (5.55) было введено для общего случая нелинейной электродинамики вакуума в [30] и показано [30, 266], что оно может иметь место для некоторых частных моделей, например, для электродинамики Борна-Инфельда. Поскольку модели CNED имеют безразмерную переменную, зависящую от соотношения инвариантов электромагнитного поля, можно предложить возможное обобщение условия дуальности:

$$J_4 - \frac{J_2^2}{2} = \left[1 + g(z)\right]^2 \left(K_4 - \frac{K_2^2}{2}\right), \quad (5.56)$$

где $g(z)$ – произвольная функция, обращение которой в нуль приводит к обычному условию дуальности (5.55). Предложенная мультипликативная форма деформации для условия дуальности (5.56) минимальна, не требует введения новых размерных параметров и приводит к простому способу построения новых моделей нелинейной электродинамики вакуума. В качестве развития предлагаемой деформации можно предположить, что функция g зависит от двух безразмерных аргументов z и y , соответствующих каждому набору тензорных инвариантов. Однако такой подход приведет к более

громоздкому описанию и потребует более подробной информации о функции g , и поэтому представляется интересным, но выходит за рамки данной работы.

Выясним каким требованиям должна соответствовать модель CNED, чтобы удовлетворять расширенному условию дуальности. Выполнив подстановку соотношений между инвариантами (5.53) и (5.54) в (5.56), получим уравнение для модельной функции W :

$$[z^2(1 - z^2)(2 - z^2)]W'^2 + 2z(2 - z^2)W'W + 2W^2 - 2[g(z) + 1] = 0. \quad (5.57)$$

Еще одно уравнение, следующее из (5.56), отличающееся от (5.57) только знаком в последнем слагаемом, было отброшено, так как может привести к решениям, не имеющим физического смысла. Случай, когда $g = 0$, соответствует инвариантности относительно обычного дуального сопряжения. Очевидно, что в этом случае одним из решений уравнения (5.57) является $W(z) = 1$, что соответствует электродинамике Максвелла, однако это не единственное решение. Как было показано в [34], существует еще одна физически последовательная модель CNED, называемая электродинамикой ModMax, которая также является дуально инвариантной. Лагранжиан электродинамики ModMax может быть записан в терминах модельной функции в виде:

$$W(z) = \cosh \gamma + \frac{\sqrt{2 - z^2}}{z} \sinh \gamma, \quad (5.58)$$

где γ безразмерный параметр. Можно убедиться, что выражение (5.58) также является решением уравнения (5.57) при $g = 0$.

Рассмотрим возможность нарушения дуальной симметрии, когда $g \neq 0$. К сожалению, получить аналитическое решение (5.57) в общем случае затруднительно из-за нелинейности этого уравнения. В то же время, представляется вполне реалистичным сценарий, в котором нарушение дуальной симметрии слабое, в том смысле, что для выбранной конфигурации поля $g(z) \ll 1$. В этом случае появляется возможность вычислить поправку $W_1(z)$, вызванную нарушением дуальной симметрии, к модельной функции ModMax $W_0(z)$, представленной (5.58). Применение метода последователь-

ных приближений к (5.57) дает уравнение для поправки первого порядка:

$$(2aW'_0 + bW_0)W'_1 + (bW'_0 + 4W_0)W_1 - 2g = 0, \quad (5.59)$$

где, для краткости, введены обозначения для коэффициентов

$$a(z) = z^2(2 - z^2)(1 - z^2), \quad b(z) = 2z(2 - z^2). \quad (5.60)$$

Решение линеаризованного уравнения (5.59) можно представить в виде:

$$W_1 = \left[\sinh \gamma + \frac{\sqrt{2 - z^2}}{z} \cosh \gamma \right] \int \frac{g(s)ds}{s^2 \sqrt{2 - s^2} \left[\sinh \gamma + \frac{\sqrt{2 - s^2}}{s} \cosh \gamma \right]^2}. \quad (5.61)$$

Полученная поправка первого порядка к электродинамике ModMax существенно зависит от нарушающей функции $g(z)$. Обсуждение конкретного вида этой функции в настоящее время представляется спекулятивным и требует привлечения новых экспериментальных данных, указывающих на нарушение дуальной симметрии в предлагаемой форме.

Заключение

В работе получен ряд новых научных результатов:

Предложено обобщенное энергетическое условие для девиатора тензора энергии-импульса. Доказано выполнение этого условия для произвольных моделей нелинейной электродинамики вакуума, а также, с помощью тетрадного формализма, выполнена его проверка для других видов материи.

Получено решение для поля собственного излучения пульсаров и магнетаров, учитывающее пост-максвелловские поправки нелинейной электродинамики вакуума. Выполнен анализ характеристик излучения, а также влияния таких поправок на замедление вращения пульсаров.

Исследованы особенности пространства-времени заряженной чёрной дыры в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда, для которой обнаружено новое состояние в виде «чёрной точки» с двукратно вырожденным горизонтом и регулярным эффективным пространством-временем для фотонов. Ис-

следованы характеристики тени такой чёрной дыры, а также особенности движения массивных незаряженных частиц в её поле.

Для ряда моделей нелинейной электродинамики вакуума получены решения, описывающие частицеподобные полевые конфигурации магнитных геонов. Показано сохранение регулярности решения для продольного магнитного поля и отсутствие регулярности для решений с радиальным и аксиальным полем, в модели Борна-Инфельда.

В параметризованной пост-максвелловской электродинамике, получено общее решение задачи о распространении электромагнитных импульсов жёсткого рентгеновского и гамма-излучения в поле пульсаров и магнетаров при произвольном расположении источника и приемника излучения. Показана возможность регистрации эффекта относительного запаздывания нормальных мод излучения в современном спутниковом эксперименте.

Исследован непертурбативный эффект двулучепреломления электромагнитных волн в постоянном магнитном поле в однопетлевой электродинамике Гейзенберга-Эйлера. Получены новые выражения для эффективных показателей преломления вакуума и исследована их зависимость от индукции магнитного поля.

Предложен новый класс моделей нелинейной электродинамики вакуума, обладающих конформно-инвариатными свойствами. Для новых моделей получены выражения эффективных показателей преломления электромагнитных волн, распространяющихся в постоянном однородном электрическом или магнитном поле. Получены точные аналитические решения для поля компактных астрофизических объектов в моделях конформно-инвариантной нелинейной электродинамики.

Предложена обобщенная форма условия дуальной инвариантности, на основании которой получено производящее уравнение для новых моделей нелинейной электродинамики вакуума.

Приложение 1: Альтернативные способы описания моделей нелинейной электродинамики вакуума

В современных научных статьях, посвященных вопросам нелинейной электродинамики вакуума встречается два способа описания, связанных с выбором формы независимых инвариантов тензора электромагнитного поля F_{ik} . Несмотря на то, что эта двойственность носит сугубо технический характер, было бы важным отметить эквивалентность этих двух подходов для описания эффектов и получить некоторые выражения для перехода от одного способа описания к другому. В ряде работ, например [37, 99], Лагранжиан нелинейной электродинамики вакуума представлен как функция инвариантов $J_2 = F_{ik}F^{ki}$ и $J_4 = F_{ik}F_{kl}F^{lm}F^{mi}$, в то время как в статьях [44, 46] совершенно эквивалентно в качестве аргумента Лагранжиана выбраны выражения:

$$\mathcal{F} = F^{nk}F_{kn}, \quad \mathcal{G} = {}^*F^{nk}F_{kn}, \quad (5.62)$$

где звездочкой обозначена операция дуального сопряжения компонент тензора электромагнитного поля ${}^*F^{kn} = 1/2e^{knlm}F_{lm}$. Несмотря на тот факт, что \mathcal{G} не является истинным инвариантом, дополнительное уточнение что Лагранжиан является чётной функцией \mathcal{G} полностью устраняет разночтения. При описании с помощью обоих подходов уравнения электромагнитного поля будут иметь одинаковую (5.50), однако, вид тензора Q^{kn} будет различаться. В терминах инвариантов J_2 и J_4 , этот тензор будет иметь следующий вид:

$$Q^{kn} = 4\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial J_2}F^{kn} + 8\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial J_4}F_{(3)}^{kn}, \quad (5.63)$$

в то время, как при выборе зависимости от \mathcal{F} и \mathcal{G} этот тензор примет другую форму:

$$Q^{kn} = a(\mathcal{F}, \mathcal{G})F^{kn} + b(\mathcal{F}, \mathcal{G}){}^*F^{kn}. \quad (5.64)$$

Скалярные коэффициенты a и b могут быть легко получены из выражений (5.63) и (5.64) с помощью свертки компонент тензора Q^{kn} с F_{nk} и ${}^*F_{nk}$,

а также применения следующих вспомогательных тождеств:

$$\begin{aligned}
F_{(3)}^{kn} * F_{nk} &= -\frac{\mathcal{G}}{4} \mathcal{F}, & *F^{kn} * F_{nk} &= -\mathcal{F}, \\
J_2 &= \mathcal{F}, & J_4 &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}^2 + \frac{\mathcal{G}^2}{2} \right].
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Окончательный вид этих коэффициентов:

$$a = 4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_2} + 4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \frac{\mathcal{F}^3}{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2}, \quad b = 2\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_4} \left[1 + \frac{2\mathcal{F}^2}{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} \right]. \tag{5.66}$$

Полученные соотношения представляются полезными для сравнения результатов, полученных при описании в терминах перечисленных подходов, особенно это важно для моделей конформно-инвариантной нелинейной электродинамики (CNED), так как для этого класса моделей Лагранжиан зависит сразу от обоих инвариантов и выбор их формы существенно влияет на уравнения электромагнитного поля.

