

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

*На правах рукописи*

**Арутюнян Давид Арменович**

**Динамика квазигеострофического эллипсоидального вихря в  
баротропном и бароклинном потоках**

1.6.17 Океанология

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор  
Жмур Владимир Владимирович

Москва – 2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>ГЛАВА 1. ЭВОЛЮЦИЯ ВИХРЯ В БАРОКЛИННОМ ПОТОКЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ .....</b>	<b>18</b>
1.1 Математическая постановка задачи .....	18
1.2 Начальные и внешние условия задачи .....	35
1.3 Численная модель задачи .....	37
1.4 Эволюция параметров ядра вихря в потоке с вертикальным сдвигом. Время жизни вихря.....	38
1.5 Режимы поведения эллипсоидального вихря в потоке с вертикальным сдвигом .....	49
<b>ГЛАВА 2. ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ВЫТЯГИВАЮЩИХСЯ ВИХРЕЙ В БАРОТРОПНОМ И БАРОКЛИННОМ ПОТОКАХ .....</b>	<b>63</b>
2.1 Эволюция энергии вихря при вытягивании баротропным потоком .....	63
2.2 Эволюция энергии вихря в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом .....	86
2.3 Потеря энергии вихря .....	98
<b>ГЛАВА 3. ЭВОЛЮЦИЯ ЧИСЛА РОССБИ В БАРОТРОПНОМ И БАРОКЛИННОМ ПОТОКАХ .....</b>	<b>100</b>
3.1 Эволюция числа Россби в баротропном потоке .....	100
3.2 Число Россби в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом .....	104
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>106</b>
<b>Список сокращений и условных обозначений .....</b>	<b>109</b>
<b>Список использованной литературы .....</b>	<b>110</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

**Актуальность темы.** Океанические вихри являются одним из ключевых элементов общей циркуляции Мирового океана, оказывая значительное влияние на перераспределение тепла, солености и питательных веществ. Эти динамические структуры играют важную роль в процессах энергообмена между различными слоями океана и влияют на глобальные климатические процессы. Еще в 30-ые годы прошлого столетия В.Б.Штокман подозревал о существовании крупных неоднородностях в Мировом океане. По его предложению в 1967 году был организован специальный эксперимент по исследованию вихревых образований в Аравийском море [Штокман и др., 1969].

Интерес к исследованию мезомасштабной изменчивости океанических течений возник после открытия антициклонического вихря в 1970 году в ходе экспедиции ПОЛИГОН-70 в северной части Атлантического океана [Кошляков, Грачев, 1974]. Впоследствии для детального изучения вихревой активности и ее роли в океанической циркуляции были организованы крупные международные экспедиционные исследования, среди которых МОДЕ (Саргассово море, 1973 г.), ПОЛИМОДЕ (Северная Атлантика, 1977–1978 гг.), МЕЗОПОЛИГОН (Северная Атлантика, 1985 г.) и МЕГАПОЛИГОН (Тихий океан, 1987 г.). Результаты этих исследований позволили подтвердить, что вихревые структуры играют ключевую роль в процессах горизонтального и вертикального перемешивания водных масс, активно участвуют в транспорте тепла, соли, питательных веществ и других примесей, а также оказывают влияние на крупномасштабные климатические изменения. Осознание важности вихревых образований в общей динамике океана способствовало росту научного интереса к теоретическим аспектам геофизической гидродинамики, а также стимулировало развитие лабораторного и численного моделирования

мезомасштабных процессов в океане. На протяжении последних десятилетий исследования, посвященные моделированию и наблюдению вихревых образований, значительно продвинулись благодаря развитию численных методов и спутникового мониторинга. Численное моделирование показало, что вихревые структуры играют важную роль в мезомасштабной изменчивости морей [Stepanov, Diansky, Fomin, 2018], [Степанов, Дианский, Новотрясов, 2014], [Дианский и др., 2016], [Соколовский, 1992], [Козлов, Макаров, Соколовский, 1986]. Спутниковые снимки вихрей предоставляют ценные данные о пространственно-временной изменчивости высокопродуктивных акваторий Мирового океана [Завьялов и др., 2008]. Исследование вихревых полей также позволяют получать информацию о различных океанографических и геофизических явлениях, такие как остаточные следы цунами [Носов, Нурисламова, 2012]. Вихри переносят воду на значительные расстояния почти без перемешивания [Иванов, Парамонов, 1980].

Вихри разделяют по их характерным горизонтальным размерам  $L$  [Иванов и др., 1986]:

1.  $L \ll H$  – мелкомасштабные вихри.
2.  $H < L < L_R$  – мезомасштабные вихри.
3.  $L \sim L_R$  синоптические вихри.
4.  $L \gg L_R$  – глобальные вихри.

Здесь  $L_R = \frac{NH}{f}$  – радиус деформации Россби,  $N$  – частота Вяйсяля-Брента,  $f$  – параметр Кориолиса,  $H$  – глубина океана. Однако могут быть и другие классификации. Данная классификация и ряд других рассматриваются в работе [Баранов, 1988].

Основной причиной возникновения вихрей является баротропно-бароклинная неустойчивость крупномасштабных течений приповерхностного слоя океана [Калашник, Курганский, Чхетиани, 2022], [Григорьев и др., 2001]. Дипольные вихревые образования или так называемые грибовидные течения возникают при импульсном воздействии ветра на поверхность океана [Гинзбург, Федоров, 1984]. Однако большинство наблюдаемых вихрей – монопольные вихревые образования. Завихренность ядер таких вихрей не меняет знак ( в отличие от грибовидных). Горизонтальные размеры монопольных вихрей варьируется от десятков до сотен километров. Наиболее крупные вихри, так называемые ринги, образуются путем отделения меандров от крупномасштабных течений, таких как Гольфстрим, Куросио и т.д. [Olson,Evans, 1986], [Richardson, 1980]. В окрестностях струйных течений наблюдаются как синоптические, так и мезомасштабные вихри [Bane et al., 1989]. Синоптические и мезомасштабные вихри могут быть и вдали от течений. Так, например, в ходе экспедиции ПОЛИГОН-70 был зафиксирован антициклон эллипсоидальной формы с соотношением горизонтальных полуосей ядра 1:2. Большая полуось имела длину порядка 180 км( при этом радиус деформации Россби в этой зоне  $L_R \sim 60 \div 70$  км). Вращаясь по часовой стрелке как целое, вихрь имел юго-западное направление движения: скорость западной составляющей порядка 0.02 м/с, южной – в два раза меньше. На глубине порядка 500 м наблюдался максимум орбитальной скорости частиц порядка 0.35 м/с.

Наиболее долгим наблюдаемым вихрем в специализированных экспедициях является так называемый «вихрь Парамонова» [Иванов, Парамонов, 1980]. Он был обнаружен в эксперименте ПОЛИМОДЕ. Ядро вихря эллипсоидальной формы находилось на глубине порядка 350 м. С января по февраль 1978 года поступательная скорость вихря увеличилась от

0.05 м/с до 0.15 м/с. Орбитальная скорость частиц также увеличивалась от 0.55 м/с до 0.8 м/с. Интересным является то, что изначально этот циклон двигался на север, потом приобрел западную компоненту.

Вихри также могут образоваться в толще океана. Например, при попадании вод из Средиземного моря через Гибралтарский пролив в Атлантику на глубине 800-1500 м за счет притока воды различной температуры и солености образуются внутритеrmоклиновые вихри или так называемые линзы [McDowell, 1977], [McDowell,Rossbi, 1978]. В ходе нескольких экспедиций с помощью акустических поплавков в течение 2 лет была прослежена линза под названием «Шарон», которая, по разным оценкам, имела возраст порядка 4-5 лет [Hebert, 1988 [Tokos, Rossbi, 1991], [Филюшкин и др., 2010]. Вихри также могут возникать на стоке крупных рек [Зацепин и др., 2017]. Они могут взаимодействовать как с внешними течениями, так и друг с другом [Рыжов, Кошель, 2011].

Для предсказания траектории вихрей учитывают влияние  $\beta$  –эффекта [Анисимов, Дианский, 2008], [Резник, 2010], [Коротаев, 2020],[Худякова, Травкин, Белоненко, 2023], [Журбас, Ох, Парк, 2006], [Павлушкин, Шапиро, Михайлов, 2017];  $\beta$  –эффект играет роль в тех случаях, когда он является ведущим среди прочих эффектов. Данный эффект должен быть учтен в синоптических движениях и может пренебрегаться при мезомасштабных возмущениях [Иванов и др., 1986]. Натурные данные показывают, что в реальных локализованных вихрях нелинейность играет существенно большую роль, чем  $\beta$  –эффект [Fedorov,Ginsburg,1986], [McWilliams, 1976а, б]. Однако при пренебрежении  $\beta$  –эффектом будут потеряны такие явления, как излучение волн Россби. Также не будет учтено движение циклона на север с переходом к западному дрейфу. Следовательно, в приближении  $f$  – плоскости становится невозможным правильное описание траектории движения вихря и полей течения вдали. В

приближении  $f$  – плоскости хорошо описывается деформация ядра вихря (если другие эффекты малы относительно  $\beta$  –эффекта).

Следует отметить работы Челтона с соавторами, в которых проводились важные исследования вихревой динамики на основе альтиметрических данных [Chelton et al., 2007], [Schlax, Chelton, 2008], [Fu et al., 2010], [Kurian J. et al., 2011], [Chelton, Schlax, Samelson, 2011], [Chelton et al., 2011]. Анализ вихревой динамики по данным альтиметрии представлен и в других исследованиях. Ключевыми работами являются: создание глобального атласа океанических вихрей с применением методов машинного обучения [Faghmous et al., 2015], изучение эволюции вихревых структур в субтропических круговоротах [Mason, Pascual, McWilliams, 2014], а также исследование механизмов переноса водных масс вихрями в Южном океане [Morrow et al., 2004] , [Doglioli et al., 2007]. Значительный вклад внесли работы по анализу влияния вихрей на продуктивность океана [Gaube et al., 2014] и исследования вихреобразования в районах сложного рельефа дна [Sangrà et al., 2009]. Методические достижения включают разработку новых критериев идентификации вихревых структур [Ducet, Le Traon, Reverdin, 2000], [Early, Samelson, Chelton, 2011], а также создание методов оценки вертикального переноса с использованием комбинации альтиметрических данных и измерений профилирующими поплавками [Schütte, Brandt, Karstensen, 2016]. Современные исследования посвящены систематизации типов вихревых образований [Laxenaire et al., 2018] и применению алгоритмов искусственного интеллекта для автоматического отслеживания вихрей [Pegliasco C. et al., 2022].

Современные исследования мезомасштабной изменчивости океана выявили особую роль Лофотенской котловины как региона с аномально высокой вихревой активностью [Федоров, Башмачников, Белоненко, 2019], [Башмачников, Белоненко, Куйбин, 2017], [Сантьева, Башмачников,

Соколовский, 2021], [Зинченко и др., 2021], [Белоненко и др., 2014], [Новоселова, Белоненко, 2021], [Травкин, Белоненко, 2021]. Этот район, характеризующийся сложным взаимодействием Атлантических вод с топографией дна и Арктическими водными массами, представляет уникальный полигон для изучения механизмов генерации, эволюции и диссипации вихревых структур.

Теоретическое исследование динамики вихрей началось с работ Кирхгофа [Ламб, 1947, с.273], который рассмотрел эллиптическое пятно(плоский вихрь Кирхгофа) в двумерной жидкости. Он показал, что эллиптическая область будет вращаться равномерно без изменения формы. Позже С.А. Чаплыгин рассмотрел поведение вихря Кирхгофа на течении со сдвигом [Чаплыгин, 1948]. Он получил, что вихрь Кирхгофа может периодическим образом меняться в горизонтальных размерах, оставаясь эллипсом (пульсирующий вихрь). Более детальное исследование двумерных эллиптических вихрей в потоках со сдвигом провел С.Кида [Kida, 1981]. Впервые были получены три режима поведения ядра: вращение, колебание и неограниченное вытягивание. Отметим, что результаты, полученные Кидой, являлись важной опорой для дальнейших исследований эллиптических двумерных вихрей. Далее была разработана теория, обобщающая вихрь Кирхгофа [Polvani, Flierl 1986]. Требовалась теория для описания трехмерных эллипсоидальных вихрей. Такая теория была создана к концу 80-ых и к началу 90-ых годах прошлого столетия [Жмур,Панкратов, 1989], [Жмур,Панкратов, 1990 а, б], [Жмур,Щепеткин, 1991], [Жмур, Щепеткин, 1992], [Meacham S. P. et al, 1994]. Предложенная в этих работах теория эллипсоидальных вихрей лежит в основе данной диссертационной работы. Позже мы подробно поговорим о важных аспектах этой теории, а некоторые ключевые формулы и уравнения в силу своей необходимости будут выведены. Пока отметим, что в ранних исследованиях

рассматривались вихри с одной вертикальной и двумя горизонтальными осями в баротропных равнозавихренных потоках, подобных потокам Кида. Оказалось, что поведение эллиптических вихрей Кирхгофа и упомянутых 3D эллипсоидальных вихрей в равнозавихренных баротропных потоках весьма схоже. И те, и другие обладают тремя основными режимами поведения вихревых ядер: вращение или колебание формы вокруг вертикальной оси с одновременной ограниченной вариацией длин горизонтальных полуосей, а также режимом неограниченного вытягивания вихревого ядра в горизонтальной плоскости. В первых двух случаях движение формы периодическое, тогда как в последнем оно апериодическое. В этих исследованиях анализировались характеристики эллипсоидальных вихрей с произвольной ориентацией в пространстве, а также их динамика в более сложных равнозавихренных потоках. Данное направление получило дальнейшее развитие в работах [Dritschel, Reinaud, McKIVER, 2004], [McKiver, Dritschel, 2003, 2006, 2016]. Кроме того, изучение вихрей конечных размеров проводилось как в лабораторных экспериментах, так и в натурных условиях [Зацепин, Елкин, Шварцман, 2023], [Зацепин и др., 2011].

В исследованиях [Жмур, Щепеткин, 1992], [Meacham et al, 1994] для описания и моделирования эволюции углов ориентации эллипсоидального вихря в пространстве использовались три угла Эйлера или углы Кардана. Это привело к получению достаточно сложной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих не только изменение ориентации вихря, но и динамику длин полуосей его ядра. Однако детальный количественный анализ режимов деформационного поведения вихревых структур до сих пор не был проведён из-за сложности данной системы и её многомерного характера. Среди качественных характеристик решений отмечались сложные изменения ориентации вихрей в

пространстве, а также возникновение новых режимов неограниченного вытягивания. В этих режимах вихрь сначала демонстрировал ограниченные квазипериодические колебания полуосей своего ядра при сложной эволюции углов ориентации, но затем ядро практически прекращало движение в пространстве и начинало неограниченно вытягиваться под влиянием фонового течения. При этом в работах не рассматривались альтернативные сценарии поведения вихрей. Сравнивая данные о вихревых структурах в баротропных и бароклинических потоках, можно отметить, что вращательный и колебательный режимы, характерные для баротропных течений, в бароклинических потоках выявлены не были. Вместе с тем в бароклинических течениях усложнилась динамика неограниченного вытягивания вихрей. Однако количественные критерии для этого процесса в рассмотренных исследованиях отсутствуют.

Воздействие баротропных равнозавихренных течений на квазигеострофический эллипсоидальный вихрь рассмотрено в работах [Жмур и др., 2023а, б]. В них получены карты областей существования и эволюции вихрей в баротропных потоках с горизонтальным сдвигом, что является обобщением подхода Кида на трехмерный случай. Однако оставались открытыми вопросы поведения вихрей в бароклинических потоках, а также детального анализа эволюции их энергетики как в баротропных, так и в бароклинических течениях.

### **Цель и задачи диссертационной работы:**

Цель работы состоит в развитии теоретических представлений о динамике эллипсоидальных вихрей океана.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Определение режимов поведения вихря во внешнем бароклиинном потоке.
2. Анализ эволюции энергетических характеристик вихря во внешних потоках общего вида.
3. Выявление области применимости квазигеострофического приближения.

**Научная новизна:**

1. В работе впервые решена задача о режимах поведения квазигеострофических эллипсоидальных вихрей океана в бароклиинных течениях.
2. В плоскости безразмерных параметров вихря и бароклиинного течения впервые построены области и границы переходов между режимами поведения вихря. Определены критерии устойчивости вихрей во внешних бароклиинных течениях.
3. Впервые анализирована возможность проявления обратного энергетического каскада с точки зрения эволюции вихря при его вытягивании в течениях общего вида.
4. Впервые исследована эволюция числа Россби для вихрей в баротропных и бароклиинных течениях.

**Практическая значимость.** В работе проведен объемный анализ режимов поведения вихря в бароклиинном внешнем потоке. Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования вихрей в течениях и определения условий их устойчивого существования. Исследована эволюция энергии вихря как в бароклиинных, так и в баротропных потоках, что позволяет раскрыть механизм передачи энергии между различными масштабами неоднородностей. Полученные результаты естественным образом дополняют теорию эллипсоидальных вихрей в океане.

**Методология и методы исследования.** В ходе исследования была использована комбинированная методология, включающая теоретический анализ, численное моделирование и сравнительный анализ полученных результатов. Теоретическая часть опиралась на существующей модели в рамках теории эллипсоидальных вихрей и была развита с учетом специфики рассматриваемой задачи. Для численного анализа применялись методы вычислительной математики, в частности, при решении системы ОДУ использован метод Рунге-Кутты 2-ого и 3-ого порядка. Численные исследования проводились с использованием программного комплекса MATLAB, что позволило детально проанализировать поведение вихрей. Полученные результаты были интерпретированы с помощью собственного алгоритма анализа огромного массива данных, полученных в ходе решения ОДУ.

### **Основные положения, выносимые на защиту.**

1. Существуют три режима поведения вихря в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом: режим выживания, режим конечного времени жизни и режим неограниченного вытягивания.
2. При вытягивании энергетика вихрей деградирует как в баротропных, так и в бароклинических течениях. Ключевым механизмом взаимодействия является перекачка энергии от вихря к течению, что обуславливает проявление обратного энергетического каскада.
3. В бароклиническом потоке во всех режимах вихрь остается геострофическим. В баротропном потоке с вытягиванием вихрь переходит в агеострофическое образование.

**Достоверность результатов.** Достоверность полученных результатов обеспечивается комплексным подходом к исследованию, включающим строгую математическую постановку задачи, численное моделирование с

использованием верифицированных методов, а также сравнительный анализ с теоретическими и экспериментальными данными. Материалы исследования докладывались в ведущих университетах и научных институтах, а также обсуждались на разных конференциях, что подтверждает их научную обоснованность и актуальность.

**Апробация работы.** Результаты работы проходили апробацию на следующих семинарах и конференциях:

1. В.В. Жмур, Т.В. Белоненко, Е.В. Новоселова, Б.С. Суэтин, Д.А. Арутюнян. Вытягивание мезомасштабных вихрей океана в субмезомасштабные вихревые нити как способ передачи энергии по каскаду размеров // Ученый совет Физического направления ИО РАН – 16 мая 2022 г.
2. Жмур В. В., Белоненко Т. В., Новоселова Н. В., Суэтин Б. С., Арутюнян Д. А. Вытягивание мезомасштабных вихрей океана в субмезомасштабные вихревые нити как способ передачи энергии по каскаду размеров. Проявление свойств отрицательной вязкости при вытягивании вихрей // XX научная школа «Нелинейные волны – 2022», 7-13 ноября.
3. Жмур В.В., Белоненко Т.В., Новоселова Е.В., Суэтин Б.П, Арутюнян Д.А. Горизонтальная филаментация (удлинение) мезомасштабных вихрей как основной процесс, способствующий проявлению отрицательной вязкости океана на мезо– и субмезомасштабе // Ученый совет Физического направления ИО РАН – 21 октября 2022 г.
4. Арутюнян Д.А. Энергетическое взаимодействие вихрей океана с баротропными течениями. Возможность проявления эффекта отрицательной вязкости // 65–я Всероссийская научная конференция МФТИ – 3–8 апреля, 2023 г.

5. Жмур В.В., Арутюнян Д.А. Режимы поведения квазигеострофического эллипсоидального вихря в горизонтальном потоке с вертикальным сдвигом // V Всероссийская конференция с международным участием «Турбулентность, динамика атмосферы и климата», посвященная памяти академика Александра Михайловича Обухова – 19–21 ноября 2024 г.
6. Арутюнян Д.А. Исследование поведения эллипсоидальных вихрей океана во внешних потоках // Семинар Центра наук о Земле МФТИ – 13 февраля 2025 г.
7. Арутюнян Д.А., Жмур В.В. Эволюция энергии квазигеострофического эллипсоидального вихря при его вытягивании внешними течениями // XIX Международная научно-техническая конференция «Современные методы и средства океанологических исследований» (МСОИ-2025) Институт океанологии им. П.П.Ширшова. –13-15 мая 2025 г.

**Публикации.** По материалам работы опубликовано **5 статей**, индексируемых по базам данных РИНЦ, Scopus и Web of Science:

1. Жмур В.В., Травкин В.С., Белоненко Т.В., Арутюнян Д.А. Трансформация кинетической и потенциальной энергии при вытягивании мезомасштабного вихря // Морской гидрофизический журнал. — 2022. — Т.38, № 5. — С. 466–480. EDN: MJMZVU. Импакт фактор 0.469(РИНЦ). Объем 0.857 п.л./авторский вклад 0.26 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, участие в подготовке выводов.

Переводная версия статьи:

Zhmur, V.V., Travkin, V.S., Belonenko, T.V. and Arutyunyan, D.A. Transformation of Kinetic and Potential Energy during Elongation of a Mesoscale Vortex // Physical Oceanography. — 2022. — Vol. 29, № 5. —

pp. 449-462. DOI:10.22449/1573-160X-2022-5-449-462. Импакт фактор 0.36(SJR). Объем 0.85 п.л./авторский вклад 0.26 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, участие в подготовке выводов.

2. Жмур В.В., **Арутюнян Д.А.** Перераспределение энергии при горизонтальном вытягивании океанских вихрей баротропными течениями // Океанология. — 2023. — Т. 63, №1. — С. 3–19. EDN: AFRQHI. Импакт фактор 1.826(РИНЦ). Объем 1.26 п.л./авторский вклад 0.8 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, выводы, подготовка текста.

Переводная версия статьи:

Zhmur V. V., **Harutyunyan D. A.** Redistribution of energy during horizontal stretching of ocean vortices by barotropic currents //Oceanology. — 2023. — Vol. 63. — №. 1. — pp. 1-16. DOI:10.1134/S0001437023010186. Импакт фактор 0.371(SJR). Объем 1.2 п.л./авторский вклад 0.75 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, выводы, подготовка текста.

3. Zhmur, V.V., Belonenko, T.V., Travkin, V.S., Novoselova, E.V., **Harutyunyan, D.A.**, Raj, R.P. Changes in the Available Potential and Kinetic Energy of Mesoscale Vortices When They Are Stretched into Filaments // Journal of Marine Science and Engineering. — 2023. — Vol.11, № 6. — P.1131. DOI: 10.3390/jmse11061131. Импакт фактор 0.579(SJR). Объем 0.86 п.л./ авторский вклад 0.24 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, участие в подготовке выводов.
4. **D.A. Harutyunyan**, V.V. Zhmur. Behavior Modes of a Quasi-Geostrophic Ellipsoidal Vortex in a Horizontal Flow with Vertical Shear // Oceanology. — 2025. — Vol. 65, No. 4. — pp. 481–499.

DOI: 10.1134/S000143702570016X. Импакт фактор 0.371(SJR). Объем 1.175 п.л./авторский вклад 0.875 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, выводы, подготовка текста.

5. Арутюнян Д. А., Жмур В. В. Эволюция гидродинамических параметров эллипсоидального вихря в бароклинном фоновом потоке // Russian Journal of Earth Sciences. — 2025. — Т. 25, № 5. — ES5002. DOI: 10.2205/2025es001047. Импакт фактор 0.214(SJR). Объем 0.715 п.л./ авторский вклад 0.57 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, выводы, подготовка текста.

**Личный вклад.** Все результаты диссертационной работы получены лично автором под руководством доктора физико-математических наук, члена-корреспондента РАН, профессора Жмура Владимира Владимировича. Соискатель принимал активное участие в формулировке целей и задач исследования, а также в подготовке публикаций и докладов. В совместных публикациях [1–3] соискатель самостоятельно проводил исследования эволюции энергии вихря в баротропных течениях. Часть теоретических результатов, а также все численные расчеты были выполнены автором. В публикациях [4–5] соискателем получены основные результаты работы: определены режимы поведения и эволюция энергетики вихрей в бароклиновых потоках.

**Благодарность.** Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, члену-корреспонденту РАН, профессору Жмуру Владимиру Владимировичу за неоценимую поддержку, внимание и ценные научные советы на всех этапах работы. Его глубина научного мышления, стремление к точности и ясности

в постановке задач, а также способность направлять исследование в наиболее значимые и актуальные области стали ключевыми факторами успешного выполнения данной работы.

**Объем и структура диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений и списка используемой литературы.

В первой главе решена задача о режимах поведения квазигеострофических эллипсоидальных вихрей в условиях внешних бароклинических течений с вертикальным сдвигом. Последовательность изложения включает: формулировку математической модели, задание начальных и граничных условий, методы численного решения, а также анализ полученных результатов.

Во второй главе рассматривается эволюция энергетики вихря в баротропном и бароклинических течениях.

Последняя глава содержит исследование эволюции числа Россби вихря при его вытягивании баротропным и бароклиническим потоками.

Диссертационная работа изложена на 120 страницах, включая 46 иллюстраций (рисунков) и 8 таблиц. Список цитируемой литературы включает в себя 79 наименований.

# ГЛАВА 1. ЭВОЛЮЦИЯ ВИХРЯ В БАРОКЛИННОМ ПОТОКЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ

## 1.1 Математическая постановка задачи

Рассматривается стратифицированный вращающийся океан с идеальной невязкой жидкостью на  $f$  – плоскости в квазигеострофическом приближении при малых числах Россби

$$Ro = \frac{U}{fL} \ll 1, \quad (1)$$

где  $U$  – характерная скорость исследуемого процесса,  $f = \text{const}$  – параметр Кориолиса,  $L$  – характерный горизонтальный размер. С учетом таких упрощений система уравнений геофизической гидродинамики может быть сведена к единому уравнению в терминах функции тока  $\Psi$  [Жмур, 2011]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + J_h \left( \psi, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $J_h(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x}$  – якобиан,  $f = \text{const}$  – параметр Кориолиса,  $N = N(z)$  – частота Вейсля-Брента.

Через функцию тока  $\Psi(x, y, z, t)$  можно вывести основные параметры гидродинамического движения, включая компоненты скорости:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad w = -\frac{f}{N^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z} + J_h \left( \psi, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right]. \quad (3)$$

Первые две формулы описывают исключительно геострофическое движение в горизонтальной плоскости. Вертикальная компонента скорости

в рамках данного приближения мала – порядка  $\frac{w}{U} \sim \frac{\delta}{L} Ro$  ( $\delta$  – характерный вертикальный размер вихревого ядра,  $L$  – его горизонтальный размер). Однако в уравнении сохранения плотности жидкой частицы ею пренебречь нельзя даже в самом грубом приближении. Именно поэтому малую вертикальную скорость удается оценить в виде последнего соотношения в уравнениях (3). Детали можно найти в монографии [Жмур, 2011].

Физический смысл уравнения (2) заключается в том, что величина

$$\sigma = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (4)$$

является лагранжевым инвариантом и сохраняется вдоль траектории частицы. Величину  $\sigma$  принято называть потенциальной завихренностью частиц, а уравнение (2) – закон сохранения потенциальной завихренности

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Если быть точным, величина  $\sigma$  сохраняется с той же точностью, что и основное уравнение (2), точность которого порядка  $O(Ro)$ . Поэтому в исследуемой модели очень важно находится в рамках геострофичности. Физический смысл  $\sigma$  заключается в том, что она складывается из относительной завихренности в горизонтальной плоскости и изменения формы жидкой частицы в вертикальном направлении (сжатие-растяжение). Если считать частоту Ваясяля-Брента постоянной, то можно получить упрощенный вариант соотношения (4). Действительно, перейдя в растянутую по вертикали систему координат, где  $\tilde{z} = \frac{N}{f} z$ , получим

$$\sigma = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tilde{z}^2} = \Delta \Psi. \quad (6)$$

Рассмотрим некоторый замкнутый объем  $V$  пространства  $(x, y, \tilde{z})$  с постоянной потенциальной завихренностью частиц  $\sigma_1 = const$  и внешнюю часть пространства с другой постоянной завихренностью  $\sigma_2 = const$ . Границы области  $V$  могут двигаться и деформироваться. Объем  $V$  назовем ядром вихря. Любая частица, попавшая в эту область, перемещается вместе с областью  $V$ . Тогда распределение потенциальной завихренности в пространстве можно записать следующим образом:

$$\Delta\Psi = \begin{cases} \sigma_1, & (x, y, \tilde{z}) \in V \\ \sigma_2, & (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases}. \quad (7)$$

Ступенчатое распределение потенциальной завихренности означает следующее: вихрь состоит из ядра завихренности  $\sigma_1$  и индуцированной ею вращающейся жидкости внешней от ядра среды завихренности  $\sigma_2$ . Вихревое ядро и захваченная ею вращающаяся окружающая жидкость образуют вихрь как целое. На рисунке 1 представлена конструкция эллипсоидального вихря.

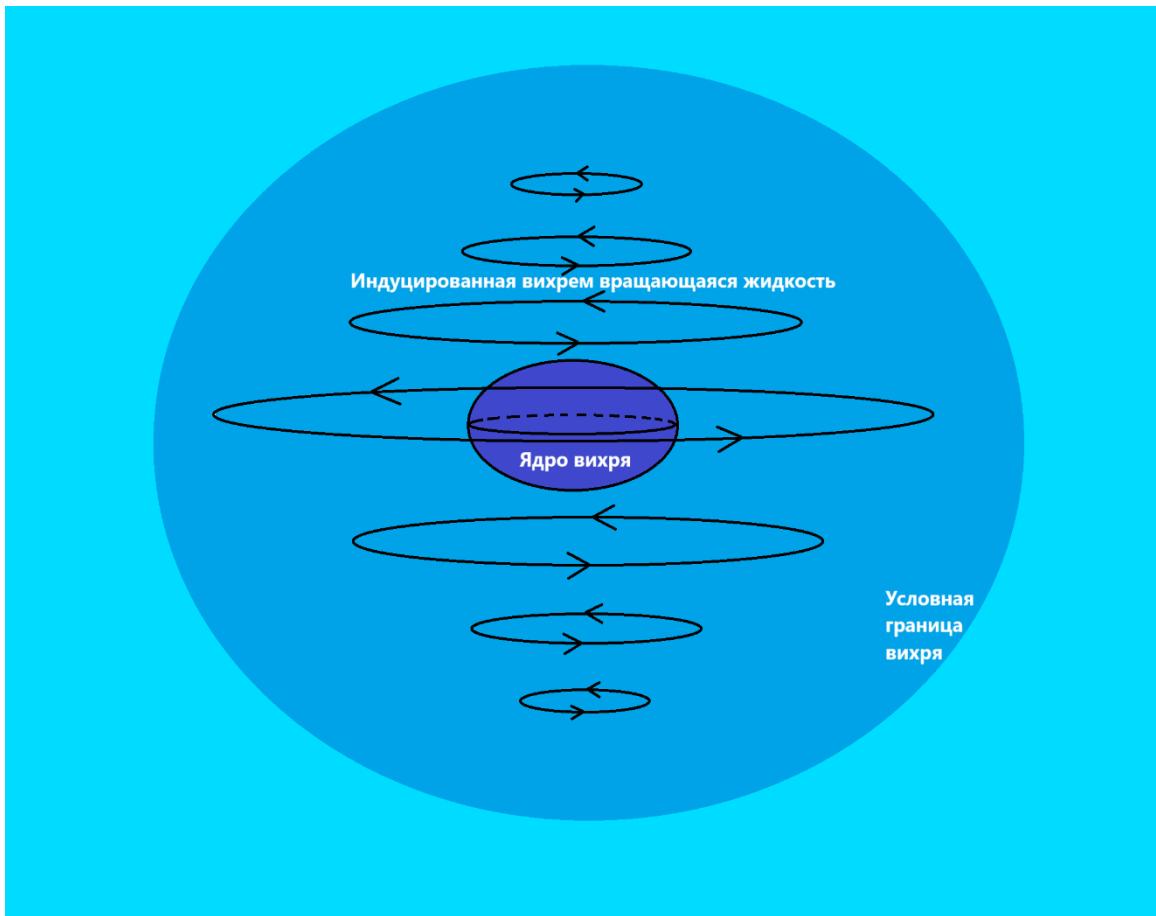


Рис.1. Трехмерный эллипсоидальный вихрь океана.

Рассмотрим фоновое течение, для которого на всем пространстве справедливо равенство

$$\Delta \Psi_{flow} = \sigma_2, \quad (8)$$

где  $\Psi_{flow}$  – функция тока фонового течения. Тогда возмущение фонового течения вихрем имеет вид

$$\Delta \Psi_{vortex} = \begin{cases} \sigma, & (x, y, \tilde{z}) \in V \\ 0, & (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases}, \quad (9)$$

где  $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$  – превышение потенциальной завихренности ядра вихря над фоном.

Условие (9) аналогично задаче о гравитационном потенциале тела однородной плотности. Его решение хорошо известно. Нас интересует решение для эллипсоидальной поверхности [Жмур, Панкратов, 1989], [Жмур, Панкратов, 1990 а, б], [Жмур, Щепеткин, 1991], [Жмур, Щепеткин, 1992], [Meacham S. P. et al, 1994], [Жмур, 2011], которое следует из общей теории гравитационного потенциала [Тихонов, Самарский 1977]:

$$\begin{aligned} \Psi_{vortex}(x_1, y_1, z_1, t) \\ = -\frac{1}{4}\sigma abc \int_{\lambda}^{\infty} \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2 + m} - \frac{y_1^2}{b^2 + m} \right. \\ \left. - \frac{z_1^2}{c^2 + m} \right) \frac{dm}{\sqrt{(a^2 + m)(b^2 + m)(\tilde{c}^2 + m)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $x_1 = x_1(t)$ ,  $y_1 = y_1(t)$ ,  $z_1 = z_1(t)$  направления главных осей эллипсоида,  $a = a(t)$ ,  $b = b(t)$ ,  $\tilde{c} = \tilde{c}(t)$  полуоси ядра, зависящие от времени  $t$ . В интеграле (10) нижний предел  $\lambda > 0$  является положительным корнем уравнения

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y_1^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z_1^2}{\tilde{c}^2 + \lambda} = 1. \quad (11)$$

Поверхность, заданная условием  $\lambda = \text{const}$ , представляет собой софокусный эллипсоид относительно исходного эллипсоида. Для внешних точек  $(x_1, y_1, z_1)$  очевидно, что  $\lambda > 0$ . В случае, если точка находится внутри эллипсоида с полусями  $(a, b, \tilde{c})$ , то в выражении (10) следует принять  $\lambda = 0$ .

