

**ОТЗЫВ официального оппонента**  
**на диссертацию на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук Воронцова Михаила Олеговича**  
**на тему: «Асимптотические свойства методов множественной проверки**  
**гипотез в условиях зависимости наблюдений» по специальности**  
**1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика**

В диссертационной работе Воронцова Михаила Олеговича рассматривается задача оценивания математического ожидания гауссова вектора большой размерности, компоненты которого являются слабо зависимыми случайными величинами. Они образуют временной ряд из суммы истинных данных и наложенного на них шума. Одним из основных предположений работы является разреженность истинного вектора данных. Для того чтобы отфильтровать шумовые компоненты сигнала, используется пороговая обработка, которая эквивалентна задаче множественной проверки гипотез, когда для каждой компоненты вектора проверяется гипотеза о том, что данная компонента является шумом. При построении порога используется FDR-мера (ожидаемая доля ложных отклонений основных гипотез для отдельных компонент), которая улучшает статистическую мощность критерия при большом количестве проверяемых гипотез.

Мерой качества оценки истинных данных служит среднеквадратичный риск. Различные свойства среднеквадратичного риска при применении пороговых оценок (в том числе с использованием FDR-меры при выборе порогового значения) хорошо изучены для различных классов разреженности данных. В диссертации используются свойства среднеквадратичного риска, полученные в работах Д. Донохо, И. Джонстона, Б. Сильвермана, Й. Бенжамини и Ф. Абрамовича. Работы представлены в списке источников, и ссылки на них в диссертации имеются.

На практике использование среднеквадратичного риска невозможно, поскольку он вычисляется с использованием значений истинных данных, ко-

торые неизвестны наблюдателю. В диссертации вместо самого среднеквадратичного риска рассматриваются его статистические оценки, которые зависят только от наблюдаемых данных. Асимптотические свойства статистических оценок риска при независимости исходных данных изучены, например, в работах С.И. Палионной и О.В. Шестакова. Рецензируемая диссертационная работа содержит результаты исследования асимптотических свойств, как самого среднеквадратичного риска, так и его статистических оценок в случае, когда данные являются слабо зависимыми.

Объем диссертации составляет 73 страницы. Работа состоит из основной части в виде трех глав, введения, заключения и перечня литературных ссылок, насчитывающего 83 наименования.

Во введении приведен подробный обзор предшествующих исследований, подкрепленный ссылками на соответствующие научные труды.

Первая глава посвящена постановке задачи. В ней подробно разбираются процедуры пороговой обработки и множественной проверки гипотез. Описана процедура Бенджамини-Хохберга контроля доли ложных отклонений гипотез, которая приводит к FDR-порогу. Приведены верхние границы для среднеквадратичного риска и свойства его статистических оценок для независимых между собой наблюдений.

Во второй главе исследуется модель с зависимыми наблюдениями. В первом параграфе главы приведены определения коэффициента сильного перемешивания и максимального коэффициента корреляции для вектора данных. Во втором параграфе доказываются вспомогательные неравенства для моделей с заданным коэффициентом сильного перемешивания, полученные автором и его научным руководителем, необходимые для дальнейших исследований. В третьем параграфе получены верхние границы среднеквадратичного риска для двух классов разреженности данных:  $l_0$  и  $m_p$  при выборе порога с помощью FDR процедуры. Указанные верхние границы среднеквадратичного риска для зависимых наблюдений получены впервые.

Третья глава посвящена асимптотическим свойствам оценки риска в модели с зависимыми наблюдениями. В первом параграфе главы с помощью центральной предельной теоремы для сильно перемешанных случайных величин доказывается, что в модели с зависимыми наблюдениями оценка риска при использовании FDR-порога является асимптотически нормальной. Во втором параграфе главы устанавливается сильная состоятельность указанной оценки риска. В третьем параграфе главы получены оценки скорости сходимости распределения оценки риска к нормальному закону.

Приведенные в диссертационной работе результаты являются новыми и представляют интерес, как с теоретической, так и с практической точки зрения. Рассматриваемая проблематика, безусловно, является актуальной, что подтверждается многочисленными ссылками в диссертации на работы современных ученых из самых разнообразных областей знаний. Достоверность результатов, выносимых на защиту, не вызывает сомнений, так как каждый такой результат сопровождается полным и ясным доказательством. При доказательстве теорем автор продемонстрировал владение методами теории вероятностей, математической статистики и математического анализа.

Обзор проведенного исследования, содержащийся в заключении диссертации, соответствует полученным в работе результатам. Заключение также включает рекомендации по дальнейшей разработке темы диссертации, которые сформулированы четко и лаконично.

По теме диссертации опубликовано четыре статьи. Две из них автор подготовил самостоятельно, а две — в соавторстве с научным руководителем О.В. Шестаковым, которому принадлежит формулировка задач. Все статьи опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК, индексируемых в РИНЦ, Web of Sciences и Scopus. Все публикации соответствуют теме диссертации.

Результаты докладывались на 5 конференциях и одном научном семинаре.

Автореферат диссертации включает основные положения работы и полностью соответствует ее содержанию.

По диссертации имеются следующие замечания и вопросы.

- 1) В ряде обозначений в явном виде указывается их зависимость от  $n$ , в то время как в других величинах, также зависящих от  $n$  (например,  $T_1$  и  $T_U$ ), эта зависимость не указывается. Такая непоследовательность несколько затрудняет понимание. Например, в теоремах 3.1 и 3.2 имеется выражение  $\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k)$ , которое трудно понять, если не вспомнить, что максимальный коэффициент корреляции  $\rho(k)$  зависит от  $n$ .
- 2) Некоторые формулы, в которых содержатся определения объектов (например, определения  $\hat{k}_F, \hat{t}_F, t_k, \gamma_n$  и другие), не пронумерованы, а эти объекты затем используются во всем тексте диссертации, а найти их определения затруднительно.
- 3) Достаточные условия в теоремах 3.1 и 3.2, связанные с вычислением коэффициента сильного перемешивания, являются трудно проверяемыми. Тем не менее, для независимых случайных величин они заведомо выполнены. В связи с этим возникает вопрос, не получатся ли отсюда новые достаточные условия для асимптотической нормальности оценки риска для независимых наблюдений?
- 4) В теоремах 3.4 и 3.5 имеется условие  $\gamma > 48$ , из которого вытекает неравенство для коэффициента перемешивания  $\alpha(s) < c_2 2^{-48} < c_2 10^{-14}, s \geq 2$ . Тогда, не следует ли считать  $x_i, x_{i+s}, s \geq 2$  практически независимыми?
- 5) В работе отсутствуют примеры данных, для которых справедливы теоремы главы 3. Имеет смысл рассмотреть  $s$ -зависимые данные, когда случайные величины  $x_i, x_j$  – независимые при  $|i - j| > s$ . Для таких данных заведомо выполнены условия Теоремы 3.4 и Теоремы 3.5

Указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Воронцов Михаил Олегович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры прикладной математики Института математики, естественных и компьютерных наук Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Вологодский государственный университет»

Сипин Александр Степанович \_\_\_\_\_

Дата \_\_\_\_\_

Контактные данные:

тел.: (8172)-72-50-33, e-mail: kanz@vogu35.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом  
защищена диссертация: 1.1.6 Вычислительная математика

Адрес места работы: 160000, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодский государственный университет», Институт математики, естественных и компьютерных наук, кафедра прикладной математики

Тел.: (8172)-72-50-33, e-mail: kanz@vogu35.ru

Подпись сотрудника Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Вологодский государственный университет» А.С. Сипина удостоверяю: