МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Воронцов Михаил Олегович**

# Асимптотические свойства методов множественной проверки гипотез в условиях зависимости наблюдений

Специальность 1.1.4 Теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Шестаков Олег Владимирович**
доктор физико–математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Зорин Андрей Владимирович**
доктор физико–математических наук, доцент
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, заведующий кафедрой теории вероятностей и анализа данных Института информационных технологий, математики и механики

**Сипин Александр Степанович**
доктор физико–математических наук, доцент
Вологодский государственный университет, профессор кафедры прикладной математики Института математики, естественных и компьютерных наук

**Семенихин Константин Владимирович**
доктор физико–математических наук, доцент
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), профессор кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования Института компьютерных наук и прикладной математики

Защита диссертации состоится «22» мая 2026г. в 17 ч. 15 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП–1, Ленинские горы д. 1, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико–математический факультет, ауд. 16-24.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3907

Автореферат разослан «   » апреля 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3,
кандидат физико–математических наук                    Е.Д. Алферова

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В эпоху экспоненциального роста объемов информации ключевой вызов для статистического моделирования и машинного обучения заключается в работе с данными высокой размерности, где количество признаков–предикторов может на порядки превышать число наблюдений[1]. Это приводит к переобучению моделей, резкому увеличению вычислительной сложности и затрудняет интерпретацию результатов. В таких условиях критически важным предварительным этапом анализа становится сокращение размерности, цель которого — выделить информативные признаки и отсеять шумовые, переведя данные в «экономное» (sparse) представление без существенной потери информации.

Универсальность метода сжатия является фундаментальным требованием: алгоритм должен быть адаптивен к разнородным типам данных (изображения, сигналы, геномные данные и т.д.) и обеспечивать результат, близкий к оптимальному для каждого конкретного случая. Одним из эффективных подходов к решению этой задачи является сжатие на основе пороговой обработки коэффициентов ортогональных разложений, в частности, Фурье– и вейвлет–преобразований. Классический гармонический анализ, основанный на преобразовании Фурье, предоставляет мощный аппарат для работы со стационарными процессами, раскладывая сигнал на совокупность синусоидальных компонент. Ключевым для теории сжатия является следствие из теоремы Римана–Лебега: для любого сколь угодно малого положительного числа, лишь конечное число коэффициентов Фурье превосходит его по модулю. Это свойство лежит в основе простого, но эффективного алгоритма сжатия: после разложения сигнала в ряд Фурье, все коэффициенты, модуль которых ниже определенного порога, отбрасываются как несущественные. Оставшиеся значимые коэффициенты позволяют восстановить сигнал с заданной точностью.

Однако преобразование Фурье, будучи глобальным, не учитывает локальные особенности сигнала, что ограничивает его применимость для анализа нестационарных процессов. Этот фундаментальный недостаток был преодо-

[1]Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction. — Springer Science and Business Media, 2009. 764 p.

лен с развитием теории вейвлетов. Термин «вейвлет» (wavelet), или «короткая волна», был введен в 1980–х годах, а теоретический фундамент и практические алгоритмы были заложены в работах И. Мейера, И. Добеши и С. Малла[2, 3, 4]. В отличие от бесконечных синусоид Фурье, вейвлеты являются локализованными во времени и частоте функциями, что позволяет анализировать сигнал на разных масштабах с помощью операций сдвига и растяжения базового вейвлета. Это делает вейвлет-анализ идеальным инструментом для работы с данными, содержащими резкие всплески, разрывы и локальные аномалии. Метод сжатия данных с помощью вейвлет–преобразования также основан на пороговой обработке коэффициентов.

Формально пороговая обработка эквивалентна процедуре множественной проверки статистических гипотез[5]. Для каждого коэффициента проверяется гипотеза о его статистической незначимости (т.е. равенстве нулю); если гипотеза не отвергается, коэффициент обнуляется, что и приводит к сжатию. При этом, при одновременной проверке тысяч и миллионов гипотез возникает проблема множественных сравнений — когда стандартные критерии приводят к лавинообразному росту ошибок I рода. Для контроля над этим эффектом были разработаны методы, управляющие обобщенными мерами ошибки. Примеры подобных мер включают FWER (Family–Wise Error Rate) — вероятность хотя бы одной ложноположительной ошибки[6], используется в консервативных методах (например, Бонферрони); FDR (False Discovery Rate) — математическое ожидание доли ложных отклонений среди всех отвергнутых гипотез[7] — менее консервативен, обладает большей мощностью; pFDR (positive False Discovery Rate) — модификация FDR для случая, когда хотя бы одна гипотеза отвергнута[8].

Ключевым шагом в пороговой обработке является выбор порогового зна-

---

[2]Mallat S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of L2(R) // Transactions of Amer. Math. Soc., 1989. Vol. 315. No. 1. P. 69–87.

[3]Meyer Y. Wavelets and operators // Cambridge University Press, 1992. 223 p.

[4]Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 стр.

[5]Abramovich F., Benjamini Y., Donoho D., Johnstone I. Adapting to Unknown Sparsity by controlling the False Discovery Rate // Ann. Stat., 2006. Vol. 34. No. 2. P. 584–653.

[6]Nabaneet D., Subir K.B. FWER for normal distribution in nearly independent setup // Statistics and Probability Letters, 2025. 219:110340.

[7]Benjamini Y., Hochberg Y. Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing // Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 1995. Vol. 57. P. 289–300.

