МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Трифонова Екатерина Евгеньевна

О свойствах конечно порождающих систем булевых функций для классов рациональных вероятностей

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Диссертация подготовлена в секторе теоретической кибернетики математического отдела Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук».

Научные руководители:	**Колпаков Роман Максимович**, доктор физико-математических наук
	Яшунский Алексей Дмитриевич, доктор физико-математических наук
Официальные оппоненты:	**Аблаев Фарид Мансурович**, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Академии Наук Республики Татарстан, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, отделение фундаментальной информатики и информационных технологий, кафедра теоретической кибернетики, заведующий кафедрой
	Пантелеев Владимир Иннокентьевич, доктор физико-математических наук, доцент, Иркутский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, кафедра алгебраических и информационных систем, заведующий кафедрой
	Галатенко Алексей Владимирович, кандидат физико-математических наук, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра математической теории интеллектуальных систем, доцент

Защита диссертации состоится «19» декабря 2025 года в 18 часов 15 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ им. М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на портале https://dissovet.msu.ru/dissertation/3688

Автореферат разослан «   » ноября 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4, **В. А. Кибкало**
кандидат физико-математических наук

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Диссертация относится к одному из основных направлений дискретной математики и математической кибернетики — теории функциональных систем. С. В. Яблонский[1] определял теорию функциональных систем как область знания, которая занимается изучением функций, описывающих работу дискретных преобразователей, и считал[2], что роль теории функциональных систем для дискретной математики сравнима с ролью математического анализа для непрерывной математики. В диссертации изучаются дискретные случайные величины с позиций теории функциональных систем.

В современных представлениях[3] функциональная система — это пара (P, ψ), где P — некоторое множество, а ψ — некоторое отображение множества $\mathcal{B}(P)$ всех подмножеств множества P в себя. Основными типами задач, которые возникают при исследовании функциональных систем, являются задачи выразимости и полноты. К задачам выразимости, в частности, относится задача определения по множеству $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq P$, и произвольной функции f, $f \in P$, принадлежности этой функции множеству $\psi(\mathcal{A})$. Решение задач полноты представляет собой получение ответа на вопрос, выполнено ли для заданного множества $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(P)$, и произвольной системы $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq P$, условие $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$, т. е. порождает ли система $\mathcal{A}$ множество $\mathcal{F}$. Разновидностями задач полноты являются задачи исследования классов на наличие конечных порождающих систем и задачи о существовании базиса. Еще одним важным классом задач при изучении функциональных систем является исследование свойств семейства классов $\{\psi(\mathcal{A}) | \mathcal{A} \subseteq P\}$, а именно: определение мощности такого семейства классов, его структуры, свойств его элементов и т. д.

В качестве отображения ψ часто рассматривается оператор замыкания[4], который для любых множеств $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ из $\mathcal{B}(P)$, удовлетворяет усло-

[1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику // М.: Высш шк., 2008. 384 с.

[2] Там же.

[3] См., например, Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.:Изд-во МГУ, 1982. 158 с.; Угольников А. Б. О некоторых задачах в области многозначных логик // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». (Москва, МГУ, 1–6 февраля, 2010 г.) М.: Изд-во МГУ, 2010. С. 18–34.

[4] См., например, Кон П. Универсальная алгебра. М.:Мир, 1968. 351 с.

виям:

1) $\mathfrak{A} \subseteq \psi(\mathfrak{A})$;

2) если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, то $\psi(\mathfrak{A}) \subseteq \psi(\mathfrak{B})$;

3) $\psi(\psi(\mathfrak{A})) = \psi(\mathfrak{A})$.

Множество $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subseteq P$, является *замкнутым относительно оператора* ψ, если выполняется равенство $\psi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Замкнутые множества также называются *замкнутыми классами* (относительно ψ).

Одной из первых функциональных систем, для которой были решены вышеприведенные задачи, стала система $\mathcal{P}_2 = (P_2, \varphi)$, где P_2 — множество всех булевых функций, а φ — оператор суперпозиции. Для функциональной системы (P_2, φ) Э. Л. Постом[5] были описаны все замкнутые относительно операции суперпозиции классы булевых функций и показано, что каждый такой класс имеет конечный базис.

После решения основных задач для функциональной системы (P_2, φ) внимание исследователей естественным образом обратилось к функциональной системе $\mathcal{P}_k = (P_k, \varphi)$, содержащей P_k — множество всех функций k-значной логики ($k \geq 3$) и φ — оператор суперпозиции, отображающий множество $\mathcal{B}(P_k)$ в себя.

Существуют принципиальные отличия многозначных логик от двузначной, в частности, при любом $k \geq 3$ в P_k есть замкнутые классы, не имеющие базиса, и замкнутые классы со счетным базисом, откуда следует, что семейство замкнутых классов в P_k является континуальным[6]. Задача о полноте в P_3 была решена С. В. Яблонским[7]. Выявлению различных семейств предполных классов в P_k посвящено большое число работ [8], описание всех предполных классов функций из P_k заверше-

[5] Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. 1941. No 5. 122 pp.; Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. Vol. 43, No 3. p. 63–185.

[6] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46

[7] Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР. 1954. Т. 95, № 6. С. 1152–1156.

[8] Кузнецов А. В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем //Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 145–146; Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Наука, 1960. С. 49–60; Lo Czu Kai Precomplete classes defined by normal k-ary relations in k-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1964.

но И. Розенбергом[9].

Также важным направлением исследования стало изучение свойств функциональных системы (P_k, φ^+), где в качестве оператора φ^+ рассматривается какое-нибудь усиление оператора суперпозиции φ. К данному направлению исследований, в частности, можно отнести работы ряда авторов[10].

