

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Овсянников Евгений Алексеевич

**Разрушение решений нелинейных уравнений
теории волн в плазме**

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Корпусов Максим Олегович

Москва — 2026

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Вывод уравнений.....	12
1.1 Вывод уравнений для дрейфовых волн в плазме.....	12
1.2 Вывод уравнений для ионно-звуковых волн в плазме	15
Глава 2. Обозначения	17
Глава 3. Фундаментальное решение и его свойства	22
3.1 Вывод фундаментального решения	22
3.2 Оценки фундаментального решения	26
Глава 4. Формулы Грина.....	28
4.1 Вторая формула Грина.....	28
4.2 Третья формула Грина в ограниченной области	29
4.3 Третьи формулы Грина во всём пространстве.....	36
Глава 5. О некоторых интегралах	39
Глава 6. Исследование потенциалов в пространствах Гёльдера	46
Глава 7. Оценки типа Шаудера	86
7.1 Априорная оценка типа Шаудера	86
7.2 Оценки типа Шаудера для потенциалов с весом	86
Глава 8. Гладкость весового потенциала	107
Глава 9. Задачи Коши	112
9.1 Задача Коши 1	112
9.2 Задача Коши 2	136
9.3 Задача Коши 3	142

9.4 Интерпретации разрушений решений задач Коши с точки зрения физики	153
Глава 10. Начально-краевая задача и её аналитическое исследование	156
10.1 Постановка начально-краевой задачи.....	156
10.2 Сведение задачи к интегро-дифференциальному уравнению	158
10.3 Локальная разрешимость начально-краевой задачи	161
10.4 Априорная верхняя оценка для времени существования решения	175
10.5 Пример разрушения решения начально-краевой задачи и его физическая интерпретация.....	179
Глава 11. Численное исследование начально-краевой задачи ..	181
11.1 Сведение задачи к системе дифференциально-алгебраических уравнений	181
11.2 Метод прямых	182
11.3 Одностадийная схема Розенброка с комплексным коэффициентом	185
11.4 Численное диагностирование момента разрушения решения. Вычисления на сгущающихся сетках. Контроль точности по Ричардсону.....	187
11.5 Численные эксперименты	189
Заключение	199
Список литературы	201
Основные публикации автора по теме диссертации	208
Приложение А. Комплекс программ для реализации численных методов главы 11	212

Введение

Актуальность темы

Диссертация относится к области нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и является исследованием математических проблем электродинамики. Работа посвящена аналитическому исследованию разрушений решений задач Коши для уравнений ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, а также аналитическому и численному исследованиям разрушений решений начально-краевой задачи для уравнения сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме. Разрушение решения с физической точки зрения в рассматриваемых задачах может означать взрыв плазмы, или опрокидывание ионно-звуковых или дрейфовых волн в плазме, или эффект «black hole», при котором потенциал электрического поля ионно-звуковых или дрейфовых волн в плазме в момент разрушения ограничен, но имеет бесконечную скорость. С математической точки зрения разрушение решения понимается в том смысле, что решение задачи принадлежит некоторому функциональному классу, зависящему от времени, и в момент разрушения решение перестаёт принадлежать этому классу. Как правило, это проявляется в нарушении гладкости решения.

В последние десятилетия активно проводятся исследования в области магнитного удержания плазмы в установках термоядерного синтеза (токамаках) (см., например, G. McCracken, P. Stott [1]). Для конструирования таких установок необходимо подробное изучение физических свойств самой плазмы, в том числе распространяющихся в ней разных типов волн (см. А.И. Ахиезер [2]). Объектом исследования в диссертации являются ионно-звуковые и дрейфовые волны в плазме. Ионно-звуковые волны — это продольные квазиэлектростатические волны в плазме, связанные с колебанием ионов. Они возникают в неравновесной плазме, в которой температура электронов T_e значительно выше, чем температура ионов T_i ($T_i \sim 10^2$ К, $T_e \sim 10^4$ К). Дрейфовые волны возникают в той же неравновесной плазме, но помещённой во внешнее магнитное поле. Они вызваны градиентом давления в намагниченной плазме, распространяются поперёк градиента давления и перпендику-

лярно внешнему магнитному полю.

В диссертации проводится исследование разрушений решений задач для нижеперечисленных уравнений ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, являющихся нелинейными уравнениями типа Соболева:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial |D_x u|^2(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

причём

$$\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 > 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

В случае $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 > 0$ мы сталкиваемся с уравнениями из теории ионно-звуковых волн, а когда $\omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 > 0$, мы имеем уравнения из теории дрейфовых волн в плазме. В обоих случаях функция u прямо пропорциональна потенциалу φ электрического поля ионно-звуковых или дрейфовых волн в плазме.

Изучение новых задач для уравнений типа С.Л. Соболева является интенсивно развивающимся направлением современной математической физики. В диссертационной работе доказывається, что с точки зрения математики происходит разрушение решений рассматриваемых задач, причём с точки зрения физики подобные «разрушения» означают разные физические процессы. В частности, удалось обнаружить взрыв плазмы высокой плотности. Также обнаружен эффект опрокидывания ионно-звуковых/дрейфовых волн в плазме. Кроме того, обнаружен эффект «black hole» для потенциала, при котором потенциал электрического поля ионно-звуковых волн в плазме является ограниченным, имея при этом бесконечную скорость.

В 1978 г. в работе японских математиков N. Yajima, M. Oikawa, J. Satsu-

ма [3] было предложено уравнение (2) в случае ионно-звуковых волн. Оно относится к уравнениям типа Ядзимы–Ойкавы–Сацумы, описывающим слабо нелинейные ионно-звуковые волны. Для уравнения (2) в случае ионно-звуковых волн в работах N. Yajima, M. Oikava, J. Satsuma, F. Kako [3, 4] были изучены автомодельные солитонные решения. В частности, в указанных работах использовались аналитический и численный подходы для исследования взаимодействия солитонов (см. также работу E. Infeld, G. Rowlands [5]).

В дальнейшем в работах С.А. Габова, Б.Б. Оразова, А.Г. Свешникова [6–8] было рассмотрено линейное уравнение ионно-звуковых волн в плазме

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u - u) + \Delta u = 0.$$

В этих работах (см. также работу Ю.Д. Плетнера [9]) развивалась теория потенциала для данного линейного уравнения для $1+1$ -мерных и $3+1$ -мерных задач (в том числе и в сферически-симметричном случае). Уравнения (1) – (3) относятся к соболевскому типу, поэтому уточним, что впервые теория потенциала для уравнений такого типа рассматривалась в статье Б.В. Капитонова [10].

Отметим, что автором в диссертации продолжены исследования, начатые в работах М.О. Корпусова, Д.В. Лукьяненко, А.А. Панина, Г.И. Шляпугина, Е.В. Юшкова [11–24]. Особо стоит отметить работу автора диссертации в соавторстве с М.О. Корпусовым [20], в которой, в частности, были изучены задачи Коши для $1+1$ -мерных нелинейных уравнений ионно-звуковых волн в плазме следующего вида:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx}(x, t) - u(x, t)) + \omega^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial(|u|^q u)(x, t)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx}(x, t) - u(x, t)) + \omega^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $q > 0$, $\omega > 0$.

В этой работе изучались вопросы локальной разрешимости и разрушения классических решений задач Коши за конечное время.

Дрейфовые волны в плазме изучались в работах М.О. Корпусова, Ю.Д. Плетнера, А.Г. Свешникова [25], В.Р. Кудашева, А.Б. Михайловского, С.Е. Шарапова, Ф.Ф. Каменца, В.П. Лахина [26, 27], А.П. Ситенко, П.П. Со-сенко [28], причём нелинейные задачи для дрейфовых волн в плазме ранее не рассматривались в литературе по математической физике.

Стоит отметить, что при исследовании разрушений нелинейных задач Коши и начально-краевой задачи в диссертации использовались такие методы из теории разрушений, как метод Х.А. Левина (см. Н.А. Levine [29, 30], М.О. Корпусов, А.Б. Альшин, А.В. Овчинников, А.Г. Свешников, Е.В. Юшков [31–34]), метод нелинейной ёмкости С.И. Похожаева (см. С.И. Похожаев, Э. Митидиери [35]) и метод пробных функций (см. В.А. Галактионов, Э. Митидиери, С.И. Похожаев [36]).

В диссертации автором последовательно развивается теория потенциала для линейной части уравнений (1) — (3). Как уже было отмечено, уравнения (1) — (3) относятся к нелинейным уравнениям соболевского типа. Отметим, что для такого класса уравнений стандартным является подход, при котором проводится полное обращение линейного оператора, содержащегося в уравнении соболевского типа (см., например, Е.И. Кайкина, П.И. Наумкин, И.А. Шишмарев [37]). Кроме того, в работах Г.А. Свиридюка, С.А. Загребинной, А.А. Замышляевой [38–40] были исследованы разнообразные задачи для уравнений соболевского типа с помощью применения полугруппового подхода.

Цели и задачи работы

1. Исследовать задачи Коши для уравнений (1) — (3) и начально-краевую задачу для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме на факт разрушения решений, при этом определить условия, при которых происходят разрушения решений этих задач.
2. Доказать локальную разрешимость рассматриваемых в работе нелинейных задач.
3. Найти достаточные условия разрушений решений указанных задач.

4. В тех задачах, где это возможно, доказать результаты о непродолжаемом решении, а также в частных случаях результаты об отсутствии даже локальных решений.

Положения, выносимые на защиту

1. Локальная разрешимость в классическом смысле задач Коши для уравнений (1) — (3) и начально-краевой задачи для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме.

2. Существование непродолжаемых классических решений задач Коши для уравнений (1) и (2).

3. Оценка снизу для скорости разрушения сильного решения задачи Коши для уравнения (1) и оценка сверху для времени существования этого решения.

4. Оценка сверху для времени существования слабого решения задачи Коши для уравнения (1).

5. Результаты об отсутствии локальных во времени слабых решений задачи Коши для уравнения (3), а также априорные верхние оценки для времени существования этих решений.

6. Априорная оценка сверху для времени существования решения начально-краевой задачи для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме.

7. Пример с точным аналитическим решением начально-краевой задачи для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме, причём это решение разрушается за конечное время.

8. Примеры численных решений начально-краевой задачи для уравнения (3) в случае сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме, причём разрушение решений этих задач диагностируется численно.

Научная новизна

Автором получены новые результаты, которые заключаются в следующем.

1. Впервые были получены результаты о разрушении решений и верхние оценки для времени существования решений задач Коши для нелинейных уравнений ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, линейная часть которых содержит анизотропию относительно плазменных частот электронов, причём нелинейные задачи для уравнений дрейфовых волн в плазме ранее не изучались в литературе по математической физике.

2. Впервые получен результат о разрушении решения и верхняя оценка для времени существования решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме, в то время как в литературе по математической физике ранее изучались только задачи для линейного уравнения сферически-симметричных ионно-звуковых волн в плазме.

3. Автором диссертации развит метод теории разрушений Х.А. Левина для исследования одной из задач Коши, в которой имеется нестандартная для метода Х.А. Левина нелинейность.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Результаты работы могут быть применены в исследовании других задач для уравнений соболевского типа. Практической значимостью работы является применение полученных результатов в физике плазмы. В частности, результаты работы могут быть применены при проведении экспериментов с электронно-ионной неравновесной плазмой и конструировании токамаков для магнитного удержания плазмы.

Методы исследования

В диссертации используются методы функционального анализа и теории разрушений нелинейных уравнений: энергетический метод Х.А. Левина, метод нелинейной ёмкости С.И. Похожаева, метод пробных функций.

Степень достоверности

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в диссертации, обеспечена

- использованием строгих аналитических методов исследования;
- сравнением полученных результатов с полученными ранее при использовании тех же аналитических методов исследования.

Все результаты диссертационной работы получены автором лично, опубликованы в открытой печати и прошли апробацию на научных конференциях и семинарах. Результаты других авторов, упомянутые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались автором на международных, всероссийских конференциях и научных семинарах:

1. IX Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛаПлаз-2023», НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, с 28 по 31 марта 2023 г.

2. X Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛаПлаз-2024», НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, с 26 по 29 марта 2024 г.

3. Научный семинар кафедры высшей математики НИЯУ МИФИ под руководством проф. А.Б. Костина, проф. О.В. Нагорнова, проф. В.Б. Шерстюкова, НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, 1 марта 2024 г., 11 октября 2024 г.

4. Научный семинар по нелинейным задачам уравнений в частных производных и математической физики под руководством проф. А.Е. Шишкова, Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Математический институт имени С.М. Никольского, Москва, Россия, 19 марта 2024 г.

5. Научный семинар кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ под руководством проф. Н.А. Кудряшова, НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, 19 февраля 2025 г., 3 апреля 2025 г.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы изложены в 6 работах, которые опубликованы в центральных рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Структура и объём диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 11 глав, заключения, списка литературы и приложения. Объём работы составляет 221 страницу текста, включая 14 иллюстраций. Список цитируемой литературы содержит 58 наименований.

Глава 1

Вывод уравнений

1.1. Вывод уравнений для дрейфовых волн в плазме

Данный раздел посвящён описанию математической модели и выводу ранее упомянутых нелинейных уравнений дрейфовых волн в плазме, помещённой во внешнее магнитное поле (см. работы [25] – [28]).

Из электродинамики известна следующая система уравнений квазистационарного электрического поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (1.1)$$

$$n_e = n_{1e} + n_{2e}, \quad n_{1e} = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right),$$

где $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ — соответственно векторы напряжённости, индукции электрического поля и вектор поляризации, а n_{1e} — концентрация связанных электронов, n_{2e} — концентрация свободных электронов. Далее введём прямоугольную правую декартову систему координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, в которой $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_3$. Уравнения (1.1) дополняются следующими уравнениями магнитной гидродинамики, записанными в системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (см. работы [25]–[28]):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{c}{B_0} \left\{ -[\nabla\varphi, \mathbf{e}_3] + \frac{1}{\omega_B} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp}\varphi \right\} + v_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} &= -\frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} &= en_0\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости ионов, c — скорость света, $\omega_B = eB_0/(Mc)$ — частота прецессии Лармора ионов в магнитном поле, M — масса иона. Кроме того, рассмотрим следующие альтернативные уравнения (три модели для

электронно-ионной плазмы):

$$\frac{\partial n_{2e}}{\partial t} + q_0 \varphi^2 = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial n_{2e}}{\partial t} + m_0 |\nabla \varphi|^2 = 0, \quad (1.4)$$

$$n_{2e} = 0, \quad (1.5)$$

где q_0 — размерный коэффициент ($q_0 < 0$), пропорциональный заряду электрона, m_0 — размерный коэффициент, пропорциональный массе электрона. Отметим, что уравнение (1.3) является положением модели квадратичной нелинейности для потенциала электрического поля дрейфовых волн в плазме [26], справедливой для плазмы высокой плотности ($n_{2e} \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$). Уравнение (1.4) является положением модели градиентной квадратичной нелинейности для потенциала электрического поля дрейфовых волн плазме [27], справедливой для плазмы с неоднородностью порядка нескольких дебаевских радиусов. Уравнение (1.5) является основным положением модели, где отсутствуют свободные электроны в плазме [6–8].

Из системы уравнений (1.1)–(1.2) с учётом (1.3) получаем следующее дифференциальное следствие:

$$\frac{u_A^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta \varphi - 4\pi n_0 \exp \left(\frac{e\varphi}{kT_e} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} \varphi + \omega_B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + 4\pi e \frac{u_A^2}{c^2} q_0 \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

Из уравнений (1.1)–(1.2) с учётом (1.4) получаем следующее дифференциальное следствие:

$$\frac{u_A^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta \varphi - 4\pi n_0 \exp \left(\frac{e\varphi}{kT_e} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} \varphi + \omega_B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + 4\pi e \frac{u_A^2}{c^2} m_0 \frac{\partial |\nabla \varphi|^2}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Из уравнений (1.1)–(1.2) с учётом (1.5) получаем, что

$$\frac{u_A^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta \varphi - 4\pi n_0 \exp \left(\frac{e\varphi}{kT_e} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} \varphi + \omega_B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \quad (1.8)$$

при этом

$$\Delta := \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_{\perp} := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$u_A^2 := \frac{B_0^2}{4\pi n_0 M}, \quad \omega_B^2 = \left(\frac{eB_0}{Mc} \right)^2,$$

u_A — альфвеновская скорость ионов. В предположении, что температура ионов $T_i \ll T_e$ (это неравновесная плазма, на практике $T_i \sim 10^2$ К, $T_e \sim 10^4$ К), можно сделать в уравнениях (1.6) и (1.7) частичную линеаризацию

$$\exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) \simeq 1 + \frac{e\varphi}{kT_e}, \quad (1.9)$$

а в уравнении (1.8) сделать следующее упрощение

$$\exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) \simeq 1 + \frac{e\varphi}{kT_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{e\varphi}{kT_e} \right)^2. \quad (1.10)$$

Тогда уравнение (1.6) с учётом (1.9) перейдёт в уравнение

$$\frac{u_A^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta\varphi - \frac{4\pi n_0 e}{kT_e} \varphi \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} \varphi + \omega_B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + 4\pi e \frac{u_A^2}{c^2} q_0 \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} = 0. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.7) с учётом (1.9) перейдёт в уравнение

$$\frac{u_A^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta\varphi - \frac{4\pi n_0 e}{kT_e} \varphi \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} \varphi + \omega_B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + 4\pi e \frac{u_A^2}{c^2} m_0 \frac{\partial |\nabla \varphi|^2}{\partial t} = 0. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.8) с учётом (1.10) перейдёт в уравнение

$$\frac{u_A^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta\varphi - \frac{4\pi n_0}{kT_e} \varphi - \frac{2\pi n_0 e^2}{(kT_e)^2} \varphi^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} \varphi + \omega_B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0. \quad (1.13)$$

Уравнения (1.11), (1.12) и (1.13) через нетрудные замены записываются в виде уравнений (1), (2) и (3), при этом

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 > 0.$$

1.2. Вывод уравнений для ионно-звуковых волн в плазме

Уравнения ионно-звуковых волн выводятся в предположении, что температура ионов T_i много меньше температуры электронов T_e (на практике $T_i \sim 10^2$ K, $T_e \sim 10^4$ K). Более подробно это описывается в статье [41]. Тогда для скорости ионов справедлива формула

$$Mn_0 \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -en_0 \nabla \varphi. \quad (1.14)$$

Дополним полученное уравнение (1.14) уравнениями электрической части системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \mathbf{D} = -\nabla \varphi + 4\pi \mathbf{P}, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = en_0 \mathbf{v}_i, \quad (1.16)$$

где $\mathbf{D}$ — вектор индукции электрического поля, $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, $n_e = n_{1e} + n_{2e}$, n_{2e} — концентрация свободных электронов, а для концентрации n_{1e} связанных электронов справедливо равенство

$$n_{1e} = n_0 \exp \left(\frac{e\varphi}{kT_e} \right).$$

Для уравнения, связывающего концентрацию n_{2e} свободных электронов и потенциал φ электрического поля ионно-звуковых волн плазме, вновь воспользуемся тремя альтернативами (1.3)–(1.5), описанными в литературе для ионно-звуковых волн (см., например, [3, 8, 26, 27]). Из (1.14) и (1.16) имеем, что

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M} \nabla \varphi. \quad (1.17)$$

Теперь из уравнений (1.3), (1.15) и (1.17) получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta_3 \varphi - 4\pi n_0 \exp \left(\frac{e\varphi}{kT_e} \right) \right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \varphi + 4\pi q_0 \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} = 0, \quad (1.18)$$

где

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \omega_{pi} = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{M} \right)^{1/2} \text{ — плазменная частота ионов.}$$

Из уравнений (1.4), (1.15) и (1.17) получаем, что справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta_3 \varphi - 4\pi n_0 \exp \left(\frac{e\varphi}{kT_e} \right) \right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \varphi + 4\pi m_0 \frac{\partial |\nabla \varphi|^2}{\partial t} = 0, \quad (1.19)$$

а из уравнений (1.5), (1.15) и (1.17) получаем, что справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta_3 \varphi - 4\pi n_0 \exp \left(\frac{e\varphi}{kT_e} \right) \right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \varphi = 0. \quad (1.20)$$

Далее для уравнений (1.18) и (1.19) воспользуемся частичной линеаризацией (1.9), а для уравнения (1.20) воспользуемся упрощением (1.10). Тогда уравнения (1.18), (1.19) и (1.20) примут следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta_3 \varphi - \frac{4\pi n_0 e}{kT_e} \varphi \right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \varphi + 4\pi q_0 \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} = 0, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta_3 \varphi - \frac{4\pi n_0 e}{kT_e} \varphi \right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \varphi + 4\pi m_0 \frac{\partial |\nabla \varphi|^2}{\partial t} = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta_3 \varphi - \frac{4\pi n_0 e}{kT_e} \varphi - \frac{2\pi n_0 e^2}{(kT_e)^2} \varphi^2 \right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \varphi = 0. \quad (1.23)$$

Уравнения (1.21), (1.22) и (1.23) при помощи нетрудных замен переписываются в виде уравнений (1), (2) и (3), при этом

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 > 0.$$

Глава 2

Обозначения

В данной работе отрезок, который соединяет точки $x, y \in \mathbb{R}^3$, обозначается через $[x, y]$:

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^3 : z = sy + (1 - s)x, s \in [0, 1]\}.$$

Символом $|a, b|$ при $a, b \in \mathbb{R}^1$ мы обозначаем следующее множество:

$$|a, b| = \begin{cases} [a, b], & \text{если } a \leq b; \\ [b, a], & \text{если } b \leq a. \end{cases}$$

Линейное пространство функций f , непрерывно дифференцируемых по $r \in [a, b]$ до n -ого порядка включительно ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), обозначается через $C^{(n)}[a, b]$ (в случае $n = 0$ $C^{(0)}[a, b] = C[a, b]$), при этом производные функции f в точках на границе отрезка понимаются в смысле односторонних. По аналогии также мы определяем пространство $C^{(m)}[0, T]$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В диссертации используется норма

$$\|f\|_{C^{(n)}[a, b]} := \sum_{k=0}^n \sup_{r \in [a, b]} \left| \frac{d^k f(r)}{dr^k} \right|.$$

В работе также используются обозначения из [42]. Символом $C_b(\mathbb{R}^3)$ мы обозначаем пространство непрерывных и ограниченных функций, норма которых принимает следующий вид:

$$|f|_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |f(x)|. \quad (2.1)$$

Под символом $C_b^{(k)}(\mathbb{R}^3)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ подразумевается банахово пространство функций, обладающих такими свойствами, как существование, непрерывность и ограниченность всех их частных производных по координатам $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, при этом у этих функций является ограниченной сле-

дующая норма:

$$|f|_k := \sum_{|\beta| \leq k} |D^\beta f|_0, \quad D_x^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \frac{\partial^{\beta_3}}{\partial x_3^{\beta_3}},$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{Z}_+^3, \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$$

Символом $C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ мы обозначаем линейное подпространство гёльдеровых функций из банахова пространства $C_b(\mathbb{R}^3)$, для которых конечна норма

$$|f|_\alpha := |f|_0 + [f]_\alpha, \quad [f]_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Символом $C^{k+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ мы обозначаем линейное пространство гёльдеровых функций из банахова пространства $C_b^{(k)}(\mathbb{R}^3)$, для которых конечна норма

$$|f|_{k+\alpha} := |f|_k + \sum_{|\beta|=k} [D_x^\beta f]_\alpha.$$

Также в диссертации используются обозначения банаховых пространств $C([0, T]; B)$, $C^{(1)}([0, T]; B)$, $C^{(2)}([0, T]; B)$ абстрактных функций f , где

$$f(t) \in B,$$

при этом B — банахово пространство относительно нормы $|\cdot|_B$. Функция f является элементом линейного пространства $C([0, T]; B)$, если она обладает следующими свойствами:

$$f : [0, T] \rightarrow B, \quad |f(t + \Delta t) - f(t)|_B \rightarrow +0 \text{ при } |\Delta t| \rightarrow +0, \\ t, t + \Delta t \in [0, T].$$

Линейным пространством $C^{(1)}([0, T]; B)$ называется подпространство линейного пространства $C([0, T]; B)$, для каждой абстрактной функции f которого

существует сильная производная

$$\frac{df}{dt} \in C([0, T]; B), \quad \left| \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} - \frac{df}{dt}(t) \right|_B \rightarrow +0$$

при $|\Delta t| \rightarrow +0, t, t + \Delta t \in [0, T]$.

Далее по индукции определяется линейное пространство $C^{(2)}([0, T]; B)$. В пространствах $C([0, T]; B)$, $C^{(1)}([0, T]; B)$ и $C^{(2)}([0, T]; B)$ вводятся следующие нормы:

$$\|f\|_T := \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|_B, \quad \|f\|_{1, T} := \sup_{t \in [0, T]} \left(|f(t)|_B + \left| \frac{df}{dt}(t) \right|_B \right),$$

$$\|f\|_{2, T} := \sup_{t \in [0, T]} \left(|f(t)|_B + \left| \frac{df}{dt}(t) \right|_B + \left| \frac{d^2 f}{dt^2}(t) \right|_B \right).$$

Эти пространства являются банаховыми относительно данных норм. Следует отметить, что сильные производные первого и второго порядка абстрактных функций часто в работе будут обозначаться через f' и f'' соответственно.

Символом $C_b^{(m+n)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ в работе обозначаются такие функции f , что

$$D_t^k D_x^\beta f \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$$

для всех $k = \overline{0, n}$ и $|\beta| \leq m$, причём все смешанные производные коммутируют. По аналогии также вводится пространство $C^{(2+2)}(\overline{\Omega} \times [0, T])$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является ограниченной областью. Кроме того, символом $C_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ обозначаются такие функции f , что справедливы соотношения

$$D_t^k D_x^\beta f \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$$

при $k = \overline{0, 2}$ и $|\beta| \leq 2$, при этом $f(x, T) = f'(x, T) = 0$ и для любого $t \in [0, T]$ носитель функции f является компактом в $\mathbb{R}^3$.

В работе мы систематически будем использовать весовые аналоги пространств непрерывных и ограниченных функций, а также весовые пространства Гёльдера. Символом $C_b^{(m+n)}((1 + |x|^2)^{\gamma/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T])$ при $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

мы обозначаем такие функции, что

$$(1 + |x|^2)^{\gamma/2} f \in C_b^{(m+n)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]), \quad \gamma \geq 0.$$

Символом $C^{k+\alpha}((1 + |x|^2)^{\gamma/2}; \mathbb{R}^3)$ мы обозначаем такие функции f , что

$$(1 + |x|^2)^{\gamma/2} f \in C^{k+\alpha}(\mathbb{R}^3), \quad \gamma \geq 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Здесь справедлива

Лемма 2.1. *Если $\beta_1 \geq 0$ и $\alpha \in (0, 1)$, то имеет место следующее вложение:*

$$\begin{aligned} C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)) \subset \\ \subset C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap C_b^{(2+2)}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned}$$

Символом C мы также обозначаем положительные константы, причём если константа зависит от каких-то параметров $\{a_1, a_2, \dots\}$, то мы пишем $C(a_1, a_2, \dots)$.

В работе используются пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ обобщённых функций, которым соответствуют пространства основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$.

Символом $L^p(\mathbb{R}^3)$ при $p \in [1, +\infty)$ мы обозначаем пространства Лебега, для нормы которых используем обозначение

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Кроме того, мы используем обозначения $L_{loc}^p(\mathbb{R}^3)$ и $L_{loc}^p(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ для линейных пространств таких функций f , что для любого шара $O(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^3$ имеем $f \in L^p(O(x_0, R_0))$ и $f \in L^p(O(x_0, R_0) \times (0, T))$ соответственно.

Символом $H^1(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область, мы обозначаем пространство С.Л. Соболева

$$H^1(\Omega) = \{f : f \in L^2(\Omega), D_{x_j} f \in L^2(\Omega)\}.$$

Наконец, символом $H^2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область, мы обозначаем пространство С.Л. Соболева

$$H^2(\Omega) = \{f : f \in L^2(\Omega), D_{x_j}f \in L^2(\Omega), D_{x_j x_k}^2 f \in L^2(\Omega)\}$$

при $j, k \in \overline{1, 3}$. Помимо этого, в диссертации используется обозначение $D_x f(x)$ для ковектора-градиента наравне с более известным обозначением $\nabla_x f(x)$, при этом $|D_x f(x)|$ или $|\nabla_x f(x)|$ является евклидовой нормой градиента.

В диссертации также применяется обозначение $\mathcal{L}(C[0, T], C[0, T])$ для пространства всех линейных непрерывных операторов, которые действуют в банаховом пространстве $C[0, T]$, а также обозначение

$$C^{(1)}([0, T]; \mathcal{L}(C[0, T], C[0, T]))$$

для пространства всех линейных непрерывных операторов, которые действуют в банаховом пространстве $C[0, T]$ и непрерывно дифференцируемы по Фреше по $t \in [0, T]$.

На протяжении работы используется термин разрушение. Дадим определение этого понятия.

Определение 2.1. Пусть у нас имеется некоторый функциональный класс $B[0, T]$ при $T > 0$. Предположим, что существует такое $T_0 > 0$, что решение некоторой задачи $u \in B[0, T]$ для любого $T \in (0, T_0)$, а при $T \geq T_0$ имеем $u \notin B[0, T]$. В этой ситуации мы говорим, что решение u разрушается и T_0 называется точкой (временем) разрушения решения u .

Глава 3

Фундаментальное решение и его свойства

3.1. Вывод фундаментального решения

Сначала выведем фундаментальное решение линейного оператора, содержащегося в уравнениях (1) – (3). Рассмотрим следующее уравнение в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta \mathcal{E} - \mathcal{E}) + \omega_1^2 \mathcal{E}_{x_1 x_1} + \omega_2^2 \mathcal{E}_{x_2 x_2} + \omega_3^2 \mathcal{E}_{x_3 x_3} = \delta(x) \delta(t).$$

Рассмотрим преобразование Лапласа от обеих частей этого равенства и получим следующее равенство:

$$(p^2 + \omega_1^2) \overline{\mathcal{E}}_{x_1 x_1}(x, p) + (p^2 + \omega_2^2) \overline{\mathcal{E}}_{x_2 x_2}(x, p) + (p^2 + \omega_3^2) \overline{\mathcal{E}}_{x_3 x_3}(x, p) - p^2 \overline{\mathcal{E}}(x, p) = \delta(x).$$

Одним из решений этого уравнения является следующее:

$$\overline{\mathcal{E}}(x, p) = - \frac{1}{\sqrt{p^2 + \omega_1^2} \sqrt{p^2 + \omega_2^2} \sqrt{p^2 + \omega_3^2}} \frac{\exp(-p|y|)}{4\pi|y|},$$

$$|y| := \left(\frac{x_1^2}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{x_2^2}{p^2 + \omega_2^2} + \frac{x_3^2}{p^2 + \omega_3^2} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что $|y|$ — это не модуль и не норма элемента y , это просто удобное обозначение приведённого выражения.

Воспользуемся следующим равенством, которое несложно показывается с помощью продолжения подынтегральной функции в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости, а также использования леммы Жордана и теоремы Коши о вычетах:

$$\exp(-\alpha|x|) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mu|x|}}{\mu^2 + \alpha^2} d\mu.$$

Стоит отметить, что, вообще говоря, данный интеграл понимается в смысле главного значения, но поскольку нетрудно показать, что он абсолютно схо-

дится, то главное значение данного интеграла совпадает со значением самого интеграла. В итоге получим равенство

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{E}}(x, p) &= -\frac{p}{\sqrt{p^2 + \omega_1^2}\sqrt{p^2 + \omega_2^2}\sqrt{p^2 + \omega_3^2}} \frac{1}{4\pi^2|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mu|x|}}{\mu^2 + \frac{|y|^2}{|x|^2}p^2} d\mu = \\ &= -p\sqrt{p^2 + \omega_1^2}\sqrt{p^2 + \omega_2^2}\sqrt{p^2 + \omega_3^2} \frac{1}{4\pi^2|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{A(x, \mu, p)} e^{i\mu|x|} d\mu, \quad (3.1)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A(x, \mu, p) &:= \mu^2(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2) + \\ &+ p^2(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2) \frac{x_1^2}{|x|^2} + p^2(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2) \frac{x_2^2}{|x|^2} + p^2(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2) \frac{x_3^2}{|x|^2}.\end{aligned}$$

Выражение для $A(x, p, \mu)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned}A(x, \mu, p) &= p^6(\mu^2 + 1) + p^4 \left((\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)\mu^2 + (\omega_2^2 + \omega_3^2) \frac{x_1^2}{|x|^2} + \right. \\ &+ (\omega_1^2 + \omega_3^2) \frac{x_2^2}{|x|^2} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{x_3^2}{|x|^2} \Big) + p^2 \left((\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^2\omega_3^2 + \omega_3^2\omega_1^2)\mu^2 + \right. \\ &+ \omega_2^2\omega_3^2 \frac{x_1^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_3^2 \frac{x_2^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_2^2 \frac{x_3^2}{|x|^2} \Big) + \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2\mu^2 = \\ &= p^6(\mu^2 + 1) \left[1 + \frac{1}{p^2}\alpha_1(x, \mu) + \frac{1}{p^4}\alpha_2(x, \mu) + \frac{1}{p^6}\alpha_3(\mu) \right], \quad (3.2)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_1(x, \mu) &:= \frac{1}{\mu^2 + 1} \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)\mu^2 + (\omega_2^2 + \omega_3^2) \frac{x_1^2}{|x|^2} + \right. \\ &+ (\omega_1^2 + \omega_3^2) \frac{x_2^2}{|x|^2} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{x_3^2}{|x|^2} \Big], \quad (3.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2(x, \mu) &:= \frac{1}{\mu^2 + 1} \left[(\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^2\omega_3^2 + \omega_3^2\omega_1^2)\mu^2 + \right. \\ &+ \omega_2^2\omega_3^2 \frac{x_1^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_3^2 \frac{x_2^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_2^2 \frac{x_3^2}{|x|^2} \Big], \quad (3.4)\end{aligned}$$

$$\alpha_3(\mu) := \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2. \quad (3.5)$$

Подставим выражение (3.2) для $A(x, \mu, p)$ в равенство (3.1) и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}}(x, p) = & -\frac{1}{p^5} \sqrt{p^2 + \omega_1^2} \sqrt{p^2 + \omega_2^2} \sqrt{p^2 + \omega_3^2} \frac{1}{4\pi^2 |x|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu^2 + 1} e^{i\mu|x|} \times \\ & \times \left[1 + \frac{1}{p^2} \alpha_1(x, \mu) + \frac{1}{p^4} \alpha_2(x, \mu) + \frac{1}{p^6} \alpha_3(\mu) \right]^{-1} d\mu, \end{aligned}$$

где функции α_1 , α_2 и α_3 определены формулами (3.3), (3.4) и (3.5) соответственно.

Предположим, что $\operatorname{Re} p = \sigma \geq R > 0$ при достаточно большом $R > 0$. Тогда будет справедливо следующее разложение в ряд:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{1}{p^2} \alpha_1(x, \mu) + \frac{1}{p^4} \alpha_2(x, \mu) + \frac{1}{p^6} \alpha_3(\mu) \right]^{-1} = \\ & = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\alpha_1(x, \mu) + \frac{1}{p^2} \alpha_2(x, \mu) + \frac{1}{p^4} \alpha_3(\mu) \right]^k \frac{1}{p^{2k}}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \overline{\phi}(p) &:= \frac{1}{p^5} \sqrt{p^2 + \omega_1^2} \sqrt{p^2 + \omega_2^2} \sqrt{p^2 + \omega_3^2} = \\ &= \frac{1}{p^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_1^2}{p^2}} \sqrt{1 + \frac{\omega_2^2}{p^2}} \sqrt{1 + \frac{\omega_3^2}{p^2}} = \\ &= \frac{1}{p^2} + \sum_{k_1+k_2+k_3 \geq 1} \binom{1/2}{k_1} \binom{1/2}{k_2} \binom{1/2}{k_3} \frac{\omega_1^{2k_1} \omega_2^{2k_2} \omega_3^{2k_3}}{p^{2k_1+2k_2+2k_3+2}}. \end{aligned}$$

Тогда выражение для $\overline{\mathcal{E}}(x, p)$ можно переписать в следующем виде:

$$\overline{\mathcal{E}}(x, p) = -\frac{1}{4\pi|x|} e^{-|x|} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4\pi|x|} e^{-|x|} \overline{\phi}_1(p) + \overline{\Phi}(x, p),$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1(p) &:= \sum_{k_1+k_2+k_3 \geq 1} \binom{1/2}{k_1} \binom{1/2}{k_2} \binom{1/2}{k_3} \frac{\omega_1^{2k_1} \omega_2^{2k_2} \omega_3^{2k_3}}{p^{2k_1+2k_2+2k_3+2}}, \\ \bar{\Phi}(x, p) &:= -\bar{\phi}(p) \frac{1}{4\pi^2|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu^2 + 1} e^{i\mu|x|} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left[\alpha_1(x, \mu) + \frac{1}{p^2} \alpha_2(x, \mu) + \frac{1}{p^4} \alpha_3(\mu) \right]^k \frac{1}{p^{2k}} d\mu.\end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим следующее выражение для фундаментального решения:

$$\mathcal{E}(x, t) = -t\theta(t) \frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} - \phi_1(t) \frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} + \Phi(x, t), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &:= -\frac{\theta(t)}{4\pi^2|x|} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mu|x|}}{\mu^2 + 1} \times \\ &\times \phi(t) * \left[\alpha_1(x, \mu) \text{id} + \alpha_2(x, \mu)t * + \frac{1}{6} \alpha_3(\mu)t^3 * \right]^k t^{2k-1} d\mu, \\ \phi(t) &:= \theta(t) \sum_{k_1+k_2+k_3 \geq 0} \binom{1/2}{k_1} \binom{1/2}{k_2} \binom{1/2}{k_3} \times \\ &\times \omega_1^{2k_1} \omega_2^{2k_2} \omega_3^{2k_3} \frac{t^{2k_1+2k_2+2k_3+1}}{(2k_1+2k_2+2k_3+1)!},\end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &:= \theta(t) \sum_{k_1+k_2+k_3 \geq 1} \binom{1/2}{k_1} \binom{1/2}{k_2} \binom{1/2}{k_3} \times \\ &\times \omega_1^{2k_1} \omega_2^{2k_2} \omega_3^{2k_3} \frac{t^{2k_1+2k_2+2k_3+1}}{(2k_1+2k_2+2k_3+1)!}.\end{aligned} \quad (3.8)$$

Верна

Лемма 3.1. При $x \neq 0$ справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{E}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x, 0) = -\frac{\exp(-|x|)}{4\pi|x|}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}(x, 0) = 0. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на явном виде (3.6) фундаментального решения $\mathcal{E}$.

3.2. Оценки фундаментального решения

Точно так же, как в работе [7], может быть получено следующее представление для фундаментального решения (3.6):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= -t\theta(t)\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} - \phi_1(t)\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} + \Phi(x, t), \\ \Phi(x, t) &:= \frac{\theta(t)}{4\pi^2|x|} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \oint_{C_\varepsilon^+(i)} \frac{e^{iz|x|}}{z^2+1} \times \\ &\quad \times \phi(t) * \left[\alpha_1(x, z) \text{id} + \alpha_2(x, z)t * + \frac{1}{6}\alpha_3(z)t^3 * \right]^k t^{2k-1} dz, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $C_\varepsilon^+(i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = \varepsilon\}$ при $\varepsilon \in (0, 1)$, причём этот контур на комплексной плоскости обходится против часовой стрелки,

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, z) &:= \frac{1}{z^2+1} \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)z^2 + (\omega_2^2 + \omega_3^2)\frac{x_1^2}{|x|^2} + \right. \\ &\quad \left. + (\omega_1^2 + \omega_3^2)\frac{x_2^2}{|x|^2} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\frac{x_3^2}{|x|^2} \right], \\ \alpha_2(x, z) &:= \frac{1}{z^2+1} \left[(\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^2\omega_3^2 + \omega_3^2\omega_1^2)z^2 + \right. \\ &\quad \left. + \omega_2^2\omega_3^2\frac{x_1^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_3^2\frac{x_2^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_2^2\frac{x_3^2}{|x|^2} \right], \\ \alpha_3(z) &:= \frac{z^2}{z^2+1} \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2, \end{aligned}$$

а функции ϕ и ϕ_1 определены равенствами (3.7) и (3.8). Из явного вида функций α_1, α_2 при условиях, что $|z - i| = \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и $x \neq (0, 0, 0)$ вытекают следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial \alpha_1(x, z)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{c_1(\varepsilon)}{|x|}, \quad \left| \frac{\partial \alpha_2(x, z)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{c_2(\varepsilon)}{|x|}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \alpha_1(x, z)}{\partial x_j \partial x_k} \right| &\leq \frac{c_3(\varepsilon)}{|x|^2}, & \left| \frac{\partial^2 \alpha_2(x, z)}{\partial x_j \partial x_k} \right| &\leq \frac{c_4(\varepsilon)}{|x|^2}, \\ \left| \frac{\partial^3 \alpha_1(x, z)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right| &\leq \frac{c_5(\varepsilon)}{|x|^3}, & \left| \frac{\partial^3 \alpha_2(x, z)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right| &\leq \frac{c_6(\varepsilon)}{|x|^3} \end{aligned} \quad (3.12)$$

для всех $j, k, l = \overline{1, 3}$. Из явного вида (3.10) вытекает следующее свойство гладкости фундаментального решения $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} \in C^{(m+n)}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times [0, +\infty)) \quad \text{для всех } m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.13)$$

Если $0 < |x| < R_0$ и $t \in [0, T]$, то с учётом оценок (3.11)–(3.12) из (3.10) вытекает следующая группа оценок:

$$\left| \frac{\partial^m \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^m} \right| \leq \frac{A_0(T, R_0, \varepsilon)}{|x|}, \quad \left| \frac{\partial^{m+1} \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^m \partial x_j} \right| \leq \frac{A_1(T, R_0, \varepsilon)}{|x|^2}, \quad (3.14)$$

$$\left| \frac{\partial^{m+2} \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^m \partial x_j \partial x_k} \right| \leq \frac{A_2(T, R_0, \varepsilon)}{|x|^3}, \quad \left| \frac{\partial^{m+3} \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^m \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right| \leq \frac{A_3(T, R_0, \varepsilon)}{|x|^4} \quad (3.15)$$

для всех $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $j, k, l \in \overline{1, 3}$. При $|x| \geq R_0 > 0$, $t \in [0, T]$ и $T > 0$ в окрестности бесконечно удалённой точки верны следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^m \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^m} \right| \leq B_0(T, R_0, \varepsilon) \frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|}, \quad (3.16)$$

$$\left| \frac{\partial^{m+1} \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^m \partial x_j} \right| \leq B_1(T, R_0, \varepsilon) \frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|}, \quad (3.17)$$

$$\left| \frac{\partial^{m+2} \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^m \partial x_j \partial x_k} \right| \leq B_2(T, R_0, \varepsilon) \frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|}, \quad (3.18)$$

$$\left| \frac{\partial^{m+3} \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^m \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right| \leq B_3(T, R_0, \varepsilon) \frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|} \quad (3.19)$$

для любого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $j, k, l \in \overline{1, 3}$. Справедлива

Лемма 3.2. При $T > 0$ для любых $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times [0, T]$ в оценках (3.14)–(3.19) частные производные коммутируют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оно основано на свойстве гладкости (3.13).