Функция тока  $\Psi_{vortex}$  в (10) и ее первые производные по пространству непрерывны. Это свойство сохраняется даже при деформации ядра и любой зависимости полуосей от времени. В приближении  $f$  – плоскости давление

отличается от функции тока только постоянным множителем. Условие (10) можно представить и в терминах давления:

$$\begin{aligned}
 p(x_1, y_1, z_1, t) &= -\frac{1}{4} \sigma \rho f abc \int_{\lambda}^{\infty} \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2 + m} - \frac{y_1^2}{b^2 + m} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{z_1^2}{c^2 + m} \right) \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + m)(b^2 + m)(\tilde{c}^2 + m)}}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Из (3) и (10) можно вычислить геострофическое поле скоростей:

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{\sigma}{2} ab \tilde{c} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{dm}{(b^2 + m) Y(m)} y_1 \\
 v &= \frac{\sigma}{2} ab \tilde{c} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{dm}{(a^2 + m) Y(m)} x_1, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где  $Y(m) = \sqrt{(a^2 + m)(b^2 + m)(\tilde{c}^2 + m)}$ .

Непрерывность функции тока и давления приводит к автоматическому выполнению динамического условия, а именно, равенство давлений по обе стороны от границы ядра. Кинематическое условие пока не выполнено. Пусть уравнение границы ядра имеет вид  $G(x, y, \tilde{z}, t) = 0$ . Кинематическое условие на границе ядра в этом случае выглядит следующим образом [Жмур, 2011]:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + u \frac{\partial G}{\partial x} + v \frac{\partial G}{\partial y} + w \frac{\partial G}{\partial \tilde{z}} = 0. \quad (14)$$

Находясь в рамках квазигеострофического приближения условие (13) превратится в уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} + u \frac{\partial G}{\partial x} + v \frac{\partial G}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

Дело в том, что при требовании той же точности в (13), что и в (1) последнее слагаемое в (13) мало по сравнению с горизонтальными составляющими:

$$O\left(\frac{w \frac{\partial G}{\partial \tilde{z}}}{u \frac{\partial G}{\partial x}}\right) \sim R_O. \quad (16)$$

Смысл кинематического условия (15) заключается в равенстве нормальных к поверхности ядра составляющих скорости внутри и вне ядра.

Уравнение границы ядра в нашем случае будет описываться уравнением поверхности эллипсоида:

$$G(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{\tilde{c}^2} - 1 = 0. \quad (17)$$

В данной работе будем рассматривать только равнозавихренные течения, поскольку эллипсоидальное ядро при деформации останется эллипсоидом именно в таких течениях. Рассмотрим горизонтальное течение с вертикальным сдвигом. Поле скорости такого бароклинного течения выглядит как

$$\vec{u}_{shear} = (\Gamma \tilde{z}, 0, 0)^T, \quad (18)$$

где  $\Gamma$  – параметр сдвига, имеющий размерность ротора скорости ( $\text{с}^{-1}$ ).

Решение (10) написано в сопутствующей системе координат  $(x_1, y_1, z_1)$ , повернутой относительно неподвижной декартовой системы координат  $(x, y, \tilde{z})$  с началом в центре вихря, причем ось  $x$  направлена горизонтально вдоль внешнего течения, ось  $y$  в горизонтальной плоскости

перпендикулярна течению, а ось  $\tilde{z}$  направлена вверх. Для простоты волну опустим (полусось  $\tilde{c}$  обозначим как  $c$ , а ось  $\tilde{z}$  перепишем как  $z$ ).

Вернемся к кинематическому условию (15). Именно оно дает возможность определить дальнейшую эволюцию вихря. Подробно рассмотрим, как из кинематического условия можно получить интересующую нас модель эволюции вихря. Условие (15) можно написать в следующем виде:

$$\nabla G \cdot (\vec{v}_{particle} - \vec{v}_{border}) = 0, \quad (19)$$

где  $\vec{v}_{border}$  — скорость движения границы ядра,  $\vec{v}_{particle}$  — скорость движения жидкой частицы, которая определяется как сумма скорости внешнего потока и скорости, индуцированной вихревым течением. Условие (19) удобно представить в системе координат  $(x_1, y_1, z_1)$ , связанной с эллипсоидом. При этом, согласно условию (15), в уравнении (19) необходимо исключить вертикальную компоненту скорости в неподвижной системе  $(x, y, \tilde{z})$ . Скорость движения границы определяется как

$$\begin{aligned} \vec{v}_{border} &= \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \dot{x}_1\vec{i} + \dot{y}_1\vec{j} + \dot{z}_1\vec{k} + x_1\dot{\vec{i}} + y_1\dot{\vec{j}} + z_1\dot{\vec{k}} \\ &= \frac{\dot{a}}{a}x_1\vec{i} + \frac{\dot{b}}{b}y_1\vec{j} + \frac{\dot{c}}{c}z_1\vec{k} + \vec{\omega} \times (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) . \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$  — радиус-вектор в сопутствующей (конечной) системе координат,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные вектора осей. Слагаемое  $\dot{x}_1\vec{i} + \dot{y}_1\vec{j} + \dot{z}_1\vec{k}$  представляет из себя скорость движения точки за счет деформации границы, а слагаемое  $x_1\dot{\vec{i}} + y_1\dot{\vec{j}} + z_1\dot{\vec{k}}$  есть скорость, связанная с вращением ядра как целого,  $\vec{\omega}$  — угловая скорость вращения.

Для определения  $\vec{\omega}$  рассмотрим ориентацию ядра вихря в пространстве. Ее будем описывать с помощью углов Эйлера  $(\varphi, \theta, \psi)$ . Чтобы получить

текущую ориентацию, проводится серия из трех поворотов, как показано на рисунке 2.

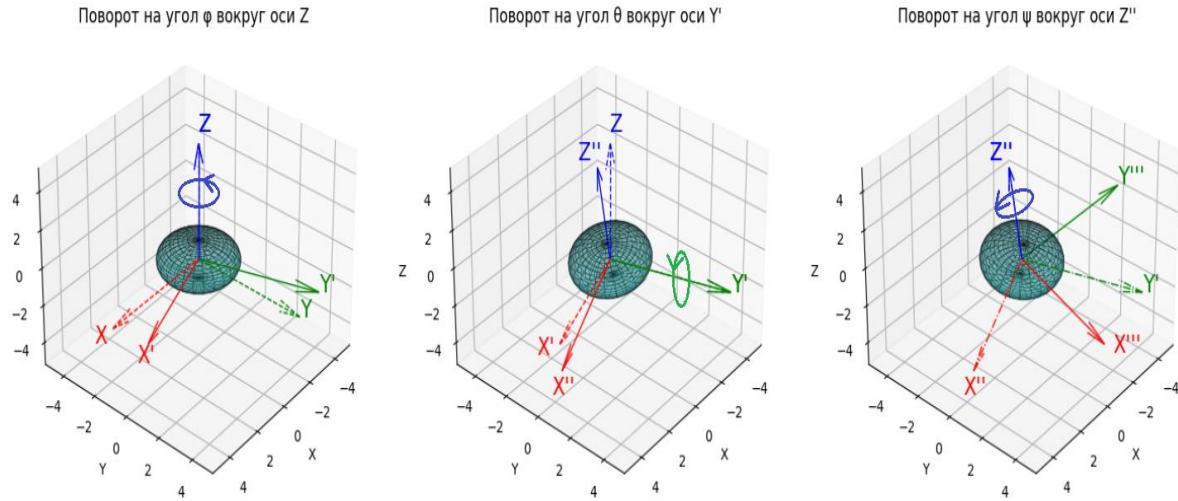


Рис.2. Последовательные повороты эллипсоида на углы Эйлера.

Для определения текущей ориентации ядра вихря относительно начальной системы координат ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) применяется последовательность из трёх вращений: 1) сначала выполняется поворот вокруг оси  $Z$  на угол  $\varphi$ , в результате которого оси  $X$  и  $Y$  преобразуются в  $X'$  и  $Y'$ ; 2) затем осуществляется вращение вокруг новой оси  $Y'$  на угол  $\theta$ , при этом оси  $X'$  и  $Z$  переходят в  $X''$  и  $Z''$ ; 3) наконец, выполняется поворот вокруг оси  $Z''$  на угол  $\psi$ , преобразующий  $X''$  и  $Y'$  в  $X'''$  и  $Y'''$ . Таким образом, геометрия вихревого ядра полностью задаётся тремя линейными размерами  $a, b, \tilde{c}$  и тремя углами ориентации  $\varphi, \theta, \psi$ , представляющими собой безразмерные параметры. Вихрь как целое перемещается со скоростью фонового течения, соответствующей скорости в центре вихря. Поскольку нас интересует исключительно деформация границы ядра, а не его поступательное движение, центр вихря удобно расположить в начале координат  $(0, 0, 0)$ , где скорость фонового потока полагается равной нулю. В этом случае вихрь остаётся неподвижным как целое, однако его форма может меняться: полуоси и углы ориентации способны эволюционировать со временем,

причем из-за малости вертикальной скорости движение частиц ядра квазиплоское, а само ядро остается «зажатым» между двумя плоскостями при любых изменениях его линейных размеров.

Вектор угловой скорости выражается через углы Эйлера следующим образом:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Скорость движения границы можно переписать в матричной форме. С учетом (20) и (21) получим:

$$\vec{v}_{border} = (\Lambda + Q)\vec{r}_1, \quad (22)$$

где  $\Lambda$  – матрица, описывающая твердотельное вращение, полученная из выражения  $\vec{\omega} \times \vec{r}_1 = \Lambda \vec{r}_1$ :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{z_1} & \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} & 0 & -\omega_{x_1} \\ -\omega_{y_1} & \omega_{x_1} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} - \dot{\phi} \cos \theta & \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta & 0 & \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi & -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi & 0 \end{pmatrix}, \quad (23) \end{aligned}$$

$Q$  – матрица, связанная с деформацией границы ядра (эллипсоида) вдоль главных направлений:

$$Q = \begin{pmatrix} \dot{a}/a & 0 & 0 \\ 0 & \dot{b}/b & 0 \\ 0 & 0 & \dot{c}/c \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Скорость движения жидкой частицы  $\vec{v}_{particle}$  определяется из квазигеострофического соотношения (3) и решения (10). Функция тока в (10) может быть представлена в виде  $\Psi = \frac{1}{2} \vec{r}_1^T A \vec{r}_1$ , где  $A$  – диагональная матрица, состоящая из старших коэффициентов выражения (10)

при  $\lambda = 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где  $\alpha_0 = \frac{1}{2} \sigma \int_0^\infty \frac{\phi(m) dm}{a^2 + m}$ ,  $\beta_0 = \frac{1}{2} \sigma \int_0^\infty \frac{\phi(m) dm}{b^2 + m}$ ,  $\gamma_0 = \frac{1}{2} \sigma \int_0^\infty \frac{\phi(m) dm}{c^2 + m}$ ,  $\phi(m) = \frac{abc}{\sqrt{(a^2 + m)(b^2 + m)(c^2 + m)}}$ .

Переход от сопутствующей системы координат к исходной осуществляется с помощью матрицы поворота на указанные выше углы Эйлера:  $\vec{r} = R \vec{r}_1$ , где  $\vec{r} = (x, y, z)^T$  – радиус-вектор в исходной системе координат,  $R$  – матрица поворота:

$$R =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\psi\cos\theta + \sin\psi\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\psi\cos\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Тогда с учетом того, что  $\vec{r}_1 = R^{-1} \vec{r}$ , функцию тока можем переписать в исходной системе координат:

$$\Psi = \frac{1}{2} (R^{-1})^T \vec{r}^T A R^{-1} \vec{r}. \quad (27)$$

Из (3) определяем выражение для вектора скорости частиц индуцированной вихрем в исходной системе координат:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = L(R^{-1})^T A R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L(R^{-1})^T A R^{-1} \vec{r}. \quad (28)$$

Здесь матрица  $L$  определяет геострофическое соотношение (3) для горизонтальных компонент скорости, приравнивая вертикальную компоненту к нулю ввиду его малости:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Учитывая, что  $\vec{u}_1 = R^{-1}\vec{u}$ , где  $\vec{u}_1$  – вектор скорости частицы индуцированной вихрем в сопутствующей системе координат, из (28) можно получить выражения для  $\vec{u}_1$ :

$$\vec{u}_1 = R^{-1}LRA\vec{r}_1. \quad (30)$$

Скорость фонового бароклинного течения с вертикальным сдвигом в исходной системе координат из выражения (18) перепишем в матричном виде  $\vec{u}_{shear} = (\Gamma\tilde{z}, 0, 0)^T = T\vec{r}$ , где матрица  $T$  определяется как

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Скорость фонового потока в сопутствующей системе координат равна

$$\vec{u}_{shear_1} = R^{-1}\vec{u}_{shear} = R^{-1}T\vec{r} = R^{-1}TR\vec{r}_1. \quad (32)$$

Скорость движения жидкой частицы  $\vec{v}_{particle}$  определяется суммой скорости внешнего потока и скорости, индуцированной вихревым течением:

$$\vec{v}_{particle} = \vec{u}_{shear_1} + \vec{u}_1 = (R^{-1}TR + R^{-1}LRA)\vec{r}_1. \quad (33)$$

Наконец, запишем градиент функции границы ядра  $\nabla G$  в (19) в матричном виде:

$$\nabla G = \left( \frac{2x_1}{a^2}, \frac{2y_1}{b^2}, \frac{2z_1}{c^2} \right)^T = 2\vec{r}_1^T J, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Теперь можем записать кинематическое условие в полностью матричном виде

$$\vec{r}_1^T J(R^{-1}TR + R^{-1}LRA - \Lambda - Q)\vec{r}_1 = 0. \quad (35)$$

Это условие равносильно условию антисимметричности матрицы  $J(R^{-1}TR + R^{-1}LRA - \Lambda - Q)$  [Horn, Johnson, 2012]. Пусть

$$M = J(R^{-1}TR + R^{-1}LRA - \Lambda - Q) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Подставляя (23), (24), (25), (26), (29), (31) и (34) в (36), получаем элементы матрицы  $M$ :

$$m_{11} = \frac{\Gamma a(\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) \sin\theta \cos\psi - \dot{a}}{a^3},$$

$$m_{12}$$

$$= \frac{-\beta_0 \cos\theta + \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta - \Gamma \cdot (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) \sin\psi \sin\theta}{a^2},$$

$$m_{13}$$

$$= \frac{\gamma_0 \sin\psi \sin\theta - \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi - \dot{\theta} \cos\psi - \Gamma \cdot (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) \cos\theta}{a^2},$$

$$m_{21}$$

$$= \frac{\alpha_0 \cdot \cos\theta - \dot{\varphi} \cos\theta - \dot{\psi} + \Gamma \cdot (\sin\varphi \cos\psi + \sin\psi \cos\varphi \cos\theta) \sin\theta \cos\psi}{b^2},$$

$$\begin{aligned}
m_{22} &= \frac{-b\Gamma \cdot (\sin\varphi \cos\psi + \sin\psi \cos\varphi \cos\theta) \sin\psi \sin\theta - \dot{b}}{b^3}, \\
m_{23} &= \frac{\gamma_0 \sin\theta \cos\psi - \dot{\varphi} \cos\psi \sin\theta + \dot{\theta} \sin\psi - \Gamma \cdot (\sin\varphi \cos\psi + \sin\psi \cos\varphi \cos\theta) \cos\theta}{b^2}, \\
m_{31} &= \frac{-\alpha_0 \sin\psi \sin\theta + \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi - \Gamma \cdot \sin^2\theta \cos\varphi \cos\psi}{c^2}, \\
m_{32} &= \frac{-\beta_0 \sin\theta \cos\psi + \dot{\varphi} \cos\psi \sin\theta - \dot{\theta} \sin\psi + \Gamma \cdot \sin\psi \sin^2\theta \cos\varphi}{c^2}, \\
m_{33} &= \frac{\frac{1}{4}\Gamma \cdot c \cdot (-\sin(\varphi - 2\theta) + \sin(\psi + 2\theta)) - \dot{c}}{c^3}. \tag{37}
\end{aligned}$$

Для сокращения обозначим

$$\begin{aligned}
f_1 &= (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) \sin\psi \sin\theta \\
f_2 &= (\sin\varphi \cos\psi + \sin\psi \cos\varphi \cos\theta) \sin\theta \cos\psi \\
f_3 &= (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) \cos\theta \\
f_4 &= \sin^2\theta \cos\varphi \cos\psi \\
f_5 &= (\sin\varphi \cos\psi + \sin\psi \cos\varphi \cos\theta) \cos\theta \\
f_6 &= \sin\psi \sin^2\theta \cos\varphi. \tag{38}
\end{aligned}$$

Условие антисимметричности матрицы запишем через его элементы:

$$\begin{aligned}
m_{11} &= m_{22} = m_{33} = 0, \\
m_{21} + m_{12} &= m_{13} + m_{31} = m_{23} + m_{32} = 0. \tag{39}
\end{aligned}$$

Запишем отдельно каждое условие для каждого элемента  $m_{ij}$ :

1)  $m_{11} = 0$ :

$$\dot{a} = \Gamma a (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) \sin\theta \cos\psi; \tag{40}$$

2)  $m_{22} = 0$ :

$$\dot{b} = -\Gamma b(\sin\varphi \cos\psi + \sin\psi \cos\varphi \cos\theta) \sin\psi \sin\theta ; \quad (41)$$

3)  $m_{33} = 0$ :

$$\dot{c} = \frac{1}{4}\Gamma c(-\sin(\varphi - 2\theta) + \sin(\psi + 2\theta)) ; \quad (42)$$

4)  $m_{21} + m_{31} = 0$ :

$$\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} = \frac{\beta_0 b^2 - \alpha_0 \cdot a^2}{b^2 - a^2} \cos\theta + \Gamma \cdot \frac{f_1 b^2 - f_2 a^2}{b^2 - a^2} ; \quad (43)$$

5)  $m_{13} + m_{31} = 0$

$$\dot{\phi} \sin\psi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\psi = \frac{\gamma_0 c^2 - \alpha_0 a^2}{c^2 - a^2} \sin\psi \sin\theta - \Gamma \cdot \frac{f_3 c^2 + f_4 a^2}{c^2 - a^2} ; \quad (44)$$

6)  $m_{23} + m_{32} = 0$

$$-\dot{\phi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi = \frac{\beta_0 b^2 - \gamma_0 c^2}{c^2 - b^2} \sin\theta \cos\psi + \Gamma \cdot \frac{f_5 c^2 - f_6 b^2}{c^2 - b^2} . \quad (45)$$

Уравнения (40)-(45) образуют систему из 6 дифференциальных уравнений. Однако, можно уменьшить количество степеней свободы и получить более удобную систему. Для начала введем следующие обозначения:

$$g_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{\beta_0 b^2 - \gamma_0 c^2}{b^2 - c^2}, g_2 = \frac{1}{\sigma} \frac{\alpha_0 a^2 - \gamma_0 c^2}{a^2 - c^2}, g_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\alpha_0 a^2 - \beta_0 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (46)$$

Для исследования поведения вихря рассмотрим два безразмерных геометрических параметра ядра:

1) параметр вытянутости ядра – отношение квазигоризонтальных полуосей:

$$\varepsilon = \frac{a}{b} ; \quad (47)$$

2) параметр вертикальной сплюснутости – отношение вертикальной полуоси к эффективному радиусу горизонтального сечения:

$$K = \frac{c}{\sqrt{ab}} . \quad (48)$$

Отметим, что параметры  $\varepsilon$  и  $K$  являются ключевыми в настоящей работе. Эти параметры будут использоваться в ходе всего диссертационного исследования.

Объем ядра сохраняется – это интеграл движения:  $V = \frac{4}{3}\pi abc = const$ , за

счет чего имеем следующие важные соотношения:

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b}, \quad \frac{\dot{K}}{K} = \frac{3}{2} \frac{\dot{c}}{c}. \quad (49)$$

Сохранение объема дает нам возможность сократить количество уравнений до 5. Учитывая (49) и проделав соответствующие линейные преобразования в (40)-(45), получим

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \varepsilon \cdot \tau \sin\theta [\sin 2\psi \sin\varphi - \cos\theta \cos 2\psi \cos\varphi] \\ \dot{K} &= \frac{3}{4} \tau \sin 2\theta \cos\varphi K \\ \dot{\theta} &= \frac{(g_2 - g_1)}{2} \sin\theta \sin 2\psi + \tau \left( \frac{f_3 K^2 + f_4 \varepsilon}{\varepsilon - K^2} \cos\psi + \frac{f_5 K^2 - f_6 \varepsilon^{-1}}{K^2 - \varepsilon^{-1}} \sin\psi \right) \\ \dot{\psi} &= g_1 \sin^2\psi + g_2 \cos^2\psi + \frac{\tau}{\sin\theta} \left[ \frac{f_3 K^2 + f_4 \varepsilon}{\varepsilon - K^2} \sin\psi - \frac{f_5 K^2 - f_6 \varepsilon^{-1}}{K^2 - \varepsilon^{-1}} \cos\psi \right] \\ \dot{\psi} &= \cos\theta \left[ g_3 - g_1 \sin^2\psi - g_2 \cos^2\psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau}{\sin\theta} \left[ \frac{f_3 K^2 + f_4 \varepsilon}{\varepsilon - K^2} \sin\psi - \frac{f_5 K^2 - f_6 \varepsilon^{-1}}{K^2 - \varepsilon^{-1}} \cos\psi \right] \right] \\ &\quad + \tau \frac{f_2 \varepsilon + f_1 \varepsilon^{-1}}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}}, \quad (50) \end{aligned}$$

где  $\tau = \Gamma/\sigma$  – безрамерный параметр вертикального сдвига внешнего течения. В (40)-(45) производные рассчитываются по физическому времени  $t$ :  $\dot{f} = \frac{df}{dt}$ . После деления обеих частей на завихренность ядра  $\sigma$  система

приводится к безразмерному виду, где ключевым параметром становится относительный сдвиг  $\tau$ . При этом производную удобно выразить через безразмерное время  $\sigma t$ :  $\dot{f} = \frac{df}{\sigma dt}$ . Именно в безразмерных параметрах записана система (48). Далее будем исследовать исключительно безразмерные величины.

Функции  $g_1, g_2, g_3$ , определяемые (46), можно записать в терминах безразмерных параметров ядра:

$$\begin{aligned} g_1(\varepsilon, K) &= \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{(\varepsilon + k)(\varepsilon^{-1} + k)^3(K^2 + k)^3}} \\ g_2(\varepsilon, K) &= \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{(\varepsilon + k)^3(\varepsilon^{-1} + k)(K^2 + k)^3}} \\ g_3(\varepsilon, K) &= \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{(\varepsilon + k)^3(\varepsilon^{-1} + k)^3(K^2 + k)}} , \end{aligned} \quad (51)$$

где  $k$  переменная интегрирования.

Мы показали, как из закона сохранения потенциальной завихренности (2) и (5) с учетом кинематического условия (19) получается система (50), описывающая эволюцию вихря в горизонтальном потоке с вертикальным сдвигом.

Итак, получена система из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений (50), полностью описывающая эволюцию эллипсоидального вихря во внешнем потоке с вертикальным сдвигом. По сути (50) это система уравнений движения вихря относительно его безразмерных геометрических параметров. Параметр  $\tau$  является внешним независимым параметром, который показывает мощность течения относительно ядра. Отметим, что система, аналогичная (50), была получена в работе [Meacham et al, 1994]. В работе [Жмур, 2011] получена схожая система в углах Кардана.

В реальных условиях в океане горизонтальные размеры вихря больше по сравнению с вертикальным размером, за счет чего ядро вихря находится в «почти» горизонтальном положении: полуоси  $a$  и  $b$  «почти» горизонтальны, полуось  $c$  «почти» вертикальна. За наклон ядра вихря относительно горизонтального положения отвечает угол  $\theta$  – угол нутации. Именно этот угол играет наибольшую роль в эволюции вихря. Конечно, угол прецесии  $\varphi$  и угол собственного вращения  $\psi$  также влияют на поведение ядра вихря, однако их вклад мал по сравнению с углом нутации.

## 1.2 Начальные и внешние условия задачи

Рассмотрим теперь, какие начальные данные должны быть выбраны для решения системы ОДУ (48). Система (50) записана в безразмерном виде, в который входит один внешний параметр  $\tau$  – параметр сдвига. Этот параметр описывает внешнее течение, которое очевидно сильно влияет на динамику вихря. Некоторые свойства можно увидеть заранее. Так например, при слабых сдвигах геометрия вихря будет меняться незначительно, а при больших значениях  $\tau$  произойдет заметная деформация ядра. Это связано с тем, что заданное (18) течение со сильным сдвигом начнет «растягивать» ядро вихря за счет линейного распределения скорости по вертикали. Вихри менее устойчивы к вытягиванию при больших значениях  $\tau$ . Напомним, что параметр сдвига есть отношение сдвига течения к потенциальной завихренности ядра вихря  $\tau = \Gamma/\sigma$ , что является относительной характеристикой течения. Говоря про мощное течение, стоит учесть его относительно мощности ядра вихря. Параметр  $\tau$  может быть и отрицательным, если, например,  $\sigma < 0$ , при котором частицы ядра будут вращаться в обратную сторону.

Остальные параметры задачи являются геометрическими: параметр вытянутости по горизонтали  $\varepsilon$ , параметр вертикальной сплюснутости  $K$  и

три угла ориентации  $\varphi, \theta, \psi$ . В океане в реальных условиях параметр сплюснутости  $K$  едва доходит до единицы. Вообще говоря, параметр  $K$  увеличивается с уменьшением радиуса деформации Россби. Так например, максимальные значения  $K$  наблюдается в вихрях Северного Ледовитого океана ( $K \sim 1$ ). Параметр вытягивания  $\varepsilon$ , который показывает степень вытянутости вихря по горизонтали, может принимать довольно широкий диапазон значений. Например, если  $\varepsilon = 1$ , то это круглый в плане вихрь. Такие вихри могут существовать в момент своего рождения, но эволюционируя во внешнем потоке, вихрь может вытянуться, что приведет к росту параметра  $\varepsilon$ . Как уже отмечалось, в большинстве случаев вихрь слабо наклонен относительно горизонтального направления, что означает малость угла  $\theta$ . Несмотря на это, мы рассмотрим и большие начальные значения угла нутации.

В конечном итоге, для полного анализа поведения вихря по модели (50) были выбраны следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma t = 0) &\in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}, & K(\sigma t = 0) &\in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}, \\ \varphi(\sigma t = 0) &= 0, & \psi(\sigma t = 0) &= 0, \\ \theta(\sigma t = 0) &\in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь  $\sigma t$  – безразмерное время, по которому выражается производная безразмерных параметров. В качестве внешнего параметра задается безразмерный сдвиг  $\tau$  от -0.5 до 0.5 с шагом 0.01. Отметим, что в ходе численного решения (50) параметр  $\tau$  остается постоянным в процессе эволюции конкретного вихря с конкретными начальными геометрическими параметрами.

Далее необходимо указать временной интервал, на котором будет решаться система (50). Как уже отмечалось, вместо физического времени

рассматривается безразмерное время  $\sigma t$  ( $[\sigma] = \text{с}^{-1}$ ,  $[t] = \text{с}$ ). Временной интервал задается как  $\sigma t \in [0, 10000]$ , что в зависимости от мощности вихря варьируется от нескольких до десятков лет. При таких условиях разумно полагать, что для вихрей океана  $\sigma t = 10000$  считается бесконечностью. Для некоторых расчетов был выбран более широкий временной интервал:  $\sigma t \in [0, 100000]$ . Задача является многомерной – степеней свободы 4. Количество начальных условий определяется стандартным перебором всевозможных значений в (52) – суммарно  $5 \cdot 5 \cdot 7 = 175$  начальных условий. С учетом выбора внешнего параметра сдвига получаем 17675 различных начальных условий.

### 1.3 Численная модель задачи

Система уравнений (50) не имеет аналитического представления, которое позволило бы её существенно упростить. В связи с этим единственным способом её изучения остаётся численное моделирование. Для решения системы была разработана программа в среде MATLAB, использующая встроенную функцию `ode23`. Данная функция реализует метод Рунге-Кутта 2-го и 3-го порядков точности с автоматическим выбором шага интегрирования. Алгоритм `ode23` вычисляет два приближённых решения (второго и третьего порядков) на каждом шаге, а разница между ними служит оценкой локальной погрешности. MATLAB сравнивает эту погрешность с заданными допустимыми пределами — относительной (`RelTol`) и абсолютной (`AbsTol`) ошибками. Если погрешность превышает допустимый уровень, шаг уменьшается для повышения точности. Если же ошибка оказывается значительно меньше допустимой, шаг увеличивается для ускорения вычислений. В данном исследовании относительная погрешность была установлена на уровне  $\text{RelTol} = 10^{-6}$ . Для численного решения системы (50) требуется задать правую часть (14), а также

начальные условия вектора состояния:  $\vec{f}(\sigma t = 0) = (\varepsilon(0), K(0), \varphi(\sigma t = 0), \theta(0), \psi(0))^T$ . Поскольку задача является многопараметрической и не допускает аналитического упрощения, исследование эволюции вихря в потоке потребовало множественных численных расчётов с варьированием начальных условий и параметров системы. После проведения вычислений выполнялся анализ результатов, часть которого была автоматизирована. При конкретных начальных условиях численное решение системы (50) представляет собой эволюцию вектора состояния  $\vec{f}(\sigma t)$ .

#### **1.4 Эволюция параметров ядра вихря в потоке с вертикальным сдвигом. Время жизни вихря**

Для нас наиболее важным при исследовании поведения вихря в потоке с вертикальным сдвигом является вопрос о том, будет ли ядро вихря неограниченно вытягиваться в каком-то из направлений или останется локализованным в своих линейных размерах. В работах [Жмур и др., 2023а, б] был дан ответ на этот вопрос для баротропного внешнего потока. Оказалось, что в баротропном потоке вихрь может находиться в трех режимах поведения: 1) режим вращения ядра; 2) режим колебаний; 3) режим неограниченного вытягивания. Несмотря на то, что в первых двух режимах размеры ядра вихря испытывают колебания, само ядро остается локализованным. В третьем режиме вихрь вытягивается в горизонтальном направлении преобразовываясь в вихревую нить: одна из вертикальных полуосей уменьшается, а другая неограниченно растет. В наших обозначениях это означает монотонный рост параметра  $\varepsilon$ . В баротропном потоке второй геометрический параметр  $K$  для конкретного вихря остается постоянным, так же как и углы ориентации (в данных работах полагались нулевыми).

В бароклинном потоке поведение вихря сильно отличается. Движение ядра намного сложнее, чем в баротропном потоке. Во-первых, ни один из геометрических параметров не остается постоянным: меняются углы ориентации и линейные размеры ядра (три полуоси). Наиболее наглядным способом анализа эволюции вихревого ядра является изучение его проекции на горизонтальную плоскость. При таком подходе можно выделить два принципиально разных варианта развития:

1. выживание вихря – проекция ядра сохраняет ограниченные размеры в течение всего времени моделирования. Это свидетельствует об устойчивости вихря к воздействию фонового течения.
2. Вытягивания вихря – характеризуется неограниченным растяжением проекции вихря в горизонтальном направлении, что указывает на разрушение вихревого образования под действием внешнего течения.

Предварительные расчеты показали, что существует еще одно промежуточное состояние, про которое поговорим чуть позже.

Рассмотрим решение системы (50) при следующих начальных условиях:

$$\varepsilon(0) = 1, \quad K(0) = 0.25, \quad \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0. \quad (53)$$

Вихрь с такими параметрами представляет из себя вихрь с горизонтально ориентированным круглым в плане ядром, при котором ось  $z_1$  вертикальна.

На рисунке 3 показана эволюция параметров ядра.

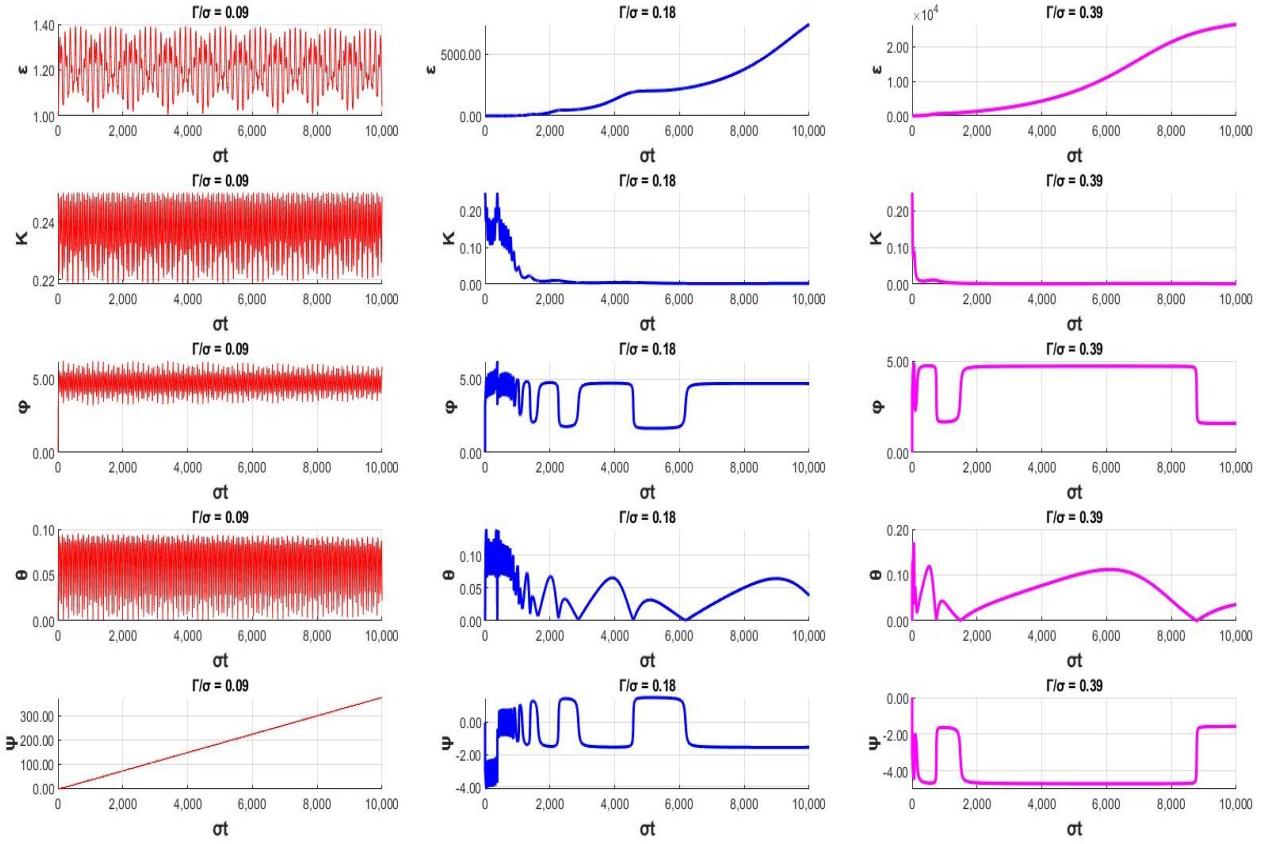


Рис.3. Эволюция геометрических параметров вихря при начальных условиях  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0, \theta(0) = 0$  при разных значениях внешнего параметра  $\tau = \Gamma/\sigma$ .