Помимо широко известных функциональных систем для множества функций P_k, исследователями рассматривались менее распространенные, но так же чрезвычайно интересные и значимые с практической точки зрения функциональные системы, связанные с дискретными случайными величинами — функциями на вероятностном пространстве. При этом изначально такие задачи могли рассматриваться с общих позиций дискретных моделей, а переход к их рассмотрению именно с позиции теории функциональных систем происходил постепенно. В середине XX века в классических работах Дж. фон Неймана[11], К. Э. Шеннона и Э. Ф. Мура[12] возникает задача синтеза надежных устройств из

Vol. 3. p. 39–50; Байрамов Р. А. Об одной серии предполных классов в k-значной логике // Кибернетика. 1967. № 1. С. 7–9; Захарова Е. Ю. Критерий полноты системы функций из P_k // Проблемы кибернетики. Вып. 18. М.: Наука, 1967. С. 5–10.

[9] Rosenberg I. G. La structure des functions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris. 1965. Vol. 260. P. 3817–3819; Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd. 1970. Vol. 80. p. 3–93.

[10] Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т .16, № 4. С. 397–416; Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33; Barris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. 1987. Vol. 101, No. 3. p. 427–430; Нгуен Ван Хоа Описание замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 16–19; Касим-Заде О. М. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады РАН. 1996. Т. 348, № 3. С. 299–301; Марченков С. С. S-классификация идемпотентных алгебр с конечными носителями // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 5. С. 587–589; Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 27–75; Угольников А. Б. О некоторых задачах в области многозначных логик // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». (Москва, МГУ, 1–6 февраля, 2010 г.) М.: Изд-во МГУ, 2010. С. 18–34; Старостин М. В. Критериальная система неявно предполных классов в трехзначной логике // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М., 2021. 133 с.

[11] Фон Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 68-–139.

[12] Мур Э. Ф., Шеннон К. Э. Надежные схемы из ненадежных реле // Кибернетический сборник. Вып. 1. М.: ИЛ, 1960. С. 109–148.

ненадежных элементов. В ЭВМ стали использоваться датчики случайных величин для решения различных задач методом Монте-Карло. При этом механизмы жеребьевки можно было рассматривать как вычисление некоторых булевых функций от величин, выдаваемых датчиком[13]. Примерно в это же время А. Гиллом[14] рассматривались вопросы преобразования последовательностей случайных величин конечными автоматами, а Р. Г. Бухараев[15] изучал возможности построения управляемого генератора вероятностей. Все это послужило толчком к развитию еще одного направления теории функциональных систем — моделированию бернуллиевских (или булевых) случайных величин (т. е. величин, принимающих только два значения: 0 и 1) с наперед заданными вероятностями с помощью логических функций. При подобном моделировании мы имеем дело с семейством функциональных систем вида $([0;1], V_F)$, где V_F — оператор выразимости, определенный множеством F рассматриваемых булевых функций. А. А. Ляпунов в 50-е годы XX века предложил задачу моделирования бернуллиевских случайных величин с наперед заданными вероятностями с помощью логических функций для решения своему ученику Р. Л. Схиртладзе. При решении этой задачи можно выделить несколько направлений исследований. Одним из основных является задача конструирования булевой функции, имеющей заданный закон распределения значений, если известен закон распределения аргументов[16].

В общем виде задача о булевых преобразованиях случайных величин формулируется следующим образом. Пусть есть (потенциально бесконечное) множество независимых в совокупности бернуллиевских случайных величин с распределениями из множества G, и пусть F — некоторая система булевых функций. Подстановка случайных величин вместо переменных в булеву функцию из множества F порождает новую бернуллиевскую случайную величину, распределение которой уже может не принадлежать множеству G. Эту процедуру можно повторять многократно, используя при этом в качестве аргументов помимо случайных величин с распределениями из множества G также и ранее по-

[13] Схиртладзе Р. Л. Моделирование случайных величин функциями алгебры логики // Дис. …канд. физ.-матем. наук. Тбилиси, 1966. 70 с.

[14] Gill A. Synthesis of probability transformers // J. Franklin Inst. 1962. Vol. 274, No. 1. p. 1–19

[15] Бухараев Р. Г Об управляемых генераторах случайных величин // Учен. зап. Казан. ун-та. 1963. Т. 123, № 6. С. 68–87.

[16] Схиртладзе Р. Л. Моделирование случайных величин функциями алгебры логики // Дис. …канд. физ.-матем. наук. Тбилиси, 1966. 70 с.

лученные случайные величины. Требуется определить, какие бернуллиевские распределения могут быть получены таким образом для заданного множества G и системы F. Данная задача является *задачей о выразимости* распределений. Множество выразимых распределений будем обозначать через $V_F(G)$. С точки зрения теории функциональных систем в рамках решения данной задачи имеем дело с семейством функциональных систем вида $([0;1], V_F)$.

Поскольку вероятность того, что бернуллиевская случайная величина принимает значение 1, полностью определяет распределение этой случайной величины, множество G можно рассматривать как набор чисел из отрезка $[0;1]$. Для бернуллиевских случайных величин термины «преобразование распределений» и «преобразование вероятностей» далее будут использоваться как взаимозаменяемые. Важный частный случай поставленной задачи — преобразования рациональных распределений, т. е. ситуация, когда все элементы множества G являются рациональными числами. В этом случае множество выразимых вероятностей также содержится в некотором подклассе рациональных чисел, а именно, в семействе дробей, у которых в разложениях знаменателей встречаются только те простые множители, которые встречаются в разложениях знаменателей дробей из множества G. Класс всех дробей, у которых в разложении знаменателя могут встречаться числа $p_1, \ldots, p_s$, обозначим через $\Gamma[p_1, \ldots, p_s]$. Для заданных простых чисел $p_1, \ldots, p_s$ и набора булевых функций F возникает важный вопрос о конечной порожденности класса $\Gamma[p_1, \ldots, p_s]$, т. е. существовании такого конечного множества G, что $V_F(G) = \Gamma[p_1, \ldots, p_s]$. Данная задача называется *задачей о конечной порожденности* семейств рациональных распределений. Если существует такое конечное множество G, что $V_F(G) = \Gamma[p_1, \ldots, p_s]$, то систему булевых функций F мы называем *конечно порождающей*. С точки зрения теории функциональных систем в данном случае мы имеем дело с семейством функциональных систем вида $(\Gamma[p_1, \ldots, p_s], V_F)$, для которых решается задача о существовании конечного базиса.