Глава 4

Формулы Грина

4.1. Вторая формула Грина

Пусть $u, v \in C^{(2+2)}(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
v \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u &= \frac{\partial}{\partial t} \left(v \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \\
&+ \operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \nabla u \right) - \operatorname{div} \left(u \nabla \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + u \Delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(v \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \\
&+ \operatorname{div} \left(v \nabla \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \operatorname{div} \left(u \nabla \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \nabla u \right) - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \left(v \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right) + u \Delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(v \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(v \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + u \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{4.2}$$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + u \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \quad \text{при } j = 1, 2, 3. \tag{4.3}$$

Отметим, что в данном случае оператор $\mathfrak{M}_{x,t}[u]$, включающий общую линейную часть уравнений (1) – (3), является формально сопряжённым и принимает следующий вид:

$$\mathfrak{M}_{x,t}^t[u](x, t) = \mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2}.$$

Из равенств (4.1) и (4.3) получаем вторую формулу Грина

$$\int_0^t \int_{\Omega} [v(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) - u(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[v](\xi, \tau)] d\xi d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \int_{\partial\Omega} [v(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) - u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[v](\xi, \tau)] dS_\xi d\tau + \\
&+ \int_{\Omega} \left[v(\xi, t) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) \right] - \right. \\
&- v(\xi, 0) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) \right] \Big] d\xi - \\
&- \int_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) [\Delta u(\xi, t) - u(\xi, t)] - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) [\Delta u(\xi, 0) - u(\xi, 0)] \right] d\xi + \\
&+ \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi - \\
&- \int_{\partial\Omega} \left[v(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, t) - v(\xi, 0) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) &= \mathfrak{N}_{\xi, \tau}^t[u](\xi, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial u}{\partial n_\xi} + \omega_1^2 \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cos(n_\xi, e_1) + \\
&+ \omega_2^2 \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cos(n_\xi, e_2) + \omega_3^2 \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \cos(n_\xi, e_3).
\end{aligned}$$

В результате доказана

Теорема 4.1. *Для всех функций $u, v \in C^{(2+2)}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ при $t \in [0, T]$ имеет место равенство (4.4).*

4.2. Третья формула Грина в ограниченной области

Пусть $u \in C^{(2+2)}(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Зафиксируем точку $(x, t) \in \Omega \times (0, T]$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $O(x, \delta) \subset \Omega$. Далее считаем, что

$$\Omega_\delta := \Omega \setminus \overline{O(x, \delta)}.$$

Применим вторую формулу Грина (4.4) к области Ω_δ и $u(\xi, \tau)$, $v(\xi, \tau) = \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)$, причём функция $v \in C^{(2+2)}(\overline{\Omega_\delta} \times [0, t])$ для любого $t \in (0, T]$. Тогда

она примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega_\delta} [v(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) - u(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[v](x - \xi, t - \tau)] d\xi d\tau = \\
& = \int_0^t \int_{\partial\Omega_\delta} [v(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) - u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[v](x - \xi, t - \tau)] dS_\xi d\tau + \\
& + \int_{\Omega_\delta} \left[v(\xi, t) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) \right] - \right. \\
& \left. - v(\xi, 0) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) \right] \right] d\xi - \\
& - \int_{\Omega_\delta} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) [\Delta u(\xi, t) - u(\xi, t)] - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) [\Delta u(\xi, 0) - u(\xi, 0)] \right] d\xi + \\
& + \int_{\partial\Omega_\delta} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi - \\
& - \int_{\partial\Omega_\delta} \left[v(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, t) - v(\xi, 0) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\mathfrak{M}_{x, t}[w](x, t) = \Delta_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_j^2},$$

$$\mathfrak{N}_{x, t}[w](x, t) = \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j).$$

Последовательно рассмотрим слагаемые в левой и в правой частях равенства (4.5). Введём в рассмотрение интеграл

$$I_{1\delta} := \int_0^t \int_{O(x, \delta)} v(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

В силу оценки (3.14) справедлива следующая оценка:

$$|I_{1\delta}| \leq A_0(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]} |\mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t)| \delta^2 \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0.$$

Поэтому имеем

$$\int_0^t \int_{\Omega_\delta} v(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau \rightarrow \int_0^t \int_{\Omega} v(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (4.6)$$

при $\delta \rightarrow +0$.

Поскольку

$$\mathfrak{M}_{\xi, \tau}[v](x - \xi, t - \tau) = 0 \quad \text{при} \quad (\xi, \tau) \in \overline{\Omega}_\delta \times [0, +\infty),$$

то поэтому

$$\int_0^t \int_{\Omega_\delta} u(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[v](x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau = 0. \quad (4.7)$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I_{2\delta} := \int_0^t \int_{\partial O(x, \delta)} v(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) dS_\xi d\tau. \quad (4.8)$$

В силу оценки (3.14) справедлива следующая оценка:

$$|I_{2\delta}| \leq A_0(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]} |\mathfrak{N}_{x,t}[u](x, t)| \delta \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0.$$

Поэтому

$$\int_0^t \int_{\partial \Omega_\delta} v(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) dS_\xi d\tau \rightarrow \int_0^t \int_{\partial \Omega} v(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) dS_\xi d\tau \quad (4.9)$$

при $\delta \rightarrow +0$. Аналогичным образом можно доказать, что справедливы следующие предельные свойства при $\delta \rightarrow +0$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\delta} \left[v(\xi, t) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) \right] - v(\xi, 0) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) \right] \right] d\xi \rightarrow \\
& \rightarrow \int_{\Omega} \left[v(\xi, t) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) \right] - v(\xi, 0) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) \right] \right] d\xi, \\
& \int_{\Omega_\delta} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) [\Delta u(\xi, t) - u(\xi, t)] - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) [\Delta u(\xi, 0) - u(\xi, 0)] \right] d\xi \rightarrow \\
& \rightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) [\Delta u(\xi, t) - u(\xi, t)] - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) [\Delta u(\xi, 0) - u(\xi, 0)] \right] d\xi, \\
& \int_{\partial\Omega_\delta} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi \rightarrow \\
& \rightarrow \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi, \\
& \int_{\partial\Omega_\delta} \left[v(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, t) - v(\xi, 0) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi \rightarrow \\
& \rightarrow \int_{\partial\Omega} \left[v(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, t) - v(\xi, 0) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$I_{3\delta} := \int_0^t \int_{\partial O(x, \delta)} u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[v](x - \xi, t - \tau) dS_\xi d\tau. \tag{4.11}$$

Верны следующие равенства:

$$\int_0^t u(\xi, \tau) f(x - \xi, t - \tau) d\tau = \int_0^t u(\xi, t - \tau) f(x - \xi, \tau) d\tau =$$

$$= u_0(\xi) \int_0^t f(x - \xi, s) ds - \int_0^t \frac{\partial u(\xi, t - \tau)}{\partial \tau} \int_0^\tau f(x - \xi, s) ds d\tau, \quad (4.12)$$

$$f(x - \xi, t - \tau) = \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[v](x - \xi, t - \tau).$$

Из (4.11) с учётом (4.12) приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} I_{3\delta} &:= \int_{\partial O(0, \delta)} u_0(x - \xi) \int_0^t f(\xi, s) ds d\xi - \\ &- \int_{\partial O(0, \delta)} \int_0^t \frac{\partial u(x - \xi, t - \tau)}{\partial \tau} \int_0^\tau f(\xi, s) ds d\tau d\xi = \\ &= \int_{\partial O(0, \delta)} [u_0(x - \xi) - u_0(x)] \int_0^t f(\xi, s) ds d\xi + u_0(x)g(t) - \\ &- \int_{\partial O(0, \delta)} \int_0^t \frac{\partial [u(x - \xi, t - \tau) - u(x, t - \tau)]}{\partial \tau} \int_0^\tau f(\xi, s) ds d\tau d\xi - \\ &- \int_0^t \frac{\partial u(x, t - \tau)}{\partial \tau} g(\tau) d\tau := I_{31\delta} + I_{32\delta} + I_{33\delta} + I_{34\delta}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$g(t) := \int_0^t \int_{\partial O(0, \delta)} f(\xi, s) d\xi ds. \quad (4.14)$$

Несложно доказать, что

$$I_{31\delta}, I_{33\delta} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0. \quad (4.15)$$

Отметим, что свойства функции g , определённой равенством (4.14), будут нами изучены далее в главе 5 (поскольку это требует немалых обоснований, то это вынесено в отдельную главу, которая частично является приложением к настоящему разделу). В частности, в главе 5 независимо от последующих результатов настоящей главы будет доказано, что $g(t) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$

равномерно по $t \in [0, T]$ (в дальнейшем это будет свойство (5.19)). Тогда с учётом (5.19) и теоремы Лебега можно доказать, что

$$I_{32\delta}, I_{34\delta} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta = \frac{1}{n} \rightarrow +0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (4.16)$$

Таким образом, из (4.13) с учётом (4.15) и (4.16) получаем, что

$$\int_0^t \int_{\partial O(x, \delta)} u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[v](x - \xi, t - \tau) dS_\xi d\tau \rightarrow 0$$

при $\delta = \frac{1}{n} \rightarrow +0, \quad n \rightarrow +\infty.$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\partial \Omega_\delta} u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[v](x - \xi, t - \tau) dS_\xi d\tau \rightarrow \\ & \rightarrow \int_0^t \int_{\partial \Omega} u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[v](x - \xi, t - \tau) dS_\xi d\tau \quad \text{при} \quad \delta = \frac{1}{n} \rightarrow +0, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Тогда из (4.6), (4.7), (4.9), (4.10) и (4.17) получаем равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} v(\xi, \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{\partial \Omega} [v(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) - u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[v](x - \xi, t - \tau)] dS_\xi d\tau + \\ & + \int_{\Omega} \left[v(\xi, t) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) \right] - v(\xi, 0) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) \right] \right] d\xi - \\ & - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) [\Delta u(\xi, t) - u(\xi, t)] - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) [\Delta u(\xi, 0) - u(\xi, 0)] \right] d\xi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi - \\
& - \int_{\partial\Omega} \left[v(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, t) - v(\xi, 0) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Отметим, что в силу (3.9) имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[v(\xi, t) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, t) \right] - v(\xi, 0) \left[\Delta \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) \right] \right] d\xi = \\
& = - \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t) [\Delta_\xi u_1(\xi) - u_1(\xi)] d\xi, \\
& - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) [\Delta u(\xi, t) - u(\xi, t)] - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) [\Delta u(\xi, 0) - u(\xi, 0)] \right] d\xi = \\
& = - \int_{\Omega} \frac{\exp(-|x - \xi|)}{4\pi|x - \xi|} [\Delta_\xi u(\xi, t) - u(\xi, t)] d\xi - \\
& - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} [\Delta_\xi u_0(\xi) - u_0(\xi)] d\xi, \\
& \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, t) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi = \\
& = \int_{\partial\Omega} \frac{\exp(-|x - \xi|)}{4\pi|x - \xi|} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial n_\xi} dS_\xi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial n_\xi} dS_\xi, \\
& - \int_{\partial\Omega} \left[v(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, t) - v(\xi, 0) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n_\xi}(\xi, 0) \right] dS_\xi = \\
& = \int_{\partial\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t) \frac{\partial u_1(\xi)}{\partial n_\xi} dS_\xi.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Отметим, что в классе функций $u \in C^{(2+2)}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ верно равенство

$$u(x, t) = - \int_{\Omega} (\Delta u(\xi, t) - u(\xi, t)) \frac{\exp(-|x - \xi|)}{4\pi|x - \xi|} d\xi +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\exp(-|x - \xi|)}{4\pi|x - \xi|} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial n_\xi} - u(\xi, t) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{\exp(-|x - \xi|)}{4\pi|x - \xi|} \right] dS_\xi \quad (4.21)$$

для любого $t \in [0, T]$. Таким образом, из (4.18) с учётом (4.19)–(4.20) и (4.21) получим третью формулу Грина в ограниченном цилиндре:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\partial\Omega} [u(\xi, \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[\mathcal{E}](x - \xi, t - \tau) - \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{N}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau)] dS_\xi d\tau - \\ & - \int_{\partial\Omega} u(\xi, t) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{\exp(-|x - \xi|)}{4\pi|x - \xi|} dS_\xi + \\ & + \int_{\Omega} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) [\Delta_\xi u_1(\xi) - u_1(\xi)] + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} [\Delta_\xi u_0(\xi) - u_0(\xi)] \right] d\xi - \\ & - \int_{\partial\Omega} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) \frac{\partial u_1(\xi)}{\partial n_\xi} + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial n_\xi} \right] dS_\xi. \end{aligned} \quad (4.22)$$

В результате была доказана

Теорема 4.2. *Для всякой функции $u \in C^{(2+2)}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ верно выражение (4.22), где применялись обозначения $u_0(x) = u(x, 0)$ и $u_1(x) = u_t(x, 0)$.*

4.3. Третьи формулы Грина во всём пространстве

Имеет место данная теорема:

Теорема 4.3. *Для всякой функции $u \in C_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ верно следующее выражение:*

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^3} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) [\Delta_\xi u_1(\xi) - u_1(\xi)] + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} [\Delta_\xi u_0(\xi) - u_0(\xi)] \right] d\xi. \quad (4.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на оценках (3.14) и (3.16) фундаментального решения $\mathcal{E}$ и третьей формуле Грина (4.22), в которой нужно положить $\Omega = O(0, R)$ при $R > 0$ и перейти к пределу при $R \rightarrow +\infty$. Тогда все интегралы по поверхности шара $\partial O(0, R)$ в пределе при $R \rightarrow +\infty$ обратятся в ноль. Стоит отметить, что правая часть третьей формулы Грина (4.23) содержит оператор, обратный к оператору $\mathfrak{M}_{x,t}$. В последующих главах эта методика обращения строго обосновывается через теорию потенциала и оценки типа Шаудера.

Отметим, что можно получить один нестандартный вариант третьей формулы Грина для рассматриваемого оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$. Для этого введём в рассмотрение функции $\chi, \eta \in C^{(2)}[0, T]$, удовлетворяющие условиям

$$\chi(0) = 1, \quad \chi'(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 1. \quad (4.24)$$

Нетрудно показать, что такие функции существуют. Введём в рассмотрение функцию F , где

$$F(x, t) := \chi(t)u_0(x) + \eta(t)u_1(x), \quad F \in C_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$$

при $u_0, u_1 \in C_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$. Кроме того, эта функция удовлетворяет следующим равенствам:

$$F(x, 0) = u_0(x), \quad F'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{для каждого } x \in \mathbb{R}^3. \quad (4.25)$$

Применим третью формулу Грина (4.23) к

$$u(x, t) - F(x, t) \quad \text{для любой функции } u \in C_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Вследствие (4.25) получаем, что

$$u(x, 0) - F(x, 0) = 0, \quad u'(x, 0) - F'(x, 0) = 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^3.$$

Поэтому третья формула Грина (4.23) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \chi(t)u_0(x) + \eta(t)u_1(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \left(\chi''(t)[\Delta_\xi u_0(\xi) - u_0(\xi)] + \eta''(t)[\Delta_\xi u_1(\xi) - u_1(\xi)] + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 [\chi(t)u_{0\xi_j\xi_j}(\xi) + \eta(t)u_{1\xi_j\xi_j}(\xi)] \right) d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

В результате была доказана

Теорема 4.4. *Для всякой функции $u \in C_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ и для всех функций χ и η из $C^{(2)}[0, T]$, которые удовлетворяют условиям (4.24), верно равенство (4.26).*

Глава 5

О некоторых интегралах

Рассмотрим следующий интеграл, который упоминался в разделе 4.2:

$$g(t) = \int_0^t \int_{\partial O(0,\delta)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial \mathcal{E}(x, \tau)}{\partial n_x} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \mathcal{E}(x, \tau)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j) \right] dS_x d\tau, \quad (5.1)$$

где $\mathcal{E}$ — это фундаментальное решение, причём

$$\overline{\mathcal{E}}(x, p) = -\frac{\exp(-\alpha(p)|z|)}{4\pi|z|}, \quad (5.2)$$

$$|z| := \sqrt{x_1^2(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2) + x_2^2(p^2 + \omega_3^2)(p^2 + \omega_1^2) + x_3^2(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)},$$

$$\alpha(p) = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2)}}.$$

К двум частям равенства (5.1) применим преобразование Лапласа. В итоге мы получим выражение

$$\begin{aligned} \overline{g}(p) &= \frac{1}{p} \int_{\partial O(0,\delta)} \left[p^2 \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}(x, p)}{\partial n_x} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}(x, p)}{\partial x_j} \cos(n_x, e_j) \right] dS_x + \\ &+ \frac{1}{p} \int_{O(0,\delta)} \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} \right) dS_x. \end{aligned} \quad (5.3)$$

С учётом явного вида (5.2) мы можем переписать равенство (5.3) в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned} \overline{g}(p) &= I_1 + I_2 + I_3 + N_1 + N_2 + N_3, \\ I_1 &= -\frac{1}{p} \int_{\partial O(0,\delta)} \frac{1}{4\pi|z|} \sum_{j=1}^3 (p^2 + \omega_j^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(e^{(-\alpha(p)|z|)} \right) \cos(n_x, e_j) dS_x, \\ I_2 &= -\frac{1}{p} \int_{\partial O(0,\delta)} \left[e^{-\alpha(p)|z|} - 1 \right] \sum_{j=1}^3 (p^2 + \omega_j^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{4\pi|z|} \right) \cos(n_x, e_j) dS_x, \end{aligned}$$

$$I_3 = -\frac{1}{p} \int_{\partial O(0,\delta)} \sum_{j=1}^3 (p^2 + \omega_j^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{4\pi|z|} \right) \cos(n_x, e_j) dS_x,$$

$$N_1 = \frac{1}{p} \int_{O(0,\delta)} \left[e^{-|x|} - 1 \right] \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{4\pi|x|} \right) dS_x,$$

$$N_2 = \frac{1}{p} \int_{O(0,\delta)} \frac{1}{4\pi|x|} \frac{\partial}{\partial n_x} \left(e^{-|x|} \right) dS_x.$$

$$N_3 = \frac{1}{p} \int_{O(0,\delta)} \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{4\pi|x|} \right) dS_x.$$

С учётом результата леммы 5.1 в работе [43] имеем:

$$I_3 + N_3 = 0. \quad (5.4)$$

Рассмотрим интеграл I_1 . Верны равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 (p^2 + \omega_j^2) \frac{\partial}{\partial x_j} (\exp(-\alpha(p)|z|)) \cos(n_x, e_j) = \\ & = -p^2 \frac{\exp(-\alpha(p)|z|)}{\alpha(p)|z|} \sum_{j=1}^3 x_j \cos(n_x, e_j) = -p^2 |x| \frac{\exp(-\alpha(p)|z|)}{\alpha(p)|z|}. \end{aligned}$$

Тогда для интеграла I_1 верно следующее выражение:

$$I_1 = \delta \frac{1}{p} \int_{\partial O(0,\delta)} \left(\frac{p^2}{\alpha(p)|z|} \right) \left(-\frac{\exp(-\alpha(p)|z|)}{4\pi|z|} \right) dS_x.$$

При этом справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \overline{\psi_1}(x, p) &:= \frac{p^2}{\alpha(p)|z|} = \frac{p \sqrt{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2)}}{\sqrt{p^4|x|^2 + \beta_1(x)p^2|x|^2 + \beta_2(x)|x|^2}} = \\ &= \frac{1}{|x|} \sqrt{1 + \frac{\omega_1^2}{p^2}} \sqrt{1 + \frac{\omega_2^2}{p^2}} \sqrt{1 + \frac{\omega_3^2}{p^2}} \left(1 + \frac{\beta_1(x)}{p^2} + \frac{\beta_2(x)}{p^4} \right)^{-1/2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|x|} \sum_{k_1=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k_1} \frac{\omega_1^{2k_1}}{p^{2k_1}} \sum_{k_2=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k_2} \frac{\omega_2^{2k_2}}{p^{2k_2}} \sum_{k_3=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k_3} \frac{\omega_3^{2k_3}}{p^{2k_3}} \times \\
&\times \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} \left[\beta_1(x) + \frac{\beta_2(x)}{p^2} \right]^k \frac{1}{p^{2k}},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

где

$$\begin{aligned}
\beta_1(x) &:= \frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)x_1^2 + (\omega_1^2 + \omega_3^2)x_2^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x_3^2}{|x|^2}, \\
\beta_2(x) &:= \frac{\omega_2^2\omega_3^2x_1^2 + \omega_1^2\omega_3^2x_2^2 + \omega_1^2\omega_2^2x_3^2}{|x|^2}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа, мы из выражения (5.5) получим равенство

$$\begin{aligned}
\psi_1(x, t) &= \frac{1}{|x|} \sum_{k_1=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k_1} \frac{\omega_1^{2k_1} t^{2k_1}}{(2k_1)!} \sum_{k_2=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k_2} \frac{\omega_2^{2k_2} t^{2k_2}}{(2k_2)!} \times \\
&\times \sum_{k_3=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k_3} \frac{\omega_3^{2k_3} t^{2k_3}}{(2k_3)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} \left[\beta_1(x) \text{id} + \beta_2(x) \frac{t^2}{2} \right]^k * \frac{t^{2k}}{(2k)!}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа для интеграла I_1 , мы с учётом (5.2) и (5.6) получим следующее равенство:

$$\widehat{I}_1(t) = \delta \int_0^t \int_{\partial O(0, \delta)} \psi_1(x, \tau) * \mathcal{E}(x, \tau) dS_x d\tau. \tag{5.7}$$

Несложно заметить из равенств (3.6) и (5.6), что при $t \in [0, T]$ и $\delta \in (0, 1]$ имеет место оценка

$$\left| \int_0^t \int_{\partial O(0, \delta)} \psi_1(x, \tau) * \mathcal{E}(x, \tau) dS_x d\tau \right| \leq A(T) < +\infty,$$

где постоянная $A(T) > 0$ и не зависит от $\delta \in (0, 1]$.

Поэтому из (5.7) приходим к выводу, что равномерно по $t \in [0, T]$ справед-

ливо предельное равенство

$$\widehat{I}_1(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0. \quad (5.8)$$

Введём в рассмотрение интеграл I_2 . Видно, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|z|} \right) &= - \frac{1}{\sqrt{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2)}} \times \\ &\times \frac{1}{\left(\frac{x_1^2}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{x_2^2}{p^2 + \omega_2^2} + \frac{x_3^2}{p^2 + \omega_3^2} \right)^{3/2}} \frac{x_j}{p^2 + \omega_j^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

В силу (5.9) справедливо следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^3 (p^2 + \omega_j^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|z|} \right) \cos(n_x, e_j) = - \frac{|x|}{|z|^3} (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2).$$

Тогда для интеграла I_2 справедливо следующее равенство:

$$I_2 = \delta \frac{1}{p} (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2) \int_{\partial O(0, \delta)} [\exp(-\alpha(p)|z|) - 1] \frac{1}{4\pi|z|^3} dS_x. \quad (5.10)$$

Отметим, что верно выражение

$$e^{-\alpha(p)|z|} - 1 = \int_0^1 \frac{\partial (e^{-s\alpha(p)|z|})}{\partial s} ds = -\alpha(p)|z| \int_0^1 e^{-s\alpha(p)|z|} ds. \quad (5.11)$$

С учётом (5.11) из (5.10) мы приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} I_2 &= \delta \sqrt{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_3^2)} \times \\ &\times \int_0^1 \int_{\partial O(0, \delta)} \left(- \frac{\exp(-s\alpha(p)|z|)}{4\pi|z|} \right) \left(\frac{1}{|z|} \right) dS_x ds. \end{aligned} \quad (5.12)$$

С учётом (5.5) из равенства (5.12) вытекает следующее равенство:

$$I_2 = \delta \frac{1}{p} \int_0^1 \int_{\partial O(0,\delta)} \left(-\frac{\exp(-s\alpha(p)|z|)}{4\pi|z|} \right) \overline{\psi_1}(x, p) dS_x ds. \quad (5.13)$$

Применив обратное преобразование Лапласа к выражению (5.13), мы получим следующее равенство:

$$\widehat{I}_2 = \delta \int_0^t \int_0^1 \int_{\partial O(0,\delta)} s \mathcal{E}(sx, \tau) * \psi_1(x, \tau) dS_x ds d\tau. \quad (5.14)$$

Видно, что при $t \in [0, T]$ и $\delta \in (0, 1]$ справедлива оценка

$$\left| \int_0^t \int_0^1 \int_{\partial O(0,\delta)} s \mathcal{E}(sx, \tau) * \psi_1(x, \tau) dS_x ds d\tau \right| \leq B(T) < +\infty, \quad (5.15)$$

где присутствует константа $B(T) > 0$, не зависящая от $\delta \in (0, 1]$. Тогда из (5.14) с учётом (5.15) получим предельное свойство

$$\widehat{I}_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0 \quad (5.16)$$

равномерно по $t \in [0, T]$. Сделаем обратное преобразование Лапласа. Тогда справедливы выражения

$$\widehat{N}_1(t) = \theta(t) \int_{O(0,\delta)} \left[e^{-|x|} - 1 \right] \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{4\pi|x|} \right) dS_x \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0, \quad (5.17)$$

$$\widehat{N}_2(t) = \theta(t) \int_{O(0,\delta)} \frac{1}{4\pi|x|} \frac{\partial}{\partial n_x} \left(e^{-|x|} \right) dS_x \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0 \quad (5.18)$$

равномерно по $t \in [0, T]$. Таким образом, из (5.4), (5.8), (5.16), (5.17) и (5.18) имеем

$$g(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0 \quad (5.19)$$

равномерно по $t \in [0, T]$, где функция g определена равенством (5.1).

Справедлива следующая:

Теорема 5.1. *Для всяких $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\gamma_2 \geq 0$, $3 > \gamma_1 \geq 0$ верна оценка:*

$$J = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |y|^2)^{\gamma_2/2} \frac{\exp(-\gamma|y|)}{|y|^{\gamma_1}} \frac{1}{(1 + |x - y|^2)^{\beta/2}} dy \leq \frac{C}{(1 + |x|^2)^{\beta/2}}, \quad (5.20)$$

где константа $C = C(\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \beta) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно доказать оценку (5.20) при $\gamma_2 = 0$. Прежде всего понятно, что

$$J \leq C. \quad (5.21)$$

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} J &= \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{\exp(-\gamma|y|)}{|y|^{\gamma_1}} \frac{1}{(1 + |x - y|^2)^{\beta/2}} dy + \\ &+ \int_{|y| \geq |x|/2} \frac{\exp(-\gamma|y|)}{|y|^{\gamma_1}} \frac{1}{(1 + |x - y|^2)^{\beta/2}} dy = J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Если $|y| \leq |x|/2$, то справедливы следующие неравенства:

$$|x - y| \geq |x| - |y| \geq |x| - |x|/2 = |x|/2.$$

Тогда справедлива оценка

$$J_1 \leq \frac{1}{(1 + |x|^2/4)^{\beta/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\gamma|y|)}{|y|^{\gamma_1}} dy \leq \frac{C}{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}. \quad (5.23)$$

Если $|y| \geq |x|/2$, то $|x - y| \leq 3|y|$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\exp(-\gamma|y|)}{|y|^{\gamma_1}} &= \frac{\exp(-\gamma|y|/2)}{|y|^{\gamma_1}} \exp(-\gamma|y|/2) \leq \\ &\leq \left(\frac{2}{|x|}\right)^{\gamma_1} \exp(-\gamma|x|/4) \exp(-\gamma|x - y|/6). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Поэтому для J_2 справедлива такая оценка:

$$J_2 \leq C \frac{\exp(-\gamma|x|/4)}{|x|^{\gamma_1}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\gamma|x - y|/6)}{(1 + |x - y|^2)^{\beta/2}} dy \leq C \frac{\exp(-\gamma|x|/4)}{|x|^{\gamma_1}}. \quad (5.25)$$

Из оценок (5.23) и (5.25) получаем оценку (5.20). Теорема доказана полностью.

Глава 6

Исследование потенциалов в пространствах Гёльдера

Введём в рассмотрение объёмный и поверхностный потенциалы:

$$U(x, t) = U[\rho](x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (6.1)$$

$$V_k(x, t) = V_k[\mu](x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^k G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t^k} \mu(y) dy, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (6.2)$$

где

$$G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(x - y, t), \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0. \quad (6.3)$$

Отметим, что здесь фундаментальное решение $\mathcal{E}$ определено равенством (3.6). Справедлива следующая

Теорема 6.1. При $\rho \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$, $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, имеем, что

$$U \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$$

и верна оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial^k U[\rho_1]}{\partial t^k} - \frac{\partial^k U[\rho_2]}{\partial t^k} \right|_{2+\alpha}(t) \leq T \cdot C(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho_1 - \rho_2|_\alpha(t) \quad (6.4)$$

для всяких $\rho_j \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$, где $j = 1, 2$ и функция $C = C(T) > 0$ является монотонно неубывающей, ограниченной на компактах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. $U \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Пусть $\rho \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$. Объёмный потенциал U представляется в следующем виде:

$$U(x, t) = \int_0^t H(x, t, \tau) d\tau, \quad H(x, t, \tau) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy. \quad (6.5)$$

Докажем, что функция $H \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$. В самом деле, пусть

$$(x^j, t^j, \tau^j) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\},$$

при этом пусть $R_1 > 0$ так велико, что

$$x^j \in O(0, R_1).$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |H(x^1, t^1, \tau^1) - H(x^2, t^2, \tau^2)| &\leq |H_1(x^1, t^1, \tau^1)| + |H_1(x^2, t^2, \tau^2)| + \\ &+ |H_2(x^1, t^1, \tau^1)| + |H_2(x^2, t^2, \tau^2)| + |H_3(x^1, t^1, \tau^1) - H_3(x^2, t^2, \tau^2)|, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$H_1(x^j, t^j, \tau^j) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x^j, R_\delta)} G_{\beta_1, \beta_2}(x^j, y, t^j - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy,$$

$$H_2(x^j, t^j, \tau^j) = \int_{O(x^j, r_\delta)} G_{\beta_1, \beta_2}(x^j, y, t^j - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy,$$

$$H_3(x^j, t^j, \tau^j) = \int_{O(x^j, R_\delta) \setminus O(x^j, r_\delta)} G_{\beta_1, \beta_2}(x^j, y, t^j - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy, \quad j = 1, 2.$$

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Тогда найдётся такое достаточно большое R_δ , $R_\delta \geq R_0 > 0$, и достаточно малое r_δ , $R_0 \geq r_\delta > 0$, что вследствие оценок (3.14) и (3.16) будут справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |H_1(x^j, t^j, \tau^j)| &\leq \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| (1 + R_1^2)^{\beta_1/2} C(T, \varepsilon, R_0) \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x^j, R_\delta)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|x^j - y|)}{|x^j - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy \leq \\ &\leq C(T, \varepsilon, R_0, R_1) \int_{R_\delta}^{+\infty} \rho \exp(-(1 - \varepsilon)\rho) d\rho < \frac{\delta}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |H_2(x^j, t^j, \tau^j)| \leq (1 + R_1^2)^{\beta_1/2} \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]} |\rho(x, t)| C(T, \varepsilon, R_0) \times \\
& \times \int_{O(x^j, r_\delta)} \frac{1}{|x^j - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy \leq C(T, \varepsilon, R_0, R_1) \times \\
& \times \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]} |\rho(x, t)| \frac{r_\delta^2}{2} < \frac{\delta}{3}.
\end{aligned}$$

На этом моменте мы зафиксируем R_δ и r_δ . Тогда

$$\begin{aligned}
& |H_3(x^1, t^1, \tau^1) - H_3(x^2, t^2, \tau^2)| \leq \\
& \leq \int_{O(0, R_\delta) \setminus O(0, r_\delta)} \left| \frac{(1 + |x^1|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |z + x^1|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(z, t^1 - \tau^1) - \right. \\
& \left. - \frac{(1 + |x^2|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |z + x^2|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(z, t^2 - \tau^2) \right| dz < \frac{\delta}{3}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

при

$$|(x^1, t^1, \tau^1) - (x^2, t^2, \tau^2)| < \eta(\delta) \tag{6.8}$$

для достаточно малого $\eta(\delta) > 0$. Тогда из (6.6)–(6.7) для всякого $\delta > 0$ существует такое $\eta(\delta) > 0$, что при выполнении (6.8) будет верно

$$|H(x^1, t^1, \tau^1) - H(x^2, t^2, \tau^2)| < \delta.$$

Таким образом, $H \in C(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$. Теперь обоснуем, что $H \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$. Действительно, из (6.3) и (6.5) следует, что

$$|H(x, t, \tau)| \leq \left(\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]} |\rho(x, t)| \right) (I_1 + I_2), \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \frac{|\mathcal{E}(x - y, t - \tau)|}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \\
I_2 &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{O(x, R_0)} \frac{|\mathcal{E}(x - y, t - \tau)|}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy.
\end{aligned}$$

С учётом (3.16) фундаментального решения $\mathcal{E}$ для I_1 верны следующие со-

отношения:

$$\begin{aligned}
I_1 &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} C \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|)}{|x - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\
&= C(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, R_0)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|z|)}{|z|} \frac{1}{(1 + |x - z|^2)^{\beta_2/2}} dz \leq \\
&\leq C(T, R_0, \varepsilon) \frac{1}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \leq C(T, R_0, \varepsilon, \beta_1, \beta_2),
\end{aligned}$$

где была использована оценка (5.20) и учтено условие $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$. Заметим, что при $\beta_1 \geq 0$ несложно доказывается следующее неравенство (им мы воспользуемся для оценки интеграла I_2):

$$(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \leq 2^{\beta_1/4} (1 + |x - y|^2)^{\beta_1/2} (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}. \quad (6.10)$$

С учётом неравенства (6.10) и оценки (3.14) для интеграла I_2 справедлива оценка

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \int_{O(x, R_0)} \frac{(1 + |x - y|^2)^{\beta_1/2}}{|x - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy \leq \\
&\leq C(T, R_0, \varepsilon) < +\infty.
\end{aligned} \quad (6.11)$$

Тогда из (6.9)–(6.11) имеет место

$$\sup_{(x, \tau, t) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}} |H(x, t, \tau)| < +\infty.$$

Итак,

$$H \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Но тогда из (6.5) получаем, что

$$U \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Шаг 2. $U_{x_j} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Покажем, что

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (6.12)$$

Сначала докажем справедливость поточечного равенства

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy. \quad (6.13)$$

Действительно, пусть $x \in O(0, R_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} H(x, t, \tau) &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau) \rho(y, \tau) dy + \\ &+ \int_{O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau) \rho(y, \tau) dy = J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Учитывая то, что функция G_{β_1, β_2} имеет явный вид (6.3), и учитывая оценки (3.14) фундаментального решения и лемму 4.1 [44], докажем поточечное равенство

$$\frac{\partial J_2}{\partial x_j} = \int_{O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy. \quad (6.15)$$

Рассмотрим теперь интеграл J_1 . Заметим, что если $|y| \geq 2R_0$, то имеет место цепочка неравенств

$$|x - y| \geq |y| - |x| \geq 2R_0 - R_0 = R_0 > 0.$$

Пусть $x_h = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_3)$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{J_1(x_h, y, t - \tau) - J_1(x, y, t - \tau)}{h} - \\ &- \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x^*, t, t - \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \right] \rho(y, \tau) dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, NR_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x^*, t, t - \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \right] \rho(y, \tau) dy + \\
&+ \int_{O(0, NR_0) \setminus O(0, 2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x^*, t, t - \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \right] \rho(y, \tau) dy = \\
&= J_{31} + J_{32},
\end{aligned}$$

где $x^* \in |x, x_h|$. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Несложно заметить, что при достаточно большом $N \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$|J_{31}| < \frac{\delta}{2}. \quad (6.16)$$

Зафиксируем это $N \in \mathbb{N}$. Тогда при достаточно малом $|h| > 0$ справедлива оценка

$$|J_{32}| < \frac{\delta}{2}. \quad (6.17)$$

Таким образом, из (6.16) и (6.17) следует, что

$$J_3 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0,$$

и тогда верно поточечное равенство

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy. \quad (6.18)$$

Из (6.14), (6.15) и (6.18) получаем поточечное равенство (6.13). Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения на первом шаге. Причём необходимо воспользоваться оценками (3.14) и (3.17) фундаментального решения, а также оценкой (5.20) одного интеграла. Также верна оценка

$$\sup_{(x, \tau, t) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}} \left| \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right| < +\infty. \quad (6.19)$$

Следовательно, мы доказали, что справедливо выражение (6.12). Приведём доказательство того, что поточечно

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} d\tau. \quad (6.20)$$

Действительно, верны равенства

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{U(x_h, t) - U(x, t)}{h} - \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} d\tau = \\ &= \int_0^t \left[\frac{H(x_h, t, \tau) - H(x, t, \tau)}{h} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right] d\tau = \\ &= \int_0^t \left[\frac{\partial H(x^*, t, \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right] d\tau \quad \text{при } x^* \in |x, x_h|. \end{aligned} \quad (6.21)$$

В силу (6.12) приходим к выводу о том, что

$$J_4 \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad \text{для каждого } t \in [0, T].$$

В результате справедливо поточечное равенство (6.20), откуда с учётом (6.12) и (6.19) приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x_j} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad \frac{\partial U}{\partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (6.22)$$

Шаг 3. $U_t \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Докажем то, что

$$\frac{\partial H}{\partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

При этом сначала докажем поточечное равенство

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy. \quad (6.23)$$

Пусть $x \in O(0, R_0)$ при $R_0 > 0$. В результате верно равенство

$$\begin{aligned} H(x, t, \tau) &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy + \\ &+ \int_{O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy = P_1(x, t, \tau) + P_2(x, t, \tau) \end{aligned}$$

Если рассуждать аналогично доказательству леммы 4.1 [44], то нетрудно доказать, что

$$\frac{\partial P_2(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy.$$

При $|y| \geq 2R_0$ и $|x| < R_0$ справедливо неравенство

$$|x - y| \geq R_0.$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{P_1(x, t + h, \tau) - P_1(x, t, \tau)}{h} - \\ &- \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right] \rho(y, \tau) dy, \end{aligned} \quad (6.24)$$

$t^* \in |t, t + h|.$

$$\begin{aligned}
H_1 = & \int_{O(x, NR_0) \setminus O(x, 2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right] \times \\
& \times \rho(y, \tau) dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, NR_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right] \times \\
& \times \rho(y, \tau) dy = H_{11} + H_{12}.
\end{aligned}$$

Для всякого $\eta > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что верны неравенства

$$\begin{aligned}
|H_{12}| & \leq C(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, NR_0)} \frac{(1 + |x - y|^2)^{\beta_1/2} \exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2} |x - y|} dy \leq \\
& \leq C(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, NR_0)} \frac{(1 + |z|^2)^{\beta_1/2} \exp(-(1 - \varepsilon)|z|)}{|z|} dz < \frac{\eta}{3},
\end{aligned}$$

где были применены неравенство (6.10) и оценка (3.16). Зафиксируем это $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\eta > 0$ найдётся такое $\mu = \mu(\eta) > 0$, что при $|h| < \eta$ справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned}
|H_{11}| & \leq \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \times \\
& \times \int_{O(x, NR_0) \setminus O(x, \delta)} \left| \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right| dy < \frac{\eta}{3}, \quad (6.25)
\end{aligned}$$

где были использованы свойство гладкости (3.13) фундаментального решения $\mathcal{E}$ и явный вид (6.3) функции G_{β_1, β_2} . Таким образом, из (6.24)–(6.25) с учётом (6.24) приходим к выводу о том, что справедливо поточечное равенство (6.23).

Рассуждая точно так же, как на шаге 1, с учётом оценок (3.14) и (3.16),

а также оценки интеграла (5.20) мы можем доказать, что

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy, \quad \frac{\partial H}{\partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}), \quad (6.26)$$

причём справедлива оценка

$$\sup_{(x, t, \tau) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}} \left| \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right| < +\infty. \quad (6.27)$$

Теперь мы докажем, что

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (6.28)$$

Докажем поточечное равенство

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau. \quad (6.29)$$

При этом верны равенства

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U(t+h, x) - U(t, x)}{h} - \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} H(x, t+h, \tau) d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t H(x, t, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} H(x, t+h, \tau) d\tau + \int_0^t \left[\frac{H(x, t+h, \tau) - H(x, t, \tau)}{h} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right] d\tau = U_{11} + U_{12}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Для интеграла U_{11} справедливо равенство

$$U_{11} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [H(x, t+h, \tau) - H(x, t, \tau)] d\tau + H(x, t, t) = U_{111} + U_{112}.$$

Ранее на шаге 1 было доказано, что $H \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, t])$ для любого $t \in [0, T]$. В результате справедливо свойство

$$U_{111} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Заметим, что из явного вида (3.6) вытекает, что

$$U_{112} = H(x, t, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, 0) \rho(y, t) dy = 0.$$

В силу (6.26) имеют место следующие соотношения:

$$U_{12} = \int_0^t \left[\frac{\partial H(x, t^*, \tau)}{\partial t} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right] d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0, \quad (6.31)$$

где $t^* \in [t, t+h]$. В результате из соотношений (6.30)–(6.31) следует поточечное равенство (6.29). Осталось воспользоваться свойством гладкости (6.26), оценкой (6.27) и получить то, что справедлива формула (6.28).

Шаг 4. $U_{x_j t} = U_{tx_j} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Из поточечного равенства (6.22), рассуждая точно так же, как на шаге 3, можно доказать, что справедливо поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t \partial x_j} &= \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t \partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x_j} &\in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}), \end{aligned} \quad (6.32)$$

причём справедливы поточечные равенства

$$\frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial t}.$$

Из поточечного равенства (6.28), рассуждая точно так же, как на шаге 2, можно доказать, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau. \quad (6.33)$$

Теперь, рассуждая точно так же, как на шагах 1 — 3, с учётом оценок (3.14) и (3.17) можно доказать, что в силу поточечных равенств (6.32) и (6.33) имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_j}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]),$$

и поэтому в силу известного результата математического анализа производные коммутируют:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (6.34)$$

Шаг 5. $U_{tt} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Аналогично шагу 3, используя поточечное равенство (6.28), докажем справедливость того, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Поскольку по условию $\rho \in C([0, T]; C_b(\mathbb{R}^3))$ и с учётом оценок (3.14) и (3.16) из поточечного равенства (6.35) точно так же, как на шаге 1, можно доказать,

что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Шаг 6. $U_{x_j x_k} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Поскольку $\rho \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$, то с учётом (7.2) и (8.8), что будет подробнее изучено в разделе 7.2 и главе 8, справедливо поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} &= \left[\beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_j} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4, \end{aligned} \tag{6.36}$$

причём для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} L_4 &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\
& + \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y = \\
& = L_{41} + L_{42} + L_{43} + L_{44} + L_{45}.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Аналогично шагу 1, можно доказать, что

$$L_1 \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{6.38}$$

Аналогично шагу 2, можно доказать, что

$$L_2, L_3 \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{6.39}$$

Заметим, что в силу оценок (7.29) и (7.30), которые будут получены в разделе 7.2, при $x \neq y$ справедливы следующие неравенства:

$$\frac{|(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}|}{|x - y|} \leq 3\beta_1, \quad \beta_1 \in [0, 1], \tag{6.40}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{|(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}|}{|x - y|} \leq \\
& \leq 3\beta_1 \cdot 2^{(\beta_1 - 1)/2} (1 + |x - y|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1 - 1)/2}, \quad \beta_1 > 1.
\end{aligned}$$

Кроме того, в силу оценок (3.15) и (3.18) для

$$|x - y| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j \partial y_k}$$

справедливы следующие оценки при любом $R_0 > 0$:

$$\begin{aligned}
& |x - y| \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j \partial y_k} \right| \leq \frac{C(T, R_0, \varepsilon)}{|x - y|^2} \quad \text{при} \quad |x - y| \leq R_0, \\
& |x - y| \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j \partial y_k} \right| \leq C(T, R_0, \varepsilon) \exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|) \\
& \text{при} \quad |x - y| > R_0.
\end{aligned}$$

Кроме того, в силу свойства гладкости (3.13) фундаментального решения $\mathcal{E}$ имеем:

$$|x| \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_j \partial x_k} \in C^{(m+n)}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times [0, +\infty)) \quad \text{для всех } m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (6.41)$$

Поэтому точно так же, как на шаге 1, для функции $L_{41}(x, t, \tau)$ с учётом (6.40)–(6.41), можно доказать, что

$$L_{41} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (6.42)$$

Введём в рассмотрение интегралы L_{43} и L_{44} . Для любого $\delta > 0$ выберем достаточно большим $R_\delta > R_0$ и достаточно малым $0 < r_\delta < R_0$ таким образом, что будут справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |L_{43}| &\leq \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]} C(T, R_0, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)}{|x-y|} dy \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \int_{R_\delta}^{+\infty} \rho \exp(-(1-\varepsilon)\rho) d\rho < \frac{\delta}{4}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} |L_{44}| &\leq \left[\frac{\rho(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2 - \beta_1}} \right]_\alpha \int_{O(x, r_\delta)} |x-y|^\alpha \left| \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \right| dy \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha \int_{O(x, r_\delta)} \frac{1}{|x-y|^{3-\alpha}} dy \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) r_\delta^\alpha < \frac{\delta}{4}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

На этом шаге зафиксируем эти $R_\delta > R_0 > 0$ и $0 < r_\delta < R_0$. Тогда несложно доказать, что интегралы

$$L_{42}, L_{45} \in C(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Тем самым, с учётом оценок (6.43) и (6.44) нетрудно доказать (см. шаг 1),

что

$$L_{42} + L_{43} + L_{44} + L_{45} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (6.45)$$

Заметим теперь, что функция L_4 не зависит от выбора чисел $R_\delta > r_\delta > 0$. Поэтому возьмём в качестве этих чисел следующие:

$$R_\delta = 2R_0, \quad r_\delta = \frac{R_0}{2}, \quad R_0 > 0.$$

$$\begin{aligned} |L_{42}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3} |\rho(x, t)| \times \\ &\times \left[\int_{O(x, 2R_0) \setminus O(x, R_0)} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)}{|x-y|} dy + \right. \\ &+ \left. \int_{O(x, R_0) \setminus O(x, R_0/2)} \frac{1}{|x-y|^3} dy \right] \leq C(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3} |\rho(x, t)|, \\ |L_{45}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3} |\rho(x, t)|. \end{aligned}$$

В итоге мы доказали соотношение (6.45). Следовательно, из (6.42)–(6.45), а также из (6.38), (6.39) вытекает, что

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (6.46)$$

Поскольку (6.46) справедливо для всех $j, k \in \{1, 2, 3\}$, то в силу известной теоремы математического анализа справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_k \partial x_j}. \quad (6.47)$$

С учётом шага 2 верно поточечное равенство (6.20):

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} d\tau.$$

В силу (6.12) и (6.46) точно так же, как на шаге 2 (см. цепочку равенств

(6.21)), получим следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_k \partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_k \partial x_j} d\tau,$$

из которого в силу (6.46), как и на предыдущих шагах, приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$$

и, кроме того, в силу (6.47) справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Шаг 7. $U_{tx_j x_k} = U_{x_j tx_k} = U_{x_j x_k t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Прежде всего заметим, что справедливо поточечное равенство (6.23)

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy, \quad \frac{\partial H}{\partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Заметим, что поскольку $\rho \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$, то в силу равенства (8.9), которое будет получено в главе 8, приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} &= \left[\beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned} \quad (6.48)$$

причём для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\
& = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\
& + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\
& + \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \times \\
& \times \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\
& + \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_k \partial t} \cos(n_y, e_j) dS_y.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Точно так же, как на шаге 6, используя представление (6.48), можно доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 H}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}), \\
& \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} d\tau = \\
& = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).
\end{aligned} \tag{6.50}$$

На основании результата шага 4 справедливо равенство (6.34), из которого

вытекает следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k}.$$

Приведём доказательство того, что

$$\frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Для этого используем равенства (6.36) и (6.37). Точно так же, как на шаге 3, можно получить следующие поточечные равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} &= \\ &= \left[\beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial x_j} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial x_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned}$$

причём для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\
& + \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \times \\
& \times \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy + \\
& + \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t \partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y.
\end{aligned}$$

Поскольку для фундаментального решения $\mathcal{E}$ справедлива лемма 3.2, то можно доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} &= \left[\beta_1 (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_k x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\
&\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
&+ \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_j \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
&+ \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
&+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy,
\end{aligned} \tag{6.51}$$

причём для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\
& = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\
& + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\
& + \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \times \\
& \times \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy + \\
& + \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_k \partial t} \cos(n_y, e_j) dS_y.
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Из сравнения равенств (6.48) и (6.49) с равенствами (6.51) и (6.52) приходим к следующим поточечным равенствам:

$$\frac{\partial^3 H}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 H}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{6.53}$$

В силу результатов, полученных на шаге 6, справедливы следующие выражения:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} = \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} d\tau, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Верно равенство

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 H(x, t, t)}{\partial x_j \partial x_k} + \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} d\tau, \tag{6.54}$$

при этом

$$\frac{\partial^2 H(x, t, t)}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$

Таким образом, из (6.54) с учётом (6.53) и (6.50) справедливы следующие

равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} &= \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} d\tau = \\ &= \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} d\tau = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t}, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned}$$

С учётом (6.34) верны поточечные равенства

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k}.$$

Шаг 8. $U_{x_j t t} = U_{t x_j t} = U_{t t x_j} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

Точно так же, как на шаге 2, используя равенство (6.35), с учётом оценок (3.14) и (3.17) можно получить поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \right) \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial x_j \partial t^2} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned}$$

С одной стороны, используя оценки (3.14) и (3.17), можно доказать в точности так же, как на шагах 4 и 5, поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \right) \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial t^2 \partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned} \tag{6.55}$$

С другой стороны, в силу результата леммы 3.2 можно доказать поточечное

равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau, \end{aligned}$$

из которого и из (6.55) вытекают равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \right) \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу результата шага 4 справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial t}. \quad (6.56)$$

В итоге из (6.55)–(6.56) следуют поточечные равенства

$$\frac{\partial^3 U}{\partial t^2 \partial x_j} = \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x_j \partial t} = \frac{\partial^3 U}{\partial x_j \partial t^2} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (6.57)$$

Шаг 9. $U_{x_j x_k t t} = U_{x_j t x_k t} = U_{x_j t t x_k} = U_{t x_j x_k t} = U_{t x_j t x_k} =$
 $= U_{t t x_j x_k} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$

Из формулы (6.35), используя оценки (3.14)–(3.18), точно так же, как на шаге 7, можно доказать поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} &= - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau, \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy = \\
& = \left[\beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy,
\end{aligned} \tag{6.59}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\
& = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \right) \times \\
& \times ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\
& + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\
& + \int_{O(x, r_\delta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \right) \times \\
& \times \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\
& + \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \right) \cos(n_y, e_j) dS_y,
\end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy = \\
& = \left[\beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_k \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \\
& (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\
& = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\
& + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\
& + \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\
& + \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_k \partial t^2} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad R_\delta > r_\delta > 0,
\end{aligned} \tag{6.62}$$

причём из (6.59) и (6.60) получаем, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi |x - y|} \rho(y, t) dy \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]), \tag{6.63}$$

а из (6.61) и (6.62) вытекает, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy \in C_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (6.64)$$

Далее из (6.58), (6.63) и (6.64) получаем, что

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Теперь из поточечного равенства (6.36) точно так же, как на шаге 7, с учётом оценок (3.14)–(3.18) фундаментального решения $\mathcal{E}$, можно аналогично шагу 5 доказать следующее поточечное равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} = & - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy + \\ & + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \end{aligned}$$

где для первого слагаемого справедливы формулы (6.59) и (6.60), а для второго слагаемого имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy = \\ & = \left[\beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_j} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \end{aligned}$$

$$+(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} & (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \left[\frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy + \\ &+ \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2 \partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad R_\delta > r_\delta > 0. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Используя результат леммы 3.2, можно доказать, что правые части равенств (6.61) и (6.65), (6.62) и (6.66) совпадают, откуда получаются соотношения

$$\frac{\partial^4 U}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^4 U}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (6.67)$$

Отметим, что с учётом равенств (6.57) верны коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t \partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k \partial t}, \\ \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} &= \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t \partial t} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial t \partial x_k}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Таким образом, из (6.67)–(6.68) получаем, что справедливы следующие соот-

ношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U}{\partial x_j \partial x_k \partial t \partial t} &= \frac{\partial^4 U}{\partial x_j \partial t \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^4 U}{\partial x_j \partial t \partial t \partial x_k} = \\ &= \frac{\partial^4 U}{\partial t \partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^4 U}{\partial t \partial x_j \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^4 U}{\partial t \partial x_j \partial x_k \partial t} \in C_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned}$$

Итак, из шагов 1–9 следует промежуточная

Лемма 6.1. *Если $\rho \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, то потенциал $U \in C_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.*

Шаг 10. $U \in C([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

Из теоремы 7.3 для каждого $t \in [0, T]$ и $\alpha \in (0, 1)$ справедливы соотношения

$$U(t) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3),$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(t) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3). \quad (6.69)$$

Из результата леммы 6.1 верно равенство

$$U(x, t_2) - U(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} dt \quad \text{для всех } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (6.70)$$

Из (6.70) получаем неравенство

$$|U(t_2) - U(t_1)|_{2+\alpha} \leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{2+\alpha}(t) dt \quad \text{для всех } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \quad (6.71)$$

причём из (7.77) главы 7.2 справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{2+\alpha}(t) \leq C(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho|_\alpha(t),$$

из которой и из (6.71) получаем, что

$$|U(t_2) - U(t_1)|_{2+\alpha} \leq C(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho|_\alpha(t) |t_2 - t_1| \rightarrow +0$$

при $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$.

Тогда

$$U \in C([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Шаг 11. $U \in C^{(1)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

В нашем случае справедливо равенство (6.35), которое переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = W(x, t) + U_2(x, t), \quad (6.72)$$

$$W(x, t) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy,$$

$$U_2(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau. \quad (6.73)$$

Заметим, что фактически точно так же, как это было сделано на шагах 1–10, можно доказать, что

$$W \in C_b^{(2+0)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (6.74)$$

В силу результата теоремы 7.4 из раздела 7.2 имеет место оценка следующего вида:

$$\sup_{t \in [0, T]} |W|_{2+\alpha}(t) \leq C \sup_{t \in [0, T]} |\rho|_\alpha(t), \quad (6.75)$$

а в силу результата теоремы 7.3 раздела 7.2 справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t \in [0, T]} |U_2|_{2+\alpha}(t) \leq C(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho|_\alpha(t). \quad (6.76)$$

Из оценок (6.75) и (6.76), а также леммы 6.1 с учётом (6.72) получаем, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех } t \in [0, T]. \quad (6.77)$$

Наконец, из результата леммы 6.1 вытекает равенство

$$\frac{\partial U(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t_1)}{\partial t} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial \tau^2} d\tau$$

для всех $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, из которого с учётом (6.69) и (6.77) получаем неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial U(t_2)}{\partial t} - \frac{\partial U(t_1)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right|_{2+\alpha}(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha}(t) |t_2 - t_1| \leq C(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho|_\alpha(t) |t_2 - t_1| \rightarrow +0 \end{aligned}$$

при $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial t} \in C([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Приведём доказательство того, что

$$\frac{dU(x, t)}{dt} = \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}, \quad (6.78)$$

где сильная производная по времени в смысле банахова пространства $C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ обозначается через dU/dt . Действительно, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - \frac{\partial U(t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} &= \\ &= \left| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - \frac{\partial U(t)}{\partial t} \right|_0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{U_{x_j}(t+h) - U_{x_j}(t)}{h} - \frac{\partial^2 U(t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \\
& + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{U_{x_j x_k}(t+h) - U_{x_j x_k}(t)}{h} - \frac{\partial^3 U(t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha \leq \\
& \leq \left| \frac{\partial U(t^*)}{\partial t} - \frac{\partial U(t)}{\partial t} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^2 U(t^{**})}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \\
& + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial^3 U(t^{***})}{\partial t \partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^3 U(t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha \leq \sup_{s \in |t, t+h|} \left| \frac{\partial U(s)}{\partial t} - \frac{\partial U(t)}{\partial t} \right|_0 + \\
& + \sum_{j=1}^3 \sup_{s \in |t, t+h|} \left| \frac{\partial^2 U(s)}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \\
& + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \sup_{s \in |t, t+h|} \left| \frac{\partial^3 U(s)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^3 U(t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha = \\
& = \sup_{s \in |t, t+h|} \left| \frac{\partial U(s)}{\partial t} - \frac{\partial U(t)}{\partial t} \right|_0 + \\
& + \sum_{j=1}^3 \sup_{s \in |t, t+h|} \left| \frac{\partial^2 U(s)}{\partial x_j \partial t} - \frac{\partial^2 U(t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \\
& + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \sup_{s \in |t, t+h|} \left| \frac{\partial^3 U(s)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^3 U(t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha = I_1 + I_2 + I_3, \\
& t^*, t^{**}, t^{***} \in |t, t+h|,
\end{aligned} \tag{6.79}$$

где мы воспользовались коммутационными соотношениями, которые справедливы в силу результата леммы 6.1. В силу этой же леммы справедливы предельные свойства

$$I_1 \rightarrow 0, \quad I_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow +0. \tag{6.80}$$

Заметим, что в силу результата леммы 6.1 и теоремы 7.3 раздела 7.2 справедливо равенство

$$\frac{\partial^3 U(x, s)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \int_{|s, t|} \frac{\partial^4 U(x, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial \tau^2} d\tau, \tag{6.81}$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x_j \partial x_k \partial t}, \quad \frac{\partial^4 U}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in C^\alpha(\mathbb{R}^3) \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (6.82)$$

Поэтому из (6.81) с учётом (6.82) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^3 U(s)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^3 U(t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha \leq \int_{|s,t|} \left| \frac{\partial^4 U}{\partial x_j \partial x_k \partial \tau^2} \right|_\alpha(\tau) d\tau \leq \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial^4 U}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha(t) |t - s| \leq C(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho|_\alpha(t) |t - s|, \end{aligned}$$

из которой получаем, что

$$I_3 \rightarrow 0 \quad \text{при } |h| \rightarrow +0. \quad (6.83)$$

В итоге из (6.79) с учётом (6.80) и (6.83) следует то, что

$$\left| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - \frac{\partial U(t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} \rightarrow +0 \quad \text{при } |h| \rightarrow +0.$$

Следовательно, доказано (6.78), и поэтому вместе с результатом шага 10 приходим к выводу, что

$$U \in C^{(1)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при } \alpha \in (0, 1).$$

Шаг 12. $U \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$

Заметим, что справедливо равенство (6.72). При этом в силу оценки (7.78) главы 7.2 и соотношения (6.74) имеют место следующие соотношения:

$$W(t) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех } t \in [0, T], \quad \alpha \in (0, 1),$$

$$|W(t_2) - W(t_1)|_{2+\alpha} \leq C(T) |\rho(t_2) - \rho(t_1)|_\alpha \rightarrow +0 \quad (6.84)$$

при $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$ для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$, и поэтому

$$W \in C([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при } \alpha \in (0, 1).$$

Теперь рассмотрим потенциал U_2 , определённый равенством (6.73). Точно так

же, как при доказательстве равенства (6.72) на шаге 5, используя результат леммы 3.1, можно доказать поточечное равенство

$$\frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^3} \rho(y, \tau) dy d\tau.$$

Теперь, используя оценки (3.14)–(3.18), можно доказать, что

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} \in C_b^{(2+0)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (6.85)$$

Можно доказать, что

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} \in C_b^{(2+1)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]), \quad (6.86)$$

но в данной работе нам достаточно соотношения (6.85). Кроме того, в силу результата теоремы 7.3 раздела 7.2 имеет место соотношение

$$\frac{\partial U_2(t)}{\partial t} \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех } t \in [0, T]. \quad (6.87)$$

Итак, с учётом (6.84)–(6.87) получаем из равенства (6.72) выражение

$$\frac{\partial^2 U(x, t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t_1)}{\partial t^2} = W(x, t_2) - W(x, t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} dt, \quad (6.88)$$

причём

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 U(t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(t_1)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} \leqslant \\ & \leqslant |W(t_2) - W(t_1)|_{2+\alpha} + \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial U_2}{\partial t} \right|_{2+\alpha}(t) dt, \end{aligned} \quad (6.89)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial U_2}{\partial t} \right|_{2+\alpha}(t) \leqslant C(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho|_\alpha(t). \quad (6.90)$$

Таким образом, из (6.88)–(6.90) следует оценка

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 U(t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(t_1)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} \leq C(T) \times \\ & \times \left(|\rho(t_2) - \rho(t_1)|_\alpha + \sup_{t \in [0, T]} |\rho|_\alpha(t) |t_2 - t_1| \right) \rightarrow +0 \end{aligned}$$

при $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$ для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \in C([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0, 1).$$

Учитывая, что на предыдущем шаге нами было доказано, что

$$\frac{dU(x, t)}{dt} = \frac{\partial U(x, t)}{\partial t},$$

то теперь наша задача доказать, что в смысле банахова пространства $C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}.$$

Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{U_t(t+h) - U_t(t)}{h} - \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} = \\ & = \left| \frac{U_t(t+h) - U_t(t)}{h} - \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} \right|_0 + \\ & + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{U_{x_j t}(t+h) - U_{x_j t}(t)}{h} - \frac{\partial^3 U(t)}{\partial x_j \partial t^2} \right|_0 + \\ & + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{U_{x_j x_k t}(t+h) - U_{x_j x_k t}(t)}{h} - \frac{\partial^4 U(t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_\alpha = \\ & = \left| \frac{\partial^2 U(t^*)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^3 U(t^{**})}{\partial t \partial x_j \partial t} - \frac{\partial^3 U(t)}{\partial x_j \partial t^2} \right|_0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial^4 U(t^{***})}{\partial t \partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^4 U(t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_{\alpha} = \left| \frac{\partial^2 U(t^*)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} \right|_0 + \\
& + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^3 U(t^{**})}{\partial x_j \partial t^2} - \frac{\partial^3 U(t)}{\partial x_j \partial t^2} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial^4 U(t^{***})}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} - \frac{\partial^4 U(t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_{\alpha} = \\
& = J_1 + J_2 + J_3, \quad t^*, t^{**}, t^{***} \in |t, t+h|,
\end{aligned}$$

где мы воспользовались коммутационными соотношениями, поскольку в силу леммы 6.1 имеем $U \in C_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Далее, рассуждая точно так же, как на шаге 11, в силу (6.86), (6.87) и (6.90) можно доказать, что

$$J_1, J_2, J_3 \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow +0.$$

В результате шагов 10–12 справедливо основное утверждение настоящей теоремы:

$$U \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0, 1).$$

Теорема доказана полностью.

Справедлива следующая

Теорема 6.2. Если $\mu \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, то для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем

$$V_k \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)),$$

где потенциал V_k определён равенством (6.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение фактически доказано при доказательстве теоремы 6.1.

Введём следующие потенциалы:

$$U_0(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau, \quad (6.91)$$

$$V_{00}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu_0(y) dy, \quad (6.92)$$

$$V_{01}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \mu_1(y) dy, \quad (6.93)$$

где

$$\rho_0 \in C([0, T]; C^\alpha((1 + |x|^2)^{\gamma/2}; \mathbb{R}^3)), \quad (6.94)$$

$$\mu_0 \in C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3), \quad (6.95)$$

$$\mu_1 \in C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3) \quad (6.96)$$

при $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$. Заметим, что потенциалы (6.91)–(6.93) связаны с потенциалами (6.1) и (6.2) следующим образом:

$$U_0(x, t) = \frac{U(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \rho(x, t) = (1 + |x|^2)^{\gamma/2} \rho_0(x, t), \quad (6.97)$$

$$V_{00}(x, t) = \frac{V_0(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \mu(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} \mu_0(x), \quad (6.98)$$

$$V_{01}(x, t) = \frac{V_1(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \mu(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_3/2} \mu_1(x). \quad (6.99)$$

Справедлива

Теорема 6.3. *Если выполнены соотношения (6.94)–(6.96), то при $\alpha \in (0, 1)$ и $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$ указанные потенциалы принадлежат следующему классу:*

$$U_0, V_{00}, V_{01} \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из равенств (6.97)–(6.99) и теорем 6.1, 6.2.

Справедлива следующая

Лемма 6.2. *При $u_0, u_1 \in C_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ верны равенства*

$$\frac{\partial V_{00}[\Delta u_1 - u_1]}{\partial t}(x, 0) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} [\Delta u_1(y) - u_1(y)] dy = u_1(x), \quad (6.100)$$

$$V_{01}[\Delta u_0 - u_0](x, 0) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} [\Delta u_0(y) - u_0(y)] dy = u_0(x), \quad (6.101)$$

$$U_{00}(x, 0) = \frac{\partial U_{00}}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad V_{00}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial V_{01}}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (6.102)$$

для любого $x \in \mathbb{R}^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства (6.100) и (6.101) являются следствиями теоремы 6.2 и доказаны, например, в работе [45]. Равенства (6.102) являются следствиями леммы 3.1.

Наконец, справедлива

Теорема 6.4. Если $\rho_0 \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$, $\mu_0, \mu_1 \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$, то

$$\mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x, t) = \rho_0(x, t), \quad (6.103)$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x, t) = \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x, t) = 0 \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \quad (6.104)$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x, t) = \Delta_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_j^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ — скобки двойственности между пространством основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ и пространством обобщённых функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между пространством основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и пространством обобщённых функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. В результате верны равенства

$$\begin{aligned} \langle\langle U_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathcal{E}(x, t) * \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle, \\ \langle\langle V_{00}(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathcal{E}(x, t) * \delta(t) \mu_0(x), \phi(x, t) \rangle\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\langle V_{01}(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathcal{E}'(x, t) * \delta(t) \mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle \mathcal{E}(x, t) * \delta'(t) \mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle \quad \text{для любой } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T)). \end{aligned} \quad (6.105)$$

С помощью теории обобщённых функций доказываются нижеприведённые равенства:

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) * \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle \delta(x, t) * \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle = \langle\langle \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle, \end{aligned} \quad (6.106)$$

$$\begin{aligned}
\langle \langle \mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x, t), \phi(x, t) \rangle \rangle &= \langle \langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) * \delta(t) \mu_0(x), \phi(x, t) \rangle \rangle = \\
&= \langle \langle \delta(x, t) * \delta(t) \mu_0(x), \phi(x, t) \rangle \rangle = \langle \langle \delta(t) \mu_0(x), \phi(x, t) \rangle \rangle = \\
&= \langle \mu_0(x), \phi(x, 0) \rangle = 0,
\end{aligned} \tag{6.107}$$

$$\begin{aligned}
\langle \langle \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x, t), \phi(x, t) \rangle \rangle &= \langle \langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) * \delta'(t) \mu_1(x), \phi(x, t) \rangle \rangle = \\
&= \langle \langle \delta(x, t) * \delta'(t) \mu_1(x), \phi(x, t) \rangle \rangle = \langle \langle \delta'(t) \mu_1(x), \phi(x, t) \rangle \rangle = \\
&= - \langle \mu_1(x), \phi'(x, 0) \rangle = 0
\end{aligned} \tag{6.108}$$

для всякой функции $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$. В силу результатов теорем 6.1 и 6.3 из равенств (6.106)–(6.108) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} [\mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x, t) - \rho_0(x, t)] \phi(x, t) dx dt = 0, \\
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x, t) \phi(x, t) dx dt = 0, \\
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x, t) \phi(x, t) dx dt = 0
\end{aligned}$$

для любой $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$. В силу основной леммы вариационного исчисления приходим к равенствам (6.103), (6.104).

Пусть

$$L(x, t) = U_0[\rho_0](x, t) + V_{00}[\Delta_x u_1 - u_1](x, t) + V_{01}[\Delta_x u_0 - u_0](x, t). \tag{6.109}$$

Верна

Теорема 6.5. Если $\rho_0 \in C([0, T]; C^\alpha((1 + |x|^2)^{\gamma/2}; \mathbb{R}^3))$, при $\alpha \in (0, 1)$ и

$$\Delta_x u_0 - u_0 \in C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3), \tag{6.110}$$

$$\Delta_x u_1 - u_1 \in C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3) \tag{6.111}$$

при $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$, то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} L &\in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)), \\ \mathfrak{M}_{x,t}[L](x, t) &= \rho_0(x, t) \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ L(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial L(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство базируется на теоремах 6.2, 6.4 и лемме 6.2.

Замечание 1. Заметим, что мы имеем достаточные условия для функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ такие, чтобы были выполнены соотношения (6.110), (6.111):

$$u_0 \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3), \quad u_1 \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3)$$

при $\beta_2 \geq 0$, $\beta_3 \geq 0$ и $\alpha \in (0, 1)$.

Пусть $u_0 \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3)$. Тогда верны равенства

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} \Delta u_0(x) &= \Delta((1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)) - \\ &- u_0(x) \Delta(1 + |x|^2)^{\beta_2/2} - 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} \frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j} = \\ &= \Delta((1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)) - (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x) \frac{\Delta(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} - \\ &- 2 \sum_{j=1}^3 (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} \frac{\frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} = \\ &= \Delta((1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)) + (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x) \frac{\Delta(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} - \\ &- 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial[(1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)]}{\partial x_j} \frac{\frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} + \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^3 (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x) \frac{\left(\frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j} \right)^2}{(1 + |x|^2)^{\beta_2}},$$

$$(1 + |x|^2)^{\beta_2/2} \Delta u_0 \in C^\alpha(\mathbb{R}^3).$$

Глава 7

Оценки типа Шаудера

7.1. Априорная оценка типа Шаудера

При $u \in C_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ верна третья формула Грина (см. формулу (4.23) теоремы 4.3):

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\mathcal{E}(x - \xi, t) [\Delta_\xi u_1(\xi) - u_1(\xi)] + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} [\Delta_\xi u_0(\xi) - u_0(\xi)] \right] d\xi. \quad (7.1)$$

Из результатов шагов 10 — 12 теоремы 6.1 для объёмного потенциала и теоремы 6.2 для поверхностных потенциалов из равенства (7.1) вытекает следующая априорная оценка типа Шаудера:

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[|(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(t)|_{2+\alpha} + |(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u'(t)|_{2+\alpha} + \right. \\ \left. + |(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u''(t)|_{2+\alpha} \right] \leq C(T) \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| (1 + |x|^2)^{\gamma/2} \mathfrak{M}_{x, t}[u](t) \right|_\alpha + \right. \\ \left. + \left| (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} [\Delta_x u_0 - u_0] \right|_\alpha + \left| (1 + |x|^2)^{\beta_3/2} [\Delta_x u_1 - u_1] \right|_\alpha \right],$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$.

7.2. Оценки типа Шаудера для потенциалов с весом

В этом разделе мы воспользуемся методами исследований из работы [44] (см. также работу [46]). Рассмотрим потенциал с весом:

$$u(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy,$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Отметим справедливость равенств

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j \partial x_i} &= \left[\beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{ij} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_i x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\
&\times \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy + \beta_1 x_i (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial x_j} f(y) dy + \\
&+ \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial x_i} f(y) dy + \\
&+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy = \\
&= u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t).
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Прежде всего нам нужно получить вспомогательные оценки. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}
(1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} F(x_1 - y, t) - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} F(x_2 - y, t) &= \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left[(1 + |x_s|^2)^{\beta_1/2} F(x_s - y, t) \right] ds = \{x_s = sx_1 + (1 - s)x_2\} = \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^3 \beta_1 (1 + |x_s|^2)^{\beta_1/2-1} x_{sj} (x_{1j} - x_{2j}) F(x_s - y, t) ds + \\
&+ \int_0^1 (1 + |x_s|^2)^{\beta_1/2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F(x_s - y, t)}{\partial x_{sj}} (x_{1j} - x_{2j}) = K_1 + K_2.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Воспользуемся оценкой (6.10) в случае $\beta_1 = 1$ и $x = x_s$:

$$(1 + |x_s|^2)^{1/2} \leq \sqrt{2} (1 + |x_s - y|^2)^{1/2} (1 + |y|^2)^{1/2}. \tag{7.4}$$

Для оценки K_1 нужно рассмотреть два случая: $\beta_1 \in [0, 1]$ и $\beta_1 > 1$. Пусть $\beta_1 \in [0, 1]$.

Тогда справедлива оценка

$$|K_1| \leq 3\beta_1|x_1 - x_2| \int_0^1 |F(x_s - y, t)| ds, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \quad (7.5)$$

Пусть теперь $\beta_1 > 1$. С учётом (7.4) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |K_1| &\leq 3\beta_1|x_1 - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s|^2)^{(\beta_1-1)/2} |F(x_s - y, t)| ds \leq \\ &\leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| \times \\ &\times \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |F(x_s - y, t)| ds, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned}$$

Для K_2 с учётом (7.4) справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} |K_2| &\leq 2^{\beta_1/2} 3(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} |x_1 - x_2| \times \\ &\times \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} |D_x F(x_s - y, t)| ds. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Таким образом, из (7.3) и (7.5)–(7.6) вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned} &\left| (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} F(x_1 - y, t) - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} F(x_2 - y, t) \right| \leq \\ &\leq 3\beta_1|x_1 - x_2| \int_0^1 ds |F(x_s - y, t)| \times \\ &\times \begin{cases} 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2}, & \text{если } \beta_1 > 1; \\ 1, & \text{если } \beta_1 \in [0, 1]; \end{cases} + \\ &+ 2^{\beta_1/2} 3(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} |x_1 - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} |D_x F(x_s - y, t)| ds, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $x_s = sx_1 + (1 - s)x_2$, $s \in [0, 1]$.

Справедлива

Теорема 7.1. Если $\mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$, и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, то

$$\sup_{t \in [0, T]} |u_4|_\alpha(t) \leq C(T) |\mu|_\alpha \quad \text{для всех } t \in [0, T],$$

где $C = C(T) > 0$ — монотонно неубывающая функция, ограниченная на компактах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ такие точки, что

$$\rho := |x_1 - x_2| < 1, \quad x_0 := \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad R_0 > 1.$$

Тогда очевидно, что

$$x_1, x_2 \in \overline{O(x_0, \rho)} \subset O(x_0, R_0).$$

При этом

$$u_4(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy,$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1],$$

с учётом равенства (8.11), которое будет получено в главе 8 независимо от последующих результатов настоящей главы (из-за громоздкости обоснований это вынесено в отдельную главу, которая является приложением к настоящей главе) и в котором положим $z = x_0$ и $R = 2R_0$. Верно представление

$$u_4(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} f(y) dy +$$

$$+ \int_{O(x_0, 2R_0)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [f(y) - f(x)] dy +$$

$$+(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_i) dS_y, \quad x \in O(x_0, 2R_0). \quad (7.8)$$

Введём обозначение

$$F_2(x, y, t) := (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j}. \quad (7.9)$$

С учётом представления (7.8) и обозначения (7.9) справедливо следующее равенство (см. лемму 4.4 в работе [44]):

$$u_4(x_1, t) - u_4(x_2, t) = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6, \quad (7.10)$$

$$I_0 := \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} [F_2(x_1, y, t) - F_2(x_2, y, t)] f(y) dy, \quad (7.11)$$

$$I_1 := (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) \times \\ \times \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \left[\frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \right] \cos(n_y, e_i) dS_y, \quad (7.12)$$

$$I_2 := \left[(1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) \right] \times \\ \times \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_i) dS_y,$$

$$I_3 := \int_{O(x_0, \rho)} F_2(x_2, y, t) (f(x_2) - f(y)) dy, \quad (7.13)$$

$$I_4 := \int_{O(x_0, \rho)} F_2(x_1, y, t) (f(y) - f(x_1)) dy, \quad (7.14)$$

$$I_5 := (f(x_2) - f(x_1)) \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} F_2(x_2, y, t) dy, \quad (7.15)$$

$$I_6 := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} (F_2(x_2, y, t) - F_2(x_1, y, t)) (f(x_1) - f(y)) dy. \quad (7.16)$$

Шаг 2. I_0 . Учтём, что при $|y - x_0| \geq 2R_0$ верны неравенства

$$|x_s - y| \geq |y - x_0| - |x_s - x_0| \geq |y - x_0| - \frac{1}{2}|y - x_0| = \frac{1}{2}|y - x_0| \geq R_0 > 0, \quad (7.17)$$

$$|x_s - y| \leq |x_s - x_0| + |y - x_0| \leq \frac{1}{2}|y - x_0| + |y - x_0| = \frac{3}{2}|y - x_0|. \quad (7.18)$$

Пусть $\beta_1 \in [0, 1]$. Тогда с учётом (7.7) верны неравенства

$$\begin{aligned} & |F_2(x_1, y, t) - F_2(x_2, y, t)| \leq 3\beta_1|x_1 - x_2| \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right| ds + \\ & + 2^{\beta_1/2} 3(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} |x_1 - x_2| \times \\ & \times \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} \left| D_x \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right| ds \leq \\ & \leq C(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \int_0^1 \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |x_s - y|}{|x_s - y|} ds + C(T, R_0, \varepsilon) \times \\ & \times |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} \times \\ & \times \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |x_s - y|}{|x_s - y|} ds \leq \\ & \leq C(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \frac{\exp(-(1 - \varepsilon))(1/2) |y - x_0|}{|y - x_0|} + C(T, R_0, \varepsilon) \times \\ & \times |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} (1 + |y - x_0|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |y - x_0|}{|y - x_0|}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

где $x_s = sx_1 + (1 - s)x_2$ и были использованы оценки (3.18), (3.19). Теперь получим оценку, аналогичную (7.19) в случае $\beta_1 > 1$. Из тех же соображений верно следующее неравенство:

$$|F_2(x_1, y, t) - F_2(x_2, y, t)| \leq C(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times (1 + |y - x_0|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon))|y - x_0|}{|y - x_0|} + C(T, R_0, \varepsilon)|x_1 - x_2| \times \\
& \times (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} (1 + |y - x_0|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon))|y - x_0|}{|y - x_0|}.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Поэтому из (7.19) и (7.11) получаем при $\beta_1 \in [0, 1]$ следующую оценку:

$$\begin{aligned}
|I_0| & \leq C(T, R_0, \varepsilon)|x_1 - x_2| |f(x)|_0 \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon))(1/2)|y - x_0|}{|y - x_0|} dy + \\
& + C(T, R_0, \varepsilon)|x_1 - x_2| \left| f(x)(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \right|_0 \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1 + |y - x_0|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon))|y - x_0|}{|y - x_0|} dy \leq \\
& \leq C(T, R_0, \varepsilon)|\mu|_0|x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1].
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Из (7.20) и (7.11) получаем при $\beta_1 > 1$ следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
|I_0| & \leq C(T, R_0, \varepsilon)|x_1 - x_2| \left| f(x)(1 + |x|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} \right|_0 \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1 + |y - x_0|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon))(1/2)|y - x_0|}{|y - x_0|} dy + \\
& + C(T, R_0, \varepsilon)|x_1 - x_2| \left| f(x)(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \right|_0 \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1 + |y - x_0|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon))|y - x_0|}{|y - x_0|} dy \leq \\
& \leq C(T, R_0, \varepsilon)|\mu|_0|x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1.
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Таким образом, из (7.21) и (7.22) вытекает единообразная оценка

$$|I_0| \leq C(T, R_0, \varepsilon)|\mu|_0|x_1 - x_2|. \tag{7.23}$$

Шаг 3. I_1 . Имеет место равенство

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} = \int_0^1 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial x_{sk} \partial x_j} [x_{1k} - x_{2k}] ds,$$

из которого при $|y - x_0| = 2R_0$ с учётом неравенств (7.17) и (7.18) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \right| &\leq 3|x_1 - x_2| \int_0^1 \left| D_x \frac{\partial \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial y_j} \right| ds \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \int_0^1 \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)|x_s - y|)}{|x_s - y|} ds \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)|y - x_0|)}{|y - x_0|}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

С учётом (7.24) из (7.12) получаем искомую оценку

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right|_0 C(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \times \\ &\times \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)|y - x_0|)}{|y - x_0|} dS_y \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Шаг 4. I_2 . Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \left[(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right]_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \times \\ &\times \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)|y - x_0|)}{|y - x_0|} dS_y \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \left[\frac{\mu}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right]_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha, \end{aligned} \quad (7.26)$$

поскольку по условию $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$.

Шаг 5. I_3 и I_4 . Получим оценку на интеграл I_3 , поскольку оценка для интеграла I_4 получается заменой $x_2 \leftrightarrow x_1$. Выражение (7.13) для интеграла I_3 можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_3 = & \int_{O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \left[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) \right] dy + \\ & + \int_{O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} f(y) \left[(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right] dy =: I_{31} + I_{32}. \end{aligned}$$

Заметим, что если $|y - x_0| \leq \rho$, то

$$|y - x_2| \leq |y - x_0| + |x_2 - x_0| \leq \rho + \frac{\rho}{2} = \frac{3\rho}{2}. \quad (7.27)$$

Поэтому для I_{31} справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} |I_{31}| & \leq C(T, R_0, \varepsilon) \left[\frac{\mu}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right]_{\alpha} \int_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{1}{|y - x_2|^{3-\alpha}} dy \leq \\ & \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_{\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Заметим, что в силу (7.7) справедливы следующие оценки:

$$\left| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 |y - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1], \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \left| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| & \leq \\ & \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |y - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} ds \leq \\ & \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |y - x_2|, \quad \beta_1 > 1, \end{aligned} \quad (7.30)$$

где мы воспользовались следующими соотношениями:

$$|x_s - y| = |sy + (1 - s)x_2 - y| = (1 - s)|y - x_2| \leq |y - x_2|, \quad s \in [0, 1].$$

Сначала получим оценку для I_{32} при $\beta_1 \in [0, 1]$. Действительно, с учётом

(7.27) и (7.29) справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |I_{32}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 \int_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{1}{|y - x_2|^2} dy \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Теперь получим оценку для I_{32} при $\beta_1 > 1$. Действительно, с учётом (7.27) и (7.30) справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |I_{32}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \left| \frac{\mu}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 \times \\ &\times \int_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{(1 + |y - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2}}{|y - x_2|^2} dy \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Таким образом, из (7.28), (7.31) и (7.32) вытекает следующая оценка:

$$|I_3| \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \quad (7.33)$$

По аналогии для I_4 (см. формулу (7.14)) получаем нижеприведённую оценку:

$$|I_4| \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \quad (7.34)$$

Шаг 6. I_5 . Перепишем равенство (7.15) следующим образом:

$$\begin{aligned} I_5 &= \left[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) \right] \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy + \\ &+ \left[(1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right] f(x_1) \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy := I_{51} + I_{52}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Рассмотрим интеграл

$$J := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy.$$

Для J справедливо равенство

$$\begin{aligned} J = & \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_i) dy - \\ & - \int_{\partial O(x_0, \rho)} \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_i) dy := J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Заметим, что при $|y - x_0| = 2R_0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |y - x_2| & \geq |y - x_0| - |x_2 - x_0| \geq |y - x_0| - \frac{\rho}{2} \geq \\ & \geq |y - x_0| - \frac{1}{4}|y - x_0| = \frac{3}{4}|y - x_0|. \end{aligned} \quad (7.37)$$

В силу (7.37) получаем следующую оценку для J_1 :

$$\begin{aligned} |J_1| & \leq C(T, R_0, \varepsilon) \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)(3/4)|y - x_0|)}{|y - x_0|} dS_y \leq \\ & \leq C(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \end{aligned} \quad (7.38)$$

С учётом (7.37) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |J_2| & \leq C(T, R_0, \varepsilon) \int_{\partial O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_2|^2} dS_y \leq \\ & \leq C(T, R_0, \varepsilon) \int_{\partial O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^2} dS_y = C(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Таким образом, из (7.36) с учётом (7.38) и (7.39) справедлива оценка

$$|J| \leq C(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \quad (7.40)$$

Теперь мы получим оценку для I_{51} , определённого равенством (7.35). Действительно, с учётом оценки (7.40) справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} |I_{51}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \left[\frac{\mu}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right]_{\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha} \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_{\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Для оценки I_{52} , определённого равенством (7.35), необходимо опять отдельно рассмотреть случаи $\beta_1 \in [0, 1]$ и $\beta_1 > 1$. Справедливы следующие оценки:

$$\left| (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1], \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} &\left| (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq \\ &\leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| 2^{(\beta_1 - 1)/2} (1 + |x_1|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} \int_0^1 (1 + |x_s - x_1|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} ds \leq \\ &\leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| 2^{(\beta_1 - 1)/2} (1 + |x_1|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} \times \\ &\times (1 + |x_1 - x_2|^2)^{(\beta_1 - 1)/2}, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Пусть сначала $\beta_1 \in [0, 1]$. Тогда с учётом (7.42) и (7.40) получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_{52}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 |x_1 - x_2| \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Пусть теперь $\beta_1 > 1$. Тогда с учётом (7.43) и (7.40) получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_{52}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \left| \frac{\mu}{(1 + |x|^2)^{(1 + \beta_2 - \beta_1)/2}} \right|_0 |x_1 - x_2| \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Таким образом, из (7.35), (7.41), (7.44) и (7.45) следует искомая оценка

$$|I_5| \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_{\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}. \quad (7.46)$$

Шаг 7. I_6 . Интеграл I_6 , определённый равенством (7.16), можно предста-

вить в следующем виде:

$$I_6 = I_{61} + I_{62} + I_{63}, \quad (7.47)$$

$$I_{61} := \left[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] \times \\ \times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [f(x_1) - f(y)] dy,$$

$$I_{62} := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right] \times \\ \times \left[(1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) \right] dy, \quad (7.48)$$

$$I_{63} := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right] \times \\ \times \left[(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] f(y) dy. \quad (7.49)$$

Заметим, что $|y - x_0| \geq \rho$ и справедливы неравенства

$$|x_1 - y| \leq |y - x_0| + |x_1 - x_0| \leq |y - x_0| + \frac{\rho}{2} \leq \frac{3}{2}|y - x_0|, \quad (7.50)$$

$$|x_2 - y| \geq |y - x_0| - |x_2 - x_0| \geq |y - x_0| - \frac{\rho}{2} \geq \frac{1}{2}|y - x_0|. \quad (7.51)$$

Для того чтобы оценить интеграл I_{61} , нужно рассмотреть опять два случая: $\beta_1 \in [0, 1]$ и $\beta_1 > 1$. Пусть $\beta_1 \in [0, 1]$. Тогда с учётом (7.50) и (7.51) справедливы следующие оценки:

$$|I_{61}| \leq C(T, R_0, \varepsilon) |x_2 - x_1| [f]_\alpha \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{|x_1 - y|^\alpha}{|x_2 - y|^3} dy \leq \\ \leq C(T, R_0, \varepsilon) |x_2 - x_1| [f]_\alpha \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^{3-\alpha}} dy \leq \\ \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \quad (7.52)$$

Пусть $\beta_1 > 1$. Справедливо равенство

$$\begin{aligned}
I_{61} := & \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \times \\
& \times \left[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] f(x_1) dy - \\
& - \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \times \\
& \times \left[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] f(y) dy = I_{611} + I_{612}.
\end{aligned} \tag{7.53}$$

Сначала получим оценку для интеграла I_{611} . С этой целью заметим, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
& \left| (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq \\
& \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| (1 + |x_2 - x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} \leq \\
& \leq 3\beta_1 2^{\beta_1-1} |x_1 - x_2| (1 + |x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2}.
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Таким образом, из (7.53) с учётом (7.51) и (7.54) получаем оценку

$$\begin{aligned}
|I_{611}| & \leq C(T, R_0, \varepsilon) \left| \frac{\mu}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 |x_1 - x_2| \times \\
& \times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq \\
& \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||].
\end{aligned} \tag{7.55}$$

Теперь получим оценку для интеграла I_{612} . С этой целью заметим, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
& \left| (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq \\
& \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} ds \leq
\end{aligned}$$

$$\leq 3\beta_1 2^{\beta_1-1} (1 + (1/2 + 2R_0)^2)^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2}. \quad (7.56)$$

Таким образом, из (7.53) с учётом (7.51) и (7.56) получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_{612}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 \times \\ &\times |x_1 - x_2| \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Таким образом, из (7.52), (7.53), (7.55) и (7.57) приходим к оценке

$$|I_{61}| \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2| \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_1 \in [0, 1]; \\ 1 + |\ln |x_1 - x_2||, & \text{если } \beta_1 > 1. \end{cases} \quad (7.58)$$

Для того чтобы оценить интегралы I_{62} и I_{63} , определённые равенствами (7.48) и (7.49), нам нужно сделать предварительные оценки. Верно равенство

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} = \int_0^1 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial x_{sk} \partial y_i \partial y_j} [x_{2k} - x_{1k}] ds,$$

из которого при $2R_0 \geq |y - x_0| \geq \rho$ следует оценка

$$\left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right| \leq C(T, R_0, \varepsilon) \frac{1}{|y - x_0|^4} |x_1 - x_2|. \quad (7.59)$$

Из (7.48) с учётом (7.59) верна следующая оценка:

$$\begin{aligned} |I_{62}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left[\frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right]_\alpha \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{|y - x_1|^\alpha}{|y - x_0|^4} dy \leq C(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| |\mu|_\alpha \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^{4-\alpha}} dy \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha, \end{aligned} \quad (7.60)$$

где использовалось неравенство

$$|y - x_1| \leq \frac{3}{2}|y - x_0|.$$

Для того чтобы оценить интеграл I_{63} , нужно опять рассмотреть два случая: $\beta_1 \in [0, 1]$ и $\beta_1 > 1$. В случае $\beta_1 \in [0, 1]$ из (7.49) и (7.60) вытекает оценка

$$\begin{aligned} |I_{63}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 |x_1 - x_2| \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{|y - x_1|}{|y - x_0|^4} dy \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 |x_1 - x_2| \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Пусть $\beta_1 > 1$. Поскольку

$$|x_1 - y| \leq |x_1 - x_0| + |y - x_0| \leq \frac{1}{2} + 2R_0,$$

то справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\left| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq \\ &\leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/1} (1 + (1/2 + 2R_0)^2)^{(\beta_1-1)/2} \times \\ &\times (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - y|. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Из (7.49) с учётом (7.59) и (7.62) получим оценку

$$\begin{aligned} |I_{63}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| \times \\ &\times [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Таким образом, из (7.47), (7.58), (7.60), (7.61) и (7.63) получаем оценку

$$|I_6| \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha (|x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||] + |x_1 - x_2|^\alpha). \quad (7.64)$$

Итак, из (7.10) с учётом (7.23), (7.25), (7.26), (7.33), (7.34), (7.46) и (7.64) получаем оценку

$$|u_4(x_1, t) - u_4(x_2, t)| \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1) \quad (7.65)$$

при $|x_1 - x_2| < 1$.

Шаг 8. $|u_4|_0$. Теперь наша задача — оценить $|u_4|_0$. В силу равенства (8.8) раздела 8 справедливо следующее выражение для произвольного $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} u_4(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) f(y) dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, \delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \\ &+ \int_{O(x, \delta)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \mathcal{E}(x - y, t) \left[(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right] dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(x, \delta)} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_i) dS_y = \\ &= J_2 + J_{11} + J_{12} + J_{13}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Оценим интеграл J_2 . Пусть $\beta_1 \in [0, 1]$. Тогда выполнено неравенство

$$\left| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 |x - y|. \quad (7.67)$$

Если же $\beta_1 > 1$, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} \right| &\leq \\ &\leq 3\beta_1 |x - y| 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

С учётом оценок (7.67) и (7.68) мы приходим к следующей цепочке соотно-

шений:

$$\begin{aligned}
|J_2| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j \partial y_i} [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy \right| \leq \\
&\leq \int_{O(x, R_0)} \frac{C(T, R_0, \varepsilon)}{|x-y|^2} |f(y)| dy + \\
&+ C(T, R_0, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \exp(-(1-\varepsilon)|x-y|) |f(y)| dy \leq \\
&\leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \quad \beta_1 \in [0, 1],
\end{aligned} \tag{7.69}$$

$$\begin{aligned}
|J_2| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j \partial y_i} [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy \right| \leq \\
&\leq C(T, R_0, \varepsilon) \int_{O(x, R_0)} \frac{(1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2}}{|x-y|^2} (1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |f(y)| dy + \\
&+ C(T, R_0, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \exp(-(1-\varepsilon)|x-y|) (1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2} \times \\
&\times (1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |f(y)| dy \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \quad \beta_1 > 1,
\end{aligned} \tag{7.70}$$

поскольку по условию $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$.

Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}
|J_{11}| &\leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 \times \\
&\times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \frac{1}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1+1)/2}} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)}{|x-y|} dy \leq \\
&\leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0,
\end{aligned} \tag{7.71}$$

$$|J_{12}| \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha \int_{O(x, R_0)} \frac{1}{|x-y|^{3-\alpha}} dy \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \tag{7.72}$$

$$|J_{13}| \leq C(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0. \tag{7.73}$$

Из (7.66) с учётом оценок (7.71)–(7.73) приходим к оценке

$$|J_1| \leq C(T, R_0, \varepsilon)|\mu|_\alpha. \quad (7.74)$$

Таким образом, из (7.69), (7.70) и (7.74) вытекает следующая оценка:

$$|u_4|_0 \leq C(T, R_0, \varepsilon)|\mu|_\alpha, \quad t \in [0, T]. \quad (7.75)$$

Шаг 9. Заметим, что если $|x_1 - x_2| \geq 1$, то в силу (7.75) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |u_4(x_1, t) - u_4(x_2, t)|_0 &\leq 2|u_4|_0(t) \leq 2|u_4|_0(t)|x_1 - x_2|^\alpha \leq \\ &\leq C(T, R_0, \varepsilon)|\mu|_\alpha|x_1 - x_2|^\alpha \quad \text{при} \quad |x_1 - x_2| \geq 1. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Таким образом, из (7.65), (7.76) мы получаем искомую оценку:

$$|u_4(x, t)|_\alpha \leq C(T, R_0, \varepsilon)|\mu|_\alpha, \quad \mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad t \in [0, T], \quad \alpha \in (0, 1).$$

Справедлива следующая

Лемма 7.1. *Если $\mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, то справедливы следующие оценки:*

$$|u_1|_\alpha(t) \leq C(T)|\mu|_0 \quad \text{для каждого} \quad t \in [0, T],$$

$$|u_2|_\alpha(t) \leq C(T)|\mu|_\alpha \quad \text{для каждого} \quad t \in [0, T],$$

$$|u_3|_\alpha(t) \leq C(T)|\mu|_\alpha \quad \text{для каждого} \quad t \in [0, T].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогичное утверждение доказано в [47].

Несложно доказывается

Лемма 7.2. *Если $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$, $\mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$, $\alpha \in (0, 1)$, то*

$$|u|_0(t) \leq C(T)|\mu|_0, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|_0(t) \leq C(T)|\mu|_0, \quad j = 1, 2, 3,$$

для всех $t \in [0, T]$, где

$$u(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy.$$

Из результатов теоремы 7.1 и лемм 7.1, 7.2 справедлива

Теорема 7.2. Для всякой функции $\mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ в случае $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ верна оценка типа Шаудера

$$\sup_{t \in [0, T]} |u|_{2+\alpha}(t) \leq C(T) |\mu|_\alpha, \quad t \in [0, T],$$

$$u(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy,$$

а функция $C = C(T) > 0$ монотонно не убывает и ограничена на компактах.

Отметим, что в силу свойств гладкости фундаментального решения $\mathcal{E}$, определённого равенством (3.6), справедлива

Теорема 7.3. Для всякой функции $\mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ в случае $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ верна оценка типа Шаудера

$$\sup_{t \in [0, T]} |u_k|_{2+\alpha}(t) \leq C(T) |\mu|_\alpha, \quad t \in [0, T], \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (7.77)$$

$$u_k(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^k \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t^k} \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy,$$

а функция $C = C(T) > 0$ монотонно не убывает и ограничена на компактах.

Рассмотрим потенциал с весом:

$$h(x) := - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \mu(y) dy.$$

Для него верна

Теорема 7.4. *Для любой функции $\mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ справедлива оценка типа Шаудера*

$$|h|_{2+\alpha} \leq C|\mu|_\alpha, \quad C > 0. \quad (7.78)$$

В заключении главы стоит отметить, что построенная теория потенциала и полученные оценки типа Шаудера позволяют строго обосновать методику обращения оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$. На этом основании рассматриваемые далее в диссертации задачи Коши будут сведены к эквивалентным интегральным уравнениям.

Глава 8

Гладкость весового потенциала

В этом разделе мы воспользуемся методами исследований из работы [44]. Пусть $\eta \in C_b^{(1)}[0, +\infty)$ — функция следующего вида:

$$0 \leq \eta(s) \leq 1, \quad 0 \leq \eta'(s) \leq 2,$$

причём

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq s \leq 1; \\ 1, & \text{если } s \geq 2, \end{cases} \quad \eta_\varepsilon := \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right).$$

Отметим, что на отрезке $s \in [1, 2]$ функция η осуществляет плавный переход от 0 до 1 (эту функцию можно подобрать с помощью интерполяционных многочленов или выразить через экспоненты или гиперболические функции, здесь нам конкретный вид не будет важен). Введём функции

$$\begin{aligned} u(x, t) := & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) f(y) dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \\ & + \int_{O(z, R)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \mathcal{E}(x-y, t) \left[(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right] dy + \\ & + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_i) dS_y, \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$O(x, 2\varepsilon) \subset O(z, R),$$

$$w(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t) f(y) dy, \quad (8.2)$$

$$v(x, t) := \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_j} = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} f(y) dy,$$

$$v_\varepsilon(x, t) := - \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} f(y) dy, \quad (8.3)$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1].$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial v_\varepsilon(x, t)}{\partial x_i} &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial x_j} \right) f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \right) [(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \right) (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \right) [(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \right) (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \\ &+ \int_{O(z, R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \right) \times \\ &\times \left[(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right] dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \eta_\varepsilon \cos(n_y, e_i) dy. \end{aligned}$$

Пусть $0 < 2\varepsilon < R$. Верно нижеприведённое равенство:

$$u(x, t) - (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial v_\varepsilon(x, t)}{\partial x_i} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4, \quad (8.4)$$

$$K_1 := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left([1 - \eta_\varepsilon] \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \right) [(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy,$$

$$\begin{aligned}
K_2 &:= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left([1 - \eta_\varepsilon] \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \right) (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy, \\
K_3 &:= \int_{O(z, R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left([1 - \eta_\varepsilon] \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \right) [(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - \\
&\quad - (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x)] dy, \\
K_4 &:= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} [1 - \eta_\varepsilon] \cos(n_y, e_i) dy.
\end{aligned}$$

Поскольку $2\varepsilon < R$, то сразу же имеем

$$K_2 = K_4 = 0. \quad (8.5)$$

Теперь нужно рассмотреть интегралы K_1 и K_3 отдельно при $\beta_1 \in [0, 1]$ и $\beta_1 > 1$. Несложно доказать (см., например, [44] и [47]), что оба интеграла стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Итак, из (8.4), (8.5) следует, что

$$\sup_{x \in \overline{O(0, R)}} \left| u(x, t) - (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial v_\varepsilon(x, t)}{\partial x_i} \right| \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (8.6)$$

для любого $R > 0$. При этом из (8.2) и (8.3) получаем, что

$$\sup_{x \in \overline{O(0, R)}} \left| v_\varepsilon(x, t) - \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_j} \right| \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (8.7)$$

для любого $R > 0$. Из (8.6) и (8.7) следует, что

$$(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} = u(x, t) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, T], \quad (8.8)$$

где w определена равенством (8.2), а u — равенством (8.1). Заметим, что в силу оценок (3.14)–(3.19) и свойств гладкости (3.13) фундаментального решения $\mathcal{E}$ справедливо следующее равенство:

$$(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 w_k(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} = u_k(x, t) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, T], \quad (8.9)$$

где

$$\begin{aligned}
w_k(x, t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^k \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t^k} f(y) dy, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\
u_k(x, t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) f(y) dy + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \\
&+ \int_{O(z, R)} \frac{\partial^{2+k}}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} \mathcal{E}(x - y, t) \times \\
&\times \left[(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right] dy + \\
&+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial^{1+k} \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j \partial t^k} \cos(n_y, e_i) dS_y,
\end{aligned} \tag{8.10}$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \mu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1).$$

Заметим, что представление (8.1) удобно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} f(y) dy + \\
&+ \int_{O(z, R)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [f(y) - f(x)] dy + \\
&+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_i) dS_y, \quad x \in O(z, R),
\end{aligned} \tag{8.11}$$

а представление (8.10) перепишем следующим образом:

$$u_k(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} f(y) dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{O(z,R)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} [f(y) - f(x)] dy + \\
& + (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z,R)} \frac{\partial^{1+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j \partial t^k} \cos(n_y, e_i) dS_y,
\end{aligned} \tag{8.12}$$

где $x \in O(z, R)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Глава 9

Задачи Коши

9.1. Задача Коши 1

Этот раздел посвящён исследованию задачи Коши 1:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (9.1)$$

для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (9.2)$$

Сформулируем определение классического решения этой задачи.

Определение 9.1. Функция $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3))$ при $\beta_1 \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$, которая удовлетворяет задаче (9.1), (9.2) поточечно, называется классическим решением задачи Коши 1.

Введём в рассмотрение нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} u(x, t) = & - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\partial u^2(y, \tau)}{\partial \tau} dy d\tau + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} [\Delta_y u_0(y) - u_0(y)] dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) [\Delta_y u_1(y) - u_1(y)] dy. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Сделаем в этом интегральном уравнении замену:

$$v(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(x, t), \quad \beta_1 \geq 0. \quad (9.4)$$

Тогда интегральное уравнение (9.3) примет следующий вид:

$$v(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) \nu(y) dy, \quad (9.5)$$

$$G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{2\beta_1/2}} \mathcal{E}(x - y, t - \tau), \quad \beta_1 \geq 0, \\ G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(x - y, t), \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \\ G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_3/2}} \mathcal{E}(x - y, t), \quad \beta_3 \geq \beta_1 \geq 0, \\ \rho(x, t) = \frac{\partial v^2(x, t)}{\partial t}, \quad \mu(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} [\Delta_x u_0(x) - u_0(x)], \\ \nu(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_3/2} [\Delta_x u_1(x) - u_1(x)].$$

Справедлива следующая

Лемма 9.1. Если $v \in C^{(1)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$, то $\rho \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ и верна оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho_2 - \rho_1|_\alpha(t) \leq C(R) \|v_2 - v_1\|_{1, \alpha, T}, \quad (9.6)$$

$$\|w\|_{1, \alpha, T} := \sup_{t \in [0, T]} |w|_\alpha(t) + \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right|_\alpha(t), \quad (9.7)$$

$$C(R) = 4R, \quad R = \max \{ \|v_1\|_{1, \alpha, T}, \|v_2\|_{1, \alpha, T} \}, \quad (9.8)$$

$$\rho_j(x, t) = \frac{\partial v_j^2(x, t)}{\partial t}, \quad j = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Сначала докажем, что при условиях леммы $\rho \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$. Действительно, для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\rho(x, t) = 2v(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t},$$

$$|\rho|_\alpha(t) \leq 2 \sup_{t \in [0, T]} |v|_\alpha(t) \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|_\alpha(t) < +\infty. \quad (9.9)$$

Справедлива следующая цепочка неравенств для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$:

$$\begin{aligned} \rho(x, t_2) - \rho(x, t_1) &= 2v(x, t_2) \left(\frac{\partial v(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial v(x, t_1)}{\partial t} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial v(x, t_1)}{\partial t} [v(x, t_2) - v(x, t_1)], \end{aligned}$$

из которой следует неравенство

$$\begin{aligned} |\rho(t_2) - \rho(t_1)|_\alpha &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} |v|_\alpha(t) \left| \frac{\partial v(t_2)}{\partial t} - \frac{\partial v(t_1)}{\partial t} \right|_\alpha + \\ &+ 2 \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|_\alpha(t) |v(t_2) - v(t_1)|_\alpha \rightarrow +0 \end{aligned} \quad (9.10)$$

при $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$. Из (9.9) и (9.10) получаем, что $\rho \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$.

Шаг 2. Докажем неравенство (9.6). Для этого воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} \rho_2(x, t) - \rho_1(x, t) &= 2v_2(x, t) \left(\frac{\partial v_2(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} [v_2(x, t) - v_1(x, t)], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |\rho_2 - \rho_1|_\alpha(t) &\leq \\ &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} |v_2|_\alpha(t) \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t} \right|_\alpha(t) + \\ &+ 2 \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial v_1}{\partial t} \right|_\alpha(t) \sup_{t \in [0, T]} |v_2 - v_1|_\alpha(t). \end{aligned} \quad (9.11)$$

С учётом определения нормы (9.7) из (9.11) получаем оценку (9.6).

Справедлива следующая

Лемма 9.2. В классе функций $v \in C^{(1)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$ при условии, что $\mu, \nu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$, правая часть интегрального уравнения (9.5) принадлежит классу $C^{(1)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$.

Кроме того, справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H[v](x, t)}{\partial t} &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t^2} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t)}{\partial t} \nu(y) dy, \\
H[v](x, t) &:= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) \nu(y) dy.
\end{aligned} \tag{9.12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на теоремах 6.1 и 6.2, а также на лемме 9.1.

Наконец, справедлива

Теорема 9.1. При $\alpha \in (0, 1)$, $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$ для всяких функций $\mu, \nu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ существует такое максимальное $T_0 = T_0(\mu, \nu) > 0$, что для всякого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (9.5) в классе $v \in C^{(1)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$, причём либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае верно свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|v\|_{1, \alpha, T} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Прежде всего заметим, что интегральное уравнение (9.5) можно переписать в виде

$$v(x, t) = H[v](x, t),$$

где оператор H определён равенством (9.12) и с учётом результата леммы 9.2

$$H : C^{(1)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3)) \rightarrow C^{(1)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3)). \tag{9.13}$$

Шаг 2. Заметим, что в силу оценки (6.4) теоремы 6.1 и оценки (9.6) лем-

мы 9.1 справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|H[v_1] - H[v_2]\|_{1,\alpha,T} &\leq Td_0(T) \sup_{t \in [0,T]} |\rho_1(t) - \rho_2(t)|_\alpha \leq \\ &\leq TC(T)R\|v_1 - v_2\|_{1,\alpha,T}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$R = \max\{\|v_1\|_{1,\alpha,T}, \|v_2\|_{1,\alpha,T}\}.$$

Шаг 3. Рассмотрим следующий шар:

$$B_R := \left\{ w \in C^{(1)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3)) : \|w\|_{1,\alpha,T} \leq R \right\}.$$

Зафиксируем функции $\mu, \nu \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$. Тогда найдётся настолько большое $R > 0$, что справедливо неравенство

$$\|f_0\|_{1,\alpha,T} \leq \frac{R}{2}, \quad (9.15)$$

$$f_0(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_3}(x, y, t) \nu(y) dy.$$

Положим в оценке (9.14) $v_1 = v \in B_R$ и $v_2 = 0$. Таким образом, верны неравенства

$$\|H_1[v]\|_{1,\alpha,T} \leq TC(T)\|v\|_{1,\alpha,T}^2 \leq TC(T)R^2 \leq \frac{R}{2}, \quad (9.16)$$

$$H_1[v](x, t) := - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, 2\beta_1}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau$$

при достаточно малом $T > 0$ таком, что выполнено неравенство

$$TC(T)R \leq \frac{1}{2}. \quad (9.17)$$

Из (9.15) и (9.16) при выполнении условия (9.17) с учётом (9.13) получаем, что

$$H : B_R \rightarrow B_R.$$

Наконец, из оценки (9.14) при выполнении условия (9.17) получаем неравенство

$$\|H[v_1] - H[v_2]\|_{1,\alpha,T} \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{1,\alpha,T}$$

для любых $v_1, v_2 \in B_R$, т.е. оператор H является сжимающим на шаре B_R . Отсюда следует существование единственного решения $v(x, t)$ интегрального уравнения (9.5) в шаре $B_R \subset C^{(1)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ при достаточно большом $R > 0$ и для достаточно малого $T > 0$.

Шаг 4. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (9.5) в классе $C^{(1)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ (см., например, [48]), приходим к утверждению теоремы.

Из теоремы 9.1 выводится

Теорема 9.2. *При $\alpha \in (0, 1)$, $\min\{\beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$ для всяких $u_0 \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3)$ и $u_1 \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3)$ существует такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для всякого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (9.3) в классе*

$$u \in C^{(1)}([0, T]; C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)),$$

причём либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае верно свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u\|_{1,\alpha,T} = +\infty.$$

Согласуем веса для классического решения задачи Коши 1: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \geq 0$. В итоге справедлива следующая

Теорема 9.3. *При $\alpha \in (0, 1)$, $\beta_1 \geq 0$ для всяких $u_0 \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)$ и $u_1 \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)$ существует такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для всякого $T \in (0, T_0)$ существует единственное классическое решение задачи Коши (9.1), (9.2) в смысле определения 9.1 в классе $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3))$, причём либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае верно свойство*

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u\|_{1,\alpha,T} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что, с одной стороны, всякое классическое решение задачи Коши (9.1), (9.2) в силу третьей формулы Грина (4.23) удовлетворяет интегральному уравнению (9.3). С другой стороны, решение интегрального уравнения единственно при указанных условиях на начальные функции в классе, сформулированном в условиях теоремы 9.2. Введём в рассмотрение функцию

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t},$$

где $u(x, t)$ является решением интегрального уравнения (9.3). Поэтому в силу (9.4) справедливо следующее равенство:

$$\rho_0(x, t) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\beta_1}} \frac{\partial v^2(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\beta_1}} \rho(x, t),$$

причем для функции $\rho(x, t)$ справедливо утверждение леммы 9.1. Очевидно, что справедливо неравенство

$$2\beta_1 \geq \beta_1 \geq 0.$$

С учётом обозначений (6.91) и (6.93) интегральное уравнение (9.3) можно представить, как

$$u(x, t) = L(x, t),$$

где функция L определена равенством (6.109). Но тогда в силу теоремы 6.5 приходим к выводу о том, что u является классическим решением задачи Коши (9.1), (9.2) в смысле определения 9.1. Из той же теоремы 6.5 найденное единственное классическое решение задачи Коши принадлежит к указанному в формулировке теоремы классу гладкости.

Теперь изучим вопрос о достаточных условиях, при которых в теореме 9.3 $T_0 < +\infty$, т.е. классическое решение рассматриваемой задачи Коши разрушается за конечное время. Верна вспомогательная

Лемма 9.3. *Если $\alpha \in (0, 1)$ и*

$$f \in C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_4/2}; \mathbb{R}^3), \quad u_0 \in C^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3),$$

то при условиях

$$2\beta_2 \geq \beta_4 \geq \beta_3 \geq 0 \quad (9.18)$$

существует единственное решение линейного уравнения

$$\Delta u_1(x) - u_1(x) = -u_0^2(x) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (9.19)$$

в классе $u_1 \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Верно неравенство

$$|u_0^2(x_1) - u_0^2(x_2)| \leq 2 \max \{|u_0(x_1)|, |u_0(x_2)|\} |u_0(x_1) - u_0(x_2)|, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3.$$

Из этого неравенства и условия $u_0 \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ имеем

$$u_0^2, f \in C^\alpha(\mathbb{R}^3).$$

Поэтому в рассматриваемом классе дифференциальное уравнение (9.19) эквивалентно интегральному уравнению

$$u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} [u_0^2(y) - f(y)] dy. \quad (9.20)$$

Интегральное уравнение (9.20) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$(1 + |x|^2)^{\beta_3/2} u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_3/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_4/2}} \times \\ \times \left[(1 + |y|^2)^{\beta_4/2} u_0^2(y) - (1 + |y|^2)^{\beta_4/2} f(y) \right] dy = \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_3/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_4/2}} \left[v_0^2(y) - (1 + |y|^2)^{\beta_4/2} f(y) \right] dy, \quad (9.21)$$

$$v_0 = (1 + |x|^2)^{\beta_4/4} u_0 \in C^\alpha(\mathbb{R}^3),$$

поскольку

$$\beta_2 \geq \frac{\beta_4}{2}.$$

Поэтому

$$v_0^2 \in C^\alpha(\mathbb{R}^3).$$

Также

$$(1 + |x|^2)^{\beta_4/2} f \in C^\alpha(\mathbb{R}^3).$$

В силу результата теоремы 7.4 из равенства (9.21) приходим к выводу о том, что при условиях (9.18) выполнено соотношение

$$(1 + |x|^2)^{\beta_3/2} u_1 \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1),$$

то есть справедливо утверждение леммы.

Теперь сделаем важное предположение для дальнейших рассуждений. Пусть выполнены неравенства

$$\beta_2 \geq \beta_1 > \frac{3}{2}, \quad 2\beta_2 \geq \beta_4 \geq \beta_3 \geq \beta_1 > \frac{3}{2}. \quad (9.22)$$

Нетрудно показать существование таких $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. Действительно, можно взять, например, следующий набор этих чисел:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 > \frac{3}{2} \Rightarrow 2\beta_2 > \beta_4 = \beta_3 = \beta_1.$$

Пусть выполнены все условия теоремы 9.3 при условиях (9.22). Тогда, в частности, существует классическое решение задачи Коши (9.1), (9.2) в смысле определения 9.1 в классе

$$u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)) \subset C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3)) \quad (9.23)$$

для любого $T \in (0, T_0)$ при $\beta_1 > 3/2$. Отметим, что предположение (9.22) необходимо именно для того, чтобы было справедливо вложение (9.23).

Рассмотрим теперь вопрос о разрушении сильного решения рассматриваемой задачи Коши. Дадим следующее определение:

Определение 9.2. Функция $u \in C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ называется локальным во времени сильным решением задачи Коши 1 для некоторого $T > 0$, если для любой функции $\psi \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(D_x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, D_x \psi(x, t) \right) + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \psi(x, t) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x_j} - \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t} \psi(x, t) \right] dx dt = 0, \end{aligned} \quad (9.24)$$

причём $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$, где $u_0, u_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Пусть $\phi \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$. Тогда для $t \in [0, T]$ введём

$$\psi(x, t) := \int_t^T \phi(x, \tau) d\tau, \quad \psi \in C^{(1)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3)). \quad (9.25)$$

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x_j} dt = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x_j} \int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_j} d\tau \Big|_{t=0}^{t=T} + \\ & + \int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_j} d\tau \right) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x_j} dt = \int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_j} d\tau \right) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x_j} dt, \end{aligned} \quad (9.26)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(D_x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, D_x \psi(x, t) \right) dx dt = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (D_x u_1(x), D_x \phi(x, t)) dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(D_x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, D_x \phi(x, t) \right) dx dt, \end{aligned} \quad (9.27)$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \psi(x, t) dx dt = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \phi(x, t) dx dt +$$

$$+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \phi(x, t) dx dt, \quad (9.28)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t} \psi(x, t) dx dt &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u_0^2(x) \phi(x, t) dx dt + \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(x, t) \phi(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (9.29)$$

В результате из (9.24) с учётом (9.26)–(9.29) для любой функции $\phi \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ получим равенство

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(D_x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, D_x \phi(x, t) \right) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \phi(x, t) + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \left(\int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_j} d\tau \right) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x_j} - u^2(x, t) \phi(x, t) \Big] dx dt - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[(D_x u_1(x), D_x \phi(x, t)) + (u_1(x) - u_0^2(x)) \phi(x, t) \right] dx dt = 0. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Если дополнительно предположить, что $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$, $u_0^2 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, то получим равенство

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(D_x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, D_x \phi(x, t) \right) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \phi(x, t) + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \left(\int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_j} d\tau \right) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x_j} - u^2(x, t) \phi(x, t) \Big] dx dt + \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \phi(x, t) dx dt = 0, \quad f(x) := \Delta u_1(x) - u_1(x) + u_0^2(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Пусть теперь

$$\psi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t), \quad \phi_1 \in H^1(\mathbb{R}^3), \quad \phi_2 \in C_0^\infty(0, T). \quad (9.32)$$

Тогда в рассматриваемом классе $u \in C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ в силу основной леммы вариационного исчисления из (9.31) получим, что для каждого $t \in [0, T]$ верно равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(D_x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, D_x \phi_1(x) \right) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \phi_1(x) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \left(\int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_j} d\tau \right) \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_j} - u^2(x, t) \phi_1(x) + f(x) \phi_1(x) \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (9.33)$$

для любой функции $\phi_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, где $f(x) := \Delta u_1(x) - u_1(x) + u_0^2(x)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Введём функционалы, которые определены при $t \in [0, T]$ в классе сильных решений $u \in C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$:

$$\Phi(t) := \frac{1}{2} \|D_x u\|_2^2(t) + \frac{1}{2} \|u\|_2^2(t), \quad J(t) := \|D_x u'\|_2^2(t) + \|u'\|_2^2(t), \quad (9.34)$$

где

$$\|w\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |w(x, t)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Справедлива следующая (см., например, [34])

Лемма 9.4. *Если функция $u \in C^{(1)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$, то для функционалов (9.34) справедливо обыкновенное дифференциальное неравенство*

$$(\Phi'(t))^2 \leq 2\Phi(t)J(t) \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (9.35)$$

Пусть $u \in C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ — сильное решение задачи Коши 1 в смысле определения 9.2. Положим в равенстве (9.33) функцию $\phi_1(x) = u(x, t)$ для каждого $t \in [0, T]$. Тогда получим после элементарных преобразований

равенство:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_j}(x, t) u_{x_j}(x, \tau) dx d\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^3(x, t) dx. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Теперь положим в равенстве (9.33) функцию $\phi_1(x) = u'(x, t)$ для каждого $t \in [0, T]$. Тогда получим после элементарных преобразований равенство:

$$\begin{aligned} J(t) + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u(x, t) dx + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_j}(x, \tau) u'_{x_j}(x, t) dx d\tau = \\ = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} u^3(x, t) dx. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Подставим выражение для

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^3(x, t) dx$$

из (9.36) в равенство (9.37) и в результате получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} J(t) = \frac{1}{3} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \|D_{x_j} u\|_2^2 - \\ - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u'_{x_j}(x, t) u_{x_j}(x, \tau) dx d\tau - \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u'(x, t) dx. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \|D_{x_j} u\|_2^2 \leq \omega_0^2 \frac{2}{3} \Phi(t), \quad \omega_0^2 = \sum_{j=1}^3 \omega_j^2, \quad (9.39)$$

$$-\frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u'_{x_j}(x, t) u_{x_j}(x, \tau) dx d\tau \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \omega_0^2 \frac{2}{3} \int_0^t \|D_x u\|_2(\tau) \|D_x u'\|_2(t) d\tau \leq \\
&\leq \omega_0^2 \frac{2}{3} \left(\int_0^t \|D_x u\|_2^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|D_x u'\|_2^2(t) d\tau \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \omega_0^2 \frac{2}{3} t^{1/2} J^{1/2}(t) \left(2 \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \delta J(t) + \frac{1}{4\delta} \omega_0^4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 2T \int_0^t \Phi(\tau) d\tau = \\
&= \delta J(t) + T \frac{1}{2\delta} \omega_0^4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \int_0^t \Phi(\tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{9.40}$$

$$-\frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u'(x, t) dx \leq \frac{2}{3} \|u'\|_2 \|f\|_2 \leq \delta J(t) + \frac{1}{4\delta} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \|f\|_2^2, \tag{9.41}$$

где мы воспользовались трёхпараметрическим неравенством Юнга с параметром $\delta > 0$. Из равенства (9.38), учитывая оценки (9.39)–(9.41), имеем неравенство

$$\begin{aligned}
(1 - 2\delta)J(t) &\leq \frac{1}{3}\Phi''(t) + \omega_0^2 \frac{2}{3}\Phi(t) + \\
&+ T \frac{1}{2\delta} \omega_0^4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \int_0^t \Phi(\tau) d\tau + \frac{1}{4\delta} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \|f\|_2^2 \quad \text{при } \delta \in (0, 1/2).
\end{aligned} \tag{9.42}$$

Из неравенств (9.35) и (9.42) при $\delta \in (0, 1/2)$ получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}(1 - 2\delta)(\Phi'(t))^2 &\leq \Phi(t)\Phi''(t) + 2\omega_0^2\Phi^2(t) + \\
&+ T \frac{1}{\delta} \omega_0^4 \frac{2}{3}\Phi(t) \int_0^t \Phi(\tau) d\tau + \frac{1}{\delta} \frac{1}{3} \|f\|_2^2 \Phi(t).
\end{aligned} \tag{9.43}$$

Перепишем интегро-дифференциальное неравенство (9.43) в следующем об-

щем виде:

$$\begin{aligned} & \Phi(t)\Phi''(t) - \lambda(\Phi'(t))^2 + \beta\Phi^2(t) + \\ & + \gamma_1\Phi(t) + \gamma_2 T\Phi(t) \int_0^t \Phi(s) ds \geq 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (9.44)$$

где

$$\lambda = \frac{3}{2}(1 - 2\delta), \quad \beta = 2\omega_0^2, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\delta} \frac{1}{3} \|f\|_2^2, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\delta} \omega_0^4 \frac{2}{3}. \quad (9.45)$$

Пусть выполняется неравенство

$$\lambda > 1 \Rightarrow \delta \in \left(0, \frac{1}{6}\right). \quad (9.46)$$

В коэффициенты интегро-дифференциального неравенства (9.44) входит параметр δ , который необходимо выбрать оптимальным. Выберем его таким образом, чтобы коэффициент

$$\frac{2\gamma_1}{2\lambda - 1}$$

принял минимальное значение. Справедливо следующее равенство:

$$\frac{2\gamma_1}{2\lambda - 1} = \frac{2}{9} \|f\|_2^2 \frac{1}{\delta(1 - 2\delta)}$$

Отметим, что у функции

$$g(x) = \frac{1}{x(1 - 2x)}$$

$x = 1/4$ является точкой минимума. Итак, выберем $\delta > 0$ следующим образом:

$$\delta = \frac{1}{6} - \delta_1, \quad (9.47)$$

где $\delta_1 \in (0, 1/6)$ — сколь угодно мало. Дадим

Определение 9.3. Будем говорить, что функционал $\Phi \in C^{(2)}[0, T]$ удовлетворяет условиям (*Blowup*), если

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi'(0) > 0 \quad (9.48)$$

и существуют такие константы $\lambda > 1$, $\beta \geq 0$, $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, что

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma_1\Phi(0)}{2\lambda-1} + \frac{\beta(\Phi(0))^2}{\lambda-1} - (\Phi'(0))^2 &< 0, \\ \left(\frac{2\gamma_1\Phi(0)}{2\lambda-1} + \frac{\beta(\Phi(0))^2}{\lambda-1} - (\Phi'(0))^2 \right)^2 - \frac{4\gamma_2(\Phi(0))^4}{(\lambda-1)^3} &\geq 0. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Несложно показать, что справедлива следующая

Лемма 9.5. *При условиях (Blowup) существует T_1 — наименьший положительный корень уравнения*

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\lambda-1)^2}(\Phi(0))^2 + \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\lambda-1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\lambda-1}\Phi(0). \quad (9.50)$$

Справедлива следующая

Теорема 9.4. *Если функционал $\Phi \in C^{(2)}[0, T]$ удовлетворяет неравенству (9.44), а также для Φ выполнены условия (Blowup) и T_1 — наименьший положительный корень уравнения (9.50), то для $\Phi(t)$ справедлива оценка снизу:*

$$\Phi(t) \geq \Phi(0) \left(\frac{T_1}{T_1 - t} \right)^{1/(\lambda-1)} \quad \text{для } t \in [0, T]. \quad (9.51)$$

В частности, имеет место оценка сверху $T < T_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Phi'(0) > 0$, то найдётся такое $t_1 \in (0, T]$, что

$$\Phi'(t) \geq 0 \quad \text{для всех } t \in [0, t_1], \quad (9.52)$$

при этом справедлива цепочка выражений:

$$\int_0^t \Phi(s) ds = s\Phi(s) \Big|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t s\Phi'(s) ds \leq T\Phi(t) \quad \text{для всех } t \in [0, t_1]. \quad (9.53)$$

Таким образом, с учётом неравенства (9.53) из интегро-дифференциального неравенства (9.44) мы приходим к следующему дифференциальному нера-

венству:

$$\Phi(t)\Phi''(t) - \lambda(\Phi'(t))^2 + [\beta + \gamma_2 T^2]\Phi^2(t) + \gamma_1\Phi(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (9.54)$$

Разделим обе части дифференциального неравенства (9.54) на $\Phi^{1+\lambda}(t)$ и получим следующее неравенство:

$$\frac{\Phi''(t)}{\Phi^\lambda(t)} - \lambda \frac{(\Phi'(t))^2}{\Phi^{1+\lambda}(t)} + [\beta + \gamma_2 T^2]\Phi^{1-\lambda}(t) + \gamma_1\Phi^{-\lambda}(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (9.55)$$

Введём новую функцию

$$Z(t) := \Phi^{1-\lambda}(t), \quad \lambda > 1. \quad (9.56)$$

Тогда из (9.55) получим следующее неравенство:

$$Z''(t) \leq (\lambda - 1) (\beta + \gamma_2 T^2) Z(t) + (\lambda - 1)\gamma_1 Z^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(t), \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (9.57)$$

Заметим, что

$$Z'(t) = (1 - \lambda)\Phi^{-\lambda}(t)\Phi'(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (9.58)$$

Умножим обе части неравенства (9.57) на $Z'(t)$ и получим следующее неравенство:

$$Z'(t)Z''(t) \geq (\lambda - 1) (\beta + \gamma_2 T^2) Z(t)Z'(t) + (\lambda - 1)\gamma_1 Z^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(t)Z'(t) \quad (9.59)$$

для всех $t \in [0, t_1]$, которое можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Z')^2 \geq \frac{(\lambda - 1) (\beta + \gamma_2 T^2)}{2} \frac{d}{dt} Z^2(t) + \frac{(\lambda - 1)^2 \gamma_1}{2\lambda - 1} \frac{d}{dt} Z^{\frac{2\lambda-1}{\lambda-1}}(t) \quad (9.60)$$

для всех $t \in [0, t_1]$. Это неравенство можно проинтегрировать по времени и получить следующее неравенство:

$$(Z'(t))^2 \geq A + (\lambda - 1) (\beta + \gamma_2 T^2) Z^2(t) + \frac{2(\lambda - 1)^2 \gamma_1}{2\lambda - 1} Z^{\frac{2\lambda-1}{\lambda-1}}(t), \quad (9.61)$$

$$A := (Z'(0))^2 - (\lambda - 1) (\beta + \gamma_2 T^2) Z^2(0) - \frac{2(\lambda - 1)^2 \gamma_1}{2\lambda - 1} Z^{\frac{2\lambda-1}{\lambda-1}}(0). \quad (9.62)$$

Далее нам необходимо потребовать, чтобы было выполнено неравенство

$$A > 0, \quad (9.63)$$

которое с учётом (9.56), (9.58) и (9.62) эквивалентно следующему неравенству:

$$(\Phi'(0))^2 > \frac{\beta + \gamma_2 T^2}{\lambda - 1} \Phi^2(0) + \frac{2\gamma_1}{2\lambda - 1} \Phi(0). \quad (9.64)$$

Предположим, что неравенство (9.64) выполнено, а значит, $A > 0$. Из неравенства (9.61) вытекает следующее неравенство:

$$(Z'(t))^2 > A > 0 \quad \text{для всех } t \in [0, t_1]. \quad (9.65)$$

Из этого неравенства и из (9.58) вытекает цепочка неравенств при $t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} |Z'(t)| \geq A^{1/2} &\implies Z'(t) \leq -A^{1/2} < 0 \implies \\ &\implies (1 - \lambda) \Phi^{-\lambda}(t) \Phi'(t) \leq -A^{1/2} < 0 \implies \Phi'(t) \geq \frac{A^{1/2}}{\lambda - 1} \Phi^\lambda(t). \end{aligned} \quad (9.66)$$

Заметим, что по условию теоремы

$$\Phi(0) > 0. \quad (9.67)$$

Поскольку $\Phi'(t) \geq 0$ при $t \in [0, t_1]$, то

$$\Phi(t) \geq \Phi(0) > 0 \quad \text{при } t \in [0, t_1].$$

Отсюда и из (9.66) приходим к следующему неравенству:

$$\Phi'(t) \geq \frac{A^{1/2}}{\lambda - 1} \Phi^\lambda(t) \geq \frac{A^{1/2}}{\lambda - 1} \Phi^\lambda(0) > 0. \quad (9.68)$$

Следовательно, в частности, $\Phi'(t_1) > 0$. Поэтому, повторяя с самого начала

рассуждения, мы получим, что

$$\Phi'(t) \geq \frac{A^{1/2}}{\lambda - 1} \Phi^\lambda(0) > 0 \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (9.69)$$

Отсюда и из (9.58) приходим к выводу о том, что

$$Z'(t) < 0 \quad \text{при } t \in [0, T].$$

Поэтому из неравенства (9.65), которое справедливо при $t \in [0, T]$, мы приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} Z(t) \leq Z(0) - A^{1/2}t &\implies \Phi^{1-\lambda}(t) \leq \Phi^{1-\lambda}(0) - A^{1/2}t \implies \\ &\implies \Phi(t) \geq \frac{1}{[\Phi^{1-\lambda}(0) - A^{1/2}t]^{1/(\lambda-1)}}. \end{aligned} \quad (9.70)$$

Потребуем теперь выполнения следующего равенства:

$$A^{1/2}T_1 = \Phi^{1-\lambda}(0). \quad (9.71)$$

Данное равенство можно преобразовать к следующему виду:

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\lambda - 1)^2}(\Phi(0))^2 + \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\lambda - 1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\lambda - 1}\Phi(0). \quad (9.72)$$

По условию теоремы это уравнение имеет наименьший положительный корень. Теорема доказана полностью.

Теперь применим результат теоремы 9.4 к нашей задаче Коши 1. С этой целью проверим выполнение условий (*Blowup*) для функционала $\Phi(t)$, определённого равенством (9.34), в котором $u \in C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$. Имеем:

$$\Phi_0 := \Phi(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (u_0^2(x) + |D_x u_0(x)|^2) dx, \quad (9.73)$$

$$\Phi_1 := \Phi'(0) = \int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x)u_1(x) + (D_x u_0(x), D_x u_1(x))) dx. \quad (9.74)$$

Константы $\lambda > 1$, $\beta \geq 0$, $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$ берём из (9.45), учитывая (9.46) и (9.47). Понятно, что условия (9.48) выполнены, например, при любой нетривиальной $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ и при $u_1(x) = u_0(x)$. Несложно доказать при помощи преобразования Фурье, что уравнение

$$\Delta u_1(x) - u_1(x) = -u_0^2(x) + f(x) \quad (9.75)$$

имеет единственное в классе $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ решение для любых $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, поскольку $H^1(\mathbb{R}^3) \subset L^4(\mathbb{R}^3)$. Поэтому если предположить, что $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ и $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ — произвольные фиксированные функции, а $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ — единственное решение уравнения (9.75), то справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) [-\Delta u_1(x) + u_1(x)] dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) [u_0^2(x) - f(x)] dx = \int_{\mathbb{R}^3} [u_0^3(x) - f(x)u_0(x)] dx. \end{aligned}$$

Обозначим

$$a := \frac{\gamma_2}{\lambda - 1} \Phi_0^2, \quad b := \frac{2\gamma_1}{2\lambda - 1} \Phi_0 + \frac{\beta}{\lambda - 1} \Phi_0^2 - \Phi_1^2, \quad c := \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \Phi_0^2.$$

Возьмём вместо нетривиальной функции $u_0(x)$ функцию $Ru_0(x)$ при $R > 0$. Тогда при достаточно большом $R > 0$ имеем

$$\Phi_1 \sim R^3, \quad \Phi_0 = c_0 R^2, \quad c_0 > 0.$$

Поэтому

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{и} \quad b < 0$$

при достаточно большом $R > 0$, откуда выполнены условия (9.49). Это означает, что существуют такие функции $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$, при которых выполнены условия (*Blowup*) для функционала Φ . Значит, выполнены все условия теоремы 9.4. В результате доказана следующая теорема

о нижней оценке на скорость разрушения сильного решения за конечное время:

Теорема 9.5. Если $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, а $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ — единственное решение уравнения (9.75), то при «большой» u_0 для сильного решения $u \in C^{(2)}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ задачи Коши 1 имеет место следующая оценка снизу на скорость разрушения:

$$\left(\|u\|_2^2(t) + \|D_x u\|_2^2(t) \right) \geq \left(\|u_0\|_2^2 + \|D_x u_0\|_2^2 \right) \left(\frac{T_1}{T_1 - t} \right)^{1/(\lambda-1)} \quad \text{для } t \in [0, T],$$

где $T < T_1$, T_1 — наименьший положительный корень уравнения (9.50).

Кроме того, справедлив такой результат о разрушении гладкого решения:

Теорема 9.6. Если $\alpha \in (0, 1)$, $\beta_1 > \frac{3}{2}$, $u_0 \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)$, а функция $u_1 \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)$ — единственное решение уравнения (9.19) для произвольной функции $f \in C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3)$, то при «большой» начальной функции u_0 классическое (гладкое) решение $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3))$ задачи Коши 1 в смысле определения 9.1 не существует глобально во времени, и поэтому время $T_0 = T_0(u_0, f) > 0$ из теоремы 9.3 конечно и справедливо предельное равенство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u\|_{1, \alpha, T} = +\infty.$$

Теперь рассмотрим вопрос о разрушении слабого решения задачи Коши 1. Дадим определение:

Определение 9.4. Функция $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ называется локальным во времени слабым решением задачи Коши 1 для некоторого $T > 0$, если для любой функции $\phi \in C^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ такой, что $\phi(x, T) = \phi'(x, T) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $\text{supp}_x \phi(x, t)$ — компакт в $\mathbb{R}^3$ для каждого $t \in [0, T]$, выполнено равенство

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x_j^2} \right] dx dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x)\Delta_x\phi'(x,0) - u_1(x)\Delta_x\phi(x,0) - u_0(x)\phi'(x,0) + u_1(x)\phi(x,0)] dx - \\
& - \int_{\mathbb{R}^3} u_0^2(x)\phi(x,0) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(x,t)\phi'(x,t) dx dt,
\end{aligned} \tag{9.76}$$

причём $u_0 \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$.

Дадим определение:

Определение 9.5. Будем говорить, что пара функций $(u_0, u_1) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3) \times L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ удовлетворяет условию $(Blowup_w)$, если найдётся такая нетривиальная функция $\phi_1 \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, $\phi_1 \geq 0$, что для всех $T > 0$ конечна ёмкость

$$c_1(T) = \frac{T^2}{3} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| (\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)) \frac{6}{T^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{1x_j x_j}(x) (1-s)^2 \right|^2}{\phi_1(x)} dx ds \tag{9.77}$$

и существует $T_2 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{3}{T_2} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + \\
& + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) u_0^2(x) dx + \frac{1}{2} c_1(T_2) < 0.
\end{aligned} \tag{9.78}$$

Лемма 9.6. Класс функций (u_0, u_1) , удовлетворяющих условию $(Blowup_w)$, не пуст.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем, что ёмкость $c_1(T)$ конечна для всех $T > 0$. Пусть $\psi \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, $\psi \geq 0$ и нетривиальна. Тогда функция $\phi_1 = \psi^n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 4$ принадлежит классу $C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, $\phi_1 \geq 0$ и для неё

выполнено равенство

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)) \frac{6}{T^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{1x_j x_j}(x) (1-s)^2}{\phi_1(x)} \right|^2 = \\
& = \psi^{n-4}(x) \left| (n\psi(x)\Delta_x \psi(x) + n(n-1)|D_x \psi(x)|^2) \frac{6}{T^2} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 (n(n-1)(\psi_{x_j}(x))^2 + n\psi(x)\psi_{x_j x_j}(x)) (1-s)^2 \right|^2.
\end{aligned} \tag{9.79}$$

Из этого равенства следует, что ёмкость $c_1(T)$ конечна для любого $T > 0$. Очевидно, что $c_1(T) \geq 0$. Выберем теперь функцию $u_1 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ таким образом, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) (\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)) dx < 0. \tag{9.80}$$

Теперь вместо функции u_1 возьмём Ru_1 при $R \geq 0$. Далее рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
L(R, T_2) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{3}{T_2} u_0(x) + Ru_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) u_0^2(x) dx + \frac{1}{2} c_1(T_2).
\end{aligned} \tag{9.81}$$

Очевидно, что в силу условия (9.80) при достаточно большом $R = R_1 > 0$ имеем $L(R_1, T_2) < 0$. Лемма доказана полностью.

Справедлива следующая

Теорема 9.7. *Если пара функций (u_0, u_1) удовлетворяет условию $(Blowup_w)$, то для времени T существования локального во времени слабого нетривиального решения задачи Коши 1 в смысле определения 9.4 выполнено неравенство $T < T_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим функцию ϕ в равенстве (9.76) равной сле-

дующему выражению:

$$\phi(x, t) = \phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3, \quad \phi_1 \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3), \quad \phi_1 \geq 0.$$

Верны неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) \right] dx dt \right| \leq \\ & \leq c_1^{1/2} J^{1/2} \leq \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} c_1, \end{aligned} \quad (9.82)$$

где нелинейная ёмкость $c_1(T)$ определена равенством (9.77),

$$J = \frac{3}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 u^2(x, t) dx dt.$$

Тогда из (9.76) получим неравенство

$$\frac{1}{2} J + \frac{1}{2} c_1 + I \geq J, \quad (9.83)$$

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{3}{T} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) u_0^2(x) dx. \end{aligned} \quad (9.84)$$

Это означает, что верно неравенство

$$\frac{1}{2} c_1(T) + I(T) \geq \frac{1}{2} J(T) \geq 0, \quad T > 0. \quad (9.85)$$

В силу условия (*Blowup_w*) мы имеем

$$\frac{1}{2} c_1(T_2) + I(T_2) < 0.$$

Теорема доказана полностью.

9.2. Задача Коши 2

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial |D_x u(x, t)|^2}{\partial t} = 0, \quad (9.86)$$

$$(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (9.87)$$

Дадим

Определение 9.6. Классическим решением задачи Коши 2 называется функция $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, $\alpha \in (0, 1)$, удовлетворяющая поточечно равенствам (9.86), (9.87).

Введём в рассмотрение нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} u(x, t) = & - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \nu(y) dy, \end{aligned} \quad (9.88)$$

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial |D_x u(x, t)|^2}{\partial t},$$

$$\mu(x) = \Delta u_1(x) - u_1(x), \quad \nu(x) = \Delta u_0(x) - u_0(x).$$

Справедлива следующая

Лемма 9.7. Если $\alpha \in (0, 1)$ и $u \in C^{(1)}([0, T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, то $\rho_0 \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ и справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} |\rho_{02} - \rho_{01}|_\alpha(t) \leqslant \\ & \leqslant 12 \max \{ \|u_1\|_{1,1+\alpha,T}, \|u_2\|_{1,1+\alpha,T} \} \|u_2 - u_1\|_{1,1+\alpha,T}, \end{aligned} \quad (9.89)$$

$$\|w\|_{1,1+\alpha,T} := \sup_{t \in [0, T]} |w|_{1+\alpha}(t) + \sup_{t \in [0, T]} |w_t|_{1+\alpha}(t),$$

$$\rho_{0k}(x, t) = \frac{\partial |D_x u_k(x, t)|^2}{\partial t}, \quad u_k \in C^{(1)}([0, T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Шаг 1.* Как видно, в данном случае верно равенство

$$\rho_0(x, t) = \frac{\partial |z(x, t)|^2}{\partial t} = 2(z_t(x, t), z(x, t)), \quad z(x, t) = D_x u(x, t). \quad (9.90)$$

Возьмём произвольное $t \in [0, T]$. Таким образом, верно равенство

$$\begin{aligned} \rho_0(x_2, t) - \rho_0(x_1, t) &= 2(z_t(x_2, t), z(x_2, t) - z(x_1, t)) + \\ &+ 2(z(x_1, t), z_t(x_2, t) - z_t(x_1, t)), \end{aligned}$$

откуда следует неравенство

$$\begin{aligned} |\rho_0(x_2, t) - \rho_0(x_1, t)| &\leq 2|z_t(x_2, t)| |z(x_2, t) - z(x_1, t)| + \\ &+ 2|z(x_1, t)| |z_t(x_2, t) - z_t(x_1, t)|. \end{aligned} \quad (9.91)$$

Из (9.91) следует оценка

$$\begin{aligned} [\rho_0]_\alpha(t) &= \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|\rho_0(x_2, t) - \rho_0(x_1, t)|}{|x_2 - x_1|^\alpha} \leq 2|z_t|_0(t) |z|_\alpha(t) + \\ &+ 2|z|_0(t) |z_t|_\alpha(t) = 2|D_x u_t|_0(t) |D_x u|_\alpha(t) + \\ &+ 2|D_x u|_0(t) |D_x u_t|_\alpha(t) < +\infty. \end{aligned} \quad (9.92)$$

Из (9.90) получаем оценку

$$|\rho_0|_0(t) \leq 2|D_x u_t|_0(t) |D_x u|_0(t) < +\infty. \quad (9.93)$$

Таким образом, из (9.92) и (9.93) приходим к выводу о том, что

$$|\rho_0|_\alpha(t) < +\infty \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (9.94)$$

Из равенства (9.90) получаем следующую цепочку равенств для

$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$:

$$\begin{aligned}
& [\rho_0(x_2, t_2) - \rho_0(x_1, t_2)] - [\rho_0(x_2, t_1) - \rho_0(x_1, t_1)] = \\
& = 2(z_t(x_2, t_2), z(x_2, t_2) - z(x_1, t_2)) + 2(z(x_1, t_2), z_t(x_2, t_2) - z_t(x_1, t_2)) - \\
& - 2(z_t(x_2, t_1), z(x_2, t_1) - z(x_1, t_1)) - 2(z(x_1, t_1), z_t(x_2, t_1) - z_t(x_1, t_1)) = \\
& = 2(z_t(x_2, t_2), [z(x_2, t_2) - z(x_1, t_2)] - [z(x_2, t_1) - z(x_1, t_1)]) + \\
& + 2(z_t(x_2, t_2) - z_t(x_2, t_1), z(x_2, t_1) - z(x_1, t_1)) + \\
& + 2(z(x_1, t_2), [z_t(x_2, t_2) - z_t(x_1, t_2)] - [z_t(x_2, t_1) - z_t(x_1, t_1)]) + \\
& + 2(z(x_1, t_2) - z(x_1, t_1), z_t(x_2, t_1) - z_t(x_1, t_1)),
\end{aligned}$$

из которой вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned}
& [\rho_0(t_2) - \rho_0(t_1)]_\alpha \leq 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_{jt}(t)|_\alpha |z_j(t_2) - z_j(t_1)|_\alpha + \\
& + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_j(t)|_\alpha |z_{jt}(t_2) - z_{jt}(t_1)|_\alpha + \\
& + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_j(t)|_\alpha |z_{tj}(t_2) - z_{tj}(t_1)|_\alpha + \\
& + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |z_{jt}(t)|_\alpha |z_j(t_2) - z_j(t_1)|_\alpha = \\
& = 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_t(t)|_\alpha |D_{x_j} u(t_2) - D_{x_j} u(t_1)|_\alpha + \\
& + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u(t)|_\alpha |D_{x_j} u_t(t_2) - D_{x_j} u_t(t_1)|_\alpha + \\
& + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u(t)|_\alpha |D_{x_j} u_t(t_2) - D_{x_j} u_t(t_1)|_\alpha + \\
& + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_t(t)|_\alpha |D_{x_j} u(t_2) - D_{x_j} u(t_1)|_\alpha \leq \\
& \leq 24 \|u\|_{1, 1+\alpha, T} [|u(t_2) - u(t_1)|_{1+\alpha} + |u_t(t_2) - u_t(t_1)|_{1+\alpha}].
\end{aligned} \tag{9.95}$$

С другой стороны, несложно доказать неравенство

$$\begin{aligned}
& |\rho_0(t_2) - \rho_0(t_1)|_0 \leqslant \\
& \leqslant 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_t|_0(t) |D_{x_j} u(t_2) - D_{x_j} u(t_1)|_0 + \\
& + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u|_0(t) |D_{x_j} u_t(t_2) - D_{x_j} u_t(t_1)|_0.
\end{aligned} \tag{9.96}$$

Из (9.95) и из (9.96) следует, что

$$\begin{aligned}
& |\rho_0(t_2) - \rho_0(t_1)|_\alpha \leqslant c_0 \|u\|_{1, 1+\alpha, T} \left[|u(t_2) - u(t_1)|_{1+\alpha} + \right. \\
& \left. + |u_t(t_2) - u_t(t_1)|_{1+\alpha} \right] \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_2 - t_1| \rightarrow +0.
\end{aligned} \tag{9.97}$$

В итоге из (9.94) и (9.97) имеем то, что $\rho_0 \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$.

Шаг 2. Пусть

$$\rho_{0k}(x, t) = \frac{\partial |D_x u_k(x, t)|^2}{\partial t}, \quad u_k \in C^{(1)}([0, T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$$

при $k = 1, 2$. Таким образом, верно равенство

$$\begin{aligned}
\rho_{02}(x, t) - \rho_{01}(x, t) &= 2 \sum_{j=1}^3 D_{x_j} u_{2t}(x, t) [D_{x_j} u_2(x, t) - D_{x_j} u_1(x, t)] + \\
&+ 2 \sum_{j=1}^3 D_{x_j} u_1(x, t) [D_{x_j} u_{2t}(x, t) - D_{x_j} u_{1t}(x, t)],
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \in [0, T]} |\rho_{02} - \rho_{01}|_\alpha(t) \leqslant \\
& \leqslant 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_{2t}|_\alpha(t) \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_2(t) - D_{x_j} u_1(t)|_\alpha + \\
& + 2 \sum_{j=1}^3 \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_1|_\alpha(t) \sup_{t \in [0, T]} |D_{x_j} u_{2t} - D_{x_j} u_{1t}|_\alpha(t) \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leq 12 \max \{ \|u_1\|_{1,1+\alpha,T}, \|u_2\|_{1,1+\alpha,T} \} \|u_2 - u_1\|_{1,1+\alpha,T}.$$

Наконец, справедлива

Теорема 9.8. При $\alpha \in (0, 1)$ для всяких $u_0, u_1 \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ найдётся такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для всякого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (9.88) в классе $u \in C^{(1)}([0, T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, причём либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае верно свойство

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|u\|_{1,1+\alpha,T} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Прежде всего заметим, что интегральное уравнение (9.88) можно переписать в виде

$$u(x, t) = H[u](x, t),$$

где оператор H определён равенством

$$\begin{aligned} H[u](x, t) = & - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \nu(y) dy \end{aligned}$$

и в силу результата теоремы 6.5 действует следующим образом:

$$H : C^{(1)}([0, T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \rightarrow C^{(1)}([0, T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Шаг 2. Заметим, что в силу оценки (6.4) теоремы 6.1 и оценки (9.89) леммы 9.7 справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|H[u_1] - H[u_2]\|_{1,1+\alpha,T} & \leq T d_0(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho_1 - \rho_2|_\alpha(t) \leq \\ & \leq TC(T) R \|u_1 - u_2\|_{1,1+\alpha,T}, \end{aligned} \tag{9.98}$$

$$R = \max\{\|u_1\|_{1,1+\alpha,T}, \|u_2\|_{1,1+\alpha,T}\}.$$

Шаг 3. Рассмотрим следующий шар:

$$B_R := \left\{ w \in C^{(1)}([0, T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)) : \|w\|_{1,1+\alpha,T} \leq R \right\}.$$

Пусть $u_0, u_1 \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ — произвольные фиксированные. Тогда существует настолько большое $R > 0$, что верно

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{1,1+\alpha,T} &\leq \frac{R}{2}, \\ f_1(x, t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \nu(y) dy. \end{aligned}$$

Положим в оценке (9.98) $u_1 = u \in B_R$ и $u_2 = 0$. В результате верны неравенства

$$\|H_1[u]\|_{1,1+\alpha,T} \leq 12\|u\|_{1,1+\alpha,T}^2 \leq TC(T)R^2 \leq \frac{R}{2}, \quad (9.99)$$

$$H_1[u](x, t) := - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau$$

при настолько малом $T > 0$, что выполнено неравенство

$$TC(T)R \leq \frac{1}{2}. \quad (9.100)$$

Из (9.98) и (9.99) следует, что

$$H : B_R \rightarrow B_R.$$

Наконец, из оценки (9.98) при выполнении условия (9.100) получаем неравенство

$$\|H[u_1] - H[u_2]\|_{1,1+\alpha,T} \leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{1,1+\alpha,T}$$

для любых $u_1, u_2 \in B_R$, т.е. оператор H является сжимающим на шаре B_R . Отсюда следует существование единственного решения u интегрального уравнения (9.88) в шаре $B_R \subset C^{(1)}([0, T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ при достаточно большом

$R > 0$ и для достаточно малого $T > 0$.

Шаг 4. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (9.88) в классе $C^{(1)}([0, T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ (см., например, [48]), приходим к утверждению теоремы.

Справедлива следующая

Теорема 9.9. *При $\alpha \in (0, 1)$ для всяких $u_0, u_1 \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ найдётся такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное классическое решение задачи Коши (9.86), (9.87) в смысле определения 9.6 в классе $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, причём либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, причём в последнем случае верно свойство*

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|u\|_{1,1+\alpha,T} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из третьей формулы Грина (4.23) следует, что всякое классическое решение задачи Коши (9.86), (9.87) удовлетворяет интегральному уравнению (9.88), а всякое решение этого интегрального уравнения в силу теоремы 9.8 единственно в классе $u \in C^{(1)}([0, T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ для любого $T \in (0, T_0)$. С учётом результата леммы 9.7 осталось воспользоваться теоремой 6.5 при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

9.3. Задача Коши 3

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2} &= 0, \\ (x, t) &\in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \end{aligned} \quad (9.101)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (9.102)$$

Дадим

Определение 9.7. Классическим решением задачи Коши 3 называется функция $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, $\alpha \in (0, 1)$, удовлетворяющая поточечно равен-

ствам (9.101), (9.102).

Введём в рассмотрение нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau + \\
 &+ \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \nu(y) dy, \\
 \rho_0(x, t) &= \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2}, \\
 \mu(x) &= \Delta u_1(x) - u_1(x), \quad \nu(x) = \Delta u_0(x) - u_0(x).
 \end{aligned} \tag{9.103}$$

Справедлива следующая

Лемма 9.8. При $\alpha \in (0, 1)$ и $u \in C^{(2)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ имеем то, что $\rho_0 \in C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ и верна оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} |\rho_{01} - \rho_{02}|_\alpha(t) \leq C \max \{ \|u_1\|_{2, \alpha, T}, \|u_2\|_{2, \alpha, T} \} \|u_1 - u_2\|_{2, \alpha, T}, \tag{9.104}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{0k}(x, t) &= \frac{\partial^2 u_k^2(x, t)}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2, \\
 \|w\|_{2, \alpha, T} &= \sup_{t \in [0, T]} |w|_\alpha(t) + \sup_{t \in [0, T]} |w_t|_\alpha(t) + \sup_{t \in [0, T]} |w_{tt}|_\alpha(t).
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оно проводится по аналогии с леммой 9.1.

Справедлива следующая

Теорема 9.10. При $\alpha \in (0, 1)$ для всякого $T > 0$ существуют такие малые $R > 0$, $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$, что для всяких $u_0 \in B_{R_1} \subset C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in B_{R_2} \subset C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ существует единственное решение $u \in B_R \subset C^{(2)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ интегрального уравнения (9.103), где

$$\begin{aligned}
 B_{R_k} &= \{w \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) : |w|_{2+\alpha} \leq R_k\}, \quad k = 1, 2, \\
 B_R &= \{w \in C^{(2)}([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}^3)) : \|w\|_{2, \alpha, T} \leq R\}.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство базируется на принципе сжимающих отображений и оценок (6.4) и (9.104).

Справедлива следующая

Теорема 9.11. При $\alpha \in (0, 1)$ для всякого $T > 0$ существуют такие малые $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$, что для всяких $u_0 \in B_{R_1} \subset C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in B_{R_2} \subset C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ существует единственное классическое решение задачи Коши 3 и $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ в смысле определения 9.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на третьей формуле Грина (4.23), теореме 6.5 при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ и теореме 9.10.

Теперь мы рассмотрим вопрос об отсутствии глобального и локального во времени слабых решений задачи Коши 3.

Определение 9.8. Функция $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ называется локальным во времени слабым решением задачи Коши 3 для некоторого $T > 0$, если для любой функции $\phi \in C^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ такой, что $\phi(x, T) = \phi'(x, T) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $\text{supp}_x \phi(x, t)$ — компакт в $\mathbb{R}^3$ для каждого $t \in [0, T]$, выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x_j^2} \right] dx dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x) \Delta_x \phi'(x, 0) - u_1(x) \Delta_x \phi(x, 0) - u_0(x) \phi'(x, 0) + u_1(x) \phi(x, 0)] dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [2u_0(x) u_1(x) \phi(x, 0) - u_0^2(x) \phi'(x, 0)] dx = \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(x, t) \phi''(x, t) dx dt, \end{aligned} \tag{9.105}$$

причём $u_0, u_1 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

Определение 9.9. Будем говорить, что пара функций $(u_0, u_1) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ удовлетворяет условию $(Blowup_w)$, если найдётся такая нетриви-

альная функция $\phi_1 \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, $\phi_1 \geq 0$, что для всех $T > 0$ конечна ёмкость

$$c_1(T) = \frac{T^3}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{(\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)) \frac{2}{T^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{1x_j x_j}(x) (1-s)^2}{\phi_1(x)} \right|^2 dx ds \quad (9.106)$$

и существует $T_1 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T_1} u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + \\ & + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x) u_1(x) + \frac{1}{T_1} u_0^2(x) \right] dx + \frac{1}{2} c_1(T_1) < 0. \end{aligned} \quad (9.107)$$

Лемма 9.9. *Класс функций (u_0, u_1) , удовлетворяющих условию $(Blowup_w)$, не пуст.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем, что ёмкость $c_1(T)$ конечна для всех $T > 0$. Пусть $\psi \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, $\psi \geq 0$ и нетривиальна. Тогда функция $\phi_1 = \psi^n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 4$ принадлежит классу $C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, $\phi_1 \geq 0$ и для неё выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)) \frac{2}{T^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{1x_j x_j}(x) (1-s)^2}{\phi_1(x)} \right|^2 = \\ & = \psi^{n-4}(x) \left| (n\psi(x) \Delta_x \psi(x) + n(n-1) |D_x \psi(x)|^2) \frac{2}{T^2} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 (n(n-1) (\psi_{x_j}(x))^2 + n\psi(x) \psi_{x_j x_j}(x)) (1-s)^2 \right|^2. \end{aligned} \quad (9.108)$$

Из этого равенства следует, что ёмкость $c_1(T)$ конечна для любого $T > 0$. Очевидно, что $c_1(T) \geq 0$. Выберем теперь функции $u_0, u_1 \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ и $T_1 > 0$

таким образом, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T_1}u_0^2(x) \right] dx < 0. \quad (9.109)$$

Теперь вместо функций u_0, u_1 возьмем Ru_0, Ru_1 при $R \geq 0$. И рассмотрим следующую функцию:

$$\begin{aligned} L(R, T_1) := & -R \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T_1}u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + \\ & + 2R^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T_1}u_0^2(x) \right] dx + \frac{1}{2}c_1(T_1). \end{aligned} \quad (9.110)$$

Очевидно, что $L(0, T_1) = c_1(T)/2 \geq 0$, а в силу условия (9.109) при достаточно большом $R = R_1 > 0$ имеем $L(R_1, T_1) < 0$. Лемма доказана полностью.

Справедлива следующая:

Теорема 9.12. *Если пара функций (u_0, u_1) удовлетворяет условию $(Blowup_w)$, то для времени T существования локального во времени слабого нетривиального решения задачи Коши 3 в смысле определения 9.8 выполнено неравенство $T < T_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим функцию ϕ в равенстве (9.105) равной следующему выражению:

$$\phi(x, t) = \phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2, \quad \phi_1 \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^3), \quad \phi_1 \geq 0.$$

Верны неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\Delta_x \phi''(x, t) - \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) \right] dx dt \right| \leq \\ & \leq c_1^{1/2} J^{1/2} \leq \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}c_1, \end{aligned} \quad (9.111)$$

где нелинейная ёмкость $c_1(T)$ определена равенством (9.106),

$$J = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) u^2(x, t) dx dt.$$

Тогда из (9.105) получим неравенство:

$$\frac{1}{2}J + \frac{1}{2}c_1 + I \geq J, \quad (9.112)$$

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\mathbb{R}^3} [u_0(x)[\Delta_x \phi'(x, 0) - \phi'(x, 0)] - u_1(x)[\Delta_x \phi(x, 0) - \phi(x, 0)] dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} [2u_0(x)u_1(x)\phi(x, 0) - u_0^2(x)\phi'(x, 0)] dx = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T}u_0(x) + u_1(x) \right) [\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)] dx + \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x) \left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T}u_0^2(x) \right] dx. \end{aligned} \quad (9.113)$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}c_1(T) + I(T) \geq \frac{1}{2}J(T) \geq 0, \quad T > 0. \quad (9.114)$$

В силу условия (*Blowup_w*) мы имеем

$$\frac{1}{2}c_1(T_1) + I(T_1) < 0.$$

Теорема доказана полностью.

Справедлива следующая несложная

Лемма 9.10. Равенство (9.105) для слабых решений $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ в

смысле определения 9.8 эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2) \left[\Delta_x \phi''(x, t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x_j^2} \right] dx dt + \\
& + \int_{\mathbb{R}^3} [(u_0(x) + 1/2) \Delta_x \phi'(x, 0) - u_1(x) \Delta_x \phi(x, 0)] dx + \\
& + \int_{\mathbb{R}^3} \left[2(u_0(x) + 1/2) u_1(x) \phi(x, 0) - (u_0(x) + 1/2)^2 \phi'(x, 0) \right] dx = \\
& = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2)^2 \phi''(x, t) dx dt.
\end{aligned} \tag{9.115}$$

Определение 9.10. Будем говорить, что функция u_1 принадлежит классу (B) , если найдётся такой шар $O(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^3$, что $u_1 \in H^2(O(x_0, R_0))$ и

$$\mu \{x \in O(x_0, R_0) : \Delta_x u_1(x) \neq 0\} > 0,$$

где μ — стандартная мера Лебега в $\mathbb{R}^3$.

Справедлива следующая

Теорема 9.13. Если $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $u_0 + 1/2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и выполнено условие

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) u_1(x) dx < 0,$$

то время существования T слабого решения задачи Коши 3 в смысле определения 9.8 конечно и имеет место верхняя оценка

$$T \leqslant - \frac{\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2)^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) u_1(x) dx}.$$

Если же $u_0 = -1/2$ и $u_1 \in (B)$, то слабое решение задачи Коши 3 в смысле определения 9.8 отсутствует для любого $T > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этой теоремы базируется на методе нелинейной ёмкости С.И. Похожаева [35]. Нужно при помощи неравенства Гёльдера оценить слагаемые в равенстве (9.115). В качестве функции ϕ из определения 9.8 выберем такую:

$$\begin{aligned}\phi(x, t) &= \phi_R(x)\phi_T(t), \\ \phi_R(x) &= \phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad \phi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{если } s \geq 1; \end{cases} \\ \phi_0 &\in C_0^\infty[0, +\infty), \quad \phi_T(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2.\end{aligned}$$

Отметим, что на отрезке $s \in [1/2, 1]$ функция ϕ_0 сшивается между единицей и нулём бесконечно дифференцируемой функцией (например, подойдёт «шапочка», конкретный вид здесь не важен). Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}& \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2) \Delta_x \phi''(x, t) dx dt \right| = \\&= \frac{2}{T^2} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2) \Delta_x \phi_R(x) dx dt \right| \leq \\&\leq \frac{2T^{1/2}}{T^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_x \phi_R(x)|^2}{\phi_R(x)} dx \right)^{1/2} I_R^{1/2}, \\& I_R := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2)^2 \phi_R(x) dx dt, \\& \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2) \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x, t) dx dt \right| \leq\end{aligned} \tag{9.116}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^T \phi_T^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{Rx_j x_j}(x) \right|^2}{\phi_R(x)} dx \right)^{1/2} I_R^{1/2} = \\
&= \left(\frac{T}{5} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{Rx_j x_j}(x) \right|^2}{\phi_R(x)} dx \right)^{1/2} I_R^{1/2},
\end{aligned} \tag{9.117}$$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) \Delta_x \phi'(x, 0) dx \right| = \frac{2}{T} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (u_0(x) + 1/2) \Delta_x \phi_R(x) dx \right| \leq \\
&\leq \frac{2}{T} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_x \phi_R(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x) + 1/2|^2 dx \right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{9.118}$$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta_x \phi(x, 0) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta_x \phi_R(x) dx \right| \leq \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_1^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_x \phi_R(x)|^2 dx \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{9.119}$$

Поскольку $u_0 + 1/2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, то согласно теореме Лебега справедливо следующее предельное свойство:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} [2(u_0(x) + 1/2)u_1(x)\phi(x, 0) - (u_0(x) + 1/2)^2\phi'(x, 0)] dx = \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2)u_1(x) + \frac{1}{T}(u_0(x) + 1/2)^2 \right] \phi_R(x) dx \rightarrow \\
&\rightarrow 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2)u_1(x) + \frac{1}{T}(u_0(x) + 1/2)^2 \right] dx
\end{aligned} \tag{9.120}$$

при $R \rightarrow +\infty$. Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_x \phi_R(x)|^2}{\phi_R(x)} dx = R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi, \quad (9.121)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{Rx_j x_j}(x) \right|^2}{\phi_R(x)} dx = R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{0\xi_j \xi_j}(|\xi|^2) \right|^2}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi, \quad (9.122)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_x \phi_R(x)|^2 dx = R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi. \quad (9.123)$$

Из равенства (9.115) и оценок (9.116)–(9.123) получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{2T^{1/2}}{T^2} c_1 R^{-1/2} I_R^{1/2} + \left(\frac{T}{5} \right)^{1/2} c_2 R^{-1/2} I_R^{1/2} + \\ & + \frac{2}{T} a_1 R^{-1/2} + a_2 R^{-1/2} + J_R \geq \frac{2}{T^2} I_R, \end{aligned} \quad (9.124)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &:= \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi \right)^{1/2}, \\ c_2 &:= \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{\left| \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{0\xi_j \xi_j}(|\xi|^2) \right|^2}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi \right)^{1/2}, \\ a_1 &:= \|u_0(x) + 1/2\|_2 \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$a_2 := \|u_1(x)\|_2 \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

$$J_R := 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2)u_1(x) + \frac{1}{T}(u_0(x) + 1/2)^2 \right] \phi_R(x) dx.$$

Далее, из (9.124) при помощи теоремы Беппо Леви приходим в пределе при $R = N \in \mathbb{N} \rightarrow +\infty$ к следующей априорной оценке:

$$\begin{aligned} T^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(x) + 1/2)u_1(x) + \frac{1}{T}(u_0(x) + 1/2)^2 \right] dx &\geq \\ &\geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(x, t) + 1/2)^2 dx dt, \end{aligned}$$

из которой уже стандартным образом выводим утверждения теоремы. В частном случае, при $u_0 = -1/2$ справедливо

$$u(x, t) = -1/2 \quad \text{для п.в.} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T].$$

После подстановки этих равенств в равенство (9.115) приходим к следующему равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta_x \phi(x, 0) dx = 0$$

для любых пробных функций $\phi \in C_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Возьмём

$$\phi(x, t) = \phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2, \quad \phi_1 \in C_0^\infty(O(x_0, R_0)),$$

где шар $O(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям определения 9.10 класса (B) начальных функций u_1 . Таким образом, имеем равенство

$$\int_{\Omega} u_1(x) \Delta_x \phi_1(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \Delta_x u_1(x) \phi_1(x) dx = 0 \Rightarrow \Delta_x u_1(x) = 0$$

для почти всех $x \in O(x_0, R_0)$, что противоречит определению класса (B) . Теорема доказана полностью.

Отметим, что результаты, полученные для слабых решений данной задачи Коши, справедливы и для классических решений как частных случаев слабых решений.

9.4. Интерпретации разрушений решений задач Коши с точки зрения физики

Отметим, что в **задаче Коши 1** имеет место тип разрушения, именуемый в литературе (см., например, [49]) «жёсткий blow-up» (в случаях, когда время разрушения T_0 конечно). Физическая интерпретация «blow-up» здесь ясна. Напомним, что основное уравнение (1) данной задачи было получено на основании модели квадратичной нелинейности для потенциала $\varphi(x, t)$ электрического поля ионно-звуковых/дрейфовых волн в плазме, описываемой уравнением (1.3):

$$\frac{\partial n_{2e}}{\partial t} + q_0 \varphi^2 = 0,$$

где n_{2e} — концентрация свободных электронов в плазме, q_0 — размерный коэффициент, пропорциональный заряду электрона ($q_0 < 0$). В такой модели «blow-up» происходит при условии бесконечного роста потенциала $\varphi(x, t)$ за время разрушения T_0 . Учитывая, что

$$\frac{\partial n_{2e}}{\partial t} = -q_0 \varphi^2,$$

частная производная $\partial n_{2e}/\partial t$ с течением времени возрастает и за время разрушения T_0 обращается в $+\infty$. В итоге мы получаем бесконечный по модулю рост потенциала при резком увеличении концентрации свободных электронов для изначально плотной плазмы ($n_{2e} \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$), что приводит к избытку потенциальной энергии и взрыву плазмы.

В случае **задачи Коши 2** также имеет место тип разрушения, именуемый в литературе «жёсткий blow-up» (в случаях, когда время разрушения T_0 конечно). Напомним, что основное уравнение (2) данной задачи было получено на основании модели градиентной квадратичной нелинейности для

потенциала φ электрического поля ионно-звуковых/дрейфовых волн в плазме, описываемой уравнением (1.4):

$$\frac{\partial n_{2e}}{\partial t} + m_0 |\nabla \varphi|^2 = 0.$$

Такая модель учитывает нелинейную конвекцию, в результате которой происходит укручение фронта ионно-звуковой/дрейфовой волны. В дальнейшем это приводит к опрокидыванию ионно-звуковых/дрейфовых волн в плазме из-за неограниченного роста $|\nabla \varphi|$. Тем не менее, имеется важный случай, когда опрокидывание не происходит. При условии достаточно большой длины волны и достаточно малой амплитуды укручение фронта ионно-звуковой волны компенсируется дисперсией, в результате чего возникают устойчивые, распространяющиеся в пространстве ионно-звуковые солитоны (подробнее об этом условии и об ионно-звуковых солитонах см. [3–5]).

Согласно теореме 9.9, у нас имеется результат о непродолжаемом решении, а именно возникают две альтернативы: либо $T_0 < +\infty$ (случай «blow-up»), либо $T_0 = +\infty$ (это может быть как случай «blow-up», так и глобальной разрешимости). Согласно приведённому физическому смыслу, случай «blow-up» здесь предполагает опрокидывание ионно-звуковых/дрейфовых волн в плазме. В частном случае значение $T_0 = +\infty$ имеет место при условии существования ионно-звуковых солитонов, причём здесь это случай глобальной разрешимости. Отметим, что в приведённой литературе изучались только автомодельные солитонные решения. В данной же диссертации аналитически изучен общий случай модели и было показано, что для уравнения типа Ядзимы-Ойкавы-Сацумы возможен как случай глобальной разрешимости (солитонные решения), так и разрушения решения (опрокидывания ионно-звуковых, а также дрейфовых волн в плазме).

В задаче Коши 3 имеет место тип разрушения, именуемый в литературе (см., например, [12] и [50]) «мгновенный blow-up» (случаи, где имеет место глобальная неразрешимость). Кроме того, в случае задачи Коши 3 был получен также результат об отсутствии глобальных решений. Согласно численным исследованиям, проведённым автором диссертации в работе [19],

это приводит к разрушению решения, причём физический смысл «blow-up» здесь заключается в так называемом эффекте «black hole» для потенциала φ , при котором сам потенциал во время разрушения принимает конечные значения во всех точках пространства, однако его частная производная $\partial\varphi/\partial t$ обращается в бесконечность во всех или нескольких точках пространства. Эффект «black hole» для потенциала в данной диссертации удалось аналитически и численно получить в частных случаях для начально-краевой задачи, рассматриваемой в последующих двух главах.

Глава 10

Начально-краевая задача и её аналитическое исследование

10.1. Постановка начально-краевой задачи

Данная глава посвящена исследованию сферически-симметричных ионно-звуковых волн в приближении, где отсутствуют свободные электроны. Для этого запишем уравнение (3), описывающее ионно-звуковые волны:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \omega^2 \Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2}, \quad (10.1)$$

где $\omega := \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 > 0$.

Введём $\Omega_0 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < b^2, 0 < a < b\}$ — сферический слой в заданной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Для уравнения (10.1) на множестве $\bar{\Omega}_0 \times [0, T]$ зададим начально-краевую задачу с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) \quad (10.2)$$

и однородным условием Неймана на границе $\partial\Omega_0$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (10.3)$$

где n — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_0$.

Тем не менее, в данной диссертации упрощается уравнение (10.1) вместе с граничным условием (10.3). Отметим, что в монографии [8] была предложена модель сферически-симметричных ионно-звуковых волн, то есть когда неизвестная функция u зависит лишь от времени t и расстояния $r = r_{Ox}$ от начала декартовой системы координат (точки O) до точки $x = (x_1, x_2, x_3)$. В частности, такая модель применима для сферического токамака. Для этой модели удобнее ввести сферическую систему координат (r, θ, φ) с центром в точке O . Тогда $u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t) = u(r, \theta, \varphi, t) = u(r, t)$, а также $\Delta u(r, t) = \Delta_r u(r, t)$,

где

$$\Delta_r u(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right),$$

то есть оператор Δ_r является радиальной частью оператора Лапласа.

Упростив физическую модель, исходная задача примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta_r u(r, t) - u(r, t)) + \omega^2 \Delta_r u(r, t) = \frac{\partial^2 u^2(r, t)}{\partial t^2}, & (r, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ u(r, 0) = u_0(r), \quad u_t(r, 0) = u_1(r), & r \in [a, b], \\ u_r(a, t) = u_r(b, t) = 0, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (10.4)$$

где $0 < a < b$, при этом верхняя оценка для времени $0 < T < +\infty$ будет выведена ниже. Отметим, что мы ставим задачу на замкнутом множестве, причём понимаем все производные в граничных точках в смысле односторонних.

В данном случае мы будем исследовать классическое решение задачи (10.4) в классе $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$. Для этого потребуется условие согласования

$$u_{0r}(a) = u_{0r}(b) = u_{1r}(a) = u_{1r}(b) = 0.$$

В данном случае на границе сферического слоя напряжённость электрического поля ионно-звуковых волн равна нулю. В этом и заключается физический смысл однородных условий Неймана на границе. Обосновывается это тем, что ионно-звуковая волна в случае сферической симметрии распространяется вдоль сферы фиксированного радиуса. Таким образом, её волновой вектор $\mathbf{k}$ направлен по касательной к данной сфере. Но ионно-звуковая волна является продольной, поэтому $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$, откуда $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — вектор внешней или внутренней нормали к сфере. В результате это показывает справедливость граничного условия (10.3).

С опорой на методики исследований, предложенные в работах [18] и [51], методом сжимающих отображений мы докажем локальную разрешимость задачи (10.4), а методом пробных функций при некотором достаточном условии мы докажем отсутствие глобальных решений задачи и найдём верхнюю оценку для времени существования решения. Также будет приведён пример аналитического решения данной задачи, где имеет место разрушение решения за

конечное время. В следующей же главе диссертации разрушение задачи (10.4) будет изучено с помощью численных методов.

10.2. Сведение задачи к интегро-дифференциальному уравнению

В задаче (10.4) проведём замену: $u(r, t) = \frac{v(r, t)}{r}$. В итоге получим, что

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rv_{rr}(r, t) - rv(r, t)) + \omega^2 rv_{rr}(r, t) = \frac{\partial^2 v^2(r, t)}{\partial t^2}, & (r, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ v(r, 0) = v_0(r), \quad v_t(r, 0) = v_1(r), & r \in [a, b], \\ v(a, t) - av_r(a, t) = 0, \quad v(b, t) - bv_r(b, t) = 0, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (10.5)$$

при этом $v_0(r) := ru_0(r)$, $v_1(r) := ru_1(r)$, $v \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$.

Уравнение в задаче (10.5) приводится к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (rv_{rr} - rv - v^2) + \omega^2 (rv_{rr} - rv - v^2) = -\omega^2 rv - \omega^2 v^2. \quad (10.6)$$

Пусть

$$\widehat{L}w := rw_{rr} - rw,$$

где $\widehat{L}: C^{(2)}[a, b] \rightarrow C[a, b]$, — непрерывный оператор, имеющий непрерывный обратный оператор $\widehat{G}: C[a, b] \rightarrow C^{(2)}[a, b]$, где

$$(\widehat{G}h)(r) = \int_a^b G(r, y)h(y) dy,$$

а $G(r, y)$ — функция Грина третьей краевой задачи

$$\begin{cases} rw_{rr} - rw = h(r), & r \in [a, b], \\ w(a) - aw_r(a) = 0, \\ w(b) - bw_r(b) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что данная функция Грина имеет следующий вид:

$$G(r, y) = \frac{1}{yM} \begin{cases} (\operatorname{sh}(r-a) + a \operatorname{ch}(r-a)) (\operatorname{sh}(y-b) + b \operatorname{ch}(y-b)), \\ \text{если } a \leq r < y \leq b, \\ (\operatorname{sh}(r-b) + b \operatorname{ch}(r-b)) (\operatorname{sh}(y-a) + a \operatorname{ch}(y-a)), \\ \text{если } a \leq y < r \leq b, \end{cases}$$

где $M := (1 - ab) \operatorname{sh}(b-a) - (b-a) \operatorname{ch}(b-a)$.

Действуя на уравнение (10.6) оператором $\widehat{G}$, имеем выражение

$$\frac{d^2}{dt^2} (v - \widehat{G}(v^2)) + \omega^2 (v - \widehat{G}(v^2)) = -\omega^2 \widehat{G}(rv + v^2),$$

причём далее функция $v \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$ рассматривается в смысле абстрактной, а её производная по t считается в смысле сильной производной в пространстве $C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$.

Обозначив $z := v - \widehat{G}(v^2)$, имеем абстрактную задачу Коши

$$\begin{cases} z'' + \omega^2 z = -\omega^2 \widehat{G}(rv + v^2), \\ z(0) = \underbrace{v_0 - \widehat{G}(v_0^2)}_{=: z_0}, \\ z'(0) = \underbrace{v_1 - 2\widehat{G}(v_0 v_1)}_{=: z_1}. \end{cases}$$

С помощью функции Коши данной задачи приходим к тому, что эта задача эквивалентна следующему абстрактному интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \cos \omega t + \frac{z_1}{\omega} \sin \omega t - \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \widehat{G}(rv(s) + v^2(s)) ds = \\ &= z_0 \cos \omega t + \frac{z_1}{\omega} \sin \omega t - \omega \int_0^t ds \sin(\omega(t-s)) \times \end{aligned}$$

$$\times \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy.$$

С учётом введённого ранее обозначения перепишем это уравнение в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} v - \widehat{G}(v^2) &= C_1(r) \cos \omega t + C_2(r) \sin \omega t - \\ &- \omega \int_0^t ds \sin(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy, \end{aligned} \quad (10.7)$$

где $C_1 := z_0 = v_0 - \widehat{G}(v_0^2)$, $C_2 := \frac{z_1}{\omega} = \frac{v_1 - 2\widehat{G}(v_0 v_1)}{\omega}$.

Операторы $\widehat{G}$ и $\frac{d}{dt}$ в данном случае коммутируют между собой, откуда

$$\frac{d}{dt} \widehat{G}(v^2) = \widehat{G} \left(\frac{d(v^2)}{dt} \right) = \widehat{G} \left(2v \frac{dv}{dt} \right) = \widehat{K}(v) * \frac{dv}{dt}, \quad (10.8)$$

где оператор $\widehat{K}(v) *$ имеет вид

$$\widehat{K}(v) * w := 2 \int_a^b G(r, y) v(y, t) w(y, t) dy. \quad (10.9)$$

Дифференцируя абстрактное уравнение (10.7) по времени, с учётом (10.8) получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение (здесь I — единичный оператор):

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(I - \widehat{K}(v) * \right) \frac{dv}{dt} = f(r, t) - \omega^2 \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \times \\ &\times \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy, \\ &v(r)(0) = v_0(r), \end{aligned} \right. \quad (10.10)$$

где

$$f(r, t) := -C_1(r) \omega \sin \omega t + C_2(r) \omega \cos \omega t. \quad (10.11)$$

10.3. Локальная разрешимость начально-краевой задачи

Здесь применим методику исследования, рассмотренную в работе [51], с небольшими модификациями. Введём обозначение для следующего банахова пространства:

$$\mathbb{B} := C([0, T]; C[a, b]).$$

Обозначим его норму через $\| \cdot \|$:

$$\|v\| := \sup_{t \in [0, T]} \|v\|_{C[a, b]}(t).$$

Рассмотрим замкнутое, выпуклое и ограниченное подмножество этого банахова пространства:

$$B_{n\varepsilon} := \{v \in \mathbb{B} : \|v\| \leq n\varepsilon\} \quad \text{при некотором фиксированном } n \in \mathbb{N},$$

и предположим, что $\|v_0\| \leq \varepsilon$ и $\|v_1\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Решение абстрактного интегро-дифференциального уравнения (10.10) рассматриваем в классе $v \in C^{(1)}([0, T]; C[a, b])$, в том числе производную по t считаем в смысле данного пространства. Здесь поясним, что если абстрактная функция $v \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$, то тогда она может всегда рассматриваться принадлежащей пространству $C^{(1)}([0, T]; C[a, b])$, и значения сильных производных первого порядка одинаковы с точки зрения пространств $C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$ и $C^{(1)}([0, T]; C[a, b])$. Отметим, что $C^{(1)}([0, T]; C[a, b]) \subset \mathbb{B}$.

Найдём достаточные условия существования обратного оператора $(I - \widehat{K}(v)*)^{-1}$. Произведём оценку нормы оператора $\widehat{K}(v)* : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ с учётом выражения (10.9):

$$\|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \sup_{\|w\| \leq 1} \|\widehat{K}(v) * w\| = \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| 2 \int_a^b G(r, y) v(y, t) w(y, t) dy \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left(2\|v\| \underbrace{\|w\|}_{\leq 1} \left\| \int_a^b G(r, y) dy \right\| \right) \leq 2c_1 R \|v\|,$$

где $R := b - a$ и $c_1 := \sup_{r, y \in [a, b]} |G(r, y)| = \max_{r, y \in [a, b]} |G(r, y)|$, поскольку функция Грина непрерывна по переменным $(r, y) \in [a, b] \times [a, b]$. Если же при этом $v \in B_{n\varepsilon}$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|v\| \leq 2c_1 R n \varepsilon \leq \frac{1}{2},$$

а это означает, что обратный оператор $(I - \widehat{K}(v)*)^{-1} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ существует и представляется в виде сходящегося ряда Неймана:

$$(I - \widehat{K}(v)*)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v)*]^m. \quad (10.12)$$

Введём оператор μ :

$$\mu(v) := f(r, t) - \omega^2 \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy. \quad (10.13)$$

Тогда с учётом существования обратного оператора $(I - \widehat{K}(v)*)^{-1}$ и введённого обозначения интегро-дифференциальное уравнение (10.10) эквивалентно уравнению

$$\frac{dv}{dt} = (I - \widehat{K}(v)*)^{-1} [\mu(v)]. \quad (10.14)$$

Теперь введём оператор $\widehat{F}(v) := I - \widehat{K}(v)*$. В итоге уравнение (10.14) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = \widehat{F}^{-1}(v) [\mu(v)]. \quad (10.15)$$

Вследствие (10.12) справедлива оценка

$$\|\widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1*)]^m - [\widehat{K}(\tilde{v}_2*)]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}. \quad (10.16)$$

Верна следующая

Лемма 10.1. *Для любых $v, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\varepsilon}$, $m \in \mathbb{N}$ имеют место оценки*

$$\|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * - \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \quad (10.17)$$

$$\|[\widehat{K}(v) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^m, \quad (10.18)$$

$$\|[\widehat{K}(\tilde{v}_1) *]^m - [\widehat{K}(\tilde{v}_2) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq m(2c_1 R n \varepsilon)^{m-1} \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * - \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}. \quad (10.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Шаг 1.* Докажем оценку (10.17). Действительно, справедливы нижеприведённые неравенства:

$$\begin{aligned} \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * - \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} &= \sup_{\|w\| \leq 1} \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w - \widehat{K}(\tilde{v}_2) * w\| = \\ &= \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| 2 \int_a^b G(r, y) (\tilde{v}_1(y, t) - \tilde{v}_2(y, t)) w(y, t) dy \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| 2 \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \underbrace{\|w\|}_{\leq 1} \int_a^b G(r, y) dy \right\| \leq 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|. \end{aligned}$$

В итоге оценка (10.17) доказана.

Следствие 1. Изменив $\tilde{v}_1$ на v , в случае $\tilde{v}_2 = 0$ справедлива оценка

$$\|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|v\| \leq 2c_1 R n \varepsilon. \quad (10.20)$$

Шаг 2. С помощью метода математической индукции приведём доказательство оценки (10.18). Как видно, такая оценка является очевидной при $m = 1$ (база индукции). Предположим, что эта оценка выполняется для какого-либо произвольного $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что она выполнена и при $m + 1$. При данном предположении индукции верны выражения

$$\|[\widehat{K}(v) *]^{m+1}\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\widehat{K}(v) *]^{m+1}(w)\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| [\widehat{K}(v)*]^m (\widehat{K}(v) * w) \right\| \leq \left\| [\widehat{K}(v)*]^m \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \underbrace{\sup_{\|w\| \leq 1} \left\| \widehat{K}(v) * w \right\|}_{= \left\| \widehat{K}(v)* \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}} = \\
&= \left\| [\widehat{K}(v)*]^m \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \left\| \widehat{K}(v) * \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \\
&\leq \left\| \widehat{K}(v) * \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^m \cdot \left\| \widehat{K}(v) * \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \left\| \widehat{K}(v) * \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^{m+1}.
\end{aligned}$$

Следовательно, мы доказали (10.18).

Следствие 2. Учитывая (10.20), верна оценка

$$\left\| [\widehat{K}(v)*]^m \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \left\| \widehat{K}(v) * \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^m \leq (2c_1 R n \varepsilon)^m. \quad (10.21)$$

Шаг 3. Приведём доказательство (10.19), также используя метод математической индукции. Отметим, что данная оценка очевидна при $m = 1$ (база индукции). Предположим, что эта оценка выполняется для какого-либо произвольного $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что она выполнена и при $m + 1$. С учётом предположения индукции, а также оценки (10.21) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
&\left\| [\widehat{K}(\tilde{v}_1)*]^{m+1} - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)*]^{m+1} \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \\
&= \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| [\widehat{K}(\tilde{v}_1)*]^{m+1} w - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)*]^{m+1} w \right\| = \\
&= \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| [\widehat{K}(\tilde{v}_1)*]^m (\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)*]^m (\widehat{K}(\tilde{v}_2) * w) \right\| = \\
&= \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| [\widehat{K}(\tilde{v}_1)*]^m (\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)*]^m (\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) + \right. \\
&\quad \left. + [\widehat{K}(\tilde{v}_2)*]^m (\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)*]^m (\widehat{K}(\tilde{v}_2) * w) \right\| = \\
&= \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| ([\widehat{K}(\tilde{v}_1)*]^m - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)*]^m) (\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) + \right. \\
&\quad \left. + [\widehat{K}(\tilde{v}_2)*]^m ([\widehat{K}(\tilde{v}_1) * - \widehat{K}(\tilde{v}_2) *] w) \right\| \leq \\
&\leq \underbrace{\left\| [\widehat{K}(\tilde{v}_1)*]^m - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)*]^m \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}}_{= \left\| \widehat{K}(\tilde{v}_1)* \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R n \varepsilon} \cdot \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| \widehat{K}(\tilde{v}_1) * w \right\| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\left\| [\widehat{K}(\tilde{v}_2) *]^m \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}}_{\leq (2c_1 R n \varepsilon)^m} \cdot \underbrace{\sup_{\|w\| \leq 1} \left\| [\widehat{K}(\tilde{v}_1) * - \widehat{K}(\tilde{v}_2) *] w \right\|}_{= \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * - \widehat{K}(\tilde{v}_2) *\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}} \leq \\
& \leq m(2c_1 R n \varepsilon)^{m-1} \left\| \widehat{K}(\tilde{v}_1) * - \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot 2c_1 R n \varepsilon + \\
& + (2c_1 R n \varepsilon)^m \left\| \widehat{K}(\tilde{v}_1) * - \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \\
& = (m+1)(2c_1 R n \varepsilon)^m \left\| \widehat{K}(\tilde{v}_1) * - \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}.
\end{aligned}$$

В результате была доказана оценка (10.19).

Лемма полностью доказана.

В итоге в силу оценки (10.16), а также оценок (10.17) и (10.19) леммы 10.1, верна оценка

$$\|\widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} m(2c_1 R n \varepsilon)^{m-1} \cdot 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|.$$

Как видно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$2c_1 R n \varepsilon \leq \frac{1}{2},$$

откуда

$$\|\widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{2^{m-1}}}_{=4} = c_2 \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \quad (10.22)$$

где $c_2 := 8c_1 R$, а для числового ряда $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{2^{m-1}}$ нетрудно показывается, что он сходится (например, по признаку Д'Аламбера). Сумма данного ряда (она равна 4) несложно находится с помощью почленного дифференцирования степенного ряда $\sum_{m=1}^{+\infty} x^m$ в точке $x = \frac{1}{2}$, принадлежащей интервалу сходимости $(-1, 1)$ данного ряда.

Рассмотрим оператор A :

$$A(v) := \widehat{F}^{-1}(v)[\mu(v)].$$

Тогда интегро-дифференциальное уравнение (10.10) с учётом (10.15) и введённого обозначения переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = A(v), \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (10.23)$$

Справедлива

Лемма 10.2. *Для всех $v, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\varepsilon}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ таком, что $2c_1 R n \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, а также при малых начальных данных $\|v_0\| \leq \varepsilon$ и $\|v_1\| \leq \varepsilon$ верны неравенства*

$$\|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| \leq c_3(\varepsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \quad (10.24)$$

$$\|A(v)\| \leq c_4(\varepsilon, T), \quad (10.25)$$

где

$$\begin{aligned} c_3(\varepsilon, T) &= c_2 \left(c_1 R (\omega + 2) \varepsilon^2 + (\omega + 1) \varepsilon + c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon) \right) + \\ &+ 2c_1 R \omega^2 T (b + 2n \varepsilon), \end{aligned}$$

$$c_4(\varepsilon, T) = 2 \left(c_1 R (\omega + 2) \varepsilon^2 + (\omega + 1) \varepsilon + c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Для доказательства (10.24) примем во внимание, что

$$\begin{aligned} \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| &= \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1)[\mu(\tilde{v}_1)] - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_2)]\| = \\ &= \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1)[\mu(\tilde{v}_1)] - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_1)] + \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_1)] - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_2)]\| = \\ &= \|(\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2))[\mu(\tilde{v}_1)] + \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)]\| \leq \\ &\leq \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\mu(\tilde{v}_1)\| + \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\| \leq \\ &\leq c_2 \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \cdot \|\mu(\tilde{v}_1)\| + 2 \|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\|, \end{aligned} \quad (10.26)$$

где была учтена оценка (10.22), а также то, что с учётом неравенства (10.21)

была справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\left\| \widehat{F}^{-1}(v) \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} &= \left\| (I - \widehat{K}(v) *)^{-1} \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \left\| \sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v) *]^m \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \\
&\leq \sum_{m=0}^{+\infty} \left\| [\widehat{K}(v) *]^m \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} \left\| \widehat{K}(v) * \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^m \leq \sum_{m=0}^{+\infty} (2c_1 R n \varepsilon)^m \leq \\
&\leq \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^m = 2.
\end{aligned} \tag{10.27}$$

Шаг 2. Сделаем оценку для $\|\mu(v)\|$. С учётом (10.13) имеем:

$$\begin{aligned}
\|\mu(v)\| &\leq \|f\| + \\
&+ \omega^2 \left\| \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy \right\|.
\end{aligned} \tag{10.28}$$

Принимая во внимание равенство (10.11), получаем, что

$$\begin{aligned}
f(r, t) &= (\widehat{G}(v_0^2) - v_0) \omega \sin \omega t + (v_1 - 2\widehat{G}(v_0 v_1)) \cos \omega t = \\
&= \omega \left(\int_a^b G(r, y) v_0^2(y) dy - v_0(r) \right) \sin \omega t + \\
&+ \left(v_1(r) - 2 \int_a^b G(r, y) v_0(y) v_1(y) dy \right) \cos \omega t,
\end{aligned}$$

из чего следует, что

$$\begin{aligned}
\|f\| &\leq \omega \left(\left\| \sin \omega t \cdot \int_a^b G(r, y) v_0^2(y) dy \right\| + \left\| v_0 \sin \omega t \right\| \right) + \\
&+ \left\| v_1 \cos \omega t \right\| + 2 \left\| \cos \omega t \cdot \int_a^b G(r, y) v_0(y) v_1(y) dy \right\| \leq \\
&\leq \omega(c_1 R \varepsilon^2 + \varepsilon) + \varepsilon + 2c_1 R \varepsilon^2 = c_1 R(\omega + 2) \varepsilon^2 + (\omega + 1) \varepsilon.
\end{aligned} \tag{10.29}$$

Также

$$\omega^2 \left\| \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy \right\| \leq \quad (10.30)$$

$$\leq \omega^2 c_1 (bn\varepsilon + (n\varepsilon)^2) RT = c_1 R \omega^2 T n\varepsilon (b + n\varepsilon).$$

Тогда с учётом неравенств (10.29), (10.30) получаем, что оценка (10.28) будет выглядеть следующим образом:

$$\|\mu(v)\| \leq c_1 R (\omega + 2) \varepsilon^2 + (\omega + 1) \varepsilon + c_1 R \omega^2 T n\varepsilon (b + n\varepsilon). \quad (10.31)$$

Шаг 3. Проведём оценку для $\|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\|$.

Учтя (10.13), получим, что

$$\begin{aligned} \|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\| &\leq \omega^2 \left\| \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \times \right. \\ &\times \left. \int_a^b G(r, y) [y(\tilde{v}_1(y, s) - \tilde{v}_2(y, s)) + \tilde{v}_1^2(y, s) - \tilde{v}_2^2(y, s)] dy \right\| \leq \\ &\leq \omega^2 T c_1 R (b \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| + \|\tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2\|). \end{aligned}$$

В дальнейшем примем во внимание, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2\| &\leq \|(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2)(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)\| \leq \|\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2\| \cdot \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \leq \\ &\leq \underbrace{(\|\tilde{v}_1\| + \|\tilde{v}_2\|)}_{\leq 2n\varepsilon} \cdot \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \leq 2n\varepsilon \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \end{aligned}$$

в результате чего выводится оценка

$$\begin{aligned} \|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\| &\leq \omega^2 T c_1 R (b \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| + 2n\varepsilon \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|) = \\ &= c_1 R \omega^2 T (b + 2n\varepsilon) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Шаг 4. С учётом (10.26), (10.31), (10.32) и переобозначения v на $\tilde{v}_1$ в нера-

венстве (10.31) имеем:

$$\begin{aligned}
& \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| \leq c_2 \left(c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R\omega^2 T n \varepsilon (b + n\varepsilon) \right) \times \\
& \times \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| + 2c_1 R\omega^2 T (b + 2n\varepsilon) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| = \\
& = \left[c_2 \left(c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R\omega^2 T n \varepsilon (b + n\varepsilon) \right) + \right. \\
& \left. + 2c_1 R\omega^2 T (b + 2n\varepsilon) \right] \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| = c_3(\varepsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|.
\end{aligned} \tag{10.33}$$

В результате мы доказали оценку (10.24).

Следствие 3. Оператор A непрерывен при действии из $B_{n\varepsilon}$ в $B_{n\varepsilon}$, поскольку для любых $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\varepsilon}$ выполнена импликация

$$\|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \longrightarrow +0 \implies \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| \leq c_3(\varepsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \longrightarrow +0.$$

Шаг 5. Проведём оценку для $\|A(v)\|$:

$$\begin{aligned}
\|A(v)\| &= \|\widehat{F}^{-1}(v)[\mu(v)]\| \leq \|\widehat{F}^{-1}(v)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\mu(v)\| \leq \\
&\leq 2 \left(c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R\omega^2 T n \varepsilon (b + n\varepsilon) \right) = c_4(\varepsilon, T),
\end{aligned}$$

где были применены (10.27) и (10.31).

В результате мы доказали оценку (10.25).

Лемма доказана полностью.

Определим оператор H :

$$H[v](r, t) := v_0(r) + \int_0^t A(v)(r, s) ds.$$

Перепишем задачу (10.23) в следующем эквивалентном виде:

$$v(r, t) = H[v](r, t).$$

В обозначениях абстрактных функций и, соответственно, абстрактного инте-

грального уравнения Вольтерры 2 рода данная задача примет вид

$$v(t) = v_0 + \underbrace{\int_0^t A(v)(s) ds}_{=H[v](t)}. \quad (10.34)$$

Докажем однозначную локальную разрешимость данного уравнения методом сжимающих отображений, выбрав соответствующие значения $\varepsilon > 0$, $T > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что в силу общих свойств метрических пространств ранее указанное множество $B_{n\varepsilon}$ само является полным метрическим пространством относительно расстояния, порождённого нормой пространства $\mathbb{B}$ (см., например, работу [48]). Поэтому нам потребуется, чтобы оператор H :

- 1) действовал из $B_{n\varepsilon}$ в $B_{n\varepsilon}$;
- 2) являлся сжимающим на $B_{n\varepsilon}$.

Шаг 1. Доказывая пункт 1), оценим $\|H[v]\|$:

$$\begin{aligned} \|H[v]\| &= \left\| v_0 + \int_0^t A(v)(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \|v_0\| + T\|A(v)\| \leq \varepsilon + Tc_4(\varepsilon, T), \end{aligned} \quad (10.35)$$

где была использована оценка (10.25) леммы 10.2 и неравенство $\|v_0\| \leq \varepsilon$. Пусть $\varepsilon + Tc_4(\varepsilon, T) \leq n\varepsilon$. Тогда из (10.35) сразу имеем, что $\|H[v]\| \leq n\varepsilon$, а также

$$\begin{aligned} Tc_4(\varepsilon, T) &\leq (n-1)\varepsilon \iff \\ \iff 2T\left(c_1R(\omega+2)\varepsilon^2 + (\omega+1)\varepsilon + c_1R\omega^2Tn\varepsilon(b+n\varepsilon)\right) &\leq (n-1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как

$$2T(\omega+1)\varepsilon < 2T\left(c_1R(\omega+2)\varepsilon^2 + (\omega+1)\varepsilon + c_1R\omega^2Tn\varepsilon(b+n\varepsilon)\right) \leq (n-1)\varepsilon,$$

то

$$2T(\omega+1)\varepsilon < (n-1)\varepsilon \iff n > 2T(\omega+1) + 1.$$

Тогда при фиксированном $T > 0$ и фиксированном $n \in \mathbb{N}$, которые удовлетворяют неравенству $n > 2T(\omega + 1) + 1$, а также при малом $\varepsilon > 0$ таком, что

$$2c_1 R n \varepsilon \leq \frac{1}{2}, \quad T c_4(\varepsilon, T) \leq (n - 1)\varepsilon,$$

оператор H действует из $B_{n\varepsilon}$ в $B_{n\varepsilon}$.

Шаг 2. Для доказательства пункта 2) используем то, что для всяких $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\varepsilon}$ верно неравенство

$$\begin{aligned} \|H[\tilde{v}_1] - H[\tilde{v}_2]\| &\leq \left\| \int_0^t \left(A(\tilde{v}_1)(s) - A(\tilde{v}_2)(s) \right) ds \right\| \leq \\ &\leq T \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| \leq T c_3(\varepsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \end{aligned}$$

где была использована оценка (10.24) леммы 10.2. Потребуем выполнение неравенства $T c_3(\varepsilon, T) \leq \frac{1}{2}$ при достаточно малых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ и фиксированном $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющем неравенству $n > 2T(\omega + 1) + 1$. Тогда оператор H будет сжимающим на $B_{n\varepsilon}$.

В результате была доказана

Лемма 10.3. Пусть $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ – произвольные достаточно малые и $n \in \mathbb{N}$ – произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $n > 2T(\omega + 1) + 1$, причём малость ε и T определяется одновременным выполнением следующих условий:

$$2c_1 R n \varepsilon \leq \frac{1}{2}, \quad T c_3(\varepsilon, T) \leq \frac{1}{2}, \quad T c_4(\varepsilon, T) \leq (n - 1)\varepsilon.$$

Тогда оператор H действует из $B_{n\varepsilon}$ в $B_{n\varepsilon}$ и является сжимающим на $B_{n\varepsilon}$.

Из теоремы о сжимающих отображениях и равенств $\|v_0\| = \|v_0\|_{C[a,b]}$ и $\|v_1\| = \|v_1\|_{C[a,b]}$ вытекает

Теорема 10.1. Для достаточно малых $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ при начальных данных $v_0, v_1 \in C[a, b]$ таких, что

$$\|v_0\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon, \quad \|v_1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon,$$

существует и единственно решение интегрального уравнения (10.34) в классе функций $v \in \mathbb{B} = C([0, T]; C[a, b])$.

Как и в статьях [18] и [51], повысим через «бутстрэп»-метод гладкость решения уравнения (10.34). Так как в правой части уравнения имеется под интегралом непрерывная по времени функция (с учётом непрерывности оператора A согласно следствию 3), интеграл является непрерывно дифференцируемым по t . В левой части стоит функция v , поэтому $v \in C^{(1)}([0, T]; C[a, b])$, при этом

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= A(v) = \widehat{F}^{-1}(v)[\mu(v)] = \\ &= \left(I - \widehat{K}(v) * \right)^{-1} [\mu(v)] = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v) *]^m \right) \mu(v), \\ \mu(v)(r, t) &= \left[\omega \left(\int_a^b G(r, y) v_0^2(y) dy - v_0(r) \right) \sin \omega t + \right. \\ &+ \left(v_1(r) - 2 \int_a^b G(r, y) v_0(y) v_1(y) dy \right) \cos \omega t - \\ &\left. - \omega^2 \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (y v(y, s) + v^2(y, s)) dy \right]. \end{aligned} \quad (10.36)$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v) *]^m \right) \mu(v) \quad (10.37)$$

относительно функции $v \in C^{(1)}([0, T]; C[a, b])$ с начальным условием $v(0) = v_0 \in C[a, b]$.

С учётом явного вида (10.36) для $\mu(v)$ верно

$$\mu(v) \in C^{(1)}([0, T]; C[a, b]). \quad (10.38)$$

Кроме того, оператор $\widehat{K}(v)*$, вообще говоря, при фиксированной v и фикс-

сированном $r \in [a, b]$ можно рассматривать как элемент банаховой алгебры $\mathcal{L}(C[0, T], C[0, T])$ линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве $C[0, T]$ (данный оператор непрерывен, поскольку он линейный при фиксированной v и ранее была доказана его ограниченность).

Поскольку согласно результатам работы [52] степенной операторный ряд $\sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v) *]^m$ в банаховой алгебре $\mathcal{L}(C[0, T], C[0, T])$ непрерывно дифференцируем по $t \in [0, T]$ по Фреше внутри шара сходимости

($\|\widehat{K}(v) * \|_{C[0, T] \rightarrow C[0, T]} \leq \|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \frac{1}{2} < 1$ согласно доказанному ранее), то

$$\sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v) *]^m = (I - \widehat{K}(v) *)^{-1} \in C^{(1)}([0, T]; \mathcal{L}(C[0, T], C[0, T])). \quad (10.39)$$

Согласно результатам (10.38) и (10.39), с учётом вида абстрактного уравнения (10.37) верно то, что

$$\frac{dv}{dt} \in C^{(1)}([0, T]; C[a, b]),$$

а также $v \in C^{(2)}([0, T]; C[a, b])$.

Согласно ранее проведённым выкладкам, абстрактное уравнение (10.37) эквивалентно уравнению (10.7), которое можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} v(r, t) = & \widehat{G}(v^2(r, t)) + \left(v_0(r) - \widehat{G}(v_0^2(r)) \right) \cos \omega t + \\ & + \frac{1}{\omega} \left(v_1(r) - 2\widehat{G}(v_0(r)v_1(r)) \right) \sin \omega t - \\ & - \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \widehat{G}(rv(r, s) + v^2(r, s)) ds. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Так как $v_0, v_1 \in C[a, b]$ и $C^{(2)}[a, b] \subset C[a, b]$, то предположим, что $v_0, v_1 \in C^{(2)}[a, b]$. Введём оператор вложения $\widehat{J}: C^{(2)}[a, b] \rightarrow C[a, b]$. С учётом того, что $v \in C^{(2)}([0, T]; C[a, b])$ и $v_0, v_1 \in C^{(2)}[a, b]$, нижеприведённые функции

принадлежат следующим классам:

$$\begin{aligned}
 v^2 &\in C^{(2)}([0, T]; C[a, b]), \\
 v_0^2 &\in C^{(2)}[a, b], \quad v_0 \cdot v_1 \in C^{(2)}[a, b], \\
 rv &\in C^{(2)}([0, T]; C[a, b]), \\
 rv + v^2 &\in C^{(2)}([0, T]; C[a, b]).
 \end{aligned} \tag{10.41}$$

Принимая во внимание (10.41) и оператор вложения $\widehat{J}$, перепишем уравнение (10.40) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 v(r, t) &= \widehat{G}(v^2(r, t)) + \left(v_0(r) - \widehat{G}\widehat{J}[v_0^2(r)] \right) \cos \omega t + \\
 &+ \frac{1}{\omega} \left(v_1(r) - 2\widehat{G}\widehat{J}[v_0(r)v_1(r)] \right) \sin \omega t - \\
 &- \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \widehat{G}(rv(r, s) + v^2(r, s)) ds.
 \end{aligned} \tag{10.42}$$

Согласно свойствам функции Грина, $\widehat{G} : C[a, b] \rightarrow C^{(2)}[a, b]$, при этом $\widehat{G}$ является непрерывным оператором. В результате (10.41) и вида уравнения (10.42) делаем вывод о том, что правая часть уравнения принадлежит классу $C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$. Значит, и левая часть должна принадлежать данному классу, то есть $v \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$. Так как задачи (10.5), (10.7), (10.37), (10.40) и (10.42) эквивалентны, то задача (10.5) локально разрешима в классе $v \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$ при некотором $T > 0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$, при этом начальные условия $v_0, v_1 \in C^{(2)}[a, b]$ такие, что $\|v_0\|_{C[a, b]} \leq \varepsilon$ и $\|v_1\|_{C[a, b]} \leq \varepsilon$.

Так как

$$u = \frac{v}{r} \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$$

в результате того, что $0 < a < b$, и задачи (10.4), (10.5) эквивалентны, то справедлива

Теорема 10.2. *Найдётся такое $T > 0$ и достаточно малое $\varepsilon > 0$, что при*

начальных функций $u_0, u_1 \in C^{(2)}[a, b]$:

$$\|ru_0\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon, \quad \|ru_1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon,$$

которые удовлетворяют граничным условиям

$$u_{0r}(a) = u_{0r}(b) = u_{1r}(a) = u_{1r}(b) = 0,$$

существует единственное классическое решение задачи (10.4) в классе $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$.

10.4. Априорная верхняя оценка для времени существования решения

В данном разделе по аналогии с работами [19] и [18] используем метод пробных функций для нахождения верхней оценки времени существования классического решения задачи (10.4).

Справедлива следующая

Теорема 10.3. Если $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$ — единственное классическое решение задачи (10.4), то при выполнении достаточного условия

$$\int_a^b r^2 u_1(r) \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) dr < 0 \quad (10.43)$$

время T существования классического решения задачи (10.4) конечно и имеет место следующая априорная оценка сверху:

$$T \leq - \frac{\int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr}{2 \int_a^b r^2 u_1(r) \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) dr}. \quad (10.44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим основное уравнение (10.4) на пробную функцию $\phi(r) = r^2$ и проинтегрируем по отрезку $r \in [a, b]$, учитывая, что в получившихся собственных интегралах, зависящих от параметра t , можно менять

порядок дифференцирования и интегрирования вследствие принадлежности $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left(\frac{2u_r(r, t)}{r} + u_{rr}(r, t) - u(r, t) \right) \phi(r) dr + \\
& + \omega^2 \int_a^b \left(\frac{2u_r(r, t)}{r} + u_{rr}(r, t) \right) \phi(r) dr = \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b u^2(r, t) \phi(r) dr \iff \\
& \iff \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left(2ru_r(r, t) + r^2u_{rr}(r, t) - r^2u(r, t) - r^2u^2(r, t) \right) dr + \\
& + \omega^2 \int_a^b \left(2ru_r(r, t) + r^2u_{rr}(r, t) \right) dr = 0.
\end{aligned} \tag{10.45}$$

С учётом граничных условий задачи (10.4) справедливо равенство

$$\int_a^b \left(2ru_r(r, t) + r^2u_{rr}(r, t) \right) dr = \int_a^b \frac{\partial(r^2u_r(r, t))}{\partial r} dr = r^2u_r(r, t) \Big|_{r=a}^{r=b} = 0. \tag{10.46}$$

Учитывая (10.46), перепишем (10.45) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left(r^2u^2(r, t) + r^2u(r, t) \right) dr = 0 \iff \\
& \iff \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left(r^2u^2(r, t) + r^2u(r, t) \right) dr = 0.
\end{aligned} \tag{10.47}$$

Примем во внимание, что

$$r^2u^2(r, t) + r^2u(r, t) = r^2(u^2(r, t) + u(r, t)) = r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{r^2}{4}. \tag{10.48}$$

Так как

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \frac{r^2}{4} dr = 0,$$

то, учитывая (10.48), перепишем (10.47):

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_a^b r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr = 0. \quad (10.49)$$

Введём обозначение

$$I(t) := \int_a^b r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr.$$

Тогда с учётом (10.49) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$I''(t) = 0,$$

для которого общее решение имеет вид

$$I(t) = \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_2. \quad (10.50)$$

Найдём начальные условия $I(0)$, $I'(0)$ с учётом начальных условий задачи (10.4). Во-первых,

$$I(0) = \int_a^b r^2 \left(u(r, 0) + \frac{1}{2} \right)^2 dr = \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr =: I_0. \quad (10.51)$$

Во-вторых,

$$I'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 \right) dr =$$

$$= 2 \int_a^b r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right) u_t(r, t) dr,$$

в результате чего

$$I'(0) = 2 \int_a^b r^2 \left(u(r, 0) + \frac{1}{2} \right) u_t(r, 0) dr = 2 \underbrace{\int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr}_{=: I_1}. \quad (10.52)$$

С учётом общего решения (10.50) и начальных условий (10.51), (10.52) находим, что $\tilde{C}_1 = I_1$, $\tilde{C}_2 = I_0$ и

$$I(t) = \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr + 2t \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr.$$

В то же время, так как

$$I(t) = \int_a^b r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr \geq 0,$$

имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr + 2t \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr \geq 0 \iff \\ & \iff 2t \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr \geq - \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr, \end{aligned}$$

которое справедливо для любого $t \in [0, T]$. В частности, при $t = T$ имеем:

$$2T \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr \geq - \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr.$$

Поделим имеющееся неравенство на

$$\int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr < 0.$$

В результате имеем то, что

$$T \leqslant - \frac{\int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr}{2 \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr}.$$

Теорема полностью доказана.

Отметим, что в данном случае получен результат об отсутствии глобальных решений. Автор диссертации в следующей главе с помощью численной диагностики покажет, что это приводит к разрушению решения и так называемому эффекту «black hole» для потенциала. Тем не менее, этот эффект удаётся получить аналитически в частном случае.

10.5. Пример разрушения решения начально-краевой задачи и его физическая интерпретация

Рассмотрим частный случай в задаче (10.4), когда

$$u_0 \equiv 0, \quad u_1 \equiv -1.$$

Очевидно, что такие начальные функции удовлетворяют достаточному условию (10.43) и граничным условиям задачи, а также принадлежат классу $C^{(2)}[a, b]$. Решение задачи в данном случае не зависит от r и находится аналитически:

$$u(r, t) = u(t) = \sqrt{\frac{1}{4} - t} - \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что решение класса $C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$ данной задачи существует на любом множестве $(r, t) \in [a, b] \times [0, T]$, где $T \in (0, \frac{1}{4})$. В частности,

априорная верхняя оценка (10.44) для времени существования решения даёт в данном случае результат $T \leq \frac{1}{4}$, который согласуется с полученным результатом из непосредственно найденного решения. Кроме того, очевидно, что в данном случае время $T_0 = \frac{1}{4}$ является временем разрушения решения, так как при $T \geq T_0$ решение u покидает класс $C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$. Отметим, что само разрушение решения рассматривается в смысле нормы $\| \cdot \|_{2,T}$ пространства $C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$:

$$\sup_{T \uparrow T_0} \|u\|_{2,T} = +\infty, \quad (10.53)$$

что является разрушением, именуемым в литературе «жёсткий blow-up».

Если рассматривать данный пример с точки зрения физики, то в момент времени $T_0 = \frac{1}{4}$ значение потенциала электрического поля ионно-звуковых волн в плазме остаётся конечным, так как

$$\varphi(r, T_0) = \text{const}, \text{ но } \lim_{t \uparrow T_0} \varphi_t(r, t) = -\infty,$$

то есть скорость убывания потенциала обращается в минус бесконечность. Такой эффект в физике называется эффектом «black hole» для потенциала, при котором потенциал электрического поля ионно-звуковых волн в плазме является ограниченным, имея при этом бесконечную скорость. Таким образом, в данном случае происходит «жёсткий blow-up» по типу «black hole».

Численное исследование начально-краевой задачи

В данной главе мы обсудим, как получить численное решение начально-краевой задачи (10.4) и как численно диагностировать момент разрушения данной задачи.

11.1. Сведение задачи к системе дифференциально-алгебраических уравнений

Поскольку в дальнейшем мы будем использовать нижние индексы для сеточных значений функции, далее вместо начальных функций u_0 и u_1 будем писать u_{init_0} и u_{init_1} соответственно. Верхнюю оценку времени существования решения обозначим через T_{up} :

$$T_{up} = - \frac{\int_a^b r^2 \left(u_{init_0}(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr}{2 \int_a^b r^2 \left(u_{init_0}(r) + \frac{1}{2} \right) u_{init_1}(r) dr} \quad (11.1)$$

при достаточном условии

$$\int_a^b r^2 \left(u_{init_0}(r) + \frac{1}{2} \right) u_{init_1}(r) dr < 0, \quad (11.2)$$

а также условия согласования

$$(u_{init_0})_r(a) = (u_{init_0})_r(b) = (u_{init_1})_r(a) = (u_{init_1})_r(b) = 0. \quad (11.3)$$

Для численного счёта нам необходима следующая постановка начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta_r u - u - u^2) + \omega^2 \Delta_r u = 0, & (r, t) \in (a, b) \times (0, T_{up}], \\ u(r, 0) = u_{init_0}(r), \quad u_t(r, 0) = u_{init_1}(r), & r \in [a, b], \\ u_r(a, t) = u_r(b, t) = 0, & t \in [0, T_{up}], \end{cases} \quad (11.4)$$

где $0 < a < b$, $\Delta_r u = \frac{2u_r}{r} + u_{rr}$. Как мы знаем из предыдущей главы, классическое решение $u \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[a, b])$ задачи (11.4) при достаточном условии (11.2) существует только на отрезке $t \in [0, T]$, где $T \leq T_{up}$. Хотя классическое решение может не существовать на всём отрезке $t \in [0, T_{up}]$, мы ставим задачу именно на этом отрезке. Такое допущение необходимо, чтобы численно диагностировать момент разрушения решения.

Введём вспомогательные функции $w := \frac{2u_r}{r} + u_{rr} - u - u^2$ и $v := \frac{\partial w}{\partial t}$. Тогда задача (11.4) сведётся к следующей системе дифференциально-алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2u_r}{r} + u_{rr} - u - u^2 - w, \quad r \in (a, b), \quad t \in (0, T_{up}], \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\omega^2(u + u^2 + w), \quad r \in (a, b), \quad t \in (0, T_{up}], \\ \\ \frac{\partial w}{\partial t} = v, \quad r \in (a, b), \quad t \in (0, T_{up}], \\ \\ u(r, 0) = u_{init_0}(r), \quad r \in [a, b], \\ \\ v(r, 0) = \frac{2u_{init_1}(r)_r}{r} + u_{init_1}(r)_{rr} - u_{init_1}(r) - 2u_{init_0}(r)u_{init_1}(r), \quad r \in [a, b], \\ \\ w(r, 0) = \frac{2u_{init_0}(r)_r}{r} + u_{init_0}(r)_{rr} - u_{init_0}(r) - u_{init_0}^2(r), \quad r \in [a, b], \\ \\ u_r(a, t) = u_r(b, t) = 0, \quad t \in [0, T_{up}]. \end{array} \right. \quad (11.5)$$

11.2. Метод прямых

Отметим, что в дальнейшем, в целях упрощения обозначений, численное решение, как и аналитическое, мы временно будем обозначать через u . Чтобы решить систему (11.5), мы применим жёсткий метод прямых (SMOL) [53, 54]. Для этого сделаем частичную дискретизацию, то есть введём равномерную

сетку Ω_N только по пространственной переменной r с шагом $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, содержащую $N + 1$ узлов (что соответствует N интервалам): $\Omega_N = \{r_n, n = \overline{0, N} : r_n = a + nh\}$. Введём функции u_n, v_n, w_n : $u_n(t) := u(r_n, t)$, $v_n(t) := v(r_n, t)$, $w_n(t) := w(r_n, t)$ при $n = \overline{0, N}$. Таким образом, после конечно-разностной аппроксимации пространственных производных со вторым порядком аппроксимации в (11.5) мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, из которой требуется определить $N - 1$ неизвестных функций u_n ($n = \overline{1, N - 1}$, u_0 и u_N определяются из соотношений, заданных конечно-разностными аппроксимациями граничных условий Неймана со вторым порядком аппроксимации: $u_0 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2$, $u_N = \frac{4}{3}u_{N-1} - \frac{1}{3}u_{N-2}$), $N - 1$ вспомогательных функций v_n ($n = \overline{1, N - 1}$, v_0 и v_N не входят в систему) и $N - 1$ вспомогательных функций w_n ($n = \overline{1, N - 1}$, w_0 и w_N не входят в систему):

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \frac{du_n}{dt} = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{r_n h} + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} - u_n - u_n^2 - w_n, \\ \\ \frac{dv_n}{dt} = -\omega^2(u_n + u_n^2 + w_n), \\ \\ \frac{dw_n}{dt} = v_n, \\ \\ u_n(0) = u_{init_0}(r_n), \\ \\ v_n(0) = \frac{u_{init_1}(r_{n+1}) - u_{init_1}(r_{n-1})}{r_n h} + \frac{u_{init_1}(r_{n+1}) - 2u_{init_1}(r_n) + u_{init_1}(r_{n-1})}{h^2} - \\ - u_{init_1}(r_n) - 2u_{init_0}(r_n)u_{init_1}(r_n), \\ \\ w_n(0) = \frac{u_{init_0}(r_{n+1}) - u_{init_0}(r_{n-1})}{r_n h} + \frac{u_{init_0}(r_{n+1}) - 2u_{init_0}(r_n) + u_{init_0}(r_{n-1})}{h^2} - \\ - u_{init_0}(r_n) - u_{init_0}^2(r_n), \\ \\ u_0 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2, \\ \\ u_N = \frac{4}{3}u_{N-1} - \frac{1}{3}u_{N-2}. \end{array} \right. \quad (11.6)$$

Данная система может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_{init}, \\ u_0 = \frac{4}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2, \\ u_N = \frac{4}{3}y_{N-1} - \frac{1}{3}y_{N-2}, \end{cases} \quad (11.7)$$

где $\mathbf{y} := (u_1, u_2, u_3, \dots, u_{N-1}, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N-1}, w_1, w_2, w_3, \dots, w_{N-1})^T$, $\mathbf{f} := (f_1, f_2, f_3, \dots, f_{3N-3})^T$, $\mathbf{y}_{init} := (u_1(0), u_2(0), u_3(0), \dots, u_{N-1}(0), v_1(0), v_2(0), v_3(0), \dots, v_{N-1}(0), w_1(0), w_2(0), w_3(0), \dots, w_{N-1}(0))^T$, вектор-функция $\mathbf{f}$ имеет следующую структуру:

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{r_1 h} \left(y_2 - \left(\frac{4}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \right) \right) + \frac{1}{h^2} \left(y_2 - 2y_1 + \left(\frac{4}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \right) \right) - \\ - y_1 - y_1^2 - y_{2N-1}, \quad \text{если } n = 1, \\ \\ \frac{1}{r_n h} \left(y_{n+1} - y_{n-1} \right) + \frac{1}{h^2} \left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} \right) - \\ - y_n - y_n^2 - y_{n+2N-2}, \quad \text{если } n = \overline{2, N-2}, \\ \\ \frac{1}{r_{N-1} h} \left(\left(\frac{4}{3}y_{N-1} - \frac{1}{3}y_{N-2} \right) - y_{N-2} \right) + \frac{1}{h^2} \left(\left(\frac{4}{3}y_{N-1} - \frac{1}{3}y_{N-2} \right) - \right. \\ \left. - 2y_{N-1} + y_{N-2} \right) - y_{N-1} - y_{N-1}^2 - y_{3N-3}, \quad \text{если } n = N-1, \\ \\ -\omega^2(y_{n-N+1} + y_{n-N+1}^2 + y_{n+N-1}), \quad \text{если } n = \overline{N, 2N-2}, \\ \\ y_{n-N+1}, \quad \text{если } n = \overline{2N-1, 3N-3}, \end{cases}$$

а матрица $\mathbf{K}$ имеет следующие элементы:

$$K_{n,n} = 1, \text{ если } n = \overline{N, 3N-3}.$$

Остальные элементы матрицы $\mathbf{K}$ равны нулю.

11.3. Одностадийная схема Розенброка с комплексным коэффициентом

Задача (11.7) является жёсткой задачей. Для её численного решения наилучшим выбором является одностадийная схема Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS1), обладающая монотонностью и $L2$ —устойчивостью [55]. Важно отметить, что в нашем случае схема CROS1 имеет точность $O(\tau^2)$, так как матрица $\mathbf{K}$ постоянна [56, 57].

Чтобы применить CROS1, введём равномерную сетку $\mathcal{T}_M$ по времени t с $M+1$ узлами (M интервалами, $M \in \mathbb{N}$) и шагом $\tau = \frac{T_{up}-0}{M}$: $\mathcal{T}_M = \{t_m, m = \overline{0, M} : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = T_{up}\}$.

Далее для каждого фиксированного $m = \overline{0, M-1}$ применим схему CROS1 для решения системы (11.7):

$$\mathbf{y}(t_{m+1}) = \mathbf{y}(t_m) + \tau \operatorname{Re} \mathbf{z}, \quad (11.8)$$

где $\mathbf{z}$ является решением системы

$$\left[\mathbf{K} - \frac{1+i}{2} \tau \mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}(t_m)) \right] \mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t_m)), \quad (11.9)$$

а матрица Якоби $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}(t_m))$ для данной системы имеет следующую структуру:

$$(f_y)_{n,n-1} = \begin{cases} -\frac{1}{r_n h} + \frac{1}{h^2}, & \text{если } n = \overline{2, N-2}, \\ -\frac{1}{3r_{N-1}h} - \frac{1}{r_{N-1}h} - \frac{1}{3h^2} + \frac{1}{h^2}, & \text{если } n = N-1, \end{cases}$$

$$(f_y)_{n,n} = \begin{cases} -\frac{4}{3r_1h} - \frac{2}{h^2} + \frac{4}{3h^2} - 1 - 2y_1, & \text{если } n = 1, \\ -\frac{2}{h^2} - 1 - 2y_n, & \text{если } n = \overline{2, N-2}, \\ \frac{4}{3r_{N-1}h} + \frac{4}{3h^2} - \frac{2}{h^2} - 1 - 2y_{N-1}, & \text{если } n = N-1, \end{cases}$$

$$(f_y)_{n,n+1} = \begin{cases} \frac{1}{r_1h} + \frac{1}{3r_1h} + \frac{1}{h^2} - \frac{1}{3h^2}, & \text{если } n = 1, \\ \frac{1}{r_nh} + \frac{1}{h^2}, & \text{если } n = \overline{2, N-2}, \end{cases}$$

$$(f_y)_{n,n+2N-2} = -1, \quad \text{если } n = \overline{1, N-1},$$

$$(f_y)_{n,n-N+1} = \begin{cases} -\omega^2(1 + 2y_{n-N+1}), & \text{если } n = \overline{N, 2N-2}, \\ 1, & \text{если } n = \overline{2N-1, 3N-3}, \end{cases}$$

$$(f_y)_{n,n+N-1} = -\omega^2, \quad \text{если } n = \overline{N, 2N-2}.$$

Другие компоненты матрицы Якоби в данном случае равны нулю.

По данному алгоритму в итерационном процессе на каждом временном слое, за исключением последнего (при фиксированном $m = \overline{0, M-1}$), решается система (11.9), в результате чего находится $\mathbf{z}$, а далее находятся значения $\mathbf{y}(t_{m+1})$ по формуле (11.8). Наконец, каждая итерация завершается вычислением u_0 и u_N , исходя из соответствующих выражений в системе (11.7).

Отметим, что матрица системы (11.9) состоит из девяти блоков размерности $(N-1) \times (N-1)$ (см. рис. 11.1). Этот факт даёт возможность применить алгоритм решения СЛАУ, который найдёт решение системы (11.9) за $O(N)$ операций (его реализацию см. в Приложении А).

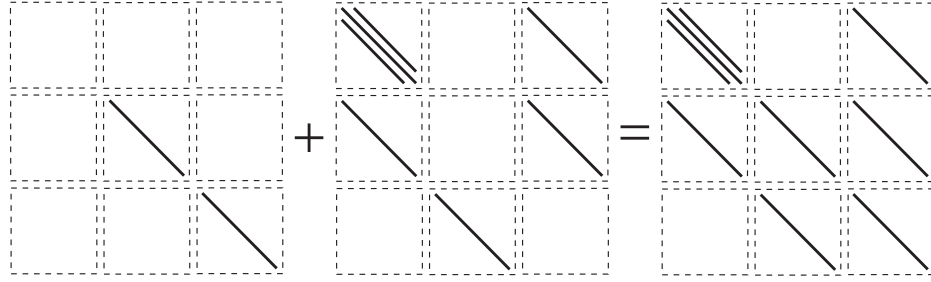


Рис. 11.1. Структура матрицы СЛАУ (11.9).

11.4. Численное диагностирование момента разрушения решения. Вычисления на сгущающихся сетках. Контроль точности по Ричардсону

Для диагностирования момента разрушения численного решения задачи (11.4) мы воспользуемся методикой Ричардсона по вычислению апостериорной асимптотически точной оценки погрешности (подробнее см. [56–58]).

Итак, при численном интегрировании системы (11.7) по времени t мы используем схему CROS1, которая в данном случае имеет точность $O(\tau^2)$. В то же время все производные по пространственной переменной r были аппроксимированы с точностью $O(h^2)$. В итоге построенный численный метод решения системы (11.7) имеет точность $O(\tau^2 + h^2)$.

Сначала введём базовую сетку $\Omega_N \times \mathcal{T}_M = \{r_n, t_m\}$, $0 \leq n \leq N$, $0 \leq m \leq M$. Численное решение на этой сетке обозначим через $u^{(N,M)}$. Далее проведём последовательное сгущение сетки, начиная с базовой, и найдём численные решения на полученных сетках. Так как теоретический порядок точности по времени и пространству равен $p_{theor} = 2$, то последовательное сгущение сетки по времени будет в $\tilde{r}_t$ раз ($\tilde{r}_t \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) и сгущение пространственной сетки будет в $\tilde{r}_x$ раз ($\tilde{r}_x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) так, чтобы выполнялось условие $\tilde{r}_t^{p_{theor}} = \tilde{r}_x^{p_{theor}}$ (подробнее см. [58]). Удобнее всего в нашем случае взять $\tilde{r}_t = \tilde{r}_x = 2$. Пусть s — номер сетки ($s = \overline{0, S}$, где $S + 1$ — максимальное число сеток, использующихся для вычислений, а $s = 0$ — номер базовой сетки). Численное решение на сгущенной сетке обозначим через $u^{(\tilde{r}_x^s N, \tilde{r}_t^s M)}$. Отметим, что каждая последующая сетка $\Omega_{\tilde{r}_x^s N} \times \mathcal{T}_{\tilde{r}_t^s M}$ (s — номер сетки) имеет узлы, совпадающие с узлами базовой сетки (r_n, t_m) (при $s = 0$). В этих узлах (r_n, t_m) мы выполним апостериорную асимптотически точную оценку

погрешности $\Delta^{(\tilde{r}_x^s N, \tilde{r}_t^s M)}$ по формуле Рунге — Ромберга:

$$\Delta^{(\tilde{r}_x^s N, \tilde{r}_t^s M)}(r, t) = \frac{u^{(\tilde{r}_x^s N, \tilde{r}_t^s M)}(r, t) - u^{(\tilde{r}_x^{s-1} N, \tilde{r}_t^{s-1} M)}(r, t)}{\tilde{r}_t^2 - 1} + O(\tau^2 + h^2).$$

Получив приближённое численное решение на разных сетках, мы можем проверить сходимость эффективного порядка точности p_s^{eff} к теоретическому для каждого временного слоя t_m по следующей формуле (подробнее см. [57, 58]):

$$p_s^{eff}(t_m) = \log_{\tilde{r}_t} \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^N \left(u^{(\tilde{r}_x^{s-1} N, \tilde{r}_t^{s-1} M)}(r_n, t_m) - u^{(\tilde{r}_x^{s-2} N, \tilde{r}_t^{s-2} M)}(r_n, t_m) \right)^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^N \left(u^{(\tilde{r}_x^s N, \tilde{r}_t^s M)}(r_n, t_m) - u^{(\tilde{r}_x^{s-1} N, \tilde{r}_t^{s-1} M)}(r_n, t_m) \right)^2}}, \quad (11.10)$$

где s — номер соответствующей сетки (при $s \geq 2$). Для расчёта и построения графиков мы выберем $s = S$, $S \geq 2$. Решение задачи (11.4) мы ищем классическое. На том временном слое t_m , где решение исходной задачи имеет непрерывные вторые производные по времени и пространству, имеет место сходимость

$$p_s^{eff}(t_m) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} p_{theor} = 2. \quad (11.11)$$

Если на временном слое t_m этой сходимости нет, то это означает, что решение задачи (11.4) становится неклассическим, то есть покидает тот класс, в котором решение исследовалось. А значит, это будет означать разрушение классического (численного) решения нашей задачи. Пусть на временном слое t_k имеет место сходимость (11.11), а на временном слое t_{k+1} отсутствует сходимость (11.11), $k \in \{0, \dots, M\}$. Тогда мы можем численно оценить время разрушения задачи T_0 :

$$T_0 \in (t_k, t_{k+1}], \text{ причём } T_0 \leq T_{up}.$$

Кроме того, нас также будет интересовать тип разрушения. Как было ранее отмечено, в задачах, подобных задаче Коши 3 и начально-краевой за-

даче (10.4) или (11.4), возникает разрушение решения по типу «black hole», когда само решение u в момент разрушения T_0 остаётся ограниченным по норме некоторого банахова пространства, а частная производная u_t по норме данного пространства обращается в $+\infty$. Чтобы численно диагностировать и проиллюстрировать на графиках эффект «black hole», введём сеточную норму $\|\cdot\|_h$ для численного решения (рассматриваем его как абстрактную функцию) $u^{N,M}$:

$$\|u^{N,M}\|_h(t) := \max_{n \in \{0, \dots, N\}} |u^{N,M}(r_n, t)|, \quad t \in \mathcal{T}_M.$$

С помощью конечно-разностной аппроксимации, имея численное решение $u^{N,M}$, нетрудно вычислить частную производную $u_t^{N,M}$, которая аппроксимирует u_t с точностью $O(\tau^2)$. Далее можно вычислить сеточную норму

$$\|u_t^{N,M}\|_h(t) := \max_{n \in \{0, \dots, N\}} |u_t^{N,M}(r_n, t)|, \quad t \in \mathcal{T}_M.$$

Пусть время разрушения $T_0 \in (t_k, t_{k+1}]$, где $t_k, t_{k+1} \in \mathcal{T}_M$. Тогда разрушение численного решения происходит по типу «black hole», если норма $\|u_t^{N,M}\|_h(t_{k+1})$ принимает «достаточно большое» значение, чаще всего на несколько порядков большее, чем $\|u^{N,M}\|_h(t_{k+1})$. В таком случае $\|u_t^{N,M}\|_h(t_{k+1})$ имеет резкий скачок вверх при $t = t_{k+1}$, в то время как $\|u^{N,M}\|_h(t)$ не имеет резких скачков для всякого $t \in \mathcal{T}_M$. Тем не менее, пространственная производная u_r должна быть непрерывной при $t = t_{k+1}$ (это можно визуальнo определить по графику численного решения).

11.5. Численные эксперименты

Пример 1. Сначала рассмотрим тестовый пример со следующим набором входных данных:

$$\begin{aligned} u_{init_0}(r) &\equiv 0, \\ u_{init_1}(r) &\equiv -1, \\ a &= \pi, \quad b = 2\pi, \quad \omega = 1. \end{aligned}$$

Такие начальные функции удовлетворяют достаточному условию (11.2) и

условию согласования (11.3). Как уже было отмечено в главе 10, верхняя оценка времени существования решения здесь даёт результат $T_{up} = \frac{1}{4}$, а решение уравнения (11.4) может быть найдено аналитически:

$$u(r, t) = u(t) = \sqrt{\frac{1}{4} - t} - \frac{1}{2}.$$

Возьмём следующий набор параметров: $N = 50$, $M = 50$, $\tilde{r}_x = 2$, $\tilde{r}_t = 2$, $S = 5$.

Получаем следующее численное решение:

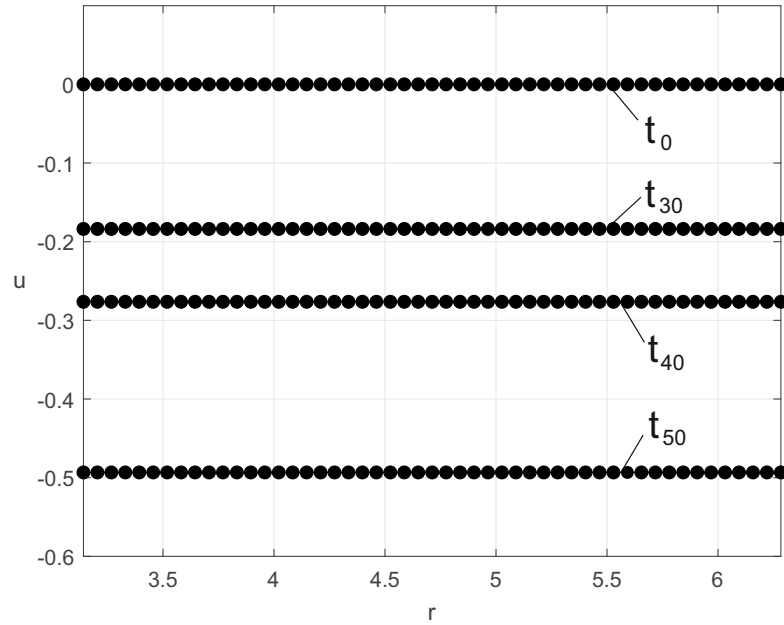


Рис. 11.2. Численное решение задачи (11.4) в примере 1 в моменты времени t_0 , t_{30} , t_{40} , t_{50} .

Пусть $err(r, t) := u(r, t) - u^{N, M}(r, t)$, $(r, t) \in \Omega_N \times \mathcal{T}_M$. Функция err , очевидно, необходима нам для сравнения численного решения с аналитическим. Для построения графика мы посчитаем сеточную норму

$$\|err\|_h(t) = \max_{n \in \{0, \dots, N\}} |err(r_n, t)|, \quad t \in \mathcal{T}_M.$$

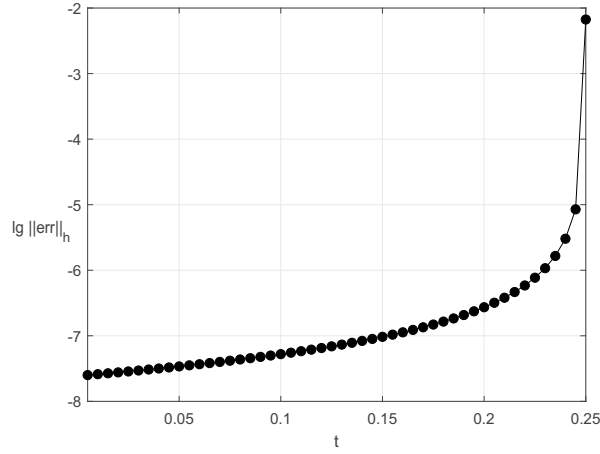


Рис. 11.3. Зависимость десятичного логарифма нормы ошибки для каждого временного слоя в примере 1.

По формуле (11.10) вычислим эффективные порядки точности p^{eff} при $s = S = 5$ и сравним их с теоретическими $p_{theor} = 2$:

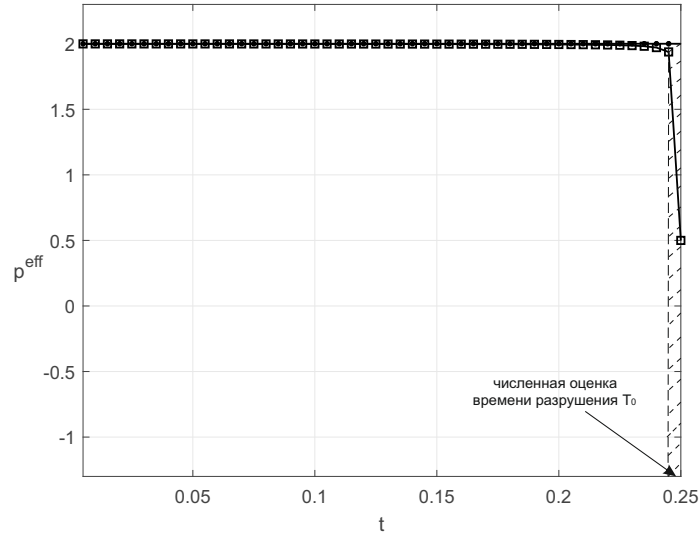


Рис. 11.4. Эффективный порядок точности для каждого временного слоя в примере 1.

Как видно, здесь разрушение решения диагностировано в точке $T_0 \in (t_{49}, t_{50}] \equiv (0.245, 0.250]$.

Далее методом конечных разностей найдём $u_t^{N,M}$. Чтобы численно диагностировать разрушение типа «black hole», построим графики сеточных норм для численного решения и его частной производной по времени:

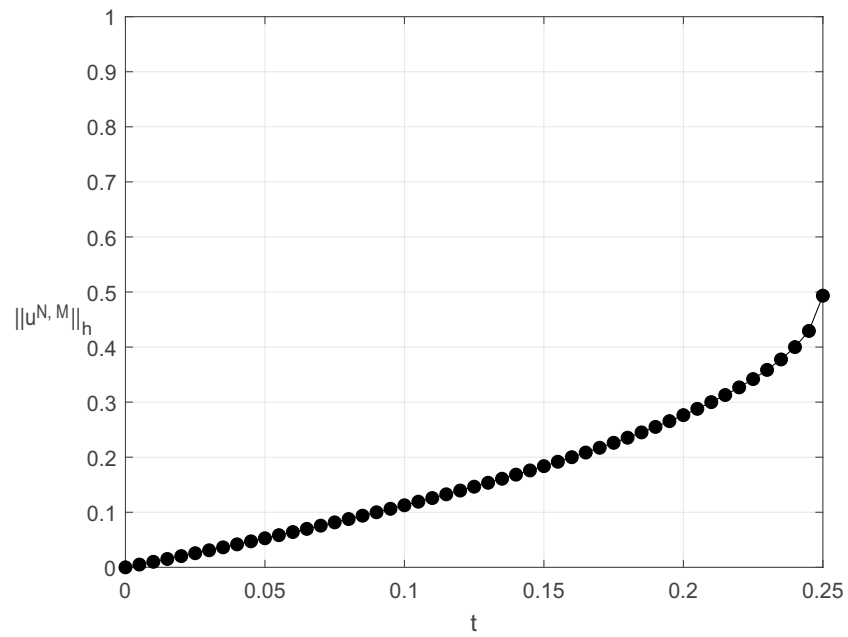


Рис. 11.5. Норма численного решения для каждого временного слоя в примере 1.

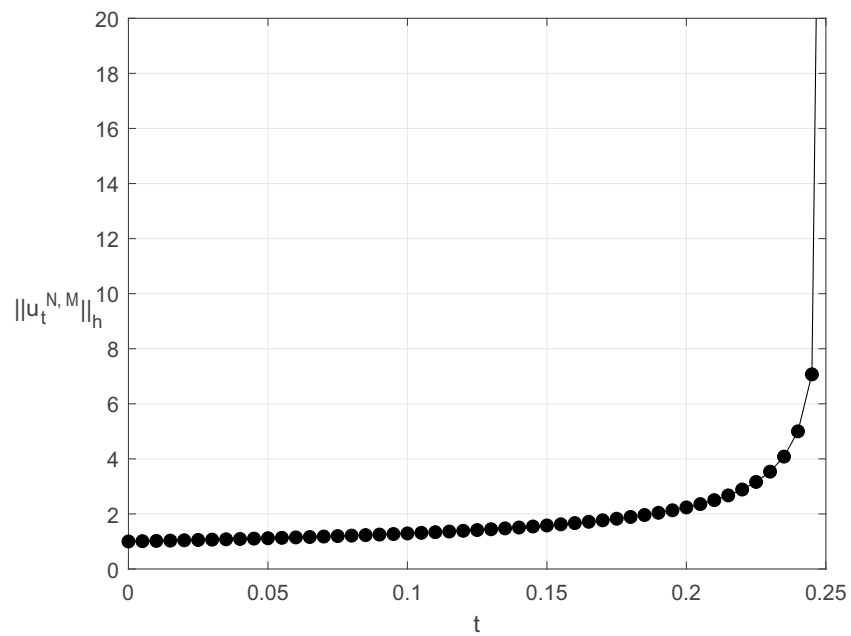


Рис. 11.6. Норма частной производной численного решения по t для каждого временного слоя в примере 1.

Согласно данным результатам, при $t_{50} = 0.25$ $\|u^{N,M}\|_h(t_{50}) = 0.493$ и $\|u_t^{N,M}\|_h(t_{50}) = 49.028$. При $t = t_{50}$ идёт резкий скачок нормы $\|u_t^{N,M}\|_h(t)$, хотя для $\|u^{N,M}\|_h(t)$ этого не наблюдается. Это и показывает численно разрушение типа «black hole».

Пример 2. Теперь рассмотрим пример с таким набором входных данных:

$$\begin{aligned} u_{init_0}(r) &= 2 \cos r, \\ u_{init_1}(r) &= -\cos r, \\ a &= \pi, \quad b = 2\pi, \quad \omega = 0.1. \end{aligned}$$

Такие начальные функции удовлетворяют достаточному условию (11.2) и условию согласования (11.3). Верхняя оценка (11.1) времени существования решения здесь даёт такой результат: $T_{up} \approx 1.222$. Возьмём следующий набор параметров: $N = 50$, $M = 50$, $\tilde{r}_x = 2$, $\tilde{r}_t = 2$, $S = 5$.

Вычисление эффективных порядков точности здесь даёт следующий результат:

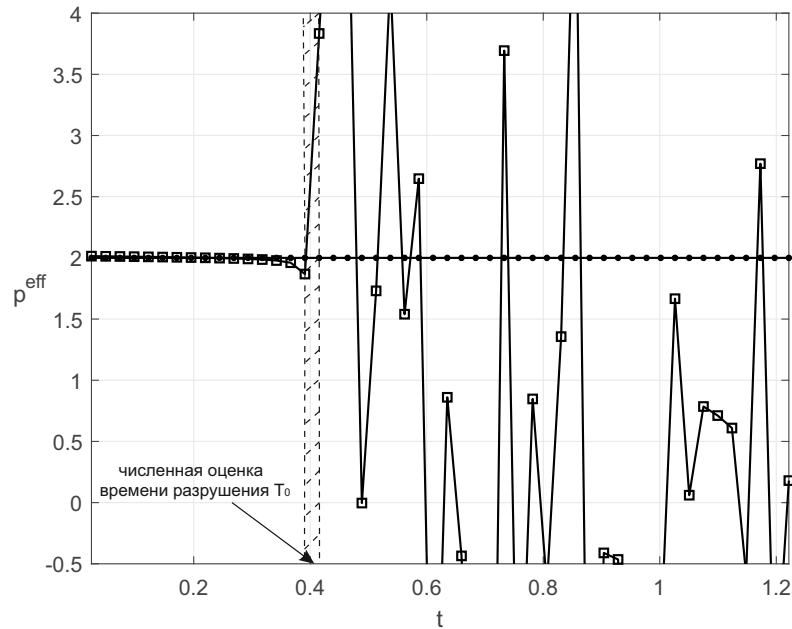


Рис. 11.7. Эффективный порядок точности для каждого временного слоя в примере 2.

Далее представим графики численного решения, а также ранее упомянутых сеточных норм до момента разрушения решения включительно:

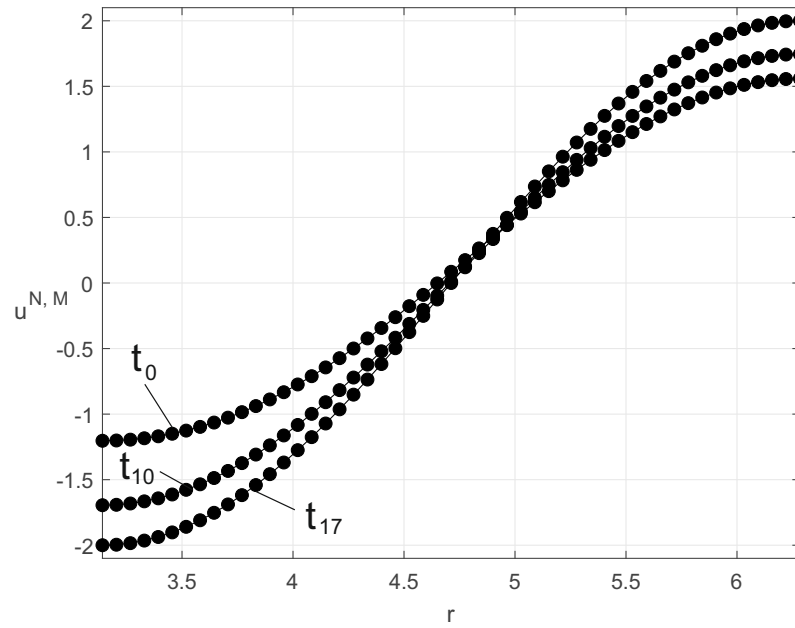


Рис. 11.8. Численное решение задачи (11.4) в примере 2 в моменты времени t_0 , t_{10} , t_{17} .

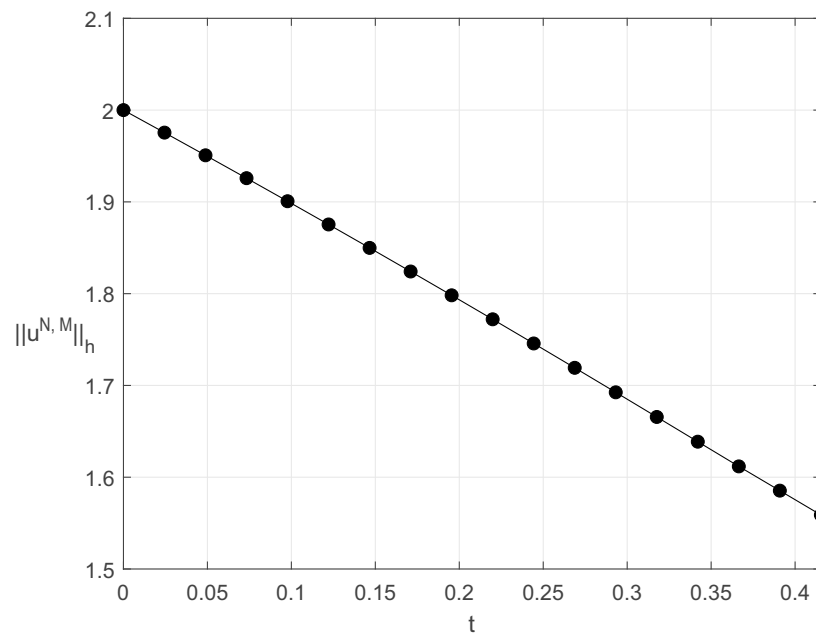


Рис. 11.9. Норма численного решения для каждого временного слоя (до момента разрушения включительно) в примере 2.

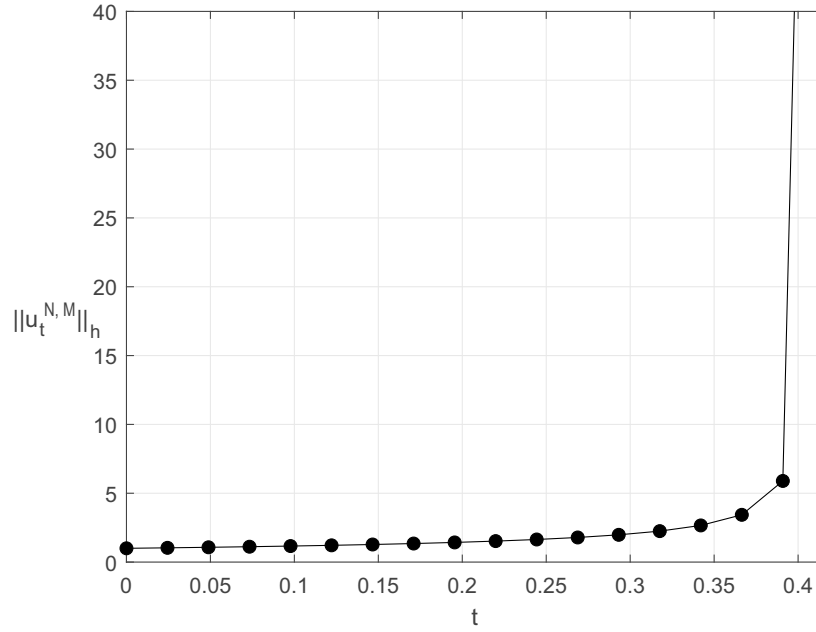


Рис. 11.10. Норма частной производной численного решения по t для каждого временного слоя (до момента разрушения включительно) в примере 2.

