МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Штерн Александр Исаакович

Вопросы теории непрерывных представлений топологических групп и их обобщений

Специальность 1.1.3. Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2026

Диссертация подготовлена на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Официальные оппоненты – *Гумеров Ренат Нельсонович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО Казанский (Приволжский) Федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского, кафедра математического анализа, профессор*

Мануйлов Владимир Маркович, доктор физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра высшей геометрии и топологии, профессор

Сакбаев Всеволод Жанович, доктор физико-математических наук, доцент, Институт прикладной математики имени М.В.Келдыша Российской Академии наук, отдел кинетических уравнений, ведущий научный сотрудник

Защита диссертации состоится « 19 » июня 2026 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ 011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3883

Автореферат разослан «__» апреля 2026г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук Кибкало В.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Работа посвящена связанным между собой задачам теории представлений топологических групп и из обобщений как с точки зрения непрерывности так и с точки зрения выполнения строгого условия, что образ произведения равен произведению образов.

Одной из фундаментальных проблем теории является представимость (наличие точного представления или семейства представлений, разделяющего точки группы) топологических групп в различных классах локально выпуклых топологических векторных пространств. Важнейшими достижениями этого рода являются теорема Колмогорова 1944 года о существовании точного унитарного представления дискретной группы в гильбертовом пространстве[1], теорема Гельфанда–Райкова о существовании точного непрерывного унитарного представления локально компактной группы в гильбертовом пространстве[2], теорема Телемана о существовании точного непрерывного представления хаусдорфовой топологической группы в банаховом пространстве[3] и различные, но эквивалентные описания класса локально компактных групп, все неприводимые непрерывные унитарные представления которых конечномерны, опубликованные в 1972–73 годах[4]. В связи с развитием теорий двойственности для различных классов топологических групп возникли вопросы о дуальной и структурной характеризации различных специальных классов локально компактных групп, в первую очередь компактных и дискретных. Этим вопросам посвящена первая глава работы.

Еще одной проблемой являются условия непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах и пространствах Фреше и их приложения. Начиная с теоремы Банаха 1932 года [5], утверждающей, что измеримый по Бэру гомоморфизм одной полной сепарабельной метризуемой группы

---

[1]См. В. М. Тихомиров, «Радость математического открытия. К 120-летию со для рождения академика А. Н. Колмогорова,» Вестник Российской Академии Наук. 2023, том 93, № 4, с. 373–383.

[2]И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, «Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп,» Математический сборник, 13(55), № 2–3 (1943), 301–316.

[3]S. Teleman, «Sur la représentatiom linéaire des groupes topologiques,» Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) vol. 74 (1957), 319–339.

[4]В том числе C. C. Moore, «Groups with finite-dimensional irreducible representations,» Transactions of the American Mathematical Society," vol. 166 (1972), 401–410.

[5]Теорема 1.4, S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Monograf. Mat. PWN, Warszaw, 1932.

в другую непрерывен, изучались условия непрерывности измеримых, борелевских и бэровских гомоморфизмов и представлений топологических групп и полугрупп (см., например, [6] и родственные результаты в [7]). Однако проверка условия измеримости отображения не всегда проста (соответствующий пример приведен в замечании 1 в статье [8]).

Еще одной проблемой является изучение свойств непрерывности локально ограниченных представлений и гомоморфизмов. Вопросами, которые нуждались в решении, в том числе из технических соображений, было распространение теоремы Ли о непрерывных конечномерных связных разрешимых групп на не обязательно непрерывные представления групп с условиями делимости, а также выяснение справедливости теоремы Фрейденталя–Вейля, теоремы Вейля о полной приводимости и свойств аналога ядер фон Неймана и Хохшильда для не обязательно непрерывных представлений соответствующих групп.

Другой проблемой являются структура и свойства отображений групп в группы обратимых операторов в банаховых пространствах, для которых образ единицы группы есть единичный оператор и образ произведения отличается от произведения образов равномерно мало в смысле расстояния между операторами, так называемые квазипредставления, и близкие к ним отображения, обладающие дополнительными свойствами. Вопросам теории квазипредставлений посвящены многочисленные статьи, среди которых следует выделить статью Каждана[9], в которой обсуждается существование обычного представления

---

[6] Moore R. T., Measurable, continuous and smooth vectors for semi-groups and group representations, Mem. Amer. Math. Soc., № 78, American Mathematical Society, Providence, RI. 1968; Johnson B. E., Cohomology of Banach algebras, Mem. Amer. Math. Soc., №127, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1972; Gaal S. A., Linear analysis and representation theory, Springer-Verlag, New York–Heidelberg 1973; Moore C. C., “Group extensions and cohomology for locally compact groups. III,” Trans. Amer. Math. Soc. 221:1 (1976), 1–33; Sasvari Z., Positive definite and definitizable functions, Akademie Verlag, Berlin 1994; Baker J. W., Lashkarizadeh B. M., Representations and positive definite functions on topological semigroups, Glasgow Math. J. 38:1 (1996), 99–111; Neeb K.-H., On a theorem of S. Banach, J. Lie Theory 7:2 (1997), 293–300; Pestov V., Math. Rev. 98i:22003, 1998; Neeb K.-H., Pickrell D., Supplements to the papers entitled: «On a theorem of S. Banach» and «The separable representations of $U(H)$,» J. Lie Theory 10:1 (2000), 107–109.

[7] Exel R., Laca M., “Continuous Fell bundles associated to measurable twisted actions,” Proc. Amer. Math. Soc. 125:3 (1997), 795–799.

[8] Вершик А. М., Счетные группы, близкие к конечным (приложение к русскому переводу книги Greenleaf F. P., Invariant means on topological groups and their applications, Van Nostrand Reinhold Co., New York–Toronto, Ont.–London 1969; русский перевод: Гринлиф Ф., Инвариантные средние на топологических группах и их приложения, Мир, М., 1973.), С. 112–135.

[9] D. Kazhdan, «On ε -representations,» Israel Journal of Mathematics, vol. 43, № 4 (1982), 315–323,

группы, близкого к квазипредставлению (рассуждение в статье Каждана корректно для компактных и дискретных аменабельных групп), результаты Джонсона[10], позволяющие доказать, что ограниченные сильно непрерывные квазипредставления аменабельных групп в сопряженных банаховых пространствах допускают близкое представление при достаточно малом дефекте, и недавнюю статью Гауэрса и Хатами[11], где рассматриваются вопросы теории квазипредставлений конечных групп.

Изучению подлежат аддитивные аналоги квазипредставлений и псевдопредставлений (квазихарактеры и псевдохарактеры), связанные с теорией ограниченных когомологий локально компактных групп, и специальный класс (не обязательно ограниченных) квазипредставлений аменабельных групп (т.е. групп, для которых есть левоинвариантное среднее на пространстве ограниченных непрерывных функций на группе), содержащий все конечномерные квазипредставления. При этом следующая теорема Гишарде–Вигнера по теории когомологий групп Ли оказывается полезной. Пусть G – некомпактная простая группа Ли и $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ – разложение Картана, связанное с компактной подалгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Обозначим через $\exp$ экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в G.

Теорема (Гишарде, Вигнер[12]). *Пусть v – такая бесконечно дифференцируемая функция на G со значениями в $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, что ограничение v на K – нетривиальный гомеоморфизм K на одномерный тор $\mathbb{T}$, ограничение v на $\exp\mathfrak{p}$ строго положительно и K-инвариантно, и $v(k\exp p)=v(k)v(\exp p)$ для любых $k\in K$ и $p\in\mathfrak{p}$. Тогда функция $f(g_1,g_2)=(2\pi)^{-1}\mathrm{Arg}\,(v(g_1)v(g_2)v(g_1g_2)^{-1})$, $g_1,g_2\in G$, $f(e,e)=0$, допускает непрерывную ветвь на $G\times G$, определяющую вещественный дифференцируемый 2-коцикл на G.*

Существенными задачами становятся проверка гипотезы Мищенко о возможных значениях колебаний представлений связных групп Ли в точке, решение проблемы Каждана–Мильмана о существовании непрерывных гомоморфизмов, близких к данному (не обязательно непрерывному) гомоморфизму одной компактной группы Ли в другую, доказательство конечномерности группы вторых ограниченных когомологий связной локально компактной группы и существования близкого представления группы для (не обязательно ограниченных)

[10]Johnson B. E., «Approximately multiplicative maps between Banach algebras,» J. London Math. Soc. (2), vol. 37, № 2 (1988), pp. 294–316,

[11]У. Т. Гауэрс, О. Хатами, «Теоремы обращения и теоремы устойчивости для аппроксимативных представлений конечных групп,» Математический сборник, Т. 208, № 12 (2017), С. 70–108.

[12]Guichardet A., Wigner D., Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4), 1978, vol. 11, pp. 277–292.

квазипредставлений групп из введенного специального класса, а также установление общей структуры конечномерных квазипредставлений групп.

Еще одним вопросом теории является описание псевдопредставлений связных групп Ли, близких к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли в терминах обычных представлений, пседохарактеров на односвязных простых эрмитово симметрических группах Ли и экспонентах этих псевдохарактеров и аналогичное описание конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных локально компактных групп при условии, что ограничение этих квазипредставлений на некоторую компактную нормальную подгруппу, факторгруппа по которой является группой Ли, непрерывно.

Объект и предмет исследования

В диссертации изучаются непрерывные представления топологических групп в гильбертовых и банаховых пространствах и пространствах Фреше и их обобщения, состоящие в рассмотрении свойств класса не обязательно непрерывных локально ограниченных представлений и семейства квазигомоморфизмов групп и их квазипредставлений и псевдопредставлений, в том числе конечномерных представлений связных групп Ли и связных локально компактных групп.

