

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Ван Луцзе

**Эйлеровы численные модели динамики гипотупругой
многоматериальной среды**

Специальность 1.2.2

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Меньшов Игорь Станиславович

Москва – 2025

Оглавление

Введение	3
1 Математический анализ модели Уилкинса	8
1.1 Гипоупругая модель Уилкинса	8
1.2 Термодинамические свойства модели Уилкинса	11
1.3 Задача Римана	15
2 Одномерная биматериальная математическая модель Уилкинса	23
2.1 Неравновесная биматериальная модель диффузной границы . .	24
2.2 Редуцированная равновесная модель методом асимптотического анализа	29
2.3 Случай одноосной деформации	40
3 Численные методы для решения редуцированной модели	44
3.1 Приближенный солвер типа Римана для одномерной модели Уилкинса	44
3.2 Солвер HLLC для биматериальной равновесной модели Уилкинса	50
3.3 Сравнение численных и теоретических результатов для одноосных деформаций	53
3.3.1 Случай одинаковых материалов	54
3.3.2 Случай биматериалов	62
3.4 Сравнение численных и теоретических результатов для общего случая	67
3.4.1 Без учета модификации критерия пластичности	68
3.4.2 Численные результаты для упругопластического течения	71
4 Термодинамически согласованная модель Уилкинса	77
4.1 Анализ возможности термодинамической согласованности . . .	77
4.2 Математические свойства и численные результаты	81
Заключение	89
Публикации автора по теме диссертации	91
Список литературы	92

Введение

Актуальность работы обусловлена важностью рассматриваемых задач во многих промышленных и научных областях, в частности в механике ударно-волновых процессов в конденсированных средах [1], механике взрывов [2, 3], технологии обработки металлов давлением [4, 5], а также во многих коммерческих программных комплексах, таких как LS-DYNA [6] и AUTODYN [7]. Более того, при моделировании динамики многоматериальных упругопластических сред, эйлеровы модели, основанные на методе диффузной границы, в основном построены в рамках гиперупругости [8–10]. Следовательно, исследование задач многокомпонентного течения с использованием гипопругой модели Уилкинса может восполнить пробел в научных исследованиях. Учитывая широкое применение этой модели, данное исследование является необходимым и имеет большое значение.

Степень разработанности данной темы. Первые попытки современного описания упругопластичности при конечных деформациях восходят к теории Прандтля-Рейсса (Prandtl-Reuss theory), в которой основная идея заключается в разложении приращения деформации в единицу времени на упругую и пластическую компоненты. Данная теория закладывает основу для анализа реакции материалов, такой как упрочнение, и широко используется в инженерии, часто в сочетании с критерием текучести Мизеса [11–13]. С этим тесно связано дальнейшее развитие теории, в которой Трусделл (Truesdell) предложил теорию гипопругости, связывающую объективную производную напряжения Коши или Кирхгофа и скорость деформации через тензор 4-го порядка, зависящий от напряжения [14–17]. Таким образом, упругая часть в теории Прандтля-Рейсса обычно описывается этим гипопругим соотношением, содержащим объективную коротационную или некоротационную производную, предпочтительно производную Яуманна или производную Грина-Нагди (Green-Naghdi) напряжения Коши или Кирхгофа.

В рамках данного теоретического направления в 1960-х годах была предложена модель Уилкинса [18], которая первоначально использовалась для решения задач высокоскоростного удара и распространения упругопластических волн. Подробные сведения об упругопластических материалах представлены, например, в [19], где, в частности, приводятся описания материалов, включающие динамическую пластичность на основе теории дислокаций, упрочнение, давление и влияние температуры на прочность материала. Математическая

модель представлена таким образом, что переход от упругой и идеальной пластической моделей к вышеупомянутой теоретической структуре возможен без внесения каких-либо изменений в базовую программу, решающую уравнения механики. Благодаря использованию явного интегрирования по времени и простой стратегии обновления напряжений, вычислительные затраты на один шаг времени очень низки. Среди численных методов для модели Уилкинса, разработанных в эти годы, необходимо отметить [20], где модифицирован классический метод расчёта пластичности — метод радиального возврата Уилкинса (radial return method), [21], где разработан метод Годунова высокого порядка. В последнее время интерес переключился на центрированные конечно-объемные методы (cell-centered) [22—24] и методы конечных элементов [25].

Классическая гипопругая модель Уилкинса проста, но имеет ряд недостатков: выбор объективной производной в некоторой степени произволен, модель не является термодинамически согласованной, поскольку она генерирует энтропию даже в упругом режиме, а из-за производной Яуманна система не может быть записана в консервативной форме [26]. В общем случае конечной деформации высказывались разные мнения относительно надлежащего разложения и формулировки определяющих отношений [27—30]. Однако в настоящее время не существует единой теории, способной идеально решить эти проблемы.

Другим подходом к описанию поведения материалов при конечной деформации является гиперупругая модель, основанная на концепции функции энергии деформации [31—33]. Определяя энергию деформации на единицу объема как функцию метрики деформации, получают соответствующую зависимость напряжения-деформации. Данное моделирование имеет прочную математическую основу и обычно использует тензорный анализ и дифференциальную геометрию в качестве инструментов. К этому направлению относится модель, предложенная Годуновым и Роменским [34] и усовершенствованная Пешковым и Роменским [35]. Такое выражение естественным образом удовлетворяет условиям объективности (инвариантности относительно поворота) и термодинамической согласованности. Однако, большая часть усилий исследователей на современном этапе направлена на совершенствование определяющих моделей, таких как формулировка поверхностей текучести в пространстве напряжений. Таким образом, модель Уилкинса по-прежнему предпочтительна во многих научных, инженерных и промышленных приложениях.

В практическом применении часто возникает задача о течении многокомпонентных гетерогенных сжимаемых сред, содержащих два или более компонентов [36—38]. Для твердой части сплошной среды обычно используется вышеупомянутая гипопругая или гиперупругая модель. В аспекте численных методов альтернативой лагранжевым методам является эйлерова формулировка механики деформируемых твердых тел с помощью так называемого метода диффузной границы (diffuse interface method) [39, 40]. Данный

метод представляет собой новый тип описания границы, отличающийся от традиционных методов объема жидкости (volume-of-fluid method) [41] и определения уровня (level set method) [42]. Межфазная граница в методе диффузной границы представлена в виде узкой смешанной зоны разных фаз, а распределение фаз определяется функцией порядка (фазовой долей объема). Основным недостатком метода диффузной границы является то, что интерфейс (граница) имеет тенденцию к диффузии со временем. Следовательно, для коротких процессов, таких как большие деформации, вызванные высокоскоростными ударами твердых тел, подходит эйлеровский метод диффузной границы. Данный метод широко используется в исследованиях вязкокапиллярных структур и фазовых переходов [43, 44]. В области моделирования больших упругопластических деформаций в работах [8—10] делается попытка смоделировать такие процессы в рамках гиперупругой модели. В данном случае используется простая смешанная модель, которая не может быть применима к другим упругопластическим моделям, таким как гипоупругая модель Уилкинса.

Таким образом, целесообразно и необходимо создать гипоупругую эйлерову математическую модель на основе метода диффузной границы. Среда состоит из нескольких различных материалов (фаз), разделенных контактными межфазными границами (интерфейсами). Предполагается, что каждая фаза описывается в рамках гипоупругой модели (модели Уилкинса) с критерием пластичности Мизеса. В дополнении, необходимо разработать соответствующие численные методы для решения неконсервативных моделей. Для такого типа задач стандартным подходом было использование стратегии «разделения операторов» (operator splitting): разделение уравнения на консервативную часть и неконсервативную часть (источник) [45—47]. Не учитывая источник, консервативная часть решается с использованием схемы Русанова или других подобных методов для получения промежуточного решения. Затем это промежуточное решение используется в качестве начального значения для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный подход прост, но в значительной степени зависит от коммутативности операторов и, как правило, имеет точность только первого порядка. Более того, он разрушает связь между задачами и может некорректно отражать физические явления, в которых доминируют неконсервативные члены. Для систематического решения вышеуказанных проблем была предложена и разработана схема консервативного пути (Path Conservative Scheme) [48], например, в рамках метода конечных объемов [49]. Поэтому создание соответствующих численных методов с использованием этого формата является еще одной важной проблемой и направлением исследований. Следовательно, создание соответствующих численных методов с использованием этой схемы является еще одной важной задачей и направлением исследований.

Цели настоящей диссертационной работы

1. Исследовать решение биматериальной задачи Римана для гипоупругой модели Уилкинса с учетом критерия пластичности Мизеса в упрощенном

случае одноосной деформации.

2. Разработать эйлерову математическую модель, описывающую течение разных гипотупругих сред, разделенных межфазными границами, в рамках одной системы определяющих уравнений.
3. Построить численные методы для решения предложенной модели гетерогенной (многоматериальной) гипотупругой среды.
4. Создать комплекс программ на основе разработанной модели и численных методов для решения задач механики гетерогенных гипотупругих сред. Провести верификационные расчеты с помощью разработанного программного комплекса и сравнение с результатами, полученными альтернативными методами.
5. Модифицировать гипотупругую модель Уилкинса, сделав ее термодинамически согласованной.

Объект и предмет исследования. В диссертации используются методы вычислительной математики и математического моделирования. Комплекс программ разработан на языке С.

Научная новизна представленных в диссертации результатов состоит в следующем:

1. Разработана обобщенная эйлерова модель для неоднородной среды двух разных гипотупругих материалов, разделенных контактным разрывом.
2. Построены численные методы для решения предложенной модели, обеспечивающие гарантированное выполнение отсутствия нефизических численных осцилляций, вызванных неконсервативными членами, на основе консервативных вдоль пути в фазовом пространстве схем.
3. Предложена модификация модели Уилкинса, обеспечивающая безусловную термодинамическую согласованность (невозрастание энтропии).

Теоретическая ценность и практическая значимость диссертационной работы заключаются в разработанной дискретной модели течения гипотупругих сред, соответствующих численных методах и программном комплексе для расчета параметров течения многоматериальной гипотупругой среды на эйлеровых сетках. Данная модель и программный комплекс открывает возможность численного моделирования сложных физических процессов с большими деформациями во многих промышленных задачах.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Однородная (гомогенизированная) эйлерова модель Уилкинса для описания течения двух разных гипотупругих сред, разделенных контактным разрывом.
2. Численные методы и алгоритмы для решения предложенной модели, обеспечивающие гарантированное выполнение отсутствия нефизических численных осцилляций, вызванных неконсервативными членами, на основе консервативных вдоль пути в фазовом пространстве схем.

3. Комплекс программ для решения задач механики гетерогенных гипотупругих сжимаемых сред.
4. Модификация модели Уилкинса, обеспечивающая безусловную термодинамическую согласованность (невозрастание энтропии).

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечены строгостью используемого математического аппарата и подтверждаются сравнением результатов вычислительных экспериментов с известными в литературе экспериментальными и расчетными данными, а также данными, полученными с помощью других методов.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы апробированы на следующих научных конференциях:

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2023”.
2. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2024”.
3. Конференция «Вычислительная классическая и многофазная гидродинамика и термомеханика сплошной среды» (Сочи, Международный математический центр «Сириус», 2024 г.).
4. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2025”.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных работах, изданных в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

Личный вклад соискателя. Основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад соискателя в опубликованные работы. Основные результаты, полученные в диссертации получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа представлена на 99 страницах, содержит 27 иллюстраций и 5 таблиц. Список литературы содержит 101 наименование.

Глава 1

Математический анализ модели Уилкинса

Классическая гипопругая модель Уилкинса [18] представляется простым обобщением газодинамических уравнений. Поскольку давления недостаточно для описания взаимодействия внутренних контактов, добавляются материальные уравнения для эволюции девиатора тензора напряжений, чтобы учесть упругие и пластические процессы [50]. В классической модели Уилкинса [18] внутренняя энергия связана только с термодинамическими параметрами, такими как плотность и давление (аналогично случаю жидкостей). Однако, в последние годы в ряде работ [50, 51] утверждается, что внутренняя энергия должна быть связана также со вторым инвариантом девиаторного напряжения (аналогично случаю гиперупругости). Последний вариант принят в данной работе. Далее анализируются термодинамические свойства модели и решается одномерная задача Римана со сдвиговыми напряжениями. Соответствующие выводы используются при последующей разработке математических моделей и численных методов.

1.1 Гипопругая модель Уилкинса

Гипопругая модель Уилкинса [18], нестационарная трехмерная система уравнений изотропного твердого тела, в эйлеровой формулировке записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) = 0 \quad (1.1c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} + \mathbf{S} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{S} - 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right) = k \mathbf{S}, \quad (1.1d)$$

где ρ — плотность, \mathbf{u} — вектор скорости, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, E — полная энергия, $\boldsymbol{\Omega} = 1/2 (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T)$ — тензор вращения, $\mathbf{D} = 1/2 (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ — тензор скоростей деформации, $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$, p — давление, \mathbf{S} — тензор девиатора напряжения, $\text{tr}(\mathbf{S}) = 0$, μ — модуль сдвига.

Приведенная система обобщает газодинамические уравнения Эйлера, добавляя описание упругих и пластических процессов в деформируемом твердом теле. Она записывается с помощью симметричного тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$. Первые три уравнения модели Уилкинса — это обычные уравнения сохранения массы, импульса и энергии.

В предположении изотропии давление определяется как $p = -1/3 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$, часто называемое гидродинамическим давлением, и считается термодинамическим параметром. Связь между ρ , p и внутренней энергией e называется уравнением состояния. В данной работе используются уравнения Ми-Грюнайзена:

$$\begin{aligned} p(\rho, e) &= \rho_0 c_0^2 f(\eta) + \rho \Gamma e \\ f(\eta) &= \frac{(\eta - 1)(\eta - \frac{1}{2}\Gamma(\eta - 1))}{(\eta - s(\eta - 1))^2} \\ \eta &= \frac{\rho}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ρ_0 , c_0 , s — константы и $\Gamma = (\partial p / \partial e)_\rho / \rho$ — параметр Грюнайзена.

Стандартная форма полной энергии обычно согласуется с гидродинамикой и имеет вид, $E = e + 0.5 \mathbf{u}^2$ [18, 22]. Однако, в некоторых последних исследованиях [50, 51] для улучшения термодинамических свойств модели Уилкинса было предложено учитывать во внутренней энергии также упругие члены и представлять полную энергию следующим образом:

$$E = e + 0.5 \mathbf{u}^2 + \frac{S_{ij} S_{ij}}{4\mu\rho}. \quad (1.3)$$

Для малых деформаций материальное уравнение (1.1d) выражает закон Гука, который определяет линейную связь между тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тензором малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.4)$$

где λ, μ — так называемые коэффициенты Ламе. Используя соотношение между давлением и тензором напряжений, закон Гука приводится к виду девиаторных напряжений,

$$S_{ij} = -\frac{2}{3}\mu \text{tr}(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (1.5)$$

Дифференцируя (1.5) по времени (обычно производная Яуманна, $D\mathbf{S}/Dt = \partial\mathbf{S}/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{S}$) и предполагая, что μ является константой, получается материальное уравнение (1.1d).

Правая часть в уравнении (1.1d) определяет эффект пластических деформаций. Для определения пластического течения используется критерий Мизеса, согласно которому значения компонентов тензора напряжений не могут выходить за пределы так называемой поверхности текучести Мизеса. Критерий Мизеса автоматически удовлетворяется, если k имеет следующий вид:

$$k = -\frac{3\mu \mathbf{S}:\mathbf{D}}{Y^2} H\left(\frac{\mathbf{S}:\mathbf{S}}{2} - \frac{Y^2}{3}\right), \quad (1.6)$$

где Y — предел текучести материала, и $H(x)$ — функция Хевисайда. Умножая уравнение (1.1d) на \mathbf{S} справа и слева и суммируя два полученных уравнения, получаем

$$\mathbf{S} : \frac{D\mathbf{S}}{Dt} + \frac{D\mathbf{S}}{Dt} : \mathbf{S} - 2\mu (\mathbf{S} : \mathbf{D} + \mathbf{D} : \mathbf{S}) = 2k \mathbf{S} : \mathbf{S}. \quad (1.7)$$

Следовательно, если $\mathbf{S} : \mathbf{S} \geq 2/3Y^2$,

$$\frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{dt} = 2(\mathbf{S} : \mathbf{D}) \left(2\mu - \frac{3\mu}{Y^2} (\mathbf{S} : \mathbf{S}) H\left(\frac{\mathbf{S}:\mathbf{S}}{2} - \frac{Y^2}{3}\right)\right) = 0. \quad (1.8)$$

Это означает, что значения компонентов тензора напряжений увеличивается только до поверхности текучести.

Учитывая, что производная Яуманна совпадает с материальной производной для потенциальных течений, для упрощения изложения в последующем анализе в этой главе рассматривается только одномерная упругая модель без производной Яуманна, которая записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p - S_{11})}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uv - S_{12})}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uw - S_{13})}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + (p - S_{11})u - S_{12}v - S_{13}w)}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho S_{11}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{11})}{\partial x} - \frac{4}{3}\mu\rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho S_{22}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{22})}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho S_{33}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{33})}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho S_{12}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{12})}{\partial x} - \mu\rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho S_{13}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{13})}{\partial x} - \mu\rho \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho S_{23}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{23})}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

1.2 Термодинамические свойства модели Уилкинса

Мы начнем с рассмотрения модели (1.9) в качестве примера, чтобы объяснить необходимость добавления упругого члена (часто также описываемого как энергия сдвиговой упругой деформации [52–54]) в полную энергию, т.е. в уравнение (1.3).

Для линейно-упругого материала энергия деформации рассчитывается как

$$\bar{U} = \sum_{i,j=1}^3 \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \tag{1.10}$$

Она может быть выражена в терминах давления и девиаторных напряжений следующим образом

$$\bar{U} = \frac{1}{2} S_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{p}{2} \varepsilon_{kk} = \frac{S_{ij} S_{ij}}{4\mu} + \frac{p^2}{2K}, \tag{1.11}$$

где K — объемный модуль упругости. Первый член называется девиаторным

членом энергии деформации на единицу объема, который сопровождает изменение формы при постоянном объеме, а второй — объемным членом энергии деформации на единицу объема, который сопровождает объемные изменения.

В отличие от гидродинамики, где внутренняя энергия обычно рассматривается как функция плотности и давления или только двух термодинамических параметров, для твердых тел, особенно гиперупругих материалов [51, 55, 56]), внутренняя энергия должна быть связана и с другими параметрами, такими как деформация. Для рассматриваемой гипотупругой модели (1.1), используя уравнения для сохранения массы (1.1a) и импульса (1.1b), и $E = e + 0.5\mathbf{u}^2$, уравнение (1.1c) переписывается как

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma : \mathbf{D} = \mathbf{S} : \mathbf{D} - p \operatorname{tr}(\mathbf{D}) = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{S} : \mathbf{D}^{\text{dev}}, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{D}^{\text{dev}} = \mathbf{D} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I}$. Подставляя (1.1d) в уравнение (1.12) и отмечая производную Яуманна как $d_j \mathbf{S} / dt$, получаем

$$\mathbf{S} : \mathbf{D}^{\text{dev}} = \mathbf{S} : \left(\frac{1}{2\mu} \frac{d_j \mathbf{S}}{dt} \right) = \frac{1}{2\mu} \mathbf{S} : \left(\frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{S}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{S} \right). \quad (1.13)$$

Каждый член в уравнении (1.13) упрощается отдельно следующим образом,

$$\mathbf{S} : \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{dt} \quad (1.14a)$$

$$\mathbf{S} : (\mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}) = \operatorname{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}) = \operatorname{tr}(\mathbf{S}^2 \boldsymbol{\Omega}) \quad (1.14b)$$

$$\mathbf{S} : (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}) = \operatorname{tr}(\mathbf{S}^T \boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}) = \operatorname{tr}(\mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}^2). \quad (1.14c)$$

Поскольку $\boldsymbol{\Omega}$ — антисимметричный тензор, \mathbf{S}^2 — симметричный тензор,

$$\operatorname{tr}(\mathbf{S}^2 \boldsymbol{\Omega}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}^2) = 0. \quad (1.15)$$

Таким образом, уравнение (1.12) можно записать в виде

$$\frac{de}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{4\mu\rho} \frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{dt}. \quad (1.16)$$

Из этого следует, что для гипотупругой модели Уилкинса внутренняя энергия должна быть связана не только с давлением и плотностью, но и со вторым инвариантом девиаторного напряжения, $\mathbf{S} : \mathbf{S}$. Тот факт, что внутренняя энергия является функцией одного или нескольких инвариантов напряжения или деформации, широко принят в механике твердого тела, поскольку он отражает объективность, не коррелируя с выбранной системой координат. Для модели без производной Яуманна (1.9) de имеет точно такой же вид, как и (1.16).

С другой точки зрения, включение или невключение упругого члена в полную энергию в значительной степени влияет на структуру волны в модели (1.9). В статье [51] теоретический анализ гипопругой модели с упругим членом показывает, что в линейной теории, продольные и сдвиговые волны разделены, и продольные параметры не изменяются под действием сдвиговой волны, что широко принято в теории волн напряжения [57—59]. Используя приведенный в статье [51] метод для анализа случая без упругого члена, показано, что сдвиговая волна в этом случае является нелинейной, причем каждый параметр состояния среды изменяется при переходе через сдвиговую волну. Например, в численных расчетах сдвигового слоя в статье [60] параметры, такие как плотность, давление, и продольная компонента вектора скорости, значительно изменяются при переходе через сдвиговую волну, когда гипопругая модель рассчитывается без упругого члена. При теоретическом решении задачи Римана для модели (1.9) необходимо разобраться с неконсервативной частью (1.9) на поверхности сильного разрыва, обработка которой требует интегрирования в фазовом пространстве по определенному пути [49, 61, 62]. Различные варианты пути приводят, вообще говоря, к разным результатам. То есть, решение задачи Римана для этой модели неединственно.

По этой причине в настоящей работе вместо исходной формы используется форма полной энергии (1.3). То есть, внутренняя энергия e в уравнении (1.16) делится на термодинамическую часть, которая задается уравнением состояния и в дальнейшем называется «внутренняя энергия», и упругую часть, которая задается упругим членом. Уравнение (1.3) впервые было принято в [50], а затем использовано в [51] для получения аналитического решения задачи Римана для рассматриваемой модели. А в статье [60] введение упругого члена объясняется как улучшение термодинамических свойств гипопругой модели, особенно энтропии. Более подробно остановимся на этом ниже.

Отношение Гиббса обычно имеет следующий вид:

$$Tds = de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (1.17)$$

где T — температура, s — энтропия. В связи с переопределением внутренней энергии и принятием уравнения (1.3), (1.16) следует переписать как

$$\frac{de}{dt} = \left(\frac{p}{\rho^2} + \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu\rho^2} \right) \frac{d\rho}{dt}. \quad (1.18)$$

Согласно уравнению состояния, внутренняя энергия может быть записана следующим образом,

$$de = (e_p)_\rho dp + (e_\rho)_p d\rho. \quad (1.19)$$

Подставляя уравнение (1.19) в (1.18), получаем, что

$$dp = \left(\frac{p}{\rho^2} - (e_\rho)_p + \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu\rho^2} \right) / (e_p)_\rho d\rho. \quad (1.20)$$

Термодинамическая скорость звука a обычно определяется как

$$dp = (p_\rho)_s d\rho + (p_s)_\rho ds = a^2 d\rho + (p_s)_\rho ds. \quad (1.21)$$

Комбинируя уравнения (1.17), (1.19) и (1.21), получаем, что

$$(p_s)_\rho = T / (e_p)_\rho \quad (1.22a)$$

$$dp = 1 / (e_p)_\rho de + \left(a^2 - p / \left((e_p)_\rho \rho^2 \right) \right) d\rho \quad (1.22b)$$

$$a^2 = \left(p / \rho^2 - (e_\rho)_p \right) / (e_p)_\rho. \quad (1.22c)$$

Следовательно, уравнение (1.20) также записывается в виде

$$dp = \left(a^2 + \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu\rho^2(e_p)_\rho} \right) d\rho. \quad (1.23)$$

Сравнивая уравнения (1.21), (1.23) и (1.22a) получаем, что

$$Tds = \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu\rho^2} d\rho. \quad (1.24)$$

Это доказывает, что даже в упругом обратимом процессе без ударной волны скорость изменения энтропии все еще не равна 0 из-за наличия девиаторного напряжения. Та же проблема остается и для случая, когда внутренняя энергия равна $E = e + 0.5\mathbf{u}^2$. Гаврилюк и другие [51] предлагают для строгого математического анализа этой модели модифицировать ее с помощью предположения,

$$\frac{d(\mu\rho)}{dt} = 0. \quad (1.25)$$

По тем же причинам Дебре [63] предлагает более сильное предположение, что $\mu\rho$ остается постоянным. Это является одним из способов согласовать модель Уилкинса со вторым законом термодинамики, но когда μ считается непостоянной, она обычно является функцией плотности и температуры [50] или напряжения [64], и обычно не удовлетворяет уравнению (1.25). Однако в настоящее время в теории постоянный модуль сдвига может быть и используется на практике [65–67], когда деформация мала и материал деформируется в линейной упругой стадии. Учитывая упрощенный анализ и модель, μ в данной работе рассматривается как константа. Таким образом, мы сталкива-

емся с моделью Уилкинса с нефизическим диссипативным поведением из-за изменения энтропии. Учитывая, что материальными уравнениями (1.1d) являются законом Гука для линейной упругости (1.4), и определение давления $p = -1/3 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$, то при малых деформациях

$$dp = -\frac{1}{3}d\sigma_{kk} = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)d\varepsilon_{kk} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{d\rho}{\rho_0}, \quad (1.26)$$

где ρ_0 — начальная плотность. Определив скорость звука c для модели Уилкинса (1.1) как

$$dp = \left(a^2 + \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu\rho^2(e_p)_\rho}\right)d\rho = c^2d\rho, \quad (1.27)$$

и сравнивая с уравнением (1.26),

$$\rho c^2 = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (1.28)$$

Обычно дается уравнение состояния, поэтому коэффициенты в уравнении (1.19) считаются известными величинами, так что связь между внутренней энергией и давлением может быть выражена как

$$de = \left((e_p)_\rho + (e_\rho)_p / c^2\right) dp. \quad (1.29)$$

Уравнения (1.26 – 1.29) получены на основе определения p и предположения, что p является термодинамическим параметром. Эти выводы используются в работе над моделью в Главе 2.

1.3 Задача Римана

Мы рассматриваем одномерную модель Уилкинса (1.9), в которой все параметры состояния изменяются только вдоль оси x , т.е. как функция от (t, x) . Для малых вращательных деформаций производная Яуманна также может быть заменена материальной производной. При решении задачи Римана для модели Уилкинса (1.9) мы будем использовать вектор \mathbf{W} примитивных переменных вместо вектора \mathbf{Q} консервативных переменных:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad (1.30)$$

где

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \\ S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Здесь c — скорость звука, которая определяется по уравнению (1.27), a — гидродинамическая скорость звука, которая определяется по уравнению (1.22с).

Задача Римана для модели Уилкинса, математически формулируется как задача Коши для системы уравнений (1.30) и (1.31), с начальными данными

$$\mathbf{W}'(x, 0) = [\mathbf{W}, \mu] = \begin{cases} [\mathbf{W}_{1L}, \mathbf{W}_{2L}, \mu_L], & x < 0 \\ [\mathbf{W}_{1R}, \mathbf{W}_{2R}, \mu_R], & x > 0, \end{cases} \quad (1.32)$$

где $\mathbf{W}_1 = [\rho, u, p, S_{11}, S_{22}, S_{33}]^T$, $\mathbf{W}_2 = [v, w, S_{12}, S_{13}, S_{23}]^T$.

В силу автомодельности решение задачи Римана зависит только от переменной подобия $\xi = x/t$, и, поэтому

$$(\mathbf{A} - \xi \mathbf{I}) \frac{d\mathbf{W}}{d\xi} = 0. \quad (1.33)$$

Таким образом, ξ — должно совпадать с собственным значением \mathbf{A} , а $d\mathbf{W}/d\xi$ — с соответствующим правым собственным вектором \mathbf{A} .