[8]Xinrui He, Jay Bartroff. Asymptotically optimal sequential FDR and pFDR control with (or without) prior information on the number of signals // J. of Stat. Planning and Inference, 2021. — Vol. 210. — P. 87–99

чения. Этот выбор представляет собой компромисс между двумя противоположными целями: сохранением значимых компонент сигнала и подавлением шума. Слишком низкий порог оставляет большую часть шума, тогда как слишком высокий порог приводит к потере полезной информации и чрезмерному упрощению модели. Например, можно использовать так называемый универсальный порог, однако на практике он часто оказывается излишне жестким, чрезмерно «заглаживая» сигнал и приводя к систематическому смещению. Более адаптивной альтернативой является поиск порога, который минимизирует среднеквадратичную погрешность (риск) восстановленной модели[9]. Однако, поскольку истинное значение риска зависит от ненаблюдаемых исходных данных, на практике используются его несмещенные оценки — наиболее известным и теоретически обоснованным подходом является SURE (Stein's Unbiased Risk Estimate)[10], который позволяет оценить риск, используя лишь наблюдаемые зашумленные данные. Также существуют подходы, основанные на анализе функции кросс–валидации и ее аналогов[11], которые тоже используют только наблюдаемые данные и приводят к выбору адаптивных порогов, позволяющих тонко учитывать разреженность исходного сигнала. Существуют и различные эмпирические байесовские методы выбора порога[12, 13, 14].

В рамках данной диссертации рассматривается решение задачи сжатия данных методом пороговой обработки с использованием FDR–порога, контролируемого по одноименной мере с помощью алгоритма Бенджамини–Хохберга. Популярность FDR–меры обусловлена тем, что в условиях больших данных допустимо совершить небольшое контролируемое число ошибок I рода в обмен на значительное увеличение статистической мощности (доли верно обнаруженных истинных эффектов), а использование FDR–меры гарантирует, что доля ложнозначимых признаков в итоговой модели не превысит заданного уровня.

---

[9]Donoho D., Johnstone I.M. Neo–classical minimax problems, thresholding and adaptive function estimation // Bernoulli, 1996. Vol. 2. No. 1. P. 39–62.

[10]Stein C. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // The Annals of Statistics, 1981. Vol. 9. No. 6. P. 1135–1151.

[11]Jansen M., Malfait M., Bultheel A. Generalized Cross Validation for waveletthresholding // Signal Processing, 1997. Vol. 56. No. 1. P. 33–44.

[12]Raath K.C., Ensor K.B., Crivello A., Scott D.W.. Denoising Non-Stationary Signals via Dynamic Multivariate Complex Wavelet Thresholding // Entropy, 2023. 25(11):1546.

[13]Taassori M. Enhanced Wavelet-Based Medical Image Denoising with Bayesian-Optimized Bilateral Filtering // Sensors, 2024. 24(21):6849.

[14]Batvandi Z., Afshari M., Karamikabir H. Bayesian shrinkage wavelet estimation of mean matrix of the matrix variate normal distribution with application in de-noising // Comp. Appl. Math., 2024. 44.

Как отмечалось выше, во многих прикладных областях после применения различных методов разложения сигнала лишь малая доля компонент исходного сигнала оказывается значимой. Это явление известно как «разреженность» (sparsity) и является основополагающим принципом в таких областях, как компьютерное зрение (сжатие изображений, выделение признаков), обработка сигналов (фильтрация аудио и видео, шумоподавление), биоинформатика и нейронауки (анализ данных электроэнцефалографии для выделения паттернов, связанных с определенной активностью мозга, анализ экспрессии генов). В диссертации рассматриваются различные способы определения разреженности сигнала.

Свойства риска и оценки риска FDR–метода выбора порога в случае, когда компоненты вектора данных являются независимыми, хорошо изучены — в работе Ф. Абрамовича и соавторов при условии независимости данных было показано[5], что асимптотический порядок риска является минимаксным, а в работах С.И. Палионной и О.В. Шестакова для оценки риска в независимом случае установлены ее сильная состоятельность[15] и асимптотическая нормальность[16], а также исследована скорость сходимости ее распределения к нормальному закону[17]. В то же время в определенных приложениях, например при анализе полученных в результате использования ДНК–микрочипов данных, исследовании геофизических процессов и анализе помех в телекоммуникационных каналах, условие независимости может не выполняться[18]. В диссертации рассматривается случай, когда наблюдения являются слабо зависимыми.

**Цель работы.** Целью является исследование асимптотических свойств риска (среднеквадратичной погрешности) и оценки риска множественной проверки гипотез с использованием FDR–процедуры в задаче оценивания математического ожидания гауссова вектора большой размерности со слабо зависимыми компонентами.

[15]Палионная С.И. Сильная состоятельность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR-порогом // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2020. Вып. 4, С. 34–39.

[16]Palionnaya S.I., Shestakov O.V. Asymptotic Properties of MSE Estimate for the False Discovery Rate Controlling Procedures in Multiple Hypothesis Testing // Mathematics, 2020. Vol. 8. No. 11. P. 1913.

[17]Палионная С.И. Скорость сходимости оценки риска к нормальному закону в задаче множественной проверки гипотез с использованием FDR–порога // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2021. Вып. 3, С. 31–36.

[18]Benjamini Y., Yekutieli D. The control of the false discovery rate in multiple testing under dependency // Ann. Statist., 2001. — Vol. 29. No. 4. — P. 1165–1188.