Цели и задачи

Главными целями диссертации являются:

(1) характеризация локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, и изучение структуры некоторых подклассов класса локально компактных групп, определяемых свойствами их гомоморфизмов и представлений, в том числе – групп, вложимых в компактные группы и в аменабельные локально компактные группы с помощью не обязательно непрерывных отображений;

(2) установление связи между компактными и дискретными объектами в теории представлений топологичесих групп за пределами двойственности Понтрягина;

(3) характеризация непрерывных представлений хаусдорфовых топологических групп в слабой и сильной операторной топологии с помощью понятия колебания в точке;

(4) установление непрерывности локально ограниченного гомоморфизма между группами Ли на коммутанте группы-источника с помощью понятия группы разрывов представления;

(5) распространение теоремы Ли о непрерывных конечномерных связных разрешимых групп на не обязательно непрерывные представления групп с условиями делимости, а также распространение теоремы Фрейденталя–Вейля, теоремы Вейля о полной приводимости и свойств ядер фон Неймана и Хохшильда для не обязательно непрерывных представлений соответствующих групп;

(6) решение проблемы Каждана–Мильмана и доказательство гипотезы Мищенко;

(7) установление общей структуры конечномерных квазипредставлений групп и описание псевдопредставлений связных групп Ли, близких к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, с помощью псевдохарактеров на связных односвязных эрмитово симметрических простых группах Ли;

(8) доказательство конечномерности группы вторых ограниченных когомологий связной локально компактной группы;

(9) доказательство существования близкого обычного представления группы для (не обязательно ограниченных) квазипредставлений групп из введенного специального класса квазипредставлений групп;

(10) описание псевдопредставлений связных групп Ли, близких к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, и всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли в терминах обычных представлений, псевдохарактеров на односвязных простых эрмитово симметрических группах Ли и экспонент этих псевдохарактеров.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результвты состоят в следующем:

(1) получена характеризация локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, и изучена структура некоторых подклассов класса локально компактных групп, определяемых свойствами их гомоморфизмов и представлений, в том числе – групп, вложимых в компактные группы и в аменабельные локально компактные группы с помощью не обязательно непрерывных отображений;

(2) установлены связи между компактными и дискретными объектами в теории представлений топологических групп за пределами двойственности Понтрягина;

(3) получена характеризация непрерывных представлений хаусдорфовых топологических групп в слабой и сильной операторной топологии с помощью понятия колебания в точке;

(4) установлена непрерывность локально ограниченного гомоморфизма

между группами Ли на коммутанте группы-источника с помощью введенного автором работы понятия группы разрывов представления;

(5) теорема Ли о непрерывных конечномерных связных разрешимых групп распространена на не обязательно непрерывные представления групп Ли и групп с условиями делимости, а также теорема Фрейденталя–Вейля, теорема Вейля о полной приводимости и свойства ядер фон Неймана и Хохшильда распространены на не обязательно непрерывные представления соответствующих групп;

(6) решена проблема Каждана–Мильмана и доказана гипотеза Мищенко;

(7) установлена общая структура конечномерных квазипредставлений групп и описаны псевдопредставления связных групп Ли, близкие к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, с помощью псевдохарактеров на связных односвязных эрмитово симметрических простых группах Ли;

(8) доказана конечномерность группы вторых ограниченных когомологий связной локально компактной группы;

(9) доказано существование близкого обычного представления группы для (не обязательно ограниченных) квазипредставлений групп из введенного специального класса квазипредставлений групп;

(10) получено описание псевдопредставлений связных групп Ли, близких к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, и всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли в терминах обычных представлений, псевдохарактеров на односвязных простых эрмитово симметрических группах Ли и экспонент этих псевдохарактеров.

Публикации по теме исследования ОБЪЕМ !!!!! !!!!

Результаты работы изложены в 53 публикациях общим объемом 39,394 п.л. в рецензируемых журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории представлений топологических групп, теории псевдохарактеров на группах, теории отображений близких к представлениям и математической физике.

Методология и методы исследования

Исследование основано на общей теории топологических групп и их гомоморфизмов, структурной теории локально компактных групп и нескольких теориях двойственности для топологических групп и их представлений. Использовались также введенные автором методы исследования, связанные со свойствами группы разрывов представления топологической группы и вариациями в точке представлений в банаховых пространствах и пространствах Фреше, а также с установленными автором свойствами автоматической непрерывности нетривиальных псевдохарактеров на группах Ли.

Положения, выносимые на защиту

(1) Характеризация локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, и структура некоторых подклассов класса локально компактных групп, определяемых свойствами их гомоморфизмов и представлений, в том числе – групп, вложимых в компактные группы и в аменабельные локально компактные группы с помощью не обязательно непрерывных отображений;

(2) Соотношение между компактными и дискретными объектами в теории представлений топологических групп за пределами двойственности Понтрягина и зависимость этой связи от условия конечномерности всех неприводимых унитарных представлений группы;

(3) Непрерывные представления хаусдорфовых топологических групп в слабой и сильной операторной топологии характеризуются с помощью понятия колебания в точке;

(4) Локально ограниченный гомоморфизм между группами Ли является непрерывным на коммутанте группы-источника;

(5) Распространение теоремы Ли о непрерывных конечномерных связных разрешимых групп на не обязательно непрерывные представления групп Ли и групп с условиями делимости, а также распространение теоремы Фрейденталя–Вейля, теоремы Вейля о полной приводимости и свойств ядер фон Неймана и Хохшильда на не обязательно непрерывные представления соответствующих групп;

(6) Проблема Каждана–Мильмана имеет положительное решение, а гипотеза Мищенко о величине колебания в точке для конечномерных представлений связных групп Ли верна;

(7) Общая структура конечномерных квазипредставлений групп допускает характеризацию с помощью обычных представлений, ограниченных квазипредставлений, ограниченных поправок и 2-квазикоцикла;

(8) Группа вторых ограниченных когомологий связной локально компактной группы конечномерна;

(9) Для (не обязательно ограниченных) квазипредставлений групп из введенного А.И.Штерном специального класса квазипредставлений аменабельных групп, содержащего все конечномерные квазипредставления группы, существует близкое обычное представление;

(10) Описание псевдопредставлений связных групп Ли, близких к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, и всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли в терминах обычных представлений, псевдохарактеров на односвязных простых эрмитово симметрических группах Ли и экспонент этих псевдохарактеров.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность всех результатов работы обоснована строгими математическими доказательствами.

Основные результаты диссертации многократно докладывались на научных семинарах, международных и всероссийских конференциях, в частности, на Ломоносовских чтениях в МГУ в 1983 году, на семинаре профессоров А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого на механико-математическом факультете МГУ в 1997 году, на семинаре профессора Э. Кирхберга в Гумбольдт-университете в Берлине в 1997 году, на семинаре профессора В. Люка в Мюнстере в 1997 году, на Международном конгрессе математиков в Берлине в 1998 году, на международной конференции по геометрии на острове Узедом в 1999 году, на лузинском семинаре по теории функций под руководством профессоров П. С. Ульянова и Б. С. Кашина на механико-математическом факультете МГУ в 2005 году, в Московском математическом обществе в 2007 году, на семинаре по спектральной теории профессора, действительного члена РАН В. А. Садовничего в 2009 году, на семинаре по алгебре в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН профессора, действительного члена РАН А. Н. Паршина, на семинаре профессоров А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого на механико-математическом факультете МГУ в 2010 году, на семинаре профессора О. Г. Смолянова по бесконечномерному анализу на механико-математическом факультете МГУ в 2011 году, на семинаре профессоров А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого на механико-математическом факультете МГУ в 2012 году, на Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева – Функциональные пространства - Дифференциальные операторы - Общая топология - Проблемы математического образования (Москва, Российский университет дружбы народов, Россия, 2013), на семинаре профессора О. Г. Смолянова по бесконечномерному анализу на механико-математическом факультете МГУ в 2013 году, на семинаре по спектральной теории профессора, действительного члена РАН В. А. Садовничего в 2014 году, на семинаре профессоров А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого на механико-математическом факультете МГУ в 2014 году, на семинаре профессора О. Г. Смолянова по бесконечномерному анализу на механико-математическом факультете МГУ в 2016 году, на Ломоносовских чтениях в МГУ в 2017 году, на Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. В. Фомина «Бесконечномерный анализ и теория управления,» (МГУ, 2018), на Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными и приложениям, посвящённой памяти профессора Б. Ю. Стернина (Москва, РУДН, Россия, 2018), на 5-й Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования», посвящённой 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева (Москва, Россия, 2018), на семинаре по спектральной теории профессора, действительного члена РАН В. А. Садовничего в 2019 году, на семинаре профессора О. Г. Смолянова по бесконечномерному анализу на механико-математическом факультете МГУ в 2019 году, на Международной научной конференции «Бесконечномерный анализ и теория управления», посвященной памяти С. В. Фомина (МГУ, 2019), на Международной научной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика В. А. Садовничего (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия, 2019), на Всероссийской конференции «Асимптотические методы в математической физике», посвященной памяти Виктора Павловича Маслова (2024), на Международной конференции «Математика в созвездии наук» к юбилею Ректора МГУ, академика Виктора Антоновича Садовничего (2024), на семинаре А. С. Мищенко, А. А. Арутюнова, И. К. Бабенко, В. М. Мануйлова, Ф. Ю. Попеленского и А. Ю. Савина по некоммутативной геометрии и топологии на механико-математическом факультете МГУ (2025), на научном семинаре кафедры высшей математики МФТИ (2025) и на научно-исследовательском семинаре КГЭУ-КФУ «Функциональный анализ и квантовые системы», г. Казань (2025).

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и пяти глав. Главы работы разбиты на разделы, а разделы на подразделы (параграфы). Текст диссертации изложен на 372 страницах. Нумерация утверждений, формул и замечаний подчинена нумерации глав. Номера теорем во введении соответствуют нумерации в тексте диссертации.

Основное содержание работы

Работа состоит из введения, пяти глав и заключения.

Во введении приводится обзор результатов, полученных ранее другими авторами по теме диссертации и смежным направлениям исследований и кратко излагаются основные задачи, решенные в диссертации.

В первой главе «Вопросы представимости топологических групп и их приложения» используются определения и факты из теории операторов и операторных алгебр[13], из общей топологии[14], из теории представлений групп[15], из гармонического анализа[16], и из теории топологических групп[17].

В классе локально компактных групп естественно рассматривать в качестве двойственного объекта (вообще говоря, не удовлетворяющее даже аксиоме отделимости T_0) топологическое пространство классов унитарной эквивалентности непрерывных симметричных представлений групповой алгебры локально компактной группы в топологии Джекобсона, так называемое двойственное или дуальное пространство группы. В этом направлении получены следующие результаты. Напомним, что двойственное пространство компактной топологической группы дискретно и все ее неприводимые представления конечномерны, а двойственное пространство дискретной группы компактно (но не обязательно отделимо).

Теорема 1. [51]–[53], [31]. *Локально компактная группа, двойственное пространство которой дискретно, компактна. Сепарабельная локально компактная группа, носитель регулярного представления которой дискретен,*

[13]М. М. Дэй, *Нормированные линейные пространства* (Springer, New York, 1973; русский перевод первого издания: М.: ИЛ, 1961); Ж. Диксмье, *C^* -алгебры и их представления* (Dunod, Paris, 1969; М.: Наука, 1974); Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, I. – М.: ИЛ, 1962, *Линейные операторы*, том I (Interscience Publishers, London; Interscience Publishers, New York, 1958; М.: ИЛ, 1962); Р. Е. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения* (Holt, Rinehart and Winston, New York–Chicago–San Francisco–Toronto–London, 1965; М.: Мир, 1969).

[14]Н. Бурбаки, *Общая тополгиия* (Hermann, Paris, 1949; М.: Наука, 1975.); Р. Энгелькинг, *Общая топология* (Heldermann, Berlin, 1989; русский перевод первого издания: М.: Мир, 1986.)