Как видим, даже при одинаковых начальных условиях эволюция ядра сильно меняется с изменением параметра течения. Наличие того или иного режима будет зависеть главным образом от двух геометрических параметров  $\varepsilon$  и  $K$ . Из рисунка 3 видим, что при сдвиге  $\Gamma/\sigma = 0.09$  оба этих параметра бесконечно долгое время осциллируют относительно начального значения. По линейным размерам ядро вихря остается локализованным. Колебания параметров  $\varepsilon$  и  $K$  обусловлены следующими причинами. В системе (50) функции  $g_1, g_2, g_3$  физически представляют собой угловые скорости (частоты) вращения ядра вокруг трёх главных осей в предположении, что эти оси вертикальны в отсутствие внешнего потока. При этом  $g_1$  является основной (несущей) частотой, а остальные —

вспомогательными. В результате суперпозиции этих частот, вид которой зависит от начальных условий системы (50), возникают биения. Углы ориентации также меняются. Стоит отметить, что углы Эйлера выбраны специальным образом так, чтобы избегать вырожденного случая, когда две разные оси совпадают. Поэтому необходимо исследовать углы не отдельно друг от друга, а в комплексе. Угол нутации  $\theta$  меняется слабо, в основном колебляясь относительно близкого к нулю значения. Можно сказать, что ядро «почти» ориентировано вдоль горизонтального направления. Угол  $\varphi$  также колеблется относительно некоторого значения, а угол  $\psi$  монотонно растет, что означает вращение ядра относительно вертикальной оси. При сдвиге  $\Gamma/\sigma = 0.18$  в начальный момент времени первые два параметра эволюционируют подобно предыдущему случаю:  $\varepsilon$  и  $K$  колеблются относительно некоторого конечного значения. Далее, начиная с некоторого момента времени,  $\varepsilon$  неограниченно растет, а  $K$  убывает стремясь к нулю. Такое поведение характеризуется вытягиванием вихря в нить. Углы же ведут себя сложным образом, в начале находясь в колебательном состоянии, на стадии вытягивания вихрь ориентируется вдоль или «почти» вдоль течения. В последнем случае на рисунке 3 при сдвиге  $\Gamma/\sigma = 0.18$  с самого начала наблюдается монотонный рост параметра  $\varepsilon$  и спад параметра  $K$ .

Назовем временем жизни вихря время, через которое вихрь начинает вытягиваться внешним течением. Анализируя поведение вихря при трех различных внешних условиях (рис.3), можно увидеть, что время жизни в первом случае (левые графики) стремится к бесконечности, во втором случае (средние графики) принимает конечное значение, а в последнем случае (правые графики) стремится к нулю. На рисунке 4 показано время жизни вихри на фоне эволюции параметра  $K$ .

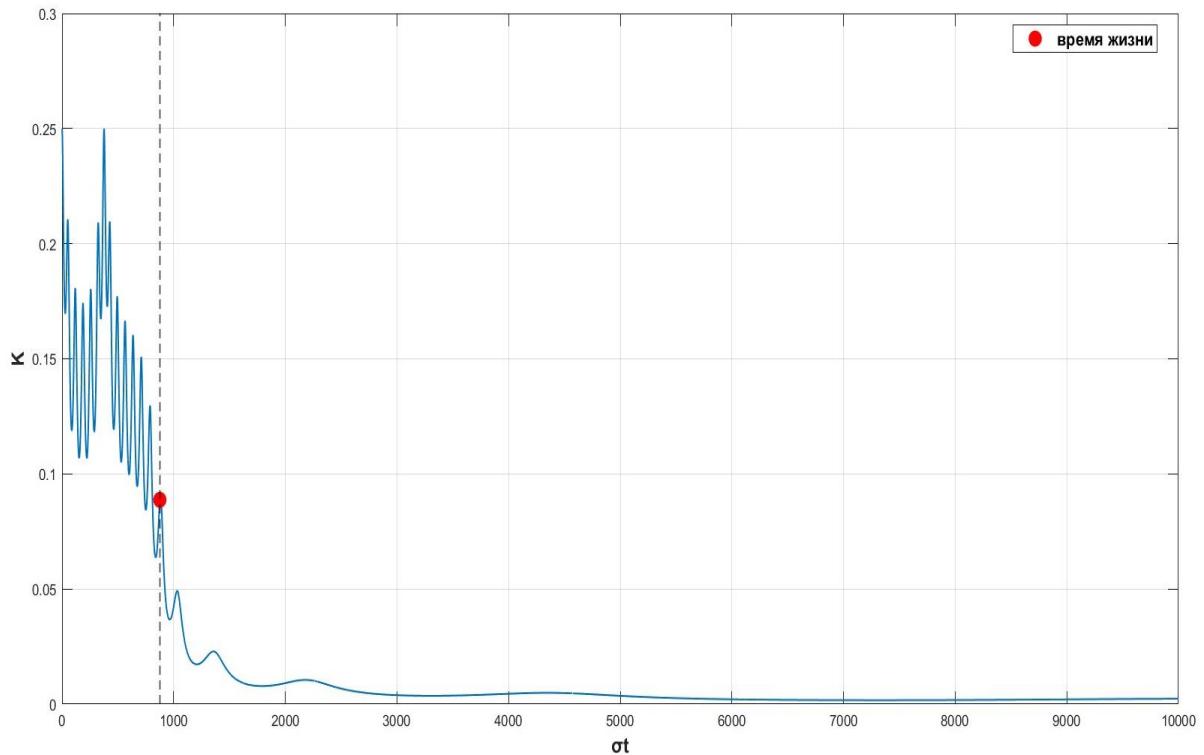


Рис.4. Зависимость параметра сплюснутости от безразмерного времени в зоне конечного времени жизни при начальных условиях  $\varepsilon(0) = 1$ ,  $K(0) = 0.25$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\psi(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ . Красным отмечено время жизни вихря.

Назовем «критическим» сдвигом минимальный сдвиг (по модулю), при котором время жизни вихря от конечного значения переходит в стремящийся к бесконечности значение. Ниже представлена зависимость безразмерного времени жизни вихря от параметра сдвига при начальных условиях (53).

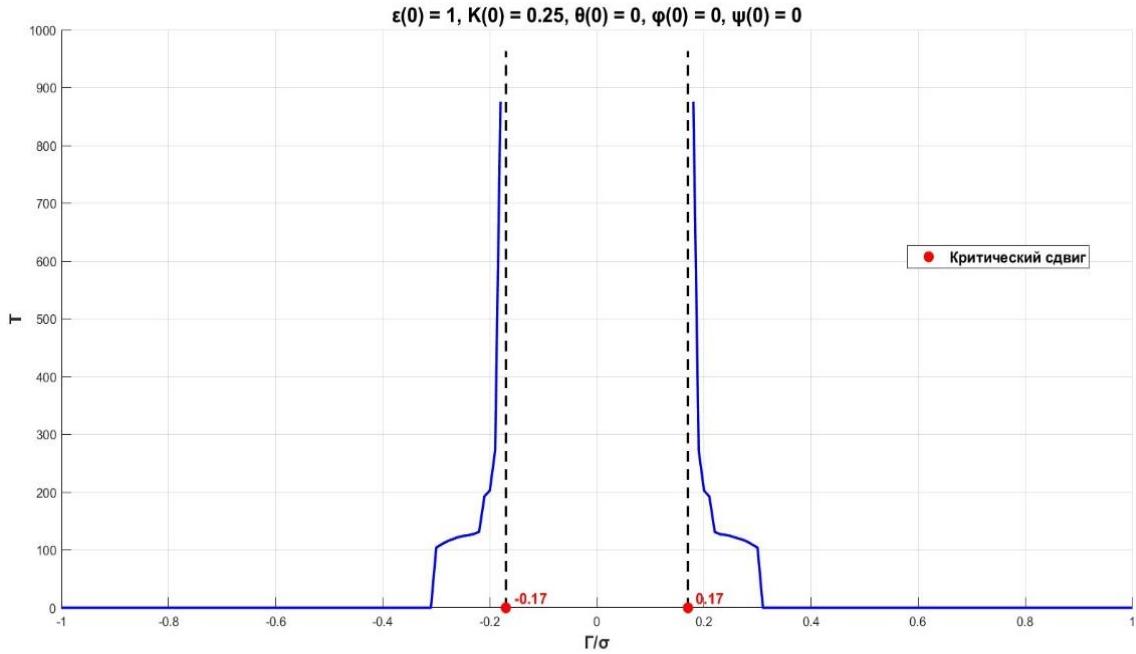


Рис.5. Зависимость времени жизни вихря  $T = \sigma t$  от безразмерного параметра сдвига при начальных условиях  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ . Пустая зона соответствует бесконечной времени жизни. Красные точки соответствуют значениям критического сдвига.

Как видим, при начальных условиях (53) время жизни симметрично относительно знака параметра сдвига. Такой результат вполне логичен в силу того, что при нулевом угле нутации ядро вихря поддается симметричному воздействию от внешнего потока (так как сдвиг скорости вертикальный).

При условии (53) критический сдвиг принимает значение  $|\tau| = |\Gamma/\sigma| = 0.17$ . Стоит отметить, что критический сдвиг будет сильно меняться при переходе через различные начальные условия в (50). При ненулевых углах  $\theta(\sigma t = 0)$  критический сдвиг не будет симметричен относительно нуля, как это выявлено в рисунке 5. Зависимость модуля критического сдвига для вихря с горизонтально ориентированным круглым в плане ядром от начального параметра сплюстнутости представлена на рисунке 6.

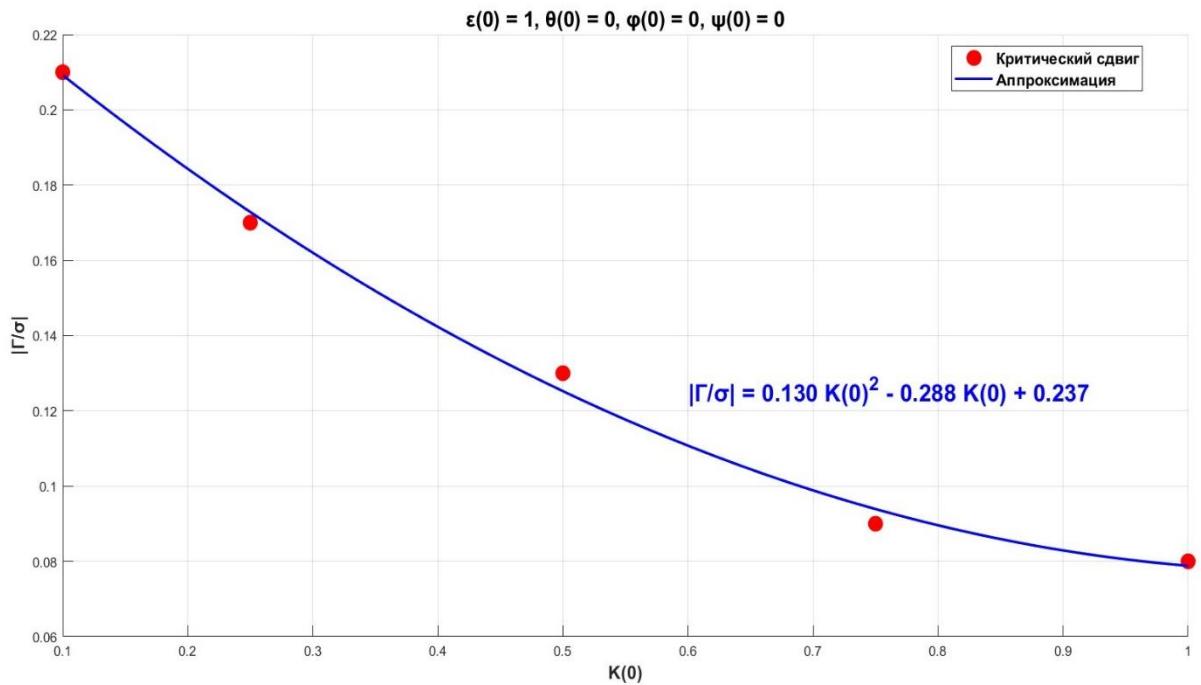


Рис.6. Зависимость модуля критического сдвига  $|\tau| = |\Gamma/\sigma|$  от начального параметра сплюснутости  $K(0)$  при начальных значениях  $\varepsilon(0) = 1, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ . Красным отмечены результаты численного моделирования, синим – кривая аппроксимация.

После аппроксимации получаем квадратичную зависимость

$$|\tau|_{\varepsilon(0)=1} = 0.13 \cdot K(0)^2 - 0.288 \cdot K(0) + 0.237 . \quad (54)$$

Для других начальных значениях зависимость будет отличаться от (54).

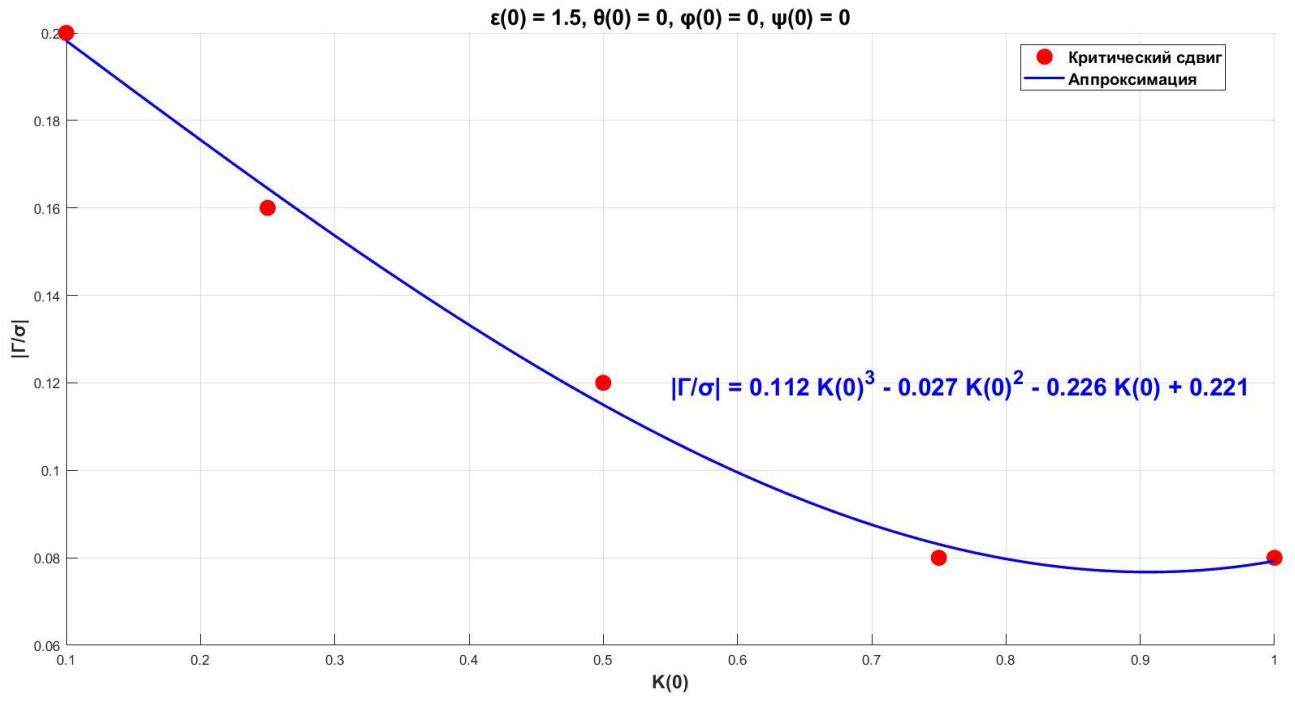


Рис.7. Зависимость модуля критического сдвига  $|\tau| = |\Gamma/\sigma|$  от начального параметра сплюснутости  $K(0)$  при начальных значениях  $\varepsilon(0) = 1.5$ ,  $\theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ . Красным отмечены результаты численного моделирования, синим – кривая аппроксимации.

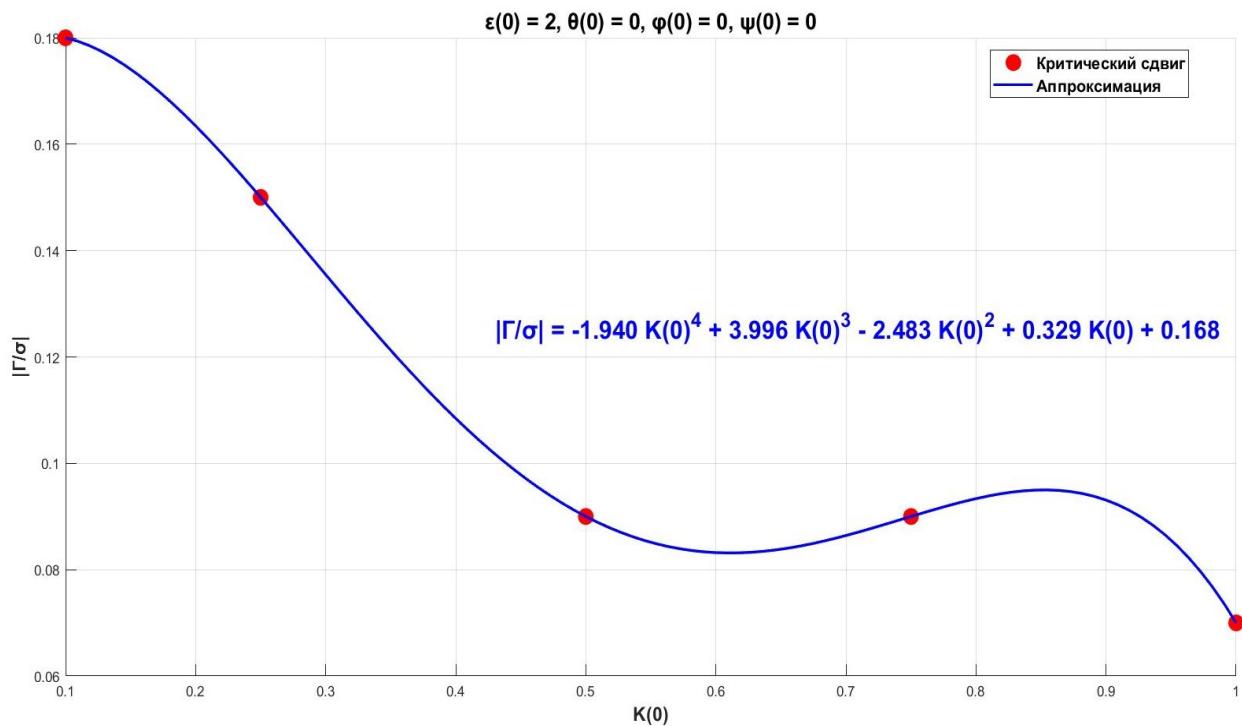


Рис.8. Зависимость модуля критического сдвига  $|\tau| = |\Gamma/\sigma|$  от начального параметра сплюснутости  $K(0)$  при начальных значениях  $\varepsilon(0) = 2, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ . Красным отмечены результаты численного моделирования, синим – кривая аппроксимации.

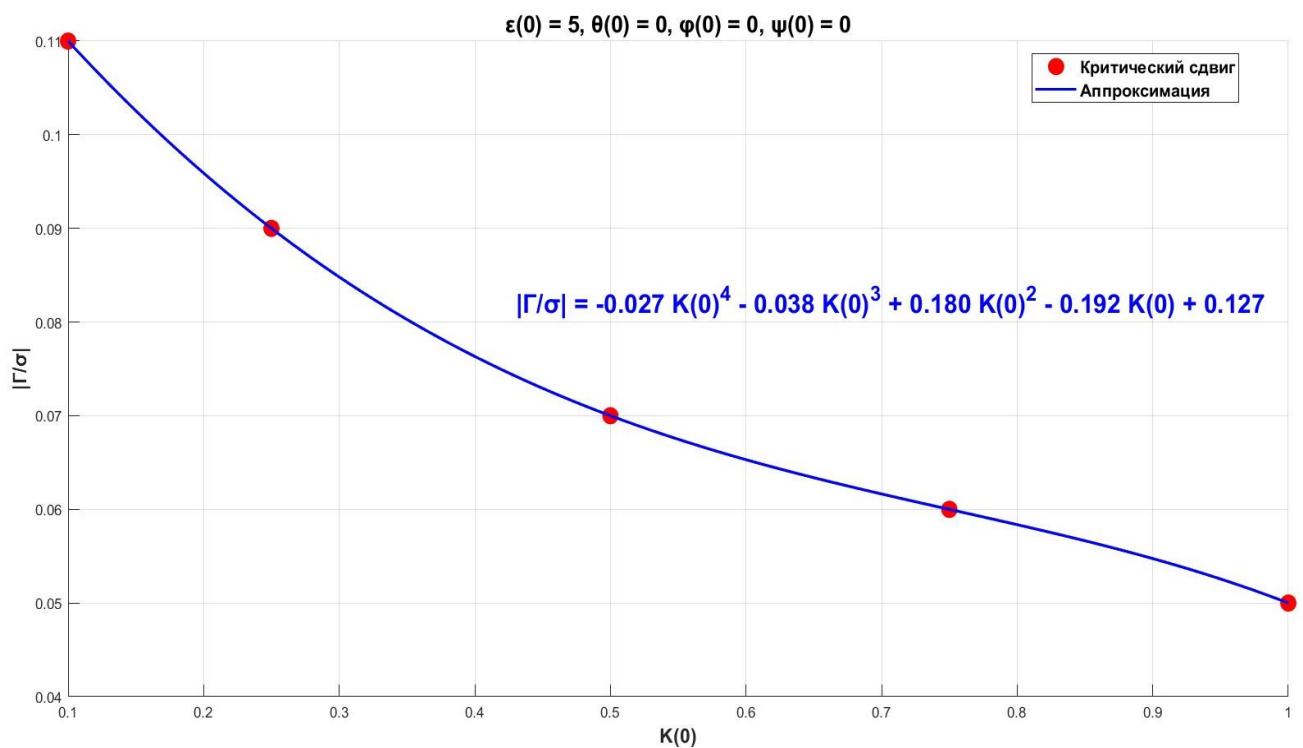


Рис.9. Зависимость модуля критического сдвига  $|\tau| = |\Gamma/\sigma|$  от начального параметра сплюснутости  $K(0)$  при начальных значениях  $\varepsilon(0) = 5, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ . Красным отмечены результаты численного моделирования, синим – кривая аппроксимации.

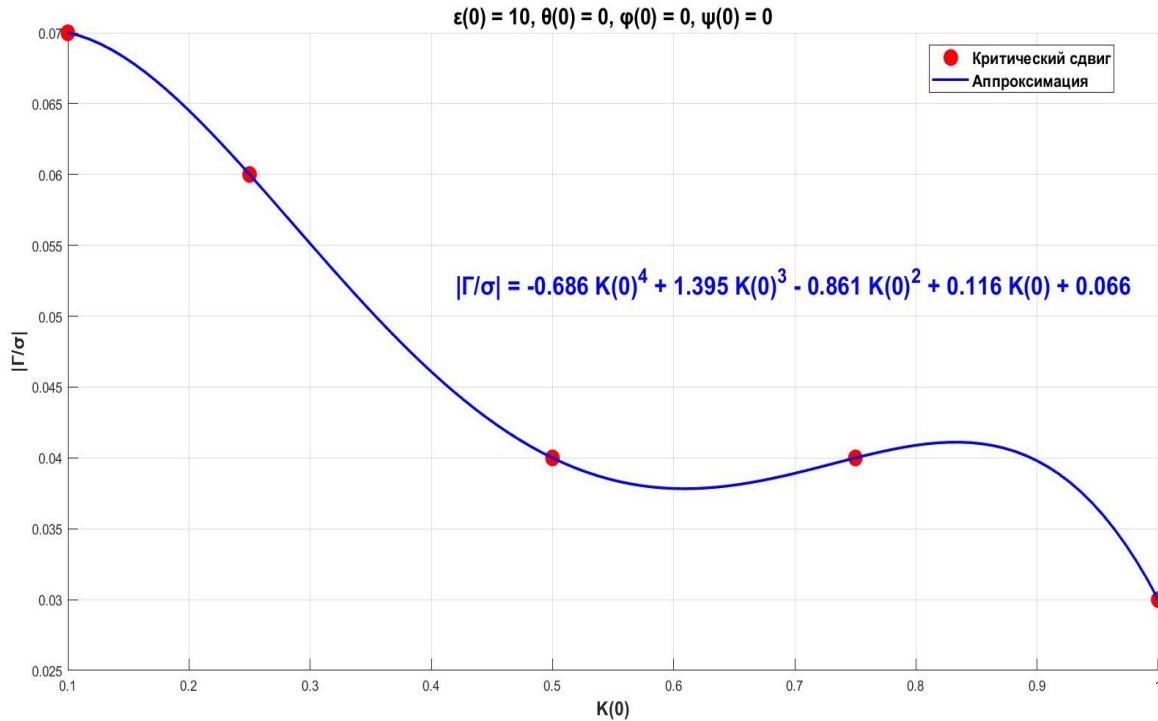


Рис.10. Зависимость модуля критического сдвига  $|\tau| = |\Gamma/\sigma|$  от начального параметра сплюснутости  $K(0)$  при начальных значениях  $\varepsilon(0) = 10, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ . Красным отмечены результаты численного моделирования, синим – кривая аппроксимации.

Как видим, зависимость критического сдвига от начального параметра сплюснутости меняется при варьировании начального параметра вытягивания  $\varepsilon(0)$ :

$$|\tau|_{\varepsilon(0)=1.5} = 0.112 \cdot K(0)^3 - 0.027 \cdot K(0)^2 - 0.226 \cdot K(0) + 0.221,$$

$$|\tau|_{\varepsilon(0)=2} = -1.940 \cdot K(0)^4 + 3.996 \cdot K(0)^3 - 2.483 \cdot K(0)^2 - 0.329 \cdot K(0) + 0.168,$$

$$|\tau|_{\varepsilon(0)=5} = -0.027 \cdot K(0)^4 - 0.038 \cdot K(0)^3 + 0.180 \cdot K(0)^2 - 0.192 \cdot K(0) \\ + 0.127,$$

$$|\tau|_{\varepsilon(0)=10} = -0.686 \cdot K(0)^4 + 1.395 \cdot K(0)^3 - 0.861 \cdot K(0)^2 + 0.116 \cdot K(0) \\ + 0.066. \quad (55)$$

Зависимости (54) и (55) являются чисто математическими и особого физического смысла не содержат. Стоит обратить внимание на то, что при горизонтально ориентированном ядре вихря ( $\theta(0) = 0$ ) критический сдвиг уменьшается с ростом начального параметра сплюснутости  $K(0)$ . Это означает, что более устойчивы к вытягиванию тонкие вихри с меньшим параметром  $K(0)$ . Для других начальных условий, когда ядро отклонено от горизонтального положения, такой вывод может быть несправедлив, но про это поговорим в следующем разделе при исследовании режимов поведения вихря.

Теперь рассмотрим, как меняется поведение параметров ядра  $\varepsilon$  и  $K$  при переходе через критический сдвиг. Ниже показано, как меняются эти параметры при сдвигах по модулю меньше и больше критического значения.

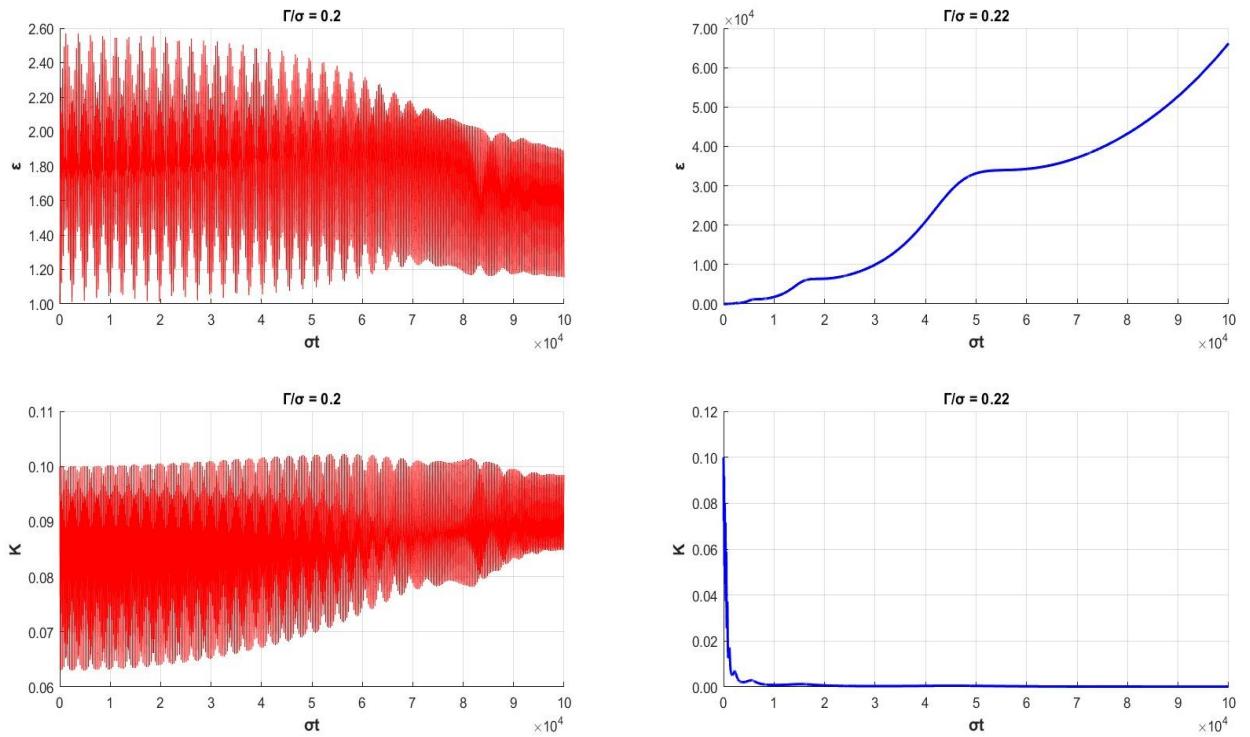


Рис.11. Зависимость геометрических параметров вихря  $\varepsilon$  и  $K$  от безразмерного времени  $\sigma t$  при сдвиге, меньшем критического (красный) и сдвиге, большем критического (синий) при начальных условий  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.1, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ .

Как видим, поведение ядра сильно меняется при переходе через критическое значение сдвига. Если вихрь находится в течении со сдвигом меньшим критического значения для данного ядра, время жизни вихря стремится к бесконечности, при этом параметры  $\varepsilon$  и  $K$  осциллируют относительно некоторого значения (в основном начального) бесконечно долгое время. Если же сдвиг течения больше критического, через конечное время ядро вихря начинает вытягиваться: параметр  $\varepsilon$  неограниченно растет, а параметр  $K$  квазимонотонно убывает до нуля.

## 1.5 Режимы поведения эллипсоидального вихря в потоке с вертикальным сдвигом

Мы установили, что в зависимости от начальных и внешних условий время жизни вихря может быть бесконечным, конечным или нулевым. В ходе анализа различных решений системы (50) было установлено, что эволюция ядра происходит именно по этим трем сценариям. Каждый из этих сценариев с определенным пределом времени жизни представляет собой конкретный режим поведения вихря в потоке с вертикальным сдвигом. Классифицируем режимы по пределу времени жизни вихря:

1. режим выживания – время жизни вихря стремится к бесконечности;
2. режим конечного времени жизни – время жизни вихря принимает конечное ненулевое значение;
3. режим вытягивания (уничтожения) – время жизни вихря стремится к нулю.

Будем исследовать режимы на плоскости  $(K(0), \tau)$  для различных начальных значений  $\varepsilon(0)$  и  $\theta(0)$ . Для определения режимов поведения был разработан собственный алгоритм на языке MATLAB, который на входе принимал массив решений (48) при разных начальных и внешних значениях и строил границы перехода между режимами. Были поставлены следующие критерии:

1. если параметры  $\varepsilon$  и  $K$  за все время моделирования осциллируют около некоторого конечного значения, то вихрь с такими начальными данными на плоскости  $(K(0), \tau)$  попадает в режим выживания;
2. если к концу моделирования параметр  $\varepsilon$  увеличивается более чем в 1000 раз по сравнению с начальным значением, то определяется момент времени, когда текущее значение  $\varepsilon$  было в 10 раз больше начального, а время моделирования составляло не менее 0,1% от общего времени. Этот момент считался временем жизни вихря, и такой вихрь относился к режиму с конечным временем жизни.

3. если по критерию 2 время жизни принимает близкое к нулю значение, то вихрь попадает в режим вытягивания.

Критерий 2 требует дополнительного разъяснения, так как в нем учитываются несколько условий для зависимости  $\varepsilon(\sigma t)$ . На рисунке 12 указано время жизни вихря на фоне эволюции параметра вытягивания  $\varepsilon$ .

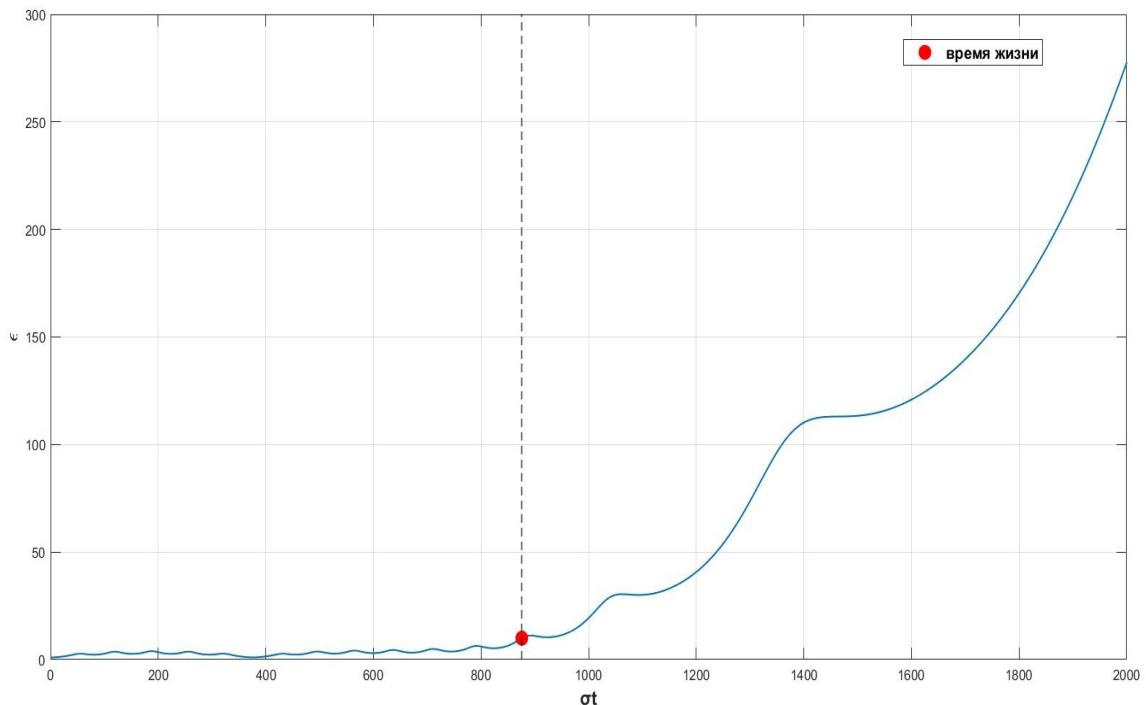


Рис.12.Зависимость параметра вытягивания от безразмерного времени в зоне конечного времени жизни при начальных условиях  $\varepsilon(0) = 1$ ,  $K(0) = 0.25$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\psi(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ . Красным отмечено время жизни вихря.

Рисунок 12 наглядно показывает условия попадания вихря в режим конечного времени жизни. В баротропном потоке, как уже отмечалось, такого режима не наблюдалось.

Ниже представлены режимы поведения ядра вихря на плоскости параметров  $(K(0), \tau)$  для различных начальных значений  $\varepsilon(0)$  и  $\theta(0)$ .

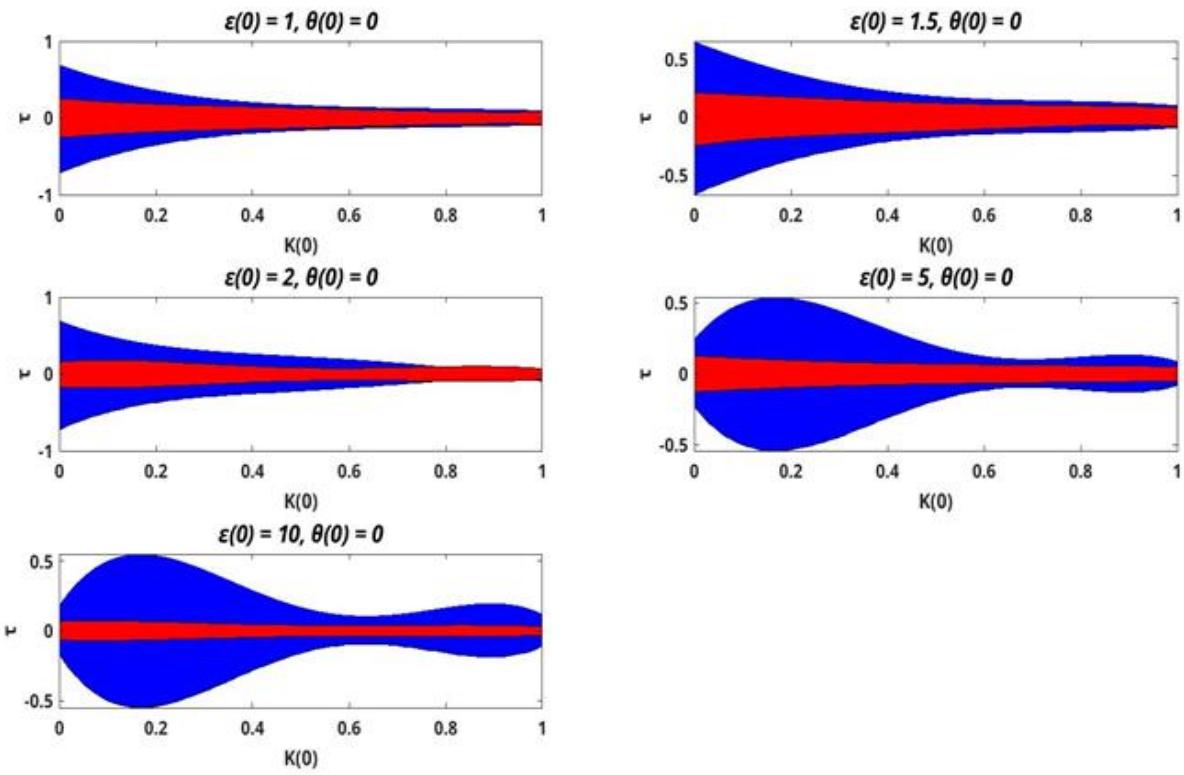


Рис.13. Области режимов поведения ядра вихря в плоскости  $(K(0), \tau)$  для начальных значений  $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\theta(0) = 0$ . Красная зона соответствует зоне выживания, синяя – зоне конечного времени жизни, белая – зоне безграничного вытягивания.

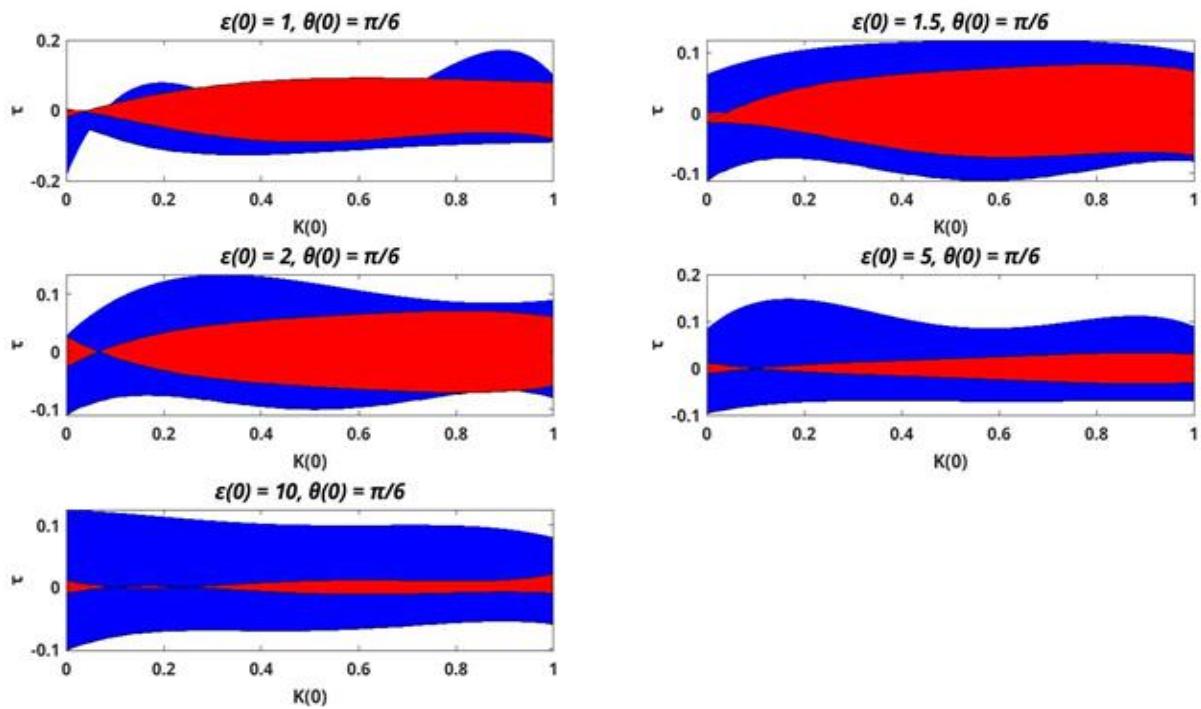


Рис.14. Области режимов поведения ядра вихря в плоскости  $(K(0), \tau)$  для начальных значений  $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$ . Красная зона соответствует зоне выживания, синяя – зоне конечного времени жизни, белая – зоне безграничного вытягивания.

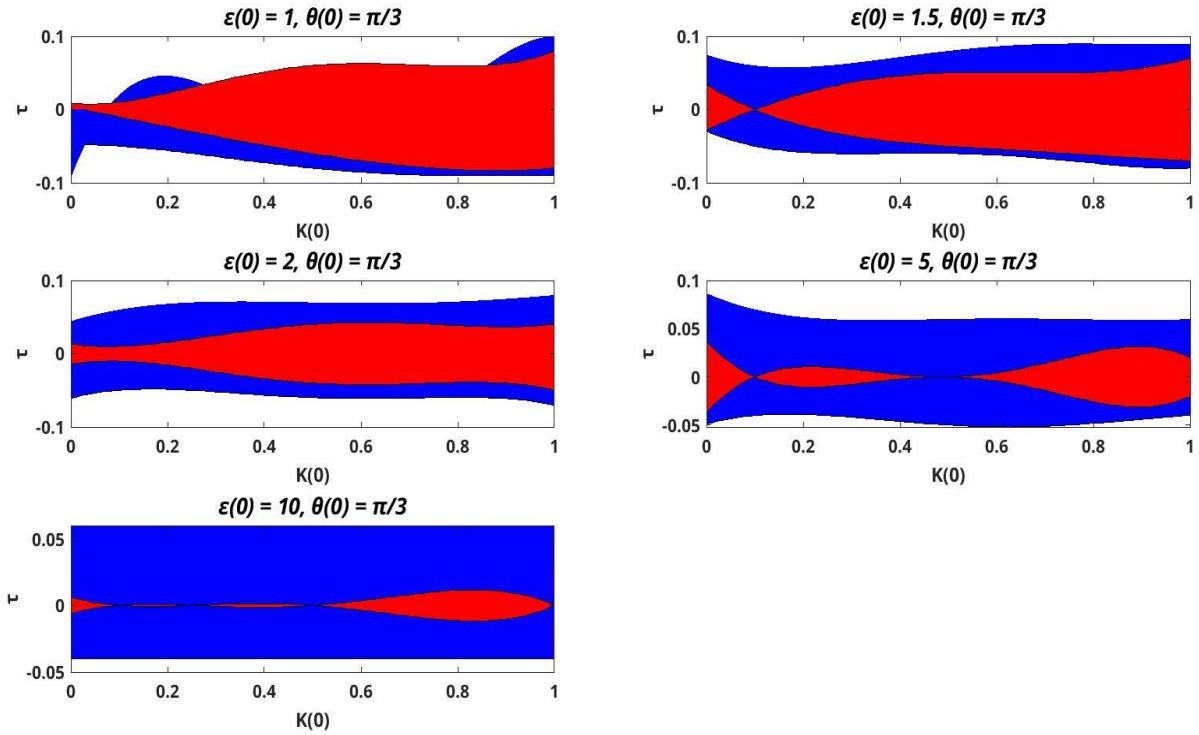


Рис.15. Области режимов поведения ядра вихря в плоскости  $(K(0), \tau)$  для начальных значений  $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ . Красная зона соответствует зоне выживания, синяя – зоне конечного времени жизни, белая – зоне безграничного вытягивания.

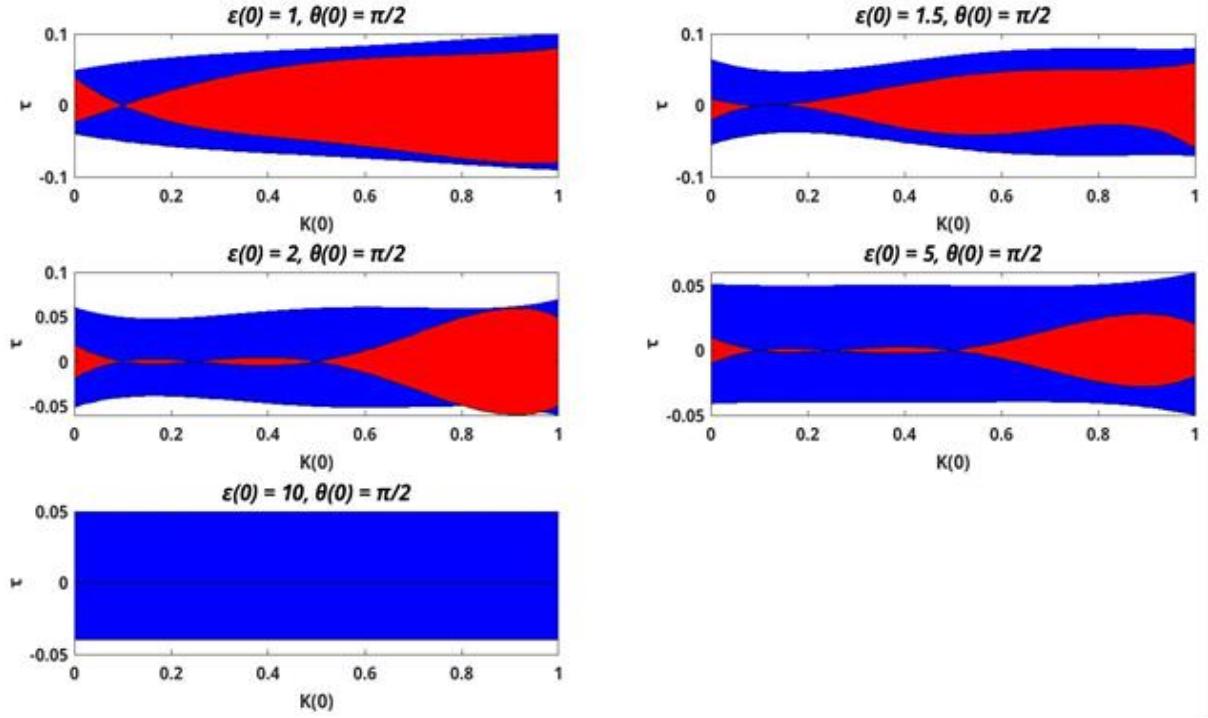


Рис.16. Области режимов поведения ядра вихря в плоскости  $(K(0), \tau)$  для начальных значений  $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ . Красная зона соответствует зоне выживания, синяя – зоне конечного времени жизни, белая – зоне безграничного вытягивания.

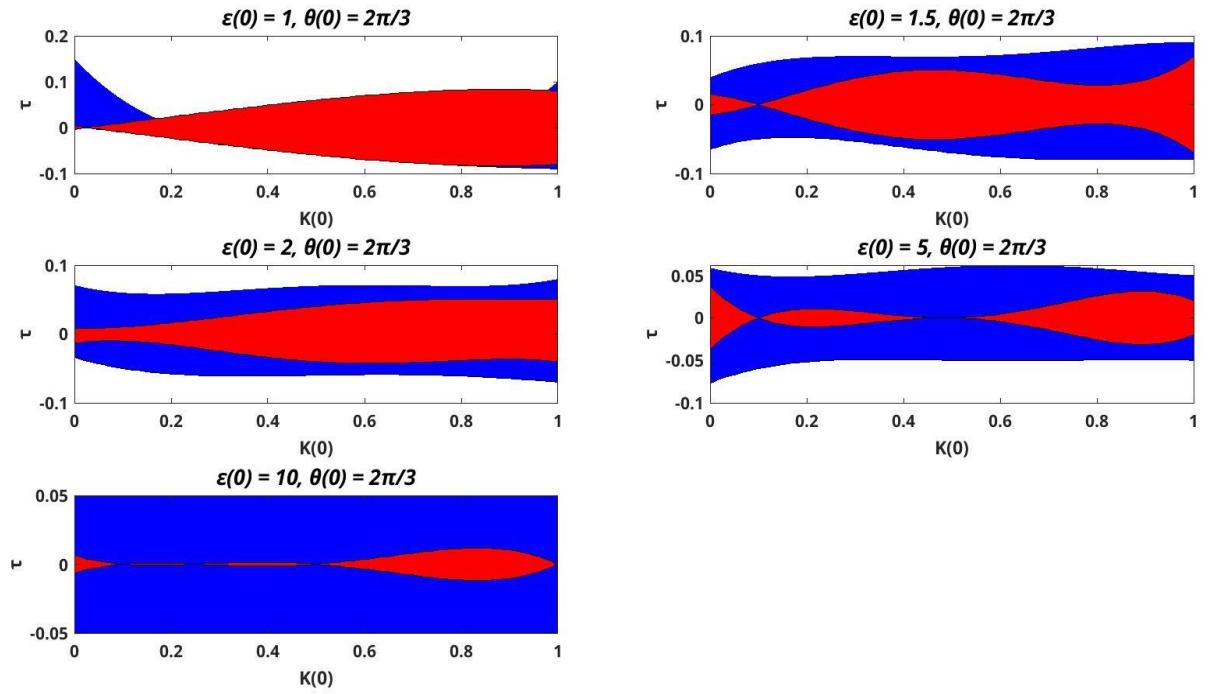


Рис.17. Области режимов поведения ядра вихря в плоскости  $(K(0), \tau)$  для начальных значений  $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\theta(0) = \frac{2\pi}{3}$ . Красная зона соответствует зоне выживания, синяя – зоне конечного времени жизни, белая – зоне безграничного вытягивания.

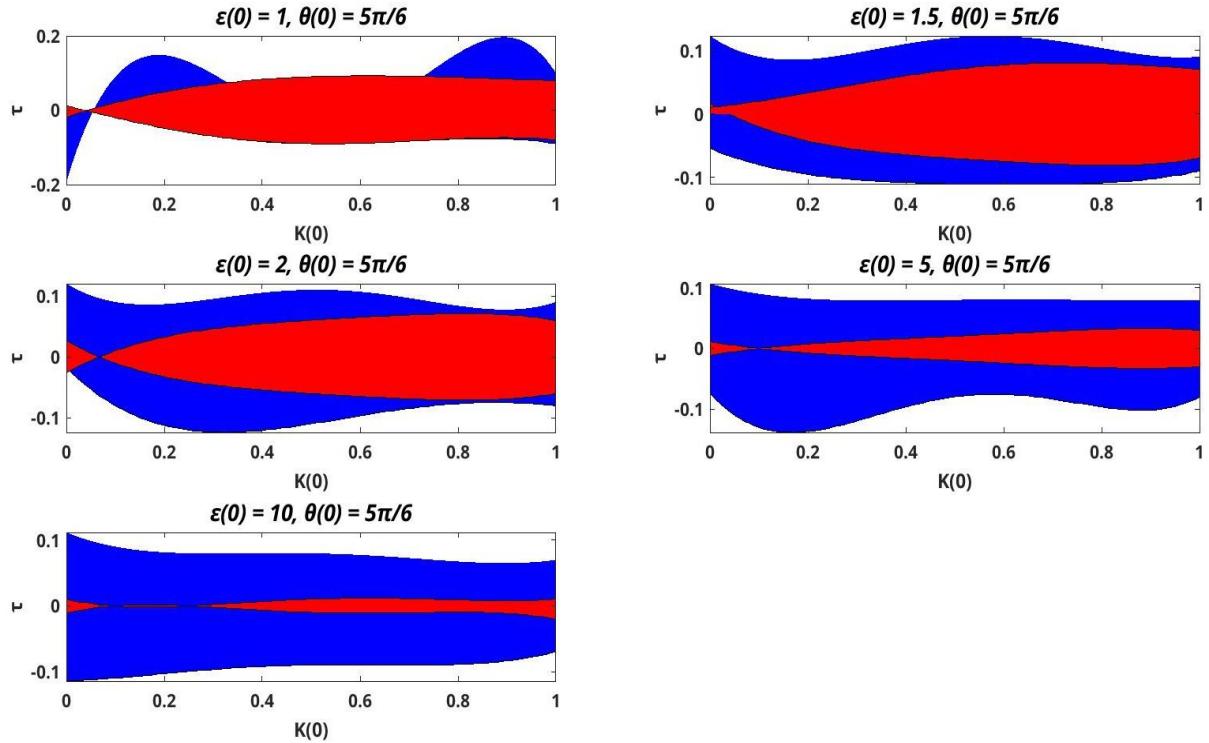


Рис.18. Области режимов поведения ядра вихря в плоскости  $(K(0), \tau)$  для начальных значений  $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\theta(0) = \frac{5\pi}{6}$ . Красная зона соответствует зоне выживания, синяя – зоне конечного времени жизни, белая – зоне безграничного вытягивания.

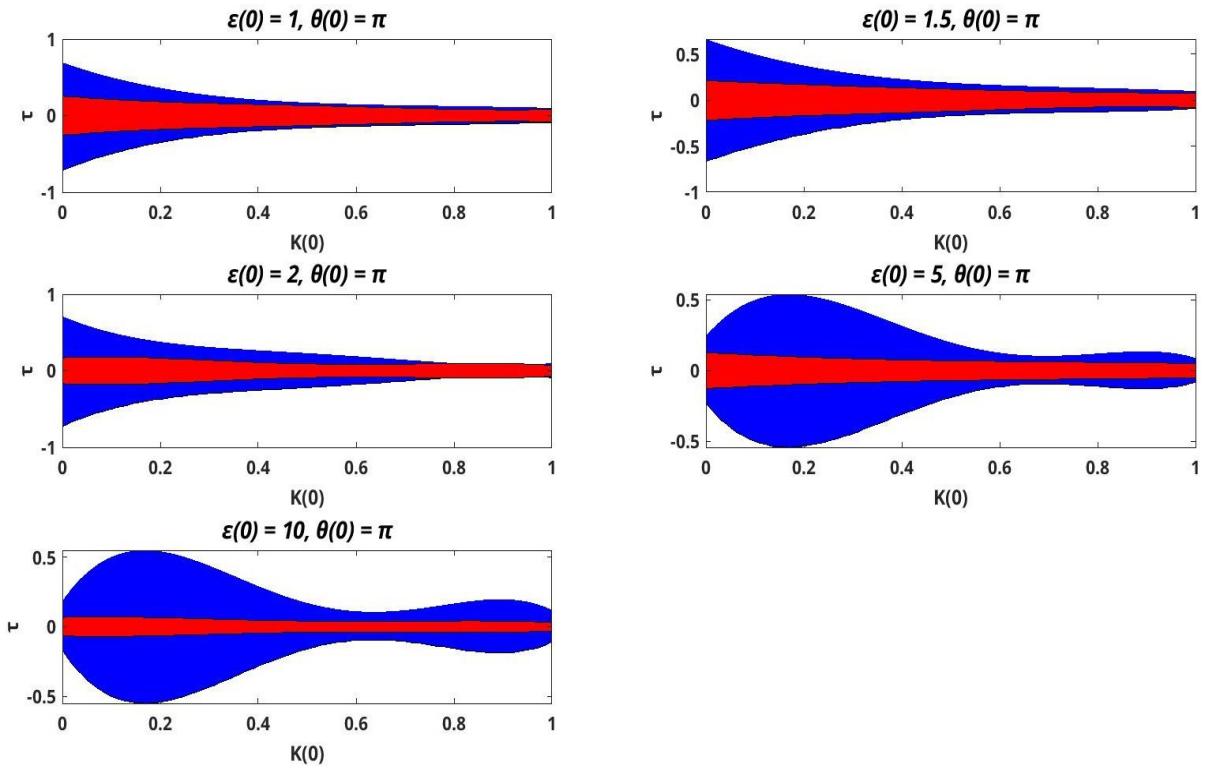


Рис.19. Области режимов поведения ядра вихря в плоскости  $(K(0), \tau)$  для начальных значений  $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\theta(0) = \pi$ . Красная зона соответствует зоне выживания, синяя – зоне конечного времени жизни, белая – зоне безграничного вытягивания.

В каждом из рисунков 13-19 для удобства фиксировано конкретное начальное значение угла нутации  $\theta(0)$ . При этом области режимов поведения на конкретном рисунке представлены для всех начальных значений параметра вытягивания  $\varepsilon(0)$  в (52).

Как видим, режимы поведения ядра вихря полностью совпадают для углов  $\theta(0) = 0$  и  $\theta(0) = \pi$ . Это следствие симметричного воздействия течения на горизонтально ориентированное ядро вихря. Для каждой отдельной карты областей при этих двух углах режимы также симметричны относительно нулевого сдвига. Такой результат согласуется с рисунком 5, где время жизни симметрично относительно знака параметра сдвига  $\tau$ . Для остальных же углов симметрия нарушается.

Рассмотрим теперь, как эволюционируют параметры ядра в разных режимах при ненулевом угле нутации  $\theta(0)$ .

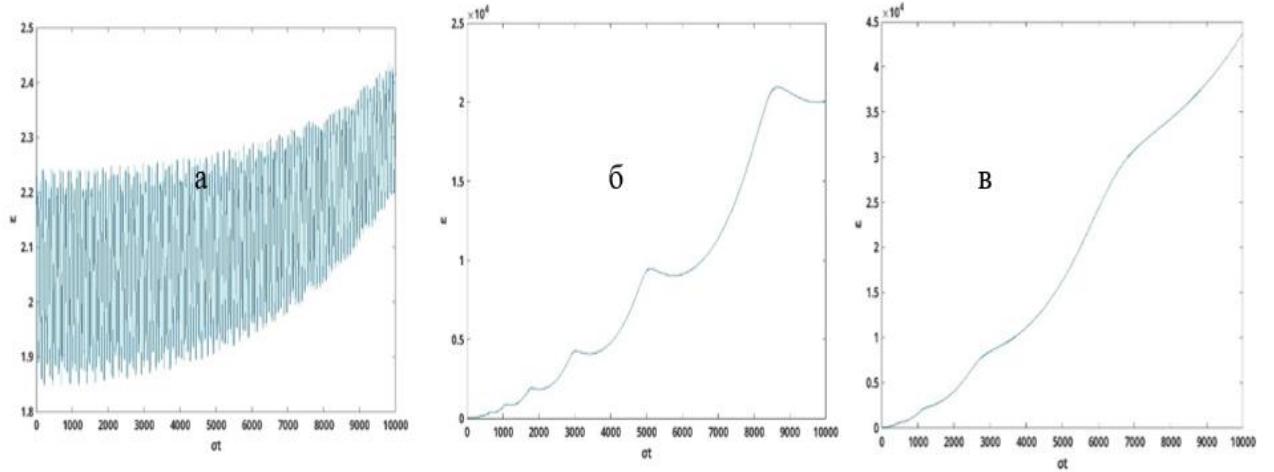


Рис.20. Зависимость параметра вытягивания ядра вихря  $\varepsilon$  от безразмерного времени  $\sigma t$  в зоне выживания (а), конечного времени жизни (б) и безграничного вытягивания (в) при начальных параметрах  $\varepsilon(0) = 2$ ,  $K(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ . Каждому режиму соответствуют значения сдвига  $\tau = -0.01$  (а),  $\tau = 0.06$  (б),  $\tau = 0.1$  (в).

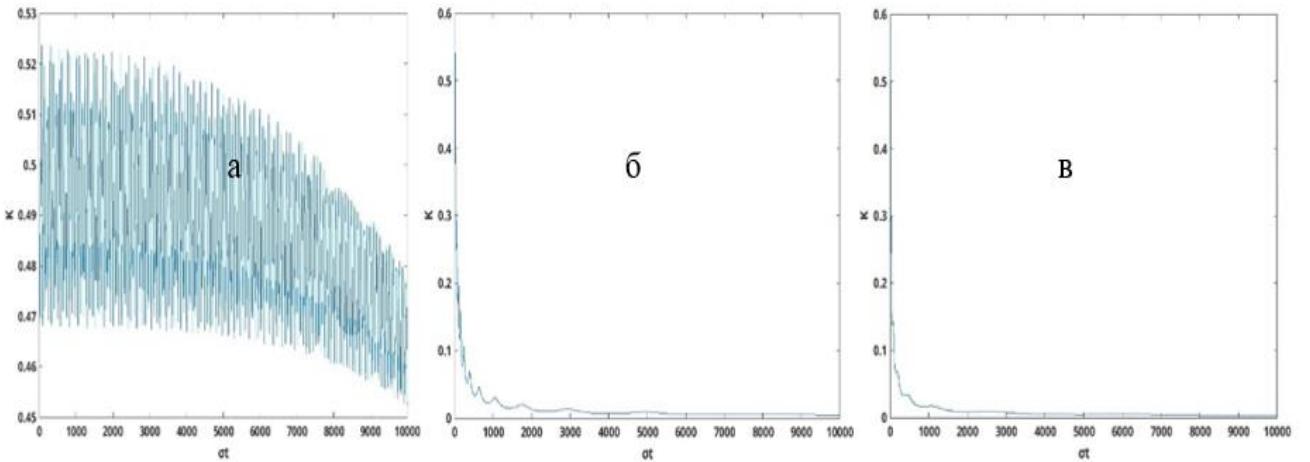


Рис.21. Зависимость параметра сплюснутости ядра вихря  $K$  от безразмерного времени  $\sigma t$  в зоне выживания (а), конечного времени жизни (б) и безграничного вытягивания (в) при начальных параметрах  $\varepsilon(0) = 2$ ,

$K(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ . Каждому режиму соответствуют значения сдвига  $\tau = -0.01$  (а),  $\tau = 0.06$  (б),  $\tau = 0.1$  (в).

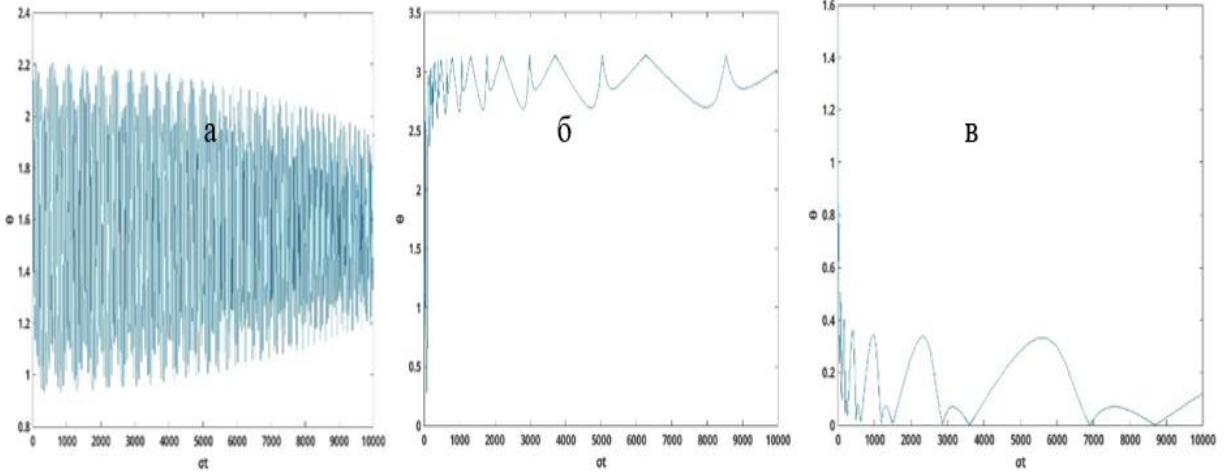


Рис.22. Зависимость угла нутации ядра вихря  $\theta$  от безразмерного времени  $\sigma t$  в зоне выживания (а), конечного времени жизни (б) и безграничного вытягивания (в) при начальных параметрах  $\varepsilon(0) = 2$ ,  $K(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ . Каждому режиму соответствуют значения сдвига  $\tau = -0.01$  (а),  $\tau = 0.06$  (б),  $\tau = 0.1$  (в).

Как видим, зависимость параметров ядра от времени сильно меняется при переходе на другой режим поведения. В режиме выживания вихрь живет бесконечно долгое время. За короткое время в двух других режимах ядро вытягивается в нить и разрушается за счет диффузии и эффектов вязкости, которые в данной задаче не рассматриваются. Отметим, что такие эффекты на начальном этапе, когда ядро компактно, не играют решающей роли. Они начинают вносить вклад лишь при достаточно больших значений параметра  $\varepsilon$ , когда ядро превращается в нить и теряет свои вихревые свойства.

Представим визуализацию ядра вихря единичного объема в исходной неподвижной системе координат в разные моменты времени в трех различных зонах поведения.

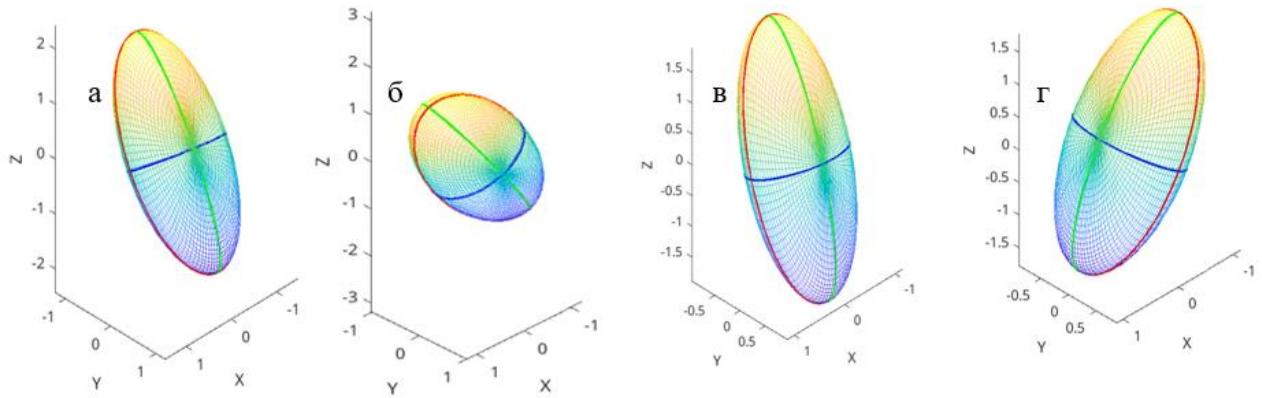


Рис.23. Визуализация ядра вихря в трехмерном пространстве  $XYZ$  для начальных значений  $\varepsilon(0) = 2, K(0) = 0.5, \theta(0) = \frac{\pi}{3}, \tau = -0.01$  в зоне выживания в моменты времени  $\sigma t = 0$  (а),  $\sigma t = 100$  (б),  $\sigma t = 1000$  (в),  $\sigma t = 10000$  (г).

Рисунок 23 наглядно иллюстрирует, что в режиме выживания ядро вихря сохраняет свою относительную форму в компактном виде бесконечно долгое время. Также наблюдаются колебания углов ориентации. Для разных начальных условий в (52) могут наблюдаться как вращение, так и колебание проекции ядра в горизонтальной плоскости.

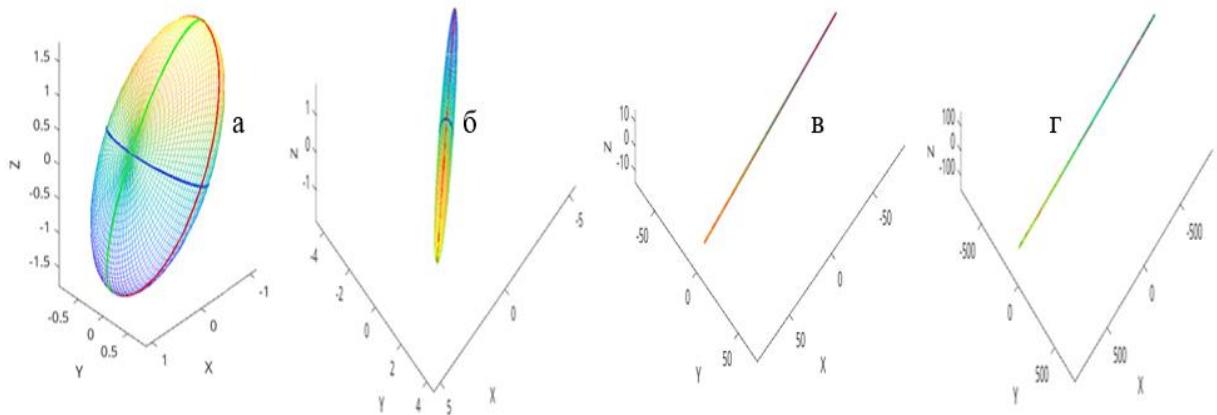


Рис.24. Визуализация ядра вихря в трехмерном пространстве  $XYZ$  для начальных значений  $\varepsilon(0) = 2, K(0) = 0.5, \theta(0) = \frac{\pi}{3}, \tau = 0.06$  в зоне

конечного времени жизни в моменты времени  $\sigma t = 0$  (а),  $\sigma t = 100$  (б),  $\sigma t = 1000$  (в),  $\sigma t = 10000$  (г).