**Научная новизна.** Основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем: Получена верхняя граница для риска в задаче множественной проверки гипотез с использованием FDR порога при условии слабой зависимости наблюдений. Доказана сильная состоятельность и асимптотическая нормальность оценки риска в указанной задаче. Проведена оценка скорости сходимости распределения данной оценки риска к нормальному закону.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение при множественной проверке гипотез в условиях зависимости наблюдений в таких областях, как геномика, компьютерное зрение, обработка сигналов в телекоммуникационных каналах и результатов геофизических исследований.

**Методы исследования.** В работе используются методы теории вероятностей и математической статистики, математического анализа.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Оценка верхней границы для риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в условиях слабой зависимости наблюдений.

2. Сильная состоятельность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в условиях слабой зависимости наблюдений.

3. Асимптотическая нормальность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в условиях слабой зависимости наблюдений.

4. Оценка скорости сходимости к нормальному закону распределения оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в условиях слабой зависимости наблюдений.

**Соответствие паспорту научной специальности.** Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика. Направления исследований:

- Предельные теоремы.

- Оценивание параметров распределений. Проверка статистических гипотез.

**Апробация работы.** Научные результаты докладывались на следующих конференциях.

1. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2023», Секция вычислительная математика и кибернетика. МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 4–14 апреля 2023.
   Тема доклада: Асимптотика риска FDR–метода при наличии слабой зависимости в данных.

2. Научная конференция «Тихоновские чтения 2023», МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 29 октября – 3 ноября 2023.
   Тема доклада: Среднеквадратичный риск метода контроля доли ложных отклонений в задаче множественной проверки гипотез для разреженных слабо зависимых данных.

3. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2024». Секция вычислительной математики и кибернетики. МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 20 марта – 3 апреля 2024.
   Тема доклада: Анализ оценки риска при использовании методов множественной проверки гипотез в задачах обработки разреженных массивов слабо зависимых данных.

4. Научная конференция «Тихоновские чтения 2024», МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 28 октября – 2 ноября 2024.
   Тема доклада: Асимптотические результаты для среднеквадратичного риска при использовании методов множественной проверки гипотез в условиях зависимости наблюдений.

5. Санкт–петербургская молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт–Петербург, Россия, 25–28 ноября 2024.
   Тема доклада: Среднеквадратичный риск FDR–метода в задаче выявления значимых элементов разреженного массива слабо зависимых данных.

6. XXXVII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Shenzhen, Китай, 13–17 октября 2025
   Тема доклада: Asymptotic results for the mean–square risk when using multiple hypothesis testing methods for weakly dependent observations.

Также, автор неоднократно докладывал результаты диссертационной работы на семинарах «Современные методы обработки сигналов и изображений» под руководством проф. О.В. Шестакова и «Теория риска и смежные вопросы» под руководством проф. В.Ю. Королева кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова (2021 – 2025 гг.).

**Публикации.** Все основные результаты по теме диссертации изложены в четырех статьях, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук. Список работ автора приведен в конце автореферата и диссертации. В этих работах постановки задач принадлежат О. В. Шестакову, а все результаты получены М. О. Воронцовым самостоятельно.

**Личный вклад автора.** Автором диссертации совместно с научным руководителем проводился выбор темы, а также осуществлялось планирование всей работы. Профессору О. В. Шестакову принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. Автору диссертации принадлежит доказательство теорем, лемм и утверждений работы.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего в себя 83 наименований. Общий объем диссертации составляет 73 страницы.

# ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**В первой главе** описывается рассматриваемая в диссертации математическая модель и приводятся известные результаты для риска и его оценки в независимом случае. В диссертации рассматривается следующая модель:

$$x_i = \mu_i + z_i,\ i = 1, \dots, n,$$

где $\mu_i \in \mathbb{R}$ – «полезные» данные, а $z_i \sim N(0, \sigma^2)$ – шум. В рамках данной модели задача заключается в нахождении оценки неизвестного вектора $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ как функции наблюдаемого вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ и может рассматриваться как задача множественной проверки гипотез о равенстве нулю компонент вектора $\mu$. При этом часто предполагается, что вектор $\mu$ имеет в определенном смысле «разреженную» структуру, т.е. для «полезных» данных используется «экономное» представление (для получения такого представления иногда требуется произвести предварительную обработку данных). В данной диссертации рассматриваются следующие классы разреженности:

$$l_0[\eta] = \{\mu \,:\, ||\mu||_0 \le \eta n\},\ \eta \in (0, 1),$$

$$m_p[\eta] \equiv \left\{\mu \in \mathbb{R}^n : |\mu|_{(k)} \le \eta n^{1/p} k^{-1/p}, k = 1, \dots, n\right\},\ p \in (0, 2).$$

Класс $l_0[\eta]$ состоит из векторов таких, что лишь относительно малая доля $\eta$ их компонент отлична от нуля — в выражении выше мера $||\mu||_0$ равна числу элементов вектора $\mu$, не равных нулю. В то время как классу $m_p[\eta]$ принадлежат вектора, абсолютные значения компонент которых, будучи отсортированы:

$$|\mu|_{(n)} \geq |\mu|_{(n-1)} \geq \ldots \geq |\mu|_{(1)},$$

убывают достаточно быстро: $|\mu|_{(k)} \leq \eta n^{1/p} k^{-1/p}$. Кроме классов $l_0[\eta]$ и $m_p[\eta]$ иногда также рассматривают класс $l_p[\eta]$, определяемый следующим образом:

$$l_p[\eta] = \left\{ \mu \,:\, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^p \leq \eta^p \right\},\ p \in (0, 2).$$

В силу вложенности $l_p[\eta] \subset m_p[\eta]$, результаты, полученные для класса $m_p[\eta]$, будут также справедливы и для класса $l_p[\eta]$. Параметр $\eta$, как правило, зависит от $n$, поскольку с ростом числа наблюдений разреженность векторов увеличивается — доля значимых компонент не просто остается маленькой, а именно стремится к нулю с ростом $n$. Предположение о разреженности не является чисто техническим допущением — оно отражает фундаментальный принцип структурной организации данных во множестве прикладных областей, таких как исследования в области геномики, обработка изображений, аудиосигналов и результатов электроэнцефалографии. Наиболее убедительное обоснование предположения о разреженности предоставляет вейвлет–анализ, поскольку вейвлет–представление многих гладких и кусочно–гладких сигналов является разреженным точно в том смысле, который задают указанные классы разреженности.