[15]S. A. Gaal, *Linear analysis and representation theory* (Springer, New York, 1973); M. A. Naimark and A. I. Štern [Shtern], *Theory of group representations* (Springer, New York, 1982).

[16]Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ.* Т. I: *Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представления групп* (Springer, Berlin–New York, 1979; русский перевод первого издания: М.: Наука, 1975).

[17]А. Вейль, *Интегрирование в топологических группах и его приложения* (Hermann, Paris, 1953; русский перевод первого издания: М.: ИЛ, 1950); R. Ellis, «Locally compact transformation groups,» Duke Math. J. **24**, 119–125 (1957).

компактна. Локально компактная группа, двойственное пространство которой компактно и все неприводимые непрерывные представления которой конечномерны, дискретна.

Примеры показывают, что без предположения конечномерности неприводимых представлений группы последнее утверждение неверно.

Теорема 2. [50]. *Пусть* G *– локально компактная группа. Следующие условия эквивалентны*

1. любое неприводимое непрерывное унитарное представление G *конечномерно*;

2. для любых неприводимых унитарных представлений π_1, π_2 *группы* G *тензорное произведение* $\pi_1 \otimes \pi_2$ *определяет представление групповой алгебры* $L^1(G)$ *вполне непрерывными операторами*;

3. G *– проективный предел групп Ли* G_α *,* $\alpha \in A$ *, каждая из которых содержит нормальный делитель конечного индекса* L_α *, изоморфный прямому произведению аддитивной группы конечномерного векторного пространства* V_α *и произведения компактной связной группы Ли* K_α *и центральной дискретной группы* D_α *:* $L_\alpha \sim (D_\alpha \cdot K_\alpha) \times V_\alpha$ *.*

Теорема К. Мура[18] содержит другую структурную характеризацию и не содержит аналога пункта 2.

Теорема 3. [37]. *Если семейство неприводимых непрерывных унитарных представлений топологической группы разделяет точки группы* G *, то все неприводимые непрерывные унитарные представления топологической группы* G *конечномерны и их размерности равномерно ограничены тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана* $\mathrm{VN}(G)$ *группы* G *имеет свойство Данфорда–Петтиса, а любое непрерывное унитарное факторпредставление группы* G *является кратным конечномерному неприводимому представлению группы* G *тогда и только тогда, когда алгебра Фурье–Стилтьеса* $B(G)$ *группы* G *имеет свойство Данфорда–Петтиса или тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана* $\mathrm{VN}(G)$ *группы* G *является конечной алгеброй фон Неймана типа I.*

Следующая теорема дает критерий представимости хаусдорфовой топологической группы в рефлексивных банаховых пространствах.

Теорема 4. [48]. *Отделимая топологическая группа имеет семейство (непрерывных в слабой операторной топологии) изометрических представлений в рефлексивных баназовых пространствах, разделяющих точки группы, тогда и только тогда, когда она может быть непрерывно вложена в компактную полутопологическую полугруппу.*

[18] C. C. Moore, «Groups with finite-dimensional irreducible representations».

Глава 2, «Непрерывность представлений в терминах колебания в точке», посвящена финитным условиям слабой непрерывности локально ограниченных представлений хаусдорфовых топологических групп в сопряженных банаховых пространствах и сопряженных пространствах Фреше и условиям сильной непрерывности локально ограниченных представлений хаусдорфовых топологических групп в сопряженных зубчатых банаховых пространствах и в рефлексивных пространствах Фреше.[19]

Определение 1. Пусть G – топологическая группа, π – ее (не обязательно сильно непрерывное) представление в нормированном пространстве E. Введем *сильную вариацию* $\epsilon(\pi;\xi;U) \geq 0$ *представления* π *в окрестности* U *единичного элемента* e *группы* G *на векторе* $\xi \in E$, полагая $\epsilon(\pi;\xi;U)$ равной верхней грани $\sup_{g\in U}\|\pi(g)\xi - \xi\|$, и *сильную вариацию* $\epsilon(\pi;\xi) \geq 0$ *представления* π *в единичном элементе* e *группы* G *на векторе* $\xi \in E$, полагая $\epsilon(\pi;\xi)$ равной нижней грани величин $\sup_{g\in U}\|\pi(g)\xi - \xi\|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$, т.е.

$$\epsilon(\pi;\xi) = \inf_{U\ni e}\epsilon(\pi;\xi;U) = \inf_{U\ni e}\sup_{g\in U}\|\pi(g)\xi - \xi\|.$$

Аналогично вводится *слабая вариация* $\omega(\pi,\xi,f)$ *представления* π *на векторе* $\xi \in E$ *и функционале* $f \in E^*$, $\|\xi\| \leq 1$, $\|f\| \leq 1$:

$$\omega(\pi,\xi,f) = \inf_{U\ni e}\sup_{g\in U}|f(\pi(g)\xi - \xi)|$$

(E^* – пространство, сопряженное к E), и *слабая* вариация* $\omega^*(\pi,\xi,f)$ *представления* π *на векторе* $\xi \in E$ *и функционале* $f \in E_*$, $\|\xi\| \leq 1$, $\|f\| \leq 1$, если E – пространство, сопряженное к E_*:

$$\omega^*(\pi,\xi,f) = \inf_{U\ni e}\sup_{g\in U}|(\pi(g)\xi - \xi)f|.$$

Определение 2. Пусть G – топологическая группа, π – её (теоретико-групповое) представление в нормированном пространстве E; тогда π называется *локально ограниченным*, если существует окрестность V единичного элемента e в G и постоянная C, удовлетворяющие условию $\|\pi(g)\| \leq C$ для любого $g \in V$.

[19]Поскольку представления не предполагаются ограниченными, теорема Джонсона (Johnson B. E., Cohomology of Banach algebras, Mem. Amer. Math. Soc., No. 127, American Mathematical Society, Providence, RI, 1972) об эквивалентности условий слабой и сильной непрерывности представлений локально компактных групп в банаховых пространствах, вообще говоря, не может быть применена в этом случае.

Определение 3. Пусть E – банахово пространство, сопряженное к некоторому банаховому пространству E_*, и пусть $\mathcal{L}(E)$ – пространство непрерывных линейных операторов в E. *Слабой* операторной топологией* в $\mathcal{L}(E)$ назовем топологию, определяемую семейством полунорм вида $T \mapsto |f(Tx)|$, где $T \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ и $f \in E_*$.

Определение 4. Банахово пространство F называется пространством, имеющим *свойство точек непрерывности*, если для любого непустого ограниченного слабо замкнутого множества $M \subset F$ существует точка в M, в которой ограничение на M тождественного отображения пространства F в слабой топологии в пространство F в сильной топологии непрерывно.

Любое рефлексивное банахово пространство, как и любое банахово пространство со свойством Радона–Никодима, имеет свойство точек непрерывности[20]. В частности, пространство $l^1(M)$ для любого (не обязательно счетного) множества M и пространство операторов со следом в любом (не обязательно сепарабельном) гильбертовом пространстве имеют свойство точек непрерывности[21].

Теорема 5. [40]. *Пусть E – сопряженное банахово пространство, G – топологическая группа, и π – локально равномерно ограниченное (теоретико-групповое) представление группы G в сопряженном банаховом пространстве E слабо* непрерывными линейными операторами. Если для некоторого $q < 1$ условие $\omega^*(\pi, \xi, f) \le q$ выполняется для всех $\xi \in E$ и $f \in E_*$, $\|\xi\| \le 1$, $\|f\| \le 1$, то $\omega^*(\pi, \xi, f) = 0$, т.е. представление π непрерывно в слабой* операторной топологии. Если пространство E имеет свойство точек непрерывности, то представление π непрерывно в сильной операторной топологии.*

Это утверждение распространено в [6], [3] на (теоретико-групповые) представления хаусдорфовых топологических групп в сопряженных пространствах Фреше (в слабой* операторной топологии) и в рефлексивных пространствах Фреше (в сильной операторной топологии).

Следствие 1. [3]. *Пусть G – связная локально компактная группа и ρ – её непрерывное отображение в группу обратимых линейных операторов в банаховом пространстве E. Если существует такое (теоретико-групповое)*

[20]См. Bourgain J., Rosenthal H. P., “Geometrical implications of certain finite-dimensional decompositions,” Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B, l32 (1980), № 1, 57–82; Bourgin R. D., *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon–Nikodým Property*, Lect. Notes Math. **9**93 (Springer-Verlag, Berlin–New York, 1983); Ghoussoub N., Maurey B. “ G_δ embeddings in Hilbert space. II,” Math. Scand., **5**4 (1984), 70–78.

[21]Chu Cho-Ho, “A note on scattered C^* -algebras and the Radon–Nikodým property,” J. London Math. Soc., 24 (1981), № 3, 533–536.

представление π *группы* G *в* E *, что* $\|\pi(g)-\rho(g)\| \le C$ *для всех* $g \in G$ *и некоторого* C *,* $C < 1/2$ *, то представление* π *непрерывно.*

Получены варианты усиления теоремы Ли о существовании одномерного подпредставления для любого непрерывного конечномерного комплексного представления связной разрешимой группы Ли для не обязательно непрерывных представлений и групп, не являющихся группами Ли и порожденных делимыми множествами.

Определение 5. Подмножество X группы G называется *делимым*, если для каждого $g \in X$ и каждого натурального n существует элемент $h \in X$, для которого $h^n = g$. Группа G называется делимой, если множество G делимо.

Теорема 6. [10]. *Пусть* G *– разрешимая делимая группа. Тогда каждое конечномерное представление* G *допускает базис в пространстве представления, в котором матрицы всех операторов представления являются верхними треугольными. В частности, каждое неприводимое конечномерное представление* G *одномерно.*

Теорема 7. [11]. *Пусть* G *– разрешимая группа, имеющая порождающее подмножество* $X \subset G$ *, образованное делимыми элементами. Тогда каждое конечномерное представление* π *группы* G *допускает базис в пространстве представления, в котором матрицы всех операторов представления являются верхнетреугольными. В частности, каждое неприводимое конечномерное представление* G *является одномерным.*

Теорема 8. [8]. *Если* G *– связная разрешимая группа Ли, а* π *– (не обязательно непрерывное) представление* G *в конечномерном векторном пространстве* E *, то существует базис в* E *, в котором матрицы операторов представления* π *имеют верхнюю треугольную форму.*

Теорема 9. [26], [28], [32]. *Пусть* G *– линейная группа Ли. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) каждое точное конечномерное локально ограниченное (не обязательно непрерывное) конечномерное представление G *является гомеоморфизмом*;

(2) G *– совершенная линейная группа Ли*;

(3) G *– совершенная линейная группа Ли, снабженная топологией, индуцированной обертывающей матричной группой.*

Глава 3 «Условия непрерывности локально ограниченных представлений топологических групп.»