Приложение 2: Уравнения Общей теории относительности в формализме Ньюмена-Пенроуза

В уравнениях использованы следующие обозначения для проекций на векторы базисной тетрады компонент тензора Вейля C_{ijklm} и дивергента тензора энергии-импульса ϕ_{ij} :

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= \phi_{ij} l^i l^j, & \Phi_{10} &= \phi_{ij} l^i \bar{m}^j & \Phi_{20} &= \phi_{ij} \bar{m}^i \bar{m}^j \\
\Phi_{01} &= \phi_{ij} l^i m^j, & \Phi_{11} &= \phi_{ij} l^i n^j & \Phi_{21} &= \phi_{ij} n^i \bar{m}^j \\
\Phi_{02} &= \phi_{ij} m^i m^j, & \Phi_{12} &= \phi_{ij} n^i m^j & \Phi_{22} &= \phi_{ij} n^i n^j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= -C_{ijpq} l^i m^j l^p m^q, & \Psi_1 &= -C_{ijpq} l^i m^j n^p m^q, \\
\Psi_2 &= -\frac{1}{2} C_{ijpq} (l^i n^j l^p n^q - l^i n^j m^p \bar{m}^q), & \Psi_3 &= -C_{ijpq} n^i l^j n^p \bar{m}^q, \\
\Psi_4 &= -C_{ijpq} n^i \bar{m}^j n^p \bar{m}^q.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Уравнения разделены на группы, в соответствии с описанием в разделе 1.1.

Первая группа уравнений

$$\begin{aligned}
& (D - 4\rho - 2\varepsilon)\Psi_1 - (\bar{\delta} - 4\alpha + \pi)\Psi_0 + 3\chi\Psi_2 + (\delta - 2\beta - 2\bar{\alpha} + \bar{\pi})\Phi_{00} - \\
& \quad - (D - 2\bar{\rho} - 2\varepsilon)\Phi_{01} - 2\chi\Phi_{11} + 2\sigma\Psi_{10} - \bar{\chi}\Phi_{02} = 0 \\
& (D - 3\rho)\Psi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi - 2\alpha)\Psi_1 + 2\chi\Psi_3 + \lambda\Psi_0 + (\delta - 2\bar{\alpha} + \bar{\pi})\Phi_{10} \\
& \quad - (D - 2\bar{\rho})\Phi_{11} - \chi\Phi_{21} - \bar{\chi}\Phi_{12} - \mu\Psi_{00} + \pi\Phi_{01} + \sigma\Phi_{02} - D\Lambda = 0 \\
& (D - 2\rho + 2\varepsilon)\Psi_3 - (\bar{\delta} + 3\pi)\Psi_2 + 2\lambda\Psi_1 + \chi\Psi_4 + (\delta - 2\bar{\alpha} + 2\beta + \bar{\pi})\Phi_{20} - \\
& \quad - (D - 2\bar{\rho} + 2\varepsilon)\Phi_{21} - 2\mu\Psi_{10} + 2\pi\Psi_{11} - \bar{\chi}\Psi_{22} - 2\bar{\delta}\Lambda = 0 \\
& (\delta - 4\tau - 2\beta)\Psi_1 - (\Delta - 4\gamma + \mu)\Psi_0 + 3\sigma\Psi_2 + (\delta - 2\beta + 2\bar{\pi})\Phi_{01} - \\
& \quad - (D - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Phi_{02} - 2\chi\Phi_{12} + 2\sigma\Phi_{11} - \bar{\lambda}\Phi_{00} = 0 \\
& (\delta - 3\tau)\Psi_2 - (\Delta + 2\mu - 2\gamma)\Psi_1 + 2\sigma\Psi_3 + \nu\Psi_0 + (\delta + 2\bar{\pi})\Phi_{11} - \\
& \quad - (D + 2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Phi_{12} - \chi\Phi_{22} - \mu\Phi_{01} + \pi\Phi_{02} + \sigma\Phi_{21} - \bar{\lambda}\Phi_{10} - \delta\Lambda = 0 \\
& (\delta + 2\beta - 2\tau)\Psi_3 - (\Delta + 3\mu)\Psi_2 + 2\nu\Psi_1 + \sigma\Psi_4 + (\delta + 2\beta + 2\bar{\pi})\Phi_{21} - \\
& \quad - (D + 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Phi_{22} - 2\mu\Phi_{11} + 2\pi\Phi_{12} - \bar{\lambda}\Phi_{20} - 2\Delta\Lambda = 0 \\
& (D + 4\varepsilon - \rho)\Psi_4 - (\bar{\delta} + 4\pi + 2\alpha)\Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 + (\Delta + 2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu})\Phi_{20} - \\
& \quad - (\bar{\delta} + 2\alpha - 2\bar{\tau})\Phi_{21} - 2\nu\Phi_{10} + 2\lambda\Phi_{11} - \bar{\sigma}\Phi_{22} = 0 \\
& (\delta + 4\beta - \tau)\Psi_4 - (\Delta + 2\gamma + 4\mu)\Psi_3 + 3\nu\Psi_2 + (\Delta + 2\gamma + 2\bar{\mu})\Phi_{22} - \\
& \quad - (\bar{\delta} + 2\alpha + 2\bar{\beta} - \bar{\tau})\Phi_{22} - 2\nu\Phi_{11} + 2\lambda\Phi_{12} - \bar{\nu}\Phi_{20} = 0 \\
& (D - 2\rho - 2\bar{\rho})\Phi_{11} - (\delta - 2\bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})\Phi_{10} - (\bar{\delta} - 2\bar{\tau} - 2\alpha + \pi)\Phi_{01} + \\
& \quad + (\Delta - 2\gamma - 2\bar{\gamma} + \mu + \bar{\mu})\Phi_{00} + \bar{\chi}\Phi_{12} + \chi\Phi_{21} - \bar{\sigma}\Phi_{02} - \sigma\Phi_{20} + 3D\Lambda = 0 \\
& (D - 2\rho + 2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Phi_{12} - (\delta + 2\bar{\pi} - 2\tau)\Phi_{11} - (\bar{\delta} + 2\bar{\beta} - 2\alpha - \bar{\tau} + \pi)\Phi_{02} + \\
& \quad + (\Delta + 2\bar{\mu} - 2\gamma + \mu)\Phi_{01} + \chi\Phi_{22} - \bar{\nu}\Phi_{00} + \bar{\lambda}\Phi_{10} - \sigma\Phi_{21} + 2\delta\Lambda = 0 \\
& (D + 2\bar{\varepsilon} + 2\varepsilon - \rho - \bar{\rho})\Phi_{22} - (\bar{\delta} + 2\bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})\Phi_{12} - (\delta + 2\bar{\pi} + \\
& \quad + 2\beta - \tau)\Phi_{21} + (\Delta + 2\bar{\mu} + 2\mu)\Phi_{11} - \bar{\nu}\Phi_{10} - \nu\Phi_{01} + \bar{\lambda}\Phi_{20} + \lambda\Phi_{02} + 3\Delta\Lambda = 0
\end{aligned}$$

Вторая группа уравнений

$$\Phi_{00} = (D - \rho - \varepsilon - \bar{\varepsilon})\rho - (\bar{\delta} - 3\alpha - \bar{\beta} + \pi)\chi - \sigma\bar{\sigma} + \tau\bar{\chi}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= (D - \rho - \bar{\rho} - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})\sigma - (\delta - \tau + \bar{\pi} - \bar{\alpha} - 3\bar{\beta})\chi \\
\Psi_1 + \Phi_{01} &= (D - \rho - \varepsilon - \bar{\varepsilon})\tau - (\Delta - 3\gamma - \bar{\gamma})\chi - \rho\bar{\pi} - \sigma\bar{\tau} - \pi\sigma \\
\Phi_{10} &= (D - \rho - \bar{\varepsilon} + 2\varepsilon)\alpha - (\bar{\delta} - \bar{\beta} + \pi)\varepsilon - \beta\bar{\sigma} + \chi\lambda + \bar{\chi}\gamma - \pi\rho \\
\Psi_1 &= (D - \bar{\rho} + \bar{\varepsilon})\beta - (\delta - \bar{\alpha} + \bar{\pi})\varepsilon - (\alpha + \pi)\sigma + (\mu + \nu)\chi \\
-\Lambda + \psi_2 + \Phi_{11} &= (D + \varepsilon + \bar{\varepsilon})\gamma - (\Delta - \gamma - \bar{\gamma})\varepsilon - (\tau + \bar{\pi})\alpha - \\
&\quad -(\bar{\tau} + \pi)\beta - \tau\pi + \nu\chi \\
\Phi_{20} &= (D - \rho + 3\varepsilon - \bar{\varepsilon})\lambda - (\bar{\delta} + \pi + \alpha - \bar{\beta})\pi - \mu\bar{\sigma} + \nu\bar{\chi} \\
2\Lambda + \Psi_2 &= (D - \bar{\rho} + \varepsilon + \bar{\varepsilon})\mu - (\delta + \bar{\pi} - \bar{\alpha} + \beta)\pi - \sigma\lambda + \nu\chi \\
\Psi_3 + \Phi_{21} &= (D + 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})\nu - (\Delta + \mu + \gamma - \bar{\gamma})\pi - \mu\bar{\tau} - (\bar{\pi} + \tau) \\
-\Psi_4 &= (\Delta + \mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})\lambda - (\bar{\delta} + 3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu\lambda \\
-\Psi_1 + \Phi_{01} &= (\delta - \bar{\alpha} - \beta - \tau)\rho - (\bar{\delta} - 3\alpha + \bar{\beta})\sigma + \tau\bar{\rho} - (\mu - \bar{\mu})\chi \\
\Lambda - \Psi_2 + \Phi_{11} &= (\delta - \bar{\alpha} + 2\beta)\alpha - (\bar{\delta} + \bar{\beta})\beta - \mu\rho + \sigma\lambda - (\rho - \bar{\rho})\gamma - \varepsilon(\mu - \bar{\mu}) \\
-\Psi_3 + \Phi_{21} &= (\delta - \bar{\alpha} + 3\beta)\lambda - (\bar{\delta} + \pi + \alpha - \bar{\beta})\mu - (\rho - \bar{\rho})\nu + \pi\bar{\mu} \\
\Phi_{22} &= (\delta - \tau + 3\beta + \bar{\alpha})\nu - (\Delta + \mu + \gamma + \bar{\gamma})\mu - \lambda\bar{\lambda} + \pi\bar{\nu} \\
\Phi_{12} &= (\delta - \tau + \bar{\alpha} + \beta)\gamma - (\Delta - \gamma + \bar{\gamma} + \mu)\beta - \mu\tau + \sigma\nu + \varepsilon\bar{\nu} - \alpha\bar{\lambda} \\
\Phi_{02} &= (\delta - \tau - \beta + \bar{\alpha})\tau - (\Delta + \mu - 3\gamma + \bar{\gamma})\sigma - \bar{\lambda}\rho + \chi\bar{\nu} \\
-2\Lambda - \Psi_2 &= (\Delta + \bar{\mu} - \gamma - \bar{\gamma})\rho - (\bar{\delta} + \bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau + \sigma\lambda - \nu\chi \\
-\Psi_3 &= (\Delta - \bar{\gamma} + \bar{\mu})\alpha - (\bar{\delta} + \bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - (\rho + \varepsilon)\nu + (\tau + \beta)\lambda
\end{aligned}$$

Третья группа уравнений

$$\begin{aligned}
\delta V - D\omega &= (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})V + \chi U - \sigma\bar{\omega} - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\omega \\
\delta Y^\alpha - D\xi^\alpha &= (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})Y^\alpha + \chi X^\alpha - \sigma\bar{\xi}^\alpha - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\xi^\alpha \\
\Delta Y^\alpha - DX^\alpha &= (\gamma + \bar{\gamma})Y^\alpha + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})X^\alpha - (\tau + \bar{\pi})\bar{\xi}^\alpha - (\bar{\tau} + \pi)\xi^\alpha \\
\Delta V - DU &= (\gamma + \bar{\gamma})V + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})U - (\tau + \bar{\pi})\bar{\omega} - (\bar{\tau} + \pi)\omega \\
\delta U - \Delta\omega &= -\bar{\nu}V + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)U + \bar{\lambda}\bar{\omega} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta X^\alpha - \Delta \xi^\alpha &= -\bar{\nu} Y^\alpha + (\tau - \bar{\alpha} - \beta) X^\alpha + \bar{\lambda} \bar{\xi}^\alpha + (\mu - \gamma + \bar{\gamma}) \xi^\alpha \\ \bar{\delta} \omega - \delta \bar{\omega} &= (\bar{\mu} - \mu) V + (\bar{\rho} - \rho) U - (\bar{\alpha} - \beta) \bar{\omega} - (\bar{\beta} - \alpha) \omega \\ \bar{\delta} \xi^\alpha - \delta \bar{\xi}^\alpha &= (\bar{\mu} - \mu) Y^\alpha + (\bar{\rho} - \rho) X^\alpha - (\bar{\alpha} - \beta) \bar{\xi}^\alpha - (\bar{\beta} - \alpha) \xi^\alpha\end{aligned}$$

Литература

- [1] G.Mie. Grundlagen einer Theorie der Materie // Ann. Phys. — 1912. — Vol. 39. — P. 1.
- [2] Y.P.Rybakov. Soliton configurations in generalized Mie electrodynamics // Phys. Atom. Nuclei. — 2011. — Vol. 74. — P. 1073.
- [3] F.Bopp. Eine lineare Theorie des Elektrons // Ann. d. Phys. — 1940. — Vol. 430. — P. 345.
- [4] B.Podolsky. A Generalized Electrodynamics Part I-Non-Quantum // Phys. Rev. — 1942. — Vol. 62. — P. 68.
- [5] A.E.Zayats. Self-interaction in the Bopp–Podolsky electrodynamics: Can the observable mass of a charged particle depend on its acceleration? // Ann. Phys. — 2014. — Vol. 342. — P. 11.
- [6] M.Born, L.Infeld. Foundations of the New Field Theory // Proc. Roy. Soc. — 1934. — Vol. A144. — P. 425.
- [7] E.S.Fradkin, A.A.Tseytlin. Non-linear electrodynamics from quantized strings // Phys. Lett. B. — 1985. — Vol. 163. — P. 123.
- [8] W.Heisenberg, H.Euler. Consequences of Dirac’s Theory of Positrons // Z. Phys. — 1936. — Vol. 26. — P. 714.
- [9] V.Weisskopf. The electrodynamics of the vacuum based on the quantum theory of the electron // Kong. Dans. Vid. Selsk. Math-fys. Medd. XIV. — 1936. — Vol. 6.
- [10] R.Karplus, M.Neuman. The Scattering of Light by Light // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 83. — P. 776.

- [11] J.Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 82. — P. 664.
- [12] G.Breit, J.Wheeler. Collision of two light quanta // Phys. Rev. — 1934. — Vol. 46. — P. 1087.
- [13] J.Toll. The dispersion relation for light and its application to problems involving electron pairs // PhD thesis, Princeton U. — 1952.
- [14] S.Adler, et. al. Photon splitting in a strong Magnetic field // Phys. Rev. Lett. — 1970. — Vol. 25. — P. 1061.
- [15] Y.Ding, A.Kaplanet, et. al. Nonlinear magneto-optics of vacuum: Second-harmonic generation // Phys. Rev. Lett. — 1989. — Vol. 63. — P. 2725.
- [16] L.Meitner, H.Kösters. Über die streuung kurzweelliger γ -Strahlen // Z.Phys. — 1933. — Vol. 84. — P. 144.
- [17] W.Lamb Jr., R.Retherford. Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method // Phys. Rev. A. — 1947. — Vol. 72. — P. 241.
- [18] A.Artemyev, et. al. Vacuum-polarization corrections to the hyperfine splitting in heavy ions and to the nuclear magnetic moments // Phys. Rev. A. — 2001. — Vol. 63. — P. 062504.
- [19] C.Rizzo. Inverse Cotton-Mouton effect of the vacuum and of atomic systems // EPL. — 2010. — Vol. 90. — P. 64003.
- [20] I.Dremin. Cherenkov radiation and pair production by particles traversing laser beams // JETP Lett. — 2002. — Vol. 76. — P. 151.
- [21] C.-Y.Lee. Cherenkov radiation in a strong magnetic field // Physics Letters B. — 2020. — Vol. 810. — P. 135794.
- [22] N.Narozhnyi, A.Nikishov. The simplest processes in a pair-producing field // Yad. Fiz. — 1970. — Vol. 11. — P. 1072.
- [23] G.Dunne, T.Hall. An exact QED(3+1) effective action // Phys. Lett. B. — 1998. — Vol. 419. — P. 322.

- [24] S.Kim, D.Page. Schwinger pair production via instantons in a strong electric field // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 65. — P. 105002.
- [25] H.M.Fried, R.P.Woodard. The one loop effective action of QED for a general class of electric fields // Phys. Lett. B. — 2002. — Vol. 524. — P. 233.
- [26] V.I.Ritus. Lagrangian of an intense electromagnetic field and quantum electrodynamics at short distances // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1975. — Vol. 69. — P. 1517.
- [27] W.Dittrich, M.Reuter. Effective Lagrangians In Quantum Electrodynamics // Lect. Notes Phys. — 1985. — Vol. 220. — P. 1.
- [28] W.Dittrich. Effective Lagrangians at finite temperature // Phys. Rev. D. — 1979. — Vol. 19. — P. 2385.
- [29] I.A.Shovkovy. One-loop finite temperature effective potential in QED in the worldline approach // Phys. Lett. B. — 1998. — Vol. 441. — P. 313.
- [30] I.Bialynicki-Birula. Nonlinear Electrodynamics: variations on a theme by Born and Infeld // Quantum Theory of Particles and Fields: Birthday Volume Dedicated to Jan Lopuszanski. — 1983. — Vol. 31. — P. 48.
- [31] I.Bialynicki-Birula. Field theory of photon dust // Acta Phys. Polon. B. — 1983. — Vol. 23. — P. 553.
- [32] Conformal invariant vacuum nonlinear electrodynamics / V.I.Denisov, E.E.Dolgaya, V.A.Sokolov, and I.P.Denisova // Physical Review D. — 2017. — Vol. 96. — P. 036008 (article number). — Импакт-фактор 5,3 (JIF).
- [33] I.P.Denisova, B.D.Garmaev, V.A.Sokolov. Compact objects in conformal nonlinear electrodynamics // The European Physical Journal C. — 2019. — Vol. 79. — P. 531 (article number). — Импакт-фактор 4,8 (JIF).
- [34] Nonlinear duality-invariant conformal extension of Maxwell's equations / I.Bando, K.Lechner, D.Sorokin, and P.K.Townsend // Phys. Rev. D. — 2020. — Vol. 102. — P. 121703.

- [35] On p-form gauge theories and their conformal limits / I.Bando, K.Lechner, D.Sorokin, and P.K.Townsend // JHEP. — 2021. — Vol. 3. — P. 22.
- [36] J.Plebanski. Lectures on non-linear electrodynamics. — The Niels Bohr Institute and NORDITA, 1970.
- [37] V.I.Denisov. New effect in nonlinear Born-Infeld electrodynamics // Phys. Rev. D. — 2000. — Vol. 61. — P. 036004.
- [38] G.Boillat. Nonlinear electrodynamics: Lagrangians and equations of motion // J. Math. Phys. — 1970. — Vol. 11. — P. 941.
- [39] G.Boillat. Shock relations in nonlinear electrodynamics // Phys. Lett. A. — 1972. — Vol. 40(1). — P. 9.
- [40] H.Kadlecová. On the absence of shock waves and vacuum birefringence in Born-Infeld electrodynamics // J. Math. Phys. — 2024. — Vol. 65 (1). — P. 012302.
- [41] B.Hoffmann, L.Infeld. On the Choice of the Action Function in the New Field Theory // Phys. Rev. — 1937. — Vol. 51. — P. 765.
- [42] Y.Aldabergenov, S.Ketov. Modified Born-Infeld-Dilaton-Axion Coupling in Supersymmetry // Symmetry. — 2019. — Vol. 11. — P. 14.
- [43] S.I.Kruglov. Notes on Born-Infeld-type electrodynamics // Modern Physics Letters A. — 2017. — Vol. 32, no. 36. — P. 1750201.
- [44] P.Gaete, J.Helayël-Neto. Remarks on nonlinear electrodynamics // Eur. Phys. J. C. — 2014. — Vol. 74. — P. 3182.
- [45] C.V.Costa, D.M.Gitman, A.E.Shabad. Finite field-energy of a point charge in QED // Physica Scripta. — 2015. — Vol. 90, no. 7. — P. 074012.
- [46] S.I.Kruglov. Regular model of magnetized black hole with rational nonlinear electrodynamics // International Journal of Modern Physics A. — 2021. — Vol. 36, no. 21. — P. 2150158.

- [47] S.I.Kruglov. A model of nonlinear electrodynamics // *Annals of Physics*. — 2015. — Vol. 353. — P. 299–306.
- [48] P.Gaete, J.Helayël-Neto. Finite field-energy and interparticle potential in logarithmic electrodynamics. // *Eur. Phys. J. C*. — 2014. — Vol. 74. — P. 2816.
- [49] I.Gullu, S.H.Mazharimousavi. Double-logarithmic nonlinear electrodynamics // *Physica Scripta*. — 2021. — feb. — Vol. 96, no. 4. — P. 045217.
- [50] S.I.Kruglov. Acceleration of universe by nonlinear electromagnetic fields // *International Journal of Modern Physics D*. — 2016. — Vol. 25, no. 11. — P. 1640002.
- [51] S.I.Kruglov. Nonlinear arcsin-electrodynamics // *Annalen der Physik*. — 2015. — Vol. 527, no. 5-6. — P. 397.
- [52] S.I.Kruglov. Born–Infeld-type electrodynamics and magnetic black holes // *Annals of Physics*. — 2017. — Vol. 383. — P. 550–559.
- [53] S.I.Kruglov. Black hole as a magnetic monopole within exponential nonlinear electrodynamics // *Annals of Physics*. — 2017. — Vol. 378. — P. 59–70.
- [54] S.I.Kruglov. The shadow of M87* black hole within rational nonlinear electrodynamics // *Modern Physics Letters A*. — 2020. — Vol. 35, no. 35. — P. 2050291.
- [55] S.I.Kruglov. Black hole solution in the framework of arctan-electrodynamics // *International Journal of Modern Physics D*. — 2017. — Vol. 26, no. 08. — P. 1750075.
- [56] I.Gullu, S.H.Mazharimousavi. Black holes in double-Logarithmic nonlinear electrodynamics // *Physica Scripta*. — 2021. — Vol. 96, no. 9. — P. 095213.
- [57] H.H.Soleng. Charged black points in general relativity coupled to the logarithmic U(1) gauge theory // *Phys. Rev. D*. — 1995. — Vol. 52. — P. 6178.

- [58] D.Glavan, C.Lin. Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Spacetime // Phys. Rev. Lett. — 2020. — Vol. 124. — P. 081301.
- [59] The 4D Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity: a review / P.G.S.Fernandes, P.Carrilho, T.Clifton, and D.J.Mulryne // Classical and Quantum Gravity. — 2022. — Vol. 39, no. 6. — P. 063001.
- [60] S.I.Kruglov. 4D Einstein–Gauss–Bonnet Gravity Coupled with Nonlinear Electrodynamics // Symmetry. — 2021. — Vol. 13, no. 2.
- [61] J.Bardeen. Non-singular general relativistic gravitational collapse // Proceedings of the 5th International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity. — 1968. — P. 87.
- [62] S.A.Hayward. Formation and Evaporation of Nonsingular Black Holes // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96. — P. 031103.
- [63] K.A.Bronnikov. Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 63. — P. 044005.
- [64] E.Ayon-Beato, A.Garcia. Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics // Physical review letters. — 1998. — Vol. 80, no. 23. — P. 5056.
- [65] I.Dymnikova. Regular electrically charged vacuum structures with de Sitter centre in nonlinear electrodynamics coupled to general relativity // Classical and Quantum Gravity. — 2004. — Vol. 21, no. 18. — P. 4417.
- [66] Regular Black Holes: A Short Topic Review / C.Lan, H.Yang, Y.Guo, and et al. // Int J Theor Phys. — 2023. — Vol. 62. — P. 202.
- [67] B.Toshmatov, Z.Stuchlík, B.Ahmedov. Generic rotating regular black holes in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 95. — P. 084037.
- [68] C.Gao. Black holes with many horizons in the theories of nonlinear electrodynamics // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104. — P. 064038.

- [69] M.E.Rodrigues, Marcos V. de S. Silva. Regular multihorizon black holes in $f(G)$ gravity with nonlinear electrodynamics // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 99. — P. 124010.
- [70] K.A.Bronnikov. Regular Black Holes Sourced by Nonlinear Electrodynamics // Regular Black Holes: Towards a New Paradigm of Gravitational Collapse. — Singapore : Springer Nature Singapore, 2023. — P. 37.
- [71] D.Grass, H.R.Rubinstein. Magnetic fields in the early Universe // Physics Reports. — 2001. — Vol. 348, no. 3. — P. 163–266.
- [72] Is cosmic speed-up due to new gravitational physics? / S.M.Carrol, V.Duvvuri, M.Trodden, and M.S.Turner // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 70. — P. 043528.
- [73] S.Nojiri, S.D.Odintsov. Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration // Phys. Rev. D. — 2003. — Vol. 68. — P. 123512.
- [74] Nonlinear electrodynamics and FRW cosmology / V.A.De Lorenci, R.Klippert, M.Novello, and J.M.Salim // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 65. — P. 063501.
- [75] M.Novello, S.E.Perez Bergliaffa, J.Salim. Nonlinear electrodynamics and the acceleration of the Universe // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 69. — P. 127301.
- [76] Cosmological effects of nonlinear electrodynamics / M.Novello, E.Goulart, J.M.Salim, and S.E.Perez Bergliaffa // Classical and Quantum Gravity. — 2007. — Vol. 24, no. 11. — P. 3021.
- [77] M.Novello, A.N.Arajuno, J.M.Salim. Cyclic Magnetic Universe // International Journal of Modern Physics A. — 2009. — Vol. 24, no. 30. — P. 5639.
- [78] L.G.Medeiros. Realistic Cyclic Magnetic Universe // International Journal of Modern Physics D. — 2012. — Vol. 21, no. 09. — P. 1250073.