Тривиальным решением уравнения (1.33) является случай, когда $d\mathbf{W}/d\xi = 0$, что соответствует кусочно постоянным решениям. В разных областях могут быть разные значения констант. Нетривиальным решением уравнения (1.33) является случай, когда $\det(\mathbf{A} - \xi \mathbf{I}) = 0$, что соответствует двум возможным разрывным решениям, а именно слабому разрыву (волна разрежения) и сильному разрыву (ударная и контактная волна). Для сильного разрыва ударных и контактных волн, поскольку \mathbf{W} является разрывным, мы используем символ $[\mathbf{W}]$ вместо $d\mathbf{W}$.

Исходя из собственных значений, мы называем различные волны следующим образом: $\lambda_{1-5} = u$ соответствует контактной волне, $\lambda_{6,7} = u \pm \sqrt{c^2 + \frac{4\mu}{3\rho}}$ соответствует продольной волне, $\lambda_{8-11} = u \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ соответствует сдвиговой

волне. Полный набор соответствующих собственных векторов показан ниже,

$$\begin{aligned}
 \lambda = u, & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \lambda = u \pm \sqrt{c^2 + \frac{4\mu}{3\rho}}, & \begin{bmatrix} \frac{3\rho}{2\mu} \\ \frac{3}{2\mu} \sqrt{c^2 + \frac{4\mu}{3\rho}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3\rho c^2}{2\mu} \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3\rho}{2\mu} \\ -\frac{3}{2\mu} \sqrt{c^2 + \frac{4\mu}{3\rho}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3\rho c^2}{2\mu} \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \lambda = u \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{\mu\rho} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{\mu\rho} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\mu\rho} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1.34}
 \end{aligned}$$

где для сдвиговой волны первые два собственных вектора соответствуют правым движущимся волнам, а последние два — левым.

Стандартная процедура расчетов, как и в [68], показывает, что характеристические поля контактной и сдвиговой волны линейно вырождены, в отличие от продольной волны, которая является действительно нелинейной. Волны действительно нелинейного поля - это либо ударные волны, либо волны разре-

жения, в зависимости от того, сходятся или расходятся характеристики, в то время как волны линейно вырожденного поля - это исключительно контактные разрывы [69]. Таким образом, без учета вакуумной ситуации существует четыре возможных структуры волн в задаче Римана, как показано на рисунке 1.1.

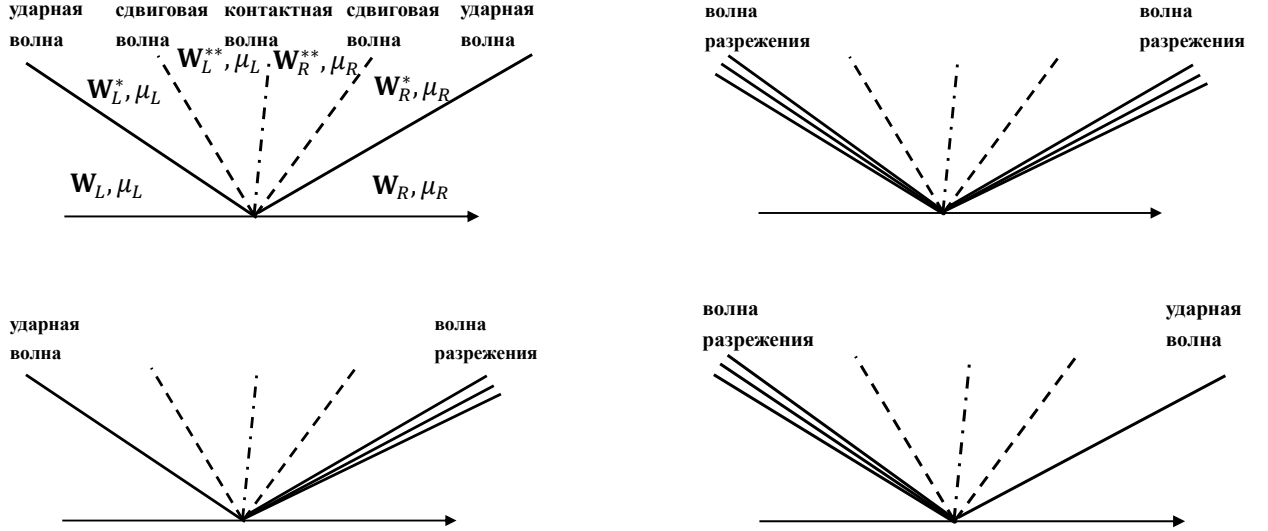


Рисунок 1.1 — Возможные волновые конфигурации задачи Римана.

Сначала исследуется изменение параметров среды перед и за контактными и сдвиговыми волнами. Характеристики параллельны таким разрывам, что совпадает с линейными гиперболическими системами с постоянными коэффициентами, а собственные значения матрицы Якоби слева и справа от этих разрывов равны скорости самой волны. Обобщенные инварианты Римана показывают, какие величины не меняются при переходе через волну [68]. Очевидно, для этого можно использовать также соотношения Ранкина-Гюгонио на сильном разрыве. Используя (1.31) и правые собственные векторы (1.34), для контактной волны получим

$$\begin{aligned} [u] &= [v] = [w] = 0 \\ [S_{12}] &= [S_{13}] = 0 \\ [p - S_{11}] &= 0. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Для сдвиговой волны,

$$\begin{aligned}
[\rho] &= 0, [u] = 0, [p] = 0 \\
[S_{11}] &= [S_{22}] = [S_{33}] = 0 \\
[S_{23}] &= 0 \\
S_{12R}^{**} - S_{12R}^* &= \sqrt{\mu_R \rho_R^*} (v_R^* - v_R^{**}) \\
S_{12L}^{**} - S_{12L}^* &= -\sqrt{\mu_L \rho_L^*} (v_L^* - v_L^{**}) \\
S_{13R}^{**} - S_{13R}^* &= \sqrt{\mu_R \rho_R^*} (w_R^* - w_R^{**}) \\
S_{13L}^{**} - S_{13L}^* &= -\sqrt{\mu_L \rho_L^*} (w_L^* - w_L^{**}).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Далее рассматриваются свойства продольных волн. Если продольная волна является волной разрежения, то используя (1.31) и (1.34), получаем

$$\begin{aligned}
dv &= dw = 0 \\
dS_{12} &= dS_{13} = dS_{23} = 0 \\
dS_{11} &= -2dS_{22} = -2dS_{33} \\
dp &= c^2 d\rho = a^2 d\rho + \frac{S_{ij} S_{ij}}{4\mu \rho^2 e_p} d\rho \\
du &= \pm \frac{\sqrt{c^2 + \frac{4\mu}{3\rho}}}{\rho} d\rho \\
dS_{11} &= -\frac{4\mu}{3\rho} d\rho,
\end{aligned} \tag{1.37}$$

где верхний знак берется для волны, расположенной справа от контактного разрыва, а нижний — для волны слева от разрыва. Параметр μ также берется для соответствующего материала.

Заметим, что последнее уравнение в (1.37) показывает, что S_{11} является функцией только плотности. Следовательно, $dp = F(p, \rho) d\rho$, что обычно может быть решено только численно. Из соотношения между dp и $d\rho$ следует, что модель Уилкинса не является изоэнтропийной даже в упругой стадии, когда ударная волна не возникает. Согласно выводам из раздела 1.2, строгая изэнтропия требует условия (1.25). Когда μ может рассматриваться как константа, условие (1.25) может быть интерпретировано как случай малых деформаций, что разумно для модели Уилкинса. Таким образом, в предположении малых деформаций, если пренебречь членом в c^2 , содержащим девиаторное напряжение, получается

$$dp = c^2 d\rho = a^2 d\rho = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, ds = 0. \tag{1.38}$$

Интегрирование (1.38) дает $p = p(\rho)$ и, подставив его в уравнения (1.37), мы получим остальные примитивные переменные, как функции от p или ρ . Для случая двучленного уравнения состояния это приводит к уравнениям

(10)–(12) из [51].

Рассмотрим теперь случай, когда продольная волна является ударной. Перепишем уравнения для S_{11} , S_{22} , S_{33} в консервативной форме как

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho S_{11} + 4/3 \mu \rho \ln \rho)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho S_{11} + 4/3 \mu \rho \ln \rho) u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\rho S_{22} - 2/3 \mu \rho \ln \rho)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho S_{22} - 2/3 \mu \rho \ln \rho) u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\rho S_{33} - 2/3 \mu \rho \ln \rho)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho S_{33} - 2/3 \mu \rho \ln \rho) u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Для тангенциальных девиаторных напряжений S_{12} , S_{13} уравнения являются, в общем случае, неконсервативными. Однако, если положить, скорости v и w не меняются при переходе через ударную волну, то неконсервативный член исчезает, и можно записать для этого случая соотношения Ранкина-Гюгонио:

$$\begin{aligned} [v] &= [w] = 0 \\ [S_{12}] &= [S_{13}] = 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Использование соотношений Ранкина-Гюгонио для (1.39) дает

$$\begin{aligned} S_{11}^* &= S_{11} + \frac{4}{3} \mu \ln \left(\frac{\rho}{\rho^*} \right) \\ S_{22}^* &= S_{22} - \frac{2}{3} \mu \ln \left(\frac{\rho}{\rho^*} \right) \\ S_{33}^* &= S_{33} - \frac{2}{3} \mu \ln \left(\frac{\rho}{\rho^*} \right), \end{aligned} \quad (1.41)$$

Используя соотношения Ранкина-Гюгонио для остальных уравнений в (1.9), получаем линию Рэлея-Михельсона и ударную адиабату Гюгонио, записанные в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* - \sigma_{11} &= (\rho(u - D))^2 \left(\frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\rho} \right) = m^2 \left(\frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\rho} \right) \\ e^* - e + \frac{S_{11}^{*2} + S_{22}^{*2} + S_{33}^{*2}}{4\mu\rho^*} &= \frac{1}{2} (\sigma_{11}^* + \sigma_{11}) \left(\frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (1.42)$$

где D — скорость ударной волны. Разложив функцию $\ln(\rho/\rho^*)$ и оставив только член первого порядка (малое изменение плотности), второе уравнение в (1.42) может быть изменено на

$$e^* - e + \frac{S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2}{4\mu} \left(\frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{2} (p^* + p) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*} \right). \quad (1.43)$$

Дальше для решения требуется конкретное уравнение состояния $e(p, \rho)$. После алгебраических вычислений получается, что параметры за ударной волной $S_{11}^*, S_{22}^*, S_{33}^*, p^*, m^*, u^*$ являются однозначными функциями от ρ^* .

Отметим, что при упрощении (1.40), (1.41) – (1.43) являются одним из возможных решений задачи Римана. Когда (1.40) не выполняется, существование других решений требует дальнейшего математического анализа.

Таким образом, получены соотношения параметров перед и за каждой волной в задаче Римана. Оказывается, что \mathbf{W}_2 не меняется на продольных волнах, а \mathbf{W}_1 не меняется на сдвиговых волнах. Определения \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 приведены в уравнении (1.32). Следовательно, соотношения между параметрами на рисунке 1.1 могут быть упрощены, как показано на рисунке 1.2.

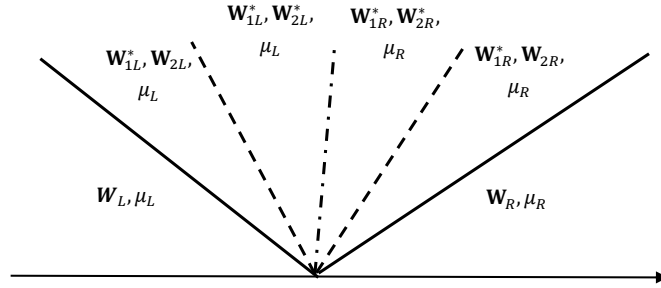


Рисунок 1.2 — Волновая структура в решении задачи Римана.

После рассмотрения начального условия (1.32), согласно (1.35) и (1.36) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{2L}^* &= \mathbf{W}_{2R}^* \\ v^* &= \frac{-S_{12L} + S_{12R} + \sqrt{\mu_R \rho_R^*} v_R + \sqrt{\mu_L \rho_L^*} v_L}{\sqrt{\mu_R \rho_R^*} + \sqrt{\mu_L \rho_L^*}} \\ S_{12}^* &= \frac{\sqrt{\mu_R \rho_R^*} S_{12L} + \sqrt{\mu_L \rho_L^*} S_{12R} + \sqrt{\mu_L \rho_L^* \mu_R \rho_R^*} (v_R - v_L)}{\sqrt{\mu_R \rho_R^*} + \sqrt{\mu_L \rho_L^*}} \\ w^* &= \frac{-S_{13L} + S_{13R} + \sqrt{\mu_R \rho_R^*} w_R + \sqrt{\mu_L \rho_L^*} w_L}{\sqrt{\mu_R \rho_R^*} + \sqrt{\mu_L \rho_L^*}} \\ S_{13}^* &= \frac{\sqrt{\mu_R \rho_R^*} S_{13L} + \sqrt{\mu_L \rho_L^*} S_{13R} + \sqrt{\mu_L \rho_L^* \mu_R \rho_R^*} (w_R - w_L)}{\sqrt{\mu_R \rho_R^*} + \sqrt{\mu_L \rho_L^*}}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Используя соотношения (1.37) и (1.40)–(1.43), получаем \mathbf{W}_1^* как функцию плотности, $\mathbf{W}_{1L}^*(\rho_L^*)$ и $\mathbf{W}_{1R}^*(\rho_R^*)$, что зависит от случая ударных волн или волн разрежения. Согласно (1.35), $u_L^* = u_R^* = u^*$. Следовательно, \mathbf{W}_1^* может

быть условно преобразовано в нелинейную систему уравнений для скорости контактной волны u^* , которая затем итерационно решается методом Ньютона-Рафсона. Начальное значение для u^* может быть оценено как

$$u^* = \frac{\rho_R u_R (u_R - s_R) - \rho_L u_L (u_L - s_L) - \sigma_{11R} + \sigma_{11L}}{\rho_R (u_R - s_R) - \rho_L (u_L - s_L)}. \quad (1.45)$$

Если $u^* > u_R$, то используются соотношения ударной волны (1.40)–(1.43). Если $u^* \leq u_R$, то используются соотношения для волн разрежения (1.37). Согласно (1.35), условием окончания итерации является то, что разность σ_{11} по обе стороны контактной волны меньше порогового значения, то есть,

$$-p_L^*(u^*) + S_{11L}^*(u^*) = -p_R^*(u^*) + S_{11R}^*(u^*). \quad (1.46)$$

Теоретическое решение задачи Римана с критерием пластичности еще требует дальнейшего математического анализа. Тем не менее, для некоторых конкретных случаев решение оказывается проще. В случае, когда в начальном условии (1.32) $\mathbf{W}_2 = 0$, т.е. соответствует случаю одноосной деформации, приведенные выше результаты вырождаются и согласуются с выводами, представленными в статьях [70–72], где решение пластической волны приводится. Например, когда генерируется ударная волна, для ситуации упруго-пластического перехода существует критический предел интенсивности удара, который выражается плотностью за ударной волной. Если интенсивность ударной волны ниже этого значения, то возникает двухволновая структура, и скорость упругой волны больше скорости пластической волны. Напротив, если интенсивность удара выше критического значения, возникает одиночная волна. Параметры перед и за упругой и пластической волнами по-прежнему задаются уравнениями (1.42) и (1.43), за исключением того, что они соответствуют разным m . В случае одиночной пластической волны при переходе через нее изменяются плотность, скорость u , давление и девиаторное напряжение S_{11} . В силу критерия пластичности абсолютное значение S_{11} за волной достигает максимального значения, определяемого данным критерием. В случае двухволновой структуры за упругой волной S_{11} изменяется от начального значения до максимального, а остальные параметры изменяются соответственно. При переходе через пластическую волну S_{11} остается неизменным, а другие параметры продолжают изменяться. Однако, когда $\mathbf{W}_2 \neq 0$, и за продольной волной материал достигает пластической фазы, введение и описание сдвиговой пластической волны остаются пока неизвестными.

Глава 2

Одномерная биматериальная математическая модель Уилкинса

В главе 1 мы исследовали математические свойства одноматериальной модели Уилкинса, как для особого случая одноосной деформации, так и для общего случая со сдвиговыми напряжениями. В этой главе на основе метода диффузной границы разработана одномерная эйлерова модель для двухматериальных гипотупругих сред. Эта модель представляет собой равновесную редуцированную модель, которая получается путем применения асимптотического анализа к неравновесной модели диффузной границы раздела биматериалов. Эта неравновесная модель, в свою очередь, получена с помощью процедуры усреднения по пространству, примененной к гипотупругой модели Уилкинса. В частном случае одноосной деформации девиаторное напряжение является однозначной функцией плотности. Поэтому определяющие уравнения фактически совпадают с уравнениями гидродинамики. В этом случае мы можем рассматривать упругопластический материал как псевдожидкость и по аналогии с гидродинамическими результатами (модель Байера-Нунциато и ее редуцированная равновесная версия) непосредственно получить биматериальную модель для случая одноосной деформации. Этот результат полностью согласуется с результатом, получающимся из общего случая, к рассмотрению которого мы переходим ниже после вырождения в общем случае.

2.1 Неравновесная биматериальная модель диффузной границы

Наша задача — обобщить модель Уилкинса на случай двух различных материалов, то есть α и β , разделенных интерфейсом, используя метод диффузной границы. Мы вводим характеристическую функцию $\chi(t, \mathbf{x}) = 1$, если \mathbf{x} лежит в области материала α , и $\chi(t, \mathbf{x}) = 0$, если \mathbf{x} находится в материале β . Эта функция удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{u}^I \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad (2.1)$$

где \mathbf{u}^I — скорость на границе. Это и есть топологическое уравнение, конкретное доказательство которого приведено в главе 9 работы [73]. Введем фильтр, то есть небольшую область V с центром в точке \mathbf{x} . В общем случае она состоит из подобластей, занятых двумя материалами. Для удобства мы введем функцию фильтра ψ , принимающую значение 1 в этой малой области и 0 на остальном пространстве. Вначале мы докажем две важные формулы, которые понадобятся позже.

- Лемма 1

$$\int_V f \frac{\partial \chi}{\partial t} dV = - \int_{S_V} f \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.2a)$$

$$\int_V f \nabla \chi dV = \int_{S_V} f \mathbf{n} dS, \quad (2.2b)$$

где f — произвольная пробная функция $f = f(t, \mathbf{x})$, S_V — интерфейс между компонентами, \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к S_V , направленная в сторону материала α .

Рассматривается множество пробных функций, $\phi(\mathbf{x}, t) \in \Phi$, имеющих компактный носитель и производные всех порядков. Если $g(\mathbf{x}, t)$ является разрывной функцией, производные g определяются следующим образом:

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv dt = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} g(\mathbf{x}, t) dv dt, \quad (2.3a)$$

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, t) \nabla g(\mathbf{x}, t) dv dt = - \int_{\Omega} \nabla \phi(\mathbf{x}, t) g(\mathbf{x}, t) dv dt, \quad (2.3b)$$

для любого $\phi \in \Phi$, где Ω является компактным множеством в пространстве и времени, таким, что носитель ϕ лежит в Ω . Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, t) \nabla \chi(\mathbf{x}, t) dv dt &= - \int_{\Omega} \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \chi(\mathbf{x}, t) dv dt \\
&= - \int_{\Omega_{\alpha}} \nabla \phi(\mathbf{x}, t) dv dt = - \int_{\partial \Omega_{\alpha}} \mathbf{n}_{\alpha} \phi(\mathbf{x}, t) ds dt \quad (2.4) \\
&= - \int_{\Omega} \mathbf{n}_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, t) \phi(\mathbf{x}, t) dv dt,
\end{aligned}$$

где Ω_{α} — пересечение Ω с компонентой α , $\partial \Omega_{\alpha}$ — интерфейс между компонентами, \mathbf{n}_{α} — единичный нормальный вектор в направлении, внешнем по отношению к компоненту α , $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, t)$ — дельта-функция Дирака для интерфейса. Таким образом,

$$\nabla \chi = -\mathbf{n}_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, t). \quad (2.5)$$

Комбинируя уравнения (2.1), (2.4) и (2.5) и учитывая, что \mathbf{n}_{α} и \mathbf{n} направлены в противоположные стороны, получаем (2.2).

- Лемма 2 Для произвольной пробной функции $f = f(t, \mathbf{x})$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV \quad (2.6a)$$

$$\nabla \int_V f dV = \int_V \nabla f dV \quad (2.6b)$$

Поскольку фильтр $V = V(\mathbf{x})$ не зависит от времени, порядок интегрирования и дифференцирования можно поменять местами. По определению производной,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_V f dV = \int_{\partial V} f n_k dS, \quad (2.7)$$

где n_k обозначают компоненты единичной внешней нормали на границе фильтра, ∂V обозначает поверхность фильтра. По теореме Остроградского-Гаусса, определению производной,

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_k} dV = \int_{\partial V} f n_k dS. \quad (2.8)$$

Комбинируя уравнения (2.7) и (2.8), получаем (2.6).

Далее мы рассмотрим одномерную гипотетическую модель Уилкинса (1.9). Обозначения соответствуют тем, что даны в главе 1, и полная энергия $E = e + 0.5\mathbf{u}^2 + \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu\rho}$. Перепишем ее в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0, \quad (2.9)$$

где \mathbf{Q} — вектор консервативных переменных, \mathbf{F} — вектор потока, а третий член представляет собой неконсервативную часть. Для упрощения рассматриваемой процедуры усреднения мы опускаем коррекцию производной Яуманна в приведенных выше уравнениях; однако, эта коррекция может быть включена в результирующую многоматериальную модель. Усредним (2.1) по фильтру ψ , то есть, домножим (2.1) на ψ и проинтегрируем по всему пространству. С учетом Леммы 1 и 2 получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{S_V} \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} ds = 0. \quad (2.10)$$

где φ — объемная доля, $\varphi = \frac{1}{V} \int \psi \chi dV = \frac{1}{V} \int_V \chi dV$, V — объем фильтра. Используя уравнение (2.5), получаем, что

$$\frac{1}{V} \int_{S_V} n_k dS = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \chi}{\partial x_k} dV = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{V} \int_V \chi dV \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (2.11)$$

Уменьшая фильтр и стягивая его фактически к точке, можно получить предельное выражение для интеграла по поверхности тела:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{S_V} f \mathbf{n} dS = f \nabla \varphi. \quad (2.12)$$

Таким образом, уравнение (2.10) может быть в пределе приведено к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u}^I \cdot \nabla \varphi = 0. \quad (2.13)$$

Аналогично, домножим уравнение вида

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial x_m} = 0, \quad (2.14)$$

на $\psi \chi$, и проинтегрируем по всему пространству, результатом будет следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \varphi \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi \tilde{\mathbf{F}}_m}{\partial x_m} - \frac{1}{V} \int_{S_V} [n_k \mathbf{F}_k - \mathbf{Q} (\mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n})] dS = 0, \quad (2.15)$$

где $\tilde{\mathbf{Q}}$ обозначает усредненную переменную по области ненулевого значения фильтра, что имеет вид, $\tilde{\mathbf{Q}} = \int_V \chi \mathbf{Q} dV / \int_V \chi dV$. Третий член уравнения (2.15) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{S_V} [n_k \mathbf{F}_k - \mathbf{Q} (\mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n})] dS &= \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{\mathbf{F}}_m \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \\ &= (-\bar{\mathbf{Q}} u_m^I + \bar{\mathbf{F}}_m) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\bar{\mathbf{Q}}$ обозначает усредненную переменную по интерфейсу. Применение усреднения в одномерном случае дает

$$\frac{\partial \varphi \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial t} - \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi \tilde{\mathbf{F}}}{\partial x} - \bar{\mathbf{F}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{L} \int_{\psi=1} \left(\chi \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right) dx = 0, \quad (2.17)$$

(объем V вырождается в длину L). Для неконсервативного члена трудно получить усредненное значение из-за функции Дирака, поэтому принимается следующее предположение

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{\psi=1} \left(\chi \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right) dx &\approx \frac{1}{L} \tilde{\mathbf{B}} \int_{\psi=1} \left(\frac{\partial \chi \mathbf{Q}}{\partial x} - \mathbf{Q} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) dx \\ &= \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \varphi \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial x} - \tilde{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \varphi \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial x} + \tilde{\mathbf{B}} (\tilde{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{Q}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким образом, для уравнения (2.9) после усреднения получаются следующие результаты

$$\begin{aligned} &\int_{\psi=1} \chi \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right) dx \\ &= \int_{\psi=1} \left(\frac{\partial \chi \mathbf{Q}}{\partial t} - \mathbf{Q} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi \mathbf{F}}{\partial x} - \mathbf{F} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \chi \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right) dx \\ &\approx \frac{\partial \varphi \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi \tilde{\mathbf{F}}}{\partial x} - \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \bar{\mathbf{F}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial x} + \tilde{\mathbf{B}} (\tilde{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{Q}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

При стремлении фильтра L в уравнении (2.19) к нулю, получается следующее уравнение:

$$\frac{\partial \varphi \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi \mathbf{F}}{\partial x} + (\mathbf{Q}^I u^I - \mathbf{F}^I) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \mathbf{B} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^I) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (2.20)$$

где \mathbf{Q}^I обозначает \mathbf{Q} в точке интерфейса. Здесь мы предполагаем, что значения $\tilde{\mathbf{Q}}$ и $\tilde{\mathbf{F}}$ после взятия предела и уравнение состояния такие же, как в исходной задаче (1.9). Таким образом, одномерная модель диффузной границы на основе пространственного осреднения по малому фильтру определяется следующей системой определяющих уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^k \rho^k u^k)}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k u^k}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^k \rho^k u^{k2} - \varphi^k \sigma_{11}^k)}{\partial x} + \sigma_{11}^{kI} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k v^k}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^k \rho^k u^k v^k - \varphi^k \sigma_{12}^k)}{\partial x} + \sigma_{12}^{kI} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k w^k}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^k \rho^k u^k w^k - \varphi^k \sigma_{13}^k)}{\partial x} + \sigma_{13}^{kI} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k E^k}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^k (\rho^k E^k u^k - \sigma_{11}^k u^k - \sigma_{12}^k v^k - \sigma_{13}^k w^k))}{\partial x} \\
& \quad + (\sigma_{11}^{kI} u^{kI} + \sigma_{12}^{kI} v^{kI} + \sigma_{13}^{kI} w^{kI}) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{11}^k}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{11}^k u^k}{\partial x} - \frac{4}{3} \varphi^k \rho^k \mu^k \frac{\partial u^k}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu^k \rho^{kI} (u^{kI} - u^k) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = 0 \quad (2.21) \\
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{22}^k}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{22}^k u^k}{\partial x} + \frac{2}{3} \varphi^k \rho^k \mu^k \frac{\partial u^k}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu^k \rho^{kI} (u^{kI} - u^k) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{33}^k}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{33}^k u^k}{\partial x} + \frac{2}{3} \varphi^k \rho^k \mu^k \frac{\partial u^k}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu^k \rho^{kI} (u^{kI} - u^k) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{12}^k}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{12}^k u^k}{\partial x} - \varphi^k \rho^k \mu^k \frac{\partial v^k}{\partial x} + \mu^k \rho^{kI} (v^{kI} - v^k) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{13}^k}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{13}^k u^k}{\partial x} - \varphi^k \rho^k \mu^k \frac{\partial w^k}{\partial x} + \mu^k \rho^{kI} (w^{kI} - w^k) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{23}^k}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^k \rho^k S_{23}^k u^k}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^k}{\partial t} + u^{kI} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = 0,
\end{aligned}$$

где $k = \alpha, \beta$. Верхний индекс I обозначает значение на интерфейсе. Учитывая условие непрерывности перемещения и совместимость деформации на границе, имеем $\mathbf{u}^{\alpha I} = \mathbf{u}^{\beta I}$, $\sigma_{1i}^{\alpha I} = \sigma_{1i}^{\beta I}$. Для неравновесной твердо-жидкостной двухфазной модели значение давления на границе принимается за давление жидкости, а значение скорости интерфейса — за скорость твердого тела [74–77]. Однако возможны и альтернативные варианты [47]. Различные варианты интерфейсных значений приводят к различным моделям. В общем случае член $\mathbf{B}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^I) \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ не равен 0. Таким образом, использование модели (2.21) приводит к необходимости определения значения плотности на границе ρ^{kI} . Модель является аналогом неравновесной модели 7-ми уравнений Баера-Нунциато, которая обладает хорошими математическими свойствами: безусловной гиперболичностью [47]. Однако из-за большого числа волн в этой модели и высокой чувствительности к процессу релаксации приводит к большим трудностям при численном решении [78–81]. В данной работе мы не ставим целью охватить эту область, а также разобраться с этими трудностями, а скорее сосредоточимся

на модели из пяти уравнений, аналогичной сокращенной модели [82]. В этом случае, учитывая уравнение (2.40), $\mathbf{B} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^I) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$. В дальнейшем этот элемент будет рассматриваться как 0.