Определение 6. Пусть G – топологическая группа, π – ее (не обязательно непрерывный) гомоморфизм в отделимую топологическую группу H. Мы будем говорить, что π *локально относительно компактен*, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G, что замыкание множества $\pi(V)$ является компактным подмножеством топологической группы H. Мы будем говорить, что π *локально ограничен*, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G, что множество $\pi(V)$ является вполне ограниченным подмножеством топологической группы H, т.е. для любой окрестности W единичного элемента e_H в H существует конечное число сдвигов окрестности W, объединение которых покрывает множество $\pi(V)$.

Замечание 1. Очевидно, если группа H локально компактна, то любой локально ограниченный гомоморфизм в группу H автоматически является локально относительно компактным.

Определение 7. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ – направленное по убыванию семейство окрестностей единицы в отделимой топологической группе G. Для любого локально относительно компактного (не обязательно непрерывного) гомоморфизма π группы G в отделимую топологическую группу H введем обозначение $\mathrm{DG}(\pi) = \bigcap_{U\in\mathfrak{U}} \overline{\pi(U)}$. Здесь и далее черта означает замыкание в соответствующей топологии (в данном случае – в топологии группы H).

Теорема 10. [34]. *Пусть G – топологическая группа, а π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в отделимую топологическую группу H. Множество $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной подгруппой топологической группы H и компактной нормальной подгруппой в замкнутой подгруппе $\overline{\pi(G)}$ группы H. Кроме того, для любой окрестности V множества $\mathrm{DG}(\pi)$ существует окрестность единицы U такая, что $\overline{\pi(U)} \subset V$, и гомоморфизм π непрерывен тогда и только тогда, когда $\mathrm{DG}(\pi) = \{e_H\}$.*

Предложение 1. [4]. *Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ – направленное по убыванию семейство окрестностей единицы в топологической группе G. Для любого локально относительно компактного (не обязательно непрерывного) гомоморфизма π группы G в отделимую топологическую группу H рассмотрим направленность $\{\pi(g_U) \mid g_U \in U \in \mathfrak{U}_G\}$ в H. Тогда все предельные точки направленности $\{\pi(g_U)\}$ принадлежат $\mathrm{DG}(\pi)$.*

Определение 8. [34]. Пусть G – топологическая группа, а π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H. Компактная нормальная подгруппа $\mathrm{DG}(\pi)$ замыкания образа группы G при гомоморфизме π называется *группой разрывов* гомоморфизма π.

В частности, группа разрывов определена для любого локально ограниченного гомоморфизма в локально компактную группу и, тем самым, и для любого локально ограниченного конечномерного представления топологической группы.

Определение 9. Пусть G – группа. Множество $X \subset G$ называется *делимым*, если для любого элемента $x \in X$ и любого натурального числа p существует такой элемент $y \in X$, что $y^p = x$. Группа G называется *локально делимой*, если операция возведения в любую натуральную степень p открыта в единице группы, то есть множество p -х степеней элементов, пробегающих любую окрестность единицы в G, содержит некоторую окрестность единицы в G.

Очевидно, любая группа Ли локально делима.

Лемма 1. [34], [4]. *Пусть G – локально делимая группа, а π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в отделимую топологическую группу H. Тогда группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной связной подгруппой группы H.*

Лемма 2. [34], [4]. *Пусть G – топологическая группа, G' – коммутант группы G, а π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в некоторую отделимую топологическую группу H. Коммутант группы разрывов гомоморфизма π содержится в группе разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ гомоморфизма π на коммутант G' группы G. Если отображение $[\cdot,\cdot]\colon G \times G \to G' \subset G$ открыто в $(e,e) \in G \times G$, то группа разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ гомоморфизма π на коммутант G' совпадает с коммутантом группы разрывов гомоморфизма π.*

Теорема 11. [34], [4], [5], [19]. *Любой локально ограниченный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли непрерывен на коммутанте G' группы G во внутренней топологии группы G. Ограничение этого гомоморфизма на коммутант G' непрерывно в топологии, индуцированной исходной топологией группы G, тогда и только тогда, когда ограничение гомоморфизма на центр подгруппы Леви S группы G непрерывно в топологии, индуцированной исходной топологией группы G.*

Теорема 12. [34], [4]. *Группа разрывов каждого локально ограниченного гомоморфизма группы Ли в группу Ли коммутативна и, следовательно, центральна в компоненте единицы замыкания образа гомоморфизма. В частности, группа разрывов любого локально ограниченного конечномерного представления группы Ли коммутативна.*

Во время одного из докладов автора по теории отображений, близких к представлениям, на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого, А. С. Мищенко высказал гипотезу, что для конечномерных локально ограниченных представлений связных групп Ли слабая вариация представления в точке может принимать только три значеиия: 0, 2 и ∞ .

Теорема 13. (*Справедливость гипотезы Мищенко.*) [41], [42]. *Для конечномерных локально ограниченных представлений групп Ли слабая вариация представления в точке может принимать только три значения: 0, 2 и* ∞ .

Определение 10. Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_G$ – направленное по убыванию семейство компактных нормальных подгрупп в проективно-лиевой топологической группе G , факторгруппы по которым являются группами Ли. Пусть π – теоретико-групповой гомоморфизм группы G в отделимую топологическую группу H . Положим $\mathrm{FDG}(\pi) = \bigcap_{N\in\mathfrak{N}} \overline{\pi(N)}$. Это – замкнутая нормальная подгруппа в замыкании образа гомоморфизма π , так называемая финальная группа разрывов π . Гомоморфизм π называется *финально непрерывным*, если $\mathrm{FDG}(\pi) = \{e_H\}$.

Теорема 14. [38], [39], [24]. *Пусть* G *– почти связная локально компактная группа,* H *– связная локально компактная группа, а* $\pi\colon G \to H$ *– локально ограниченный гомоморфизм. Если гомоморфизм* π *финально непрерывен, то он непрерывен на коммутанте* G_0' *компоненты единицы* G_0 .

Следующие теоремы усиливают теорему Фрейденталя–Вейля.

Теорема 15. [29]. *Пусть* G *– связная группа Ли,* K *– компактная топологическая группа, и* $J\colon G \to K$ *– (не обязательно непрерывное) гомоморфное вложение. Тогда группа* G *топологически изоморфна прямому произведению связной компактной группы Ли и (конечномерной) векторной группы.*

Теорема 16. [13]. *Пусть* G *– связная группа Ли, допускающая (не обязательно непрерывное) локально ограниченное вложение в группу Ли* H *, которая аменабельна как локально компактная группа. Тогда* G *также аменабельна как локально компактная группа.*

Следующая теорема – распространение теоремы Германа Вейля.

Теорема 17. [7]. *(Не обязательно непрерывное) локально ограниченное конечномерное представление связной группы Ли вполне приводимо тогда и только тогда, когда ограничение представления на радикал вполне приводимо.*

Определение 11. Пусть $\mathrm{urk}(G)$ – пересечение ядер непрерывных конечномерных представлений группы G (ядро Хохшильда). Определим "ядро локально ограниченных конечномерных представлений" $\mathrm{lbrk}(G)$ связной локально компактной группы G как пересечение ядер всех (не обязательно непрерывных) локально ограниченных конечномерных представлений группы G .

Определение 12. Пусть $vNk(G)$ – ядро фон Неймана группы G, т.е. пересечение ядер всех неприводимых конечномерных непрерывных комплексных унитарных представлений группы G, и пусть $svNk(G)$ – наименьшее ядро фон Неймана группы G (пересечение ядер всех неприводимых конечномерных (не обязательно непрерывных) комплексных унитарных представлений группы G).

Теорема 18. [30]. *Ядро фон Неймана $vNk(G)$ произвольной связной группы Ли G с разложением Леви $G = SR$, где R – радикал, а S – некоторая подгруппа Леви группы G, является нормальной подгруппой, порождённой замыканием связной компоненты H_0 группы H, где $H = H(S)$ – нормальная подгруппа группы S, порождённая всеми элементами группы S, которые коммутируют с любым элементом максимальной связной компактной нормальной подгруппы K группы S, вместе с замыканием коммутатора $[R,R]$ группы R.*

Аналогичная характеризация получена ([30], [25], [27], [28]) для наименьшего ядра фон Неймана $svNk(G)$ связной группы Ли G, для ядра Хохшильда и для ядра локально ограниченных конечномерных представлений $\mathrm{urk}(G)$.

Теорема 19. [25], [27], [28]. *Пусть G – связная локально компактная группа. Следующие условия равносильны:*

1. семейство конечномерных локально ограниченных линейных представлений группы G разделяет точки G;

2. $\mathrm{urk}(G) = \{e_G\}$;

3. G является проективным пределом связных линейных групп Ли;

4. наибольшая некомпактная (аналитическая) полупростая подгруппа Ли S_1 в G является линейной группой Ли (конечно, это значит, что соответствующая группа $\mathrm{urk}(S_1)$ тривиальна) и (единственная) максимальная компактная подгруппа замыкания в G радикала $\mathrm{rad}(G')$ коммутанта G' группы G также тривиальна.

Теорема 20. [26], [32]. *Связная группа Ли допускает семейство локально ограниченных (не обязательно непрерывных) конечномерных представлений, разделяющее точки группы (например, точное локально ограниченное (не обязательно непрерывное) конечномерное представление) тогда и только тогда, когда она допускает непрерывное точное конечномерное представление, т.е. тогда и только тогда, когда она является линейной группой Ли.*

<u>Глава 4.</u> «Отображения близкие к представлениям топологических групп»

Определение 13. Пусть G – группа. Вещественная функция f на G называется (*вещественным*) *квазихарактером* на G, если множество $\{f(xy) - f(x) - f(y) \mid x,y \in G\}$ ограничено. Вещественный квазихарактер f на G

называется (*вещественным*) *псевдохарактером* на G, если $f(x^n) = nf(x)$ для всех $x \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 21. [47], [49], [34], [16], [17[, [20]. *Пусть G – группа, f – вещественный квазихарактер на G.*

(*a*) *Для любого $g \in G$ существует предел $\varphi(g) = \varphi_f(g) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} f(g^n)$, являющийся единственным псевдохарактером φ, для которого разность $f - \varphi$ ограничена. Если $|f(gh) - f(g) - f(h)| \le C$ для всех $g, h \in G$, то $|f(g) - \varphi(g)| \le C$ для всех $g \in G$ и $|\varphi(gh) - \varphi(g) - \varphi(h)| \le 4C$ для всех $g, h \in S$.*

(*b*) *Если H – односторонне аменабельная подгруппа в G, то ограничение отображения φ на H есть аддитивный характер H, т.е. $\varphi(gh) - \varphi(g) - \varphi(h) = 0$ для всех $g, h \in H$. Кроме того, величина $\varphi(g)$, $g \in R$, может быть определена как общее значение всех односторонних инвариантных средних на соответствующей ограниченной функции $h \mapsto f(gh) - f(h)$, $h \in H$, для каждого $g \in H$.*

(*c*) $\varphi(gh) = \varphi(hg)$ *для всех $g, h \in G$.*

(*d*) *Если G – топологическая группа и φ – локально ограниченный псевдохарактер на G, то φ непрерывен. В частности, если f – непрерывный квазихарактер на G, то φ непрерывен.*

(*e*) *Если G – группа, N – нормальная подгруппа в G, π – канонический эпиморфизм G на G/N и псевдохарактер φ обращается в нуль на N, то существует такой псевдохарактер ψ группы G/N, что $\varphi = \psi \circ \pi$. Если G – локально компактная группа, N замкнут и φ непрерывен, то ψ непрерывен.*

Пусть $H^n_b(G)$ есть n-ая группа когомологий комплекса $0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d^0=0} C^1(G) \xrightarrow{d^1} C^2(G) \longrightarrow \cdots$ (n-ая вещественная непрерывная ограниченная группа когомологий группы G), где $BC^n(G)$ – вещественное векторное пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций f на группе G^n, $f\colon (g_1, \ldots, g_n) \mapsto f(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{R}$, $g_i \in G$, а $d^n f(g_1, \ldots, g_{n+1}) = f(g_2, \ldots, g_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n)$

Теорема 22. [43], [44], [42]. [41], [23]. [46]. *Пусть G – группа, φ – псевдохарактер на G. Функция $\psi(g_1, g_2) = \varphi(g_1 g_2) - \varphi(g_1) - \varphi(g_2)$, $g_1, g_2 \in G$, определяет ограниченный 2-коцикл ψ на группе G. Коцикл ψ тривиален как ограниченный коцикл (т.е. является кограницей ограниченной цепи) тогда и только тогда, когда квазихарактер φ является ограниченным возмущением обычного аддитивного вещественного характера группы G.*

Определение 14. Простая группа Ли называется *эрмитово симметрической*, если центр её универсальной накрывающей группы бесконечен.

Теорема 23. [43], [34]. *Для любой эрмитово симметрической простой группы Ли G любая функция f из теоремы Гишарде–Вигнера*[22] *ограничена на $G{\times}G$.*

Введем теперь псевдохарактер, непосредственно связанный с 2-коциклом Гишарде–Вигнера на эрмитово симметрической простой группе Ли.

Определение 15. Пусть G – связная односвязная простая группа Ли, центр которой бесконечен (и, таким образом, соответствующее симметрическое пространство является эрмитово симметрическим]rom), и пусть K – аналитическая подгруппа группы G, отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли G. Осуществим изоморфное отождествление центра Z_K аналитической группы K с аддитивной группой поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ (например, с помощью натурального параметра на однопараметрической подгруппе, определяемой подгруппой Z_K). Рассмотрим разложение Ивасавы $G = KAN$, связанное с группой K. Пусть A – абелева, а N – нильпотентная группа в этом разложении, и пусть $g = k(g)a(g)n(g)$, $g \in G$, $k(g) \in K$, $a(g) \in A$, $n(g) \in N$ – соответствующее разложение элемента $g \in G$. Отображение $\varpi\colon g \mapsto k(g)$, $g \in G$, переводящее каждый элемент $g \in G$ в компоненту $k(g) \in K$ его разложения Ивасавы, непрерывно. Рассмотрим композицию ψ отображения $\varpi\colon g \mapsto k(g)$, $g \in G$ и непрерывной проекции π, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$. Эта композиция $\psi = \pi \circ \varpi$ определяет некоторый квазихарактер на G. Псевдохарактер θ, соответствующий этому квазихарактеру, мы называем *псевдохарактером Гишарде–Вигнера.*

Теорема 24. [34]. *Пусть G – простая группа Ли. Если G не является эрмитово симметрической группой или если центр группы G конечен, то любой псевдохарактер на G тождественно равен нулю. Если G – эрмитово симметрическая группа с бесконечным центром, то любой псевдохарактер на G кратен псевдохарактеру Гишарде–Вигнера на G. В частности, любой псевдохарактер на простой группе Ли непрерывен.*

Определение 16. Пусть G – связная полупростая группа Ли и пусть f – псевдохарактер на G. Поскольку при необходимости группу G можно заменить её универсальной накрывающей группой (и обозначить эту группу тем же символом G), мы вправе считать, что группа G односвязна (и, таким образом, является произведением односвязных простых групп Ли) и рассматривать псевдохарактер f как псевдохарактер (который мы снова обозначим через f) на этой односвязной группе, или, иначе говоря, как псевдохарактер на указанном выше произведении простых групп Ли. Этот псевдохарактер является суммой тривиальных продолжений его ограничений на простые факторы. Эти ограничения либо равны нулю (например, если рассматриваемый фактор компактен

[22] Guichardet A., Wigner D., Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) , 1978, vol. 11, pp. 277–292.

или некомпактен, но не эрмитово симметричен) или являются ненулевыми кратными соответствующих псевдохарактеров Гишарде–Вигнера, продолженных на всю группу нулём, т.е. равных нулю на всех остальных простых факторах. В дальнейшем, любая линейная комбинация этих продолжений псевдохарактеров Гишарде–Вигнера на эрмитово симметрических факторах G_i группы G называется *псевдохарактером Гишарде–Вигнера* на G.

Теорема 25. [44], [43], [42], [41], [36]. *Вторая вещественная непрерывная ограниченная группа когомологий $H_b^2(G,\mathbb{R})$ локально компактной группы G конечномерна тогда и только тогда, когда вторая вещественная непрерывная ограниченная группа когомологий $H_b^2(G/G_0,\mathbb{R})$ фактор-группы G/G_0 группы G по связной компоненте единицы G_0 конечномерна. В частности, вторая вещественная непрерывная ограниченная группа когомологий почти связной локально компактной группы конечномерна.*

Определение 17. Если ЛВП E метризуемо, d – метрика в E, G – группа, а $\varepsilon > 0$, то отображение $\pi\colon G \to \mathcal{L}(E)$ называется ε-квазипредставлением относительно d, если $d(\pi(g_1g_2)\xi, \pi(g_1)\pi(g_2)\xi) \le \varepsilon d(\xi, 0)$, $g_1, g_2 \in G$, $\xi \in E$, а число ε называется *дефектом* квазипредставления π.

Теорема 26. [17.] *Одномерное локально ограниченное псевдопредставление π с дефектом $\varepsilon < q_0 \le \sqrt{3}/5$ почти связной локально компактной группы G со связной компонентой G_0 равно экспоненте псевдохарактера на G, совпадающей с π на G_0 и на дополнительной подгруппе Д. Ли*[23] *D группы G тогда и только тогда, когда π тривиально на D.*

Пусть G – топологическая группа, e – единичный элемент в G, B – банахово пространство, $\mathcal{L}(B)$ – алгебра ограниченных линейных операторов в B, 1_B – единичный оператор в B. Группа G называется *устойчиво представимой* в B, если для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует число $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если π – слабо непрерывное δ-квазипредставление группы G в B обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям $\pi(e) = 1_B$ и $\|\pi(g)\| \le C$ для всех $g \in G$, то существует такое слабо * непрерывное представление ρ группы G в B^*, что $\|\pi(g^{-1})^* - \rho(g)\| \le \varepsilon$ для всех $g \in G$, т.е. отображение $g \mapsto \pi(g^{-1})^*$ является ε-возмущением обычного (слабо * непрерывного) представления группы G.

Следующая теорема – непосредственное следствие теоремы Б. Джонсона о почти гомоморфизмах аменабельных банаховых алгебр[24].

[23] D. H. Lee, “Supplements for the identity component in locally compact groups,” Math. Z., **104**, № 1, 28–49 (1968).

[24] Johnson B. E., там же.

Теорема 27. [39], [27]. *Любая аменабельная локально компактная группа устойчиво представима в любом сопряженном банаховом пространстве.*

Лемма 3. [45], [34]. *Пусть* G *– группа,* π *– ее неограниченное квазипредставление в банаховом пространстве* $E = E_\pi$ *.*

1) *Квазипредставление* π *имеет хотя бы одну неограниченную орбиту.*

2) *Для любых* $g, h \in G$ *и* $\xi \in E$ π *-орбита вектора* $(\pi(gh) - \pi(g)\pi(h))\xi$ *ограничена. В частности, если все ненулевые* π *-орбиты неограничены, то* π *– обычное представление.*

3) *Пусть* L *– векторное подпространство* E*, образованное такими элементами* $x \in E$*, что орбита* $O_\pi(x) = \{\pi(g)x,\ g \in G\}$ *ограничена. Снабдим* L *нормой* $\|x\|_L = \sup_{g\in G} \|\pi(g)x\|$*,* $x \in E$*, где* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_E$*, Тогда тождественное отображение* $j\colon L \to E$ *непрерывно и* L *полно относительно нормы* $\|\cdot\|_L$*. Векторное подпространство* $L \subset E$ *инвариантно относительно всех операторов* $\pi(g)$*,* $g \in G$*, и соотношения* $\|\pi(g)x\|_L \leq \|x\|_L + \epsilon\|x\|$*,* $\|(\pi(k)\pi(l) - \pi(kl))x\|_L \leq \epsilon\|\pi(l)x\| + 2\epsilon\|x\|$*,* $g, k, l \in G$*,* $x \in E$*, выполняются для всех* $g, k, l \in G$*; в частности,* $\|\pi(k)\pi(l) - \pi(kl)\|_L \leq 3\epsilon$ *для всех* $k, l \in G$*.*

4) *Пусть* ρ *– квазипредставление группы* G*, являющееся ограниченным возмущением квазипредставления* π*, т.е. отображение* $\rho - \pi\colon G \to \mathcal{L}(E)$ *имеет ограниченный образ. Тогда образ оператора* $\rho(g) - \pi(g)$ *содержится в подпространстве* $L \subset E$ *для любого* $g \in G$*. В частности, если все ненулевые* π*-орбиты в* E *неограничены (и* π *– обычное представление, см. утверждение 2)), то* π *жестко, т.е. если ограниченное возмущение* ρ *квазипредставления* π *является квазипредставлением, то* ρ *совпадает с* π*.*

Определение 18. Пусть G – группа, а π – ε -квазипредставление группы G в банаховом пространстве E . Отображение π называется ε -*псевдопредставлением*, если для всех $g \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}$ существует такой линейный оператор $A(n,g)$ в $L(E^*)$, что $\|A(n,g) - \mathbf{1}_{E^*}\| \leq \varepsilon$, $\pi(g^n)^* = A(n,g)(\pi(g)^*)^n A(n,g)^{-1}$, $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\|\cdot\|$ – операторная норма в $L(E^*)$, а $\mathbf{1}_{E^*}$ – единичный оператор в E^* . Псевдопредставление называется *чистым*, если его ограничение на каждую циклическую подгруппу является обычным представлением этой подгруппы.