- [79] D.N.Vollick. Homogeneous and isotropic cosmologies with nonlinear electromagnetic radiation // Phys. Rev. D. — 2008. — Vol. 78. — P. 063524.
- [80] R.García-Salcedo, T.Gonzalez, I.Quiros. No compelling cosmological models come out of magnetic universes which are based on nonlinear electrodynamics // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 89. — P. 084047.
- [81] A.Övgün. Inflation and acceleration of the universe by nonlinear magnetic monopole fields. // Eur. Phys. J. C. — 2017. — Vol. 77. — P. 105.
- [82] M.Sharif, S.Mumtaz. Stability of the accelerated expansion in nonlinear electrodynamics // Eur. Phys. J. C. — 2017. — Vol. 77. — P. 136.
- [83] G.P.Singh, N.Hulke, A.Singh. Accelerating cosmologies with nonlinear electrodynamics // Canadian Journal of Physics. — 2018. — Vol. 96, no. 9. — P. 992.
- [84] P.Sarkar, P.Kumar Das. Emergent cosmology in models of nonlinear electrodynamics // New Astronomy. — 2023. — Vol. 101. — P. 102003.
- [85] Combined Studies Approach to Rule Out Cosmological Models Which Are Based on Nonlinear Electrodynamics / R.García-Salcedo, I.Gómez-Vargas, T.González, V.Martinez-Badenes, and I.Quiros // Universe. — 2024. — Vol. 10, no. 9.
- [86] S.I.Kruglov. Acceleration of universe by nonlinear electromagnetic fields // International Journal of Modern Physics D. — 2016. — Vol. 25, no. 11. — P. 1640002.
- [87] S.I.Kruglov. Universe acceleration and nonlinear electrodynamics // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 92. — P. 123523.
- [88] G.V.Dunne. Heisenberg–Euler Effective Lagrangians: Basics and Extensions // From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics. — P. 445–522.
- [89] А.А.Гриб, С.Г.Мамаев, В.М.Мостепаненко. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях / — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Энергоатомиздат, 1988. — С. 287.

- [90] M.Soljačić, M.Segev. Self-trapping of electromagnetic beams in vacuum supported by QED nonlinear effects // *Phys. Rev. A.* — 2000. — Vol. 62. — P. 043817.
- [91] И.М.Тернов, В.Р.Халилов, В.Н.Родионов. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. — Москва : Издательство Московского университета, 1982. — С. 304.
- [92] S.I.Kruglov. Remarks on Heisenberg–Euler-type electrodynamics // *Modern Physics Letters A.* — 2017. — Vol. 32, no. 16. — P. 1750092.
- [93] F.Karbstien. Heisenberg-Euler effective action in slowly varying electric field inhomogeneities of Lorentzian shape // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 95. — P. 076015.
- [94] F.Karbstien. Derivative corrections to the Heisenberg-Euler effective action // *J. High Energ. Phys.* — 2021. — Vol. 2021. — P. 1–16.
- [95] G.V.Dunne, C.Schubert. Closed-form two-loop Euler–Heisenberg Lagrangian in a self-dual background // *Physics Letters B.* — 2002. — Vol. 526, no. 1. — P. 55–60.
- [96] I.Huet, M.R.de Trautenberg, C.Schubert. The Euler-Heisenberg Lagrangian Beyond One Loop // *International Journal of Modern Physics: Conference Series.* — 2012. — Vol. 14. — P. 383–393.
- [97] H.Gies, F.Karbstien. An addendum to the Heisenberg-Euler effective action beyond one loop // *J. High Energ. Phys.* — 2017. — Vol. 108. — P. 1–35.
- [98] H.Gies. QED effective action at finite temperature: Two-loop dominance // *Phys. Rev. D.* — 2000. — Vol. 61. — P. 085021.
- [99] V.I.Denisov, I.V.Krivchenkov, N.V.Kravtsov. Experiment for measuring the post-Maxwellian parameters of nonlinear electrodynamics of vacuum with laser-interferometer techniques // *Phys. Rev. D.* — 2004. — Vol. 69. — P. 066008.

- [100] V.I.Denisov, V.A.Sokolov. Analysis of regularizing properties of nonlinear electrodynamics in the Einstein-Born-Infeld theory // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2011. — Vol. 113, no. 6. — P. 926–933. — [В.И. Денисов, В.А.Соколов. Исследование регуляризующих свойств нелинейной электродинамики в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда. // Журнал экспериментальной и теоретической Физики. — 2011. — Т. 140, — №6. — С. 1064–1072], Импакт-фактор 0,8 (JIF).
- [101] M.I.Vasil'iev, V.A.Sokolov. Nonlinear-electrodynamic effects in the electromagnetic field of a rotating pulsar // Moscow University Physics Bulletin. — 2012. — Vol. 67, no. 5. — P. 418–422. — [М.И. Васильев, В.А. Соколов. Нелинейно-электродинамические эффекты в электромагнитном поле вращающегося пульсара. // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2012. — №5. — С. 8–12.], Импакт-фактор 0,4 (JIF).
- [102] V.I.Denisov, I.P.Denisova, V.A.Sokolov. Using the concept of natural geometry in the nonlinear electrodynamics of the vacuum // Theoretical and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 172, no. 3. — P. 1321–1327. — [В.И. Денисов, И.П. Денисова, В.А. Соколов. Использование концепции естественной геометрии в нелинейной электродинамике вакуума. // Теоретическая и математическая физика. — 2012. — Т. 172. — №3. — С. 505–512.], Импакт-фактор 1,1 (JIF).
- [103] V.I.Denisov, V.A.Sokolov, M.I.Vasil'iev. Nonlinear vacuum electrodynamics birefringence effect in a pulsar's strong magnetic field // Physical Review D. — 2014. — Vol. 90. — P. 023011 (article number). — Импакт-фактор 5,3 (JIF).
- [104] Pulsar radiation in post-Maxwellian vacuum nonlinear electrodynamics / V.I.Denisov, B.N.Shvilkin, V.A.Sokolov, and M.I.Vasil'iev // Physical Review D. — 2016. — Vol. 94. — P. 045021 (article number). — Импакт-фактор 5,3 (JIF).
- [105] Rapidly rotating pulsar radiation in vacuum nonlinear electrodynamics / V.I.Denisov, I.P.Denisova, A.B.Pimenov, and V.A.Sokolov // The

- European Physical Journal C. — 2016. — Vol. 76. — P. 612 (article number). — Импакт-фактор 4,8 (JIF).
- [106] V.I.Denisov, V.A.Ilyina, V.A.Sokolov. Nonlinear vacuum electrodynamics influence on the spacetime structure and massive particles orbits properties in Einstein–Born–Infeld theory // International Journal of Modern Physics D. — 2016. — Vol. 25, no. 11. — P. 1640003 (article number). — Импакт-фактор 2,1 (JIF).
- [107] V.I.Denisov, E.E.Dolgaya, V.A.Sokolov. Nonperturbative QED vacuum birefringence // Journal of High Energy Physics. — 2017. — Vol. 2017. — P. 105 (article number). — Импакт-фактор 5,5 (JIF).
- [108] V.I.Denisov, V.A.Sokolov, S.I.Svertilov. Vacuum nonlinear electrodynamic polarization effects in hard emission of pulsars and magnetars // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2017. — Vol. 2017, no. 09. — P. 004 (article number). — Импакт-фактор 5,9 (JIF).
- [109] V.A.Sokolov, B.D.Garmaev, V.S.Rostovsky. Some extensions for the energy conditions inspired by vacuum nonlinear electrodynamics // Physical Review D. — 2020. — Vol. 101. — P. 085001 (article number). — Импакт-фактор 5,3 (JIF).
- [110] V.A.Sokolov. Extended duality condition for conformal vacuum nonlinear electrodynamics // Physical Review D. — 2021. — Vol. 104. — P. 124035 (article number). — Импакт-фактор 5,3 (JIF).
- [111] V.A.Sokolov. Cylindrically symmetric self-sustaining solutions in some models of nonlinear electrodynamics // The European Physical Journal C. — 2022. — Vol. 82. — P. 964 (article number). — Импакт-фактор 4,8 (JIF).
- [112] V.A.Sokolov. Extreme black points in Born–Infeld electrodynamics // The European Physical Journal C. — 2025. — Vol. 85. — P. 1278 (article number). — Импакт-фактор 4,8 (JIF).

- [113] Развитие метода спиновых коэффициентов для интегрирования уравнений нелинейной электродинамики вакуума / П.А.Вшивцева, А.А.Зубрило, И.В.Кривченков и В.А.Соколов // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2006. — № 5. — С. 6–8. — Импакт-фактор 0,51(РИНЦ).
- [114] E.Newman, R.Penrose. An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients // Journal of Mathematical Physics. — 1962. — Vol. 3, no. 3. — P. 566.
- [115] Точные решения уравнений Эйнштейна / Д.Крамер, Х.Штефанн, М.Мак-Каллум и Э.Херльт. — Москва : Энергоиздат, 1982. — С. 416.
- [116] Г.А.Алексеев, В.И.Хлебников. Формализм Ньюмена-Пенроуза и его применение в общей теории относительности // ЭЧАЯ. — 1978. — Т. 9, № 5. — С. 790.
- [117] В.П.Фролов. Метод Ньюмена-Пенроуза в общей теории относительности // Труды ФИАН. — 1977. — Т. 96. — С. 72.
- [118] L.A.Gómez López, G.D.Quiroga. Asymptotic structure of spacetime and the Newman-Penrose formalism: a brief review // Revista Mexicana de Física. — 2017. — Vol. 63. — P. 275.
- [119] J.Ehlers, W.Kundt. Gravitation: An Introduction to Current Research. — New York : Wiley, 1962. — P. 49–101.
- [120] M.Demianski, E.T.Newman. Combined Kerr-Nut Solution Of The Einstein Field Equations // Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys. — 1966. — Vol. 14. — P. 653.
- [121] В.П.Фролов. Решения типа Керра-Ньюмана-Унти-Тамбурино уравнений Эйнштейна с космологическим членом // ТМФ. — 1974. — Т. 21. — С. 213.
- [122] W.M.Kinnersley. Type D Vacuum Metrics // Journal of Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 10. — P. 1195.