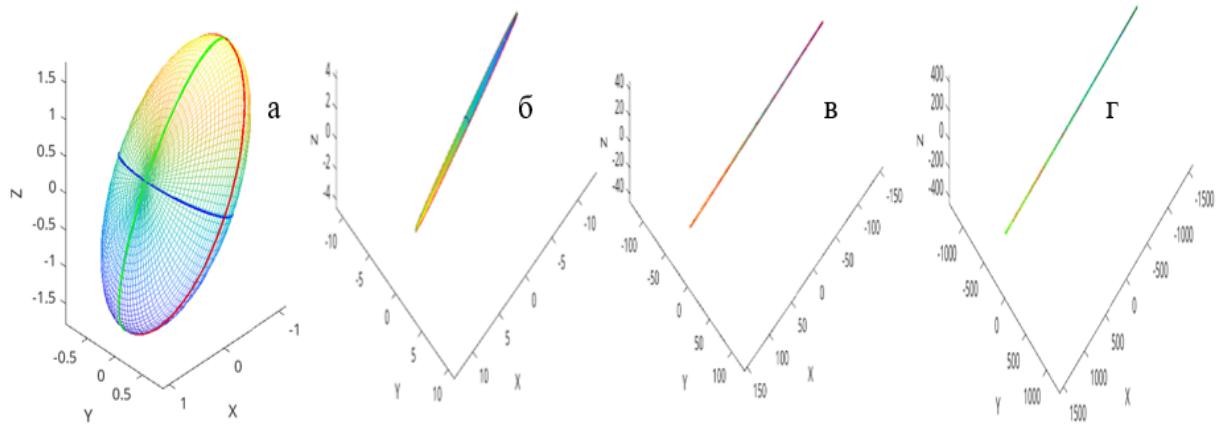


Рис.25. Визуализация ядра вихря в трехмерном пространстве  $XYZ$  для начальных значений  $\varepsilon(0) = 2$ ,  $K(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\tau = 0.1$  в зоне безграничного вытягивания в моменты времени  $\sigma t = 0$  (а),  $\sigma t = 100$  (б),  $\sigma t = 1000$  (в),  $\sigma t = 10000$  (г).

Представленные визуализации хорошо демонстрируют различие в поведении ядра в разных режимах. Как видим, в зоне вытягивания вихрь с самого начала сразу же начинает вытягиваться.

Рассмотрим, в каких внешних условиях вихрь может выжить. Из рисунков 11-19 можем оценить максимальный диапазон значений безразмерного параметра сдвига, при котором вихрь будет находиться в зоне выживания. Тем самым формируется необходимое условие выживания вихря в потоке с вертикальным сдвигом:

$$|\tau| < 0.25. \quad (56)$$

Напомним, что параметр сдвига  $\tau = \Gamma/\sigma$  является относительным параметром и также зависит от потенциальной завихренности ядра  $\sigma$ . Условие (56) означает, что для выживания вихря необходимо, чтобы

потенциальная завихренность  $\sigma$  его ядра была более чем в 4 раза больше сдвига внешнего течения  $\Gamma$ . В зависимости от начальных условий ядра мощность вихря должна возрастать для его выживания.

В рассматриваемой модели должно выполняться квазигеострофическое соотношение, следовательно, число Россби  $Ro \sim \frac{\sigma}{f} \ll 1$ , откуда завихренность ядра  $\sigma \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$ . С учетом (56) оцениваем значение сдвига, при котором вихрь начнет вытягиваться:

$$\Gamma > 5 \cdot 10^{-4} \text{с}^{-1}. \quad (57)$$

Оценка максимально возможного критического сдвига показывает, что практически любой вихрь будет вытягиваться бароклининым потоком. Однако в Мировом океане вихри существуют. Дело в том, что в исследуемой модели океан считается безграничным по глубине, так же как и бароклиниальный поток, который очень сильно влияет на ядро вихря. В реальном океане толщина потока конечна, что уменьшает эффект воздействия на вихрь. Физическую суть этого условия можно проиллюстрировать аналогией с гравитационным полем. Устойчивый вихрь с большой потенциальной завихренностью  $\sigma$  подобен массивной звезде с сильным гравитационным полем. Слабое внешнее течение (малый сдвиг  $\Gamma$ ) играет роль разреженной межзвездной пыли, которая не может существенно повлиять на структуру звезды. Однако мощное бароклиническое течение (большой  $\Gamma$ ) аналогично плотному пылевому облаку, который способен «размывать» и разрушать звезду, если его динамическое давление превысит гравитационный потенциал. Условие (56) и является критерием такого превышения. Проведем оценку для реального океана. Например, для средиземноморской линзы Шарон характерная потенциальная завихренность ядра составляет  $\sigma \sim 10^{-5} \text{с}^{-1}$ . Критический сдвиг, рассчитанный по (56), будет порядка  $\Gamma_{\text{кр}} \sim 2.5 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-1}$ . В реальном океане столь значительные вертикальные сдвиги скорости на масштабах,

сравнимых с толщиной вихря (сотни метров), наблюдаются редко, что и объясняет устойчивость таких вихрей. Получаемая же в модели оценка (56) является максимально возможной, так как в ней океан считается безграничным по глубине, и бароклинный поток оказывает на ядро вихря предельно сильное воздействие. В реальности толщина бароклинового течения конечна, что значительно уменьшает дестабилизирующий эффект и позволяет вихрям существовать даже в условиях, когда формальный критерий (56) близок к нарушению. Тем не менее полученные результаты с качественной точки зрения вполне справедливы: течение с большим сдвигом уменьшает устойчивость вихря к вытягиванию.

При сравнении с соответствующими работами [Жмур и др., 2023а, б], где рассматривается поведение вихря в баротропном потоке, становится очевидным, что поток с вертикальным сдвигом сильнее влияет на вихрь, чем поток с горизонтальным сдвигом. Такой вывод согласуется с тем фактом, что бароклиновая неустойчивость имеет более значительный вклад в мезомасштабных процессах океана, чем баротропная неустойчивость.

## ГЛАВА 2. ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ВЫТАЯГИВАЮЩИХСЯ ВИХРЕЙ В БАРОТРОПНОМ И БАРОКЛИННОМ ПОТОКАХ

### 2.1 Эволюция энергии вихря при вытягивании баротропным потоком

Не менее важным является вопрос об эволюции энергии вихря во внешних потоках. В этом разделе рассмотрим, как меняется собственная механическая энергия вихря при вытягивании баротропным потоком.

Запишем энергию вихря в гамильтоновой формулировке

$$E = \frac{1}{2} \int_V \left[ \rho_o (u^2 + v^2) + \frac{g^2 \rho^2}{\rho_o N} \right] dV , \quad (58)$$

где  $\rho_o$ - плотность,  $\rho$ - отклонение плотности от равновесного состояния. Полная механическая энергия вихря равна сумме кинетической и доступной потенциальной энергий. Отметим, что интегрирование производится по бесконечному объему (ядро и окружающее пространство). В работе [Жмур, 2011] было получено выражение (56) в виде

$$E = \frac{\sigma^2}{4\pi} \iiint_V (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - \chi) dx dy dz , \quad (59)$$

где  $\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\phi(m) dm}{a^2+m}$ ,  $\beta = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\phi(m) dm}{b^2+m}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\phi(m) dm}{c^2+m}$ ,  $\chi = \int_0^\infty \phi(m) dm$ ,  $\phi(m) = \frac{abc}{\sqrt{(a^2+m)(b^2+m)(c^2+m)}}$ . В записи (59) интегрирование

уже производится по объему ядра вихря  $V$  в растянутом по вертикали пространстве. Используя метод интегрирования по эллипсоидальному объему, получим

$$E = \frac{3}{40\pi} \rho_o \frac{{V_0}^2 \sigma^2}{c} K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(m + \varepsilon)(m + \varepsilon^{-1})(K^2 + m)}}, \quad (60)$$

где  $V_0 = V \frac{f}{N}$  – объем ядра вихря в обычном физическом пространстве.

Выражение (60) записано уже в терминах безразмерных параметров ядра. В отличие от бароклинного потока, в баротропном потоке сохраняется не только объем ядра  $V$ , но и вертикальная полуось  $c$  и параметр сплюснутости  $K$  [Жмур, Панкратов, 1989]. В этом случае удобно исследовать безразмерную энергию вихря

$$H(\varepsilon, K) = \frac{E}{\frac{3}{40\pi} \rho_o \frac{{V_0}^2 \sigma^2}{c} K} = \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(m + \varepsilon)(m + \varepsilon^{-1})(K^2 + m)}}. \quad (61)$$

Заметим, что безразмерная энергия вихря зависит только от геометрических параметров ядра. Полученный интеграл можно вычислить аналитически только при определенных значениях  $\varepsilon$  и  $K$ :

$$H(1,0) = \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(m + 2m + 1)(0 + m)}} = \pi. \quad (62)$$

Данное значение соответствует безразмерной механической энергии круглого плоского вихря. Для остальных значений  $\varepsilon$  и  $K$  безразмерная полная механическая энергия вихря вычисляется численно.

Предварительные расчеты показали, что при увеличении параметра  $\varepsilon$  полная механическая энергия убывает. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим отношение  $\frac{H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$  как результат численного анализа (62).

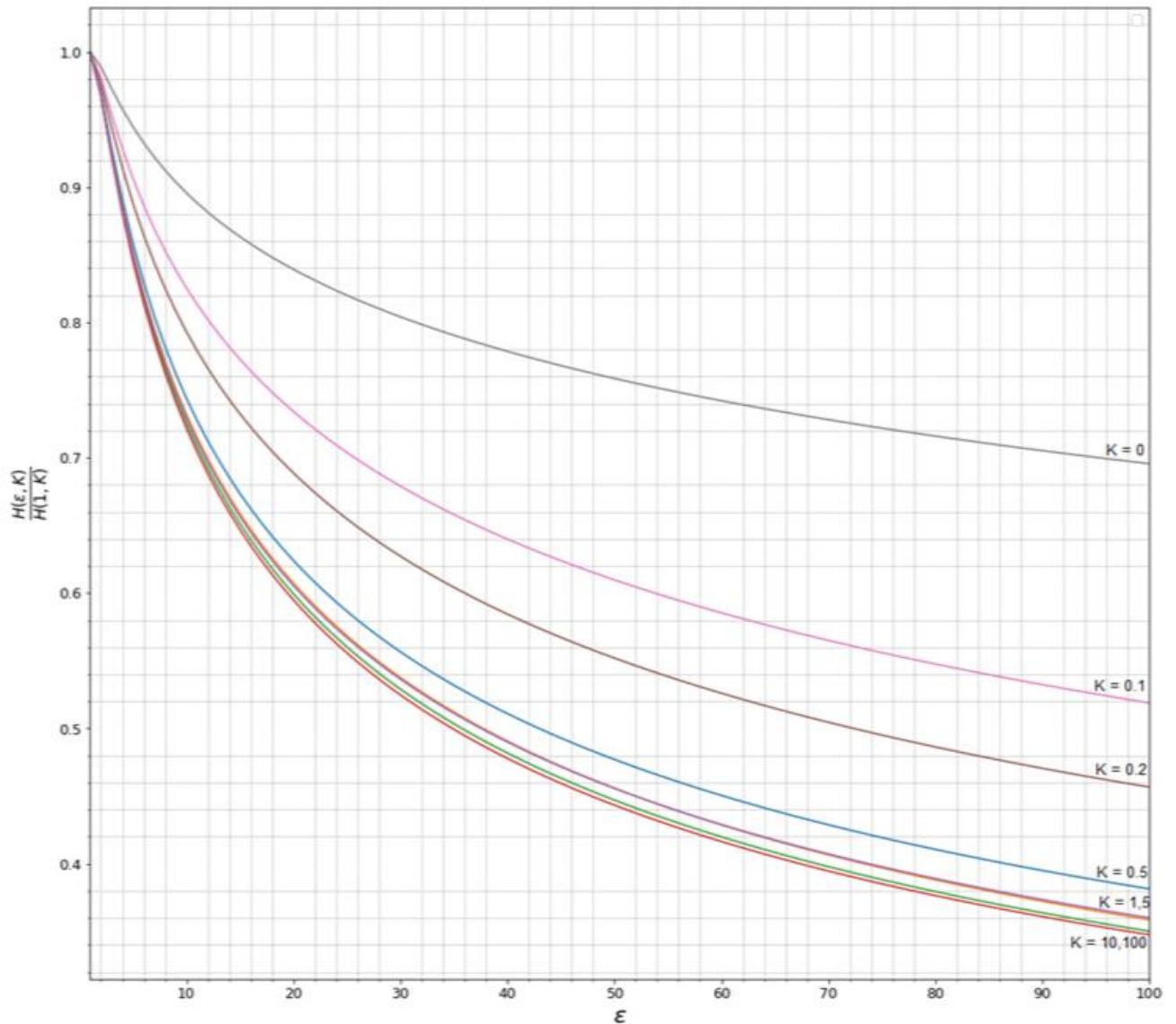


Рис.26. Зависимость нормированной полной механической энергии вихря  $\frac{H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$  от безразмерного параметра вытягивания  $\varepsilon$  при различных фиксированных значениях параметра сплюснутости  $K$ .

Предполагается, что вихрь с ядром круглого сечения( $\varepsilon = 1$ ) попадает в режим неограниченного вытягивания. На рисунке 26 для любого фиксированного  $K$  представлена эволюция полной механической энергии вихря по отношению к начальной энергии. Как видим, с ростом параметра  $\varepsilon$  полная механическая энергия вихря монотонно убывает. Скорость спада энергии больше для толстых вихрей.

Рассмотрим относительную потерю энергии вихря при вытягивании вихря от  $\varepsilon = 1$  до определенного значения  $\varepsilon$ :

$$\frac{\Delta H(\varepsilon, K)}{H(1, K)} = \frac{H(1, K) - H(\varepsilon, K)}{H(1, K)} . \quad (63)$$

Для исследования относительной потери энергии по формуле (63) удобно фиксировать конечное значение параметра  $\varepsilon$  и следить за тем, как меняется данное отношение при изменении параметра сплюснутости  $K$ .

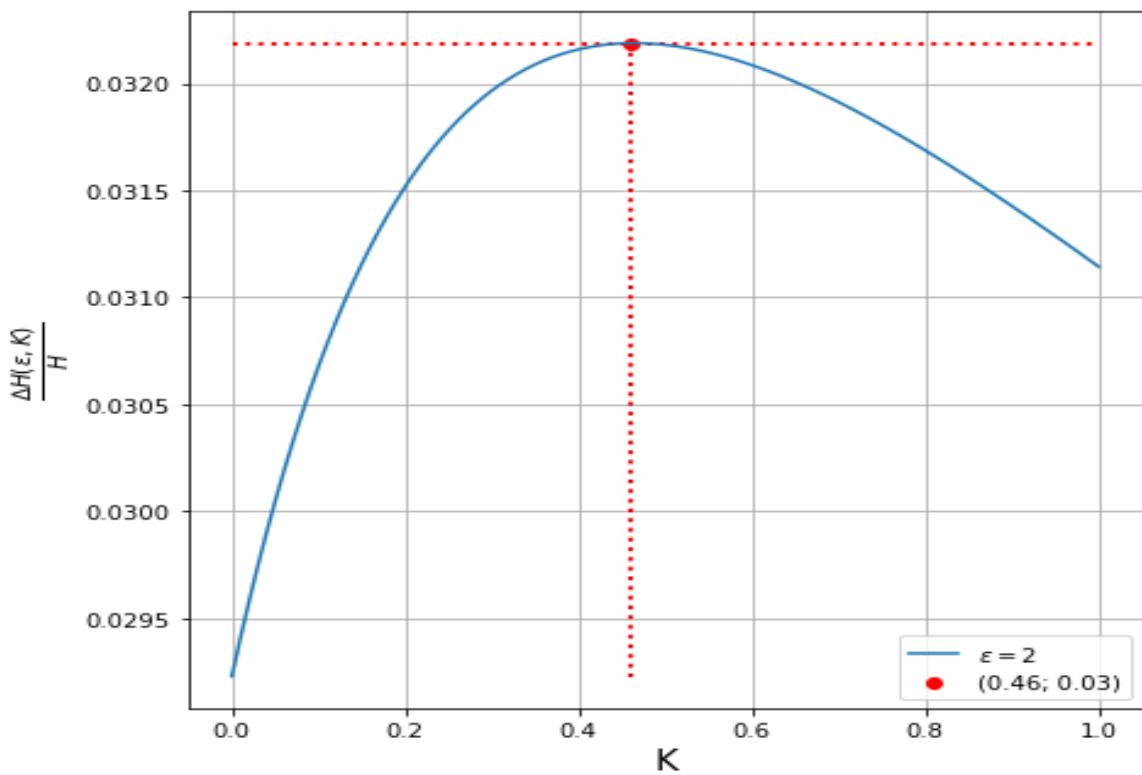


Рис.27. Зависимость относительной потеря энергии вихря  $\frac{\Delta H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$  от параметра сплюснутости  $K$  при вытягивании ядра по горизонтали в 2 раза.

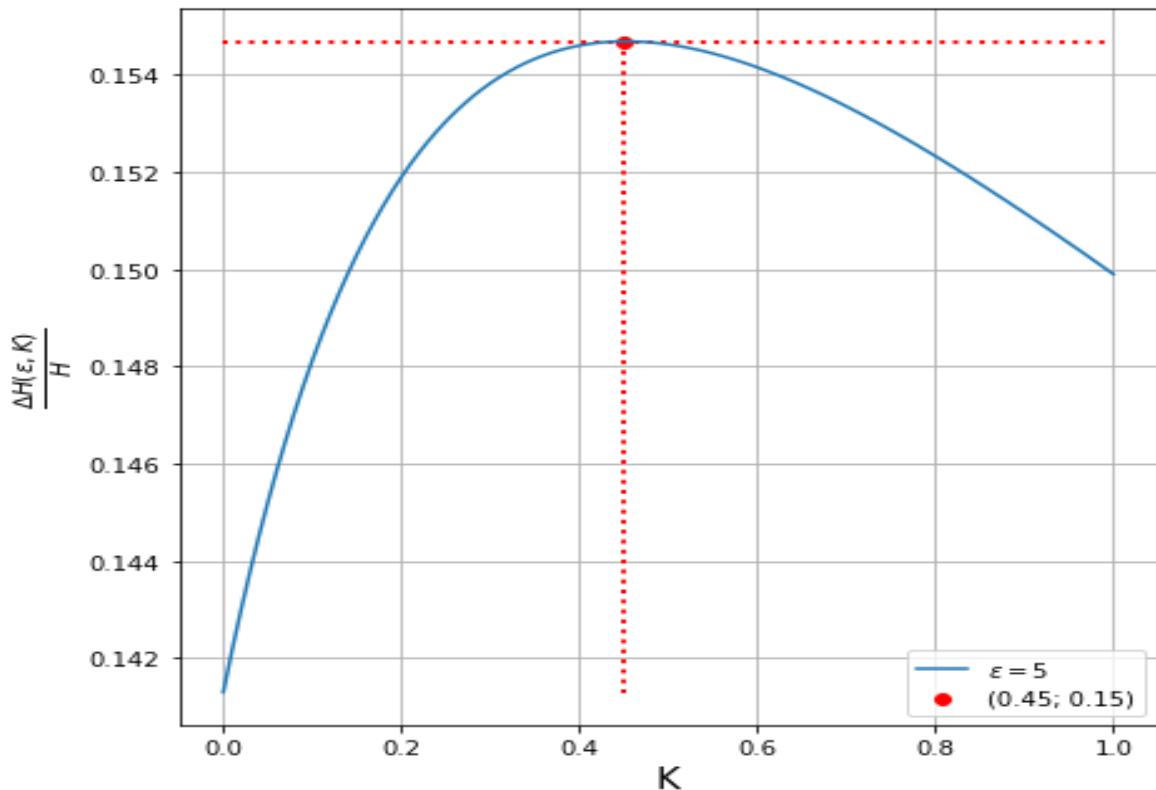


Рис.28. Зависимость относительной потеря энергии вихря  $\frac{\Delta H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$  от параметра сплюснутости  $K$  при вытягивании ядра по горизонтали в 5 раз.

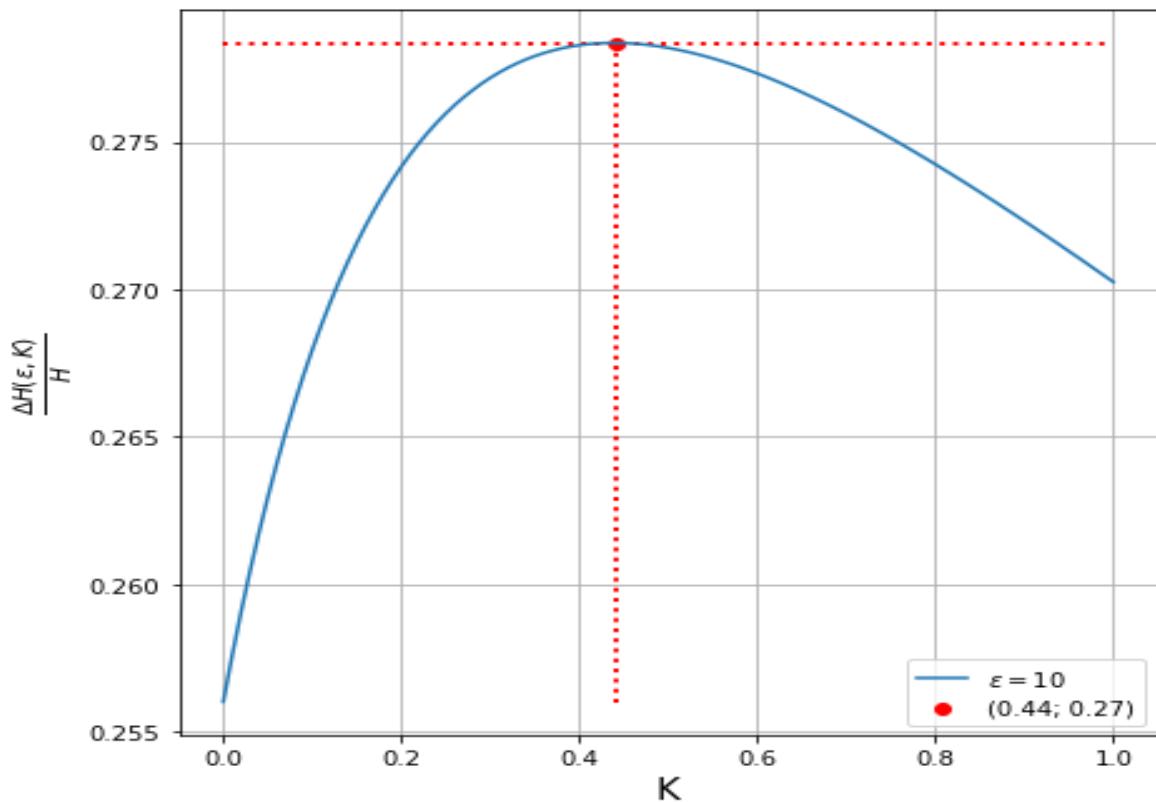


Рис.29. Зависимость относительной потеря энергии вихря  $\frac{\Delta H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$  от параметра сплюснутости  $K$  при вытягивании ядра по горизонтали в 10 раз.

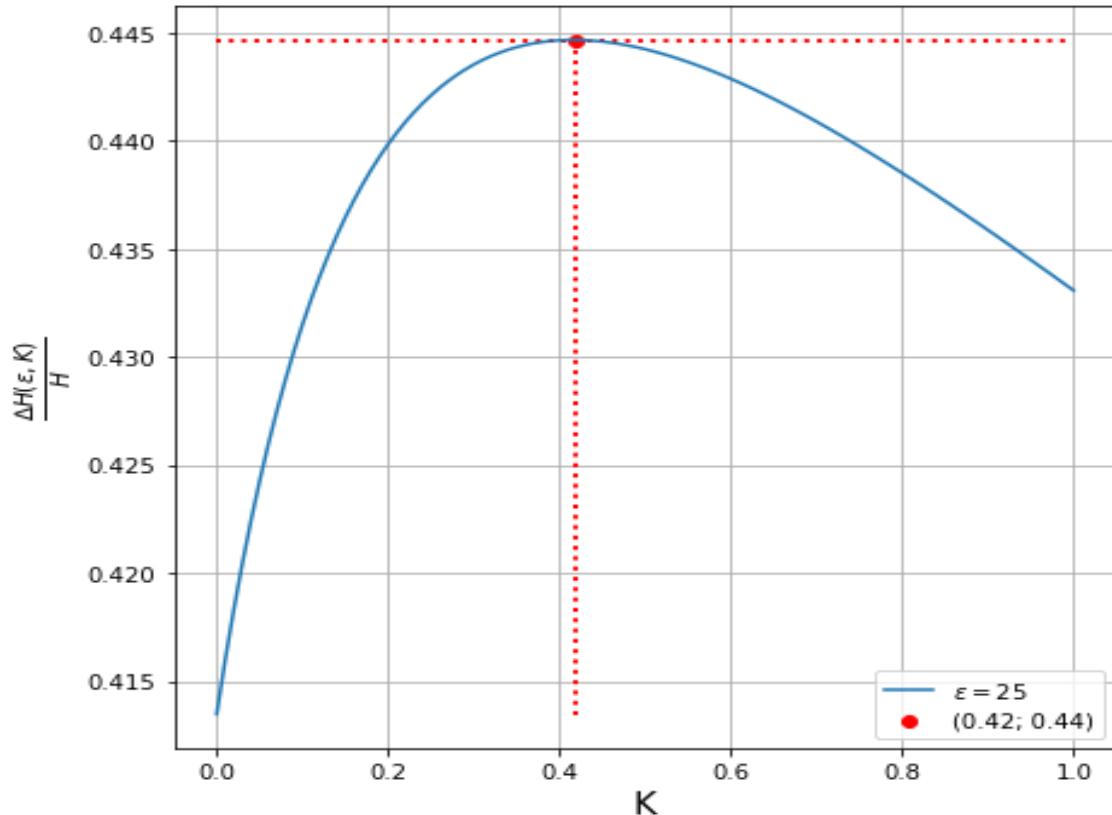


Рис.30. Зависимость относительной потеря энергии вихря  $\frac{\Delta H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$  от параметра сплюснутости  $K$  при вытягивании ядра по горизонтали в 25 раз.

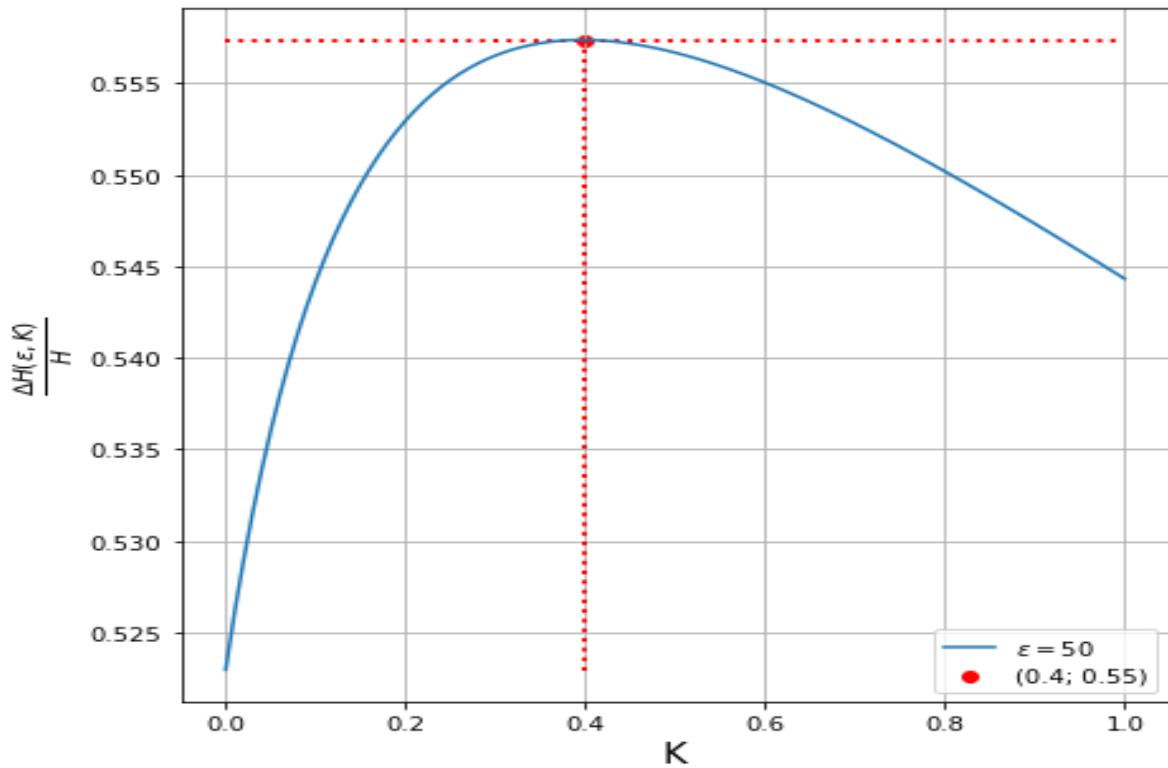


Рис.31. Зависимость относительной потеря энергии вихря  $\frac{\Delta H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$  от параметра сплюснутости  $K$  при вытягивании ядра по горизонтали в 50 раз.

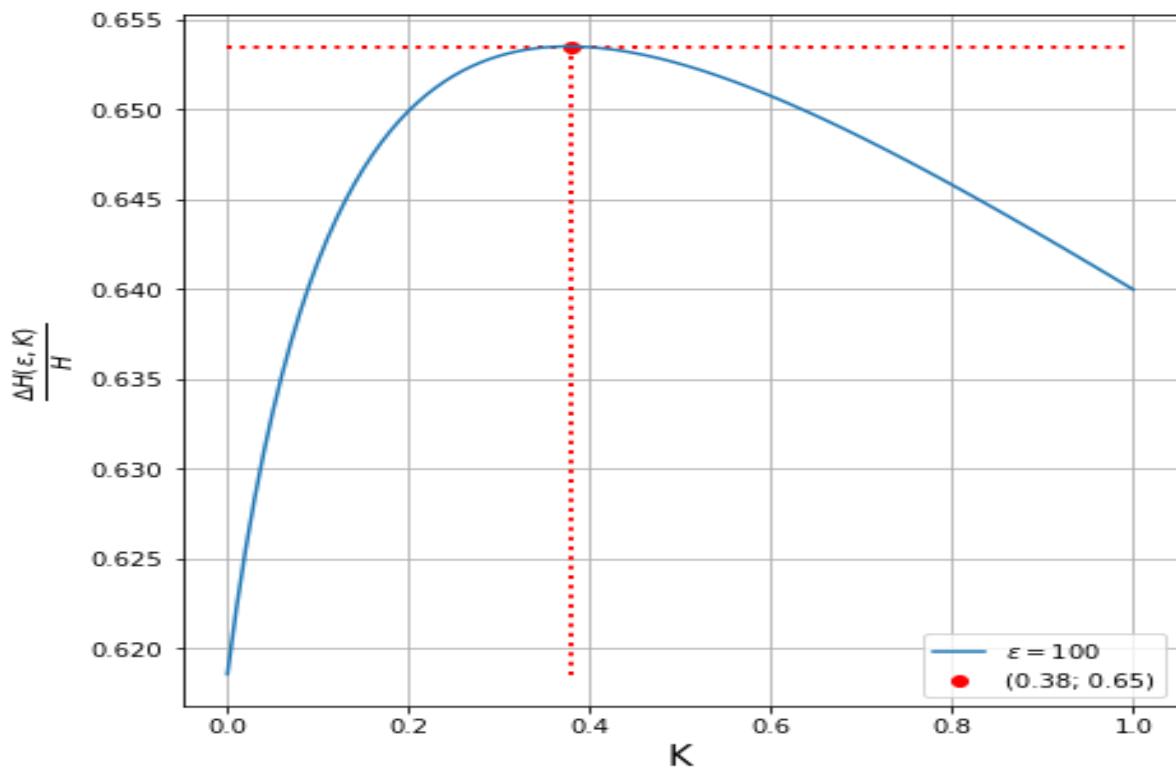


Рис.32. Зависимость относительной потеря энергии вихря  $\frac{\Delta H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$  от параметра сплюснутости  $K$  при вытягивании ядра по горизонтали во 100 раз.

На рисунках 27-32 представлены зависимости относительной потери энергии вихря при вытягивании до определенного значения параметра вытянутости  $\varepsilon$  в зависимости от параметра сплюснутости  $K$ . При любой степени вытянутости наблюдаются точки максимума, которые колеблются около значения  $K \sim 0.4$ . В таблице 1 представлены максимальные потери энергии вихря при вытягиваниях разной степени и соответствующие значения параметра сплюснутости  $K$ .

Таблица 1- Максимальные потери энергии вихря и соответствующие ему геометрические параметры.

Вытягивание по горизонтали круглого в плане ядра( $\varepsilon = 1$ ) значения	Максимальная потеря энергии вихря	Параметр сплюснутости
$\varepsilon = 2$	$\frac{\Delta H(2; 0.46)}{H(1; 0.46)} = 3\%$	$K = 0.46$

$\varepsilon = 5$	$\frac{\Delta H(5; 0.45)}{H(1; 0.45)} = 15\%$	$K = 0.45$
$\varepsilon = 10$	$\frac{\Delta H(10; 0.44)}{H(1; 0.44)} = 27\%$	$K = 0.44$
$\varepsilon = 25$	$\frac{\Delta H(25; 0.42)}{H(1; 0.42)} = 44\%$	$K = 0.42$
$\varepsilon = 50$	$\frac{\Delta H(50; 0.40)}{H(1; 0.40)} = 55\%$	$K = 0.40$
$\varepsilon = 100$	$\frac{\Delta H(100; 0.38)}{H(1; 0.38)} = 65\%$	$K = 0.38$

Полученные зависимости отображают эволюцию полной механической энергии всего вихря, при котором интегрирование в (56) проводится по бесконечному объему.