Уравнения для девиаторных напряжений S_{ii} после алгебраических операций могут быть преобразованы к консервативным формам, например,

$$\frac{\partial (\rho S_{11} + 4/3 \mu \rho \ln \rho)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho S_{11} + 4/3 \mu \rho \ln \rho) u}{\partial x} = 0, \quad (2.22)$$

подставляя его в уравнение (2.20) без приближенного предположения, то есть, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, получаем

$$\frac{\partial \varphi^k (\rho^k S_{11}^k + 4/3 \mu^k \rho^k \ln \rho^k)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^k (\rho^k S_{11}^k + 4/3 \mu^k \rho^k \ln \rho^k) u^k}{\partial x} = 0. \quad (2.23)$$

Учитывая первое и последнее уравнение в модель (2.21), вычитание уравнения для S_{11}^k в (2.21) из (2.23) дает

$$\frac{4}{3} \mu^k (\rho^k - \rho^{kI}) (u^{kI} - u^k) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x}. \quad (2.24)$$

В редуцированных уравнениях в разделе 2.2 обе фазы имеют одинаковую скорость и равны скорости на границе (уравнение (2.40)). Поэтому он зануляется. Но оценка этой разницы для $S_{ij}, i \neq j$ очень сложна или даже невозможна.

2.2 Редуцированная равновесная модель методом асимптотического анализа

Явление, при котором неравновесие между фазами уменьшается со временем, называется релаксацией. Например, в газо-пылевом течении, когда частицы в газе имеют скорости и температуры, отличные от скоростей и температур газа, взаимодействие между двумя фазами происходит с течением времени, частицы подвергаются сопротивлению и теплообмену с газом, и существует тенденция к приближению их скоростей и температур друг к другу. Мгновенная скорость этой релаксации зависит от мгновенной разности скоростей и температур. Величина отклонения режима движения от равновесия зависит от скорости протекания макроскопического процесса и от скорости перехода режима из неравновесного в равновесный (процесс релаксации). Первое называется характерным временем макроскопического процесса, а второе может быть охарактеризовано временем релаксации.

По аналогии с классической VN моделью с семью уравнениями [74], численное поведение и решение уравнений (2.21) в значительной степени обусловлено процедурой релаксации, используемой для различных масштабов длины и

времени для равновесия скорости и напряжения [83]. Следуя идеям и методам (асимптотический анализ), описанным в статье [82, 84], о том, что временные масштабы уравнивания скоростей и напряжений малы по сравнению с характерным временем течения, получена аппроксимация нулевого порядка уравнений (2.21). В общем случае асимптотический анализ — это та область анализа, которая занимается как разработкой методов, так и получением приближенных аналитических решений задач, в которых параметр или некоторая переменная становится либо большой, либо малой, либо находится в окрестности значения параметра или точки, где решение не является аналитическим [85].

Для дальнейшего анализа перепишем уравнения импульса, материальные уравнения для компонент девиаторного напряжения и уравнение объемной доли в модели (2.21) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k \frac{\partial u^k}{\partial x} - \frac{1}{\rho^k} \frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial x} + \frac{1}{\varphi^k \rho^k} (\sigma_{11}^{kI} - \sigma_{11}^k) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} &= \frac{F_{u1}^k}{\varphi^k \rho^k} \\
\frac{\partial v^k}{\partial t} + u^k \frac{\partial v^k}{\partial x} - \frac{1}{\rho^k} \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial x} + \frac{1}{\varphi^k \rho^k} (\sigma_{12}^{kI} - \sigma_{12}^k) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} &= \frac{F_{u2}^k}{\varphi^k \rho^k} \\
\frac{\partial w^k}{\partial t} + u^k \frac{\partial w^k}{\partial x} - \frac{1}{\rho^k} \frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial x} + \frac{1}{\varphi^k \rho^k} (\sigma_{13}^{kI} - \sigma_{13}^k) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} &= \frac{F_{u3}^k}{\varphi^k \rho^k} \\
\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial t} + u^k \frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial x} - \left(\rho^k c^{k2} + \frac{4}{3} \mu^k \right) \frac{\partial u^k}{\partial x} &= F_{\sigma 11}^k \\
\frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial t} + u^k \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial x} - \left(\rho^k c^{k2} - \frac{2}{3} \mu^k \right) \frac{\partial u^k}{\partial x} &= F_{\sigma 22}^k \\
\frac{\partial \sigma_{33}^k}{\partial t} + u^k \frac{\partial \sigma_{33}^k}{\partial x} - \left(\rho^k c^{k2} - \frac{2}{3} \mu^k \right) \frac{\partial u^k}{\partial x} &= F_{\sigma 33}^k \\
\frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial t} + u^k \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial x} - \mu^k \frac{\partial v^k}{\partial x} &= F_{\sigma 12}^k \\
\frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial t} + u^k \frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial x} - \mu^k \frac{\partial w^k}{\partial x} &= F_{\sigma 13}^k \\
\frac{\partial \varphi^k}{\partial t} + u^{kI} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} &= F_{\varphi}^k.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

К уравнениям (2.25) есть два комментария:

1. Скорости звука c^{k2}

В общем случае уравнения для полной энергии и плотности преобразуются в уравнения для энтропии и давления [82, 84]. Предполагая, что каждая фаза удовлетворяет термодинамическим соотношениям (1.17), (1.19), (1.21), (1.22), скорость звука каждой фазы определяются.

Однако здесь только уравнение полной энергии из уравнений (2.21) преобразуется в уравнение давления, что требует использования уравнений импульса и девиаторных напряжений. Тогда давление неявно включается в выражение для σ_{ij} с помощью $S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$.

С учетом уравнений импульса и материальных уравнений в (2.21), из выражения для полной энергии (1.3) получим

$$\begin{aligned} dE &= de + udu + vdv + wdw + \frac{S_{ij}}{2\mu\rho}dS_{ij} - \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu\rho^2}d\rho \\ du_i &= \frac{1}{\varphi\rho} \left(\frac{\partial(\varphi\sigma_{1i})}{\partial x} - \sigma_{1i}^I \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right), (i = 1, 2, 3) \\ dS_{11} &= \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}, dS_{22} = dS_{33} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ dS_{1i} &= \mu \frac{\partial u_i}{\partial x}, (i = 1, 2), dS_{23} = 0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

где $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$. Верхний индекс k здесь опущен, поскольку процесс вывода и результаты идентичны для обоих материалов. И здесь $\mathbf{B}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^I) \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и член релаксации становятся нулевыми, по причинам, соответствующим тем, что описаны в разделе 2.1. Точная форма релаксационного члена подробно описана в следующем комментарии. С физической точки зрения, когда времена релаксации скоростей и напряжений стремятся к нулю, это обязательно приводит к тому, что вся область имеет единое поле скорости и соответствующее напряжение. С математической точки зрения уравнение (2.40) определяется формой релаксационного члена. Примем, что этот член пропорционален $u_i - u_i^I$, и будет равен нулю при полной релаксации. Разумеется, эти члены допустимо не опускать и получить точно такой же результат. Используя уравнение сохранения массы и энергии и уравнение объемной доли в (2.21) и уравнение (1.29), уравнение (2.26) упрощается следующим образом,

$$dp = -\frac{\left(\frac{p}{\rho} + \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu\rho}\right)}{(e_p + e_\rho/c^2)} \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.27}$$

Заметим, что определяемая уравнением (1.27) скорость звука c , которая отличается от термодинамической скорости звука a , определяемой уравнением (1.22с).

2. Релаксационные члены вводятся в правую часть уравнений (2.25)

Члены релаксации скорости принимаются в обычной форме как

$$\begin{aligned} F_{ui}^\alpha &= K_u^\alpha (u_i^\beta - u_i^\alpha) \\ F_{ui}^\beta &= K_u^\beta (u_i^\alpha - u_i^\beta), \end{aligned} \quad (2.28)$$

где K_u^k — параметр релаксации. В связи с сохранением импульса, $F_{ui}^\alpha + F_{ui}^\beta = 0$, то есть $K_u^\alpha = K_u^\beta$, в литературе обычно называется балансовым соотношением. Для определения связи между коэффициентами релаксации напряжений делается следующее предположение: при малых деформациях компоненты напряжения имеют определенную связь друг с другом в соответствии с законом Гука, поэтому предполагается, что такая же связь существует и между этими коэффициентами релаксации напряжений. Из закона Гука уравнения (1.4) и уравнения (1.28) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{ij}^k}{dt} &= \lambda^k \text{tr}(\epsilon_{ij}^k) \delta_{ij} + 2\mu^k \epsilon_{ij}^k \\ &= \left(\rho^k c^{k2} - \frac{2}{3}\mu^k \right) \frac{\partial u_m^k}{\partial x_m} \delta_{ij} + \mu^k \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Рассматривается внутренняя часть элемента бесконечно малого объема,

$$\frac{d\varphi^k}{dt} = \frac{d(V^k/V)}{dt} = \frac{\varphi^k}{V^k} \frac{d(V^k)}{dt} = \varphi^k \nabla \cdot \mathbf{u}^k. \quad (2.30)$$

Для одномерной деформации, уравнения (2.29) и (2.30) становятся:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{11}^k}{dt} &= \left(\rho^k c^{k2} + \frac{4}{3}\mu^k \right) \frac{\partial u^k}{\partial x} \\ \frac{d\sigma_{22}^k}{dt} &= \left(\rho^k c^{k2} - \frac{2}{3}\mu^k \right) \frac{\partial u^k}{\partial x} \\ \frac{d\sigma_{33}^k}{dt} &= \left(\rho^k c^{k2} - \frac{2}{3}\mu^k \right) \frac{\partial u^k}{\partial x} \\ \frac{d\sigma_{12}^k}{dt} &= \mu^k \frac{\partial v^k}{\partial x} \\ \frac{d\sigma_{13}^k}{dt} &= \mu^k \frac{\partial w^k}{\partial x} \\ \frac{d\varphi^k}{dt} &= \varphi^k \frac{\partial u^k}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Предполагается, что для компонентов напряжения и объемной доли релаксация имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{11}^\alpha}{dt} &= F_{\sigma 11}^\alpha = K_\sigma^\alpha (\sigma_{11}^\beta - \sigma_{11}^\alpha) \\
\frac{d\sigma_{11}^\beta}{dt} &= F_{\sigma 11}^\beta = K_\sigma^\beta (\sigma_{11}^\alpha - \sigma_{11}^\beta) \\
\frac{d\sigma_{1j}^\alpha}{dt} &= F_{\sigma 1j}^\alpha = K_{\sigma T j}^\alpha (\sigma_{1j}^\beta - \sigma_{1j}^\alpha) \\
\frac{d\sigma_{1j}^\beta}{dt} &= F_{\sigma 1j}^\beta = K_{\sigma T j}^\beta (\sigma_{1j}^\alpha - \sigma_{1j}^\beta), \quad j \neq 1 \\
\frac{d\varphi^\alpha}{dt} &= F_\varphi^\alpha = K_\varphi^\alpha (\sigma_{11}^\beta - \sigma_{11}^\alpha),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

где K_σ^k , $K_{\sigma T j}^k$ и K_φ^α — параметры релаксации для девиаторных напряжений и объемной доли. Заметим, что $\frac{d}{dt}$ в (2.31) и в (2.32) имеют разный смысл: в (2.31) речь идет об изменении напряжения в результате изменения деформации, определяемой законом Гука, а в (2.32) — об изменении напряжения в результате релаксационного процесса. Сравнивая уравнения (2.32) с (2.31), приходим к выводу, что должны быть справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
F_{\sigma ii}^\alpha &= \frac{K_\sigma^\alpha (\sigma_{11}^\beta - \sigma_{11}^\alpha) (\rho^\alpha c^{\alpha 2} - \frac{2}{3}\mu^\alpha)}{(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3}\mu^\alpha)} \\
F_{\sigma ii}^\beta &= \frac{K_\sigma^\beta (\sigma_{11}^\alpha - \sigma_{11}^\beta) (\rho^\beta c^{\beta 2} - \frac{2}{3}\mu^\beta)}{(\rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3}\mu^\beta)}, \quad i \neq 1 \\
F_\varphi^\alpha &= \varphi^\alpha \frac{K_\sigma^\alpha (\sigma_{11}^\beta - \sigma_{11}^\alpha)}{(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3}\mu^\alpha)}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Кроме того, параметры K_σ^α и K_σ^β должны быть связаны, в силу условия совместимости деформаций, следующим образом:

$$\varphi^\alpha \epsilon_{nn}^\alpha + \varphi^\beta \epsilon_{nn}^\beta = 0, \tag{2.34}$$

то есть,

$$\frac{K_\sigma^\alpha \varphi^\alpha}{(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3}\mu^\alpha)} = \frac{K_\sigma^\beta \varphi^\beta}{(\rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3}\mu^\beta)}. \tag{2.35}$$

В самом деле, учитывая уравнение (2.30), (2.34) совпадает с $\frac{d\varphi^\alpha}{dt} + \frac{d\varphi^\beta}{dt} = 0$. Аналогично, коэффициент релаксации для девиаторных напряжений сдвига имеет следующие формы,

$$\frac{\varphi^\alpha K_{\sigma T j}^\alpha}{\mu^\alpha} = \frac{\varphi^\beta K_{\sigma T j}^\beta}{\mu^\beta}. \quad (2.36)$$

Для асимптотического анализа удобно записать систему (2.25) в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{C}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{1}{\tau} \mathbf{H}(\mathbf{U}), \quad (2.37)$$

где $\tau \rightarrow 0^+$ — время релаксации, $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ — вектор, содержащий релаксационные члены, $\mathbf{U} = (\varphi^k \rho^k, \mathbf{u}^k, \sigma_{1i}^k, \sigma_{jj}^k, \varphi^\alpha)^\top$, $i = 1, 2, 3$, $j = 2, 3$. Предполагается, что асимптотическое решение (2.37) может быть выражено как

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(0)} + \tau \mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{O}(\tau^2). \quad (2.38)$$

Подставляя (2.38) в (2.37), получается

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(0)}) - \mathbf{M}(\mathbf{U}^{(0)}) \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{H}(\mathbf{U}^{(0)}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{L}(\mathbf{U}) &= \mathbf{C}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \mathbf{M}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для простоты обозначений в дальнейшем верхний индекс (0) опущен. Из второго уравнения в (2.39) следует, что

$$\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{u}^\beta = \mathbf{u}^{\alpha I} = \mathbf{u}^{\beta I}, \sigma_{1i}^\alpha = \sigma_{1i}^\beta = \sigma_{1i}^{\alpha I} = \sigma_{1i}^{\beta I}. \quad (2.40)$$

Это хорошо понятно с физической точки зрения, поскольку процесс релаксации скорости и напряжения происходит быстро, и когда смесь находится в равновесном состоянии, на границе должны выполняться условия непрерывности перемещения и равновесия напряжений, а значения скорости, нормального напряжения и касательного напряжения двух материалов должны быть равны на границе соответственно, в противном случае смесь не достигает равновесия, и существует тенденция к дальнейшему движению и изменению.

Матрица $\mathbf{M}(\mathbf{U})$ является матрицей размером 19×19 . Она находится простым дифференцированием релаксационных членов. Вместо того, чтобы приводить здесь точную форму $\mathbf{M}(\mathbf{U})$, мы выведем уравнения для скорости u^k и φ^α используются в качестве примера решения первого уравнения в (2.39). Уравнения для остальных равновесных переменных могут быть получены аналогичными способами. Учитывая $K_u^\alpha = K_u^\beta$ и уравнение (2.40), конкретная форма уравнения, связанного с u^k , имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho^\alpha} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} &= -\frac{K_u}{\varphi^\alpha \rho^\alpha} u^{\alpha(1)} + \frac{K_u}{\varphi^\alpha \rho^\alpha} u^{\beta(1)}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho^\beta} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} &= \frac{K_u}{\varphi^\beta \rho^\beta} u^{\alpha(1)} - \frac{K_u}{\varphi^\beta \rho^\beta} u^{\beta(1)}.\end{aligned}\quad (2.41)$$

Умножив первое уравнение в (2.41) на $\varphi^\alpha \rho^\alpha$, а второе на $\varphi^\beta \rho^\beta$, и сложив их вместе, получим

$$\frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u^2 - \sigma_{11})}{\partial x} = 0. \quad (2.42)$$

Аналогичным образом, уравнение, связанное с σ_{11}^α в уравнении (2.39), имеет следующий вид,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \left(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha \right) \frac{\partial u}{\partial x} &= K_\sigma^\alpha \left(-\sigma_{11}^{\alpha(1)} + \sigma_{11}^{\beta(1)} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \left(\rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3} \mu^\beta \right) \frac{\partial u}{\partial x} &= K_\sigma^\beta \left(\sigma_{11}^{\alpha(1)} - \sigma_{11}^{\beta(1)} \right).\end{aligned}\quad (2.43)$$

Используя уравнение (2.35), следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \left(\left(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha \right) \Lambda^\beta + \left(\rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3} \mu^\beta \right) \Lambda^\alpha \right) \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \Lambda^\alpha &= \frac{\varphi^\beta (\rho^\alpha c^{\alpha 2} + 4/3 \mu^\alpha)}{\varphi^\beta (\rho^\alpha c^{\alpha 2} + 4/3 \mu^\alpha) + \varphi^\alpha (\rho^\beta c^{\beta 2} + 4/3 \mu^\beta)} \\ \Lambda^\beta &= \frac{\varphi^\alpha (\rho^\beta c^{\beta 2} + 4/3 \mu^\beta)}{\varphi^\beta (\rho^\alpha c^{\alpha 2} + 4/3 \mu^\alpha) + \varphi^\alpha (\rho^\beta c^{\beta 2} + 4/3 \mu^\beta)}.\end{aligned}\quad (2.44)$$

Уравнение, связанное с объемной долей в уравнении (2.39), имеет следующий вид,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x} &= k_\varphi \left(-K_\sigma^\alpha \sigma_{11}^{\alpha(1)} + K_\sigma^\alpha \sigma_{11}^{\beta(1)} \right) \\ k_\varphi &= \frac{\varphi^\alpha}{(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha)}.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Комбинируя уравнения (2.43) и (2.44) и исключая член первого порядка в правой части уравнения (2.45), получается, что

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x} - (\varphi^\beta \Lambda^\beta - \varphi^\alpha \Lambda^\alpha) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.46)$$

Применив подобный подход для первого уравнения в уравнении (2.39), исключение члена первого порядка $\mathbf{U}^{(1)}$ дает

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \varphi^\alpha \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\alpha \rho^\alpha u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^\beta \rho^\beta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\beta \rho^\beta u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u^2 - \sigma_{11})}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) v}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) uv - \sigma_{12})}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) w}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) uw - \sigma_{13})}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \left(\left(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha \right) \Lambda^\beta + \left(\rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3} \mu^\beta \right) \Lambda^\alpha \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \left(\mu^\alpha \Lambda_T^\beta + \mu^\beta \Lambda_T^\alpha \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} - \left(\mu^\alpha \Lambda_T^\beta + \mu^\beta \Lambda_T^\alpha \right) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{22}^\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma_{22}^\alpha}{\partial x} + \Lambda^\alpha \kappa^\alpha \left(\left(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha \right) - \left(\rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3} \mu^\beta \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\
& \quad - \left(\rho^\alpha c^{\alpha 2} - \frac{2}{3} \mu^\alpha \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{22}^\beta}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma_{22}^\beta}{\partial x} - \Lambda^\beta \kappa^\beta \left(\left(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha \right) - \left(\rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3} \mu^\beta \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\
& \quad - \left(\rho^\beta c^{\beta 2} - \frac{2}{3} \mu^\beta \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{33}^\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma_{33}^\alpha}{\partial x} + \Lambda^\alpha \kappa^\alpha \left(\left(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha \right) - \left(\rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3} \mu^\beta \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\
& \quad - \left(\rho^\alpha c^{\alpha 2} - \frac{2}{3} \mu^\alpha \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{33}^\beta}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma_{33}^\beta}{\partial x} - \Lambda^\beta \kappa^\beta \left(\left(\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha \right) - \left(\rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3} \mu^\beta \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\
& \quad - \left(\rho^\beta c^{\beta 2} - \frac{2}{3} \mu^\beta \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x} - (\varphi^\beta \Lambda^\beta - \varphi^\alpha \Lambda^\alpha) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
& \Lambda_T^\alpha = \frac{\varphi^\beta \mu^\alpha}{\varphi^\beta \mu^\alpha + \varphi^\alpha \mu^\beta}, \quad \Lambda_T^\beta = \frac{\varphi^\alpha \mu^\beta}{\varphi^\beta \mu^\alpha + \varphi^\alpha \mu^\beta} \\
& \kappa^\alpha = \frac{\rho^\alpha c^{\alpha 2} - \frac{2}{3} \mu^\alpha}{\rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha}, \quad \kappa^\beta = \frac{\rho^\beta c^{\beta 2} - \frac{2}{3} \mu^\beta}{\rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3} \mu^\beta}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Определим давление $p^k = -1/3\sigma_{ii}^k$, так что девиаторные напряжения $S_{ij}^k = p^k\delta_{ij} + \sigma_{ij}^k$. Из уравнения напряжений в (2.47) следует, что материальные производные давления фаз равны

$$\frac{dp^\alpha}{dt} = -\frac{\Lambda^\beta}{\varphi^\alpha} \rho^\alpha c^{\alpha 2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.48a)$$

$$\frac{dp^\beta}{dt} = -\frac{\Lambda^\alpha}{\varphi^\beta} \rho^\beta c^{\beta 2} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.48b)$$

А

$$\frac{dS_{11}^\alpha}{dt} = \frac{4\mu^\alpha \Lambda^\beta}{3\varphi^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.49a)$$

$$\frac{dS_{11}^\beta}{dt} = \frac{4\mu^\beta \Lambda^\alpha}{3\varphi^\beta} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.49b)$$

Из уравнений (2.48), (1.29) и (2.27) следует, что

$$\frac{de^\alpha}{dt} = -\left(\frac{p^\alpha}{\rho^\alpha} + \frac{S_{ij}^\alpha S_{ij}^\alpha}{4\mu^\alpha \rho^\alpha}\right) \frac{\Lambda^\beta}{\varphi^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.50a)$$

$$\frac{de^\beta}{dt} = -\left(\frac{p^\beta}{\rho^\beta} + \frac{S_{ij}^\beta S_{ij}^\beta}{4\mu^\beta \rho^\beta}\right) \frac{\Lambda^\alpha}{\varphi^\beta} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.50b)$$

Определяем полную энергию,

$$\rho E = \varphi^\alpha \rho^\alpha e^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta e^\beta + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \varphi^\alpha \rho^\alpha \frac{S_{ij}^\alpha S_{ij}^\alpha}{4\mu^\alpha \rho^\alpha} + \varphi^\beta \rho^\beta \frac{S_{ij}^\beta S_{ij}^\beta}{4\mu^\beta \rho^\beta} \quad (2.51a)$$

$$\rho = \varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta. \quad (2.51b)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho \frac{dE}{dt} &= \frac{d(\rho E)}{dt} - E \frac{d\rho}{dt} = \\ &= -\left(p^\alpha \Lambda^\beta + \frac{S_{ij}^\alpha S_{ij}^\alpha}{4\mu^\alpha} \Lambda^\beta + p^\beta \Lambda^\alpha + \frac{S_{ij}^\beta S_{ij}^\beta}{4\mu^\beta} \Lambda^\alpha\right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ &+ u \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + w \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \varphi^\alpha \rho^\alpha \left(-\frac{S_{ij}^\alpha S_{ij}^\alpha}{4\mu^\alpha \rho^{\alpha 2}} \frac{d\rho^\alpha}{dt} + \frac{S_{ij}^\alpha}{2\mu^\alpha \rho^\alpha} \frac{dS_{ij}^\alpha}{dt}\right) \\ &+ \varphi^\beta \rho^\beta \left(-\frac{S_{ij}^\beta S_{ij}^\beta}{4\mu^\beta \rho^{\beta 2}} \frac{d\rho^\beta}{dt} + \frac{S_{ij}^\beta}{2\mu^\beta \rho^\beta} \frac{dS_{ij}^\beta}{dt}\right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Подставляя уравнение сдвигового напряжения в (2.47) и уравнение (2.49) в (2.52), и учитывая, что $\Lambda^\alpha + \Lambda^\beta = 1$, получаем, что

$$\rho dE = \frac{\partial(\sigma_{11}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{12}v)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{13}w)}{\partial x}. \quad (2.53)$$

Таким образом, уравнения (2.47) могут быть записаны в альтернативной (квазиконсервативной) форме как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^\alpha \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\alpha \rho^\alpha u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi^\beta \rho^\beta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\beta \rho^\beta u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u^2 - \sigma_{11})}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) v}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) uv - \sigma_{12})}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) w}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) uw - \sigma_{13})}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) E}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) Eu - \sigma_{11}u - \sigma_{12}v - \sigma_{13}w)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha S_{11}^\alpha + 4/3 \mu^\alpha \varphi^\alpha \rho^\alpha \ln \rho^\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha S_{11}^\alpha + 4/3 \mu^\alpha \varphi^\alpha \rho^\alpha \ln \rho^\alpha) u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\beta \rho^\beta S_{11}^\beta + 4/3 \mu^\beta \varphi^\beta \rho^\beta \ln \rho^\beta)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\beta \rho^\beta S_{11}^\beta + 4/3 \mu^\beta \varphi^\beta \rho^\beta \ln \rho^\beta) u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) S_{12}}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) S_{12}u}{\partial x} - \frac{(\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) \mu^\alpha \mu^\beta}{\varphi^\alpha \mu^\beta + \varphi^\beta \mu^\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) S_{13}}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) S_{13}u}{\partial x} - \frac{(\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) \mu^\alpha \mu^\beta}{\varphi^\alpha \mu^\beta + \varphi^\beta \mu^\alpha} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x} - (\varphi^\beta \Lambda^\beta - \varphi^\alpha \Lambda^\alpha) \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Проанализируем математические свойства полученной системы уравнений. Не ограничивая общности, анализ будем делать для 2D случая. Выражая уравнения в переменных $(\varphi^\alpha \rho^\alpha, \varphi^\beta \rho^\beta, u, v, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}^\alpha, \sigma_{22}^\beta, \varphi^\alpha)^\top$, и решая для собственных значений и собственных векторов матрицы Якоби, получаем,

$$\begin{aligned}
\lambda = u, I_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, I_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\lambda = u \pm a_1, I_6 &= \begin{pmatrix} -\varphi^\alpha \rho^\alpha \\ -\varphi^\beta \rho^\beta \\ a_1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\rho} \\ 0 \\ -(\rho c^2)_2^\alpha - a_2^\alpha \\ -(\rho c^2)_2^\beta + a_2^\beta \\ -\varphi^\alpha \varphi^\beta a_3 \end{pmatrix}, I_7 = \begin{pmatrix} \varphi^\alpha \rho^\alpha \\ \varphi^\beta \rho^\beta \\ a_1 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \\ 0 \\ (\rho c^2)_2^\alpha - a_2^\alpha \\ (\rho c^2)_2^\beta + a_2^\beta \\ \varphi^\alpha \varphi^\beta a_3 \end{pmatrix} \\
\lambda = u \pm a_4, I_8 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_4 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_4 \\ 0 \\ -\frac{1}{\rho} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
a_1 &= \sqrt{\frac{(\rho c^2)_1^\alpha (\rho c^2)_1^\beta}{\rho (\varphi^\beta (\rho c^2)_1^\alpha + \varphi^\alpha (\rho c^2)_1^\beta)}}, a_2^k = \Lambda^k \kappa^k \left((\rho c^2)_1^\alpha - (\rho c^2)_1^\beta \right), k = \alpha, \beta \\
a_3 &= \frac{(\rho c^2)_1^\beta - (\rho c^2)_1^\alpha}{\varphi^\beta (\rho c^2)_1^\alpha + \varphi^\alpha (\rho c^2)_1^\beta}, (\rho c^2)_1^k = \rho^k c^{k^2} + 4/3 \mu^k, (\rho c^2)_2^k = \rho^k c^{k^2} - 2/3 \mu^k \\
a_4 &= \sqrt{\frac{\mu^\alpha \mu^\beta}{\rho (\varphi^\beta \mu^\alpha + \varphi^\alpha \mu^\beta)}},
\end{aligned}$$

где плотность ρ определяется в (2.51b). Это показывает, что уравнения (2.47) и (2.54) являются гиперболическими.

2.3 Случай одноосной деформации

В приближении одноосной деформации (случай отсутствия сдвиговой деформации) одноматериальная модель (1.9) может быть упрощена до следующей формы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 - \sigma_{11})}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E - \sigma_{11}) u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho S_{11}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S_{11}}{\partial x} - \frac{4}{3} \rho \mu \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Модель одноосной деформации (2.55) может быть проанализирована аналитически. За подробностями, такими как структура ударной волны и волны разрежения, а также решение задачи Римана, мы обращаемся к статье [70]. Последнее уравнение в (2.55) может быть переформулировано в следующем виде:

$$\frac{\partial (S_{11} + 4/3 \mu \ln \rho)}{\partial t} + u \frac{\partial (S_{11} + 4/3 \mu \ln \rho)}{\partial x} = 0, \tag{2.56}$$

которое представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль траектории движения материала и подразумевает, что девиаторное напряжение является однозначной функцией плотности. Другими словами, в (2.55) есть только три независимых уравнения, которые идентичны гидродинамическим уравнениям, и поэтому их соответствующие выводы могут быть использованы для твердого тела.

В самом деле, если рассматривать $-\sigma_{11}$ в (2.55) как эффективное давление в гидродинамических уравнениях Эйлера и обозначить его через π , то (2.55) становится в математической форме идентичным системе уравнений Эйлера. Что касается уравнения состояния, то внутренняя энергия e является функцией плотности и давления и поэтому может быть преобразована как $e = e(p, \rho) = e(S_{11}(\rho) - \sigma_{11}, \rho) = e(\pi, \rho)$. Это означает, что и в математическом, и в физическом смысле мы можем рассматривать (2.55) как псевдогидродинамические уравнения с давлением π . Для моделирования двухфазного течения жидкостей, применяя обычный асимптотический анализ, когда время релаксации стремится к нулю, и пренебрегая эффектами массо- и теплообмена, неравновесная гидродинамическая модель Баера-Нунциато меняет свой вид на редуцированную равновесную модель [86, 87],

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi^k \rho^k}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi^k \rho^k \mathbf{u}) &= 0 \\
\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) &= 0 \\
\frac{\partial \varphi^k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi^k &= \varphi^k \frac{A - A^k}{A^k} \nabla \cdot \mathbf{u},
\end{aligned} \tag{2.57}$$

где $A^k = \rho^k a^{k2}$, $1/A = \sum (\varphi^k / A^k)$. Из предыдущих анализов известно, что уравнение (2.57) может быть использовано непосредственно для построения двухматериальной равновесной модели Уилкинса для случая одноосной деформации, однако термодинамическая скорость звука a в исходной модели должна быть изменена. Из уравнения сохранения энергии в уравнениях гидродинамики Эйлера, состава полной энергии $E = e + 0.5 \mathbf{u}^2$, и определения скорости звука (1.22с), получается

$$dp = -\rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \sim d\pi = -\rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2.58}$$

это связано с тем, что $\pi = -\sigma_{11}$ должно иметь то же отношение, что и p . Используя ту же форму полной энергии, что и в модели (2.57), из модели (2.55) следует, что

$$dp = \frac{\sigma_{11}/\rho}{e_p + e_\rho/c^2} \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.59a}$$

$$c^2 = a^2 - \frac{S_{11}}{\rho^2 e_p} \tag{2.59b}$$

$$d\sigma_{11} = \left(\rho c^2 + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.59c}$$

Сравнивая уравнения (2.58) и (2.59с), следует, что a^{k2} в модели (2.57) заменить на $c^2 + 4\mu/(3\rho)$. Тогда модель (2.57) переписана как двухматериальная равновесная модель Уилкинса в случае одноосной деформации,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \varphi^\alpha \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\alpha \rho^\alpha u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^\beta \rho^\beta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\beta \rho^\beta u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u^2 - \sigma_{11})}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) E}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) E - \sigma_{11}) u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x} - (\varphi^\beta \Lambda^\beta - \varphi^\alpha \Lambda^\alpha) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
& S_{11}^k(\rho) = \begin{cases} \frac{2Y^k}{3}, \rho^k < \rho_Y^{k-} \\ S_0^k - \frac{4}{3}\mu^k \ln\left(\frac{\rho^k}{\rho_0^k}\right), \rho_Y^{k-} \leq \rho^k \leq \rho_Y^{k+}, \\ -\frac{2Y^k}{3}, \rho^k > \rho_Y^{k+} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

где подстрочный индекс «0» обозначает начальное (невозмущенное) состояние, $(\rho_Y^k)^\pm = \rho_0^k \exp((\pm 2Y^k + 3S_0^k)/4\mu^k)$, здесь рассматривается критерий пластичности.

С другой стороны, используя методы в разделах 2.1 и 2.2, скорость звука в уравнении (2.27) заменяется на (2.59b) в связи с изменением формы полной энергии. Таким образом, неравновесная модель (2.21) из раздела 2.1 может быть использована непосредственно, поскольку для вывода не требуется конкретная форма полной энергии. Повторяя процесс, описанный в разделе 2.2, модель (2.54) при одноосной деформации имеет вид,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \varphi^\alpha \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\alpha \rho^\alpha u}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial \varphi^\beta \rho^\beta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\beta \rho^\beta u}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u^2 - \sigma_{11})}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) E}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) E - \sigma_{11}) u}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha S_{11}^\alpha + 4/3\mu^\alpha \varphi^\alpha \rho^\alpha \ln \rho^\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha S_{11}^\alpha + 4/3\mu^\alpha \varphi^\alpha \rho^\alpha \ln \rho^\alpha) u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\varphi^\beta \rho^\beta S_{11}^\beta + 4/3\mu^\beta \varphi^\beta \rho^\beta \ln \rho^\beta)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\beta \rho^\beta S_{11}^\beta + 4/3\mu^\beta \varphi^\beta \rho^\beta \ln \rho^\beta) u}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x} - (\varphi^\beta \Lambda^\beta - \varphi^\alpha \Lambda^\alpha) \frac{\partial u}{\partial x} = 0,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Определения знаков совпадают с определениями в уравнениях (2.47) и (2.54). Модели (2.60) и (2.61) эквивалентны в связи с тем, что консервативная часть

модели Уилкинса представляет собой уравнения Эйлера в гидродинамике. Для консервативной части используется тот же метод усреднения и асимптотический анализ, и поэтому результаты должны быть согласованными. Для неконсервативных материальных уравнений в конце раздела 2.1 показано, что для равновесной модели предположение (2.18) не вносит погрешности.

Глава 3

Численные методы для решения редуцированной модели

Основной целью данной главы является численное решение редуцированной равновесной модели, представленной в главе 2. В связи с тем, что классические соотношения Ранкина-Гюгонио не применимы к неконсервативным системам, то мы используем идею из статьи [48], в которой неконсервативный продукт определяется как ограниченная мера Бореля, зависящая от семейства путей. А вместе с условием энтропии возможно установить физически согласованные слабые решения неконсервативных уравнений. В следующих разделах предлагается специальный выбор пути, который сводит двухволновое HLL а также трехволновое HLLC приближенное решение задачи Римана к линейным уравнениям. Затем эта схема обобщается на случай биматериальной модели Уилкинса. В присутствии разрывов численные решения иногда могут оказаться с ошибкой сходимости [88]. Поэтому сравнение численных результатов с аналитическим решением задачи Римана из главы 1 становится необходимым.

3.1 Приближенный солвер типа Римана для одномерной модели Уилкинса

Для разработки численной схемы гиперболического закона сохранения используется метод Годунова на основе приближенных решателей Римана HLL и HLLC [89–91]. Мы следуем основной идее, изложенной в [62, 92], обобщая классические HLL и HLLC римановские решатели на неконсервативные упруго-пластические уравнения с помощью консервативных по пути схем. Рассматривая модель (1.9) и добавляя поправку производной Яуманна, получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p - S_{11})}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uv - S_{12})}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uw - S_{13})}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + (p - S_{11}) u - S_{12} v - S_{13} w)}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\rho S_{11})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{11})}{\partial x} - \frac{4}{3} \mu \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho S_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho S_{13} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\rho S_{22})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{22})}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho S_{12} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\rho S_{33})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{33})}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho S_{13} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\rho S_{12})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{12})}{\partial x} - \mu \rho \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho \left((S_{22} - S_{11}) \frac{\partial v}{\partial x} + S_{23} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\
& \frac{\partial (\rho S_{13})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{13})}{\partial x} - \mu \rho \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho \left((S_{33} - S_{11}) \frac{\partial w}{\partial x} + S_{23} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \\
& \frac{\partial (\rho S_{23})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{23})}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho \left(-S_{13} \frac{\partial v}{\partial x} - S_{12} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Аппроксимация решения задачи о распаде разрыва типа HLL характеризуется тем, что учитываются только самые крайние волны со скоростями s_L и s_R , ограничивающие возмущенную область слева и справа, соответственно. Скорости этих волн определяются максимальным и минимальным собственным значением матрицы Якоби линеаризованной системы уравнений. Для рассматриваемой системы уравнений эти значения равны $\lambda_{\min} = u - \sqrt{c^2 + 4\mu/3\rho}$, $\lambda_{\max} = u + \sqrt{c^2 + 4\mu/3\rho}$, где c^2 определяется по уравнению (1.27), когда полная энергия по уравнению (1.3). Скорости ограничивающих возмущенную область характеристик рассчитываются по предложенной Энфилдом методике [93] следующим образом:

$$s_L = \min \left(0, \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_L), \lambda_{\min} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R) \right) \right) \tag{3.2a}$$

$$s_R = \max \left(0, \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_R), \lambda_{\max} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R) \right) \right), \tag{3.2b}$$

где \mathbf{Q} определяется по уравнению (2.9). Структура приближенного решения задачи о распаде разрыва имеет вид постоянного распределения параметров между левой и правой границами возмущенной зоны. Обозначим данное со-

стояние как \mathbf{Q}_* . Состояние слева от начального разрыва обозначается как \mathbf{Q}_L состояние справа как \mathbf{Q}_R . Состояния \mathbf{Q}_L и \mathbf{Q}_* , а так же \mathbf{Q}_* и \mathbf{Q}_R связаны обобщенными соотношениями Ранкина-Гюгонио на соответствующих разрывах. С этой целью, запишем модель (3.1) в виде (2.9) в автомодельной переменной $\lambda = x/t$,

$$\mathbf{Q} - \frac{\partial(\lambda \mathbf{Q})}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.3)$$

Интегрируя (3.3) по $\lambda \in [s_L, s_R]$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_*(s_R - s_L) - (\mathbf{Q}_R s_R - \mathbf{Q}_L s_L) + (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L) \\ + \int_{\mathbf{Q}_L}^{\mathbf{Q}_*} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} + \int_{\mathbf{Q}_*}^{\mathbf{Q}_R} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = 0 \\ \int_{\mathbf{Q}_L}^{\mathbf{Q}_*} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = \int_0^1 \mathbf{B}(\psi(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_*, s)) \frac{\partial \psi}{\partial s} ds \\ \int_{\mathbf{Q}_*}^{\mathbf{Q}_R} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = \int_0^1 \mathbf{B}(\psi(\mathbf{Q}_*, \mathbf{Q}_R, s)) \frac{\partial \psi}{\partial s} ds, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\psi(s)$ — непрерывная параметризуемая кривая в фазовом пространстве (путь), $0 \leq s \leq 1$ — параметр вдоль кривой. Следовательно, результат интегрирования неконсервативной части зависит от выбора пути. В большинстве схем в качестве пути выбирается прямолинейный отрезок, соединяющий состояние слева и справа от разрыва:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_*, s) &= \mathbf{Q}_L + (\mathbf{Q}_* - \mathbf{Q}_L) s \\ \psi(\mathbf{Q}_*, \mathbf{Q}_R, s) &= \mathbf{Q}_* + (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_*) s. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая результаты, полученные в разделе 1.3, в данной работе выбран альтернативный путь, позволяющий упростить вычисление интегралов и избежать итерационного процесса определения параметров возмущенного состояния. Во-первых, консервативная часть системы (3.1) вычисляется с применением уравнения (3.4), и поскольку неконсервативный член равен нулю, результат согласуется с классическими соотношениями Ранкина-Гюгонио, который дает следующие значения параметров в возмущенной зоне:

$$\rho^* = \frac{\rho_R(s_R - u_R) - \rho_L(s_L - u_L)}{s_R - s_L} \quad (3.6a)$$

$$u_i^* = \frac{\rho_R u_{iR}(s_R - u_R) + \sigma_{1iR} - \rho_L u_{iL}(s_L - u_L) - \sigma_{1iL}}{\rho^*(s_R - s_L)}, i = 1, 2, 3 \quad (3.6b)$$

$$E^* = \frac{\rho_R E_R(s_R - u_R) + \sigma_{1mR} u_{mR} - \rho_L E_L(s_L - u_L) - \sigma_{1nL} u_{nL}}{\rho^*(s_R - s_L)}, \quad (3.6c)$$

где $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, суммирование m и n в уравнении (3.6с). Используя уравнение сохранения массы, шестое уравнение в (3.1) переписывается как

$$\frac{\partial (\rho S_{11} + 4/3 \mu \rho \ln \rho)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{11} + 4/3 \mu \rho u \ln \rho)}{\partial x} + \rho S_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho S_{13} \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (3.7)$$

При решении задачи Римана в разделе 1.3 наиболее быстро распространяющиеся продольные волны не меняют тангенциальных параметров, т.е. v , w и S_{12} , S_{13} , а сдвиговые волны не меняют продольных параметров, т.е. ρ , u , p и S_{11} , S_{22} , S_{33} . Таким образом, мы можем выбрать аналогичные пути в уравнении (3.4), то есть существует два этапа, на первом из которых изменяются продольные параметры, а на втором — тангенциальные. Используя (3.4) и (3.6a) для уравнения (3.7),

$$\begin{aligned} \rho^* (s_R - s_L) S_{11}^* &= \rho^* (s_R - u_*) S'_{11R} - \rho^* (s_L - u_*) S'_{11L} - B \\ S'_{11L} &= S_{11L} + \frac{4}{3} \mu \ln \left(\frac{\rho_L}{\rho^*} \right), S'_{11R} = S_{11R} + \frac{4}{3} \mu \ln \left(\frac{\rho_R}{\rho^*} \right) \\ B &= \int_0^1 \left(\rho S_{12} \frac{\partial v}{\partial s} + \rho S_{13} \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds (\mathbf{Q}_L \rightarrow \mathbf{Q}_*) \\ &+ \int_0^1 \left(\rho S_{12} \frac{\partial v}{\partial s} + \rho S_{13} \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds (\mathbf{Q}_* \rightarrow \mathbf{Q}_R). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Неконсервативная часть вычисляется следующим образом

$$\begin{aligned} &(\mathbf{Q}_L \rightarrow \mathbf{Q}_*) \\ &1. \rho_L \rightarrow \rho^* \\ &2. v_L, w_L, S_{12L}, S_{13L} \rightarrow v^*, w^*, S_{12}^*, S_{13}^* \\ &\mathbf{q} = \mathbf{q}_L + (\mathbf{q}_* - \mathbf{q}_L) s, \mathbf{q} = v, w, S_{12}, S_{13} \\ &\int_0^1 \left(\rho S_{12} \frac{\partial v}{\partial s} + \rho S_{13} \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds = \\ &\frac{\rho^*}{2} (S_{12L} + S_{12}^*) (v^* - v_L) + \frac{\rho^*}{2} (S_{13L} + S_{13}^*) (w^* - w_L). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\rho S_{12} \frac{\partial v}{\partial s} + \rho S_{13} \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds (\mathbf{Q}_* \rightarrow \mathbf{Q}_R) = \\ &-\frac{\rho^*}{2} (S_{12R} + S_{12}^*) (v^* - v_R) - \frac{\rho^*}{2} (S_{13R} + S_{13}^*) (w^* - w_R). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Аналогично, используя уравнение (3.4) для остальных уравнений в модели (3.1) и следуя тому же пути, что и в уравнении (3.9), в результате простых

алгебраических вычислений получается,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{MS} &= \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \\
 \mathbf{M} &= \begin{vmatrix} s_R - s_L & 0 & 0 & \frac{v_R - v_L}{2} & \frac{w_R - w_L}{2} & 0 \\ 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{v_L - v_R}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{w_L - w_R}{2} & 0 \\ \frac{v_L - v_R}{4} & \frac{v_R - v_L}{4} & 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{w_R - w_L}{4} \\ \frac{w_L - w_R}{4} & 0 & \frac{w_R - w_L}{4} & 0 & s_R - s_L & \frac{v_R - v_L}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{w_L - w_R}{4} & \frac{v_L - v_R}{4} & s_R - s_L \end{vmatrix} \\
 \mathbf{A}_1 &= \begin{vmatrix} S'_{11R}(s_R - u^*) - S'_{11L}(s_L - u^*) \\ S'_{22R}(s_R - u^*) - S'_{22L}(s_L - u^*) \\ S'_{33R}(s_R - u^*) - S'_{33L}(s_L - u^*) \\ S_{12R}(s_R - u^*) - S_{12L}(s_L - u^*) + \mu(v_R - v_L) \\ S_{13R}(s_R - u^*) - S_{13L}(s_L - u^*) + \mu(w_R - w_L) \\ S_{23R}(s_R - u^*) - S_{23L}(s_L - u^*) \end{vmatrix} \\
 \mathbf{A}_2 &= \begin{vmatrix} \frac{v^* - v_L}{2} S_{12L} + \frac{w^* - w_L}{2} S_{13L} + \frac{v_R - v^*}{2} S_{12R} + \frac{w_R - w^*}{2} S_{13R} \\ -\frac{v^* - v_L}{2} S_{12L} - \frac{v_R - v^*}{2} S_{12R} \\ -\frac{w^* - w_L}{2} S_{13L} - \frac{w_R - w^*}{2} S_{13R} \\ \frac{v^* - v_L}{4} (S'_{22L} - S'_{11L}) + \frac{w^* - w_L}{4} S_{23L} + \frac{v_R - v^*}{4} (S'_{22R} - S'_{11R}) + \frac{w_R - w^*}{4} S_{23R} \\ \frac{w_R - w^*}{4} (S'_{33R} - S'_{11R}) + \frac{v_R - v^*}{4} S_{23R} + \frac{w^* - w_L}{4} (S'_{33L} - S'_{11L}) + \frac{v^* - v_L}{4} S_{23L} \\ -\frac{v^* - v_L}{4} S_{13L} - \frac{w^* - w_L}{4} S_{12L} - \frac{v_R - v^*}{4} S_{13R} - \frac{w_R - w^*}{4} S_{12R} \end{vmatrix} \\
 S'_{22L} &= S_{22L} - \frac{2}{3} \mu \ln \left(\frac{\rho_L}{\rho^*} \right), S'_{22R} = S_{22R} - \frac{2}{3} \mu \ln \left(\frac{\rho_R}{\rho^*} \right) \\
 S'_{33L} &= S_{33L} - \frac{2}{3} \mu \ln \left(\frac{\rho_L}{\rho^*} \right), S'_{33R} = S_{33R} - \frac{2}{3} \mu \ln \left(\frac{\rho_R}{\rho^*} \right),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $\mathbf{S} = (S_{11}^*, S_{22}^*, S_{33}^*, S_{12}^*, S_{13}^*, S_{23}^*)^T$. Таким образом, для алгоритма HLL переменные в возмущенной области вычисляются по уравнениям (3.6) и (3.11).

Аппроксимация решения типа HLLC добавляет контактную волну к HLL в возмущенной области, а возмущенные области слева и справа от контактной волны обозначаются как \mathbf{Q}_L^* и \mathbf{Q}_R^* , соответственно. В разделе 1.3 скорости на левой и правой сторонах контактной волны не меняются, что соответствует условию отсутствия скольжения на границе. Таким образом, в HLLC предполагается следующее соотношение,

$$u_{iL}^* = u_{iR}^* = u_i^*. \tag{3.12}$$

Аналогично, используя соотношения Ранкина-Гюгонио для консервативной части, получается, что

$$\rho_k^* = \rho_k \frac{s_k - u_k}{s_k - u^*} \quad (3.13a)$$

$$u_i^* = \frac{\rho_R u_{iR} (s_R - u_R) + \sigma_{1iR} - \rho_L u_{iL} (s_L - u_L) - \sigma_{1iL}}{\rho_R (s_R - u_R) - \rho_L (s_L - u_L)} \quad (3.13b)$$

$$E_k^* = E_k + \frac{\sigma_{1mk} u_{mk} - \sigma_{1nk}^* u_n^*}{\rho_k (s_k - u_k)} \quad (3.13c)$$

$$\sigma_{1iL}^* = \sigma_{1iR}^* = \sigma_{1ik} + \rho_k (u_{ik} - u_i^*) (s_k - u_k), i, n, m = 1, 2, 3, k = L, R, \quad (3.13d)$$

где суммирование m и n в уравнении (3.13с). Для неконсервативной части, используя тот же путь, что и в уравнениях (3.9) и (3.10), и опустив утомительный промежуточный процесс алгебраических вычислений, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{MS} &= \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{M} &= \begin{vmatrix} s_k - u^* & 0 & 0 & \frac{v_k - v^*}{2} & \frac{w_k - w^*}{2} & 0 \\ 0 & s_k - u^* & 0 & \frac{v^* - v_k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_k - u^* & 0 & \frac{w^* - w_k}{2} & 0 \\ \frac{v^* - v_k}{4} & \frac{v_k - v^*}{4} & 0 & s_k - u^* & 0 & \frac{w_k - w^*}{4} \\ \frac{w^* - w_k}{4} & 0 & \frac{w_k - w^*}{4} & 0 & s_k - u^* & \frac{v_k - v^*}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{w^* - w_k}{4} & \frac{v^* - v_k}{4} & s_k - u^* \end{vmatrix} \\ \mathbf{R}_1 &= \begin{vmatrix} S'_{11k} (s_k - u^*) \\ S'_{22k} (s_k - u^*) \\ S'_{33k} (s_k - u^*) \\ S_{12k} (s_k - u^*) \\ S_{13k} (s_k - u^*) \\ S_{23k} (s_k - u^*) \end{vmatrix} \\ \mathbf{R}_2 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} (S_{12k} (v^* - v_k) + S_{13k} (w^* - w_k)) \\ -\frac{1}{2} S_{12k} (v^* - v_k) \\ -\frac{1}{2} S_{13k} (w^* - w_k) \\ -\mu (v^* - v_k) + \frac{1}{4} ((S'_{22k} - S'_{11k}) (v^* - v_k) + S_{23k} (w^* - w_k)) \\ -\mu (w^* - w_k) + \frac{1}{4} ((S'_{33k} - S'_{11k}) (w^* - w_k) + S_{23k} (v^* - v_k)) \\ -\frac{1}{4} (S_{13k} (v^* - v_k) + S_{12k} (w^* - w_k)) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\mathbf{S} = (S_{11k}^*, S_{22k}^*, S_{33k}^*, S_{12k}^*, S_{13k}^*, S_{23k}^*)^T, k = L, R$. Такие определения, как S'_{11k} , согласуются с уравнением (3.8) и (3.11). Заметим, что учитывая форму уравнения (3.8), выбор пути в уравнениях (3.11) и (3.14) несколько отличается от ранее описанных для параметров S_{11}, S_{22}, S_{33} , т.е. на первом этапе линейно изменяются от $S_{11k}, S_{22k}, S_{33k}$ до $S'_{11k}, S'_{22k}, S'_{33k}$, а затем линейно от $S'_{11k}, S'_{22k}, S'_{33k}$ до $S_{11k}^*, S_{22k}^*, S_{33k}^*$ на втором этапе. Если выбирается исходный путь, то есть на первом этапе линейно изменяются от $S_{11k}, S_{22k}, S_{33k}$ до $S_{11k}^*, S_{22k}^*, S_{33k}^*$, просто замены S'_{iik} в \mathbf{A}_2 (3.11) и \mathbf{R}_2 (3.14) на S_{iik} .

Расчет потоков в HLLC производится следующим образом,

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^- \right) \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-1/2}^+ &= H(C_{1,i-1/2}) C_{1,i-1/2} \mathbf{Q}_{i-1/2,L}^* \\ &+ (s_{R,i-1/2} + (H(-C_{1,i-1/2}) - 1) C_{1,i-1/2}) \mathbf{Q}_{i-1/2,R}^* - s_{R,i-1/2} \mathbf{Q}_i^n \\ \mathbf{F}_{i+1/2}^- &= H(-C_{1,i+1/2}) C_{1,i+1/2} \mathbf{Q}_{i+1/2,R}^* \\ &+ (s_{L,i+1/2} + (H(C_{1,i+1/2}) - 1) C_{1,i+1/2}) \mathbf{Q}_{i+1/2,L}^* - s_{L,i+1/2} \mathbf{Q}_i^n, \end{aligned} \quad (3.15b)$$

где Δx — длина сетки, Δt — шаг времени, $H(x)$ — функция Хевисайда, $C_{1,i-1/2} = u^*$ при решении задачи Римана между сетками $i-1$ и i . Для случая HLL пусть $C_1 = 0$.

3.2 Солвер HLLC для биматериальной равновесной модели Уилкинса

Этот раздел представляет собой приближенный римановский солвер типа HLLC для модели (2.54), и основная идея та же, что и в разделе 3.1. Скорости волн рассчитываются следующим образом,

$$\begin{aligned} s_L &= \min \left(0, \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_L^\alpha), \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_L^\beta) \right) \\ s_R &= \max \left(0, \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_R^\alpha), \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_R^\beta) \right) \\ \lambda_{\min} &= u - \sqrt{c^2 + 4\mu/3\rho}, \lambda_{\max} = u + \sqrt{c^2 + 4\mu/3\rho}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Предполагая, что уравнение (3.12) выполняется, используя соотношения Ранкина-Гюгонио для консервативной части (2.54), получаем,

$$(\varphi^m \rho^m)_k^* = (\varphi^m \rho^m)_k \frac{(u_k - s_k)}{u^* - s_k}, m = \alpha, \beta, k = L, R. \quad (3.17a)$$

$$u_i^* = \frac{\rho_R u_{iR} (s_R - u_R) + \sigma_{1iR} - \rho_L u_{iL} (s_L - u_L) - \sigma_{1iL}}{\rho_R (s_R - u_R) - \rho_L (s_L - u_L)} \quad (3.17b)$$

$$E_k^* = E_k + \frac{\sigma_{1sk} u_{sk} - \sigma_{1nk}^* u_n^*}{\rho_k (s_k - u_k)}, i, s, n = 1, 2, 3. \quad (3.17c)$$

$$\sigma_{1iL}^* = \sigma_{1iR}^* = \sigma_{1ik} + \rho_k (u_{ik} - u_i^*) (s_k - u_k) \quad (3.17d)$$

$$\rho_k = (\varphi^\alpha \rho^\alpha)_k + (\varphi^\beta \rho^\beta)_k, \rho_k^* = (\varphi^\alpha \rho^\alpha)_k^* + (\varphi^\beta \rho^\beta)_k^*, \quad (3.17e)$$

где суммирование s и n в уравнении (3.17с). Перепишав уравнение объемной доли в модели (2.54), получим следующее,

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\alpha u)}{\partial x} - \Lambda^\beta \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.18)$$

Для неконсервативной части можно по-прежнему использовать метод интегрирования по определенному пути в фазовом пространстве, как в разделе 3.1. Учитывая уравнение (1.28), следует предположить, что $\rho^\alpha c^{\alpha 2} + 4/3\mu^\alpha$ и $\rho^\beta c^{\beta 2} + 4/3\mu^\beta$ в Λ^β являются константами при интегрировании по пути, и что объемная доля по-прежнему линейно изменяется. Здесь, однако, мы используем другой широко используемый метод при решении неконсервативных членов в уравнении объемной доли, то есть рассматриваем их как источниковые члены. Классическая схема HLLC с источниковыми членами имеет вид,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^{n+1} &= \mathbf{Q}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}) + \mathbf{s}_i \right) \\ \mathbf{F} &= \frac{1 + \text{sgn}(u^*)}{2} [\mathbf{F}_L + s_L(\mathbf{Q}_L^* - \mathbf{Q}_L)] + \frac{1 - \text{sgn}(u^*)}{2} [\mathbf{F}_R + s_R(\mathbf{Q}_R^* - \mathbf{Q}_R)] \\ \mathbf{Q}_k &= \varphi_k^\alpha, \mathbf{F}_k = \varphi_k^\alpha u_k, \mathbf{Q}_k^* = \frac{s_k - u_k}{s_k - u^*} \varphi_k^\alpha, k = L, R \\ \mathbf{s}_i &= \Lambda^\beta (C_{i+1/2} - C_{i-1/2}) \\ C &= \frac{1 + \text{sgn}(u^*)}{2} \left[u_L + s_L \left(\frac{s_L - u_L}{s_L - u^*} - 1 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1 - \text{sgn}(u^*)}{2} \left[u_R + s_R \left(\frac{s_R - u_R}{s_R - u^*} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\text{sgn}(x)$ — функция знака. Для девиаторной части в модели (2.54) с целью упрощения расчетов предполагается, что объемная доля изменяется только на контактной волне, т.е.

$$\varphi_k^\alpha = \varphi_k^{\alpha*}. \quad (3.20)$$

Следовательно, используя тот же метод, что и в разделе 3.1, получаем,

$$\begin{aligned} S_{11k}^{m*} &= S_{11k}^m + \frac{4}{3} \mu^m \ln \left(\frac{u^* - s_k}{u_k - s_k} \right) \\ S_{12k}^* &= S_{12k} + \frac{(v^* - v_k) \mu^\beta \mu^\alpha}{(u^* - s_k) (\varphi_k^\alpha \mu^\beta + \varphi_k^\beta \mu^\alpha)} \\ S_{13k}^* &= S_{13k} + \frac{(w^* - w_k) \mu^\beta \mu^\alpha}{(u^* - s_k) (\varphi_k^\alpha \mu^\beta + \varphi_k^\beta \mu^\alpha)}, m = \alpha, \beta, k = L, R. \end{aligned} \quad (3.21)$$

При рассмотрении производных Яуманна, заменяя материальные производные в соответствующих уравнениях в модели (2.54) на производные Яуманна, получаем,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha S_{11}^\alpha + 4/3 \mu^\alpha \varphi^\alpha \rho^\alpha \ln \rho^\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha S_{11}^\alpha + 4/3 \mu^\alpha \varphi^\alpha \rho^\alpha \ln \rho^\alpha) u}{\partial x} \\
& + \varphi^\alpha \rho^\alpha S_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi^\alpha \rho^\alpha S_{13} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\varphi^\beta \rho^\beta S_{11}^\beta + 4/3 \mu^\beta \varphi^\beta \rho^\beta \ln \rho^\beta)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\beta \rho^\beta S_{12}^\beta + 4/3 \mu^\beta \varphi^\beta \rho^\beta \ln \rho^\beta) u}{\partial x} \\
& + \varphi^\beta \rho^\beta S_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi^\beta \rho^\beta S_{13} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\rho S_{12})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho S_{12} u)}{\partial x} - \frac{\rho \mu^\alpha \mu^\beta}{\varphi^\alpha \mu^\beta + \varphi^\beta \mu^\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho \left((S_{22} - S_{11}) \frac{\partial v}{\partial x} + S_{23} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\
& \frac{\partial (\rho S_{13})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho S_{13} u)}{\partial x} - \frac{\rho \mu^\alpha \mu^\beta}{\varphi^\alpha \mu^\beta + \varphi^\beta \mu^\alpha} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho \left((S_{33} - S_{11}) \frac{\partial w}{\partial x} + S_{23} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \\
& \frac{\partial (\rho S_{23})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{23})}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho \left(-S_{13} \frac{\partial v}{\partial x} - S_{12} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0. \\
& \rho = \varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta \\
& (S_{22} - S_{11}) = 1/2 \left((S_{22} - S_{11})^\alpha + (S_{22} - S_{11})^\beta \right) \\
& (S_{33} - S_{11}) = 1/2 \left((S_{33} - S_{11})^\alpha + (S_{33} - S_{11})^\beta \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Используя уравнение (3.4), интегрируя по тому же пути, что и в (3.9), получаем

$$\begin{aligned}
& \left(S_{11k}^{m*} - S_{11k}^{m'} \right) (s_k - u^*) - \frac{1}{2} (S_{12k}^{m*} + S_{12k}^m) (v^* - v_k) \\
& - \frac{1}{2} (S_{13k}^{m*} + S_{13k}^m) (w^* - w_k) = 0 \\
& \left(S_{22k}^{m*} - S_{22k}^{m'} \right) (s_k - u^*) + \frac{1}{2} (S_{12k}^{m*} + S_{12k}^m) (v^* - v_k) = 0 \\
& \left(S_{33k}^{m*} - S_{33k}^{m'} \right) (s_k - u^*) + \frac{1}{2} (S_{13k}^{m*} + S_{13k}^m) (w^* - w_k) = 0, m = \alpha, \beta, k = L, R \\
& S_{11k}^{m'} = S_{11k}^m + \frac{4}{3} \mu^m \ln \left(\frac{u^* - s_k}{u_k - s_k} \right) \\
& S_{22k}^{m'} = S_{22k}^m - \frac{2}{3} \mu^m \ln \left(\frac{u^* - s_k}{u_k - s_k} \right) \\
& S_{33k}^{m'} = S_{33k}^m - \frac{2}{3} \mu^m \ln \left(\frac{u^* - s_k}{u_k - s_k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (S_{12k}^* - S_{12k})(s_k - u^*) + \frac{\mu^\beta \mu^\alpha}{(\varphi_k^\alpha \mu^\beta + \varphi_k^\beta \mu^\alpha)} (v^* - v_k) \\
& - \frac{1}{4} \left((S_{22} - S_{11})'_k + (S_{22} - S_{11})^*_k \right) (v^* - v_k) - \frac{1}{4} (S_{23k}^* + S_{23k})(w^* - w_k) = 0 \\
& (S_{13k}^* - S_{13k})(s_k - u^*) + \frac{\mu^\beta \mu^\alpha}{(\varphi_k^\alpha \mu^\beta + \varphi_k^\beta \mu^\alpha)} (w^* - w_k) \\
& - \frac{1}{4} \left((S_{33} - S_{11})'_k + (S_{33} - S_{11})^*_k \right) (w^* - w_k) - \frac{1}{4} (S_{23k}^* + S_{23k})(v^* - v_k) = 0 \\
& (S_{23k}^* - S_{23k})(s_k - u^*) + \frac{1}{4} (S_{13k}^* + S_{13k})(v^* - v_k) \\
& + \frac{1}{4} (S_{12k}^* + S_{12k})(w^* - w_k) = 0 \\
& (S_{22} - S_{11})'_k = \frac{1}{2} \left((S_{22k}^{\alpha'} - S_{11k}^{\alpha'}) + (S_{22k}^{\beta'} - S_{11k}^{\beta'}) \right) \\
& (S_{22} - S_{11})^*_k = \frac{1}{2} \left((S_{22k}^{\alpha*} - S_{11k}^{\alpha*}) + (S_{22k}^{\beta*} - S_{11k}^{\beta*}) \right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Перепишем (3.23) в форме, аналогичной матричному уравнению (3.14), где $\mathbf{S} = \left(S_{11k}^{\alpha*}, S_{11k}^{\beta*}, S_{22k}^{\alpha*}, S_{22k}^{\beta*}, S_{33k}^{\alpha*}, S_{33k}^{\beta*}, S_{12k}^*, S_{13k}^*, S_{23k}^* \right)^T$, $k = L, R$, что может быть решено с применением методов линейной алгебры. Поток консервативной части может быть рассчитан в виде уравнения (3.19). Для удобства программирования уравнение (3.15), которое используется для расчета неконсервативных потоков, также может быть одновременно применено и для консервативных.

3.3 Сравнение численных и теоретических результатов для одноосных деформаций

В разделе 1.3 теоретически анализируется структура сильных и слабых волн в упругой фазе. При включении критерия пластичности, структура волны проявляет новые свойства; соответствующие анализы в случае одномерных деформаций представлены в [70]. Несмотря на то, что в данных статьях полная энергия имеет вид $E = e + 0.5\mathbf{u}^2$, упругий член $S_{ij}S_{ij}/(4\mu\rho)$ в полной энергии в области одноосной деформации дает настолько малый эффект, что в численных расчетах оба результата почти равны. Как и в теоретическом анализе, оба результата обладают совершенно одинаковыми свойствами. Таким образом, во всем этом разделе используются результаты с полной энергией $E = e + 0.5\mathbf{u}^2$.

3.3.1 Случай одинаковых материалов

Далее для полноты изложения результаты кратко суммированы. Подробности этого анализа приведены в [70].

В предположении одноосной деформации в модели (1.1), $v, w, S_{12}, S_{13}, S_{23}$ равны 0 и соответствующие уравнения исчезают, а уравнение для девиаторного напряжения S_{11} превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, интегрирование которого приводит к однозначной аналитической зависимости этой компоненты от плотности.

Для случая ударных волн с большой амплитудой примером одноосной деформации служит бесконечная плоская пластина (считаемая бесконечной в направлениях y и z), подвергнутая внезапному удару вдоль ее нормали (направление x) (например, столкновение с недеформируемой преградой с определенной начальной скоростью или сильный взрыв, создающий давление на поверхности). Используя соотношения Ранкина-Гюгонио на разрыве, получают два известных соотношения - адиабату Гюгонио и линию Михельсона-Релея,

$$e - e_0 = \frac{1}{2} (\nu - \nu_0) (\sigma + \sigma_0) \quad (3.24a)$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{110} = \dot{m}^2 (\nu - \nu_0) \quad (3.24b)$$

$$\dot{m} = \rho (u - D) = \rho_0 (u_0 - D), \quad (3.24c)$$

где $\nu = 1/\rho$, аналогично уравнению (1.42).

Таким образом, состояния после прохождения ударных волн описываются точкой пересечения этих двух кривых. Анализ взаимного пересечения кривых показывает, что в зависимости от скорости удара, возможны три типа ударно-волновой структуры в упругопластическом материале: одноволновой упругий режим, двухволновой режим с упругим предвестником и одноволновой пластический режим.

Рассмотрим отдельно двухволновой режим течения. Пусть критическое значение перехода от одноволнового упругого режима к двухволновому режиму определяется величиной массовой скорости \dot{m}_Y . При возникновении двухволнового режима, первая ударная волна, называемая упругим предвестником, распространяется с интенсивностью $\dot{m} = \dot{m}_Y$. За этой волной параметры изменяются от начального значения до значения, определяемого пределом текучести. Скорости по обе стороны волны должны удовлетворять следующим условиям:

$$\dot{m}_Y = \rho_Y (u - D_1) = \rho_0 (u_0 - D_1) \quad (3.25)$$

где подстрочный индекс Y характеризует величину поверхности текучести. Вторая волна распространяется по состоянию, определяемому пределом текучести. Массовая скорость в этой волне меньше предельного значения \dot{m}_Y . С ро-

стом интенсивности массовая скорость второй волны и ее скорость возрастают. При достижении значения \dot{m}_Y скорости обеих волн становятся одинаковыми и начинается переход к одноволновому пластическому режиму.

Кратко опишем свойства ударной волны в упругопластическом материале:

- По мере увеличения скорости удара, структура проходит три фазы, а именно, одноволновый упругий режим, двухволновый режим с упругим предвестником и одноволновый пластический режим.
- В двухволновом режиме, при переходе через первую волну параметры состояния изменяются от начальных значений до значений, соответствующих точке текучести. Величина изменения скорости за фронтом волны определяется параметрами текучести материала.
- В двухволновом режиме, по мере увеличения интенсивности (скорости удара, если ударно-волновой процесс возникает в результате удара о недеформируемую преграду) вторая волна распространяется со все большей скоростью относительно неподвижной лабораторной системы координат, пока ее скорость не сравняется со скоростью первой волны, и процесс перейдет из двухволнового режима в одноволновой.

Слабые волны возникают при растяжении упругопластического материала. В отличие от процесса генерации ударной волны, пусть имеется бесконечная плоская пластина, жестко прикрепленная к неподвижной недеформируемой преграде, скорость плоской пластины нормальна к ее собственной плоскости и направлена в сторону от преграды. В результате внутри пластины распространяется центрированная волна разрежения, которая может иметь разную структуру в зависимости от величины начальной скорости.

В вышеприведенной постановке все физические величины зависят только от одной автомодельной переменной, и задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными данными:

$$\frac{d\sigma}{d\nu} = f_1(\sigma, \nu) \quad (3.26a)$$

$$\frac{du}{d\nu} = f_2(\sigma, \nu) \quad (3.26b)$$

$$\sigma_{11}|_{\nu=\nu_0} = \sigma_{110}, \quad u_{\nu=\nu_0} = u_0, \quad (3.26c)$$

которая аналогично уравнению (1.37) и может быть проинтегрирована численно, например, с помощью метода Рунге Кутты. Особенностью этой системы является слабый разрыв на решении $\sigma = \sigma(\nu)$ в точке, соответствующей параметрам текучести. Таким образом, при растяжении возможно формирование как одной центрированной волны растяжения, так и двух центрированных волн растяжения в зависимости от интенсивности (скорости) растяжения. Основные свойства возникающих при растяжении центрированных волн разгрузки следующие.

- Структура слабых волн при увеличении скорости растяжения упруго-пластического материала меняется от одноволновой к двухволновой. Одноволновая структура (одна центрированная волна) возникает при небольших скоростях растяжения, когда изменения параметров в волне происходят в упругой области.
- В двухволновом режиме (две центрированные волны), при переходе через первую волну параметры состояния изменяются от начальных значений до состояния, определяемого параметрами текучести. Дальнейшее изменение параметров происходит уже в пластической области во второй волне. Даже при больших скоростях растяжения не возникает ситуации, подобной ударной волне, когда двухволновый режим меняется на одноволновый.

Ниже приводятся результаты численных экспериментов в упругопластическом материале в приближении одномерной одноосной деформации. Представленные результаты соответствуют следующей постановке задачи.

- В качестве материала выбирается алюминий с УРС Ми-Грюнайзена (1.2). Соответствующие параметры УРС указаны в таблице 3.1. Используется критерий Мизеса: если $Q = S_{ij}S_{ij} \geq \frac{2}{3}Y^2$, то $S_{ij} \rightarrow S_{ij}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{Y}{Q}}$.
- Граничные условия: левая граница материала $x = 0$ соответствует граничному условию жесткой недеформируемой стенки $u = 0$, правая $x = 0.1\text{m}$ — свободной лагранжевой границе с нулевым напряжением и давлением.
- Начальные параметры — плотность ρ_0 , скорость u_0 , давление $p_0 = 0$, девиатор напряжений $S_{110} = 0$. Графики на рисунках отвечают моменту времени 10^{-5}s .
- В расчетах используется равномерная неподвижная сетка, состоящая из 1000 или 2000 ячеек. Вычисления проводятся с переменным шагом по времени, соответствующему условию устойчивости численного метода (условию CFL).

В таблице 3.1 слева приведены константы УРС для алюминия, в середине — соответствующие критические параметры для ударной волны, а справа — для волны разрежения. Индекс * и ** обозначают критические значения для перехода от одноволнового к двухволновому режиму и от двухволнового к одноволновому режиму, соответственно.

Таблица 3.1 — Константы алюминия и критические значения для случаев ударной волны и волны разрежения

Параметры УРС		Крит.	Удар.	Разр.
ρ_0 , kg/m ³	2780	u_0^* , m/s	−34.02	33.82
Γ	2.13	ρ^* , kg/m ³	2794.64	2765.43
s	1.338	p^* , GPa	0.42	−0.41
a_0 , m/s	5330	u_0^{**} , m/s	−794.69	/
μ , GPa	27.6	ρ^{**} , kg/m ³	3167.70	/
Y , GPa	0.29	p^{**} , GPa	14.15	/

Рассмотрим следующие два случая. Первый случай является примером ударной волны, когда объект ударяется о стену слева с определенной отрицательной начальной скоростью. Второй случай является примером центрированной волны растяжения, когда левая сторона объекта прикреплена к стене, а правая растягивается с положительной начальной скоростью.

На рисунке 3.1 и 3.2 показано распределение давления, когда начальная скорость находится около первого критического значения. Видно, что численно рассчитанные критические значения должны лежать между 34 — 35 м/с, что очень близко к данным, приведенным в таблице 3.1. Соответствующие теоретические и численные значения приведены в таблице 3.2. Индекс 1 обозначает параметр состояния за первой волной, а индекс 2 — параметр состояния за второй волной. В этой таблице ρ_1 и p_1 являются ρ^* и p^* , $u_1 = u_0 - u_0^*$, потому что, как уже отмечено, значение изменения скорости через первую волну фиксировано и величина равна u_0^* .

Таблица 3.2 — Теоретические и численные значения в случае ударной и разреженной волн вокруг первого критического значения

Параметры	Теор. (ударн.)	Теор. (разр.)	Числ. ($u = -35\text{m/s}$)	Числ. ($u = 35\text{m/s}$)
u_1 , m/s	−0.98	1.18	−1.00	1.18
ρ_1 , kg/m ³	2794.64	2765.43	2794.64	2765.43
p_1 , GPa	0.42	−0.41	0.42	−0.41
u_2 , m/s	0	0	0.00	0.00
ρ_2 , kg/m ³	2795.17	2764.82	2795.17	2764.81
p_2 , GPa	0.436	−0.428	0.435	−0.427

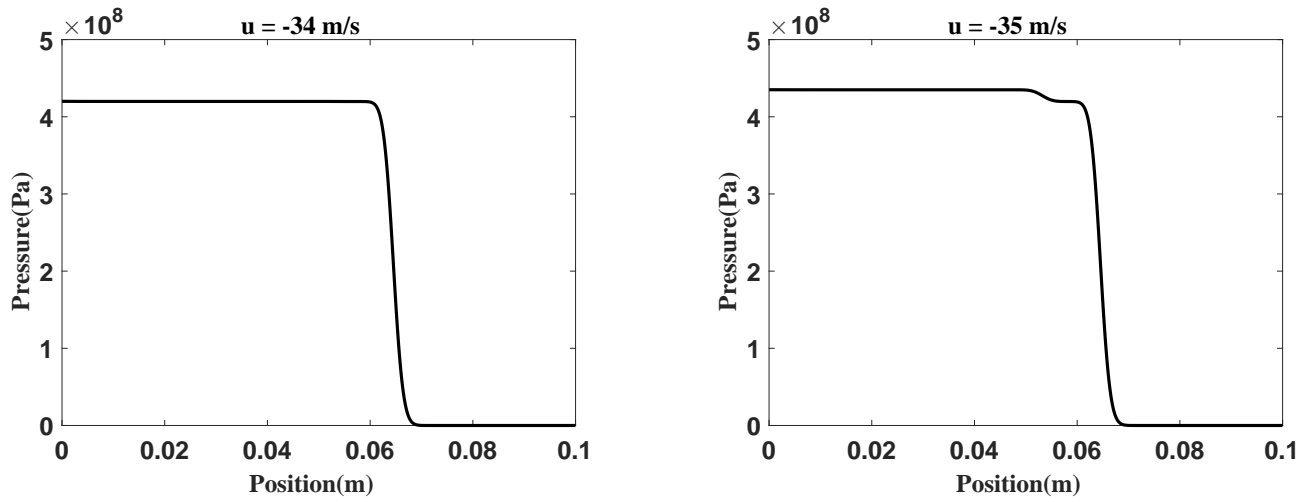


Рисунок 3.1 — Валидация критических значений для ударной волны (количество ячеек — 2000).

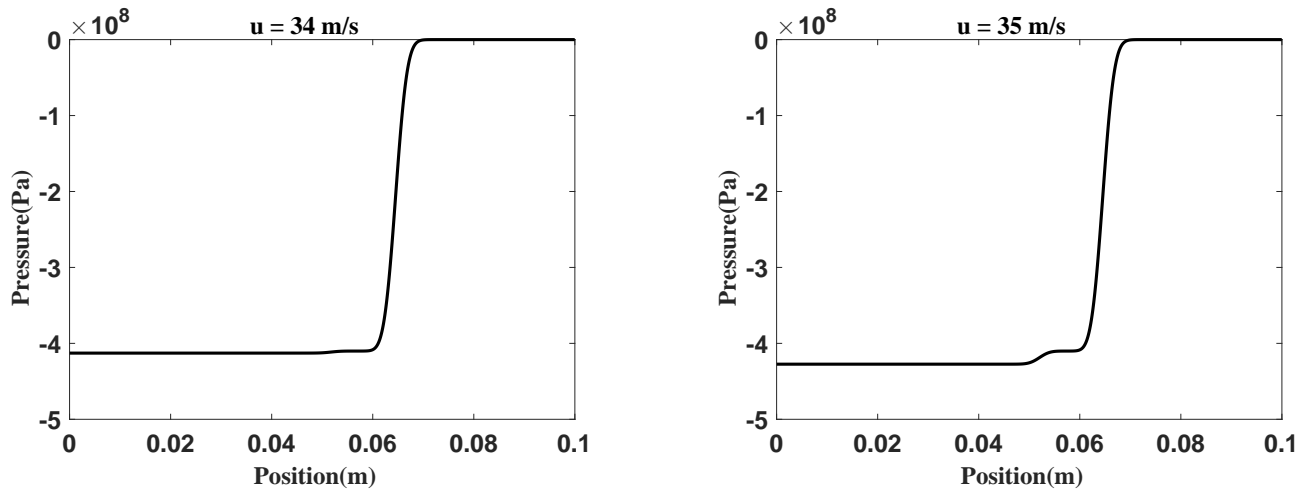


Рисунок 3.2 — Валидация критических значений для волны разрежения (количество ячеек — 2000).

При изменении начальной скорости соответственно меняется и режим волны. На рисунках 3.3 и 3.4 показаны численные результаты и теоретические значения для различных волновых режимов в случае ударных и центрированных волн. Соответствующие конкретные значения указаны в таблицах 3.3 и 3.4.

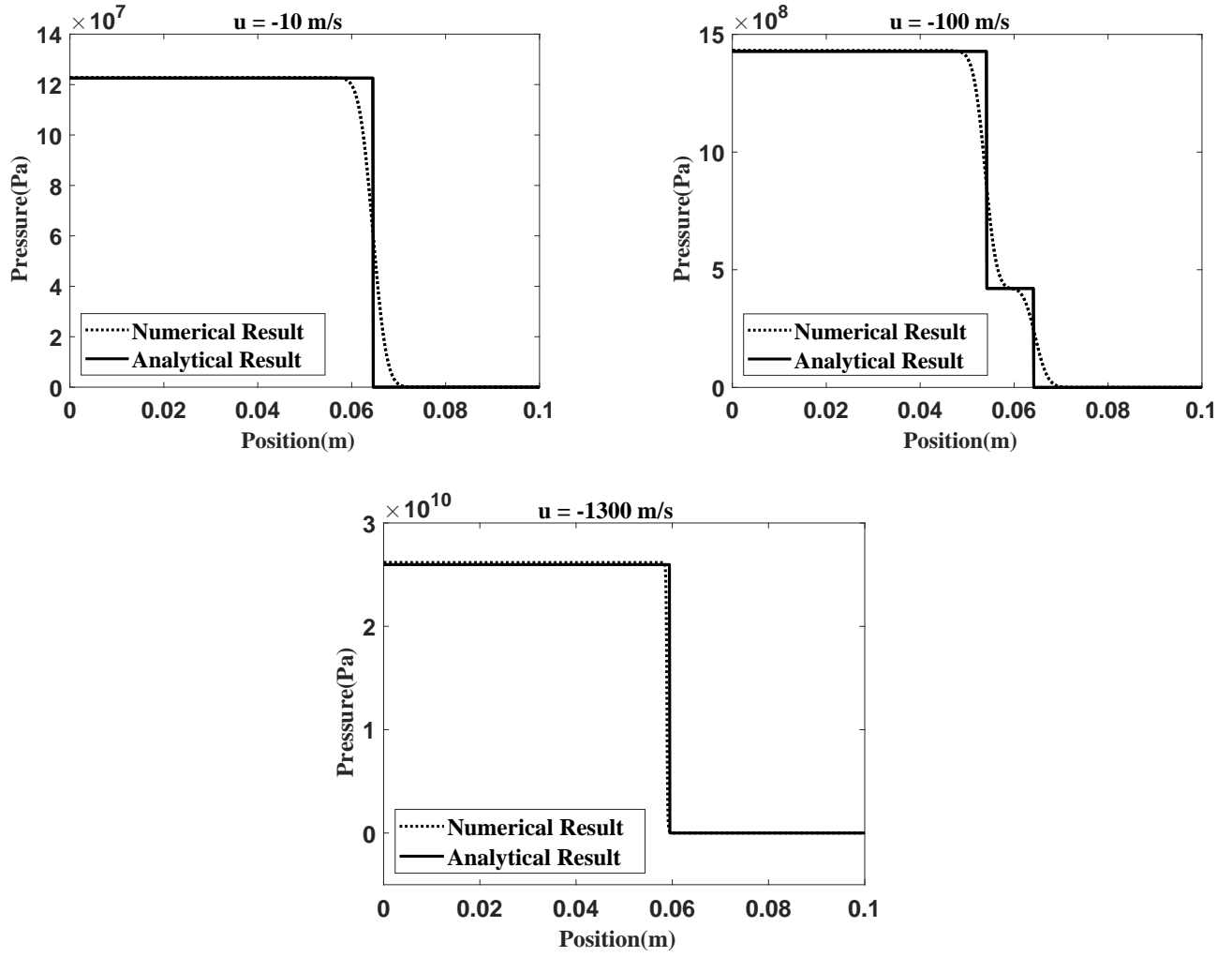


Рисунок 3.3 — Распределение давления при нескольких различных скоростях для ударной волны.

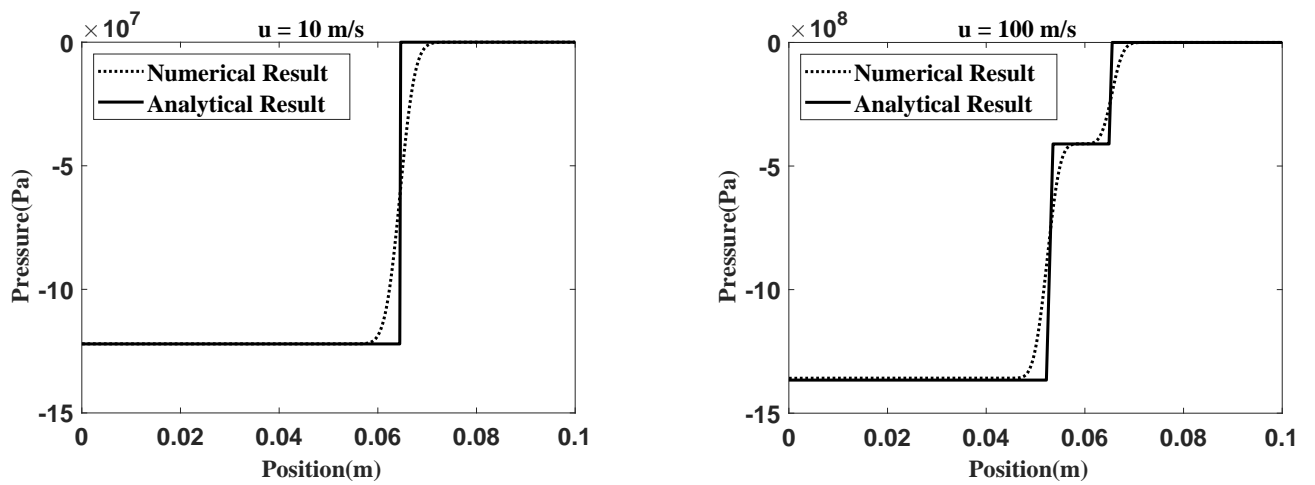


Рисунок 3.4 — Распределение давления при нескольких различных скоростях для волны разрежения.

Таблица 3.3 — Теоретические значения в различных режимах

Параметры	$u = -10$	$u = -100$	$u = -1300$	$u = 10$	$u = 100$ m/s
u_1 , m/s	0	-65.98	/	0	66.18
ρ_1 , kg/m ³	2784.31	2794.64	/	2775.69	2765.43
p_1 , GPa	0.123	0.42	/	-0.122	-0.41
x_1 , m	0.0645	0.06394	/	0.06445 — 0.06463	0.06490 — 0.06553
u_2 , m/s	/	0	0	/	0
ρ_2 , kg/m ³	/	2828.74	3388.46	/	2730.82
p_2 , GPa	/	1.430	25.970	/	-1.366
x_2 , m	/	0.05407	0.05940	/	0.05220 — 0.05354

Таблица 3.4 — Численные значения в различных режимах

Параметры	$u = -10$	$u = -100$	$u = -1300$	$u = 10$	$u = 100$ m/s
u_1 , m/s	0.00	-66.01	/	0	66.18
ρ_1 , kg/m ³	2784.31	2794.64	/	2775.69	2765.43
p_1 , GPa	0.123	0.420	/	-0.122	-0.410
x_1 , m	0.0644	0.06455	/	0.05835 — 0.07015	0.06105 — 0.07075
u_2 , m/s	/	0.00	0.00	/	0
ρ_2 , kg/m ³	/	2828.72	3393.77	/	2730.54
p_2 , GPa	/	1.431	26.173	/	-1.358
x_2 , m	/	0.05385	0.05888	/	0.04635 — 0.05775

В двухволновом режиме начальная скорость продолжает увеличиваться, как показано на рисунках 3.5 и 3.6. Независимо от величины начальной скорости, при переходе через первую волну параметры состояния изменяются от своего начального значения до значений, точно соответствующим параметрам текучести. Величина изменения скорости также фиксирована, и является первым критическим значением. По мере увеличения начальной скорости в случае центрированной волны разрежения дальнейшего перехода к одноволновому режиму не происходит. Для ударной волны, скорость распространения первой ударной волны уменьшается. При больших скоростях численная диссипация первой волны достаточно большая. Это может быть связано с тем, что начальная скорость близка ко второму критическому значению и что первая волна скоро начнет исчезать. Возможно, эту волну можно описать точнее, используя более точный алгоритм и большее число сеток. Однако сравнение

здесь только качественное с теоретическими выводами, поэтому конкретные значения не приводятся.

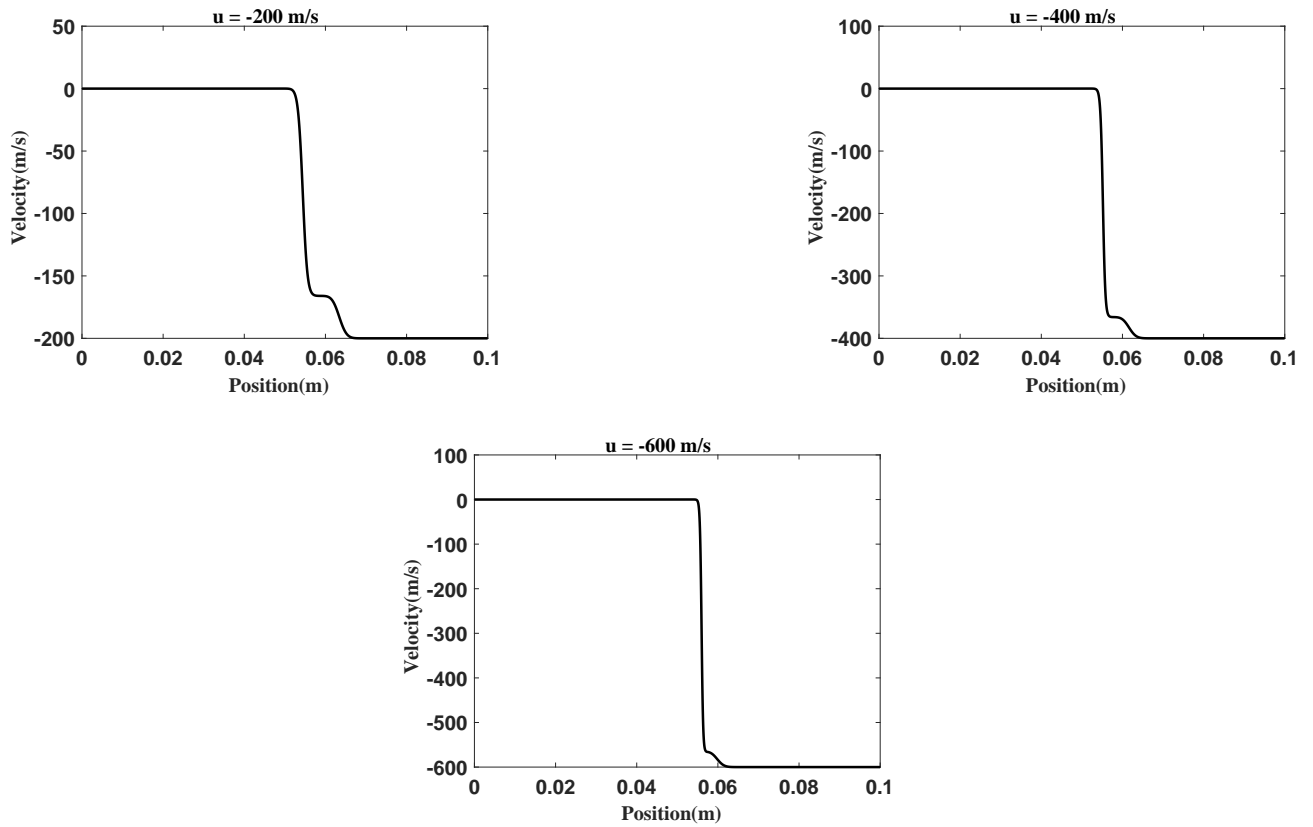


Рисунок 3.5 — Распределение скорости для ударной волны при нескольких различных скоростях в пределах двухволнового режима (количество сеток — 2000).

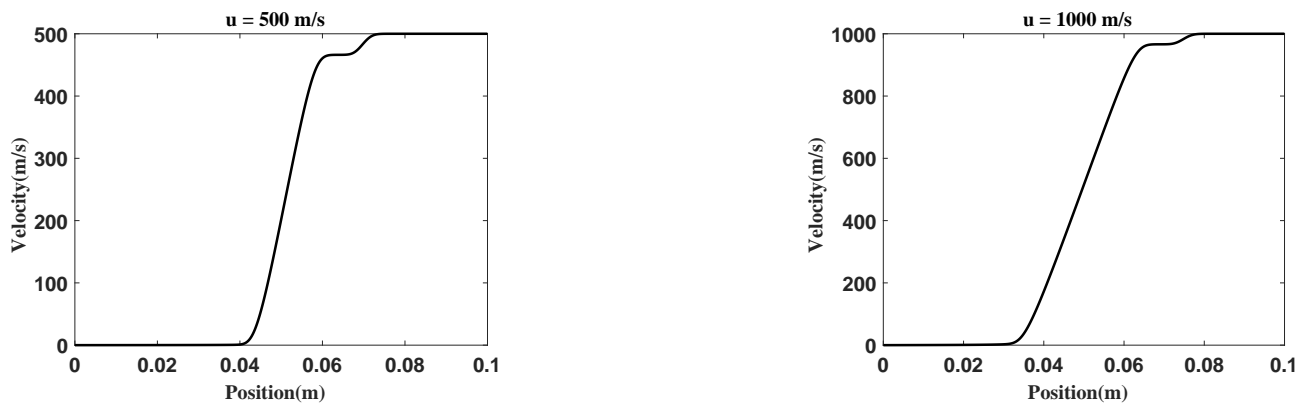


Рисунок 3.6 — Распределение скорости для волны разрежения при нескольких различных скоростях в пределах двухволнового режима (количество сеток — 2000).

3.3.2 Случай биматериалов

Применяя свойства упругопластических волн, описанные в разделе 3.3.1, получается обобщение задачи Римана в разделе 1.3 на двухматериальный случай с критерием пластичности в ситуации одноосных деформаций. Доказательства соответствующих свойств и конкретная процедура решения приведены в [72, 94]. В этом разделе мы используем метод отслеживания границы, для точного вычисления положения интерфейса, и рассматриваем его численные результаты в качестве опорного решения для проверки точности сокращенной формы ((2.60) и (2.61) в разделе 2.3) новой предложенной модели ((2.54) в разделе 2.2), а также для оценки величины размазывания интерфейса методом диффузной границы в этом случае.

Существующие методы для вычисления многофазных течений с разрешенными межфазными границами разделяются на два основных типа: методы отслеживания границы (или *front tracking methods*, *surface-based methods*) и методы захватывания границы (*volume-based methods*). К последним относится эйлерова формулировка механики деформируемого твердого тела с моделированием границы методом диффузной границы в главе 2. Метод отслеживания границы представляет собой численный метод, в котором классический эйлеровский решатель используется для точек, удаленных от границы, а специальная схема применяется для точек вблизи границы [95]. Прямой способ вычисления движущихся границ заключается в использовании движущейся сетки, которая закреплена на границе и деформируется в зависимости от течения по обе стороны границы. Это реализуется чисто лагранжевыми или произвольно-лагранжево-эйлеровыми (*arbitrary-Lagrangian-Eulerian*, *ALE*) методами [96], которые лучше всего подходят для отслеживания разрывов в параметрах течения. Разрешение разрывов в этих методах является точным и бездиссипативным, однако их распространение на двух- и трехмерные задачи является довольно сложным и трудным [97]. Более того, обработка больших деформаций с использованием этого метода представляет собой сложную вычислительную задачу из-за сильных искажений сетки [60].

В сочетании с основной идеей отслеживания границы, она может быть легко обобщена на случай биматериалов. А именно, граница материалов задается в виде узла N , и к этому узлу применяется решатель HLLC для аппроксимации численного потока. Скорость контактной волны HLLC является скоростью, с которой движется граница материалов, и она используется для обновления координат узла N . Затем точки сетки перераспределяются таким образом, чтобы обеспечить плавное изменение размера ячеек. Для аппроксимации численного потока во всех остальных точках сетки применяется решатель HLL. При таком методе в каждой расчетной ячейке присутствует только один материал, а граница остается четкой с течением времени.

Вычисление компонент вектора состояния в возмущенной зоне в римановых решателях HLL и HLLC описано в разделе 3.1. Оценки скорости волны и

расчет потока в HLLC приведены ниже:

$$\begin{aligned}
s_L &= \min \left(0, \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_L), \bar{u} - \sqrt{\bar{A}} \right) \\
s_R &= \max \left(0, \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_R), \bar{u} + \sqrt{\bar{A}} \right) \\
\bar{u} &= \frac{1}{2} (u_L + u_R), \bar{A} = \max \left(a_L^2 + \frac{4\mu_L}{3\rho_L}, a_R^2 + \frac{4\mu_R}{3\rho_R} \right) \\
\lambda_{\min} &= u - \sqrt{a^2 + 4\mu/3\rho}, \lambda_{\max} = u + \sqrt{a^2 + 4\mu/3\rho}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i^{n+1}} \left(\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^- \right) \tag{3.28a}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{i-1/2}^+ &= H(s'_{L,i-1/2}) s'_{L,i-1/2} \mathbf{Q}_{i-1}^n \\
&+ H(C'_{1,i-1/2}) (C'_{1,i-1/2} + (H(-s'_{L,i-1/2}) - 1) s'_{L,i-1/2}) \mathbf{Q}_{i-1/2,L}^* \\
&+ H(s'_{R,i-1/2}) (s'_{R,i-1/2} + (H(-C'_{1,i-1/2}) - 1) C'_{1,i-1/2}) \mathbf{Q}_{i-1/2,R}^* \\
&+ (H(-s'_{R,i-1/2}) - 1) s'_{R,i-1/2} \mathbf{Q}_i^n \\
\mathbf{F}_{i+1/2}^- &= H(-s'_{R,i+1/2}) s'_{R,i+1/2} \mathbf{Q}_{i+1}^n \\
&+ H(-C'_{1,i+1/2}) (C'_{1,i+1/2} + (H(s'_{R,i+1/2}) - 1) s'_{R,i+1/2}) \mathbf{Q}_{i+1/2,R}^* \\
&+ H(-s'_{L,i+1/2}) (s'_{L,i+1/2} + (H(C'_{1,i+1/2}) - 1) C'_{1,i+1/2}) \mathbf{Q}_{i+1/2,L}^* \\
&+ (H(s'_{L,i+1/2}) - 1) s'_{L,i+1/2} \mathbf{Q}_i^n \\
s'_{L,i-1/2} &= s_{L,i-1/2} - v'_{i-1/2} \\
C'_{1,i-1/2} &= C_{1,i-1/2} - v'_{i-1/2} \\
s'_{R,i-1/2} &= s_{R,i-1/2} - v'_{i-1/2}
\end{aligned} \tag{3.28b}$$

где определения знаков совпадают с теми, что даны в уравнении (3.15), v' — скорость точек сетки, Δx_i^{n+1} — длина i -й ячейки на временном шаге $n+1$.

В случае HLL, $\mathbf{F}_{i-1/2}^+$ и $\mathbf{F}_{i+1/2}^-$ записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{i-1/2}^+ &= H(s'_{L,i-1/2}) s'_{L,i-1/2} \mathbf{Q}_{i-1}^n \\
&+ H(s'_{R,i-1/2}) (s'_{R,i-1/2} + (H(-s'_{L,i-1/2}) - 1) s'_{L,i-1/2}) \mathbf{Q}_{i-1/2}^* \\
&+ (H(-s'_{R,i-1/2}) - 1) s'_{R,i-1/2} \mathbf{Q}_i^n \\
\mathbf{F}_{i+1/2}^- &= H(-s'_{R,i+1/2}) s'_{R,i+1/2} \mathbf{Q}_{i+1}^n \\
&+ H(-s'_{L,i+1/2}) (s'_{L,i+1/2} + (H(s'_{R,i+1/2}) - 1) s'_{R,i+1/2}) \mathbf{Q}_{i+1/2}^* \\
&+ (H(s'_{L,i+1/2}) - 1) s'_{L,i+1/2} \mathbf{Q}_i^n
\end{aligned} \tag{3.28c}$$

Для неподвижных сеток задано $v' = 0$, таким образом, в уравнении (3.28), $s'_{L,i-1/2} = s_{L,i-1/2}$, $C'_{1,i-1/2} = C_{1,i-1/2}$, $s'_{R,i-1/2} = s_{R,i-1/2}$, $H(s'_R) = 1$ и $H(s'_L) = 0$, по той причине, что согласно уравнению (3.27), s_L всегда мень-

ше или равно нулю, а s_R всегда больше или равно нулю, тогда получается уравнение (3.15).

Далее мы рассмотрим двухматериальный случай численных экспериментов в разделе 3.3.1. Материал слева (примыкающий к стене) — алюминий, а материал справа от границы — медь. Для обоих материалов используется уравнение состояния Ми-Грюнайзена (1.2). Граничное условие слева — жесткая недеформируемая стенка, а справа — лагранжева граница с нулевым напряжением и давлением. Начальные давление и напряжение равны нулю, начальная скорость отрицательна для случая удара и положительна для случая растяжения. Вычислительный алгоритм основан на методе, описанном в данном разделе и разделе 3.2, с переменным шагом по времени, выбираемым в соответствии с обычным условием устойчивости Куранта-Фридрихса-Льюи (CFL). Сетка состоит из 1000 расчетных ячеек, по 500 ячеек отведено для каждого из двух материалов. В случае неподвижной сетки для объемных долей материалов во всех расчетных ячейках задаются ненулевые начальные значения. Начальное значение отсечки 10^{-9} принимается для алюминия в области меди и, соответственно, для меди в области алюминия. Соответствующие параметры УРС указаны в таблице 3.5.

Таблица 3.5 — Константы алюминия и меди

Параметры	Алюминий	Медь
$\rho_0, \text{kg/m}^3$	2780	8930
Γ	2.13	2
s	1.338	1.49
$a_0, \text{m/s}$	5330	3970
μ, GPa	27.6	45
Y, GPa	0.29	0.09

В данном разделе используются критерий Мизеса: если $Q^k = S_{ij}^k S_{ij}^k \geq \frac{2}{3} Y^{k2}$, то $S_{ij}^k \rightarrow S_{ij}^k \sqrt{\frac{2}{3} \frac{Y^k}{Q^k}}$. Сначала рассмотрим проблему удара. Обе критические скорости переходов волновых режимов для меди меньше, чем для алюминия [70]. Следовательно, когда скорость удара не очень велика, алюминий может находиться в режиме одной упругой волны, а медь в режиме одной упругой волны или в режиме двойной упругопластической волны (рисунок 3.7). Когда скорость удара увеличивается выше первой критической скорости алюминия, в алюминии распространяются двойные упругопластические волны, в то время как в меди возникает трехволновый (рисунок 3.8) или двухволновый режим.

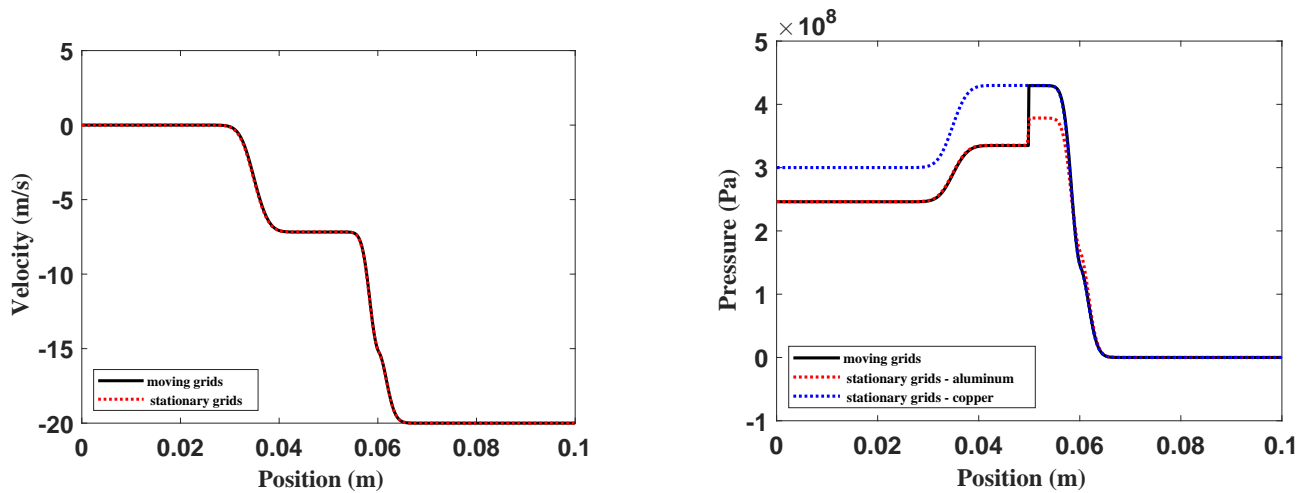


Рисунок 3.7 — Распределения скорости и давления при 10^{-5} с для скорости удара 20 м/с. При ударе о стенку сначала возникает упругая ударная волна в алюминии. Она распространяется к границе и затем создает двойную упругопластическую волну в меди, в то же время отраженная волна распространяется обратно в алюминий.

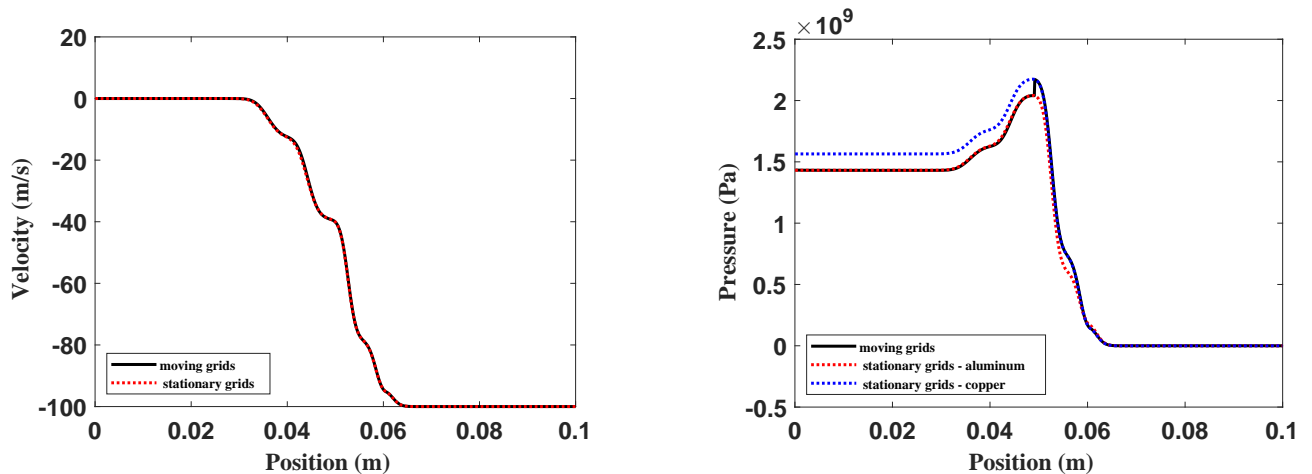


Рисунок 3.8 — Распределения скорости и давления при 10^{-5} с для скорости удара 100 м/с. Двойные упругопластические волны распространяются в алюминии. Упругая предвестниковая волна алюминия достигает границы и заставляет медь генерировать двойные упругопластические волны. Затем вторая пластическая волна алюминия достигает границы и порождает еще одну пластическую волну в меди.

Режим волны зависит от величины скорости удара. Первая упругая предвестниковая волна алюминия достигает границы и может вызвать в меди двойные упругопластические волны, или медь может сразу перейти в пластическое состояние и генерировать только одну пластическую волну на границе. Когда вторая пластическая волна алюминия достигнет границы, она вызовет еще одну пластическую волну в меди. В обоих случаях первая упругая предвестниковая волна алюминия, достигающая границы материалов, вызывает отраженную волну, распространяющуюся обратно к алюминию. Эта отраженная волна встречается с первоначальной пластической волной, которая движется со скоростью, меньшей, чем скорость первоначальной упругой предвестниковой волны. Теоретического анализа того, что происходит при

встрече этих двух волн, не существует. Тем не менее, численные результаты показывают, что не происходит наложения двух волн для формирования единой волны, или что более сильная пластическая волна поглощает более слабую отраженную волну.

Когда скорость удара увеличивается выше второй критической скорости алюминия, в алюминии возникает одиночная пластическая волна, вызванная ударом о стенку. Как только эта волна достигает границы материалов, в меди возникает передаваемая ударная волна, также в режиме одиночной пластической волны, как показано на рисунке 3.9.

Задача о растяжении материалов по постановке аналогична задаче об ударе. При растяжении не существует одиночной пластической волны; в материале могут возникать только упругие или двойные упругопластические волны разрежения. Каждая волна разрежения ограничена двумя характеристиками. Количество волн, требующих анализа при численном моделировании, удваивается по сравнению с задачей удара, что значительно усложняет анализ взаимодействия волн с границей. Таким образом, выбираются только случаи с малыми скоростями растяжения, когда и алюминий, и медь находятся в режиме одиночной упругой волны разрежения (рисунок 3.10) и когда алюминий находится в режиме одиночной упругой волны, а медь в режиме двойной упругопластической волны (рисунок 3.11).

Время выхода для рисунков 3.7 – 3.11 — все 10^{-5} с, что соответствует моменту, когда волны проходят в медь и остаются одна или две отраженные волны в алюминии. Для модели (2.60) существует одна общая скорость, но фазовые давления различны. Следовательно, распределения давления для двух материалов показаны на рисунках 3.7 – 3.11. Из этих рисунков видно, что результаты отслеживания границ на движущихся сетках хорошо согласуются с данными, полученными при захватывании границ на неподвижных сетках.

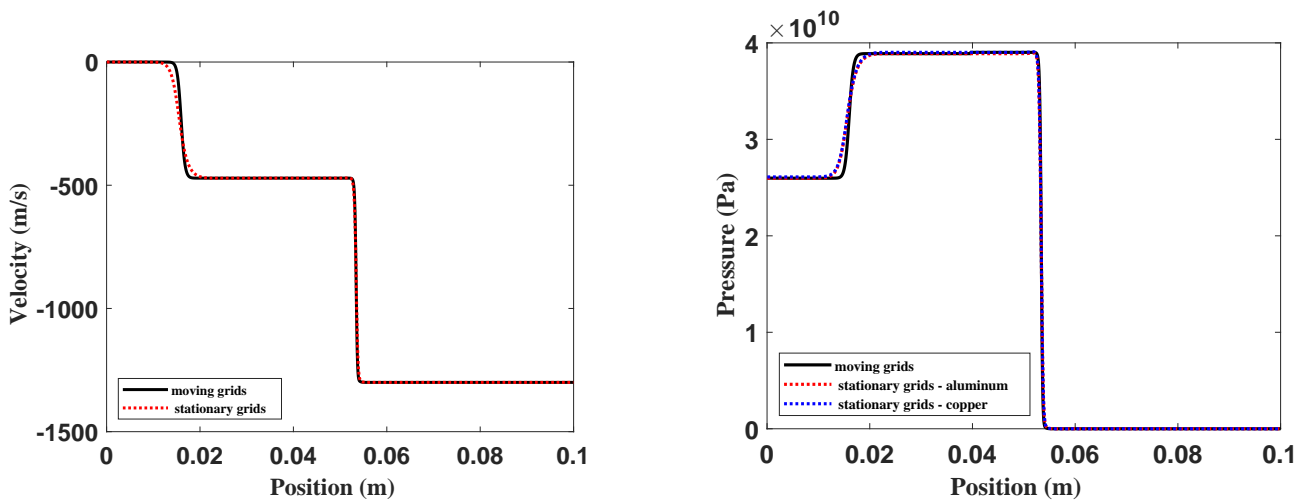


Рисунок 3.9 — Распределения скорости и давления при 10^{-5} с для скорости удара 1300 м/с. Поскольку скорость удара достаточно велика, и алюминий, и медь достигают пластического состояния непосредственно.