- [123] Exact solutions of the field equations: twist-free pure radiation fields / W.Kundt, G.J.Whitrow, H.Bondi, D.J.Bohm, W.B.Bonnor, A.Trautman, J.L.Synge, A.Lichnerowicz, and H.Bondi // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1962. — Vol. 270, no. 1342. — P. 328.
- [124] P.Dolan. A singularity free solution of the Maxwell-Einstein equations // Commun.Math. Phys. — 1968. — Vol. 9. — P. 161.
- [125] N.Tariq, B.O.J.Tuppe. The uniqueness of the Bertotti-Robinson electromagnetic universe // Journal of Mathematical Physics. — 1974. — Vol. 15, no. 12. — P. 2232–2235.
- [126] I.V.Krivchenkov. Developing the eikonal method in nonlinear electrodynamics based on the geometrization principle // Theoret. and Math. Phys. — 2007. — Vol. 150. — P. 97.
- [127] A.E.Shabad, V.V.Usov. Effective Lagrangian in nonlinear electrodynamics and its properties of causality and unitarity // Phys.Rev.D. — 2011. — Vol. 83. — P. 105006.
- [128] S.W.Hawking, G.F.R.Ellis. The Large Scale Structure of Space-Time. — Cambridge : Cambridge University Press, 1973. — P. 404.
- [129] E.Curiel. A Primer on Energy Conditions (chapter in «Towards a Theory of Spacetime Theories»). — New York : Springer New York, 2017. — P. 43–104.
- [130] A.Borde, A.Vilenkin. Violation of the weak energy condition in inflating spacetimes // Phys. Rev. D. — 1997. — Vol. 56. — P. 717.
- [131] S.W.Hawking. Gravitational radiation from colliding black holes // Phys. Rev. Lett. — 1971. — Vol. 26. — P. 1344.
- [132] R.Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities // Phys. Rev. Lett. — 1965. — Vol. 14. — P. 57.
- [133] V.A.Rubakov. The Null Energy Condition and its violation // Phys.-Uspekhi. — 2014. — Vol. 57. — P. 128.

- [134] T.Kobayashi. Horndeski theory and beyond: a review // *Rep. Prog. Phys.* — 2019. — Vol. 82. — P. 086901.
- [135] W.W.-Y.Wong. Regular hyperbolicity, dominant energy condition and causality for Lagrangian theories of maps // *Class. Quantum Gravity.* — 2011. — Vol. 28. — P. 215008.
- [136] J.Earman. No superluminal propagation for classical relativistic and relativistic quantum fields // *Stud. Hist. Philos. Sci. B.* — 2014. — Vol. 48. — P. 102.
- [137] P.Martín-Moruno, M.Visser. Classical and quantum flux energy conditions for quantum vacuum states // *Phys. Rev. D.* — 2013. — Vol. 88. — P. 061701.
- [138] Edited by F.S.N.Lobo. *Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions.* — Springer International Publishing, 2017. — P. 303.
- [139] P.Martín-Moruno, M.Visser. Semiclassical energy conditions for quantum vacuum states // *J. High Energ. Phys.* — 2013. — Vol. 050. — P. 1309.
- [140] R.de Putter, E.V.Linder. Kinetic k-essence and quintessence // *Astropart. Phys.* — 2007. — Vol. 28. — P. 263.
- [141] On the stability and causality of scalar-vector theories / P.Fleury, J.P.Beltrán Almeida, C.Pitrou, and J.-P.Uzan // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* — 2014. — Vol. 11. — P. 043.
- [142] H.J.Mosquera Cuesta, J.M.Salim. Nonlinear Electrodynamics and the Surface Redshift of Pulsars // *The Astrophysical Journal.* — 2004. — Vol. 608, no. 2. — P. 925.
- [143] H.J.Mosquera Cuesta, G.Lambiase, J.P.Pereira. Probing nonlinear electrodynamics in slowly rotating spacetimes through neutrino astrophysics // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 95. — P. 025011.
- [144] Nonlinear electromagnetic delay of electromagnetic signals in the magnetic field of a neutron star / V.I.Denisov, I.P.Denisova,

- I.V.Krivchenkov, and et al. // Dokl. Phys. — 2004. — Vol. 49, no. 2. — P. 630.
- [145] M.G.Baring, A.K.Harding. Photon Splitting and Pair Creation in Highly Magnetized Pulsars // The Astrophysical Journal. — 2001. — Vol. 547, no. 2. — P. 929.
- [146] L.Hui-Quan, Y.Xiao-Lin, W.Jian-Cheng. The force-free dipole magnetosphere in nonlinear electrodynamics // Research in Astronomy and Astrophysics. — 2020. — Vol. 20, no. 3. — P. 038.
- [147] J.Pétri. Quantum electrodynamic corrections to a magnetic dipole in general relativity // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — Vol. 456, no. 4. — P. 4455.
- [148] P.A.Vshivtseva, V.IDenisov, I.P.Denisova. Nonlinear electrodynamic effect of frequency doubling in the field of a magnetic dipole // Dokl. Phys. — 2002. — Vol. 47. — P. 798.
- [149] R.A.Hulse, J.H.Taylor // Astrophysical Journal. — 1975. — Vol. 195. — P. L51.
- [150] J.Pétri. General-relativistic electromagnetic fields around a slowly rotating neutron star: stationary vacuum solutions // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2013. — Vol. 433, no. 2. — P. 986–1014.
- [151] T.M.Tauris, S.Konar. Torque decay in the pulsar (P, \dot{P}) diagram - Effects of crustal ohmic dissipation and alignment // Astronomy and Astrophysics. — 2001. — Vol. 376, no. 2. — P. 543.
- [152] J.Pétri. Multipolar electromagnetic fields around neutron stars: exact vacuum solutions and related properties // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2015. — Vol. 450, no. 1. — P. 714–742.
- [153] J.Pétri. Multipolar electromagnetic fields around neutron stars: general-relativistic vacuum solutions // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2017. — Vol. 472, no. 3. — P. 3304.

- [154] J.Pétri. General-relativistic electromagnetic fields around a slowly rotating neutron star: time-dependent pseudo-spectral simulations // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2014. — Vol. 439, no. 1. — P. 1071–1078.
- [155] J.P.Ostriker, J.E.Gunn. On the Nature of Pulsars. I. Theory // *Astrophysical Journal*. — 1969. — Sep. — Vol. 157. — P. 1395.
- [156] J.S.Heyl, L.Hernquist. QED one-loop corrections to a macroscopic magnetic dipole // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1997. — Vol. 30, no. 18. — P. 6475.
- [157] J.Pétri. Quantum electrodynamical corrections to a magnetic dipole in general relativity // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2016. — Vol. 456, no. 4. — P. 4455.
- [158] V.A.Sokolov. Generation of second and third harmonics by a rotating pulsar in parametrized post-Maxwellian electrodynamics // *Moscow University Physics Bulletin*. — 2008. — Vol. 63, no. 4. — P. 279–280. — [В.А. Соколов. Генерация второй и третьей гармоник вращающимся пульсаром в параметризованной постмаквелловской электродинамике // *Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия*. — 2008. — №4. — С. 51-52.], Импакт-фактор 0,4 (JIF).
- [159] R.N.Manchester, J.H.Taylor. *Pulsars*. — San Francisco : W. H. Freeman, 1977.
- [160] C.Palomba. Pulsars ellipticity revised // *Astron. Astrophys.* — 2000. — Vol. 354. — P. 163.
- [161] V.V.Usov. Millisecond pulsars with extremely strong magnetic fields as a cosmological source of gamma-ray bursts // *Nature*. — 1992. — Vol. 357. — P. 472.
- [162] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. *Теоретическая физика. Теория Поля*. — Москва : Наука, 1988. — С. 512.
- [163] The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue / R.N.Manchester, G.B.Hobbs, A.Teoh, and M.Hobbs // *The Astronomical Journal*. — 2005. — Vol. 129, no. 4. — P. 1993.

- [164] A.Loeb, Y.Shvartzvald, D.Maoz. Fast radio bursts may originate from nearby flaring stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. — 2014. — Vol. 439, no. 1. — P. L46.
- [165] H.Falcke, L.Rezzolla. Fast radio bursts: the last sign of supramassive neutron stars // Astronomy and Astrophysics. — 2014. — Vol. 562. — P. A137.
- [166] A.Bokulić, I.Smolić, T.Jurić. Constraints on singularity resolution by nonlinear electrodynamics // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 106. — P. 064020.
- [167] N.Stergioulas, José A.Font. Nonlinear r -Modes in Rapidly Rotating Relativistic Stars // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86. — P. 1148.
- [168] Gravitational waves from hot young rapidly rotating neutron stars / B.J.Owen, L.Lindblom, C.Cutler, B.F.Schutz, A.Vecchio, and N.Andersson // Phys. Rev. D. — 1998. — Vol. 58. — P. 084020.
- [169] M.G.Alford, K.Schwenzer. Gravitational wave emission from oscillating millisecond pulsars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2014. — Vol. 446, no. 4. — P. 3631.
- [170] M.G.Alford, K.Schwenzer. Gravitational wave emission and spin-down of young pulsars // The Astrophysical Journal. — 2014. — Vol. 781, no. 1. — P. 26.
- [171] A.S.Eddington. Internal Constitution of the Stars. — Cambridge University Press, 1926.
- [172] S.Rosseland. Electrical State of a Star // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1924. — Vol. 84, no. 9. — P. 720–729.
- [173] J.Bally, E.R.Harrison. The electrically polarized universe. // Astrophysical journal. — 1978. — Vol. 220. — P. 743.
- [174] N.K.Glendenning. Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity. — Springer-Verlag, 2000.