Как в задаче о выразимости, так и в задаче о конечной порожденности семейств распределений, различные системы булевых функций F могут, вообще говоря, задавать один и тот же класс преобразований на множестве распределений. Действительно, итерационный процесс порождения случайных величин путем подстановки в булевы функции независимых в совокупности случайных величин соответствует бесповторной суперпозиции булевых функций, поэтому совокупность всевозможных преобразований над системой F в точности соответствует множеству булевых функций, выразимых бесповторными формулами над системой F, иначе говоря, бесповторному замыканию множества булевых функций F. С точки зрения теории функциональных систем при работе с бесповторно замкнутыми классами булевых функций мы изучаем функциональную систему вида (P_2, φ_0), где P_2 — множество всех булевых функций, φ_0 — бесповторная суперпозиция. Исследования бесповторно замкнутых классов булевых функций ведутся с середины XX века[17], однако к настоящему моменту исчерпывающего описания бесповторно замкнутых классов, подобного решетке Поста, не получено. В контексте задачи о преобразованиях бернуллиевских случайных величин бесповторно замкнутые классы булевых функций возникают в работах Ф. И. Салимова[18] и А. Д. Яшунского[19].

По-видимому, первые результаты решения задачи конечной порожденности для бернуллиевских случайных величин с вероятностями из конечного множества рациональных вероятностей были получены Р. Л. Схиртладзе. В его работах[20] было показано, что преобразования с помощью конъюнкций и дизъюнкций ($\&$ и $\vee$) позволяют из единственного начального распределения $\{\frac{1}{2}\}$ породить все множество двоично-рациональных чисел. Им же было доказано, что это верно и для троично-рациональных распределений для множества начальных распреде-

[17] Кузнецов А. В. О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики // Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. Труды МИАН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 186–225; Гурвич В. А. О бесповторных булевых функциях // УМН. 1977. Т. 32, № 1(193). С. 183–184; Перязев Н. А. Реализация булевых функций бесповторными формулами // Дискретная математика. 1995. Т. 7, № 3. С. 61–68; Вороненко А. А. О длине проверяющего теста для бесповторных функций в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$ // Дискретная математика. 2005. Т. 17, № 2. С. 139–143; Зубков О. В. Нахождение и оценка числа бесповторных булевых функций в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ // Известия вузов. Математика. 2008. № 10. С. 17–24; Черемушкин А. В. К вопросу о линейной декомпозиции двоичных функций // Прикладная дискретная математика. 2016. № 1(31). С. 46–56.

[18] Салимов Ф. И. Об одной системе образующих для алгебр над случайными величинами // Изв. вузов. Математика. 1981. № 5. С. 78—82.

[19] Яшунский А. Д. Выпуклые алгебры вероятностных распределений, индуцированные конечными ассоциативными кольцами // Дискретная математика. 2019. Т. 31, № 1. С. 133–142.

[20] Схиртладзе Р. Л. О синтезе p-схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщ. АН ГрузССР. 1961. Т. 26, № 2. С. 181–186.; Схиртладзе Р. Л. О методе построения булевой величины с заданным распределением вероятностей // Дискретный анализ. 1966. Т. 7. С. 71–80.; Схиртладзе Р. Л. Моделирование случайных величин функциями алгебры логики // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Тбилиси, 1966. 70 с.

лений $\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\}$. При этом для простого числа p, $p > 3$, доказано, что порождение всего множества p-ично рациональных распределений с помощью системы функций $\{\&, \vee\}$ при использовании в качестве множества начальных распределений $\{\frac{1}{p}; \ldots; \frac{p-1}{p}\}$ невозможно. Такие же результаты независимо существенно позже были заново получены Дж. Браком, Д. Вильгельмом и Х. Чжоу[21]. В работе Р. Л. Схиртладзе[22] была также высказана гипотеза, что для простых p, $p > 3$, не существует конечного множества рациональных бернуллиевских распределений, порождающего все множество p-ично-рациональных распределений. Эта гипотеза до настоящего момента не подтверждена и не опровергнута.

Ф. И. Салимовым[23] были получены дальнейшие результаты в этой области. Он показал, что множества p-ично-рациональных распределений являются конечно порожденными при использовании в качестве системы преобразующих операций набора функций $\{x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3, 0, 1\}$. При этом в качестве множества начальных распределений можно взять множество $\{\frac{1}{p}; \ldots; \frac{p-1}{p}\}$.

В работах Р. М. Колпакова[24] показано, что для множеств рациональных бернуллиевских распределений $\Gamma[p_1, \ldots, p_s]$ относительно преобразований системой $\{\&, \vee\}$ при $s \geq 2$ всегда существуют конечные множества начальных распределений, порождающие всю совокупность $\Gamma[p_1, \ldots, p_s]$. Более того, если среди $p_1, \ldots, p_s$ встречается 2 или 3, в качестве порождающего множества начальных распределений можно взять все правильные дроби со знаменателем $p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$. Также в статье

[21] Wilhelm D., Bruck J. Stochastic switching circuit synthesis // Proc. 2008 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT). 2008. p. 1388—1392.; Zhou H., Bruck J. On the expressibility of stochastic switching circuits // Proc. 2009 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT). 2009. p. 2061—2065.