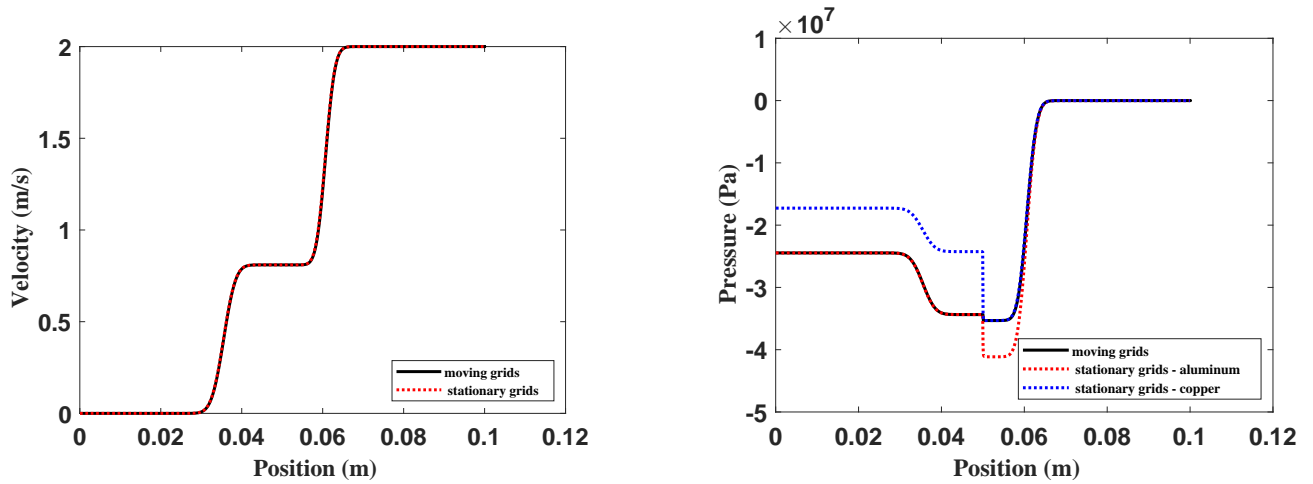


Рисунок 3.10 — Распределения скорости и давления при 10^{-5} с для скорости растяжения 2 м/с. Поскольку скорость растяжения достаточно мала, и алюминий, и медь находятся в упругом состоянии.

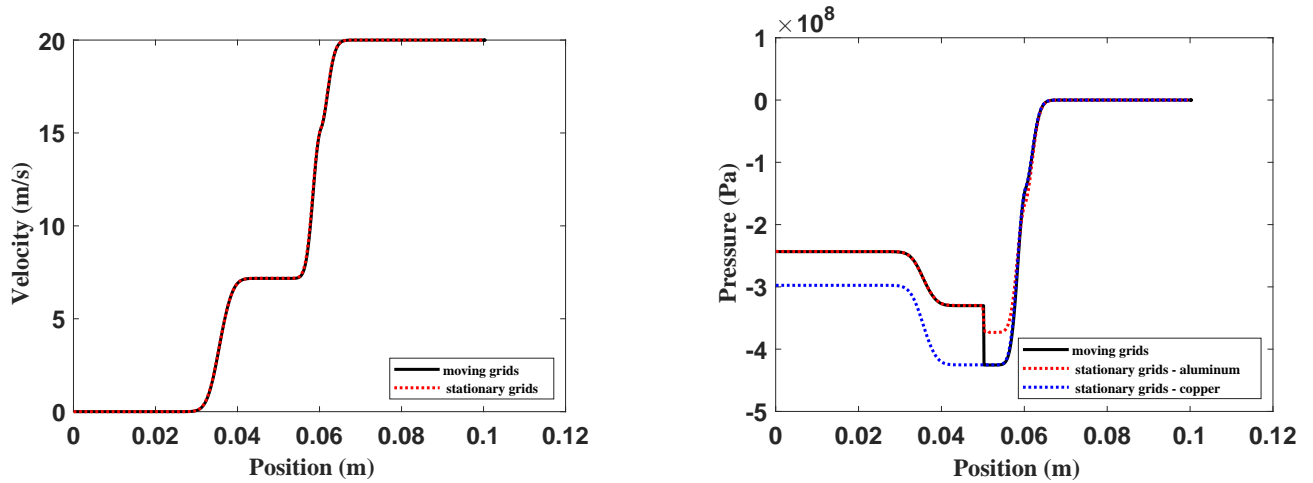


Рисунок 3.11 — Распределения скорости и давления при 10^{-5} с для скорости растяжения 20 м/с. Аналогично ситуации на рисунке 3.7, за исключением того, что вместо ударных волн теперь появляются волны разрежения.

3.4 Сравнение численных и теоретических результатов для общего случая

По сравнению с разделом 3.3, в этом разделе мы рассматриваем более общий случай, включающий напряжение сдвига и эволюцию деформации. Мы используем численные методы в разделе 3.2 для модели (2.54), где полная энергия имеет вид уравнения (1.3). Когда критерий пластичности не учитывается, теоретическое решение, полученное в разделе 1.3, хорошо согласуется с соответствующими численными результатами, что указывает на то, что в рамках рассматриваемой модели продольные и сдвиговые волны полностью независимы. Однако теоретический анализ упругопластического течения при

любых начальных условиях является весьма сложным и трудным. Таким образом, в данном разделе представлены только численные результаты. Наблюдается, что в присутствии сдвига материал проявляет множество новых характеристик на пластической фазе.

3.4.1 Без учета модификации критерия пластичности

В качестве численных тестов рассматривается биматериальная задача Римана, в которой граница разделяет два упругих материала. Описание и постановка численных тестов точно такие же, как в разделе 3.3.2, а соответствующие параметры приведены в таблице 3.5. Даже если материалы одинаковы с обеих сторон, численный метод для двух материалов в разделе 3.2 все еще используется, только параметры для обоих материалов устанавливаются на один и тот же материал. Соответственно, теоретическое решение задачи Римана (в разделе 1.3) используется как эталонное. Поскольку в настоящее время имеется только теоретическое решение для упругой фазы, в численных расчетах предел текучести Y материалов задается очень большим числом, чтобы критерий пластичности не оказывал никакого влияния.

На рисунках 3.12 и 3.13 рассмотрены случаи, когда существуют только сдвиговые волны. Слева и справа начальные значения скоростей u и w , давления p и всех девиаторных напряжений равны 0, а скорость v составляет -10 м/с слева и 10 м/с справа. На рисунке 3.12, слева и справа — алюминий, а на рисунке 3.13 слева — алюминий, справа — медь. Согласно результатам решения задачи Римана, величина изменения девиаторного напряжения S_{12} перед и за волной связана с величиной изменения скорости v . Когда материалы с обеих сторон одинаковы, как показано на рисунке 3.12, скорость v за волной равна 0. Когда материалы с обеих сторон различны, как показано на рисунке 3.13, скорость v за волной не падает до 0.

Далее рассматривается общий случай, когда одновременно присутствуют продольные и сдвиговые волны. На рисунках 3.14 и 3.15 слева и справа начальные значения скоростей u и w , а также все девиаторные напряжения равны 0, а скорость v составляет -10 м/с и давление $p = 10^8$ Па слева и v составляет 10 м/с и давление $p = 10^5$ Па справа. На рисунке 3.14, и слева, и справа — алюминий. На рисунке 3.15, слева — алюминий, а справа — медь. В этом случае продольная волна слева является волной разрежения, а справа ударной волной. Выбор разрыва по давлению, а не по скорости в дислокациях сделан для того, чтобы показать, что продольные волны слева и справа также могут быть разных типов. Согласно анализу задачи Римана, результаты в общем случае могут быть рассмотрены как простая суперпозиция случая одноосной деформации и случая сдвига. Например, в случае, показанном на рисунке 3.14, сначала решим задачу для случая, когда начальные значения левой и правой сторон отличаются только давлением, чтобы получить продольные переменные за продольной волной, а затем решим задачу для случая, когда отличается

только скорость v , чтобы получить тангенциальные переменные за сдвиговой волной, и сумма этих двух результатов будет результатом, показанным на рисунке 3.14.

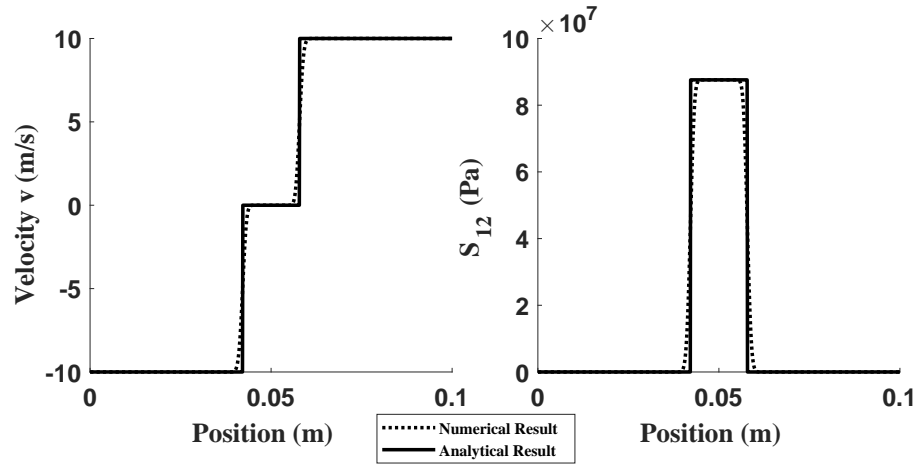


Рисунок 3.12 — Распределения параметров состояния при 0.25×10^{-5} с в случае сдвига одинаковых материалов.

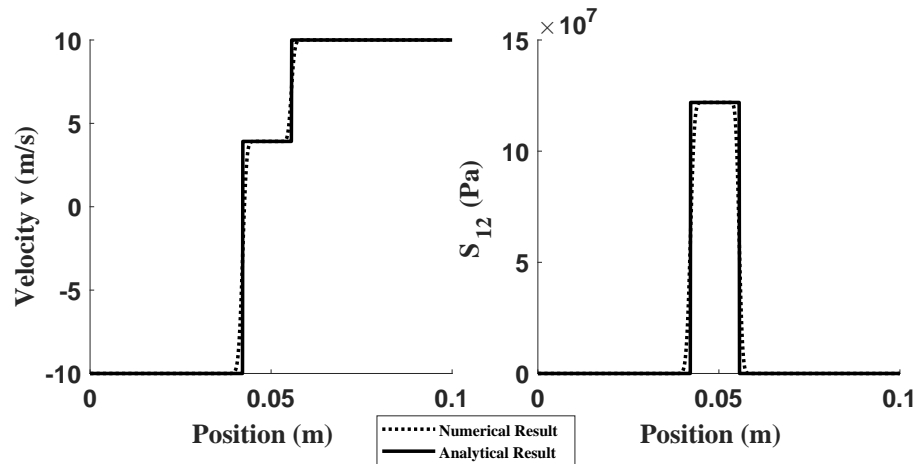


Рисунок 3.13 — Распределения параметров состояния при 0.25×10^{-5} с в случае сдвига различных материалов.

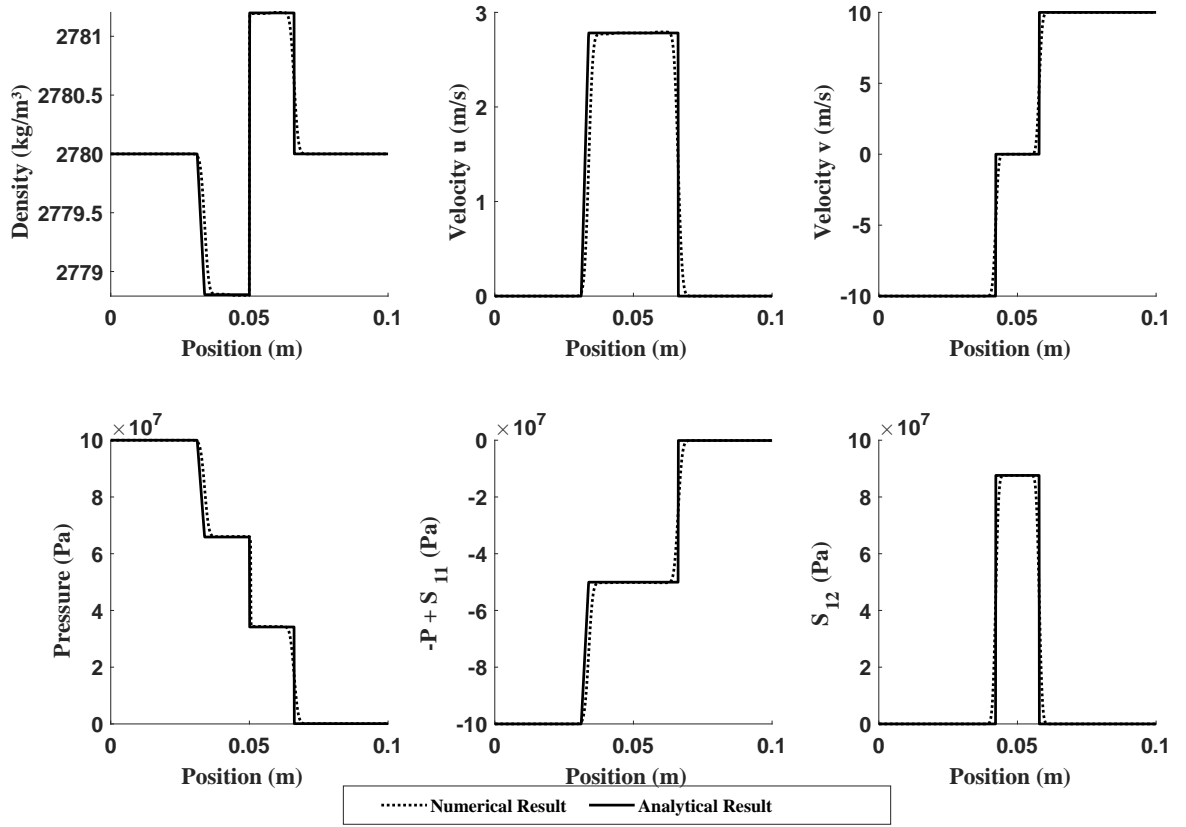


Рисунок 3.14 — Распределения параметров состояния при 0.25×10^{-5} с в общем случае одинаковых материалов.

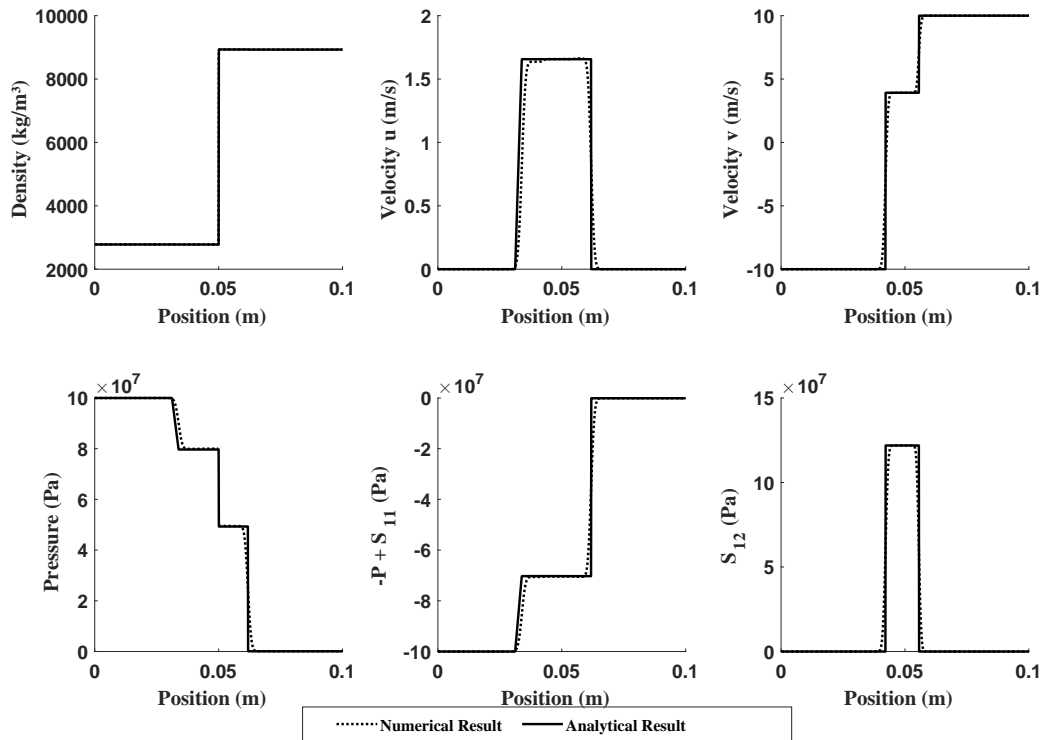


Рисунок 3.15 — Распределения параметров состояния при 0.25×10^{-5} с в общем случае различных материалов.

3.4.2 Численные результаты для упругопластического течения

При учете критерия пластичности количество волн увеличивается по сравнению с упругими случаями. Для четкого отображения сдвиговых волн исходная длина увеличена с 0.1 м до 0.2 м, и, соответственно, количество сеток увеличено до 4000. Плотность является средней, определяемой уравнением (2.51b).

В отличие от случая одноосной деформации, две модели с упругим членом в полной энергии и без него имеют существенные различия в описании процесса сдвига. На рисунке 3.16 показаны соответствующие численные расчеты, которые согласуются с результатами в численных расчетах сдвигового слоя в статье [60]. Следует отметить, что в данном случае разрыв начальной скорости v все еще настолько мал, что за волной материал еще не достиг пластического состояния. Несмотря на то, что теоретические результаты, приведенные в разделе 1.3, свидетельствуют о том, сдвиговые волны не вызывают изменений продольных параметров в модели с упругим членом, в численных результатах все же наблюдаются незначительные колебания, амплитуда которых уменьшается с увеличением количества узлов сетки.

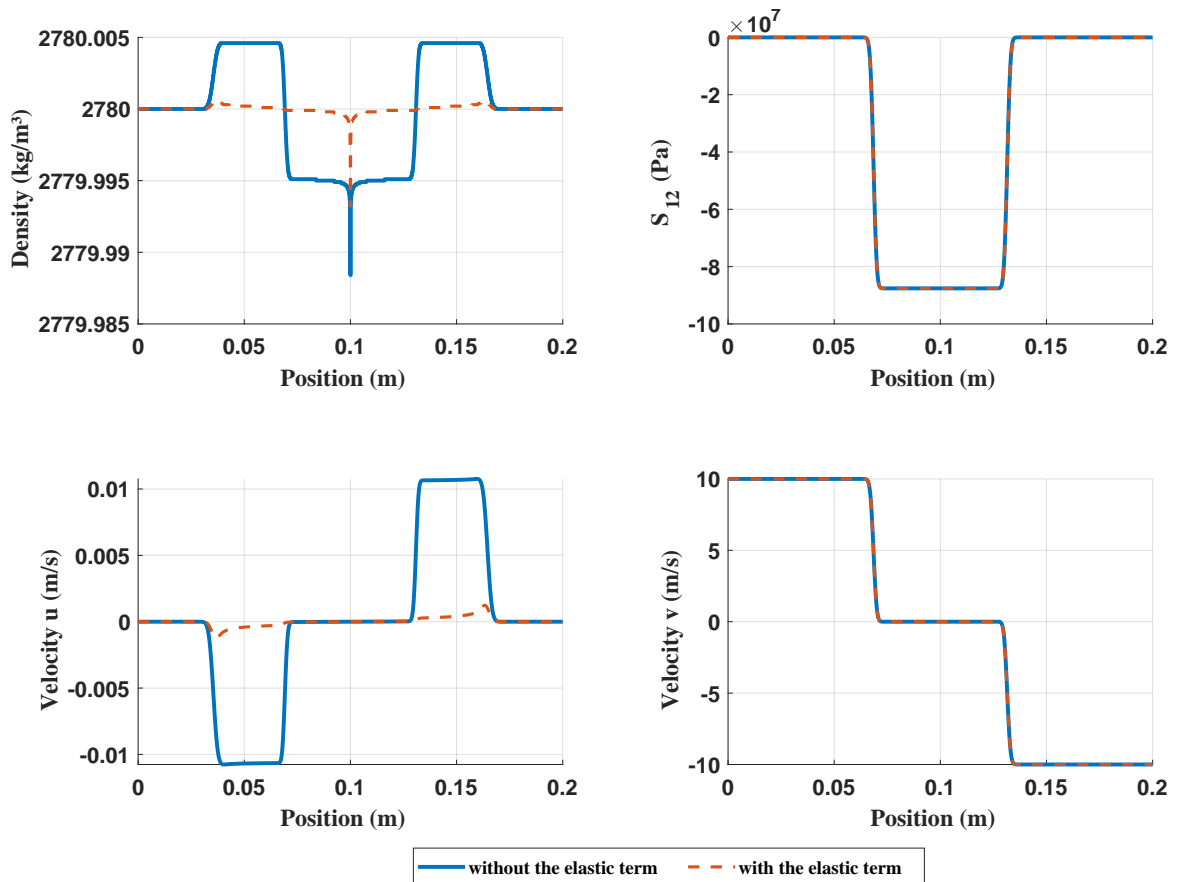


Рисунок 3.16 — Распределения параметров состояния двух моделей при 10^{-5} с в случае сдвига алюминия. Начальные условия отличаются только скоростью v , которая составляет 10 м/с в левой части и -10 м/с в правой.

Когда начальная скорость u также является разрывной, для модели без упругого члена, хотя разрыв в начальной скорости v вызывает изменения продольных параметров как в продольных, так и в сдвиговых волнах (рисунок 3.16), этот эффект пренебрежимо мал по сравнению с эффектом, вызванным разрывами продольного параметра u , как показано на рисунке 3.17. При малой скорости удара u материалы остаются в упругом состоянии за продольной волной. При достаточно большой скорости v за сдвиговой волной достигается пластическое состояние. Наблюдается, что, аналогично ситуации в разделе 3.3, сдвиговая волна также разделяется на упругую предвестниковую волну и пластическую волну. За упругой сдвиговой волной материалы переходят в пластическое состояние. Для модели без упругого члена продольные параметры, такие как плотность, скорость u и девиаторное напряжение S_{11} демонстрируют незначительные изменения перед и за волной; для моделей с упругим членом эти параметры остаются неизменными. Учитывая близкое совпадение двух результатов, для удобства это различие не акцентируется в оставшейся части данного раздела, и предполагается, что оба результата практически эквивалентные.

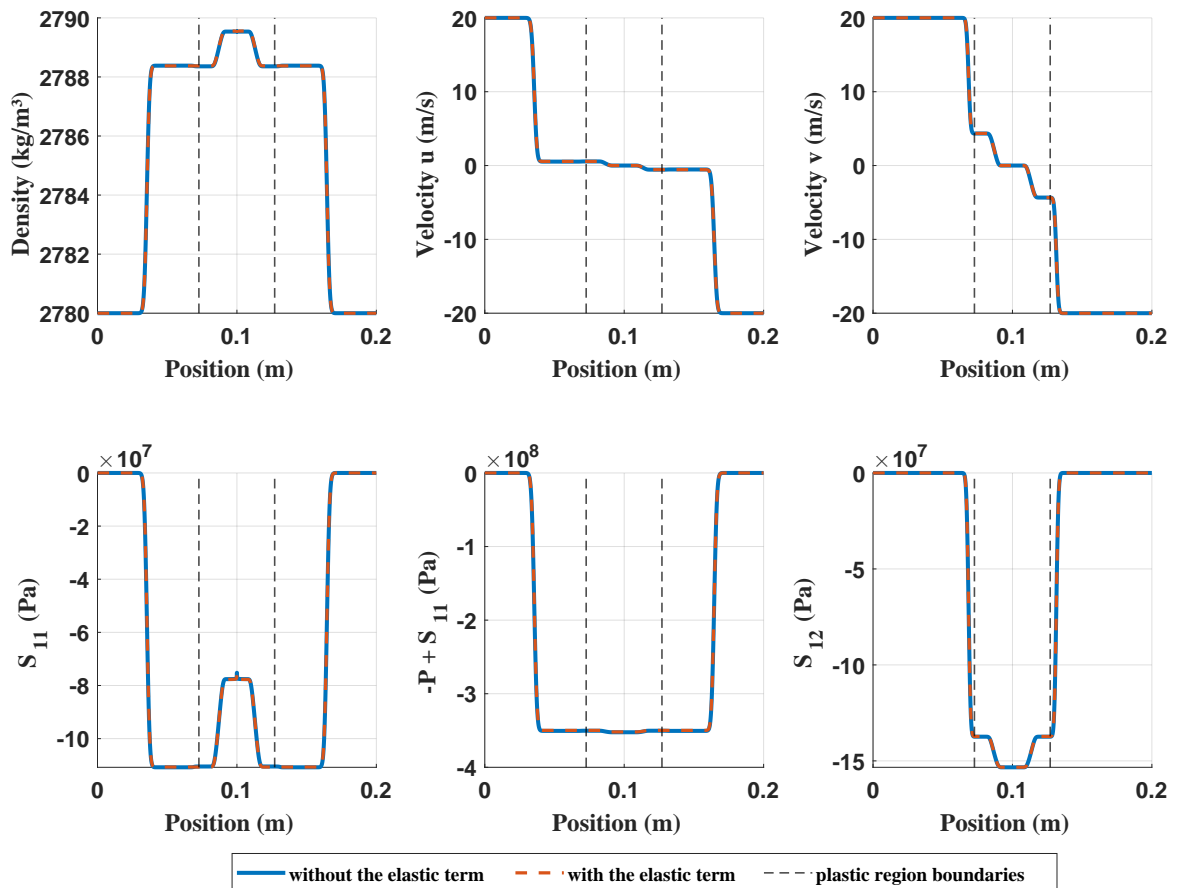


Рисунок 3.17 — Распределения параметров состояния двух моделей при 10^{-5} с в общем случае с критерием пластичности. Материалы с обеих сторон представляют собой алюминий. Начальные условия отличаются только скоростями u и v , которые составляют 20 м/с, 20 м/с для левой стороны, и -20 м/с, -20 м/с для правой стороны, соответственно.

Когда скорость удара u увеличивается до такой степени, что за продольной волной достигается пластическое состояние, в этот момент существует только одна пластическая сдвиговая волна, как показано на рисунке 3.18. При этом в материале присутствуют упругая предвестниковая продольная волна, пластическая продольная волна и пластическая сдвиговая волна.

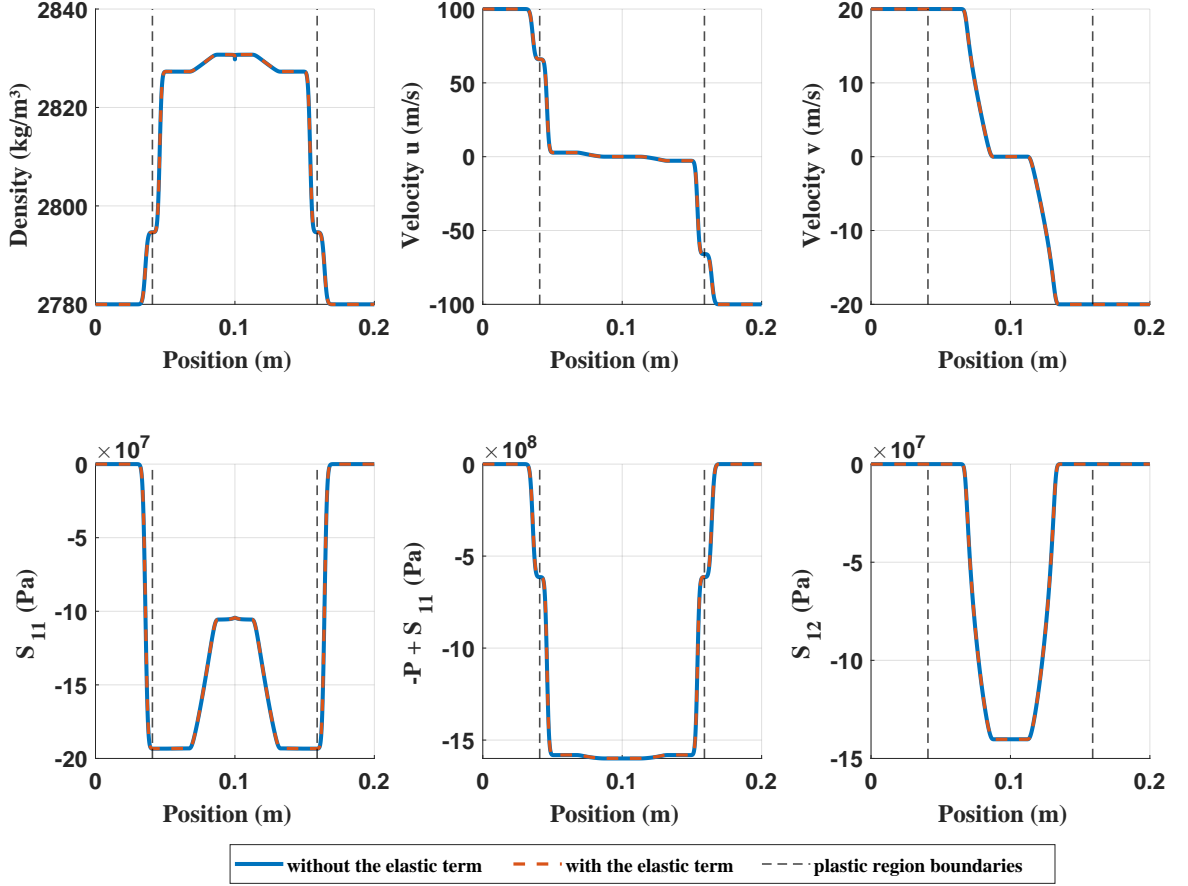


Рисунок 3.18 — Распределения параметров состояния двух моделей при 10^{-5} с в общем случае с критерием пластичности. Материалы с обеих сторон представляют собой алюминий. Начальные условия отличаются только скоростями u и v , которые составляют 100 м/с, 20 м/с для левой стороны, и -100 м/с, -20 м/с для правой стороны, соответственно.