Возникает вопрос: какова эволюция энергии вихревого ядра при вытягивании баротропными потоками? Чтобы ответить на этот вопрос, еще раз остановимся на выражении полной энергии (58), но в этот раз интегрировать будем только по конечному эллипсоидальному объему – по объему вихревого ядра. Для начала запишем условие гидростатики:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g . \quad (64)$$

С учетом геострофического баланса и (64), выражение (58) будет эквивалентно записи

$$E_{core} = \frac{1}{2\rho_0 f^2} \int_V \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \frac{f^2}{N^2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] dV. \quad (65)$$

Перейдя в вытянутую по вертикали систему координат  $z \rightarrow \frac{N}{f}z$ , получим

$$E_{core} = \frac{1}{2\rho_0 f N} \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz , \quad (66)$$

где  $V = \frac{4}{3}\pi abc$  – объем ядра в растянутом по вертикальной оси пространстве. Используя решение (12), получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 &= \left( \frac{\sigma\rho_0 f}{2} abc \int_0^\infty \frac{dm}{(a^2 + m)Y(m)} x \right)^2 = \alpha^2 x^2 , \\ \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 &= \left( \frac{\sigma\rho_0 f}{2} abc \int_0^\infty \frac{dm}{(b^2 + m)Y(m)} y \right)^2 = \beta^2 y^2 , \\ \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 &= \left( \frac{\sigma\rho_0 f}{2} abc \int_0^\infty \frac{dm}{(c^2 + m)Y(m)} z \right)^2 = \gamma^2 z^2 . \end{aligned} \quad (67)$$

Полную механическую энергию ядра можем записать в виде

$$E_{core} = \frac{1}{2\rho_0 f N} \iiint_V [\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2] dx dy dz . \quad (68)$$

Методом интегрирования по эллипсоидальному объему вычисляем интеграл

$$\begin{aligned} & \iiint_V [\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2] dx dy dz \\ &= \frac{4}{15} \pi abc (\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 + \gamma^2 c^2) . \end{aligned} \quad (69)$$

Подставив (47),(48),(67) и (69) в (68), получим окончательное выражение для полной энергии вихревого ядра

$$\begin{aligned} E_{core} = & \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 ab K^2 \left( \varepsilon \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon+m)^3(\varepsilon^{-1}+m)(K^2+m)}} \right]^2 \right. \\ & + \varepsilon^{-1} \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon+m)(\varepsilon^{-1}+m)^3(K^2+m)}} \right]^2 \\ & \left. + K^2 \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon+m)(\varepsilon^{-1}+m)(K^2+m)^3}} \right]^2 \right) . \end{aligned} \quad (70)$$

Здесь, как и ранее, величина  $V_0 = V \frac{f}{N}$  представляет собой объем ядра вихря в обычном физическом пространстве. В отличие от энергии всего вихря, в энергии ядра математически становится возможным отделить друг от друга выражения для кинетической и доступной потенциальной энергий. Кинетическая энергия вихревого ядра равна

$$E^k_{core} = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 ab K^2 \left( \varepsilon \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3 (\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)}} \right]^2 + \varepsilon^{-1} \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)^3 (K^2 + m)}} \right]^2 \right). \quad (71)$$

Для доступной потенциальной энергии ядра имеем следующее выражение:

$$E^p_{core} = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 ab K^2 \left( K^2 \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)^3}} \right]^2 \right). \quad (72)$$

Как было отмечено, коэффициент перед интегралом (размерная часть) в баротропном течении остается постоянным. Рассмотрим безразмерную энергию вихревого ядра. Безразмерная полная механическая, кинетическая и доступная потенциальная энергии ядра соответственно равны

$$H_{core} = \varepsilon \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3 (\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)}} \right]^2 + \varepsilon^{-1} \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)^3 (K^2 + m)}} \right]^2 + K^2 \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)^3}} \right]^2,$$

$$H_{core}^k = \varepsilon \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3 (\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)}} \right]^2 + \varepsilon^{-1} \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)^3 (K^2 + m)}} \right]^2,$$

$$H_{core}^p = K^2 \left[ \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)^3}} \right]^2. \quad (73)$$

Представим результаты численного анализа (73) при вытягивании вихря баротропными течениями. На рисунке 33 представлена эволюция коэффициента ослабления полной механической энергии ядра  $\frac{H_{core}(\varepsilon, K)}{H_{core}(1, K)}$  при его вытягивании баротропным течением.

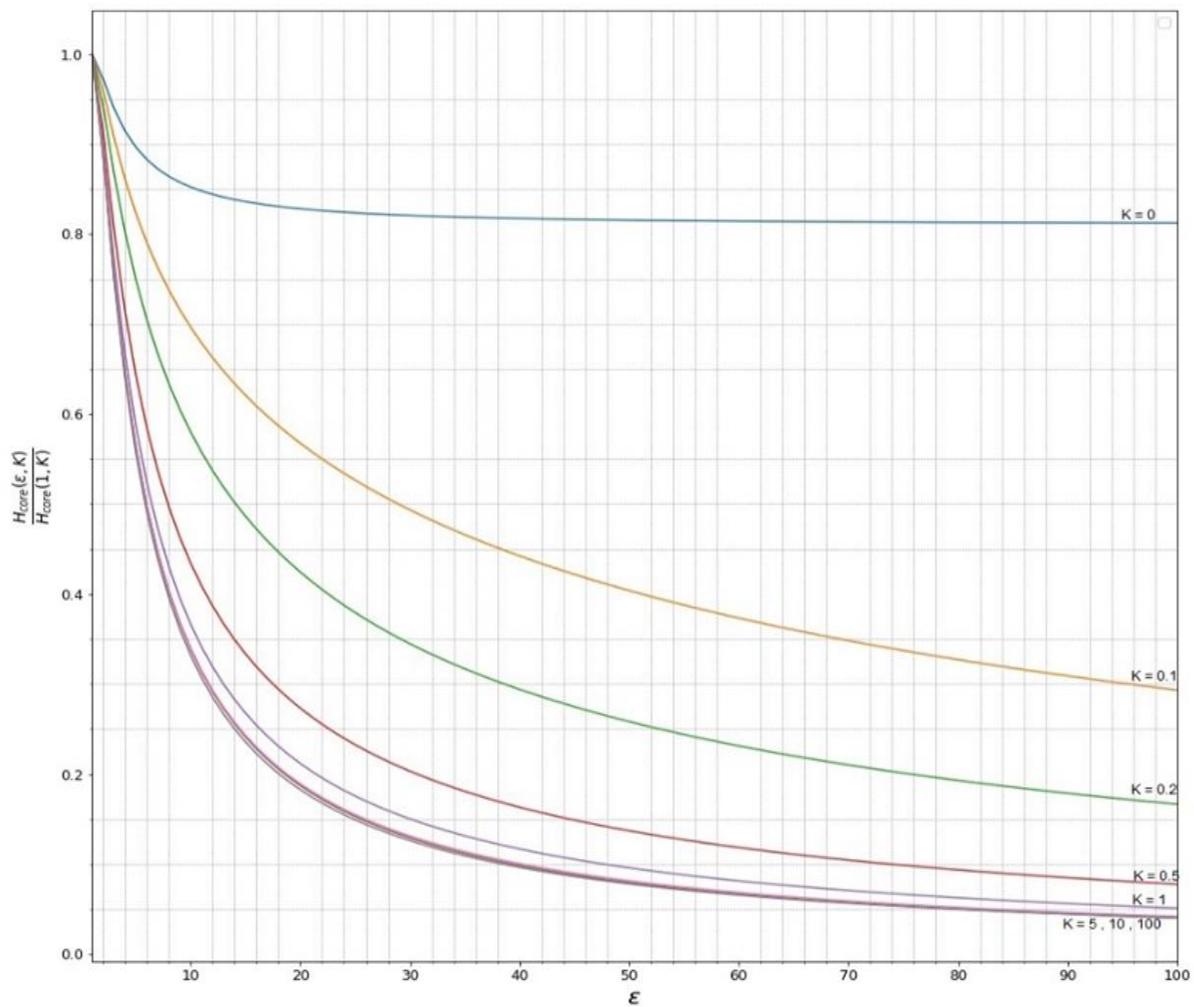


Рис.33. Зависимость нормированной полной механической энергии вихревого ядра  $\frac{H_{core}(\varepsilon, K)}{H_{core}(1, K)}$  от безразмерного параметра вытягивания  $\varepsilon$  при различных фиксированных значениях параметра сплюснутости  $K$ .

Как и следовало ожидать, при вытягивании ядро теряет энергию. Скорость потери, как и для энергии вихря, больше для более толстых вихрей с большим значением параметра сплюснутости  $K$ . Для реального океана нас должны заинтересовать значения  $K \in [0, 1]$ . На таком отрезке ярко выражается увеличение скорости потери энергии ядра. Большие значения  $K$  рассматриваются в основном с математической точки зрения, чтобы понять, к чему стремится энергия ядра вихря.

Полная механическая энергия ядра состоит из кинетической и доступной потенциальной энергий. При вытягивании эти составляющие могут меняться. Численный анализ (73) дает возможность определить, как меняются доли кинетической  $\frac{H_{core}^k}{H_{core}}$  и доступной потенциальной  $\frac{H_{core}^p}{H_{core}}$  энергий в полной механической энергии вихревого ядра.

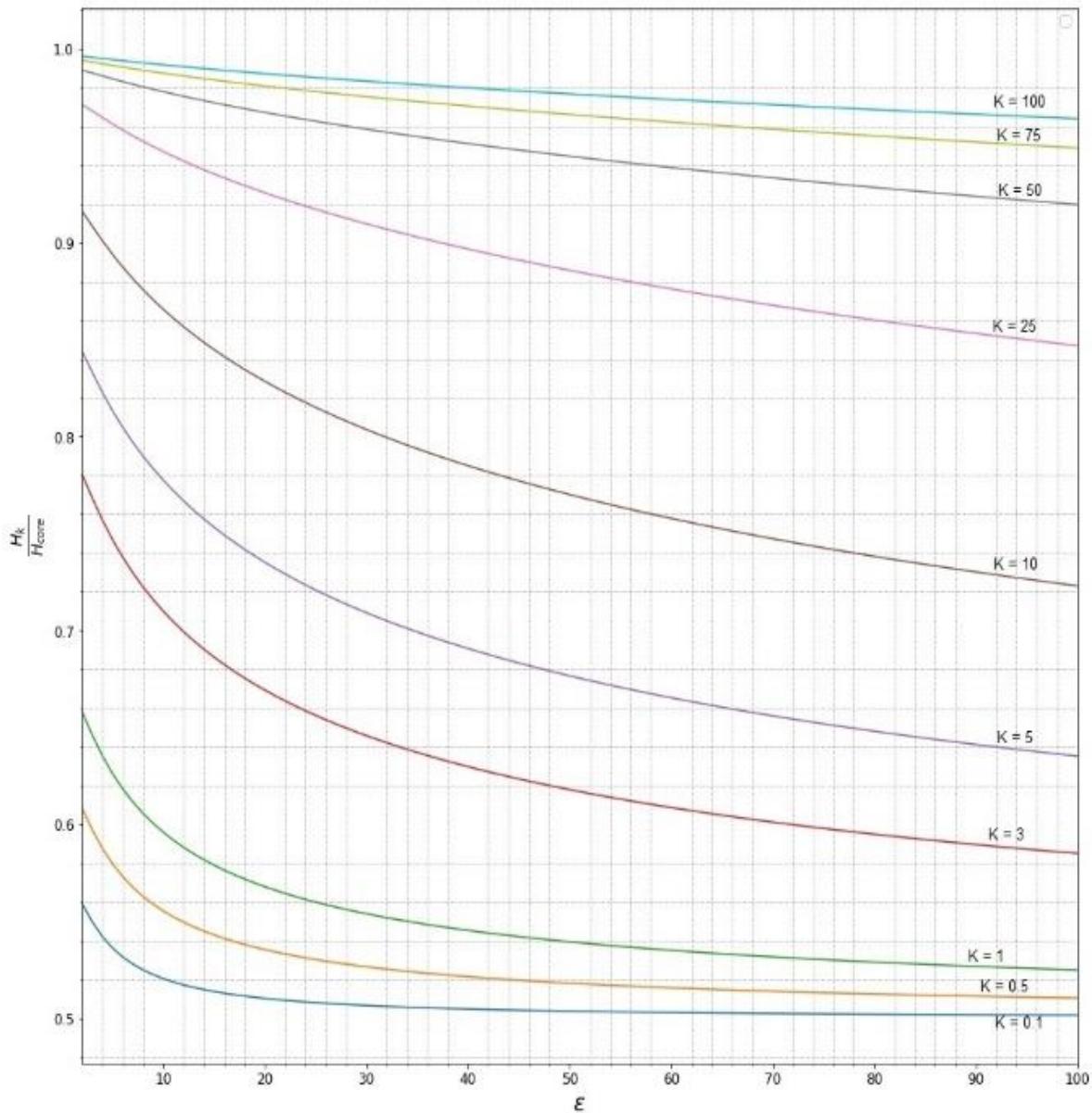


Рис.34. Зависимость доли кинетической энергии в полной механической энергии ядра вихря  $\frac{H_k}{H_{core}}$  безразмерного параметра вытягивания  $\varepsilon$  при различных фиксированных значениях параметра сплюснутости  $K$ .

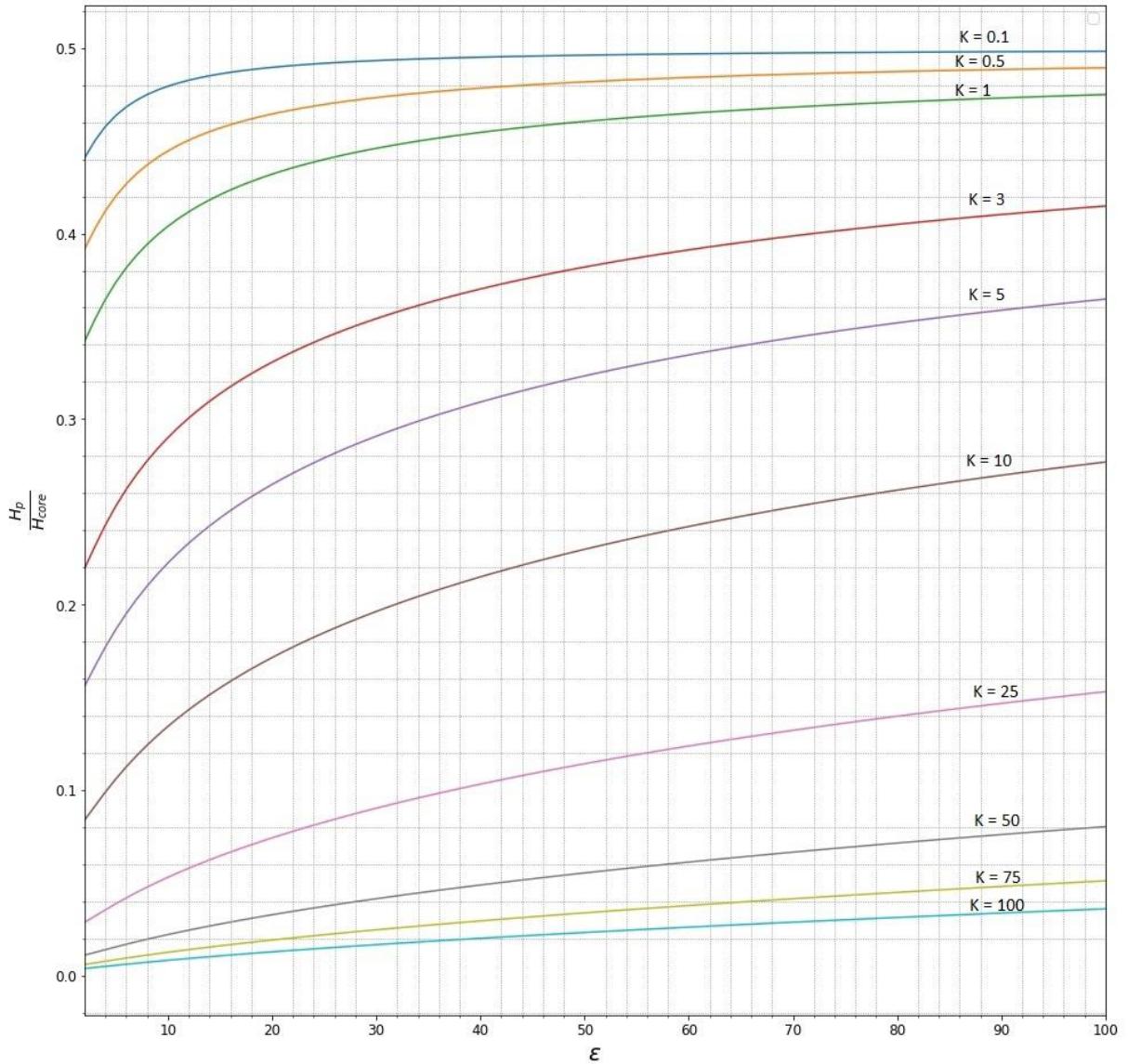


Рис.35. Зависимость доли кинетической энергии в полной механической энергии ядра вихря  $\frac{H_p}{H_{core}}$  от безразмерного параметра вытягивания  $\varepsilon$  при различных фиксированных значениях параметра сплюснутости  $K$ .

Рисунки 34 и 35 демонстрируют эволюцию соответствующих долей при вытягивании ядра баротропным течением. Становится ясным, что доля кинетической энергии с вытягиванием убывает, в то время как доля доступной потенциальной энергии растет. Такой эффект наблюдается для

всех вихрей с любыми параметрами сплюснутости ядра  $K$ . Однако согласно численным расчетам, большая часть энергии запасена в кинетической энергии, хотя его доля с вытягиванием падает. В толстых вихрях наблюдается явное преобладание кинетической энергии над доступной потенциальной. В случае тонких вихрей кинетическая энергия составляет более половины от полной механической энергии. По мере неограниченного вытягивания вихря соотношения между кинетической и потенциальной энергиями постепенно сближаются, но с противоположных направлений.

Относительные потери полной механической энергии, а также её кинетической и доступной потенциальной составляющих в ядре, подобно потерям энергии вихря, изменяются по вертикальному параметру не монотонно. В таблицах ниже представлены данные о наибольших потерях и соответствующих им геометрических характеристиках.

Таблица 2 – Максимальные потери энергий ядра при вытягивании в  $\varepsilon = 2$  раза

Энергия ядра	Максимальная потеря энергии	Вертикальный параметр
Полная( $H_{core}(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}(2; 10)}{H_{core}(1; 10)} = 10\%$	$K = 10$
Кинетическая( $H_{core}^k(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^k(2; 2.25)}{H_{core}^k(1; 2.25)} = 11\%$	$K = 2.25$

Доступная потенциальная( $H_{core}^p(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^p(2; 1.41)}{H_{core}^p(1; 1.41)} = 8\%$	$K = 1.41$
---	--	------------

Таблица 3 –Максимальные потери энергий ядра при вытягивании в  $\varepsilon = 5$  раз

Энергия ядра	Максимальная потеря энергии	Вертикальный параметр
Полная( $H_{core}(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}(5; 3.04)}{H_{core}(1; 3.04)} = 43\%$	$K = 3.04$
Кинетическая( $H_{core}^k(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^k(5; 2.37)}{H_{core}^k(1; 2.37)} = 46\%$	$K = 2.37$
Доступная потенциальная( $H_{core}^p(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^p(5; 1.42)}{H_{core}^p(1; 1.42)} = 34\%$	$K = 1.42$

Таблица 4 –Максимальные потери энергий ядра при вытягивании в  $\varepsilon = 10$  раз

<i>Энергия ядра</i>	<i>Максимальная потеря энергии</i>	<i>Вертикальный параметр</i>
Полная( $H_{core}(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}(10; 3.04)}{H_{core}(1; 3.04)} = 66\%$	$K = 3.04$
Кинетическая( $H_{core}^k(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^k(10; 2.51)}{H_{core}^k(1; 2.51)} = 69\%$	$K = 2.51$
Доступная потенциальная( $H_{core}^p(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^p(10; 1.44)}{H_{core}^p(1; 1.44)} = 56\%$	$K = 1.44$

Таблица 5 –Максимальные потери энергий ядра при вытягивании в  $\varepsilon = 25$  раз

<i>Энергия ядра</i>	<i>Максимальная потеря энергии</i>	<i>Вертикальный параметр</i>
Полная( $H_{core}(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}(25; 3.14)}{H_{core}(1; 3.14)} = 84\%$	$K = 3.14$
Кинетическая( $H_{core}^k(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^k(25; 2.81)}{H_{core}^k(1; 2.81)} = 87\%$	$K = 2.81$

Доступная потенциальная( $H_{core}^p(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^p(25; 1.46)}{H_{core}^p(1; 1.46)} = 77\%$	$K = 1.46$
---	--	------------

Таблица 6 –Максимальные потери энергий ядра при вытягивании в  $\varepsilon = 50$  раз

Энергия ядра	Максимальная потеря энергии	Вертикальный параметр
Полная( $H_{core}(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}(50; 3.27)}{H_{core}(1; 3.27)} = 92\%$	$K = 3.27$
Кинетическая( $H_{core}^k(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^k(50; 3.1)}{H_{core}^k(1; 3.1)} = 93\%$	$K = 3.1$
Доступная потенциальная( $H_{core}^p(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^p(50; 1.49)}{H_{core}^p(1; 1.49)} = 87\%$	$K = 1.49$

Таблица 7 –Максимальные потери энергий ядра при вытягивании в  $\varepsilon = 100$  раз

<i>Энергия ядра</i>	<i>Максимальная потеря энергии</i>	<i>Вертикальный параметр</i>
Полная( $H_{core}(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}(100; 3.45)}{H_{core}(1; 3.45)} = 96\%$	$K = 3.45$
Кинетическая( $H_{core}^k(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta H_{core}^k(100; 3.46)}{H_{core}^k(1; 3.46)} = 97\%$	$K = 3.46$
Доступная потенциальная( $\Pi_{core}(\varepsilon, K)$ )	$\frac{\Delta \Pi_{core}(100; 1.51)}{\Pi_{core}(1; 1.51)} = 93\%$	$K = 1.51$

Для сравнения приведём результаты оценки энергии мезомасштабного антициклонического вихря в Лофотенской котловине, выполненной по натурным данным на основе реанализа GLORYS12V1, а также по теоретическим соотношениям (70), (71) и (72).

Таблица 8 – Оценки коэффициентов относительного изменения различных типов энергии вихря при его переходе по параметрам ( $\varepsilon, K$ ) из состояния (1; 0.08) в (4.3; 0.23)

Способ расчета	Относительная полная механическая энергия ядра вихря  $\frac{E(4.3; 0.23)}{E(1; 0.08)}$	Относительная кинетическая энергия вихревого ядра  $\frac{E_{core}^k(4.3; 0.23)}{E_{core}^k(1; 0.08)}$	Относительная доступная потенциальная энергия вихревого ядра  $\frac{E_{core}^p(4.3; 0.23)}{E_{core}^p(1; 0.08)}$
Натурные данные	0.43	0.33	0.59
Теория	0.53	0.53	0.54

Как видно из полученных данных, расхождения между теоретическими результатами и натурными измерениями несущественны.

Не менее важным аспектом в энергетике вихря является доля энергии ядра в энергии всего вихря  $\frac{H_{core}}{H}$ . Результат соответствующего численного исследования показан на рисунке 36.

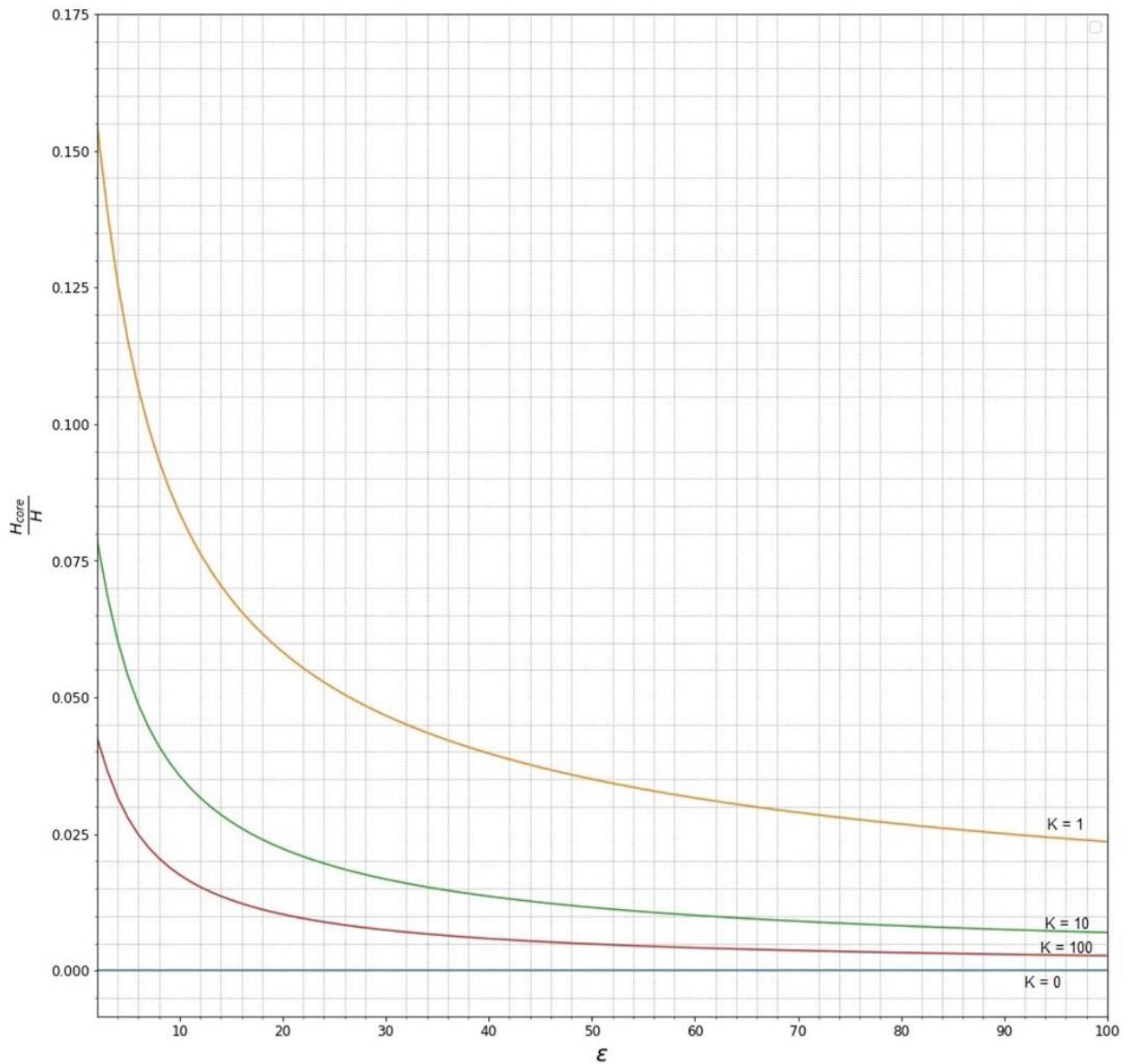


Рис.36. Зависимость доли энергии ядра в энергии всего вихря  $\frac{H_{core}}{H}$  от безразмерного параметра вытягивания  $\varepsilon$  при различных фиксированных значениях параметра сплюснутости  $K$ .

Согласно расчетам, большая часть энергии вихря запасена вне ядра. Рассмотрим теперь зависимость  $\frac{H_{core}}{H}$  от параметра сплюснутости  $K$  для различных параметров вытягивания  $\varepsilon$ .

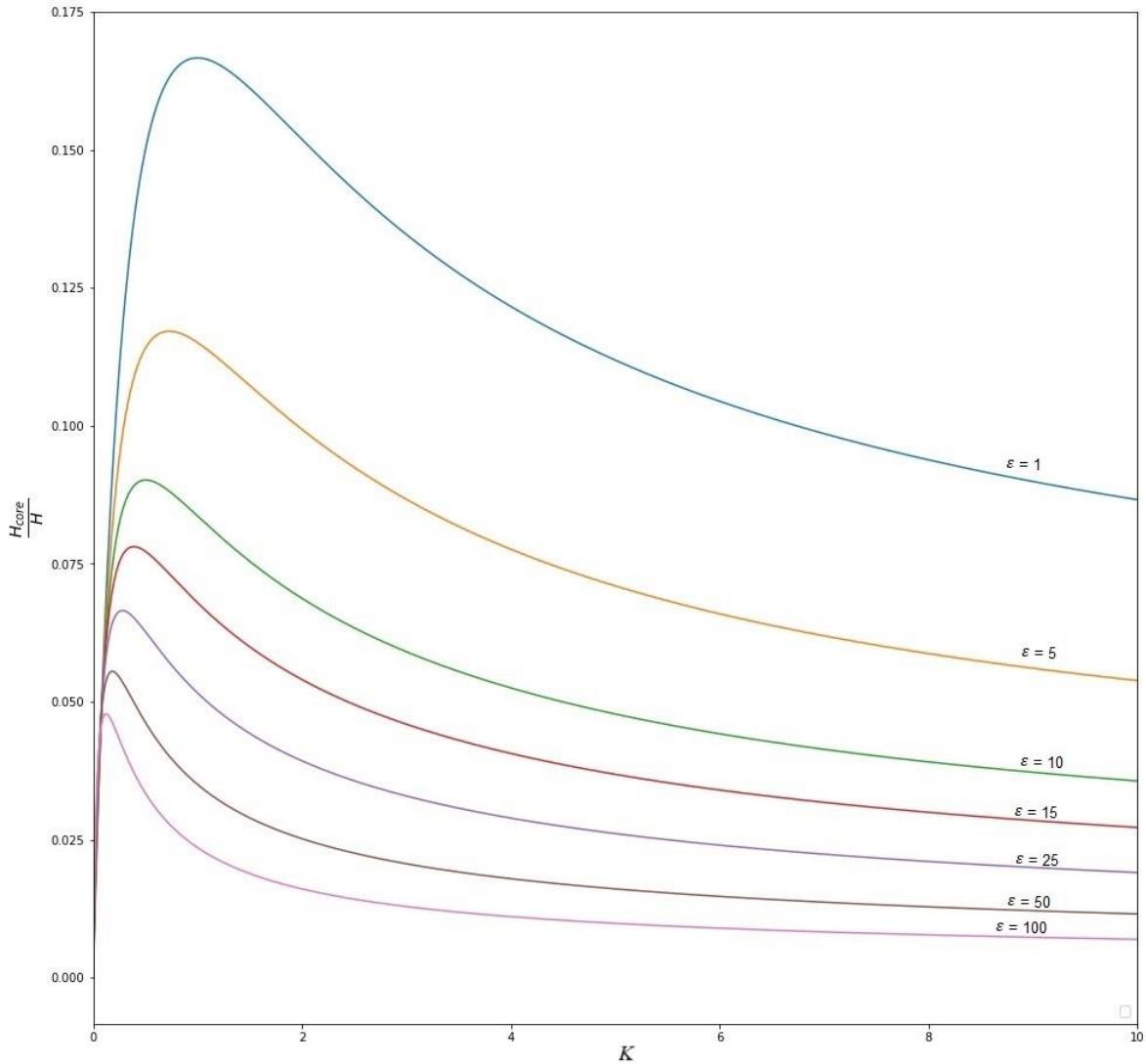


Рис.37. Зависимость доли энергии ядра в энергии всего вихря  $\frac{H_{core}}{H}$  от безразмерного параметра сплюснутости  $K$  при различных фиксированных значениях параметра вытягивания  $\varepsilon$ .

Как видно из рисунка 37, максимальная доля  $\frac{H_{core}}{H}$  составляет порядка 17%. Такой результат наблюдается для шарообразного вихря с параметрами ядра  $\varepsilon = 1, K = 1$ .

## 2.2 Эволюция энергии вихря в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом

В предыдущем разделе мы рассмотрели энергетику вихря в баротропном потоке. Однако в реальных геофизических и гидродинамических условиях потоки зачастую обладают бароклинной структурой. В отличие от баротропного потока, в потоке с вертикальным сдвигом меняются все геометрические параметры ядра, включая ориентацию.

Полная энергия вихря будет определяться выражением (60). Выделив переменную часть в этом выражении, получим

$$H(\varepsilon, K) = \text{const} \cdot K^{\frac{1}{3}} \int_0^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{(m + \varepsilon)(m + \varepsilon^{-1})(K^2 + m)}}. \quad (73)$$

В бароклинном потоке с вертикальным сдвигом была исследована эволюция параметров  $\varepsilon$  и  $K$  по безразмерному времени  $\sigma t$  (см. разделы 1.4, 1.5), поэтому удобно рассматривать безразмерную энергию вихря, как функцию от безразмерного времени

$$E(\sigma t) = K(\sigma t)^{\frac{1}{3}} \int_0^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{(m + \varepsilon(\sigma t))(m + \varepsilon(\sigma t)^{-1})(K(\sigma t)^2 + m)}}. \quad (74)$$

Очевидно, что эволюция энергии будет сильно меняться при переходе через критический сдвиг внешнего бароклинного течения.

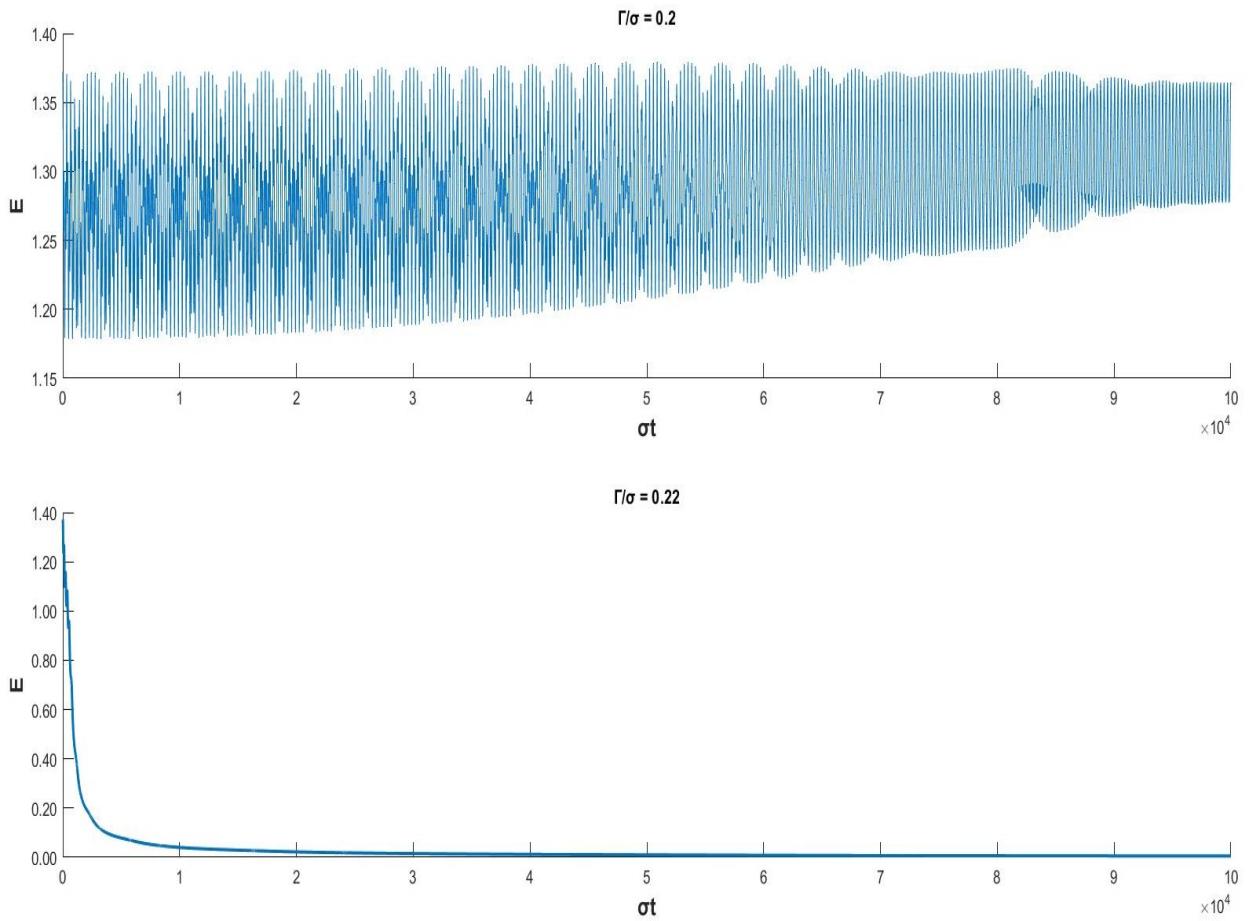


Рис.38. Зависимость безразмерной энергии вихря  $E$  от безразмерного времени  $\sigma t$  для двух значений сдвига: при величине сдвига, меньшей критического ( $\Gamma/\sigma = 0.2$ ) и при превышении критического порога ( $\Gamma/\sigma = 0.22$ ). В обоих случаях использованы одинаковые начальные параметры:  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.1, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ .

Из рисунка 38 видно, что в режиме выживания при меньших сдвигах энергия вихря колеблется около начального значения. Следовательно, в режиме выживания вихрь живет бесконечно долгое время в среднем без потери энергии. Такой результат вполне ожидаем. В потоке с вертикальным сдвигом большем критического значения после незначительных колебаний энергия вихря убывает до нуля, что совпадает со случаем, когда происходит вытягивание баротропным потоком.

Для исследования энергии, заключённой в ядре вихря, необходимо также учитывать ориентацию самого ядра. Сначала выразим сопутствующую систему координат через исходную (см. раздел 1.1.):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z \\ r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z \\ r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Здесь  $r_{ij}$  соответствующий элемент матрицы поворота в (26):

$$\begin{aligned} r_{11} &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi, r_{12} = -\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi \\ r_{13} &= \sin\theta\cos\varphi, r_{21} = \sin\varphi\cos\psi\cos\theta + \sin\psi\cos\varphi \\ r_{22} &= -\sin\psi\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi, r_{23} = \sin\varphi\sin\theta \\ r_{31} &= -\sin\theta\cos\psi, r_{32} = \sin\psi\sin\theta, r_{33} = \cos\theta \end{aligned} . \quad (76)$$

Энергия вихревого ядра определяется выражением (66), в котором фигурируют компоненты градиента давления. Само давление выражается решением (12) в сопутствующей системе координат. Переходя в исходную систему, получим

$$gradP = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial z} \end{pmatrix} . \quad (77)$$

После подстановки (75) в (77), с учетом (12) имеем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_{11}x_1 + \beta r_{21}y_1 + \gamma r_{31}z_1 \\ \alpha r_{12}x_1 + \beta r_{22}y_1 + \gamma r_{32}z_1 \\ \alpha r_{13}x_1 + \beta r_{23}y_1 + \gamma r_{33}z_1 \end{pmatrix}, \quad (78)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  определяются выражением (67). Интегрируя (68) по эллипсоидальному объему, получим

$$H_{core} = \frac{2}{15\rho_0 f N} \pi abc (\alpha^2(r_{11}^2 + r_{12}^2)a^2 + \beta^2(r_{21}^2 + r_{22}^2)b^2 + \gamma^2(r_{31}^2 + r_{32}^2)c^2 + \alpha^2 r_{13}^2 a^2 + \beta^2 r_{23}^2 b^2 + \gamma^2 r_{33}^2 c^2). \quad (79)$$

После подстановки (47), (48) и (67) в (79), получим выражение для полной механической энергии вихревого ядра:

$$H_{core} = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 ab K^2 [(r_{11}^2 + r_{12}^2)f + (r_{21}^2 + r_{22}^2)g + (r_{31}^2 + r_{32}^2)h + r_{13}^2 f + r_{23}^2 g + r_{33}^2 h], \quad (80)$$

где  $f, g, h$  являются функциями геометрических параметров ядра  $\varepsilon$  и  $K$ :

$$\begin{aligned} f &= \varepsilon \left( \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3(\varepsilon^2 + m)(K^2 + m)}} \right)^2 \\ g &= \varepsilon^{-1} \left( \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)^3(K^2 + m)}} \right)^2 \\ h &= K^2 \left( \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)^3}} \right)^2. \end{aligned} \quad (81)$$

Так же как и в случае с баротропным потоком, выражение (80) дает возможность отдельно рассчитать кинетическую и доступную потенциальную энергию ядра. Кинетическая энергия ядра в потоке с вертикальным сдвигом равна

$$T = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 ab K^2 [(r_{11}^2 + r_{12}^2)f + (r_{21}^2 + r_{22}^2)g + (r_{31}^2 + r_{32}^2)h]. \quad (82)$$

Доступная потенциальная энергия ядра определяется выражением

$$\Pi = \frac{1}{40} \rho_o \sigma^2 V_0 ab K^2 (r_{13}^2 f + r_{23}^2 g + r_{33}^2 h). \quad (83)$$

В данных выражениях, как уже отмечалось, учитывается ориентация ядра, которая описывается множителями  $r_{ij}$ . Как и прежде, будем исследовать безразмерные компоненты энергетики вихря. В частности, для полной, кинетической и доступной потенциальной энергий имеем

$$\begin{aligned} E_{core} &= K^{\frac{4}{3}} [(r_{11}^2 + r_{12}^2)f + (r_{21}^2 + r_{22}^2)g + (r_{31}^2 + r_{32}^2)h + r_{13}^2 f + r_{23}^2 g \\ &\quad + r_{33}^2 h], \\ T_{core} &= K^{\frac{4}{3}} [(r_{11}^2 + r_{12}^2)f + (r_{21}^2 + r_{22}^2)g + (r_{31}^2 + r_{32}^2)h], \\ \Pi_{core} &= K^{\frac{4}{3}} [r_{13}^2 f + r_{23}^2 g + r_{33}^2 h]. \end{aligned} \quad (84)$$

Покажем, какова эволюция энергетики ядра вихря в разных режимах поведения во внешнем потоке с вертикальным сдвигом (рис.39-42).

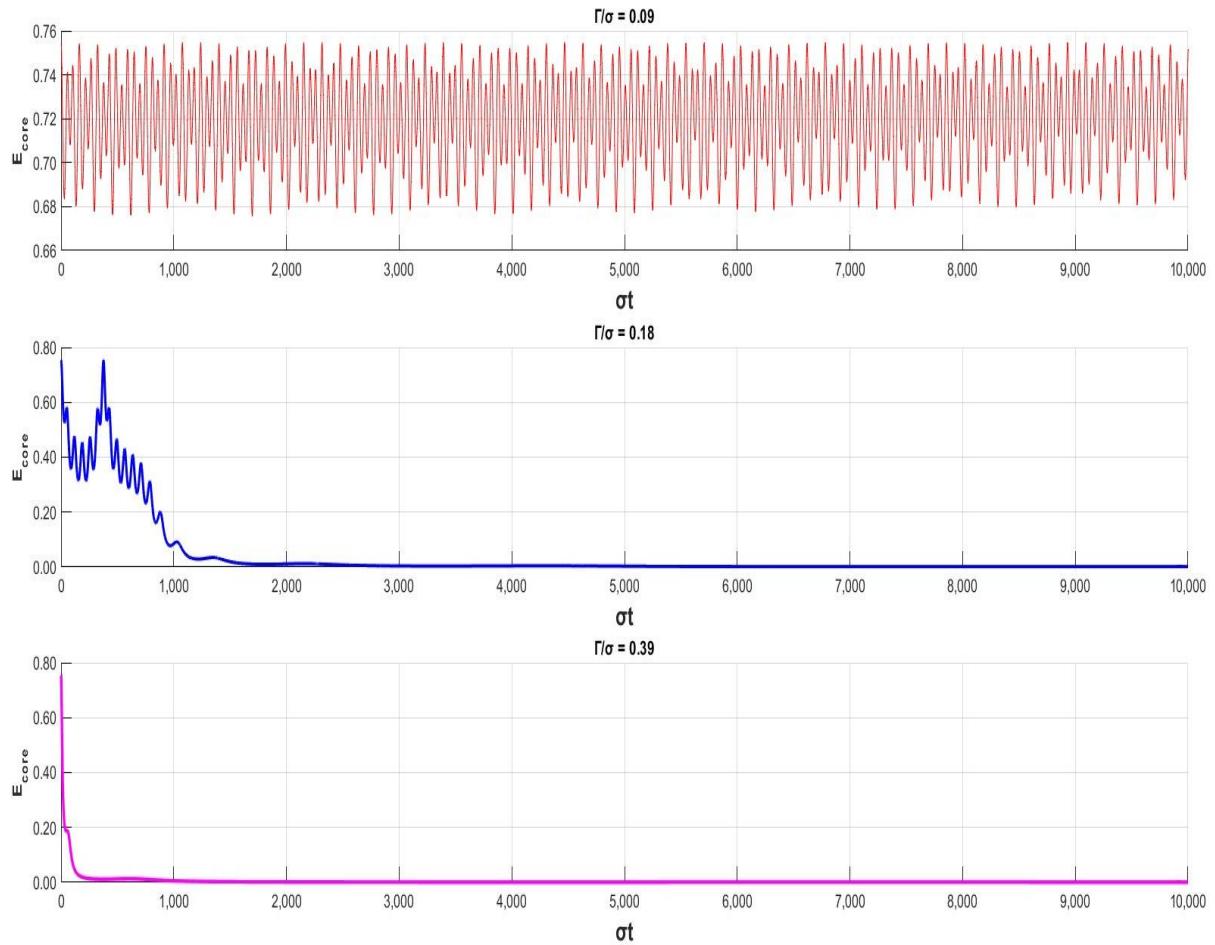


Рис.39. Зависимость безразмерной полной механической энергии ядра от безразмерного времени для трёх характерных режимов: режима выживания, конечного времени жизни и безграничного вытягивания (в порядке сверху вниз). Графики представлены при одинаковых начальных условиях:  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ .

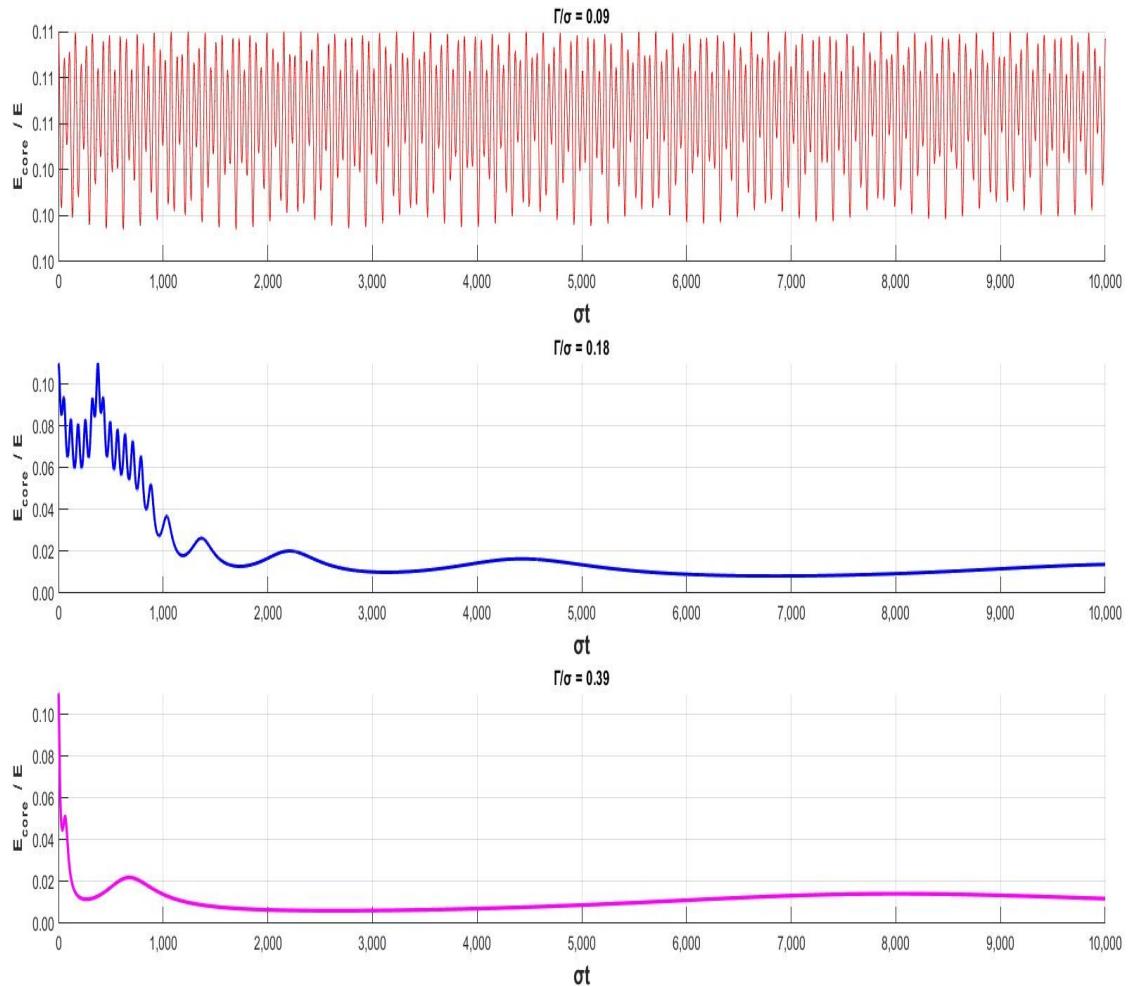


Рис.40. Зависимость доли полной механической энергии ядра в полной механической энергии вихря от безразмерного времени для трёх характерных режимов: режима выживания, конечного времени жизни и безграничного вытягивания (в порядке сверху вниз). Графики представлены при одинаковых начальных условиях:  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ .

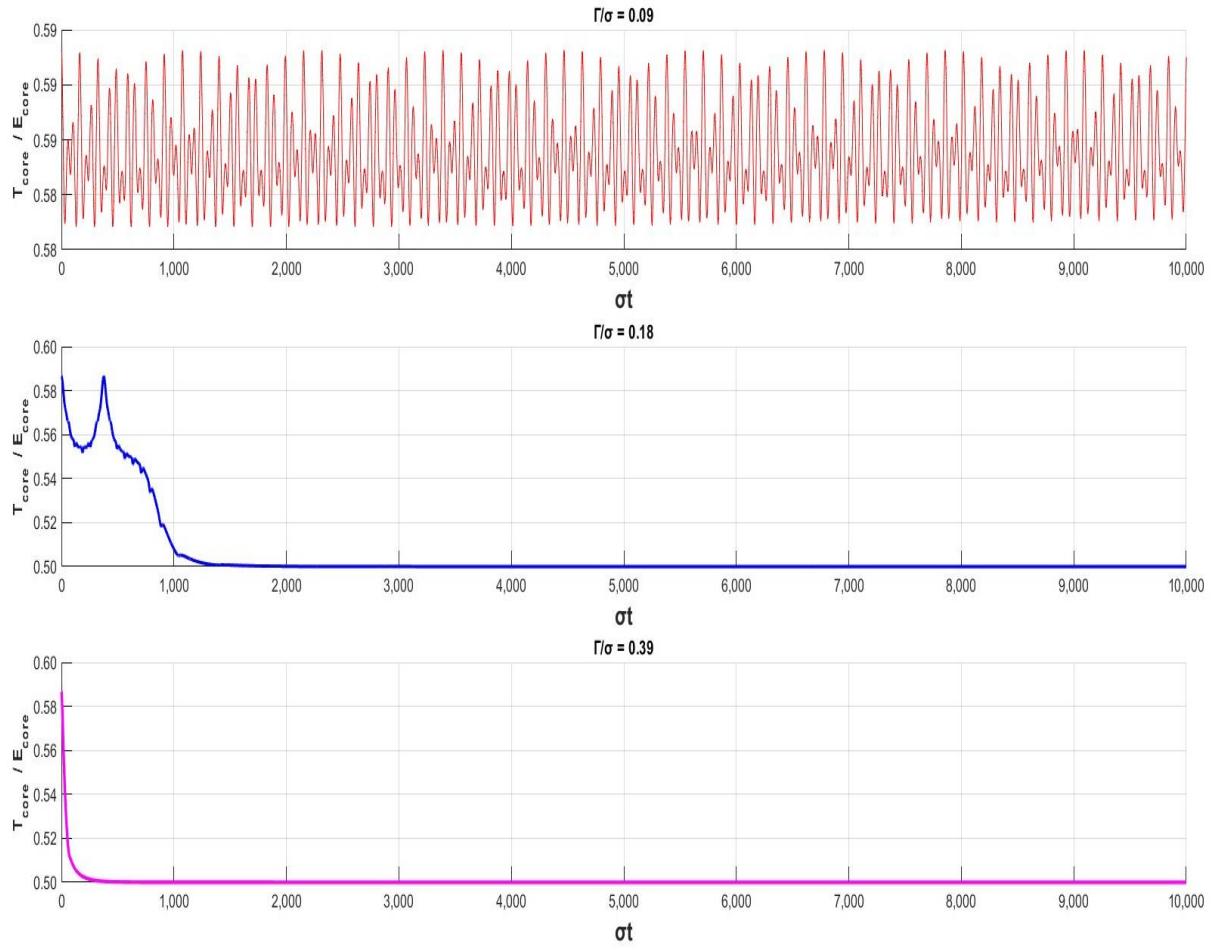


Рис.41. Зависимость доли кинетической энергии ядра в полной механической энергии ядра от безразмерного времени для трёх характерных режимов: режима выживания, конечного времени жизни и безграничного вытягивания (в порядке сверху вниз). Графики представлены при одинаковых начальных условиях:  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ .

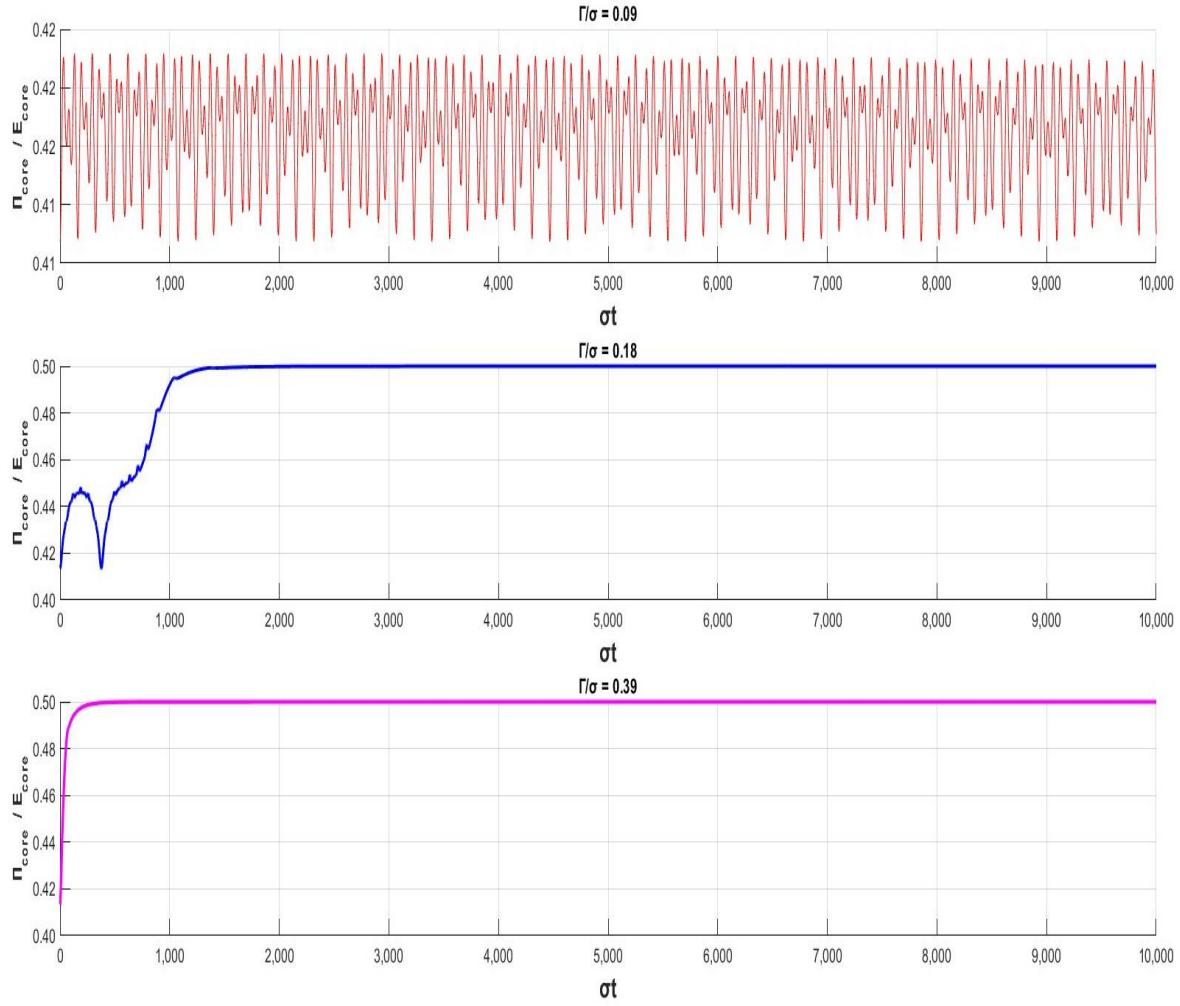


Рис.42. Зависимость доли доступной потенциальной энергии ядра в полной механической энергии ядра от безразмерного времени для трёх характерных режимов: режима выживания, конечного времени жизни и безграничного вытягивания (в порядке сверху вниз). Графики представлены при одинаковых начальных условиях:  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ .

Полученные результаты подтверждают, что и в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом при вытягивании энергия вихревого ядра убывает. Также убывает доля кинетической энергии, а доля доступной потенциальной растет. Такой эффект наблюдается при горизонтальной ориентации ядра вихря. При изменении начального угла нутации  $\theta(0)$  эволюция долей энергетических составляющих может меняться.

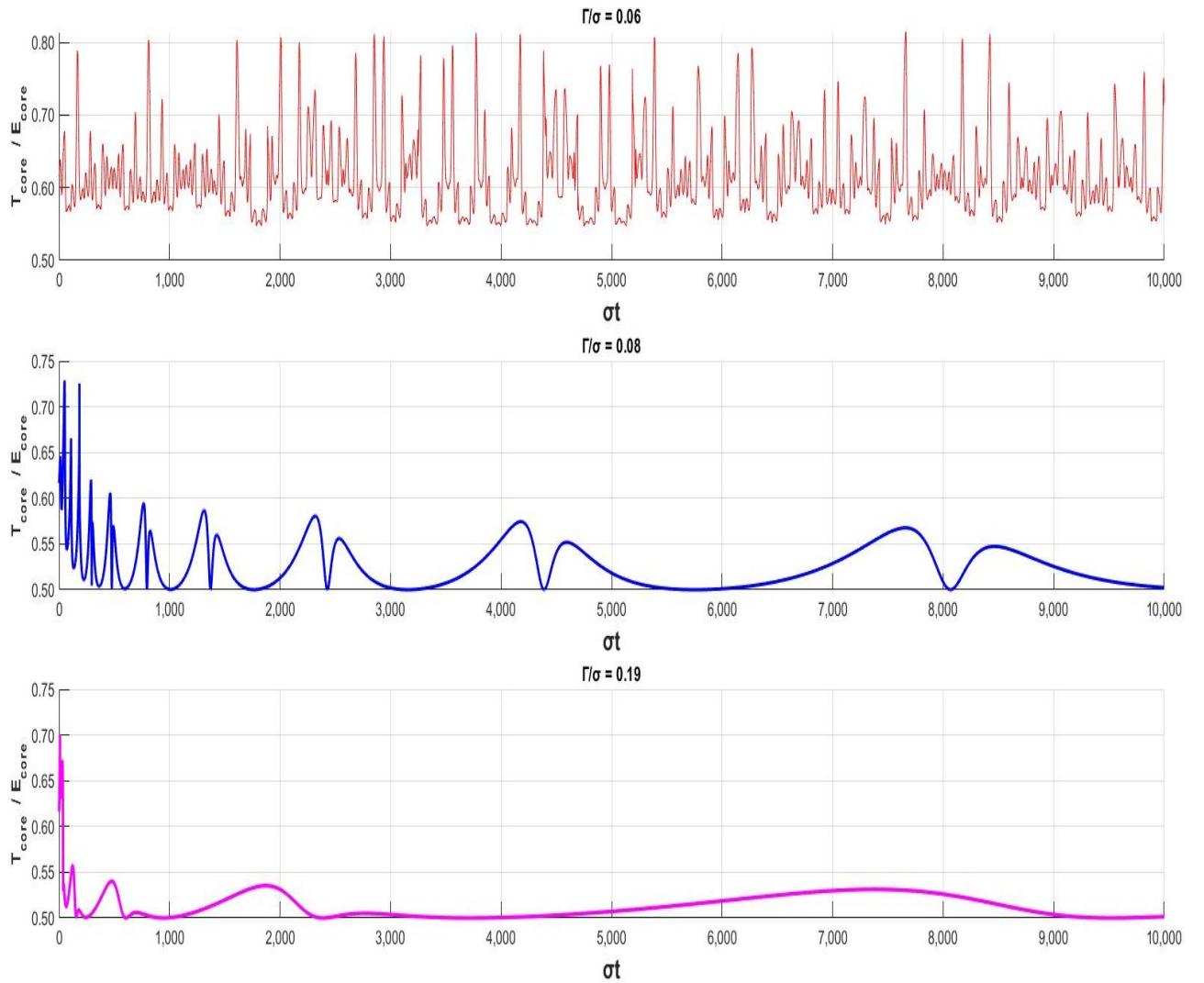


Рис.43. Зависимость доли кинетической энергии ядра в полной механической энергии ядра от безразмерного времени для трёх характерных режимов: режима выживания, конечного времени жизни и безграничного вытягивания (в порядке сверху вниз). Графики представлены при одинаковых начальных условиях:  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = \pi/6, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ .

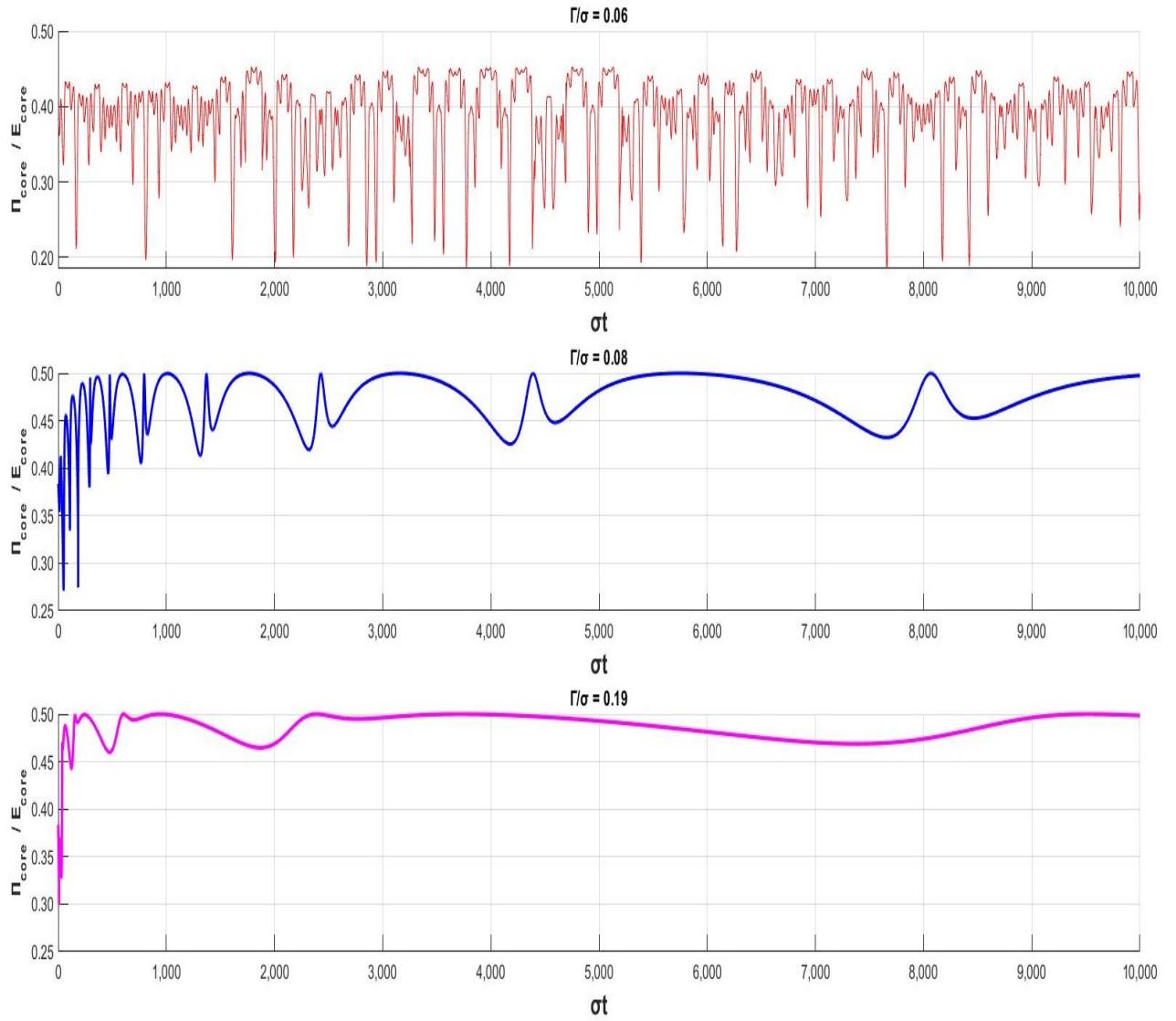


Рис.44.Зависимость доли доступной потенциальной энергии ядра в полной механической энергии ядра от безразмерного времени для трёх характерных режимов: режима выживания, конечного времени жизни и безграничного вытягивания (в порядке сверху вниз). Графики представлены при одинаковых начальных условиях:  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = \pi/6, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ .

Исходя из численных результатов, представленных на рисунках 43 и 44, становится очевидным, что ориентация ядра влияет на перераспределение долей энергии между кинетической и доступной потенциальной.

## 2.3 Потеря энергии вихря

Мы показали, что при вытягивании вихрей как баротропным, так и бароклиническим течением происходит потеря энергии вихревой структуры. Возникает естественный вопрос: к каким последствиям приводит эта потеря энергии? Чтобы ответить на него, необходимо понять, с чем и каким образом взаимодействует сам вихрь. В рамках рассматриваемой задачи локализованный вихрь существует в заданном внешнем потоке, поэтому возможное взаимодействие осуществляется исключительно между вихрем и внешним течением.

Течение за счет неустойчивости (в основном бароклинической) генерирует мезомасштабные вихри. При определенных условиях часть вихрей выживает, в то время как другие вытягиваются. Статистически выживающие вихри характеризуются сохранением энергии, тогда как вытягивающиеся теряют ее в процессе взаимодействия с фоновым потоком. Потерянная вихрем энергия может уйти только обратно в течение. Такое явление характеризуется обратным энергетическим каскадом, или так называемым эффектом отрицательной вязкости. Его суть состоит в следующем: вихрь в момент рождения первоначально получив энергию от течения (прямой энергетический каскад), на стадии неограниченного вытягивания обратно «возвращает» значительную часть энергии в течение. На рисунке 43 представлена схема энергопотоков при эволюции вихря во внешних течениях (как в баротропных, так и в бароклинических).

## Схема энергопотоков

$L_R$  -мезомасштаб,  $L_{SR}$ -субмезомасштаб

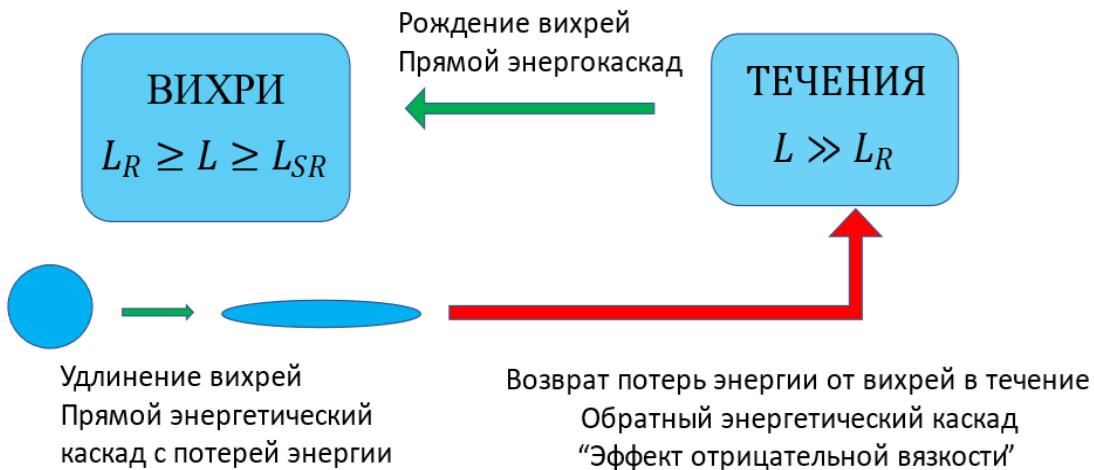


Рис.43. Схема энергопотоков в системе «течение-вихрь».

Благодаря процессу вытягивания вихревого ядра, эволюция системы «течение-вихрь» сопровождается монотонной перекачкой энергии от вихря к течению. Данное явление преимущественно наблюдается в зоне неограниченного вытягивания в бароклиинном и в баротропном потоках [Жмур и др., 2023а, б]. Как уже отмечалось, в баротропном потоке не наблюдалось режима конечной жизни вихря. В бароклиинном потоке с вертикальным сдвигом в этой зоне в начальный момент времени наблюдается колебание энергии: она периодически передается от вихря к течению и обратно. Начиная с момента вытягивания (после окончания времени жизни), энергия монотонно перекачивается в течение. В режиме выживания в бароклиинном течении, а также в колебательно-вращательном режиме в баротропном потоке незначительная часть энергии периодически передается от вихря к течению и наоборот, но в среднем перекачки энергии не наблюдается.

## ГЛАВА 3. ЭВОЛЮЦИЯ ЧИСЛА РОССБИ В БАРОТРОПНОМ И БАРОКЛИННОМ ПОТОКАХ

### 3.1 Эволюция числа Россби в баротропном потоке

Математическая модель, лежащая в основе теории эллипсоидальных квазигеострофических вихрей, построена в рамках квазигеострофического приближения. В связи с этим возникает необходимость контролировать значение числа Россби и определить область применимости данного приближения. С этой целью оценим число Россби для эллипсоидальных вихрей в процессе их эволюции в баротропном потоке.

Число Россби представляет из себя отношение сил инерции к силе Кориолиса:

$$R_O = \frac{U}{fL}, \quad (85)$$

где  $U$  - характерная горизонтальная скорость,  $f$  – параметр Кориолиса,  $L$  - характерный горизонтальный размер явления. Это число можно записать также в иной форме:

$$R_O = \frac{|rot_h \vec{u}|}{f}. \quad (86)$$

Здесь  $rot_h \vec{u}$  представляет собой вертикальную компоненту ротора скорости. Из закона сохранения потенциальной завихренности (4) и его распределения (9) имеем

$$rot_h \vec{u} = \sigma - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}, \quad (87)$$

где функция тока  $\Psi = \frac{p}{\rho_0 f}$ . С учетом решения (10), определения (47) и (48), получим

$$rot_h \vec{u} = \frac{1}{2} \sigma K \int_0^\infty \frac{(2m + (\varepsilon + \varepsilon^{-1}))dm}{\sqrt{(m^2 + (\varepsilon + \varepsilon^{-1})m + 1)^3(K^2 + m)}} . \quad (88)$$

Заметим, что с учетом (86) число Россби есть функция от двух геометрических параметров ядра  $\varepsilon$  и  $K$ :  $R_O = R_O(\varepsilon, K)$ . В баротропном потоке при постоянном параметре сплюснутости  $K$  имеет смысл рассматривать кратность изменения числа Россби при вытягивании от круглого в плане ядра до значения горизонтального параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{R_O(\varepsilon, K)}{R_O(1, K)} &= \frac{rot_h \vec{u}(\varepsilon, K)}{rot_h \vec{u}(1, K)} = \frac{\int_0^\infty \frac{(2m + (\varepsilon + \varepsilon^{-1}))dm}{\sqrt{(m^2 + (\varepsilon + \varepsilon^{-1})m + 1)^3(K^2 + m)}}}{\int_0^\infty \frac{(2m + 2)dm}{\sqrt{(m^2 + 2m + 1)^3(K^2 + m)}}} \\ \frac{R_O(\varepsilon, K)}{R_O(1, K)} &= \frac{\int_0^\infty \frac{(2m + (\varepsilon + \varepsilon^{-1}))dm}{\sqrt{(m^2 + (\varepsilon + \varepsilon^{-1})m + 1)^3(K^2 + m)}}}{2 \int_0^\infty \frac{dm}{(m + 1)^2 \sqrt{(K^2 + m)}}} . \quad (89) \end{aligned}$$

Ниже представлена эволюция относительного числа Россби по формуле (89) при вытягивании ядра вихря баротропным потоком для различных параметров сплюснутости  $K$ .