При построении оценки $\hat{\mu}$ в случае, когда вектор $\mu$ имеет разреженную структуру, часто используется пороговая обработка вектора $x$ с некоторым порогом $T$. Различают жесткую пороговую обработку, при которой

$$(\hat{\mu})_i = p_H(x_i, T) \equiv \begin{cases} x_i, & |x_i| > T; \\ 0, & |x_i| \leq T, \end{cases}$$

и мягкую пороговую обработку, при которой

$$(\hat{\mu})_i = p_S(x_i, T) \equiv \begin{cases} x_i - T, & x_i > T; \\ x_i + T, & x_i < -T; \\ 0, & |x_i| \leq T. \end{cases}$$

Преимуществом жесткой пороговой обработки является сохранение амплитуды (все значимые коэффициенты — выше порога — остаются без изменений). Это критически важно в задачах, где амплитуда сигнала несет физический смысл (например, в сейсмологии или обработке электроэнцефалографии). Однако жесткая пороговая обработка неустойчива — небольшое изменение во входном сигнале может привести к скачкообразному изменению результата. Это может приводить к нежелательным эффектам вроде «дрожания» (flickering) в обработанных сигналах и изображениях, особенно когда шум значителен.

Мягкая пороговая обработка, напротив, непрерывна и устойчива, дает более гладкие результаты. Основным недостатком мягкой пороговой обработки является смещение. Поскольку все коэффициенты сжимаются на постоянную величину $T$, истинные коэффициенты сигнала (даже очень большие) получают постоянное смещение. Это может привести к чрезмерному сглаживанию и потере резкости краев на изображениях или пиков в сигналах.

Критерием качества для методов пороговой обработки обычно служит среднеквадратичный риск, который определяется как

$$R(T) = \mathsf{E}||\hat{\mu} - \mu||^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left((\hat{\mu})_i - \mu_i\right)^2. \tag{1.1}$$

При пороговой обработке иногда используется так называемый универсальный порог $T_U = \sigma\sqrt{2\ln n}$. Порог $T_U$ является в определенном смысле максимальным — рассматривать пороги выше него не имеет смысла. Кроме того, можно показать, что с ростом $n$ «разумный» порог будет расти — если порог не растет, то порядок риска не будет близок к оптимальному. Следовательно, поиск оптимального порога для больших $n$ имеет смысл производить на отрезке $[T_0; T_U]$, где $T_0 > 0$ — некоторое число, не зависящее от $n$.

Исследуемая задача может рассматриваться как частный случай задачи множественной проверки гипотез, а именно — пусть построено $n$ статистик $x_i$ для проверки нулевых гипотез $H_{0,i}$ против альтернатив $H_{1,i}$, причем при верной гипотезе $H_{0,i}$ (соответственно $H_{1,i}$) распределение $x_i$ известно и равно $N(0, \sigma^2)$ (соответственно $N(\mu_i, \sigma^2)$, $\mu_i \neq 0$ и неизвестно). Принятие гипотезы $H_{0,i}$ в такой постановке равносильно заключению $\mu_i = 0$. Обозначим $V$ — число ошибочно отвергнутых гипотез $H_{0,i}$, а $R$ — суммарное число отвергнутых гипотез. Для решения задачи множественной проверки гипотез можно использовать алгоритм Бенджамини–Хохберга, который заключается в контроле среднего значения отношения числа ошибочно отвергнутых гипотез и суммарного числа отвергнутых гипотез на уровне $q$:

$$\mathsf{E}\left(\frac{V}{\max(1,R)}\right) \le q.$$

В работе Ф. Абрамовича и соавторов[5] описана FDR–процедура по построению порога, гарантирующего данное условие в случае, когда статистики $x_i$ имеют нормальное распределение. Она заключается в жесткой пороговой обработке компонент вектора $x$ с порогом $\hat{t}_F = \hat{t}_F(x)$, и ее результат — оценка $\hat{\mu}_F$ вектора $\mu$ с компонентами $(\hat{\mu}_F)_i = p_H(x_i, \hat{t}_F)$, где

$$\hat{t}_F = \sigma z\left(\frac{q\hat{k}_F}{2n}\right), \; \hat{k}_F = \max\left\{k \,:\, |x|_{(k)} \ge t_k\right\}, \; t_k = \sigma z\left(\frac{qk}{2n}\right),$$

$z(\alpha)$ — квантиль уровня $(1-\alpha)$ стандартного нормального распределения, $|x|_{(k)}$ — $k$-й элемент вектора, получаемого в результате упорядочения вектора $|x|$ по невозрастанию:

$$|x|_{(1)} \ge |x|_{(2)} \ge \ldots \ge |x|_{(n)},$$

а $q \in (0;1)$ — управляющий параметр FDR-метода. Далее полагается, что $q \equiv q_n$ зависит от $n$.