[22] Схиртладзе Р. Л. О синтезе p-схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщ. АН ГрузССР. 1961. Т. 26, № 2. С. 181–186.

[23] Салимов Ф. И. К вопросу моделирования булевых случайных величин функциями алгебры логики // Вероятностные методы и кибернетика. 1979. Т. 15. С. 68—89.; Салимов Ф. И. Об одной системе образующих для алгебр над случайными величинами // Изв. вузов. Математика. 1981. № 5. С. 78—82.; Салимов Ф. И. Об одном семействе алгебр распределений // Изв. вузов. Математика. 1988. № 7. С. 64–72.; Салимов Ф. И. Конечная порожденность алгебр распределений // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 2. С. 43–50.

[24] Колпаков Р. М. О порождении некоторых классов рациональных чисел вероятностными π-сетями // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1991. № 2. С. 27—30.; Колпаков Р. М. Об оценках сложности порождения рациональных чисел вероятностными контактными π-сетями // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1992. № 6. С. 62–65.

Р. М. Колпакова[25] в качестве усиления системы $\{\&, \vee\}$ рассмотрен класс функций, реализуемых бесповторными контактными схемами, относительно которых множества распределений $\Gamma[5]$ и $\Gamma[7]$ оказываются конечно порожденными. Наконец, в работе Р. М. Колпакова[26] предложена система монотонных функций $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_4, 0, 1\}$, относительно которой множество $\Gamma[p]$ при любом простом p порождается множеством всех правильных дробей со знаменателем p. Р. М. Колпаковым[27] для системы преобразований, состоящей из всех функций k-значной логики (функциональное множество P_k), построена вся решетка замкнутых классов рациональных распределений, тем самым полностью решена задача выразимости рациональных распределений относительно преобразований системой, состоящей из всех функций k-значной логики.

Впоследствии результаты Ф. И. Салимова были частично заново получены в работе В. Квана, М. Ридела, Дж. Брака и Х. Чжоу[28]. В этой же работе показано, что если брать в качестве системы преобразующих операций систему $\{\&, \neg\}$, то из множества начальных распределений $\{0{,}4; 0{,}5\}$ возможно получить произвольную десятичную дробь. Из этого результата вытекает, что система $\{\&, \neg\}$ является конечно порождающей в множестве десятичных дробей. Вместе с тем, конечная порожденность десятичных дробей относительно системы $\{\&, \vee\}$ (не более сильной, чем $\{\&, \neg\}$) была ранее доказана в работах Р. М. Колпакова[29] как частный случай более общего утверждения.

А. Д. Яшунским[30] изучались итеративные системы конечных случайных величин, и в частности — вопросы аппроксимации распределений

[25] Колпаков Р. М. О порождении рациональных чисел вероятностными контактными сетями // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1992. № 5. С. 46—52.

[26] Колпаков Р. М. О порождении рациональных чисел монотонными функциями // Теоретические и прикладные аспекты математических исследований: Сб. науч. тр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. С. 13–17.

[27] Колпаков Р. М. Дискретные преобразования конечных распределений рациональных вероятностей // Дис. ... докт. физ.-матем. наук, М., 2004. 180 с.

[28] Qian W., Riedel M. D., Zhou H., Bruck J. Transforming probabilities with combinational logic // Comput.-Aided Des. Integr. Circuits Syst. 2011. Vol. 30, No. 9. p. 1279—1292

[29] Колпаков Р. М. О порождении некоторых классов рациональных чисел вероятностными π-сетями // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1991. № 2. С. 27—30.; Колпаков Р. М. Об оценках сложности порождения рациональных чисел вероятностными контактными π-сетями // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1992. № 6. С. 62–65.

[30] Яшунский А. Д. Исследования по теории итеративных систем, порождаемых конечными случайными величинами. Арифметический и комбинаторно-логический подход // Дис. ... докт. физ.-матем. наук, М., 2021. 245 с.

дискретных случайных величин. В статье А. Д. Яшунского[31], посвященной решению задачи приближенного выражения распределений бернуллиевских случайных величин, были выделены классы булевых функций, которые не позволяют аппроксимировать произвольное распределение. Такие классы заведомо не являются конечно порождающими в указанном ранее смысле.

Вопросы конечной порожденности и выразимости рассматривались в основном для рациональных распределений, исключением являются работы Н. Н. Нурмеева[32], в которых были анонсированы некоторые результаты для алгебраических и трансцендентных распределений, однако доказательства, по-видимому, так и не были опубликованы.

Автором диссертационной работы установлены новые свойства конечно порождающих систем для классов дискретных случайных величин с рациональными вероятностями. Найдены новые бесповторно замкнутые классы булевых функций.

Цели и задачи диссертации

В диссертации получены принципиально новые представления о свойствах конечно порождающих систем булевых функций для множеств рациональных распределений. В работе доказываются конечная и бесконечная порожденность множеств рациональных распределений для различных систем булевых функций, а также устанавливаются определенные свойства, которыми должны обладать конечно порождающие системы булевых функций для множеств рациональных распределений.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются булевы функции и индуцированные ими преобразования распределенией. Исследуется вопрос конечной порожденности классов рациональных распределений бернуллиев-

[31] Yashunsky A. D. Clone-induced approximation algebras of Bernoulli distributions // Algebra Universalis. 2019. Vol. 80, No. 1. p. 1–16.

[32] Нурмеев Н. Н. О булевых функциях с аргументами, принимающими случайные значения // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов VIII Всесоюзной конференции. Т. 2. Горький, 1988. С. 59–60.; Нурмеев Н. Н. О сложности реализации преобразователей вероятностей схемами из функциональных элементов // Методы и системы технической диагностики: Межвуз. сб. науч. тр. Т. 18. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1993. С. 131–132.

ских случайных величин относительно различных систем преобразований посредством булевых функций.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Получены следующие основные результаты:

1. Установлена бесконечная порожденность класса p-ично-рациональных распределений (для простого $p, p \geq 5$) относительно преобразований функцией голосования.
2. Введено понятие p-сократимости для классификации вероятностных функций, индуцированных булевыми функциями, для простых p. Оценена доля p-сократимых вероятностных функций среди всех вероятностных индуцированных функций. Для p-ично-рациональных распределений получено необходимое условие для конечно порождающей системы булевых функций, индуцирующих p-несократимые вероятностные функции, для простого $p, p \geq 5$.
3. Установлено существование бесповторно замкнутых классов булевых функций, индуцирующих p-сократимые и p-несократимые вероятностные функции для простых p, изучены их свойства, в том числе их расположение относительно решетки замкнутых классов.
4. Доказано, что существует континуум различных бесповторно замкнутых классов булевых функций, а также, что класс всех булевых функций P_2 может быть представлен в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов булевых функций.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и, в частности, теории функциональных систем, а также методы математического анализа.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа имеет теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы в исследованиях по теории функциональных систем, математической кибернетике и теоретической информатике.

Положения, выносимые на защиту

1. Класс p-ично-рациональных распределений для простого p, $p \geq 5$, бесконечно порожден относительно преобразований функцией голосования.
2. Каждая из вероятностных индуцированных функций принадлежит одному из трех классов, введенных согласно p-сократимости для простых p. В конечно порождающей системе булевых функций, индуцирующих p-несократимые вероятностные функции, для p-ично-рациональных распределений для простого p, $p \geq 5$, присутствуют хотя бы одна функция, содержащая ровно одну единицу в таблице истинности, хотя бы одна функция, содержащая ровно один ноль в таблице истинности, и хотя бы одна из этих функций существенно зависит от не менее чем двух переменных.
3. Доля p-сократимых функций первого типа среди всех индуцированных функций от n переменных для простого p при $n \to \infty$ асимптотически убывает как функция $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2^{n/2}}$, доля p-сократимых функций второго типа среди всех индуцированных функций от n переменных для простого p при $n \to \infty$ асимптотически не превышает значения $\frac{1}{p}$.
4. Существует континуум различных непустых бесповторно замкнутых классов булевых функций. Класс всех булевых функций P_2 представим в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов булевых функций.

Степень достоверности и апробация диссертации

Все результаты математически строго доказаны. Результаты диссертации докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях и научных семинарах:

1. XIV Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова, Россия, Москва, 20–25 июня 2022 г.

2. XI Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем», Россия, Красновидово, 26—29 мая 2023 г.

3. XX Международная научная конференция «Проблемы теоретической кибернетики», Россия, Москва, МГУ, 5–8 декабря 2024 г.

4. Семинар «Теоретическая кибернетика» ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (в 2020–2025 гг. многократно).

5. Семинар кафедры дискретной математики МГУ имени М. В. Ломоносова «Функции многозначной логики и смежные вопросы» (2023 г.).

6. Семинар кафедры дискретной математики МГУ имени М. В. Ломоносова «Синтез управляющих систем» (в 2024–2025 гг. неоднократно).

7. Объединенный семинар кафедры дискретной математики, кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета и кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова «Математические вопросы кибернетики» (2025 г.).

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика, в том числе 3 статьи — в рецензируемых научных изданиях, входящих в ядро РИНЦ и международные базы цитирования (Web of Science, Scopus), RSCI, и 1 статья — в рецензируемом научном издании из дополнительного списка МГУ, рекомендованном для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и входящем в список ВАК.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 124 наименований. Утверждения и уравнения нумеруются внутри каждой главы отдельно, их номера предваряются номером главы. Внутри каждой главы для всех утверждений (лемм, теорем, следствий) нумерация сплошная. Общий объем работы: 94 стр.

Краткое содержание работы

Во **введении** описывается постановка задачи, рассматривается история вопроса и актуальность темы исследования, а также формулируются основные результаты диссертации.

В **первой главе** изложены основные определения и базовые утверждения, связанные с постановкой задачи, приведены примеры, а также доказана бесконечная порожденность для медианы (функции голосования).

Помимо уже введенных выше обозначений и понятий, вводится обозначение: $A(r)$ — множество правильных дробей со знаменателем r.

Формулируется определение индуцированной вероятностной функции, построенной по данной булевой функции:

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n): \\ f(x_1,\cdots,x_n)=1}} \prod_{i=1}^{n} (x_i\widehat{x}_i + (1 - x_i)(1 - \widehat{x}_i)),$$

где $f(x_1, \ldots, x_n)\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — булева функция, $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)\colon [0;1]^n \to [0;1]$ — индуцированная вероятностная функция, x_i — случайные величины, принимающие значения 1 и 0 с вероятностями $\widehat{x}_i$ и $1 - \widehat{x}_i$ соответственно, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Итерационно определяется множество $V_F(G)$ *выразимых вероятностей*. Для множества булевых функций F и множества правильных дробей G полагаем $V_F^1(G) = G$. Для $i \geq 1$ полагаем $V_F^{i+1}(G) = V_F^i(G) \cup \{\widehat{f}(a_1, \ldots, a_n) | f \in F, a_j \in V_F^i(G)\}$. Далее полагаем $V_F(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_F^i(G)$. Множество булевых функций F является *конечно порождающим в множестве* $\Gamma[p]$ для простого p, $p \geq 5$, если найдется такое конечное множество G, $G \subset \Gamma[p]$, что $V_F(G) = \Gamma[p]$.

В разделе 1.2 первой главы приведены примеры построения индуцированных вероятностных функций для некоторых булевых функций.

Раздел 1.3 посвящен доказательству бесконечной порожденности для медианы (также ее называют функцией голосования) $m(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ для простого p, $p \geq 5$. Выбор этой функции обусловлен тем, что система $\{m(x, y, z)\}$ позволяет аппроксимировать произвольное бернуллиевское распределение с произвольной точностью, если множество начальных распределений G имеет вид $G = \{g_1; g_2\}$, где $g_1, g_2 \in (0, 1)$, $g_1 < 1/2$, $g_2 > 1/2$. Доказывается ряд утверждений, позволяющих доказать следующую теорему, которая является основным результатом первой главы.

Теорема 1.8 [1]. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и простого* p, $p \geq 5$, *имеет место соотношение* $V_{\{m\}}(A(p^k)) \neq \Gamma[p]$.

Для любого конечного множества G, $G \subset \Gamma[p]$, существует такое k, что $G \subset A(p^k)$. Поэтому справедливо

Следствие 1.9 [1]. *Для любой конечной системы* G, $G \subset \Gamma[p]$, *где* p *— простое,* $p \geq 5$, *выполняется неравенство* $V_{\{m\}}(G) \neq \Gamma[p]$.

Тем самым доказана бесконечная порожденность классов рациональных вероятностей при преобразованиях медианой (функцией голосования).

Во **второй главе** вводится понятие p-сократимых и p-несократимых индуцированных функций, для простых p оценивается доля p-сократимых функций среди всех индуцированных вероятностных функций от n переменных, доказывается необходимое условие для конечно порождающей системы булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции.

Вероятностная индуцированная функция записывается в виде суммы одночленов с целыми коэффициентами:

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \sum_{\kappa_1, \ldots, \kappa_n : \in \{0;1\}} \alpha_{\kappa_1 \ldots \kappa_n} \widehat{x}_1^{\kappa_1} \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_n^{\kappa_n},$$

где $\widehat{x}_1^{\kappa_i}$ — возведение в степень, т. е. $\widehat{x}_i^0 = 1$, $\widehat{x}_i^1 = \widehat{x}_i$. Обозначим $\alpha_{1\ldots1}$ через $\alpha(\widehat{f})$. Для простого p вероятностные функции классифицируются следующим образом:

1. Если $\alpha(\widehat{f}) = 0$, то функция $\widehat{f}$ — *p-сократимая первого типа.*

2. Если $\alpha(\widehat{f}) = p^t A$, где $t \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0 \pmod{p}$, то функция $\widehat{f}$ — *p-сократимая второго типа.*

3. Если $\alpha(\widehat{f}) = A$, где $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0 \pmod{p}$, то функция $\widehat{f}$ — *p-несократимая.*

В разделе 2.1 второй главы для простых p оценена доля p-сократимых функций среди всех индуцированных вероятностных функций от n переменных.

Теорема 2.6 [4]. *Доля p-сократимых функций первого типа среди всех индуцированных функций от n переменных для простого p при $n \to \infty$ асимптотически убывает как функция* $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2^{n/2}}$.

Теорема 2.7 [4]. *Доля p-сократимых функций второго типа среди всех индуцированных функций от n переменных для простого p при $n \to \infty$ асимптотически не превышает значения* $\frac{1}{p}$.

Следовательно, p-несократимые функции составляют асимптотически «большую часть» всех индуцированных вероятностных функций от n переменных для простых p при $n \to \infty$.

В разделе 2.2 исследуется, какими свойствами должна обладать конечно порождающая система булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции для простых $p, p \geq 5$. Вводятся обозначения: $\omega_1(f)$ — число единичных наборов функции f, $\omega_0(f)$ — число наборов, на которых функция f равна нулю.

Теорема 2.14 [2]. *Пусть для произвольного простого $p, p \geq 5$, в множестве булевых функций F содержатся только функции f, существенно зависящие от всех своих переменных, и такие, что функция $\widehat{f}$ является p-несократимой функцией. Тогда если множество функций F является конечно порождающим в множестве $\Gamma[p]$, то в нем найдутся хотя бы две такие функции f_1 и f_2 из множества F, что*

1) $\omega_1(f_1) = 1$,

2) $\omega_0(f_2) = 1$,

3) *либо функция f_1, либо функция f_2 существенно зависит не менее чем от двух переменных.*

Сформулированное в теореме 2.14 необходимое условие для конечно порождающей системы булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции, обобщает результат, полученный в первой главе, поскольку медиана индуцирует p-несократимую функцию для любого простого $p, p \geq 5$.

В **третьей главе** классифицируются булевы функции с точки зрения индуцирования ими p-сократимых или p-несократимых вероятностных функций для простых p, доказывается, что классы таких функций бесповторно замкнуты, устанавливаются свойства этих классов, доказывается существование континуума непустых бесповторно замкнутых классов булевых функций.

Вводятся следующие обозначения: $\mathcal{Z}$ — множество всех булевых функций, которые индуцируют p-сократимые функции первого типа, $\mathcal{R}_p$ — множество всех булевых функций, которые индуцируют p-сократимые функции второго типа, $\mathcal{N}_p$ — множество всех булевых функций, которые индуцируют p-несократимые функции. Множества всех вероятностных индуцированных функций, которые являются p-сократимыми функциями первого типа, p-сократимыми функциями второго типа, p-несократимыми функциями обозначаются через $\widehat{\mathcal{Z}}$, $\widehat{\mathcal{R}_p}$, $\widehat{\mathcal{N}_p}$ соответственно.

В разделе 3.1 вводится понятие бесповторного замыкания над множеством операций. Пусть задано некоторое бесконечное множество переменных. Определим *формулу* над множеством операций $\mathcal{F}$ индуктивно. Каждую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}$, положим формулой над $\mathcal{F}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из множества $\mathcal{F}$, и $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — выражения, являющиеся либо переменными, либо формулами над $\mathcal{F}$, тогда выражение $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ назовем *формулой* над $\mathcal{F}$. Формулу будем называть *бесповторной*, если все входящие в нее переменные различны. Каждой формуле $\Phi[x_1, \ldots, x_n]$ над множеством $\mathcal{F}$, зависящей от переменных $x_1, \ldots, x_n$, сопоставим функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, которая является суперпозицией функций из множества $\mathcal{F}$. Множество функций, выраженных бесповторными формулами над множеством $\mathcal{F}$, будем обозначать через $[\mathcal{F}]_0$ и называть *бесповторным замыканием* множества $\mathcal{F}$.

В теореме 3.3 [3] доказывается, что классы $\widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{N}_p}, \widehat{\mathcal{R}_p}$ бесповторно замкнуты, а в следствии 3.4 [4] показано, что соответствующие классы булевых функций $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ бесповторно замкнуты. Аналогично бесповторной замкнутости классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ доказывается существование других бесповторно замкнутых классов булевых функций.

Теорема 3.5 [3]. *Пусть P — произвольное множество простых чисел. Тогда множество всех булевых функций f, у которых коэффициент $\alpha(\widehat{f})$ может быть разложен на простые множители только из множества P, образует бесповторно замкнутый класс.*

В лемме 3.6 [3] доказывается, что каково бы ни было натуральное число a, всегда найдется такая булева функция f, что выполнено равенство $\alpha(\widehat{f}) = a$. Отсюда вытекает, что все бесповторно замкнутые классы в теореме 3.5 [3] не пустые.

Следствие 3.7 [3]. *Существует континуум различных бесповторно замкнутых классов булевых функций.*

Как известно, классы булевых функций, замкнутые относительно обычной суперпозиции, обладают конечным базисом. Для бесповторно замкнутых классов булевых функций $\mathcal{R}_p$ и $\mathcal{N}_p$ (и соответствующих им классов вероятностных функций $\widehat{\mathcal{R}_p}$ и $\widehat{\mathcal{N}_p}$) в теореме 3.9 [3] и следствии 3.9 [3] доказывается отсутствие конечного базиса относительно бесповторной суперпозиции.

Известно, что не существует разбиения множества всех булевых функций P_2 на непересекающиеся замкнутые классы.

Теорема 3.12 [3]. *Класс всех булевых функций P_2 может быть представлен в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов.*

Для бесповторного замыкания в теореме 3.12 [3] доказано, что класс всех булевых функций P_2 может быть представлен в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов: $P_2 = \mathcal{Z} \sqcup \mathcal{N}_p \sqcup \mathcal{R}_p \sqcup \{0; 1\}$ для любого простого p. Таких разбиений существует бесконечное множество, для каждого простого p свое.

В разделе 3.2 рассматривается соотношение классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ с классами булевых функций, замкнутыми по суперпозиции. Все обычные замкнутые классы булевых функций также замкнуты бесповторно, следовательно, они входят в решетку бесповторно замкнутых классов. Используются следующие обозначения для замкнутых классов булевых функций: T_0, T_1 — множества булевых функций, сохраняющих константу 0 и константу 1 соответственно, K — класс всех конъюнкций, D — класс всех дизъюнкций, L — класс линейных функций, M — класс монотонных функций, SM — класс самодвойственных монотонных функций; I^∞ — класс булевых функций, представимых в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \& f_0(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})$ для некоторой переменной x_i и булевой функции f_0; класс O^∞ определяется двойственным к классу I^∞ образом; $D_{01} = D \cap T_0 \cap T_1$, $K_{01} = K \cap T_0 \cap T_1$, $L_{01} = L \cap T_0 \cap T_1$, $MO_0^\infty = M \cap O^\infty \cap T_0$, $MI_1^\infty = M \cap I^\infty \cap T_1$.

В теореме 3.14 [3] доказывается, что для простых p классы K_{01}, D_{01} лежат в классе $\mathcal{N}_p$, в теореме 3.16 [3] — что классы $MI_1^\infty, MO_0^\infty, SM$ не лежат ни в одном из классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$.

В теореме 3.15 [3] показано, что для простых $p, p \geq 3$, класс L_{01} лежит в классе $\mathcal{N}_p$, при этом класс L_{01} не лежит ни в классе $\mathcal{N}_2$, ни в классе $\mathcal{R}_2$, а класс $[\{x \oplus y \oplus z\}]_0$ лежит в классе $\mathcal{R}_2$.

Четвертая глава посвящена доказательству того, что классы булевых функций $\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}$ и $\mathcal{N}_5$ являются конечно порождающими для множества всех пятеричных дробей.

Вводится понятие *представления* для натурального числа X:

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i,$$

где b_i, a_i — целые числа от 0 до C_{n-1}^i, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, i — номер разряда представления, n — количество разрядов представления.

Теорема 4.6. [33] *Определенное выше представление с n разрядами ($n \geq 4$) позволяет выразить все числа от 10 до $5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1)$. При этом для такого представления дополнительно выполняется следующее свойство:*

— либо найдется такой разряд представления с номером j от 2 до $n-1$, что для разрядов представления с номером i от 1 до $j-1$ выполнено соотношение $(0 < b_i < C_{n-1}^i) \vee (0 < a_i < C_{n-1}^i)$, а для разрядов представления с номером i от j до $n-1$ выполнено соотношение $(b_i = 0)\&(a_i = 0)$;

— либо для всех разрядов представления с номером i от 1 до $n-2$ выполнено соотношение $(0 < b_i < C_{n-1}^i) \vee (0 < a_i < C_{n-1}^i)$, а для $(n-1)$-го разряда представления выполнено соотношение $(b_{n-1} = 1)\&(a_{n-1} = 0) \vee (b_{n-1} = 0)\&(a_{n-1} = 1)$.