Согласно графикам 11.7 — 11.10, время разрушения $T_0 \in (t_{16}, t_{17}] \equiv \equiv (0.391, 0.415]$. Кроме того, разрушение идёт по типу «black hole», так как при $t_{17} = 0.415$ $\|u^{N,M}\|_h(t_{17}) = 1.559$ и $\|u_t^{N,M}\|_h(t_{17}) = 127.478$, а по рисунку 11.8 визуально определяем, что решение задачи в момент разрушения является непрерывно дифференцируемым по r .

Пример 3. Наконец, рассмотрим пример с таким набором входных данных:

$$\begin{aligned} u_{init_0}(r) &= 2(r - \pi)^2(r - 2\pi)^2, \\ u_{init_1}(r) &= -(r - \pi)^2(r - 2\pi)^2, \\ a &= \pi, \quad b = 2\pi, \quad \omega = 0.01. \end{aligned}$$

Данные начальные функции удовлетворяют достаточному условию (11.2) и условию согласования (11.3). Верхняя оценка (11.1) времени существования решения в этом примере даёт результат $T_{up} \approx 1.055$. Возьмём следующий набор параметров: $N = 50$, $M = 50$, $\tilde{r}_x = 2$, $\tilde{r}_t = 2$, $S = 5$.

Вычисление эффективных порядков точности даёт такой результат:

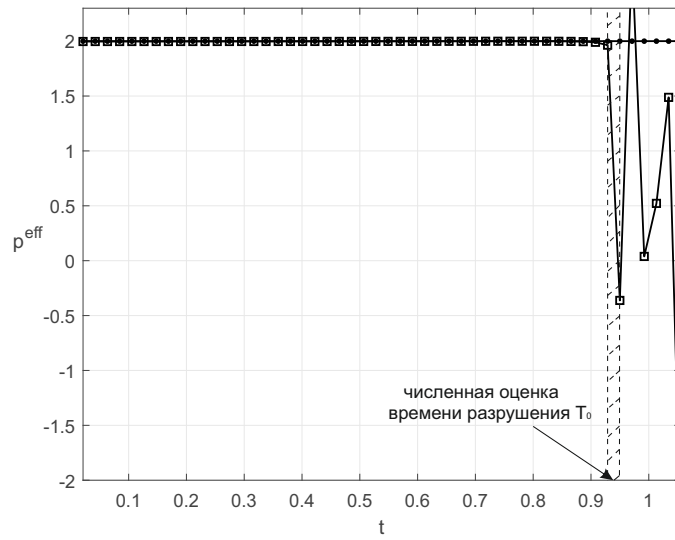


Рис. 11.11. Эффективный порядок точности для каждого временного слоя в примере 3.

Представим графики численного решения и ранее упомянутых сеточных норм до момента разрушения решения включительно:

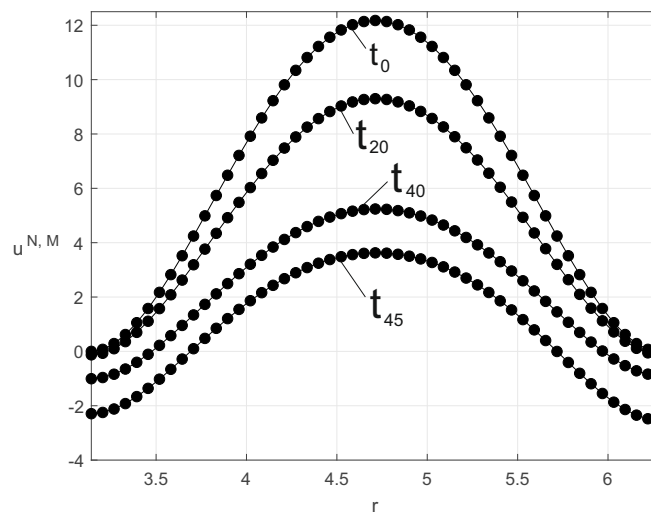


Рис. 11.12. Численное решение задачи (11.4) в примере 3 в моменты времени t_0 , t_{20} , t_{40} , t_{45} .

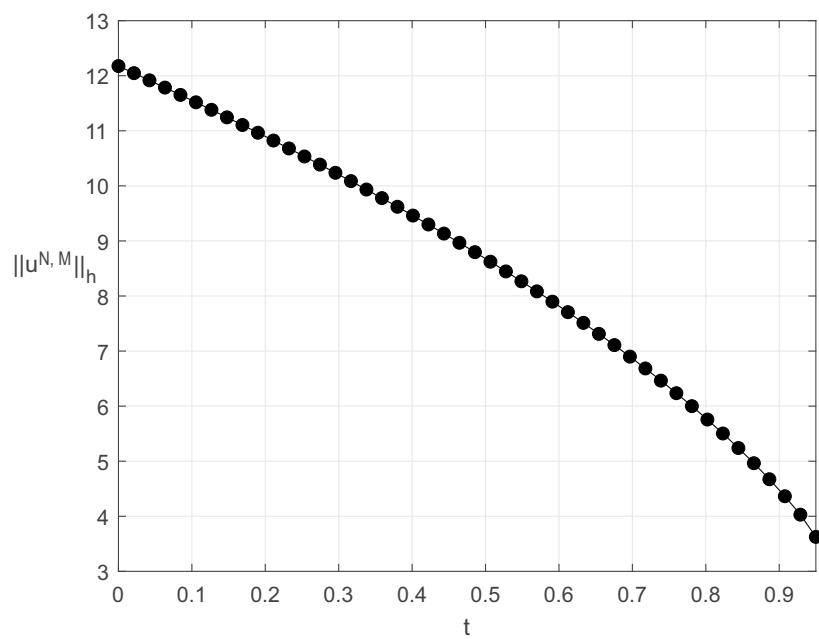


Рис. 11.13. Норма численного решения для каждого временного слоя (до момента разрушения включительно) в примере 3.

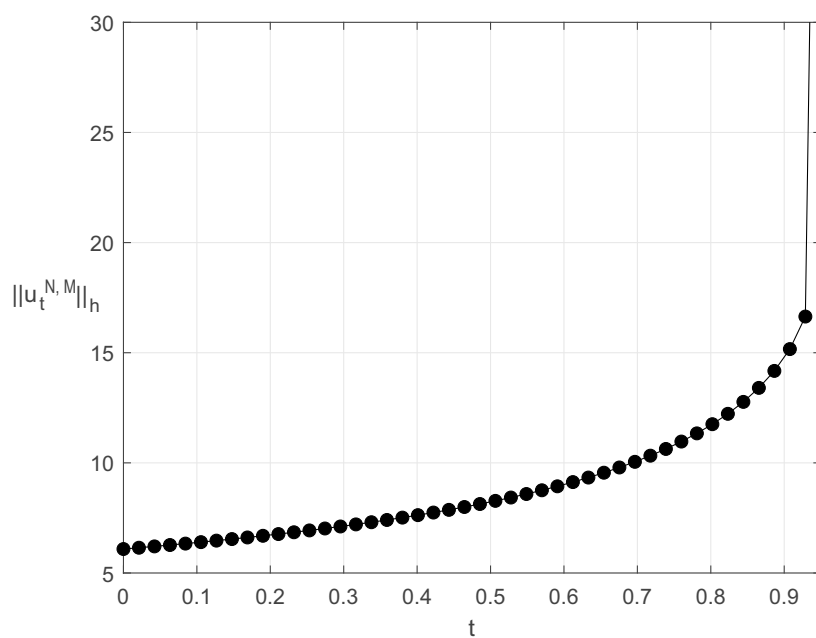


Рис. 11.14. Норма частной производной численного решения по t для каждого временного слоя (до момента разрушения включительно) в примере 3.

Согласно графикам 11.11 — 11.14, время разрушения $T_0 \in (t_{44}, t_{45}] \equiv (0.929, 0.950]$. Кроме того, разрушение идёт по типу «black hole», так как при $t_{45} = 0.95$ $\|u^{N,M}\|_h(t_{45}) = 3.626$ и $\|u_t^{N,M}\|_h(t_{45}) = 63.685$, а по рисунку 11.12 визуально определяем, что решение задачи в момент разрушения является непрерывно дифференцируемым по r .

Заключение

В диссертационной работе проведено исследование разрушений решений задач Коши 1 – 3 и начально-краевой задачи (10.4) для нелинейных уравнений, возникающих в теории ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме. С точки зрения физики разрушение решения в рассматриваемых задачах означает взрыв плазмы (задача Коши 1), или опрокидывание ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме (задача Коши 2), или эффект «black hole» для потенциала электрического поля ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме (задача Коши 3, начально-краевая задача (10.4)). С точки зрения математики разрушение решения означает то, что решение задачи принадлежит некоторому функциональному классу, зависящему от времени, и в момент разрушения решение перестаёт принадлежать этому классу.

Приведём основные результаты, которые были получены в диссертационной работе для задач Коши 1 – 3 и начально-краевой задачи (10.4).

Для задачи Коши 1

- 1) была доказана локальная разрешимость и результат о непродолжаемом классическом решении;
- 2) с помощью метода Х.А. Левина была получена оценка снизу на скорость разрушения (с точки зрения физики это взрыв плазмы), из которой найдена оценка сверху для времени существования сильного решения;
- 3) с помощью метода нелинейной ёмкости С.И. Похожаева были найдены достаточные условия отсутствия глобальных слабых решений задачи, а также получена верхняя оценка для времени существования слабого решения.

Для задачи Коши 2 была доказана локальная разрешимость и результат о непродолжаемом классическом решении. В случае, когда время существования решения конечно, имеет место разрушение решения задачи за конечное время, причём с точки зрения физики это опрокидывание ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме.

Для задачи Коши 3

- 1) была доказана локальная разрешимость;
- 2) с помощью метода нелинейной ёмкости С.И. Похожаева были найдены достаточные условия отсутствия глобальных слабых решений задачи, а так-

же получены верхние оценки для времени существования слабого решения в двух случаях (с точки зрения физики здесь возникает эффект «black hole» для потенциала электрического поля);

3) с помощью метода нелинейной ёмкости С.И. Похожаева для слабого решения был получен результат об отсутствии локальных слабых решений.

Для начально-краевой задачи (10.4)

- 1) была доказана локальная разрешимость;
- 2) с помощью метода пробных функций было найдено достаточное условие отсутствия глобальных решений задачи и получена верхняя оценка для времени существования решения;
- 3) приведён пример, имеющий точное аналитическое решение, в котором имеет место разрушение решения задачи (эффект «black hole» для потенциала электрического поля) за конечное время;
- 4) приведены примеры, где решения были найдены численно и была проведена численная диагностика разрушения решений (эффект «black hole» для потенциала электрического поля) за конечное время.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в областях математической физики и физики плазмы.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, доценту М.О. Корпусову за постановки задач, ценные советы и постоянное внимание к работе. Благодарю профессорско-преподавательский состав физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за полученное физико-математическое образование. Благодарю заведующего кафедрой математики, профессора Д.Д. Соколова, и всех сотрудников кафедры математики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за доброжелательное отношение и поддержку.

Список литературы

1. McCracken G., Stott P. Fusion: The Energy of the Universe. – Academic Press, 2012. – P. 248.
2. Ахиезер А.И. Электродинамика плазмы. – М.: Наука, 1974. – С. 720.
3. Yajima N., Oikawa M., Satsuma J. Interaction of ion-acoustic solitons in three-dimensional space // Journal of the Physical Society of Japan. – 1978. – Vol. 44., no. 5. – P. 1711–1714.
4. Kako F., Yajima N. Interaction of ion-acoustic solitons in two-dimensional space // Journal of the Physical Society of Japan. – 1980. – Vol. 49., no. 5. – P. 2063–2071.
5. Infeld E., Rowlands G. Nonlinear waves, solitons and chaos. Second edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
6. Габов С.А., Оразов Б.Б. Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{xx} - u) + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задачах // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1986. – Т. 26., №1. – С. 92–102.
7. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. – М.: Наука, 1990. – С. 344.
8. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. – М.: Физматлит, 1998. – С. 448.
9. Плетнер Ю.Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1992. – Т. 32., №12. – С. 1885–1899.
10. Капитонов Б.В. Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Математический сборник. – 1979. – Т. 109(151), №4(8). – С. 607–628.
11. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A, Shlyapugin G.I. On the blow-up phenomena for a one-dimensional equation of ion-sound waves in a plasma: analytical and numerical investigation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2018. – Vol. 41., no. 8. – P. 2906–2929.
12. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V. Instantaneous blow-up versus local solvability for one problem of propagation of nonlinear waves in

- semiconductors // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 459., no. 1. – P. 159–181.
13. Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Панин А.А., Юшков Е.В. О разрушении решений одного полного нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме с некоэрцитивными нелинейностями // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2018. – Т. 82., №2. – С. 43–78.
 14. Панин А.А., Шляпугин Г.И. О локальной разрешимости и разрушении решений одномерных уравнений типа Ядзимы–Ойкавы–Сацумы // Теоретическая и математическая физика. – 2017. – Т. 193., №2. – С. 179–192.
 15. Корпусов М.О., Панин А.А. О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Математические заметки. – 2017. – Т. 102., №3. – С. 383–395.
 16. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. Blow-up phenomena in the model of a space charge stratification in semiconductors: analytical and numerical analysis // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2017. – Vol. 40., no. 7. – P. 2336–2346.
 17. Лукьяненко Д.В., Панин А.А. Разрушение решения уравнения стратификации объемного заряда в полупроводниках: численный анализ при сведении исходного уравнения к дифференциально-алгебраической системе // Вычислительные методы и программирование. – 2016. – Т. 17., №1. – С. 437–446.
 18. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. Blow-up for one Sobolev problem: theoretical approach and numerical analysis // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2016. – Vol. 442., no. 2. – P. 451–468.
 19. Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Овсянников Е.А., Панин А.А. Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2017. – Т. 10., №2. – С. 107–123.
 20. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Взрывная неустойчивость в нелиней-

- ных волновых моделях с распределенными параметрами // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2020. – Т. 84., №3. – С. 15–70.
21. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2022. – Т. 62., №10. – С. 1639–1661.
 22. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. II. Теория потенциала // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2023. – Т. 63., №2. – С. 282–316.
 23. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. III. Задачи Коши // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2023. – Т. 63., №7. – С. 1109–1127.
 24. Овсянников Е.А. Локальная разрешимость и разрушение классического решения одной начально-краевой задачи для нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2024. – Т. 64., №10. – С. 1915–1930.
 25. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1999. – Т. 39., №6. – С. 1006–1022.
 26. Кудашев В.Р., Михайловский А.Б., Шарапов С.Е. К нелинейной теории дрейфовой моды, индуцированной тороидаальностью // Физика плазмы. – 1987. – Т. 13., №4. – С. 417–421.
 27. Каменец Ф.Ф., Лахин В.П., Михайловский А.Б. Нелинейные электронные градиентные волны // Физика плазмы. – 1987. – Т. 13., №4. – С. 412–416.

28. Ситенко А.П., Сосенко П.П. О коротковолновой конвективной турбулентности и аномальной электронной теплопроводности плазмы // Физика плазмы. – 1987. – Т. 13., №4. – С. 456–462.
29. Levine H.A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1973. – Vol. 51. – P. 371–386.
30. Levine H.A. Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equation of the form $Pu_{tt} = Au + F(u)$ // Transactions of the American Mathematical Society. – 1974. – Vol. 192. – P. 1–21.
31. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. – De Gruyter: Series in Nonlinear Analysis and Applications, 2011.
32. Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Sveshnikov A.G., Yushkov E.V. Blow-Up in Nonlinear Equations of Mathematical Physics: Theory and Methods. – De Gruyter: Series in Nonlinear Analysis and Applications, 2018.
33. Корпусов М.О. Разрушение решений неклассических нелокальных нелинейных модельных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т 59., №4. – С. 621–648.
34. Корпусов М.О. Разрушение и глобальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши для формально гиперболического уравнения с некоэрцитивным источником // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2020. – Т 84., №5. – С. 119–150.
35. Похожаев С.И., Митидиери Э. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2001. – Т. 234. – С. 3–383.
36. Galaktionov V.A., Mitidieri E., Pokhozhaev S.I. On global solutions and blow-up for Kuramoto-Sivashinsky-type models, and well-posed Burnett equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. – 2009. – Vol. 70., no. 8. – P. 2930–2952.
37. Кайкина Е.И., Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Асимптотическое разложение решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа

- Соболева // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2013. – Т. 77., №2. – С. 97–108.
38. Свиридчук Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49., №4. – С. 47–74.
 39. Загребина С.А. Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L, p) -радиальным оператором // Математические заметки Якутского государственного университета. – 2012. – Т. 19., №2. – С. 39–48.
 40. Zamyshlyayeva A.A., Sviridyuk G.A. Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order // вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2016. – Vol. 8., no. 4. – P. 5–16.
 41. Корпусов М.О. Нелинейные уравнения теории ионно-звуковых волн в плазме // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61., №11. – С. 1927–1936.
 42. Крылов Н.В. Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. – Новосибирск: Научная Книга, 1998. – С. 178.
 43. Корпусов М.О., Шляпугин Г.И. О разрушении решений задач Коши для одного класса нелинейных уравнений теории ферритов // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. – 2020. – Т. 185. – С. 79–131.
 44. Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – С. 464.
 45. Корпусов М.О., Яблочкин Д.К. Теория потенциала и оценка Шаудера в гильбертовских пространствах для $3+1$ -мерного уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61., №8. – С. 1289–1314.
 46. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М.: Наука, 1971. – С. 288.
 47. Korpusov M.O., Matveeva A.K. On critical exponents for weak solutions to

- the Cauchy problem for one nonlinear equation with gradient nonlinearity // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2022. – Vol. 46, no. 2. – P. 1574–1630.
48. Панин А.А. О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // *Математические заметки*. – 2015. – Т. 97., №6. – С. 884–903.
 49. Корпусов М.О., Панин А.А. Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с нелокальным граничным условием // *Теоретическая и математическая физика*. – 2013. – Т. 175., №2. – С. 159–172.
 50. Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. – М.: Физический факультет МГУ, 2014. – С. 364.
 51. Корпусов М.О. Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // *Известия Российской академии наук. Серия математическая*. – 2015. – Т. 79., №5. – С. 103–162.
 52. Silvestri B. Fréchet differential of a power series in banach algebras // *Opuscula Mathematica*. – 2010. – Vol. 30., no. 2. – P. 155–177.
 53. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. – Berlin: Springer-Verlag, 1990.
 54. Калиткин Н.Н. Численные методы решения жестких систем // *Математическое моделирование*. – 1995. – Т. 7., №5. – С. 8–11.
 55. Альшин А.Б., Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корягина А.Б. Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жёстких и дифференциально-алгебраических систем // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2006. – Т. 46., №8. – С. 1392–1414.
 56. Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2005. – Т. 45., №10. – С. 1837–1847.

57. Al'shin A.B., Al'shina E.A. Numerical diagnosis of blow-up of solutions of pseudoparabolic equations // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – Vol. 148., no. 1. – P. 143–162.
58. Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В. Вычисления на квазиравномерных сетках. – М.: Физматлит, 2005. – С. 224.

Основные публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы изложены в работах, которые опубликованы в центральных научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты из списка МГУ.

1. Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Овсянников Е.А., Панин А.А. Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2017. – Т. 10, №2. – С. 107–123.
Индексируется в Scopus, Web of Science, RSCI, РИНЦ.
EDN: YQQCYH. Двухлетний импакт-фактор 0,357 (РИНЦ, без самоцитирования), 0,3 (JIF). Объём 1,063 п.л.
Вклад автора — 85% работы.

2. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Взрывная неустойчивость в нелинейных волновых моделях с распределёнными параметрами // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2020. – Т. 84., №3. – С. 15–70.
Индексируется в RSCI, РИНЦ.
EDN: DZPNBY. Двухлетний импакт-фактор 0,585 (РИНЦ, без самоцитирования). Объём 3,5 п.л.
Перевод: Korpusov M.O., Ovsyannikov E.A. Blow-up instability in nonlinear wave models with distributed parameters // Izvestiya: Mathematics. – 2020. – Vol. 84, no. 3. – P. 449–501.
Индексируется в Scopus, Web of Science.
EDN: HNNAEF. Импакт-фактор 0,9 (JIF). Объём 3,313 п.л.
Вклад автора — 90% работы.

3. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для

нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2022. – Т. 62., №10. – С. 1639–1661.

Индексируется в RSCI, РИНЦ.

EDN: MFWGAE. Двухлетний импакт-фактор 0,628 (РИНЦ, без самоцитирования). Объём 1,438 п.л.

Перевод: Korpusov M.O., Ovsyannikov E.A. Local solvability, blow-up, and Hölder regularity of solutions to some Cauchy problems for nonlinear plasma wave equations: I. Green formulas // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2022. – Vol. 62, no. 10. – P. 1609–1631.

Индексируется в Scopus, Web of Science.

EDN: KCBWBW. Импакт-фактор 0,7 (JIF). Объём 1,438 п.л.

Вклад автора — 90% работы.

4. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. II. Теория потенциала // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2023. – Т. 63., №2. – С. 282–316.

Индексируется в RSCI, РИНЦ.

EDN: BOJJQG. Двухлетний импакт-фактор 0,628 (РИНЦ, без самоцитирования). Объём 2,188 п.л.

Перевод: Korpusov M.O., Ovsyannikov E.A. Local solvability, blow-up, and Hölder regularity of solutions to some Cauchy problems for nonlinear plasma wave equations: II. Potential theory // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2023. – Vol. 63, no. 2. – P. 250–284.

Индексируется в Scopus, Web of Science.

EDN: CLVMVU. Импакт-фактор 0,7 (JIF). Объём 2,188 п.л.

Вклад автора — 90% работы.

5. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для

нелинейных уравнений теории волн в плазме. III. Задачи Коши // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2023. – Т. 63., №7. – С. 1109–1127.

Индексируется в RSCI, РИНЦ.

EDN: VSVMLH. Двухлетний импакт-фактор 0,628 (РИНЦ, без самоцитирования). Объём 1,188 п.л.

Перевод: Korpusov M.O., Ovsyannikov E.A. Local solvability, blow-up, and Hölder regularity of solutions to some Cauchy problems for nonlinear plasma wave equations: III. Cauchy problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2023. – Vol. 63, no. 7. – P. 1218–1236.

Индексируется в Scopus, Web of Science.

DOI: 10.1134/S0965542523070072.

Импакт-фактор 0,7 (JIF). Объём 1,125 п.л.

Вклад автора — 90% работы.

6. Овсянников Е.А. Локальная разрешимость и разрушение классического решения одной начально-краевой задачи для нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2024. – Т. 64., №10. – С. 1915–1930.

Индексируется в RSCI, РИНЦ.

EDN: JZNBUS. Двухлетний импакт-фактор 0,628 (РИНЦ, без самоцитирования). Объём 1 п.л.

Перевод: Ovsyannikov E.A. Local solvability and blow-up of classical solution to some initial-boundary value problem for a nonlinear equation governing ion-acoustic waves in a plasma // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2024. – Vol. 64, no. 10. – P. 2305–2319.

Индексируется в Scopus, Web of Science.

EDN: EFLZZQ. Импакт-фактор 0,7 (JIF). Объём 0,938 п.л.

Тезисы докладов в материалах научных конференций

7. Овсянников Е.А., Корпусов М.О. Формулы Грина для нелинейных урав-

нений ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме // IX Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии» ЛаПлаз-2023: научная конференция, НИЯУ МИФИ. Тезисы докладов. – Москва: НИЯУ МИФИ. – 2023. – С. 132–132.

8. Овсянников Е.А. Разрушение решения нелинейной начально-краевой задачи из теории ионно-звуковых волн в плазме // X Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии» ЛаПлаз-2024: научная конференция, НИЯУ МИФИ. Тезисы докладов. – Москва: НИЯУ МИФИ. – 2024. – С. 120–120.

Приложение А

Комплекс программ для реализации численных методов главы 11

В настоящем приложении представлены MATLAB-коды для численной реализации алгоритмов, описанных в главе 11. В программе есть основной скрипт-файл `Main_Richardson.m`, который исполняет основную программу для численного счёта (программа поставлена в режим примера 3; для других примеров в самой программе указано, что надо раскомментировать и закомментировать):

```

1 clear;
2 clc;
3 global a b t1 t2 om
4 %om=1; %omega в примере 1
5 %om=0.1; %omega в примере 2
6 om=0.01; %omega в примере 3
7 a=pi; %начало отрезка по координате
8 b=2*pi; %конец отрезка по координате
9 t1=0; %начальный момент времени
10 t2=TimeOfBlowUpCalculation(); %верхняя оценка
11 %времени существования решения
12 if t2<0
13     return %если t2<0, то выход из программы
14 end
15 N=50; %число интервалов базовой сетки по координате
16 M=50; %число интервалов базовой сетки по времени
17 h=(b-a)/N; %шаг базовой сетки по координате
18 r=a:h:b; %базовая сетка по координате
19 tau=(t2-t1)/M; %шаг базовой сетки по времени
20 t=t1:tau:t2; %базовая сетка по времени
21 r_x=2; %коэффициент сгущения сетки по координате
22 r_t=2; %коэффициент сгущения сетки по времени
23 S=5; %число сеток для сгущения, не включая базовую
24 %Далее используем три последних сетки в сгущении
25 U_S_2=Solve_equation(r_x^(S-2)*N,r_t^(S-2)*M); %решение
26 %на первой сетке
27 U_S_1=Solve_equation(r_x^(S-1)*N,r_t^(S-1)*M); %решение
28 %на второй сетке
29 [U_S,Ut_S]=Solve_equation(r_x^S*N,r_t^S*M); %решение
30 %на третьей сетке+частная производная (численная) по t
31 U_S_2=cut(U_S_2,S-2,N,M,r_x,r_t); %обрезка решения
32 %до уровня базовой сетки
33 U_S_1=cut(U_S_1,S-1,N,M,r_x,r_t); %обрезка решения

```

```

34 %до уровня базовой сетки
35 U_S=cut(U_S,S,N,M,r_x,r_t); %обрезка решения
36 %до уровня базовой сетки
37 Ut_S=cut(Ut_S,S,N,M,r_x,r_t); %обрезка для частной
38 %производной по t до уровня базовой сетки
39 p_eff_1=zeros(1,M+1);
40 for m=1:M+1
41     %эффективные порядки точности для каждого временного
42     %слоя, используется встроенная евклидова норма
43     %вектор-строк
44     p_eff_1(m)=log(norm(U_S_1(m,:)-U_S_2(m,:))/...
45         norm(U_S(m,:)-U_S_1(m,:)))/log(r_t);
46 end
47
48 p_theor_1=2*ones(1,M+1); %теоретические порядки точности
49 %для каждого временного слоя
50 max_u=zeros(1,M+1);
51 for m=1:M+1
52     max_u(m)=max(abs(U_S(m,:))); %сеточная норма
53     %max|u(r_n,t)| для каждого временного слоя
54 end
55
56 max_ut=zeros(1,M+1);
57 for m=1:M+1
58     max_ut(m)=max(abs(Ut_S(m,:))); %сеточная норма
59     %max|u_t(r_n,t)| для каждого временного слоя
60 end
61
62 draw_solution %построение решения (эволюция)
63 pause(1);
64
65 draw_Richardson %построение эффективных
66 %порядков точности
67 pause(1);
68
69 draw_max_norm %построение графиков сеточных норм
70 pause(1);
71
72 draw_moments %построение решения в определённые
73 %моменты времени
74 pause(1);
75
76 %draw_err %построение графика lg от нормы ошибки
77 %для каждого временного слоя
78 %(раскомментировать, только когда пример 1)

```

В этот основной скрипт-файл входят как функции, так и вспомогательные скрипт-файлы:

```

1 function [t_d] = TimeOfBlowUpCalculation()
2 %функция для нахождения верхней оценки времени
3 %существования решения методом символьных вычислений
4 global a b
5 syms r;
6 u_0=u_init_0(r);
7 u_1=u_init_1(r);
8 f1=r*(u_0+1./2);
9 f2=-2*r^2*(u_0+1./2)*u_1;
10 a0=int(f1^2,'r',a,b);
11 a1=int(f2,'r',a,b);
12 T_d=vpa(a0/a1,18);
13 t_d=double(T_d);
14 end

1 function [varargout] = Solve_equation(N,M)
2 %функция нахождения решения задачи,
3 %a при необходимости - численной
4 %частной производной u_t
5 global a b t1 t2
6 varargout{1}=zeros(M+1,N+1); %заготовка для
7 %численного решения задачи
8 h=(b-a)/N;
9 r=a:h:b;
10 tau=(t2-t1)/M;
11 r_cut=r(1,2:N); %обрезаем из сетки граничные узлы
12 u_n=u_init_0(r_cut); %начальные условия для u
13 v_n=v_init(r_cut,N,h); %начальные условия для v
14 w_n=w_init(r_cut,N,h); %начальные условия для w
15 varargout{1}(1,2:N)=u_n;
16 varargout{1}(1,1)=u_init_0(a);
17 varargout{1}(1,N+1)=u_init_0(b);
18 for m=1:M
19     m
20     [j1,j2,j3,j4]=Jac(u_n,r_cut,N,h); %заполнение
21     %ненулевых элементов матрицы Якоби
22     [f1,f2,f3] = f_vector(u_n,v_n,w_n,r_cut,N,h); %за-
23     %полнение вектора правой части
24     [Z1,Z2,Z3] =Solve_syst(j1,j2,j3,j4,...
25         f1,f2,f3,tau,N); %решение СЛАУ (вектор z разделён
26     %на 3 части по N-1 элементов) из рис. 11.1
27     %за O(N) итераций
28     u_n=u_n+tau*real(Z1);

```

```

29     v_n=v_n+tau*real(Z2);
30     w_n=w_n+tau*real(Z3);
31     varargout{1}(m+1,2:N)=u_n;
32     varargout{1}(m+1,1)=4/3*u_n(1)-1/3*u_n(2);
33     varargout{1}(m+1,N+1)=4/3*u_n(N-1)-1/3*u_n(N-2);
34 end
35 if nargin==2
36     varargout{2}=diff_t(varargout{1},N,M,r,tau); %если
37     %необходимо, то вычисляется численно частная
38     %производная u_t
39 end
40 end

```

```

1 function [y] = u_init_0(r)
2 %y=0.*r; %для примера 1
3 %y=2.*cos(r); %для примера 2
4 y=2.*(r-pi).^2.*(r-2.*pi).^2; %для примера 3
5 end

```

```

1 function [y] = u_init_1(r)
2 %y=-ones(1,length(r)); %для примера 1
3 %y=-cos(r); %для примера 2
4 y=-(r-pi).^2.*(r-2.*pi).^2; %для примера 3
5 end

```

```

1 function [v] = v_init(r,N,h)
2 %функция заполнения начальных условий для v
3 global a b
4 v=zeros(1,N-1);
5 v(1)=(u_init_1(r(2))-u_init_1(a))./(r(1)*h)+...
6     (u_init_1(r(2))-2*u_init_1(r(1))+...
7     u_init_1(a))./h^2-u_init_1(r(1))-...
8     2.*u_init_1(r(1)).*u_init_0(r(1));
9
10 for n=2:N-2
11     v(n)=(u_init_1(r(n+1))-u_init_1(r(n-1)))/(r(n)*h)+...
12     (u_init_1(r(n+1))-2*u_init_1(r(n))+...
13     u_init_1(r(n-1)))/h^2-u_init_1(r(n))-...
14     2.*u_init_1(r(n)).*u_init_0(r(n));
15
16 end
17
18 v(N-1)=(u_init_1(b)-u_init_1(r(N-2)))/(r(N-1)*h)+...
19     (u_init_1(b)-2*u_init_1(r(N-1))+...
20     u_init_1(r(N-2)))/h^2-u_init_1(r(N-1))-...
21     2.*u_init_1(r(N-1)).*u_init_0(r(N-1));
22 end

```

```

1 function [w] = w_init(r,N,h)
2 %функция заполнения начальных условий для w
3 global a b
4 w=zeros(1,N-1);
5 w(1)=(u_init_0(r(2))-u_init_0(a))./(r(1)*h)+...
6     (u_init_0(r(2))-2*u_init_0(r(1))+...
7     u_init_0(a))./h.^2-u_init_0(r(1))-...
8     (u_init_0(r(1)))^2;
9
10 for n=2:N-2
11     w(n)=(u_init_0(r(n+1))-u_init_0(r(n-1)))/(r(n)*h)+...
12     (u_init_0(r(n+1))-2*u_init_0(r(n))+...
13     u_init_0(r(n-1)))/h^2-u_init_0(r(n))-...
14     (u_init_0(r(n)))^2;
15
16 end
17 w(N-1)=(u_init_0(b)-u_init_0(r(N-2)))/(r(N-1)*h)+...
18     (u_init_0(b)-2*u_init_0(r(N-1))+...
19     u_init_0(r(N-2)))/h^2-u_init_0(r(N-1))-...
20     (u_init_0(r(N-1)))^2;
21 end

```

```

1 function [j1,j2,j3,j4] = Jac(u,r,N,h)
2 %функция заполнения ненулевых элементов
3 %матрицы Якоби
4 global om
5 j1=zeros(1,N-1);
6 j2=j1;
7 j3=j1;
8 j4=j1;
9 for n=2:N-2
10     j1(n)=-1/(r(n)*h)+1/h^2;
11 end
12 j1(N-1)=-4/(3*r(N-1)*h)+2/(3*h^2);
13 j3(1)=4/(3*r(1)*h)+2/(3*h^2);
14 for n=2:N-2
15     j3(n)=1/(r(n)*h)+1/h^2;
16 end
17 j2(1)=-4/(3*r(1)*h)-2/(3*h^2)-1-2*u(1);
18 for n=2:N-2
19     j2(n)=-2/h^2-1-2*u(n);
20 end
21 j2(N-1)=4/(3*r(N-1)*h)-2/(3*h^2)-1-2*u(N-1);
22 for n=1:N-1
23     j4(n)=-om^2-2*om^2*u(n);
24 end

```

25 **end**

```

1 function [f1,f2,f3] = f_vector(u,v,w,r,N,h)
2 %функция заполнения вектора правой части
3 global om
4 f1=zeros(1,N-1);
5 f2=f1;
6 f3=f1;
7 f1(1)=(-4/(3*r(1)*h)-2/(3*h^2)-1)*u(1)-(u(1))^2+...
8     (4/(3*r(1)*h)+2/(3*h^2))*u(2)-w(1);
9 for n=2:N-2
10     f1(n)=(-1/(r(n)*h)+1/h^2)*u(n-1)-(2/h^2+1)*u(n)-...
11         (u(n))^2+(1/(r(n)*h)+1/h^2)*u(n+1)-w(n);
12 end
13 f1(N-1)=(-4/(3*r(N-1)*h)+2/(3*h^2))*u(N-2)+...
14     (4/(3*r(N-1)*h)-2/(3*h^2)-1)*u(N-1)-(u(N-1))^2-w(N-1);
15
16
17 for n=1:N-1
18     f2(n)=-om^2.*(w(n)+u(n)+(u(n))^2);
19 end
20 for n=1:N-1
21     f3(n)=v(n);
22 end
23 end

```

```

1 function [W1,W2,W3] =Solve_syst(j1,j2,j3,j4,...
2     f1,f2,f3,tau,N)
3 %решение СЛАУ за O(N) итераций с учётом структуры
4 %блочной матрицы, использование метода прогонки
5 %для трёхдиагональной матрицы
6 global om
7 k=-(1+1i)/2*tau;
8 K1=j1;
9 K2=-1/(om^2+1/k^2)*j4+j2;
10 K3=j3;
11 d=-k/(k^2*om^2+1)*f2+1/(1+k^2*om^2)*f3+f1./k;
12 W1=Progonka(K1,K2,K3,d,N-1);
13 W3=zeros(1,N-1);
14 W3(1)=-1/k*f1(1)+j2(1)*W1(1)+j3(1)*W1(2);
15 for n=2:N-2
16     W3(n)=-1/k*f1(n)+j1(n)*W1(n-1)+...
17         j2(n)*W1(n)+j3(n)*W1(n+1);
18 end
19 W3(N-1)=-1/k*f1(N-1)+j1(N-1)*W1(N-2)+j2(N-1)*W1(N-1);
20 W2=(f3-W3)./k;

```

```

21 end

1 function [x] = Progonka(a,b,c,d,N)
2 %прогонка для трёхдиагональной матрицы
3 x=zeros(1,N);
4 ksi=zeros(1,N+1);
5 eta=ksi;
6 for n=1:N
7     ksi(n+1)=c(n)/(-b(n)-a(n)*ksi(n));
8     eta(n+1)=(a(n)*eta(n)-d(n))/(-b(n)-a(n)*ksi(n));
9 end
10 x(N)=eta(N+1);
11 for n=N-1:-1:1
12     x(n)=ksi(n+1)*x(n+1)+eta(n+1);
13 end
14 end

1 function [V] = diff_t(U,N,M,r,tau)
2 %нахождение частной производной u_t
3 %численного решения методом
4 %конечных разностей со вторым
5 %порядком точности
6 V=zeros(M+1,N+1);
7 V(1,:)=u_init_1(r);
8 for m=2:M
9     V(m,:)=(U(m+1,:)-U(m-1,:))/(2*tau);
10 end
11 V(M+1,:)=1/(2*tau).*(3*U(M+1,:)-4*U(M,:)+U(M-1,:));
12 end

1 function [B] = cut(A,s,N,M,r_x,r_t)
2 %функция обрезки решения до уровня базовой сетки
3 %A-необрезанное решение
4 %B-обрезанное решение
5 %s-номер сгущения
6 B=zeros(M+1,N+1);
7 for m=1:M+1
8     for n=1:N+1
9         B(m,n)=A(r_t^s*(m-1)+1,r_x^s*(n-1)+1);
10     end
11 end
12 end

```

Итак, все вспомогательные функции перечислены. Теперь представим содержимое вспомогательных скрипт-файлов:

Скрипт-файл draw_solution.m:

```

1 %построение решения (эволюция)
2 figure
3 for m=1:M+1
4     plot(r,U_S(m,:), 'ok-', 'Markerfacecolor', 'black');
5     hold on
6     xlim([a b]);
7     %ylim([-1 0.1]) %для примера 1
8     grid on
9     xlabel('r');
10    ylabel('u');
11    pause(0.1);
12    if m<M+1
13        cla
14    end
15 end

```

Скрипт-файл draw_Richardson.m:

```

1 %построение эффективных порядков точности
2 figure
3 plot(t,p_eff_1, 'sk-', 'linewidth', 1, 'markersize', 5);
4 hold on
5 plot(t,p_theor_1, '*k-', 'linewidth', 1, 'markersize', 3);
6 xlabel('t');
7 ylabel('p^{eff}');
8 grid on
9 %ylim([-1.3 2.3]) %для примера 1
10 %ylim([-0.5 4]) %для примера 2
11 ylim([-2 2.3]); %для примера 3
12 xlim([t1+tau t2]);

```

Скрипт-файл draw_max_norm.m:

```

1 %построение сеточной нормы численного решения
2 figure
3 plot(t,max_u, 'ok-', 'Markerfacecolor', 'black');
4 xlabel('t');
5 ylabel('||u^{N, M}||_{h}');
6 grid on
7 %ylim([0 1]); %для примера 1
8 %xlim([t1 t2]); %для примера 1
9
10 %ylim([1.5 2.1]); %для примера 2
11 %xlim([t1 t(18)]); %для примера 2
12
13 ylim([3 13]); %для примера 3
14 xlim([t1 t(46)]); %для примера 3

```

```

15
16 pause(1);
17
18 %построение сеточной нормы частной
19 %производной по t для численного решения
20 figure
21 plot(t,max_ut,'ok-','Markerfacecolor','black');
22 xlabel('t');
23 ylabel('||u^{N, M}_{t}||_{h}');
24 grid on
25 %ylim([0 20]); %для примера 1
26 %xlim([t1 t2]); %для примера 1
27
28 %ylim([0 40]); %для примера 2
29 %xlim([t1 t(18)]); %для примера 2
30
31 ylim([5 30]); %для примера 3
32 xlim([t1 t(46)]); %для примера 3

```

Скрипт-файл draw_moments.m:

```

1 %построение решения в определённые моменты времени
2 %m=[1, 31, 41, 51]; %для примера 1
3 %m=[1, 11, 18]; %для примера 2
4 m=[1, 21, 41, 46]; %для примера 3
5 figure
6 for i=1:length(m)
7 plot(r,U_S(m(i),:),'ok-','Markerfacecolor','black');
8 hold on
9 xlim([a b]);
10 %ylim([-0.6 0.05]); %для примера 1
11 %ylim([-2.1 2.1]); %для примера 2
12 ylim([-4 12.5]); %для примера 3
13 grid on
14 xlabel('r');
15 ylabel('u^{N, M}');
16 end

```

И, наконец, скрипт-файл draw_err.m, который используется только для примера 1:

```

1 %построение графика lg от нормы ошибки
2 %для каждого временного слоя в примере 1
3 %U-точное решение примера 1
4 U=zeros(M+1,N+1);
5 for m=1:M+1
6     U(m,:)=(sqrt(0.25-t(m))-0.5).*ones(1,N+1);

```

```

7 end
8 ERR=U-U_S; %ошибка
9 max_err=zeros(1,M+1);
10 for m=1:M+1
11     max_err(m)=max(abs(ERR(m,:))); %сеточная норма
12     %max|err(r_n,t)| для каждого временного слоя
13 end
14
15 figure
16 plot(t,log10(max_err),'ok-','Markerfacecolor','black');
17 xlabel('t');
18 ylabel('lg ||err||_{h}');
19 grid on
20 ylim([-8 -2]);
21 xlim([t1+tau t2]);

```