В диссертации используются следующие обозначения:

$$\gamma_n = (\ln\ln n)^{-1};\; \kappa_n^0 = (1-q_n-\gamma_n)^{-1}[n\eta_n];$$

$$T_1 = \sqrt{2\ln \eta_n^{-p}};\; \kappa_n = \frac{n{\eta_n}^p\, T_1^{-p}}{1-q_n-\gamma_n}.$$

Как уже упоминалось, критерием качества для методов пороговой обработки обычно служит среднеквадратичный риск. Для среднеквадратичного риска

$$\rho(\hat{\mu}_F,\mu) = \mathsf{E}||\hat{\mu}_F - \mu||^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left((p_H(x_i,\hat{t}_F) - \mu_i\right)^2 \equiv R(\hat{t}_F)$$

оценки $\hat{\mu}_F$ в работе Ф. Абрамовича и соавторов получен[5] следующий результат.

**Теорема 1.1** (Ф. Абрамовича и соавт.). *Пусть $x_i$, $i = 1,\ldots,n$ независимы, $q_n \ln n \ge b_1 > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n < 1$, класс разреженности $\Theta_n = l_0[\eta_n]$ (ли-*

*бо $\Theta_n = m_p[\eta_n]$), а также $\eta_n$ (соответственно $\eta_n^p$) лежит в интервале $[n^{-1}\ln^5 n; n^{-\delta}]$, $\delta > 0$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\sup_{\mu\in\Theta_n} \rho(\hat{\mu}_F, \mu) \le R_n(\Theta_n)\left(1 + c_{rp}\frac{(2q_n-1)_+}{1-q_n} + o(1)\right),$$

*где*

$$R_n(\Theta_n) = \inf_{\hat{\mu}=\hat{\mu}(x)} \sup_{\mu\in\Theta_n} \rho(\hat{\mu}, \mu),$$

*а $c_{rp} = 1$ (соответственно $c_{rp} = 1 - p/2$).*

Таким образом, среднеквадратичный риск пороговой обработки при использовании FDR–порога имеет такой же порядок, что и минимаксный риск. В работе Ф. Абрамовича и соавторов также приведены асимптотики

$$R_n(l_0[\eta_n]) \sim c_1 n\eta_n \ln \eta_n^{-1},$$

$$R_n(m_p[\eta_n]) \sim \frac{c_2}{2-p} n\eta_n^p (2\ln \eta_n^{-p})^{(2-p)/2},$$

где $c_{1,2} = c_{1,2}(\sigma)$ — константы.

Обозначим через $T_m$ оптимальное значение порога:

$$T_m : R(T_m) = \min_T R(T).$$

Поскольку в выражении для среднеквадратичного риска (1.1) присутствуют неизвестные величины $\mu_i$, вычислить $R(T_m)$ и $T_m$ не представляется возможным. На практике можно пользоваться, например, следующей оценкой среднеквадратичного риска

$$\hat{R}(T) = \sum_{i=1}^{n} F[x_i, T],$$

где для жесткой пороговой обработки

$$F[x_i, T] = (x_i^2 - \sigma^2)\mathbb{1}(|x_i| \le T) + \sigma^2\mathbb{1}(|x_i| > T),$$

а для мягкой пороговой обработки

$$F[x_i, T] = (x_i^2 - \sigma^2)\mathbb{1}(|x_i| \le T) + (\sigma^2 + T^2)\mathbb{1}(|x_i| > T).$$

В работах С.И. Палионной и О.В. Шестакова показано[15,16], что в случае независимости компонент вектора данных и при выполнении ряда других условий оценка риска $\hat{R}(T)$ является сильно состоятельной и асимптотически нормальной. В случае независимости компонент вектора данных С.И. Палионной также была исследована[17] скорость сходимости распределения оценки риска к нормальному закону.

**Во второй главе** диссертации приводятся необходимые вспомогательные утверждения и доказываются теоремы, устанавливающие верхние границы для среднеквадратичного риска в зависимом случае.

В случае независимых наблюдений риск и оценка риска FDR–метода выбора порога хорошо исследованы, однако во многих приложения статистики — в геномике, при обработке геоданных и изображений — наблюдения являются заведомо зависимыми. В диссертации исследуется асимптотика риска оценки $\hat{\mu}_F$ в случае, когда компоненты вектора $x$ являются слабо зависимыми, а именно — имеют достаточно быстро убывающий коэффициент сильного перемешивания

$$\alpha(k) = \sup_{1\le m\le n} \sup_{\substack{B\in\sigma(x_i, i\le m)\\ C\in\sigma(x_i, i\ge m+k)}} \left|\mathsf{P}(BC) - \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)\right|, \; k = 1, \ldots, n-1.$$

Также используется понятие максимального коэффициента корреляции $\rho(\cdot)$ компонент вектора $x$:

**Определение.** *Максимальным коэффициентом корреляции $\rho(\cdot)$ компонент вектора $x$ называется*

$$\rho(k) \equiv \rho_n(k) = \sup_{1\le m\le n} \sup_{\substack{\xi\in\mathcal{L}^2(\sigma(x_i, i\le m))\\ \eta\in\mathcal{L}^2(\sigma(x_i, i\ge m+k))}} \left|\mathrm{corr}(\xi,\eta)\right|, \; k = 1, \ldots, n-1.$$

Слабая (или краткосрочная) зависимость часто является естественным предположением. Однако даже в ситуациях, когда наблюдения демонстрируют так называемую долгосрочную зависимость, ее удается свести к слабой, например, с помощью вейвлет–преобразования при соответствующем выборе вейвлет–базисов.