- [175] J.D.Bekenstein. Hydrostatic Equilibrium and Gravitational Collapse of Relativistic Charged Fluid Balls // *Phys. Rev. D.* — 1971. — Vol. 4. — P. 2185.
- [176] Electrically charged compact stars and formation of charged black holes / S.Ray, A.L.Espíndola, M.Malheiro, José P. S. Lemos, and V.T.Zanchin // *Phys. Rev. D.* — 2003. — Vol. 68. — P. 084004.
- [177] H.Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie // *Ann. Phys.* — 1916. — Vol. 50. — P. 106.
- [178] G.Nordström. On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory // *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* — 1918. — Vol. 20. — P. 1238.
- [179] С.Чандрасекар. Математическая теория черных дыр: в 2-х томах. — Мир, 1986. — С. 276.
- [180] R.Penrose. Gravitational Collapse: the Role of General Relativity // *Nuovo Cimento Rivista Serie.* — 1969. — Vol. 1. — P. 252.
- [181] S.Hod. Stability of the extremal Reissner–Nordström black hole to charged scalar perturbations // *Physics Letters B.* — 2012. — Vol. 713, no. 4. — P. 505–508.
- [182] R.P.van der Marel. Intermediate-Mass Black Holes in the Universe: A Review of Formation Theories and Observational Constraints. — Cambridge Univ. Press, 2004.
- [183] An intermediate-mass black hole of over 500 solar masses in the galaxy ESO 234-49 / S.Farrell, N.Webb, D.Barret, and et al. // *Nature.* — 2009. — Vol. 460. — P. 73.
- [184] В.А.Фок. Теория Пространства, Времени и Тяготения. — ГИТТЛ, 1955. — С. 504.
- [185] F.W.Hehl, Yu.N.Obukhov. Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric. — Birkhauser, 2003.

- [186] V.I.Denisov, I.P.Denisova. The eikonal equation in parametrized nonlinear electrodynamics of vacuum // Dokl. Phys. — 2001. — Vol. 46. — P. 377.
- [187] Wei-Tou Ni. Spacetime structure and asymmetric metric from the premetric formulation of electromagnetism // Physics Letters A. — 2015. — Vol. 379, no. 20. — P. 1297–1303.
- [188] V.I.Denisov, M.I.Denisov. Verification of Einstein's principle of equivalence using a laser gyroscope in terrestrial conditions // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 60. — P. 047301.
- [189] И.П.Денисова. Введение в тензорное исчисление и его приложения. — УИЦ ДО, 2003. — С. 230.
- [190] J.Géhéniau, R.Debever. Les quatorze invariants de courbure de l'espace Riemannien a quatre dimensions // Helv. Phys. Acta Suppl. — 1956. — Vol. 60. — P. 101.
- [191] L.Witten. Invariants of General Relativity and the Classification of Spaces // Phys. Rev. — 1959. — Vol. 113. — P. 357.
- [192] A.Z.Petrov. Einstein Spaces. — Pergamon, 1969.
- [193] G.E.Sneddon. On the algebraic invariants of the four-dimensional Riemann tensor // Classical and Quantum Gravity. — 1986. — Vol. 3, no. 5. — P. 1031.
- [194] J.Carminati, R.G.McLenaghan. Algebraic invariants of the Riemann tensor in a four-dimensional Lorentzian space // Journal of Mathematical Physics. — 1991. — Vol. 32, no. 11. — P. 3135.
- [195] E.Zakhary, C.B.G.Mcintosh. A Complete Set of Riemann Invariants // General Relativity and Gravitation. — 1997. — Vol. 29. — P. 539.
- [196] Collaboration The Event Horizon Telescope. First M87 Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole // Astrophys. J. Lett. — 2019. — Vol. L1. — P. 875.

- [197] A.F.Zakharov. Constraints on a charge in the Reissner-Nordstöm metric for the black hole at the Galactic center // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 90. — P. 062007.
- [198] Acceleration of particles and shells by Reissner-Nordström naked singularities / M.Patil, P.S.Joshi, M.Kimura, and Ken-ichi Nakao // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 86. — P. 084023.
- [199] D.R.Brill, J.B.Hartle. Method of the Self-Consistent Field in General Relativity and its Application to the Gravitational Geon // Phys. Rev. — 1964. — Vol. 135. — P. B271.
- [200] M.A.Melvin. Pure magnetic and electric geons // Phys. Lett. — 1964. — Vol. 8. — P. 65.
- [201] M.Žofka. Bonnor-Melvin universe with a cosmological constant // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 99. — P. 044058.
- [202] A.A.Tseytlin. Melvin solution in string theory // Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 346. — P. 55.
- [203] F.J.Ernst. Black holes in a magnetic universe // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17. — P. 54.
- [204] F.J.Ernst, W.J.Wild. Kerr black holes in a magnetic universe // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17. — P. 182.
- [205] E.Radu. A note on Schwarzschild black hole thermodynamics in a magnetic universe // Mod. Phys. Lett. A. — 2002. — Vol. 17. — P. 2277.
- [206] M.Wang, S.Chen, J.Jing. Kerr Black hole shadows in Melvin magnetic field with stable photon orbits // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104. — P. 084021.
- [207] L.C.N.Santos, C.C.Barros Jr. Dirac equation and the Melvin Metric // Eur. Phys. J. C. — 2016. — Vol. 76. — P. 560.
- [208] B.Kleihaus, J.Kunz, E.Radu. Nonabelian solutions in a Melvin magnetic universe // Phys. Lett. B. — 2008. — Vol. 660. — P. 386.

- [209] K.A.Bronnikov, V.G.Krechet, V.B.Oshurko. Rotating Melvin-like Universes and Wormholes in General Relativity // Symmetry. — 2020. — Vol. 12. — P. 1306.
- [210] S.V.Bolokhov, V.D.Ivashchuk. On generalized Melvin solutions for Lie algebras of rank 3 // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. — 2018. — Vol. 15. — P. 1850108.
- [211] K.A.Bronnikov, G.N.Shikin, E.N.Sibileva. Self-gravitating string like configurations from nonlinear electrodynamics // Grav.Cosmol. — 2003. — Vol. 9. — P. 169.
- [212] H.Weyl. Bemerkung über die axisymmetrischen Lösungen der Einsteinschen gravitationsgleichungen // Ann. Physik. — 1919. — Vol. 59. — P. 185.
- [213] J.L.Synge. Relativity—The General Theory. — New York: Wiley, 1960.
- [214] G.W.Gibbons, C.A.R.Herdeiro. The Melvin universe in Born-Infeld theory and other theories of nonlinear electrodynamics // Class. Quantum Grav. — 2001. — Vol. 18. — P. 1677.
- [215] I.P.Tindo, et. al. Preliminary interpretation of the polarization measurements performed on Intercosmos-4 during three X-ray solar flares // Solar Phys. — 1972. — Vol. 27. — P. 426.
- [216] Yu.I.Denisov, et. al. Temporal, spectral and polarization parameters of hard X-ray emission of solar flares observed in SPR-N experiment on board CORONAS-F orbital observatory // Izv.Akad. Nauk Ser. Fiz. — 2003. — Vol. 36. — P. 1422.
- [217] M.C.Weisskopf, et. al. A precision measurement of the X-ray polarization of the Crab Nebula without pulsar contamination // Astrophys. J. — 1978. — Vol. 220. — P. L117.
- [218] L.Sidoli, A.Paizis, K.Postnov. INTEGRAL study of temporal properties of bright flares in Supergiant Fast X-ray Transients // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2016. — Vol. 457. — P. 3693.