Используя свойства представления, определенного выше, доказываются вспомогательные утверждения и основные результаты четвертой главы, сформулированные в виде двух теорем.

Теорема 4.13. [34] *Класс булевых функций $\mathcal{N}_5$ является конечно порождающим в множестве $\Gamma[5]$. В качестве начального множества можно взять $A(5^2)$.*

Теорема 4.14. [35] *Класс булевых функций $\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}$ является конечно порождающим в множестве $\Gamma[5]$. В качестве начального множества можно взять $A(5)$.*

[33] Трифонова Е. Е. О возможности построения произвольной пятеричной дроби с помощью индуцированных вероятностных функций // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 38. 40 с.

[34] Трифонова Е. Е. О возможности построения произвольной пятеричной дроби с помощью индуцированных вероятностных функций // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 38. 40 с.

[35] там же

В заключении представлено краткое изложение основных результатов диссертации и дана оценка дальнейших перспектив работы в данном направлении.

Заключение

Полученные в диссертации результаты расширяют имеющиеся представления как о свойствах конечно порождающих систем булевых функций, индуцирующих вероятностные функции, так и о бесповторно замкнутых классах булевых функций. Доказанная бесконечная порожденность для функции голосования для простого p, $p \geq 5$, показывает, что системы функций, позволяющие аппроксимировать произвольное бернуллиевское распределение с произвольной точностью, не обязательно являются конечно порождающими для множества рациональных распределений.

Свойство p-сократимости для классификации вероятностных индуцированных функций позволило получить новые результаты при исследовании задачи конечной порожденности классов p-ично-рациональных распределений для простых p, $p \geq 5$. Для p-сократимых вероятностных индуцированных функций оценена их доля среди всех вероятностных индуцированных функций от n переменных, эта оценка позволяет говорить о том, что p-несократимые функции составляют большую часть индуцированных функций для простого p при $n \to \infty$. Было получено необходимое условие для конечно порождающей системы булевых функций, индуцирующих p-несократимые вероятностные функции, для простого p, $p \geq 5$. Тем самым для части систем булевых функций мы можем установить, что они не являются конечно порождающими для некоторых множеств рациональных вероятностей.

Было установлено, что классы булевых функций, классифицируемых согласно виду индуцируемых ими вероятностных функций, являются бесповторно замкнутыми. Более того, показано, что существует континуум различных бесповторно замкнутых классов булевых функций. Установлено, что класс всех булевых функций P_2 может быть представлен в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов булевых функций.

Отметим, что изучавшиеся ранее в литературе конечно порождающие системы булевых функций для множеств рациональных распределений имеют непустое пересечение как с классом булевых функций, индуцирующих p-сократимые функции, так и классом булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции. В диссертации доказано, что классы булевых функций, индуцирующие 5-сократимые и 5-несократимые функции, по отдельности являются конечно порождающими для множества всех пятерично-рациональных вероятностей.

Таким образом, удалось получить принципиально новые представления о свойствах конечно порождающих систем булевых функций для множеств рациональных распределений, и выделить новые бесповторно замкнутые классы булевых функций.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам по теории функциональных систем, математической кибернетике и теоретической информатике.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физико-математических наук Алексею Дмитриевичу Яшунскому и доктору физико-математических наук Роману Максимовичу Колпакову за постановку задачи и внимание к работе. Автор искренне благодарит весь коллектив сектора теоретической кибернетики математического отдела ИПМ им. М. В. Келдыша и всех сотрудников кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за поддержку, многочисленные обсуждения и создание плодотворной научной атмосферы.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

1. Трифонова Е. Е. О бесконечной порожденности пятеричных дробей в одном классе преобразователей вероятностей // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2021. — № 1 (57). — С. 39–48.
EDN: EALWXR; журнал индексируется в RSCI. Импакт-фактор 0,227 (РИНЦ). 0,625 п.л.

2. Трифонова Е. Е. О некоторых свойствах конечно порождающих систем преобразователей p-ичных дробей // Дискретный анализ и исследование операций. — 2022. — Т. 29, № 4. — С. 124–135.
   EDN: QEHGSY; журнал индексируется в RSCI. Импакт-фактор 0,109 (РИНЦ). 0,75 п.л.

   Перевод: Trifonova E. E. On Some Properties of Finitely Generating Transformer Sets for p-ary Fractions // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2023. — Vol. 16, No. 4.— p. 834–840.
   EDN: GBKWLN; журнал индексируется в Scopus, RSCI. Импакт-фактор 0,315 (SJR). 0,75 п.л.
3. Трифонова Е. Е. О бесповторно замкнутых классах булевых функций, индуцирующих некоторые преобразования рациональных вероятностей // Дискретная математика. — 2025. — Т. 37, № 1. — С. 119–129.
   EDN: QROEQB; журнал индексируется в RSCI. Импакт-фактор 0,385 (РИНЦ). 0,688 п.л.

Публикации в рецензируемых научных изданиях из дополнительного списка МГУ, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и входящих в список ВАК

4. Трифонова Е. Е. О числе p-сократимых индуцированных вероятностных функций // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2023. — Т. 27, № 1.— С. 134–142.
   EDN: REIBGO. Импакт-фактор 0,023 (РИНЦ). 0,563 п.л.