Для доказательства основных утверждений в диссертации в начале второй главы доказаны ряд вспомогательных утверждений. Следующее утверждение обобщает неравенство Беннета на случай зависимых случайных величин.

**Утверждение 2.1.** *Пусть для набора действительных случайных величин* $X_1, \ldots, X_n$ *с коэффициентом сильного перемешивания* $\alpha(\cdot)$ *выполняется* $\mathsf{E}X_i = 0$, $|X_i| \le b$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого целого числа* $m \in [1; n/2]$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *справедливо:*

$$\mathsf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| > \varepsilon\right) \le 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{32v_0}B\left(\frac{nb\varepsilon}{8mv_0}\right)\right\} + 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{32v_1}B\left(\frac{nb\varepsilon}{8mv_1}\right)\right\} +$$

$$+22\left(1+\frac{4bn}{\varepsilon}\right)^{1/2} m\alpha\left(\left[\frac{n}{2m}\right]\right), \qquad (1.2)$$

*где*

$$v_0 = \sum_{j=1}^{m} \mathsf{E}\big(([2(j-1)p] + 1 - (2(j-1)p))X_{[2(j-1)p]+1} + X_{[2(j-1)p]+2} +$$

$$+ \ldots + X_{[(2j-1)p]} + ((2j-1)p - [(2j-1)p])X_{[(2j-1)p]+1}\big)^2,$$

$$v_1 = \sum_{j=1}^{m} \mathsf{E}\big(([(2j-1)p] + 1 - ((2j-1)p))X_{[(2j-1)p]+1} + X_{[(2j-1)p]+2} +$$

$$+ \ldots + X_{[2jp]} + (2jp - [2jp])X_{[2jp]+1}\big)^2,$$

$$p = \frac{n}{2m},\ B(\lambda) = 2\lambda^{-2}((1+\lambda)\ln(1+\lambda) - \lambda),\ \lambda > 0.$$

Следующее утверждение показывает, что случайный порог $\hat{t}_F$ в случае $\mu \in l_0[\eta_n]$ с большой вероятностью будет не меньше $t_{\kappa_n^0}$.

**Лемма 2.2.** *Пусть* $\eta_n \le b < 1$, $m \in [1; n/2] \cap \mathbb{N}$, *а* $\alpha(\cdot)$ *— коэффициент сильного перемешивания компонент вектора* $x$. *Для некоторого* $N \in \mathbb{N}$ *при* $n \ge N$ *справедливо*

$$\sup_{\mu \in l_0[\eta_n]} \mathsf{P}\left(\hat{k}_F \ge \kappa_n^0\right) \le 4n\exp\left\{-\frac{(1-b)m}{64n}\kappa_n^0 q_n \gamma_n^2\right\} +$$

$$+22\left(1+\frac{4n}{(1-b)\kappa_n^0 q_n \gamma_n}\right)^{1/2} nm\alpha\left(\left[\frac{n}{2m}\right]\right).$$

Аналогичное утверждение получено в диссертации для случая $\mu \in m_p[\eta_n]$.

**Лемма 2.3.** *Пусть* $n^{-\delta_1} \le \eta_n^p \le n^{-\delta_2}$, $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$, $\liminf q_n \ln n \ge C > 0$, $m \in [1; n/2] \cap \mathbb{N}$, *а* $\alpha(\cdot)$ *— коэффициент сильного перемешивания компонент* *вектора $x$. Для некоторого $N \in \mathbb{N}$ при $n \geq N$ справедливо*

$$\sup_{\mu \in m_p[\eta_n]} \mathsf{P}\left(\hat{k}_F \geq \kappa_n\right) \leq 4n \exp\left\{-\frac{m}{256n}\kappa_n q_n \gamma_n^2\right\} +$$

$$+22\left(1+\frac{8n}{\kappa_n q_n \gamma_n}\right)^{1/2} nm\alpha\left(\left[\frac{n}{2m}\right]\right).$$

Во второй половине второй главы проводится доказательство двух теорем о верхней границе для риска. Следующая теорема дает верхнюю границу для среднеквадратичного риска FDR–процедуры в случае $\mu \in l_0[\eta_n]$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $\eta_n \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$, $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; $q_n \leq Q < 1$; $\liminf q_n \ln n > 0$; а также существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, что $\alpha(k) \leq c_1 k^{-1-(9/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда с некоторой константой $c$ не зависящей от $n$ для всех достаточно больших $n$ справедливо*

$$\sup_{\mu \in l_0[\eta_n]} \rho(\hat{\mu}_F, \mu) \leq cn\eta_n T_U^2.$$

Следующая теорема дает верхнюю границу для среднеквадратичного риска FDR–процедуры в случае $\mu \in m_p[\eta_n]$.

**Теорема 2.2.** *Пусть $\eta_n^p \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$, $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; $\liminf q_n \ln n > 0$; $q_n \leq Q < 1$; а также существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, что для коэффициента сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ компонент вектора $x$ справедливо $\alpha(k) \leq c_1 k^{-1-(9/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sup_{\mu \in m_p[\eta_n]} \rho(\hat{\mu}_F, \mu) \leq n\eta_n^p T_1^p T_U^2(1+\varepsilon_n),$$

*где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

**В третьей главе** проводится исследование оценки риска FDR–метода в условиях слабой зависимости наблюдений, доказана сильная состоятельность и асимптотическая нормальность оценки риска, оценивается скорость сходимости распределения оценки риска к нормальному закону. Следующая теорема задает достаточные условия для асимптотической нормальности оценки риска $\hat{R}(\hat{t}_F)$ в случае $\mu \in m_p[\eta_n]$.

**Теорема 3.1.** *Пусть $\mu \in m_p[\eta_n]$, $\eta_n^p \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$, $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; имеются такие константы $c_1, c_2 > 0$, что для коэффициента сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ компонент вектора $x$ справедливо*

$\alpha(k) \le c_1 k^{-1-(5/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$, $k = 1, \ldots, n-1$; $q_n < c_3 < 1$; $\liminf q_n \ln n = c_4 > 0$; *и, кроме того, для максимального коэффициента корреляции* $\rho(\cdot)$ *компонент вектора* $x$ *справедливо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \ge k+1} \rho(k) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\star}(k) = c_5 < \infty.$$

*Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_\rho \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0,1),$$

*где*

$$C_\rho = \sigma^2 \sqrt{1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j \ne i} \mathrm{corr}^2(x_i, x_j)}.$$

Следующая теорема дает достаточные условия для асимптотической нормальности оценки риска $\hat{R}(\hat{t}_F)$ в случае $\mu \in l_0[\eta_n]$.

**Теорема 3.2.** *Пусть* $\mu \in l_0[\eta_n]$, $\eta_n \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$, $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; *имеются такие константы* $c_1, c_2 > 0$, *что для коэффициента сильного перемешивания* $\alpha(\cdot)$ *компонент вектора* $x$ *справедливо* $\alpha(k) \le c_1 k^{-1-(5/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$, $k = 1, \ldots, n-1$; $q_n < c_3 < 1$; $\liminf q_n \ln n = c_4 > 0$; *и, кроме того, для максимального коэффициента корреляции* $\rho(\cdot)$ *компонент вектора* $x$ *справедливо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \ge k+1} \rho(k) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\star}(k) = c_5 < \infty.$$

*Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_\rho \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0,1),$$

*где*

$$C_\rho = \sigma^2 \sqrt{1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j \ne i} \mathrm{corr}^2(x_i, x_j)}.$$

Следующая теорема дает достаточные условия для сильной состоятельности оценки риска $\hat{R}(\hat{t}_F)$ в случаях $\mu \in m_p[\eta_n]$ и $\mu \in l_0[\eta_n]$.

**Теорема 3.3.** *Пусть* $\mu \in m_p[\eta_n]$, $\eta_n^p \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$ *либо* $\mu \in l_0[\eta_n]$, $\eta_n \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$; $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; *имеются такие константы* $c_1, c_2 > 0$, *что для коэффициента сильного перемешивания* $\alpha(\cdot)$ *компонент вектора* $x$ *справедливо* $\alpha(k) \le c_1 k^{-2-(7/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$, $k = 1, \ldots, n-1$; $q_n < c_3 < 1$; $\liminf q_n \ln n =$

$c_4 > 0$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{n} \to 0 \ \text{п. в.}$$

Для сходимости к нормальному закону в теореме 3.1 в случае $\mu \in m_p[\eta_n]$ справедлива следующая оценка скорости

**Теорема 3.4.** *Пусть* $\mu \in m_p[\eta_n]$, $\eta_n^p \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$; $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; $q_n < Q < 1$; $\liminf q_n \ln n > 0$; *и для максимального коэффициента корреляции* $\rho(\cdot)$ *компонент вектора* $x$ *справедливо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k) = c_1 < \infty.$$

*Тогда если найдутся такие константы* $c_2 > 0$, $\gamma > \max\{48, (5/2)\delta_1/(1-\delta_1) + 1\}$, *что для коэффициента сильного перемешивания* $\alpha(\cdot)$ *компонент вектора* $x$ *справедливо* $\alpha(k) \leq c_2 k^{-\gamma}$, $k = 1, \ldots, n-1$, *то для любого числа*

$$l < \min\left\{\gamma(1-\delta_1) - 1 - \frac{3}{2}\delta_1,\, \delta_2 - \frac{1}{2},\, \frac{2\gamma}{3}(1-\delta_2) - \frac{5}{6} - \frac{2\delta_2}{3},\, \frac{1}{2} - \frac{21}{\gamma - 6}\right\}$$

*найдется такая положительная константа* $C$ *(не зависящая от* $\mu$*), что для всех* $n$

$$\sup_y \left| \mathsf{P}\left(\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_n\sqrt{2n}} < y\right) - \Phi(y)\right| \leq C n^{-l},$$

*где*

$$C_n = \sigma^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n}\sum_{j \neq i} \operatorname{corr}^2(x_i, x_j)};$$

*Если же найдутся такие константы* $c_3 > 0$, $\lambda > 0$, *что* $\alpha(k) \leq c_3 e^{-\lambda k}$, $k = 1, \ldots, n-1$, *то приведенное утверждение будет справедливо для любого числа* $l < \delta_2 - 1/2$.

Аналогичное утверждение справедливо для класса разреженности $l_0[\eta_n]$.