Теорема 28. [47], [34], [23]. *Пусть* G *– группа, а* π *– квазипредставление группы* G *в конечномерном векторном пространстве* $E = E_\pi$ *. Пусть* E^* *– пространство, сопряжённое к* E *. Пусть* L *– множество векторов* $\xi \in E$ *, орбита которых* $\{\pi(g)\xi \mid g \in G\}$ *ограничена в* E*; пусть* M *– множество функционалов* $f \in E^*$ *, орбита которых* $\{\pi(g)^* f \mid g \in G\}$ *ограничена в* E^**; тогда* L *и аннулятор* $M^\perp$ *–* π *-инвариантные векторные подпространства в* E *. Рассмотрим возрастающий набор подпространств* $\{0\}$ *,* $L \cap M^\perp$ *,* $M^\perp$ *,* $L + M^\perp$ *,* $E = E_T$ *и запишем матрицу* $t(g)$ *оператора* $\pi(g)$ *,* $g \in G$ *, в блочной форме, отвечающей разложению пространства* E *в прямую сумму подпространств* $L \cap M^\perp$ *,* $M^\perp \setminus (L \cap M^\perp)$ *,*

$L \setminus (L \cap M^{\perp})$, и $E \setminus (L + M^{\perp})$, где символ " $\setminus$ " означает взятие дополнительного подпространства:

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G.$$

(Здесь $t_{23}(g) = 0$, так как L инвариантно относительно T .) Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) *отображения α , δ , γ , σ и χ ограничены*;

(2) *матричнозначные отображения π_1 и π_2 , $\pi_1(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix}$ и $\pi_2(g) = \begin{pmatrix} \beta(g) & \rho(g) \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix}$, $g \in G$ являются представлениями группы G*;

(3) *отображение τ является квазикоциклом относительно представлений π_1 и π_2 , т.е. отображение $(g,h) \mapsto \tau(gh) - \alpha(g)\tau(h) - \varphi(g)\rho(h) - \tau(g)\delta(h)$, $g,h \in G$, ограничено.*

Конечномерные квазипредставления почти ограничены (см. определение 19).

Определение 19. Квазипредставление π группы G с дефектом ε в банаховом пространстве называется *почти ограниченным*, если существует такое $C > 0$, что $\|\pi(ghk) - \pi(g)\pi(h)\pi(k)\| \le C\varepsilon$ для всех $g,h,k \in G$.

Теорема 29. [21], [18]. *Пусть π – почти ограниченное квазипредставление (не обязательно ограниченное) аменабельной группы G в сопряженном банаховом пространстве E с дефектом δ и постоянной C . Если дефект δ достаточно мал, то существует обычное представление группы G , близкое к π , расстояние которого до π в смысле нормы оператора – равномерная бесконечно малая при $\delta \to 0$.*

Глава 5. «Конечномерные квазипредставления связных групп Ли»

Следующая теорема дает полное решение проблемы Каждана–Мильмана.

Теорема 30. [35], [34]. *Пусть G – связная полупростая компактная группа Ли. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого конечномерного ограниченного δ-квазипредставления π группы G существует непрерывное представление S (в том же векторном пространстве), равномерно ε-близкое к π .*

Теорема 31. [15], [9], [12], [14]. *Пусть G – связная односвязная группа Ли, а π – квазипредставление группы G с достаточно малым дефектом* *в конечномерном векторном пространстве* E. *По теореме Леви–Мальцева, группу* G *можно представить в виде полупрямого произведения односвязного радикала* R *группы* G *и подгруппы Леви* S. *Пусть* E^* *– пространство, сопряжённое к* E. *Рассмотрим возрастающий набор подпространств* $\{0\}$, $L \cap M^\perp$, $M^\perp$, $L + M^\perp$, E *из теоремы об общем виде конечномерных квазипредставлений, и запишем матрицу* $t(g)$ *оператора* $\pi(g)$, $g \in G$, *в соответствующей блочной форме, где символ "*$A \setminus B$*" для векторных подпространств* B *и* A, $B \subset A$, *означает переход к подпространству в* A, *дополнительному к* B:

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G.$$

Нули в матрицах означают соответствующие нулевые операторы; кроме того, справедливы следующие утверждения.

(i) *Ограниченные представления* α *и* δ *эквивалентны прямым суммам произведений* G *-центральных унитарных характеров группы* R (G *-центральность означает, что эти характеры инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы* G) *на непрерывные неприводимые унитарные представления компактных факторгрупп группы* S. *Отображения* φ *и* ρ *удовлетворяют условиям* $\varphi(sr) = \alpha(s)\varphi(r)$ *и* $\rho(rs) = \varphi(r)\delta(s)$ *для любых* $s \in S$ *и* $r \in R$ *и, таким образом, при данных* α *и* δ, *определяются своими ограничениями на радикал* R.

(ii) *Если группа* G *(или* S*) имеет нетривиальную эрмитово симметрическую факторгруппу, то отображение* γ *является шевелением прямой суммы* Γ *(обычных) произведений некоторых непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной факторгруппы* W *группы* G, *некоторого одномерного псевдопредставления Гишарде–Вигнера (т.е. отображения вида* $g \to \exp(ir\theta(g))$, $g \in G$, *для некоторого* $r \in \mathbb{R}$, *где* θ *– псевдохарактер Гишарде–Вигнера на* G*), и некоторых* G *-центральных унитарных характеров группы* R. *Если группа* G *не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторгрупп, то отображение* γ *является шевелением прямой суммы (обычных) произведений некоторых непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной факторгруппы группы* G *и некоторых* G *-центральных унитарных характеров группы* R, *и в этом случае мы обозначим аппроксимирующее представление тем же символом* Γ.

(iii) *Если группа* S *имеет нетривиальную эрмитово симметрическую факторгруппу и если* $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, *где каждая из групп* S_i *проста, то отображение* τ *является шевелением некоторого отображения* $\varpi \colon G \to$

$\mathcal{L}(E \setminus (L+M^{\perp}), L \cap M^{\perp})$ *вида*

$$\varpi(rs) = \alpha(r)\sum_{i=1}^{n}\theta_i(s)A_i + \varpi(r)\delta(s), \qquad r \in R, \quad s \in S,$$

где $A_i \in \mathcal{L}(E \setminus (L+M^{\perp}), L \cap M^{\perp})$ *– такие линейные операторы, что пересечение их ядер в подпространстве* $E \setminus (L+M^{\perp})$ *тривиально,* $\cap_{i=1}^{n} \ker A_i = \{0\} \subset E \setminus (L+M^{\perp})$, *а каждая функция* θ_i *является продолжением псевдохарактера Гишарде–Вигнера на* G_i *(если он есть) на всю группу* G *(прямое произведение конечного числа простых односвязных групп Ли* G_i *) нулем на все простые сомножители, отличные от* G_i *. В частности, если группа* S *– простая односвязная эрмитово симметрических группа, то* $\varpi(g) = \theta(g)A$ *,* $g \in G$, *где* θ *псевдохарактер Гишарде–Вигнера на* G *, а* A *– некоторый линейный изоморфизм* $A \in \mathcal{L}(E \setminus (L+M^{\perp}), L \cap M^{\perp})$. *Если группа* G *не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторгрупп, то отображение* τ *является шевелением некоторого отображения* $\varpi\colon G \to \mathcal{L}(E \setminus (L+M^{\perp}), L \cap M^{\perp})$ *(которое мы, таким образом, также обозначим символом* ϖ *) вида* $\varpi(rs) = \varpi(r)\delta(s)$ *,* $r \in R$ *,* $s \in S$ *, где ограничение отображения* τ *на* R *является шевелением* $\alpha|_R$ *-* $\delta|_R$ *- коцикла* ϖ *, т.е.* $\varpi(r_1 r_2) = \alpha(r_1)\varpi(r_2) + \varpi(r_1)\delta(r_2)$ *,* $r_1, r_2 \in R$ *, и, кроме того, норма разности* $\varpi(s^{-1}rs) - \delta(s^{-1})\varpi(r)\delta(s)$ *равномерно мала для* $s \in S$ *и* $r \in R$ *.*

(iv) *Величина возмущений (в равномерной норме на группе* G *), упомянутых в пунктах (ii) и (iii) , определяется нормой ограниченного отображения* γ *, величиной отображений* σ *и* χ *в той же норме и дефектом исходного квазипредставления* π *и, при данной оценке норм* γ *,* σ *и* χ *, сколь угодно мала при достаточно малом дефекте квазипредставления* π *.*

(v) *Отображение*

$$\Theta(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & 0 & \varpi(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \Gamma(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G,$$

ограниченно аппроксимирующее квазипредставление π *, является чистым псевдопредставлением группы* G *, и отображение* Θ *непрерывно тогда и только тогда, когда оно локально ограничено.*

Эта теорема распространена с необходимыми изменениями на случай конечномерных квазипредставлений связной локально компактной группы G , ограничение которых на некоторую компактную нормальную подгруппу, факторгруппа группы G по которой является группой Ли, непрерывно.

Заключение

Таким образом, основные результаты работы заключаются в следующем.

В главе 1 двойственность Понтрягина мнжду компактными и дискретными объектами распространена на некоммутативные локально компактные группы, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны. Получена характеризация локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, и гильбертово представимых топологических групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны и имеют ограниченные размерности. Получена характеризация топологических групп, представимых в рефлексивных банаховых пространствах.

В главе 2 введено понятие вариации пркдставления отделимой топологической группы в банаховом простпанстве и показано, что если эта вариация представления меньше единицы, то она равна нулю, и представление непрерывно. Аналогичное утверждение получено для дуальных пространств Фреше. Для конечномерных представлений анвлогичнре свойство имеет число 2, а не 1. Теорема Ли о конечномерных прелставлениях разрешимых групп Ли распространена на не обязательно непрерывные представления и на более широкий коасс групп.

В главе 3 фактически вводится категория топологических групп с локально относительно компактными гомоморфизмами. В частности, доказывается, что локально ограниченные конечномерные представления связных групп Ли и гомомрфизмы связных групп Ли автоматически непрерывны нв коммутанте группы-источника. Для связных совешенных групп Ли локальная ограниченность гомоморфизма равносильна его непрерывности. Введено понятие группы разрывов гомоморфизма топологических групп и показано, что группа разрывов конечномерного локально ограниченного представления связной группы Ли есть конечномерный тор. Приведено полное доказательство гипотезы А.С.Мищенко о возможных значениях вариации конечномерных представлений групп Ли. Показано, что теорема Фрейденталя-Вейля верна без предположения непрерывности вложения связной локально компактной группы в компактную группу и указаны приложения к группам фон Неймана и Хохшильда локально компактных групп и их обобщениям.