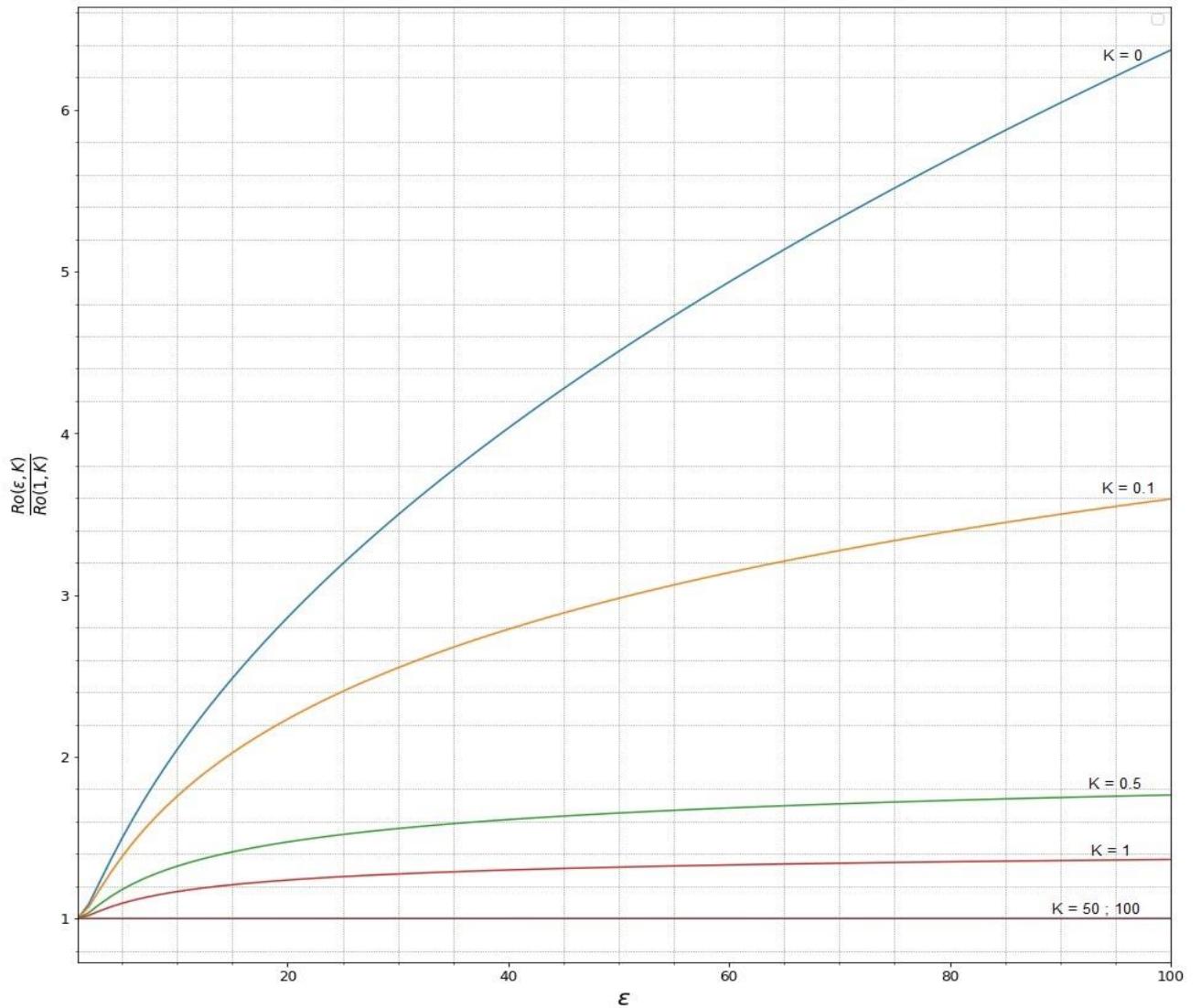


Рис.44. Зависимость коэффициента усиления числа Россби  $\frac{R_O(\varepsilon, K)}{R_O(1, K)}$  от параметра вытягивания  $\varepsilon$  при различных значениях параметра сплюснутости  $K$ .

Рисунок 44 наглядно показывает, что при вытягивании вихря число Россби многократно увеличивается. Такой результат связан с тем, что при вытягивании мезомасштабный вихрь переходит в субмезомасштаб, где начинает нарушаться геострофический баланс. Представим ту же зависимость для узкого диапазона значений параметра вытягивания  $\varepsilon$ .

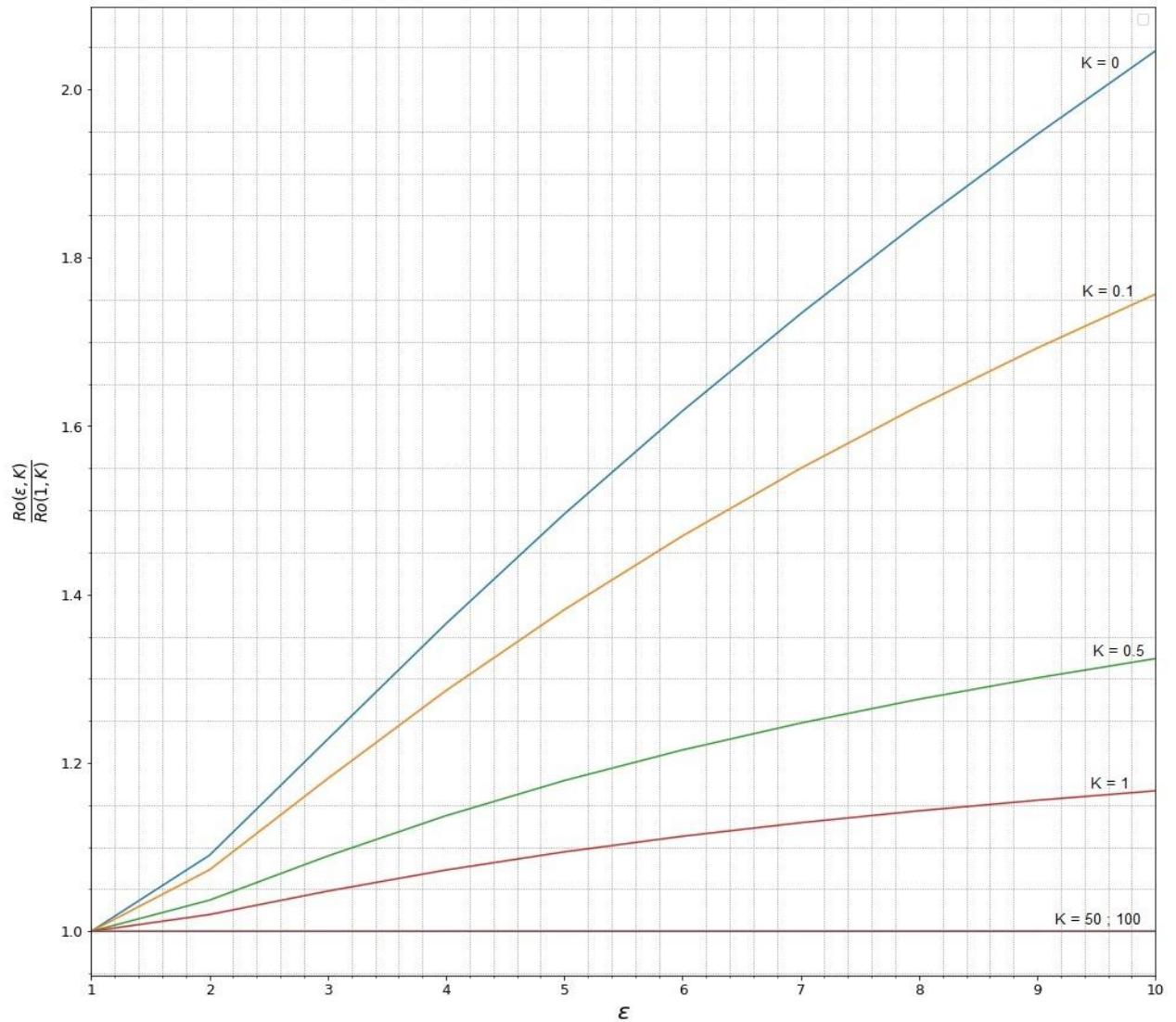


Рис.45. Зависимость коэффициента усиления числа Россби  $\frac{R_O(\varepsilon, K)}{R_O(1, K)}$  от параметра вытягивания  $\varepsilon$  при различных значениях параметра сплюснутости  $K$  при ограниченном вытягивании ядра в 10 раз.

Из рисунков 44 и 45 следует, что толстые вихри, характеризующиеся большим значением параметра  $K$ , обладают большей устойчивостью к переходу в агеострофическое состояние.

### 3.2 Число Россби в бароклиинном потоке с вертикальным сдвигом

Как уже отмечалось, в бароклиинном потоке с вертикальным сдвигом может меняться не только параметр вытягивания  $\varepsilon$ , но и параметр сплюснутости  $K$ , а также углы ориентации. Все эти параметры влияют на эволюцию числа Россби в силу (86). Используя условие геострофического баланса (3), решение (10) и связь (75), получим выражение для числа Россби в бароклиинном потоке с вертикальным сдвигом

$$R_O = \frac{\left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right|}{f} = \frac{\left| \frac{\sigma}{2} [(r_{11}^2 + r_{12}^2)l_1 + (r_{21}^2 + r_{22}^2)l_2 + (r_{31}^2 + r_{32}^2)l_3] \right|}{f}, \quad (90)$$

где как и прежде,  $r_{ij}$  соответствующий элемент матрицы поворота на углы Эйлера, а  $l_1, l_2, l_3$  являются функциями геометрических параметров ядра  $\varepsilon$  и  $K$ :

$$\begin{aligned} l_1 &= K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3 (\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)}} \\ l_2 &= K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)^3 (K^2 + m)}}, \\ l_3 &= K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)^3}}. \end{aligned} \quad (91)$$

Аналогично баротропному потоку, в потоке с вертикальным сдвигом число Россби является функцией геометрических параметров ядра. Разница лишь в том, что в данном случае добавляются множители, описывающие изменение ориентации ядра вихря. Численные расчеты показывают, что эволюция числа Россби, так же как и все остальные гидродинамические параметры, сильно меняется в зависимости от режима поведения ядра.

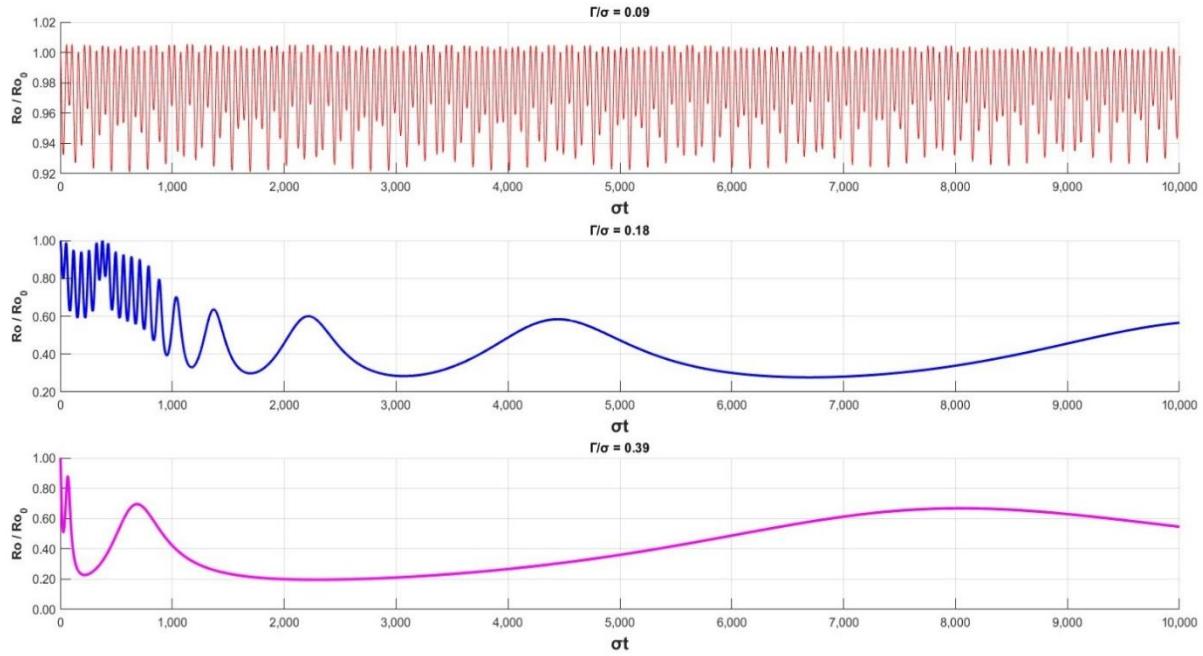


Рис.46.Зависимость относительного числа Россби  $\frac{R_O(\varepsilon,K)}{R_O(\varepsilon(0),K(0))}$  от безразмерного времени для трёх характерных режимов: режима выживания, конечного времени жизни и безграничного вытягивания (в порядке сверху вниз). Графики представлены при одинаковых начальных условиях:  $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ .

Рисунок 46 демонстрирует эволюцию относительного числа Россби  $\frac{R_O(\varepsilon,K)}{R_O(\varepsilon(0),K(0))}$  в потоке с вертикальным сдвигом. Как видим, число Россби в режиме выживания не превышает 2% от начального значения, а в режимах конечного времени жизни и вытягивания вовсе меньше единицы.

Численный анализ показывает, что эволюция числа Россби в баротропных и бароклинических потоках отличается существенно, что указывает на различия в механизмах динамической адаптации вихрей в этих режимах течения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты теоретического исследования поведения эллипсоидального квазигеострофического вихря в баротропных и бароклинных потоках.

Решена задача об эволюции вихря в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом. В зависимости от начальных и внешних условий выявлены три основных режима поведения ядра вихря: 1) режим выживания, в котором вихрь существует бесконечно долгое время, ограниченно сохраняя линейные размеры своего ядра, при этом углы ориентации ядра демонстрируют сложное поведение, сочетающее колебательные и вращательные компоненты; 2) режим конечного времени жизни, при котором ядро вихря на начальной стадии сохраняет свою устойчивую структуру, аналогичную режиму выживания, однако спустя определённый промежуток времени начинает вытягиваться в горизонтальном направлении; 3) режим неограниченного вытягивания, находясь в котором ядро вихря вытягивается с начального момента времени. Определено время жизни вихря, которое в первом режиме стремится к бесконечности, во втором – конечно, в третьем – стремится к нулю. Также выявлен так называемый критический сдвиг – значение сдвига внешнего течения, при котором конкретный вихрь из режима выживания переходит в режим конечного времени жизни или вытягивания. Установлена математическая зависимость критического значения сдвига от начального параметра сплюснутости ядра при его первоначальной горизонтальной ориентации. Полученная зависимость аппроксимируется полиномиальной функцией. Сформулировано необходимое условие выживания вихря в бароклинном потоке: потенциальная завихренность ядра должна как минимум в четыре раза превышать величину вертикального сдвига внешнего течения. При

изменении начальных условий указанное отношение увеличивается, усиливая требования к устойчивости вихря.

Особый интерес представляет режим конечного времени жизни. Такой режим выявлен именно в бароклином потоке с вертикальным сдвигом. Аналогичного режима в баротропном потоке не выявлено. В зону конечного времени жизни попадают вихри промежуточной интенсивности. Их мощности хватает для устойчивого существования лишь конечное время. В долгосрочной перспективе такие вихри, как и слабые, вытягиваются внешним течением в вихревую нить.

На стадии вытягивания с ядром вихря происходит следующее: одна из горизонтальных полуосей ядра (малая полуось эллипсоида) остается неизменной, вторая горизонтальная полуось (большая полуось эллипсоида) неограниченно растет, а вертикальная полуось ядра схлопывается почти до нуля. Такое явление характеризуется монотонным ростом параметра вытягивания ядра  $\varepsilon$  и убыванием параметра сплюснутости ядра  $K$ .

Исследована эволюция энергии вихря и его ядра как в баротропном, так и в бароклином потоках. Установлено, что при вытягивании потоками этих двух типов энергия всего вихря, а также отдельно энергия его ядра убывают. При вытягивании баротропным потоком доля кинетической энергии ядра монотонно уменьшается, тогда как доля доступной потенциальной энергии возрастает. В условиях вертикального сдвига (бароклиновое течение) соотношение между этими долями может зависеть от угла нутации ядра. Однако в реальных океанических условиях, при малых отклонениях ядра от горизонтальной ориентации, поведение системы аналогично баротропному случаю: доля кинетической энергии также убывает по мере вытягивания.

Численные расчёты показали, что на всех этапах эволюции значительная часть энергии сосредоточена за пределами ядра вихря. Этот результат справедлив как для баротропных, так и для бароклинических течений.

Обоснована возможность проявления обратного энергетического каскада, или так называемого эффекта отрицательной вязкости, как в баротропных, так и в бароклинических течениях. Такое явление наблюдается для вихрей в режимах конечного времени жизни и в режиме вытягивания. Вихрь, получив энергию от течения (в момент формирования), на стадии неограниченного вытягивания монотонно перекачивает свою энергию обратно в течение. Эффект отрицательной вязкости проявляется в течениях, которым характерны деформирующие свойства. При наблюдении процессов вытягивания вихрей в таких течениях можно ожидать усиления последнего вследствие передачи энергии от мелкомасштабных структур к более крупным.

Определена эволюция числа Россби для вихрей как в баротропных, так и в бароклинических течениях. В баротропном потоке с вытягиванием вихря число Россби увеличивается, причем коэффициент усиления больше для тонких по вертикали ядер. С вытягиванием вихрь превращается в агеострофическое образование. В бароклиническом потоке эволюция числа Россби сильно меняется. Во всех режимах поведения, включая режим вытягивания, число Россби не увеличивается, а сам вихрь остается квазигеострофическим.

## Список сокращений и условных обозначений

$L_R$  – радиус деформации Россби [м]

$H$  – глубина океана [м]

$Ro$  – число Россби

$N$  – частота Вяйсяля-Бреннита [ $\text{с}^{-1}$ ]

$f$  – параметр Кориолиса [ $\text{с}^{-1}$ ]

$\sigma$  – потенциальная завихренность по Россби [ $\text{с}^{-1}$ ]

$\Gamma$  – вертикальный сдвиг внешнего бароклинного течения [ $\text{с}^{-1}$ ]

$\Psi$  – функция тока [ $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ]

$p$  – давление [Па]

$\varphi, \theta, \psi$  – углы Эйлера [рад]

$(x, y, z)$  – исходная(неподвижная) система координат

$(x_1, y_1, z_1)$  – сопутствующая с ядром система координат

$a, b, c$  – главные полуоси ядра вихря [м]

$\varepsilon = \frac{a}{b}$  – безразмерный параметр вытягивания ядра вихря

$K = \frac{c}{\sqrt{ab}}$  – безразмерный параметр вертикальной сплюстнутости ядра

$\tau = \frac{\Gamma}{\sigma}$  – безразмерный параметр сдвига

$\sigma t$  – безразмерное время

## **Список использованной литературы**

1. Штокман В. Б. и др. Длительные измерения изменчивости физических полей на океанических полигонах, как новый этап в исследовании океана //Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1969. – Т. 186. – №. 5. – С. 1070-1073.
2. Кошляков М. Н., Грачев Ю. М. Среднемасштабные течения на гидрофизическом полигоне в тропической Атлантике //Атлантический гидрофизический Полигон-70/Под ред. Корта ВГ, Самойленко ВСМ: Наука. – 1974.
3. Stepanov D. V., Diansky N. A., Fomin V. V. Eddy energy sources and mesoscale eddies in the Sea of Okhotsk //Ocean Dynamics. – 2018. – Т. 68. – С. 825-845.
4. Степанов Д. В., Дианский Н. А., Новотрясов В. В. Численное моделирование циркуляции вод центральной части Японского моря и исследование ее долгопериодной изменчивости в период 1958-2006 гг //Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2014. – Т. 50. – №. 1. – С. 84-84.
5. Дианский Н. А. и др. Роль ветрового и термического воздействий в формировании изменчивости циркуляции вод в Центральной котловине Японского моря с 1958 по 2006 гг //Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2016. – Т. 52. – №. 2. – С. 234-234.
6. Соколовский М. А. Численное моделирование нелинейной неустойчивости осесимметричных двухслойных вихрей //Известия АН ФАО. – 1992. – Т. 28. – №. 6. – С. 615-624.

7. Козлов В. Ф., Макаров В. Г., Соколовский М. А. Численная модель бароклинной неустойчивости осесимметричных вихрей в двухслойном океане //Известия Академии наук СССР. Физика атмосферы и океана. – 1986. – Т. 22. – №. 8. – С. 868-874.
8. Завьялов П. О. и др. Результаты наблюдений океана из космоса по программе эксперимента «Диатомея» на РС МКС //Совр. пробл. дист. Зонд. Земли из космоса. – 2008. – Т. 2. – №. 5. – С. 90-94.
9. Носов М. А., Нурисламова Г. Н. Потенциальный и вихревой следы цунамигенного землетрясения в океане //Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2012. – №. 5. – С. 44-48.
10. Иванов А.Ф., Парамонов А.Н. Эволюция индивидуального циклонического вихря // Синоптические вихри в океане. Киев: Наук. Думка, 1980. С. 107-114.
11. Иванов Ю.А., Корт В.Г., Монин А.С. О мезомасштабных неоднородностях океана// Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 3. С. 706-709.
12. Баранов Е.И. Структура и динамика вод системы Гольфстрима. М.: Гидрометеоиздат, 1988. 252 с.
13. Калашник М. В., Курганский М. В., Чхетиани О. Г. Бароклинная неустойчивость в геофизической гидродинамике //Успехи физических наук. – 2022. – Т. 192. – №. 10. – С. 1110-1144.
14. Григорьев А. В. и др. Антициклонический вихрь рингового типа на свале глубин северо-западной части Черного моря //Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон. – 2001. – Т. 3. – С. 57.

15. Гинзбург А. И., Федоров К. Н. Эволюция грибовидных течений в океане //Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 276. – №. 2. – С. 481-484.
16. Olson D. B., Evans R. H. Rings of the Agulhas current //Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers. – 1986. – Т. 33. – №. 1. – С. 27-42.
17. Richardson P. L. Gulf Stream ring trajectories //Journal of Physical Oceanography. – 1980. – Т. 10. – №. 1. – С. 90-104.
18. Bane J. M., O'Keefe L. M., Watts D. R. Mesoscale eddies and submesoscale, coherent vortices: Their existence near and interactions with the Gulf Stream //Elsevier oceanography series. – Elsevier, 1989. – Т. 50. – С. 501-518.
19. McDowell S.E. Discovery of a «Meddy» in the Hatteras Abyssal Plain // POLYMODE News. 1977. N 36. P. 5-6.
20. McDowell S. E., Rossby H. T. Mediterranean water: An intense mesoscale eddy off the Bahamas //Science. – 1978. – Т. 202. – №. 4372. – С. 1085-1087.
21. Hebert D. Mediterranean salt lenses //Elsevier oceanography series. – Elsevier, 1988. – Т. 46. – С. 229-237.
22. Tokos K. S., Rossby T. Kinematics and dynamics of a Mediterranean salt lens //Journal of Physical Oceanography. – 1991. – Т. 21. – №. 6. – С. 879-892.
23. Филюшкин Б. Н. и др. О динамике внутритеrmоклининых линз //Доклады Академии наук. – Федеральное государственное бюджетное учреждение "Российская академия наук", 2010. – Т. 434. – №. 5. – С. 688-691.

24. Зацепин А. Г. и др. О ветровом механизме трансформации линзы опресненных речным стоком вод в Карском море //Океанология. – 2017. – Т. 57. – №. 1. – С. 5-12.
25. Рыжов Е. А., Кошель К. В. Вентилирование области топографического вихря захваченным свободным вихрем //Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2011. – Т. 47. – №. 6. – С. 845-845.
26. Анисимов М. В., Дианский Н. А. Физический механизм западного дрейфа рингов фронтальных течений в океане //Океанология. – 2008. – Т. 48. – №. 3. – С. 325-332.
27. Резник Г. М. Динамика локализованных вихрей на бета-плоскости //Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2010. – Т. 46. – №. 6. – С. 846-860.
28. Коротаев Г. К. Структура и кинематика синоптических вихрей в океане: теория и современные наблюдения //Морской гидрофизический журнал. – 2020. – Т. 36. – №. 6 (216). – С. 757-780.
29. Худякова С. П., Травкин В. С., Белоненко Т. В. Мезомасштабные вихри Алеутского жёлоба //Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. – 2023. – Т. 20. – №. 6. – С. 211-221.
30. Журбас В. М., Ох И. С., Парк Т. Роль бета-эффекта в угасании вдольбереговой бароклинной струи, связанной с преходящим прибрежным ап-и даунвельлингом: численные эксперименты //Океанология. – 2006. – Т. 46. – №. 2. – С. 189-196.

31. Павлушкин А. А., Шапиро Н. Б., Михайлова Э. Н. Роль рельефа дна и  $\beta$ -эффекта в динамике Черного моря //Морской гидрофизический журнал. – 2017. – №. 6 (198). – С. 27-39.
32. Chelton D. B. et al. Global observations of large oceanic eddies //Geophysical Research Letters. – 2007. – Т. 34. – №. 15.
33. Schlax M. G., Chelton D. B. The influence of mesoscale eddies on the detection of quasi-zonal jets in the ocean //Geophysical Research Letters. – 2008. – Т. 35. – №. 24.
34. Fu L. L. et al. Eddy dynamics from satellite altimetry //Oceanography. – 2010. – Т. 23. – №. 4. – С. 14-25.
35. Kurian J. et al. Eddy properties in the California current system //Journal of Geophysical Research: Oceans. – 2011. – Т. 116. – №. C8.
36. Chelton D. B., Schlax M. G., Samelson R. M. Global observations of nonlinear mesoscale eddies //Progress in oceanography. – 2011. – Т. 91. – №. 2. – С. 167-216.
37. Chelton D. B. et al. The influence of nonlinear mesoscale eddies on near-surface oceanic chlorophyll //Science. – 2011. – Т. 334. – №. 6054. – С. 328-332.
38. Faghmous J. H. et al. A daily global mesoscale ocean eddy dataset from satellite altimetry //Scientific data. – 2015. – Т. 2. – №. 1. – С. 1-16.
39. Mason E., Pascual A., McWilliams J. C. A new sea surface height-based code for oceanic mesoscale eddy tracking //Journal of atmospheric and oceanic technology. – 2014. – Т. 31. – №. 5. – С. 1181-1188.

40. Morrow R. et al. Divergent pathways of cyclonic and anti-cyclonic ocean eddies //Geophysical Research Letters. – 2004. – T. 31. – №. 24.
41. Doglioli A. M. et al. Tracking coherent structures in a regional ocean model with wavelet analysis: Application to Cape Basin eddies //Journal of Geophysical Research: Oceans. – 2007. – T. 112. – №. C5.
42. Gaube P. et al. Regional variations in the influence of mesoscale eddies on near-surface chlorophyll //Journal of Geophysical Research: Oceans. – 2014. – T. 119. – №. 12. – C. 8195-8220.
43. Sangrà P. et al. The Canary Eddy Corridor: A major pathway for long-lived eddies in the subtropical North Atlantic //Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers. – 2009. – T. 56. – №. 12. – C. 2100-2114.
44. Ducet N., Le Traon P. Y., Reverdin G. Global high-resolution mapping of ocean circulation from TOPEX/Poseidon and ERS-1 and-2 //Journal of Geophysical Research: Oceans. – 2000. – T. 105. – №. C8. – C. 19477-19498.
45. Early J. J., Samelson R. M., Chelton D. B. The evolution and propagation of quasigeostrophic ocean eddies //Journal of Physical Oceanography. – 2011. – T. 41. – №. 8. – C. 1535-1555.
46. Schütte F., Brandt P., Karstensen J. Occurrence and characteristics of mesoscale eddies in the tropical northeastern Atlantic Ocean //Ocean Science. – 2016. – T. 12. – №. 3. – C. 663-685.
47. Laxenaire R. et al. Anticyclonic eddies connecting the western boundaries of Indian and Atlantic Oceans //Journal of Geophysical Research: Oceans. – 2018. – T. 123. – №. 11. – C. 7651-7677.

48. Pegliasco C. et al. META3. 1exp: A new global mesoscale eddy trajectory atlas derived from altimetry //Earth System Science Data. – 2022. – Т. 14. – №. 3. – С. 1087-1107.
49. Федоров А. М., Башмачников И. Л., Белоненко Т. В. Зимняя конвекция в Лофотенской котловине по данным буев Argo и гидродинамического моделирования //Вестник Санкт-Петербургского университета. Науки о Земле. – 2019. – Т. 64. – №. 3. – С. 491-511.
50. Башмачников И. Л., Белоненко Т. В., Куйбин П. А. Приложение теории колоннообразных Q-вихрей с винтовой структурой к описанию динамических характеристик Лофотенского вихря Норвежского моря //Вестник Санкт-Петербургского университета. Науки о Земле. – 2017. – №. 3. – С. 221-236.
51. Сантьева Е. К., Башмачников И. Л., Соколовский М. А. Об устойчивости Лофотенского вихря Норвежского моря //Океанология. – 2021. – Т. 61. – №. 3. – С. 353-365.
52. Зинченко В. А. и др. Мезомасштабные вихри Лофотенской котловины по спутниковым данным //Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2021. – Т. 12. – №. 3. – С. 46-54.
53. Белоненко Т. В. и др. Циркуляция вод в Лофотенской котловине Норвежского моря //Вестник Санкт-Петербургского университета. Науки о Земле. – 2014. – №. 2. – С. 108-121.
54. Новоселова Е. В., Белоненко Т. В. Изопикническая адвекция в Лофотенской котловине Норвежского моря //Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2021. – Т. 13. – №. 3. – С. 56-67.

55. Травкин В. С., Белоненко Т. В. Исследование вихревой изменчивости в Лофотенской котловине на основе анализа доступной потенциальной и кинетической энергии //Морской гидрофизический журнал. – 2021. – Т. 37. – №. 3 (219). – С. 318-332.
56. Fedorov K. N., Ginsburg A. I. «Mushroom-like» currents (vortex dipoles) in the ocean and in a laboratory tank //Annales geophysicae. Series B. Terrestrial and planetary physics. – 1986. – Т. 4. – №. 5. – С. 507-516.
57. McWilliams J. C. Maps from the mid-ocean dynamics experiment: Part I. Geostrophic streamfunction //Journal of Physical Oceanography. – 1976. – Т. 6. – №. 6. – С. 810-827.
58. McWilliams J. C. Maps from the mid-ocean dynamics experiment: Part II. Potential vorticity and its conservation //Journal of Physical Oceanography. – 1976. – Т. 6. – №. 6. – С. 828-846.
59. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
60. Чаплыгин С.А. Собрание сочинений. Т. 2. М: Гостехиздат ,1948. 643 с.
61. Kida S. Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow //Journal of the Physical Society of Japan. – 1981. – Т. 50. – №. 10. – С. 3517-3520.
62. Polvani L. M., Flierl G. R. Generalized kirchhoff vortices //The Physics of fluids. – 1986. – Т. 29. – №. 8. – С. 2376-2379.
63. Жмур В. В., Панкратов К. К. Динамика эллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке //Океанология. – 1989. – Т. 29. – №. 2. – С. 205-211.

64. Жмур В. В., Панкратов К. К. Динамика мезомасштабного вихревого образования в поле течения крупного интенсивного вихря //Океанология. – 1990. – Т. 30. – №. 2. – С. 170.
65. Жмур В. В., Панкратов К. К. Дальнее взаимодействие ансамбля квазигеострофических эллипсоидальных вихрей. Гамильтонова формулировка //Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1990. – Т. 26. – №. 9. – С. 972-981.
66. Жмур В. В., Щепеткин А. Ф. Эволюция эллипсоидального вихря в стратифицированном океане в приближении  $f$ -плоскости //Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1991. – Т. 27. – №. 5. – С. 492-503.
67. Жмур В. В., Щепеткин А. Ф. Взаимодействие двух квазигеострофических бароклинных вихрей: тенденция к сближению и слиянию //Изв. АН СССР. ФАО. – 1992. – Т. 28. – №. 5. – С. 538-551.
68. Meacham S. P. et al. The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid //Dynamics of Atmospheres and Oceans. – 1994. – Т. 21. – №. 2-3. – С. 167-212.
69. Dritschel D. G., Reinaud J. N., McKIVER W. J. The quasi-geostrophic ellipsoidal vortex model //Journal of Fluid Mechanics. – 2004. – Т. 505. – С. 201-223.
70. McKIVER W. J., Dritschel D. G. The motion of a fluid ellipsoid in a general linear background flow //Journal of Fluid Mechanics. – 2003. – Т. 474. – С. 147-173.

71. McKIVER W. J., Dritschel D. G. The stability of a quasi-geostrophic ellipsoidal vortex in a background shear flow //Journal of Fluid Mechanics. – 2006. – Т. 560. – С. 1-17.
72. McKiver W. J., Dritschel D. G. Balanced solutions for an ellipsoidal vortex in a rotating stratified flow //Journal of Fluid Mechanics. – 2016. – Т. 802. – С. 333-358.
73. Зацепин А. Г., Елкин Д. Н., Шварцман Д. Р. Предварительные результаты лабораторных исследований эволюции нефронтальных вихрей в двуслойной вращающейся жидкости //Океанологические исследования. – 2023. – Т. 51. – №. 1. – С. 5-35.
74. Зацепин А. Г. и др. Субмезомасштабные вихри на кавказском шельфе Черного моря и порождающие их механизмы //Океанология. – 2011. – Т. 51. – №. 4. – С. 592-605.
75. Жмур В. В. Мезомасштабные вихри океана. – 2011.
76. Жмур В. В. и др. Условия трансформации мезомасштабного вихря в субмезомасштабную вихревую нить при вытягивании его неоднородным баротропным течением //Океанология. – 2023. – Т. 63. – №. 2. – С. 200-210.
77. Жмур В. В. и др. Приложение к реальному океану теории трансформации мезомасштабного вихря в субмезомасштабную вихревую нить при вытягивании его неоднородным баротропным течением //Океанология. – 2023. – Т. 63. – №. 2. – С. 211-223.
78. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 736 с. – 1977.

79. Horn R. A., Johnson C. R. Matrix analysis. – Cambridge university press, 2012. 567 c.