**Теорема 3.5.** *Пусть* $\mu \in l_0[\eta_n]$, $\eta_n \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$; $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; $q_n < Q < 1$; $\liminf q_n \ln n > 0$; *и для максимального коэффициента корреляции* $\rho(\cdot)$ *компонент вектора* $x$ *справедливо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k) = c_1 < \infty.$$

*Тогда если найдутся такие константы $c_2 > 0$, $\gamma > \max\{48, (5/2)\delta_1/(1-\delta_1)+1\}$, что для коэффициента сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ компонент вектора $x$ справедливо $\alpha(k) \le c_2 k^{-\gamma}$, $k = 1, \dots, n-1$, то для любого числа $l$ такого, что*

$$l < \min\left\{\gamma(1-\delta_1) - 1 - \frac{3}{2}\delta_1,\ \delta_2 - \frac{1}{2},\ \frac{2\gamma}{3}(1-\delta_2) - \frac{5}{6} - \frac{2\delta_2}{3},\ \frac{1}{2} - \frac{21}{\gamma - 6}\right\},$$

*найдется такая положительная константа $C$ (не зависящая от $\mu$), что для всех $n$*

$$\sup_y \left| \mathsf{P}\left(\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_n\sqrt{2n}} < y\right) - \Phi(y)\right| \le Cn^{-l},$$

*где*

$$C_n = \sigma^2\sqrt{1 + \frac{1}{n}\sum_{j\neq i}\operatorname{corr}^2(x_i, x_j)};$$

*Если же найдутся такие константы $c_3 > 0$, $\lambda > 0$, что $\alpha(k) \le c_3 e^{-\lambda k}$, $k = 1, \dots, n-1$, то приведенное утверждение будет справедливо для любого числа $l < \delta_2 - 1/2$.*

# Заключение

**Обзор проведенного исследования.** Настоящая работа выполнена в области математической статистики и посвящена исследованию асимптотических свойств среднеквадратичного риска и оценки среднеквадратичного риска применения FDR–порога в задаче множественной проверки гипотез со слабо зависимыми наблюдениями. Основные научные результаты данной работы заключаются в следующем:

- Получена верхняя граница для среднеквадратичного риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в случае классов разреженности исходных данных $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$ и при условии слабой зависимости наблюдений.
- Доказана сильная состоятельность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в случае классов разреженности исходных данных $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$ и при условии слабой зависимости наблюдений.
- Доказана асимптотическая нормальность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в случае классов разре-

женности исходных данных $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$ и при условии слабой зависимости наблюдений.

- Получены оценки скорости сходимости распределения оценки риска FDR–процедуры к нормальному закону в случае классов разреженности исходных данных $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$ и при условии слабой зависимости наблюдений.

**Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы диссертации.**

- Продолжение исследования в направлении улучшения оценок скорости сходимости к нормальному закону распределений оценок риска пороговой обработки для классов разреженности $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$.
- Исследование ассимптотического поведения среднеквадратичного риска и статистических свойств его оценок в моделях с негауссовым шумом при условии слабой зависимости наблюдений.
- Обобщение результатов диссертации на модели, возникающие при решении обратных статистических задач, в которых наблюдения представляют собой некоторое линейное преобразование от вектора данных, для которого требуется построить оценку.
- Обобщение результатов диссертации на модель с долгосрочной зависимостью.
- Рассмотрение случая, когда исходные данные представимы в виде разреженной матрицы $\mu \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ (или тензора более высокого порядка), и исследование ассимптотического поведения среднеквадратичного риска и статистических свойств его оценок при условии быстрого падения зависимости шума по мере увеличения расстояния между элементами матрицы (тензора).

**Благодарности.** Автор диссертации выражает признательность своему научному руководителю — профессору Олегу Владимировичу Шестакову — за постановку задач и их обсуждение, а также за постоянное внимание к работе.

**Работы автора по теме диссертации**

*Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук.*


[1] *Воронцов М.О.* Анализ среднеквадратичного риска при использовании методов множественной проверки гипотез для выбора параметров пороговой обработки в условиях слабой зависимости // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2024. — № 2. — С. 18–24.

EDN: PXDPYW, Импакт–фактор 0,246 (РИНЦ) / 0.438 п.л.

*Vorontsov, M.O.* RMS Risk Analysis when Using Multiple Hypothesis Testing Select Parameters of Thresholding under Conditions of Weak Dependence // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2024. — Vol. 48, No. 2. — Pp. 91–97.

EDN: CWTMPM, Импакт–фактор 0,228 (РИНЦ) / 0.438 п.л.

[2] *Воронцов М.О.* Скорость сходимости оценки риска к нормальному закону при использовании FDR–порога в условиях слабой зависимости // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2025. — № 3. — С. 23–31.

EDN: PETCUI, Импакт–фактор 0,246 (РИНЦ) / 0.563 п.л.

*Vorontsov, M.O.* Rate of Convergence of Risk Estimate to the Normal Law When Using an FDR–Threshold under Conditions of Weak Dependence // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2025. — Vol. 49, No. 3. — Pp. 195–204.

EDN: UMVGHV, Импакт–фактор 0,228 (РИНЦ) / 0.625 п.л.

[3] *Воронцов М.О., Шестаков О.В.* Среднеквадратичный риск FDR–процедуры в условиях слабой зависимости // Информатика и ее применения. — 2023. — Т. 17, № 2. — С. 34–40.

EDN: AVJZDX, Импакт–фактор 1,257 (РИНЦ) / 0.438 п.л. / вклад соискателя 0.438 п.л.

В работе [3] постановка задач принадлежит О. В. Шестакову, а все результаты получены автором диссертации самостоятельно.

[4] *Воронцов М.О., Шестаков О.В.* Асимптотическая нормальность и сильная состоятельность оценки риска при использовании FDR–порога в условиях слабой зависимости // Информатика и ее применения. — 2024. — Т. 18, № 3. — С. 69–79.

EDN: ZOQVTO, Импакт–фактор 1,257 (РИНЦ) / 0.688 п.л. / вклад соискателя 0.688 п.л.

В работе [4] постановка задач принадлежит О. В. Шестакову, а все результаты получены автором диссертации самостоятельно.