В главе 4 вводятся квазипредставления (отображения группы в непрерывно обратимые непрерывные линейные операторы в метризуемом топологическом векторном пространстве с равномерно малой разностью образа произведения элементов и произведением их образов) и их специальный класс, пседопредставления, в том числе чистые. Родственными понятиями являются квазихарактеры (отображения группы в аддитивную группу вещественных чисел с ограниченной разностью между образом произведения и произведением образов) и псевдохарактеры (квазихарактеры, ограничения которых на циклические подгруппы являются их характерами). Указаны приложения к ограниченным вещественным группам когомологий связных локально компактных групп и доказана конечномерность этих групп для почти связных локально компактных групп. Описана структура конечномерных квазипредставлений групп и, в частности, одномерных псевдопредставлений. Введен класс бесконечноменых непрерывных квазипредставлений аменабельных локально компактных групп, которые, если их дефект мал, допускают наличие близкого непрерывного обычного представления группы.

В главе 5 получено полное решение проблемы Каждана–Мильмана (для компактных полупростых групп Ли и их не обязательно непрерывных квазипредставлений с малым дефектом существует близкое непрерывное обычное представление группы) и оиисана структура локально ограниченных конечномерных квазипредставлений связных групп Ли и, в дополнительном предположении финальной преднепрерывности квазипредставления, связных локально компактных групп.

Каждая из глав ставит нерешенные задачи.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность администрации факультета и кафедры математического анализа в лице Виктора Антоновича Садовничего, Андрея Игоревича Шафаревича, Владимира Николаевича Чубарикова и Тараса Павловича Лукашанко за создание и поддержание рабочей атмосферы в течение десятилетий и коллективу кафедры и факультета за поддержку, помощь и обсуждение результатов. Особая благодарность за 30-летнюю поддержку этой работы Александра Сергеевича Демидова. Автор также благодарит всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук.

1. Штерн, А. И. Критерий слабой непрерывности представлений топологических групп в дуальных пространствах Фреше // Известия Российской академии наук. Серия математическая. - 2025. - Т. 89, № 3. - С. 230-240.
EDN: LWCUBZ. Импакт-фактор 0,624 (РИНЦ). 0,687 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. A criterion for the weak continuity of representations of topological groups in dual Fréchet spaces // Izvestiya Mathematics. - 2025. - vol. 89, № 3. - pp. 644-653.
EDN: YFJPZI. Импакт-фактор 0,9 (JIF). 0,625 п.л.

2. Shtern, A. I. Continuously irreducibly representable groups with irreducible representations of bounded degree // Russian Journal of Mathematical Physics. -

2025. - vol. 32, № 3. - pp. 583-584.
EDN: LXLCHY. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,125 п.л.

3. Штерн, А. И. Критерий сильной непрерывности представлений топологических групп в рефлексивных пространствах Фреше // Математический сборник. - 2025. - Т. 216, № 1. - С. 144-152.
EDN: TOVYBM. Импакт-фактор 0,611 (РИНЦ). 0,562 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. A criterion for the strong continuity of representations of topological groups in reflexive Fréchet spaces // Sbornik Mathematics. - 2025. - vol. 216, № 1. - pp. 861-868.
EDN: OCJXSW. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 0,5 п.л.

4. Штерн, А. И. Автоматическая непрерывность локально ограниченного гомоморфизма групп Ли на коммутанте // Математический сборник. - 2024. - Т.215, № 6. - С. 151-158.
EDN: CGRIBW. Импакт-фактор 0,611 (РИНЦ). 0,5 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Automatic continuity of a locally bounded homomorphism of Lie groups on the commutator subgroup // Sbornik Mathematics. - 2024. - vol. 215, № 6. - pp. 861-868.
EDN FAFKOO. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 0,5 п.л.

5. Shtern, A. I. Continuity criteria for locally bounded homomorphisms of certain Lie groups// Journal of Mathematical Sciences. - 2024. - vol. 284, № 4. - pp. 554-556.
EDN JTZMBK. Импакт-фактор 0,28 (SJR). 0,25 п.л.

6. Штерн, А. И. Условие слабой непрерывности представлений топологических групп в пространствах Фреше // Успехи математических наук. - 2024. - Т. 79, № 4. - С. 179-180.
EDN XMKGMI. Импакт-фактор 2,8 (JIF). 0,125 п.л. Перевод: Shtern, A. I. Conditions for the weak continuity of representations of topological groups in Fréchet spaces // Russian Mathematical Surveys. - 2024. - vol. 79, № 4. - pp. 736-738.
DOI 10.4213/rm10187e. Импакт-фактор 2,8 (JIF). 0,187 п.л.

7. Shtern, A. I. A version of the Weyl complete reducibility theorem for not necessarily continuous representations of connected Lie groups// Russian Journal of Mathematical Physics. - 2023. - vol. 30, № 2. - pp. 257-258.
EDN IPQRLN. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,125 п.л.

8. Shtern, A. I. Lie's theorem for solvable connected Lie groups without the continuity assumption // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2023. - vol. 30, № 4. - pp. 701-703.
EDN FKOKUP. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,187 п.л.

9. Shtern, A. I. The discontinuity group of a locally bounded homomorphism of a connected Lie group into a connected Lie group is commutative// Russian Journal of Mathematical Physics. - 2023. - vol. 30, № 3. - pp. 397-398.
EDN SEYPYB. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,125 п.л.

10. Shtern, A. I. A generalization of Lie's theorem to certain non-Lie solvable

groups// Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. - 2021. - vol. 24, № 2. - pp. 263-267.
EDN YYMMJZ. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,312 п.л.

11. Shtern, A. I. A version of Lie theorem for divisible solvable groups // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2021. - vol. 28, № 1. - pp. 104-106.
EDN INSEGP. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,187 п.л.

12. Shtern, A. I. A criterion for the continuity with respect to the original group topology of the restriction to the commutator subgroup for a locally bounded finite-dimensional representation of a connected Lie group// Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. - 2019. - vol. 22, № 1. - pp. 201-204.
EDN DWCSGQ. Импакт-фактор 0,31 (SJR). 0,125 п.л.

13. Shtern, A. I. Connected Lie groups admitting an embedding in a connected amenable Lie group// Russian Journal of Mathematical Physics. - 2019. - vol. 26, № 4. - pp. 499-500.
EDN DLYKUX. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,125 п.л.

14. Shtern, A. I. Continuity criterion for the restriction to the commutator subgroup of a locally bounded finite-dimensional representation of a connected Lie group// Russian Journal of Mathematical Physics. - 2019. - vol. 26, № 2. - pp. 206-207.
EDN JJOYNN. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,125 п.л.

15. Штерн, А. И. Локально ограниченные финально преднепрерывные конечномерные квазипредставления связных локально компактных групп // Математический сборник. - 2017. - Т. 208, № 10. - С. 149-170.
EDN ZRSFYZ. - Импакт-фактор 0,611 (РИНЦ). 1,375 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Locally bounded finally precontinuous finite-dimensional quasirepresentations of connected locally compact groups // Sbornik Mathematics. - 2017. - vol. 208, № 10. - pp. 1557-1576.
EDN XXRIVY. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 1,25 п.л.

16. Shtern, A. I. Description of locally bounded pseudocharacters on almost connected locally compact groups // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2016. - vol. 23, № 4. - pp. 551-552.
EDN YUZECJ. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,125 п.л.

17. Shtern, A. I. Specific properties of one-dimensional pseudorepresentations of groups // Journal of Mathematical Sciences (NY). = 2018. = vol. 233, № 5. - pp. 770–776.
EDN YCOEVN. Импакт-фактор 0,28 (SJR). 0,438 п.л.

18. Shtern, A. I. Finite-dimensional quasirepresentations are almost bounded //Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. - 2015. - vol. 18, № 1. - pp. 1-5.
DOI 10.17777/pjms.2015.18.1.1. Импакт-фактор 0,31 (SJR). 0,312 п.л.

19. Shtern, A. I. Corrected automatic continuity conditions for finite-dimensional

representations of connected Lie groups // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2014. - vol. 21, № 1. - pp. 133-134.
EDN SKOVAV. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,125 п.л.

20. Shtern, A. I. Properties of pseudocharacters on connected locally compact groups//Russian Journal of Mathematical Physics. - 2014. - vol. 21, № 2. - pp. 291-293.
EDN UGGRMX. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,312 п.л.

21. Shtern, A. I. On a class of quasirepresentations // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2014. - vol. 21, № 4. - pp. 549-552.
EDN UFMHHD. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,25 п.л.

22. Штерн, А. И. Строение локально ограниченных конечномерных представлений связных локально компактных групп // Математический сборник. - 2014. - Т. 205, № 4. - С. 149-160.
EDN SJQKXX. - Импакт-фактор 0,611 (РИНЦ). 0.75 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. The structure of locally bounded finite-dimensional representations of connected locally compact groups // Sbornik Mathematics. - 2014. - vol. 205, № 4. - pp. 600-611.
EDN UGMFZB. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 0,75 п.л.

23. Shtern, A. I. A simplified model for finite-dimensional quasirepresentations of amenable groups // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. - 2012. - vol. 15, № 4.- pp. 355-360.
EDN RGIUWL. Импакт-фактор 0,31 (SJR). 0,375 п.л.

24. Shtern, A. I. Continuity conditions for finite-dimensional representations of connected locally compact groups // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2012. - vol. 19, № 4. - pp. 499-501.
EDN RGILHP. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,187 п.л.

25. Shtern, A. I. Alternative proof of the Hochschild triviality theorem for a connected locally compact group // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2011. - vol. 18, № 1. - pp. 102-106.
EDN OHXNIT. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,312 п.л.

26. Shtern, A. I. Connected Lie groups with many locally bounded finite-dimensional representations are linear // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. - 2011. - vol. 14, № 2. - pp. 183-188.
EDN PFEGDB. Импакт-фактор 0,31 (SJR). 0,375 п.л.

27. Shtern, A. I. Hochschild kernel for locally bounded finite-dimensional representations of a connected Lie group // Applied Mathematics and Computation. - 2011. - vol. 218, № 3. - pp. 1063-1066.
EDN PFEGEZ. Импакт-фактор 3,4 (JIF). 0,25 п.л.

28. Штерн, А. И. Связные локально компактные группы: ядро Хохшильда и точность локально ограниченных конечномерных представлений // Труды Московского математического общества. - 2011. - Т. 72, № 1. - С. 105-126.

EDN RZQGMD. Импакт-фактор 0,083 (РИНЦ). 1,375 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Connected locally compact groups: the Hochschild kernel and faithfulness of locally bounded finite-dimensional representations // Transactions of the Moscow Mathematical Society. - 2011. - vol. 72. - pp. 79-95.
EDN: WRYGFP. Импакт-фактор 0,34 (SJR). 1,062 п.л.

29. Штерн, А. И. Структура гомоморфизмов связных локально компактных групп в компактные группы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. - 2011. - Т. 75, № 6. - С. 195-222. -
EDN RDNIAN. Импакт-фактор 0,624 (РИНЦ)). 1,75 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. The structure of homomorphisms of connected locally compact groups into compact groups. - Izvestiya Mathematics. - 2011 - vol. 75, № 6. - pp. 1279-1304.
EDN PEPFUP. Импакт-фактор 0,9 (JIF). 1,625 п.л.

30. Shtern, A. I. Von Neumann kernels of connected Lie groups, revisited and refined // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2010. - vol. 17, № 2. - pp. 262-266.
EDN MXPSVF. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,312 п.л.

31. Штерн, А. И. Двойственность компактности и дискретности за пределами двойственности Понтрягина // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН. - 2010. - Т. 271. - С. 224-240.
EDN NBSWMN. Импакт-фактор 0,379 (РИНЦ). 1,062 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Duality between compactness and discreteness beyond Pontryagin duality. - Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. - 2010. - vol. 271. - pp. 212-227.
EDN OHPZGR. Импакт-фактор 0,4 (JIF). 1 п.л.

32. Shtern, A. I. Connected Lie groups having faithful locally bounded (not necessarily continuous) finite-dimensional representations // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2009. - vol. 16, № 4. - pp. 566-567.
EDN MWWGLV. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,125 п.л.

33. Штерн, А. И. Вариант теоремы Ван дер Вардена и доказательство гипотезы Мищенко для гомоморфизмов локально компактных групп // Известия Российской Акадении наук. Серия математическая. - 2008. - Т. 72, № 1. - С. 183-224.
EDN RDNFAL. Импакт-фактор 0,624 (РИНЦ). 2,625 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. A version of van der Waerden's theorem and a proof of Mishchenko's conjecture on homomorphisms of locally compact groups. - Izvestiya Mathematics. - 2008. - vol. 72, № 1. - pp. 169-205.
EDN LLMPTB. Импакт-фактор 0,9 (JIF). 2,312 п.л.

34. Shtern, A. I. Finite-dimensional quasirepresentations of Lie groups and Mishchenko's conjecture // Journal of Mathematical Sciences. - 2009. - vol. 159, № 5. pp. 653–751.

DOI 10.1007/s10958-009-9466-3. Импакт-фактор 0,28 (SJR). 6,187 п.л.

35. Штерн, А. И. Проблема Каждана–Мильмана для полупростых компактных групп Ли // Успехи математических наук. - 2007. - Т. 62, № 1. - С. 123-190. EDN VSHXWN. Импакт-фактор 0,907 (РИНЦ)). 4,25 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Kazhdan–Milman problem for semisimple compact Lie groups // Russian Mathematical Surveys. - 2007. - vol. 62, № 1. pp. 113-174.
DOI 10.1070/RM2007v062n01ABEH004382. Импакт-фактор 2,8 (JIF). 3,875 п.л.

36. Штерн, А. И. Автоматическая непрерывность псевдохарактеров на полупростых группах Ли // Математические заметки. - 2006. - Т. 80, № 3. - С. 456-464.
EDN HUZAHP. Импакт-фактор 0,599 (РИНЦ). 0,562 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Automatic continuity of pseudocharacters on semisimple Lie groups // Mathematical Notes. - 2006. - vol. 80, № 3. pp. 435-441.
EDN MDJECJ. Импакт-фактор 0,6 (JIF). 0,438 п.л.

37. Штерн, А. И. Топологические группы с конечными групповыми алгебрами фон Неймана типа I // Математический сборник. - 2005. - Т. 196, № 3. - С. 143-160.
EDN HRXVFV. Импакт-фактор 0,611 (РИНЦ). 1,125 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Topological groups with finite von Neumann group algebras of type I // Sbornik Mathematics. - 2005. - vol. 196, № 3. - pp. 447-463.
EDN MIQPHB. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 1,062 п.л.

38. Штерн, А. И. Критерии непрерывности конечномерных представлений связных локально компактных групп // Математический сборник. - 2004. - Т. 195, № 9. - С. 145-159.
DOI 10.4213/sm849. Импакт-фактор 0,611 (РИНЦ). 0,938 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Criteria for the continuity of finite-dimensional representations of connected locally compact groups // Sbornik Mathematics. - 2004. - vol. 195, № 8. - pp. 1377-1391.
EDN MDJEBP. - Импакт-фактор 0,8 (JIF). 0,938 п.л.

39. Штерн, А. И. Критерий непрерывности конечномерных представлений локально компактных групп // Математические заметки. - 2004. - Т. 75, № 6. - С. 951-953.
DOI 10.4213/mzm561. Импакт-фактор 0,599 (РИНЦ). 0,187 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Criteria for the continuity of finite-dimensional representations of locally compact groups // Mathematical Motes. - 2004. - vol. 75, № 6. - pp. 890-892.
DOI: 10.1023/B:MATN.0000030999.85876.3. Импакт-фактор 0,6 (JIF). 0,187 п.л.

40. Штерн, А. И. Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах, Математический сборник -. 2002 - Т. 193, № 9 - С. 139-156.
DOI 10.4213/sm682. Импакт-фактор 0,611 (РИНЦ). 1,125 п.л.

Перевод: Shtern, A. I. Criteria for the weak and strong continuity of representations of topological groups in Banach spaces // Sbornik Mathematics. - 2002. - vol. 193, № 9. - pp. 1381-1396.
EDN MDJEBF. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 1 п.л.

41. Штерн, А. И. Структурные свойства и ограниченные вещественные непрерывные 2-когомологии локально компактных групп // Функциональный анализ и его приложения - 2001. - Т. 35, № 4. - С. 67-80.
DOI 10.4213/faa274. Импакт-фактор 0,203 (РИНЦ). 0,875 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Structure properties and real continuous bounded 2-cohomology of locally compact groups // Functional Analysis and Applications. - 2001. - vol. 35, № 4. - pp. 294-304.
EDN MBCIJR. Импакт-фактор 0,7 (JIF). 0,687 п.л.

42. Shtern, A. I. A criterion for the second real continuous bounded cohomology of a locally compact group to be finite-dimensional // Acta Applicandae Mathematicae. - 2001. - vol. 68. - pp. 105-121.
DOI 10.1023/A:1012295625631. Импакт-фактор 1,0 (JIF). 1,062 п.л.

43. Shtern, A. I. Bounded continuous real 2-cocycles on simply connected simple Lie groups and their applications // Russian Journal of Mathematical Physics - 2001. - vol. 8, № 1. - pp. 122-133.
EDN LGQUTH. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,75 п.л.

44. Shtern, A. I. Remarks on pseudocharacters and the real continuous bounded cohomology of connected locally compact groups // Annals of Global Analysis and Geometry. - 2001. - vol. 20, № 3. - pp. 199-221.
EDN: LGQAVF. Импакт-фактор 0,7 (JIF). 1,437 п.л.

45. Штерн, А. И. Жёсткость и аппроксимация квазипредставлений аменабельных групп// Математические заметки. - 1999. - Т. 65, № 6. - С. 908-920.
DOI 10.4213/mzm1126. Импакт-фактор 0,599 (РИНЦ)). 0,812 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Roughness and approximation of quasirepresentations of amenable groups // Mathematical Notes. - 1999. - vol. 65, № 6. - pp. 760-769.
EDN LQGLCN. Импакт-фактор 0,6 (JIF). 0,625 п.л.

46. Shtern, A. I. Triviality and continuity of pseudocharacters and pseudorepresentations // Russian Journal of Mathematical Physics - 1998. - vol. 5, № 1. - pp. 135-138.
EDN LEEYCJ. - Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,25 п.л.

47. Shtern, A. I. Quasi-symmetry. I // Russian Journal of Mathematical Physics - 1994. - vol. 2, № 3. - pp. 353-382.
ZbMath 0907.22007. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 1,875 п.л.

48. Shtern, A. I. Compact semitopological semigroups and reflexive representability of topological groups // Russian Journal of Mathematical Physics - 1994. - vol. 2, № 1. - pp. 131-132.
ZbMath 0908.22003. Импакт-фактор 1,5 (JIF). 0,25 п.л.

49. Штерн, А. И. Квазипредставления и псевдопредставления // Функциональный анализ и его приложения - 1991. - Т. 25, № 2. - С. 70-73.
http://mi.mathnet.ru/faa866. Импакт-фактор 0,203 (РИНЦ). 0,25 п.л. Перевод: Shtern, A. I. Quasirepresetations and pseudorepresentations // Functional Analysis and Applications. - 1991. - vol. 25, № 2. - pp. 140-143.
EDN WIYKKM. Импакт-фактор 0,7 (JIF). 0,25 п.л.

50. Штерн, А. И. Локально бикомпактные группы с конечномерными неприводимыми представлениями// Математический сборник - 1973. - Т. 90(132), № 1. - С. 86-95. http://mi.mathnet.ru/dan36241. Импакт-фактор 0,611 (РИНЦ). 0,625 п.л. Перевод: Shtern, A. I. Locally bicompact groups with finite-dimensional irreducible representations // Mathematics of the USSR-Sbornik. - 1971. - vol. 19, № 1. - pp. 85-94. ZbMath: 0273.22007. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 0,625 п.л.

51. Штерн, А. И. Сепарабельные локально бикомпактные группы с дискретным носителем регулярного представления // Доклады Академии Наук СССР. - 1971. - Т. 198, № 6. - С. 1287-1290.
http://mi.mathnet.ru/dan36241. Импакт-фактор .0,402 (РИНЦ). 0,25 п.л Перевод: Stern, A. I.: Separable locally compact groups with discrete support for the regular representation // Soviet Mathematics. Doklady. - 1971. - vol. 12. - pp. 994-998.
ZbMath: 0232.22015. Импакт-фактор 0,6 (JIF). 0,313 п.л.

52. Штерн, А. И. О связи между топологиями локально бикомпактной группы и ее двойственного пространства // Функциональный анализ и его приложения - 1971. - Т. 5, № 4. - С. 56-63.
http://mi.mathnet.ru/faa2616. Импакт-фактор 0,203 (РИНЦ). 0,5 п.л.
Перевод: Shtern, A. I. Connection between the topologies of a locally bicompact group and its dual space // Functional Analysis and Applications. - 1971. - vol. 5, № 4. - pp. 311-317.
ZbMath: 0243.22004. Импакт-фактор 0,7 (JIF). 0,437 п.л.

53. Штерн, А. И. О группах с бикомпактным двойственным пространством // Успехи математических наук. - 1971. - Т. 26, № 3(159). - С. 217-218.
ZbMath: 0216.34404. http://mi.mathnet.ru/rm5214. Импакт-фактор 2,8 (JIF). 0,125 п.л.