- [219] Polarimetry in the hard X-ray domain with INTEGRAL SPI / M.Chauvin, J.P.Roques, D.J.Clark, and E.Jourdain // *Astrophys. J.* — 2013. — Vol. 769. — P. 137.
- [220] Spectral State Dependence of the 0.4–2 MeV Polarized Emission in Cygnus x-1 Seen With Integral/ibis and Links With the ami Radio Data / J.Rodriguez, V.Grinberg, P.Laurent, M.Cadolle Bel, K.Pottschmidt, G.Pooley, and et. al. // *Astrophys. J.* — 2015. — Vol. 807. — P. 17.
- [221] Polarization of the Crab pulsar and nebula as observed by the Integral/IBIS telescope / M.Forot, P.Laurent, I.A.Grenier, C.Gouiffes, and F.Lebrun // *Astrophys. J.* — 2008. — Vol. 688. — P. L29.
- [222] M.Chauvin, et. al. Observation of polarized hard X-ray emission from the Crab by the PoGOLite Pathfinder // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2016. — Vol. 456. — P. L84.
- [223] V.I.Denisov, S.I.Svertilov. Nonlinear electromagnetic and gravitational actions of neutron star fields on electromagnetic wave propagation // *Phys. Rev. D.* — 2005. — Vol. 71. — P. 063002.
- [224] J.S.Heyl, N.J.Shaviv. Polarization evolution in strong magnetic fields // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2000. — Vol. 311. — P. 555.
- [225] Polarization of neutron star surface emission: a systematic analysis / R.Taverna, R.Turolla, D.G.Caniulef, S.Zane, F.Muleri, and P.Soffitta // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2015. — Vol. 454. — P. 3254.
- [226] A.K.Harding, C.Kalapotharakos. Multiwavelength Polarization of Rotation-Powered Pulsars // *Astrophys. J.* — 2017. — Vol. 840. — P. 73.
- [227] R.P.Mignani, et. al. Evidence for vacuum birefringence from the first optical-polarimetry measurement of the isolated neutron star RX J1856.5-3754 // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2017. — Vol. 465. — P. 492.
- [228] P.Meszaros. High Energy Radiation from Magnetized Neutron Stars. — University of Chicago Press, 1992.

- [229] J.Ventura, W.Nagel, P.Meszaros. Possible vacuum signature in the spectra of X-ray pulsars // *Astrophys. J.* — 1979. — Vol. 233. — P. L125.
- [230] R.Fernandez, S.W.Davis. The X-Ray Polarization Signature of Quiescent Magnetars: Effect of Magnetospheric Scattering and Vacuum Polarization // *Astrophys. J.* — 2011. — Vol. 730. — P. 131.
- [231] P.Goldreich, W.H.Julian. Pulsar electrodynamics // *Astrophys. J.* — 1969. — Vol. 157. — P. 869.
- [232] D.V.Gal'tsov, N.S.Nikitina. Macroscopic vacuum effects in an inhomogeneous and nonstationary electromagnetic field // *JETP.* — 1983. — Vol. 57. — P. 705.
- [233] R.W.Bussard, S.G.Alexander, P.Meszaros. One and two photon Compton scattering in strong magnetic fields // *Phys. Rev. D.* — 1986. — Vol. 34. — P. 440.
- [234] V.I.Denisov, S.I.Svertilov. Vacuum nonlinear electrodynamics curvature of photon trajectories in pulsars and magnetars // *Astronomy and Astrophysics.* — 2003. — Vol. 399, no. 3. — P. L39.
- [235] P.A.Vshivtseva, V.I.Denisov, I.V.Krivchenkov. Nonlinear electrodynamic lensing of electromagnetic waves in a magnetic dipole field // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2007. — Vol. 150. — P. 73.
- [236] N.A.Silant'ev, Yu.N.Gnedin, T.S.Krymski. Faraday rotation and polarization of light scattered in magnetized stellar wind // *Astron. Astrophys.* — 2000. — Vol. 357. — P. 1151.
- [237] Yu.N.Gnedin, N.A.Silant'ev, P.S.Shternin. Polarization of radiation from a strongly magnetized accretion disk: The asymptotic spectral distribution // *Astron. Lett.* — 2006. — Vol. 32. — P. 39.
- [238] Yu.N.Gnedin, N.A.Silant'ev, M.Yu.Piotrovich. Polarization of the radiation scattered in conical magnetized envelope // *Astron. Lett.* — 2006. — Vol. 32. — P. 96.

- [239] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Курс теоретической физики (Физическая кинетика, том 10). — Физматлит, 2007. — С. 536.
- [240] The Polarization effects of radiation from magnetized envelopes and extensive accretion structures / Yu.N.Gnedin, N.A.Silant'ev, M.Yu.Piotrovich, and M.A.Pogodin // *Astron. Rep.* — 2005. — Vol. 49. — P. 179.
- [241] Yu.N.Gnedin, S.V.Krasnikov. Polarimetric effects associated with the detection of Goldstone bosons in stars and galaxies // *ЖЭТФ.* — 1992. — Vol. 75. — P. 933.
- [242] K.Bennett, et. al. COS-B observations of pulsed gamma-ray emission from PSR 0531 plus 21 and PSR 0833-45 // *Astron. Astrophys.* — 1977. — Vol. 61. — P. 279.
- [243] High field physics and QED experiments at ELI-NP / P.Mckenna, S.Mangles, D.Peter, G.Sarri, and J.Schreiber // *Romanian reports in Physics.* — 2016. — Vol. 68. — P. S145.
- [244] International Exawatt Center for Extreme Light Studies (XCELS): Laser System and Experiment Program / I.Yu.Kostyukov, E.A.Khazanov, A.A.Shaikin, A.G.Litvak, and A.M.Sergeev // *Bulletin of the Lebedev Physics Institute.* — 2023. — Vol. 50, no. Suppl 6. — P. S635.
- [245] D.Hanneke, S.Fogwell, G.Gabrielse. New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 120801.
- [246] Collaboration ATLAS. Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC // *Nature Phys.* — 2017. — Vol. 13. — P. 852.
- [247] M.Dyndal. Electromagnetic processes in ultra-peripheral Pb+Pb collisions with ATLAS // *Nuclear Physics A.* — 2017. — Vol. 967. — P. 281.
- [248] The PVLAS experiment: A 25 year effort to measure vacuum magnetic birefringence / A.Ejlli, F.Della Valle, U.Gastaldi, G.Messineo, R.Pengo,

- G.Ruoso, and G.Zavattini // *Physics Reports*. — 2020. — Vol. 871. — P. 1–74.
- [249] F.Della Valle, et. al. First results from the new PVLAS apparatus: a new limit on vacuum magnetic birefringence // *Phys. Rev. D*. — 2014. — Vol. 90. — P. 092003.
- [250] S.Villalba-Chávez, A.Piazza. Axion-induced birefringence effects in laser driven nonlinear vacuum interaction // *JHEP*. — 2013. — Vol. 11. — P. 136.
- [251] V.A.Sokolov. Electromagnetic wave interactions in a strong permanent magnetic field // *Moscow University Physics Bulletin*. — 2009. — Vol. 64, no. 3. — P. 349–351. — [В.А. Соколов. Взаимодействие электромагнитных волн в сильном постоянном магнитном поле // *Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия*. — 2009. — №3. С. 108–109.], Импакт-фактор 0,4 (JIF).
- [252] В.И.Денисов, Н.В.Кравцов, И.В.Кривченков. О возможности обнаружения поляризации вакуума в магнитном поле // *Квантовая электроника*. — 2003. — Т. 33. — С. 938.
- [253] V.I.Denisov. Nonlinear effect of quantum electrodynamics for experiments with a ring laser // *Journal of Optics, A*. — 2000. — Vol. 2. — P. 372.
- [254] Harmonic analysis in a large ring laser with backscatter-induced pulling / G.E.Stedman, Z.Li, C.H.Rowe, A.D.McGregor, and H.R.Bilger // *Phys. Rev. A*. — 1995. — Vol. 51. — P. 4944.
- [255] L.Cooper, G.E.Stedman. Axion detection by ring lasers // *Physics Letters B*. — 1995. — Vol. 357, no. 3. — P. 464–468.
- [256] Wu-yang Tsai, T.Erber. Propagation of photons in homogeneous magnetic fields: Index of refraction // *Phys. Rev. D*. — 1975. — Vol. 12. — P. 1132.
- [257] K.Hattori, K.Itakura. Vacuum birefringence in strong magnetic fields: (II) Complex refractive index from the lowest Landau level // *Annals Phys.* — 2013. — Vol. 334. — P. 58.

- [258] S.A.Olausen, V.M.Kaspi. The McGill magnetar catalog // *Astrophys. J. Suppl.* — 2014. — Vol. 212. — P. 1.
- [259] The Australia telescope national facility pulsar catalogue / R.N.Manchester, G.B.Hobbs, A.Teoh, and M.Hobbs // *The Astronomical Journal.* — 2005. — Vol. 129, no. 4. — P. 1993.
- [260] P.Soffitta. XIPE: the X-ray imaging polarimetry explorer // *Exper. Astron.* — 2013. — Vol. 36. — P. 523.
- [261] M.C.Weisskopf, et. al. The imaging x-ray polarimetry explorer (IXPE) // *Results in Physics.* — 2016. — Vol. 6. — P. 1179.
- [262] T.Fulton, F.Rohrlich, L.Witten. Conformal Invariance in Physics // *Rev. Mod. Phys.* — 1962. — Vol. 34. — P. 442–457.
- [263] J.A.R.Cembranos, A.de la Cruz-Dombriz, J.Jarillo. Reissner-Nordström black holes in the inverse electrodynamics model // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* — 2015. — Vol. 2015, no. 02. — P. 042.
- [264] W.B.Bonnor, P.C.Vaidya. Spherically symmetric radiation of charge in Einstein-Maxwell theory // *Gen Relat Gravit.* — 1970. — Vol. 1. — P. 127.
- [265] D.P.Sorokin. Introductory Notes on Non-linear Electrodynamics and its Applications // *Fortschritte der Physik.* — 2022. — Vol. 70, no. 7. — P. 2200092.
- [266] G.W.Gibbons, D.A.Rasheed. Electric-magnetic duality rotations in non-linear electrodynamics // *Nuclear Physics B.* — 1995. — Vol. 454, no. 1. — P. 185–206.