Однако при дальнейшем увеличении амплитуды разрыва начальной скорости v , на контактном разрыве скорость v перестает быть непрерывной, что означает, что материал больше не может сопротивляться сдвиговой деформации. Сравнивая рисунки 3.17–3.19, данное явление может объясняться следующим образом. Когда до сдвиговой волны находится в упругом состоянии, материал за упругой сдвиговой волной переходит в пластическое состояние. В этот момент разность скоростей v между двумя сторонами уменьшается, а абсолютное значение девиаторного напряжения S_{12} увеличивается. Это неизбежный результат сопротивления материала сдвиговой деформации. Однако скорости v по обе стороны остаются неравными, что приводит к возникновению пластической сдвиговой волны, которая пытается уменьшить эту разницу скоростей. Следовательно, абсолютное значение S_{12} будет дальше увеличиваться. Тем не менее, поскольку $Q = S_{ij}S_{ij} \leq \frac{2}{3}Y^2$ и в этот момент

выполняется равенство, абсолютное значение S_{11} должно уменьшаться. Степень этого уменьшения конечна. Когда абсолютное значение S_{11} достигает 0, абсолютное значение S_{12} больше не может увеличиваться. Если скорости v по обе стороны остаются неравными в этот момент, то на контактном разрыве проявится явление, напоминающее течение жидкости.

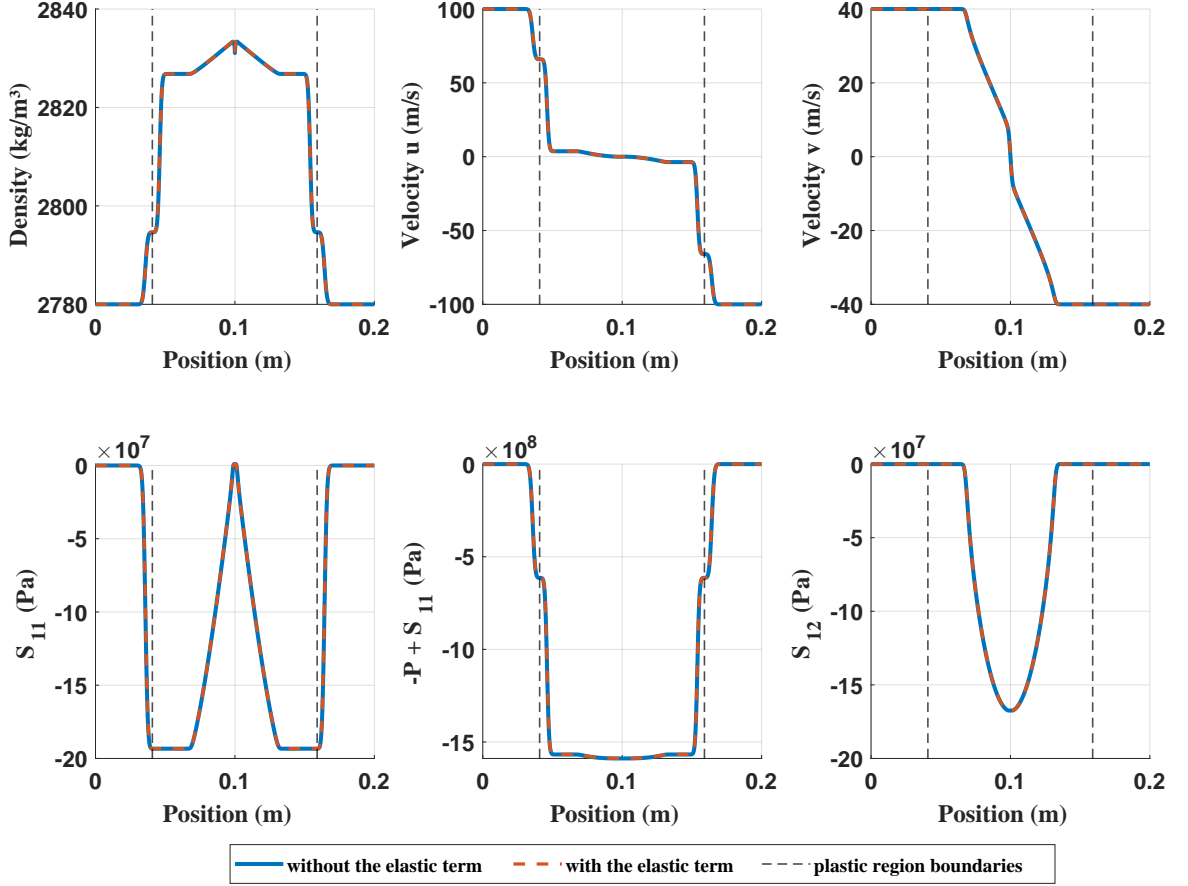


Рисунок 3.19 — Распределения параметров состояния двух моделей при 10^{-5} с в общем случае с критерием пластичности. Материалы с обеих сторон представляют собой алюминий. Начальные условия отличаются только скоростями u и v , которые составляют 100 м/с, 40 м/с для левой стороны, и -100 м/с, -40 м/с для правой стороны, соответственно.

Следовательно, если начальная скорость v фиксируется, как на рисунках 3.19 и 3.20, и интенсивность удара уменьшается, то есть скорость u уменьшается, как показано на последнем диаграмме рисунка 3.21, амплитуда пластической сдвиговой волны также визуальнo уменьшится. Это связано с тем, что чем меньше скорость удара u , тем больше увеличивается абсолютное значение S_{12} за упругой сдвиговой волной. В результате у пластической сдвиговой волны меньше пространства для увеличения абсолютного значения S_{12} , которое ограничено условием $Q = S_{ij}S_{ij} \leq \frac{2}{3}Y^2$. Таким образом, когда скорость u равна нулю, поведение соответствует изображению на рисунке 3.22.

Когда скорость u уменьшается до нуля, амплитуда пластической сдвиговой волны присутствует, хотя и настолько мала, что ее не видно на диаграмме S_{12} на рисунке 3.22. За пластической сдвиговой волной, на контактном раз-

рыве скорости u по обе стороны достигают равных значений; однако разрыв скорости v всё ещё существует. Как показано на рисунке 3.22, когда v достаточно велико для того, чтобы материал достиг пластического состояния, сдвиговые волны в обеих моделях перестают быть независимыми. В модели с упругим членом неизбежно генерируется продольная волна. Как следует из предыдущего анализа, пластическая сдвиговая волна изменяет все параметры. Для обеспечения непрерывности скорости u на контактном разрыве должна существовать другая волна, которая компенсирует изменения, вызванные пластической сдвиговой волной. Однако для моделей без упругого члена скорость u также изменяется при упругой сдвиговой волне. Следовательно, когда v достаточно велико для того, чтобы материал достиг пластического состояния, сдвиговые волны в обеих моделях не являются независимыми. Волновая структура представляет собой сначала упругую продольную волну, затем упругую сдвиговую волну, а затем пластическую сдвиговую волну. Это отличается от ситуации, когда материал находится в упругом состоянии, где только сдвиговые волны в модели без упругого члена не являются независимыми.

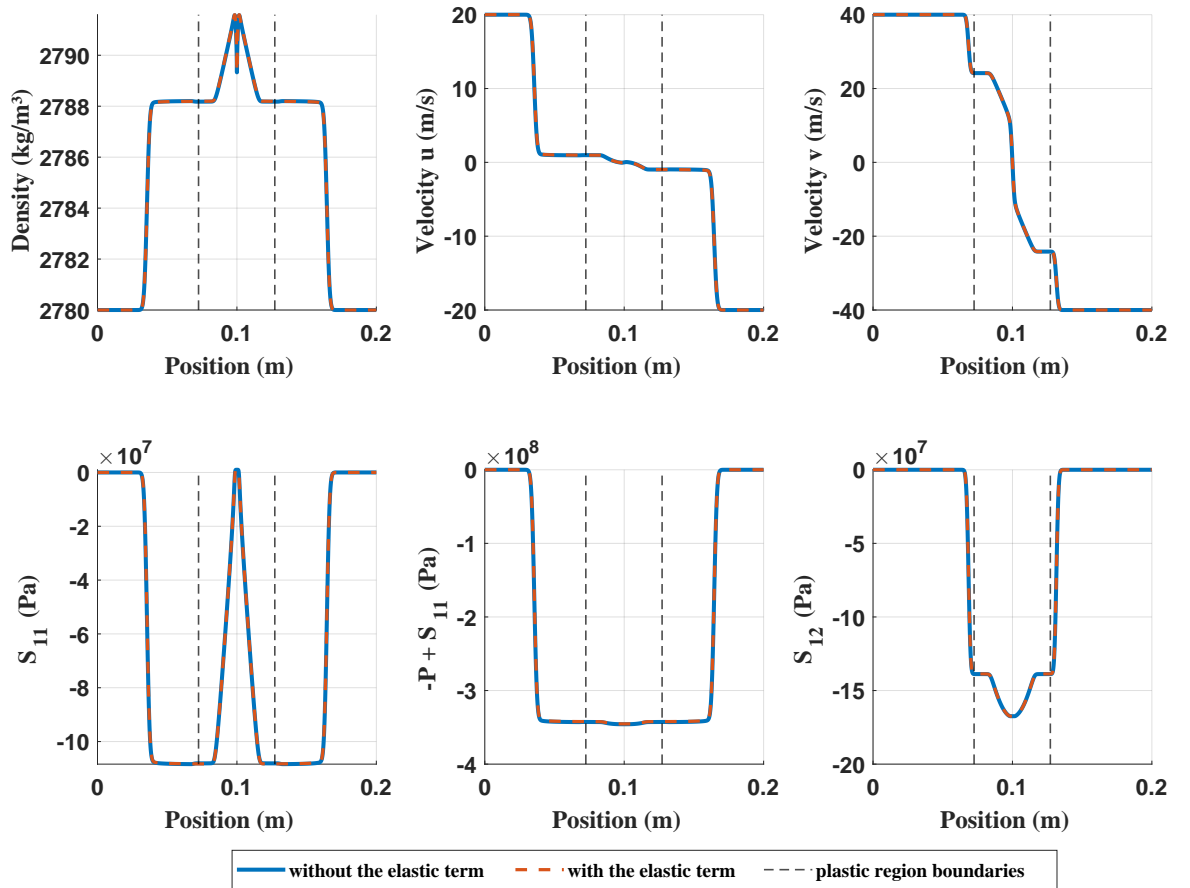


Рисунок 3.20 — Распределения параметров состояния двух моделей при 10^{-5} с в общем случае с критерием пластичности. Материалы с обеих сторон представляют собой алюминий. Начальные условия отличаются только скоростями u и v , которые составляют 20 м/с, 40 м/с для левой стороны, и -20 м/с, -40 м/с для правой стороны, соответственно.

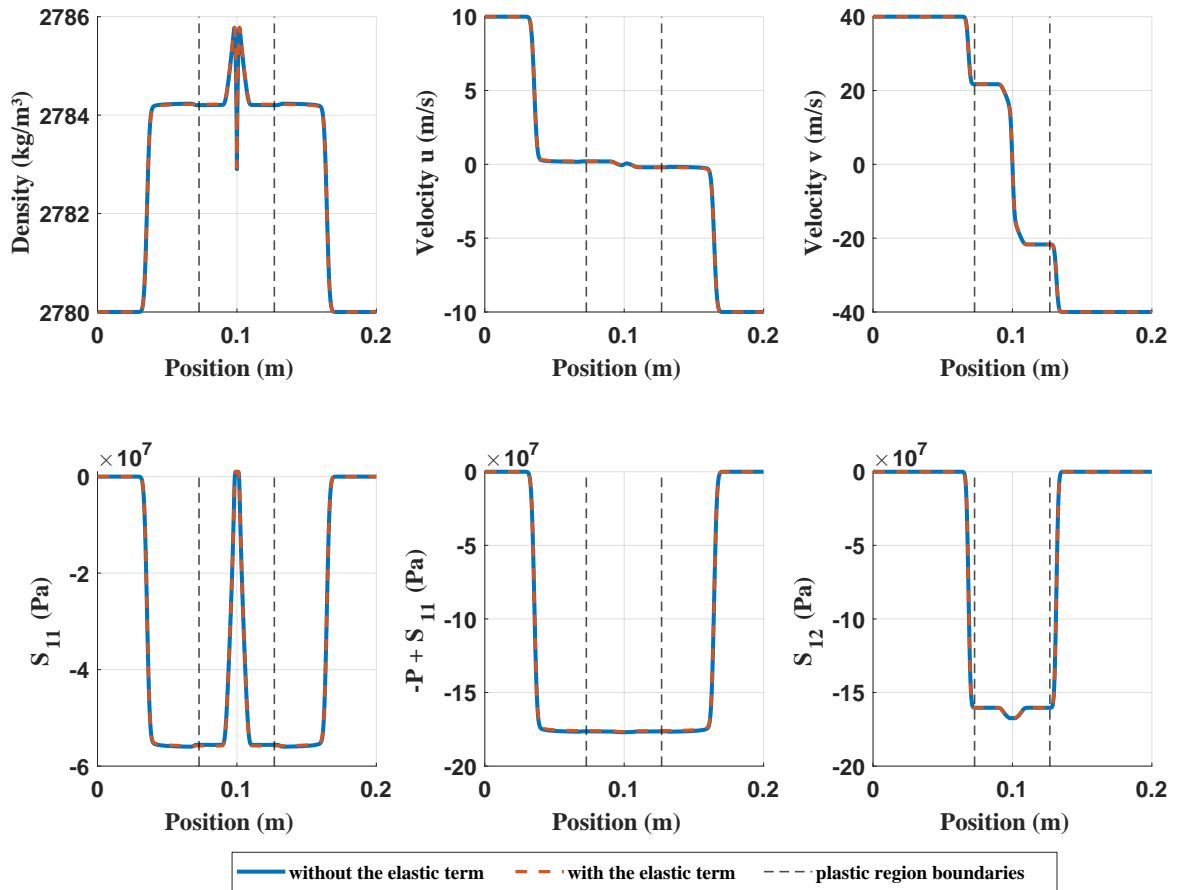


Рисунок 3.21 — Распределения параметров состояния двух моделей при 10^{-5} с в общем случае с критерием пластичности. Материалы с обеих сторон представляют собой алюминий. Начальные условия отличаются только скоростями u и v , которые составляют 10 м/с, 40 м/с для левой стороны, и -10 м/с, -40 м/с для правой стороны, соответственно.

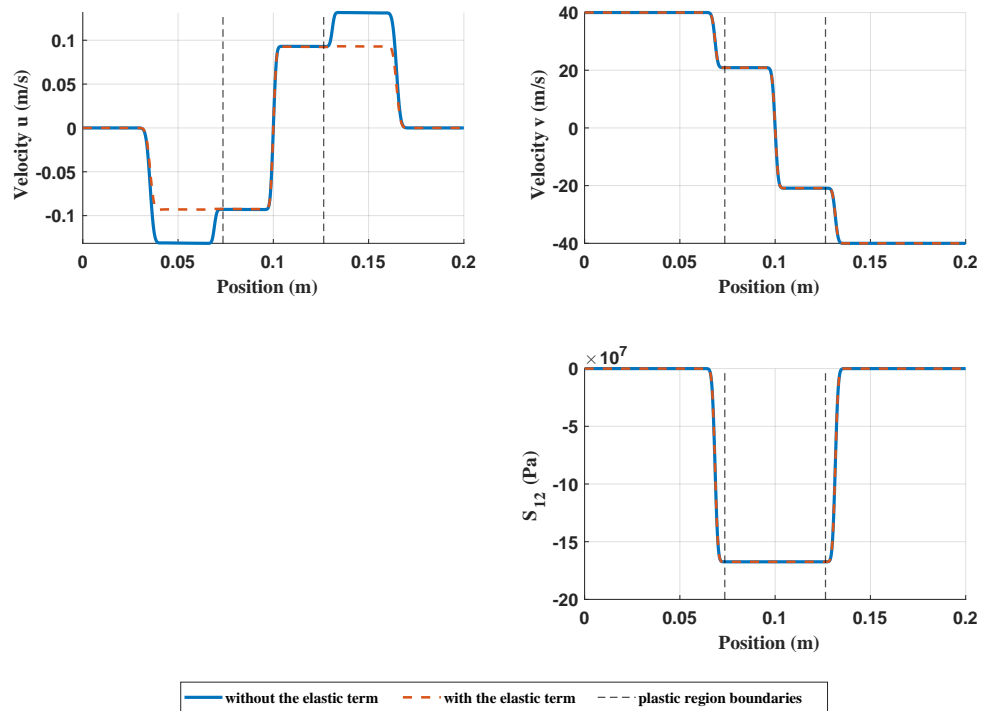


Рисунок 3.22 — Распределения параметров состояния двух моделей при 10^{-5} с в случае сдвига алюминия. Начальные условия отличаются только скоростью v , которая составляет 40 м/с в левой части и -40 м/с в правой.

Глава 4

Термодинамически согласованная модель Уилкинса

Как классическая гипотупругая модель Уилкинса [18], так и недавно широко используемая модифицированная модель [50, 51], которая также используется в данной работе, страдают от двух недостатков: термодинамической несогласованности и произвола в выборе объективной производной. В данной главе рассматривается первая проблема. В механике давление определяется как $p = -1/3 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$, а в модели Уилкинса оно предполагается термодинамическим параметром. Однако анализ, представленный в данной главе, показывает, что эти два понятия не являются полностью идентичными. На основе этого предлагается новая модель, согласующаяся с законами термодинамики, и анализируются ее соответствующие математические свойства.

4.1 Анализ возможности термодинамической согласованности

Определяющие соотношения упругих тел могут быть классифицированы по трем типам: упругость Коши, гиперупругость и гипотупругость. В изотермическом процессе, если состояние напряжения в любой данный момент времени полностью определяется состоянием деформации в этот момент и не зависит от истории градиентов деформации до текущего момента, то такие модели обычно называют упругими моделями Коши. Гипотупругие модели определяют соотношение между производной напряжения (обычно объективной, такой как производная Яуманна, производная Трусделла, производная Олдройда и т. д.) и тензором скорости деформации \mathbf{D} (симметричной частью градиента

скорости). Общая форма имеет вид,

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{D}, \quad (4.1)$$

где $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ — выбранная объективная производная напряжения, например, в данной работе используется производная Яуманна, $\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma})$ — тензор четвертого порядка, который может зависеть от текущего состояния напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и других переменных, но не зависит явно от истории деформации. Связь между упругостью Коши и гипотупругостью, например, изотропные упругие материалы Коши с обратимыми определяющими уравнениями составляют особый подкласс гипотупругих материалов, подробнее в разделе 75 в [98].

Для гиперупругих моделей существует скалярная потенциальная функция (функция плотности энергии деформации) W , которая является функцией тензора градиента деформации \mathbf{F} или его инварианта. Напряжение получается непосредственно из производной этой функции энергии деформации по тензору, характеризующему изменение деформации в теле (обычно правому тензору Коши-Грина или тензору деформации Грина), что приводит к гиперупругой модели, имеющей консервативную форму законов сохранения. В изотермических условиях энергия сохраняется во время деформации. Нагрузка и разгрузка следуют по одному и тому же пути, и напряжение зависит только от текущего состояния деформации, а не от того, как это состояние было достигнуто. Объективность производной напряжения удовлетворяется естественным образом, без необходимости введения дополнительных слагаемых, таких как производная Яуманна. Однако, гипотупругие модели определяют только мгновенную реакцию напряжения на скорость деформации, не гарантируя сохранение энергии. В главе 1 анализ показывает, что рассеивание энергии является неявным в модели Уилкинса. Кроме того, выбор объективной производной напряжения не может быть основан на единых стандартах, основанных на физических принципах [60]. Например, в случае простого сдвига производная Яуманна приводит к появлению нефизических колебательных решений, однако при деформации ниже 0.5 погрешность практически отсутствует [99]. К сожалению, для гипотупругих моделей, таких как модель Уилкинса, соответствующая скалярная потенциальная функция обычно отсутствует. Следовательно, в настоящее время основным методом улучшения математических и термодинамических свойств гипотупругих моделей является вывод гипотупругих моделей изотропных твердых тел из эквивалентных гиперупругих моделей. Например, модель Уилкинса в условиях небольших деформаций может быть выведена из гиперупругой модели, но соответствующая объективная производная напряжения отличается от производной Яуманна [100], однако в пределах линейной упругости разница между ними в численных результатах очень мала [60]. Однако этот метод требует предварительно задать уравнение состояния, особенно расчет энергии упругой

части [60, 100]. Следовательно, возможность того, что для любого уравнения состояния улучшенная модель Уилкинса может удовлетворять второму закону термодинамики и возвращаться к исходному состоянию после обратного цикла, то есть в упругой фазе и при отсутствии ударных волн изменение энтропии ds будет равно нулю, становится предметом дальнейшего изучения. В разделе 1.2 принимается форма общей энергии, представленная в виде (1.3), и уравнение Гиббса, представленное в виде (1.17), и делается вывод, что только при выполнении уравнения (1.25) в упругой фазе без ударных волн, $ds = 0$. Такой процесс анализа и вывод принят в [22, 51, 60], что кажется разумным, поскольку в уравнении (1.3) часть энергии, соответствующая девиаторным напряжениям, отделена от внутренней энергии, поэтому (1.17) не включает часть работы, выполняемую девиаторными напряжениями. Далее, на основе первого и второго законов термодинамики, проанализируем достоверность такого подхода. По первому закону термодинамики,

$$\delta q = de - \delta w, \quad (4.2)$$

где q и w — тепло и работа на единицу массы соответственно. Из уравнений (1.12 – 1.16) следует, что

$$dw = -pd\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}d\frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu}. \quad (4.3)$$

Согласно второму закону термодинамики, для обратимых процессов, уравнение (4.2) может быть записано в виде,

$$de = Tds - pd\frac{1}{\rho} + \frac{1}{4\mu\rho}dQ, \quad (4.4)$$

где T — температура, s — энтропия. Обозначим $S_{ij}S_{ij}$ через Q . Из уравнения (4.4) следует, что

$$\frac{\partial e}{\partial Q} = \frac{1}{4\mu\rho}. \quad (4.5)$$

Если рассматривать e как функцию плотности, энтропии и Q , то оно должно иметь вид

$$e = e_0(\rho, s) + \frac{Q}{4\mu\rho}. \quad (4.6)$$

Объединяя уравнения (4.4) и (4.6), получаем

$$Tds = de_0 + pd\frac{1}{\rho} - \frac{Q}{4\mu\rho^2}d\rho. \quad (4.7)$$

По сравнению с уравнением (1.17), в правую часть уравнения добавлены члены, связанные с Q . Необходимым условием для того, чтобы de в уравнении

(4.4) было точным дифференциалом (полным дифференциалом), является выполнение условия интегрируемости (смешанные частные производные равны), то есть,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(-p)}{\partial Q} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{4\mu\rho}\right)}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)} \\ \frac{\partial(-p)}{\partial s} &= \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)} \\ \frac{\partial\left(\frac{1}{4\mu\rho}\right)}{\partial s} &= \frac{\partial T}{\partial Q}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Уравнение (4.8) эквивалентно

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{v,s} &= \frac{1}{4\mu} \\ -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{v,Q} &= \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{s,Q} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial Q}\right)_{v,s} &= 0,\end{aligned}\tag{4.9}$$

где v — удельный объем. Из первого уравнения следует, что если de является полным дифференциалом, то необходимо, чтобы p явно зависело от Q , то есть

$$p = \Pi(\rho, s) - \frac{Q}{4\mu}.\tag{4.10}$$

Это означает, что термодинамическое давление Π и механическое давление p не равны. Следовательно, для сохранения согласованности с обозначениями, использованными в предыдущих разделах, термодинамическая часть внутренней энергии e_0 сокращенно называется внутренней энергией и по-прежнему обозначается символом e , а упругий член $Q/(4\mu\rho)$ удаляется из состава внутренней энергии, что идентично уравнению (1.3). Уравнение состояния $e(\rho, s)$ также должно быть функцией плотности и термодинамического давления, $e(\rho, \Pi)$. Это существенное отличие от модели, представленной в главе 1.

Подставляя уравнение (1.18) в уравнение (4.7), получаем $ds = 0$. Таким образом, на основе модификации Гаврилюком модели Уилкинса (включение упругого члена в полную энергию) получается термодинамически согласованная гипоупругая модель, не зависящая от конкретного уравнения состояния, путем определения нового термодинамического давления. Однако, как упоминалось ранее, выбор производной Яуманна в качестве объективной производной напряжения может привести к появлению нефизических ошибок в случаях

больших деформаций. Тем не менее, в пределах области применимости модели Уилкинса результаты мало отличаются от результатов гиперупругой модели.

4.2 Математические свойства и численные результаты

Поскольку модель Уилкинса (1.1) основана на законах сохранения и законе линейной упругости Гука, которые не изменяются, требуется заменить только давление в (1.9) с использованием уравнения (4.10), и получается

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u^2 + \Pi - \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu} - S_{11} \right)}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uv - S_{12})}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uw - S_{13})}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u E + \left(\Pi - \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu} - S_{11} \right) u - S_{12}v - S_{13}w \right)}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho S_{11}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{11})}{\partial x} - \frac{4}{3}\mu\rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho S_{22}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{22})}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho S_{33}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{33})}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho S_{12}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{12})}{\partial x} - \mu\rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho S_{13}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{13})}{\partial x} - \mu\rho \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho S_{23}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u S_{23})}{\partial x} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Перепишем уравнение (4.11) в виде (1.30),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{S_{11}}{2\mu}\right) & -\frac{S_{22}}{2\mu\rho} & -\frac{S_{33}}{2\mu\rho} & -\frac{S_{12}}{\mu\rho} & -\frac{S_{13}}{\mu\rho} & -\frac{S_{23}}{\mu\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Здесь, $\mathbf{W} = [\rho, u, v, w, \Pi, S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}]^T$,

$$c^2 = \frac{\frac{\Pi}{\rho^2} - \frac{\partial e}{\partial \rho}}{\frac{\partial e}{\partial \Pi}}. \quad (4.13)$$

Собственные значения и правые собственные векторы матрицы \mathbf{A} соответственно следующие,

$$\lambda_{1-5} = u,$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 + \frac{S_{11}}{2\mu} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{S_{22}}{2\mu} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{S_{33}}{2\mu} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{S_{23}}{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{6,7} = u + a, \lambda_{8,9} = u - a, a = \sqrt{\mu/\rho}, D = 3\rho c^2 + 3S_{11} + \mu,$$

$$\mathbf{r}_6 = \begin{pmatrix} \frac{3S_{12}\rho}{\mu D} \\ \frac{\mu D}{3S_{12}a} \\ \frac{\mu D}{a} \\ -\frac{\mu}{0} \\ 0 \\ \frac{3S_{12}c^2\rho}{\mu D} \\ -\frac{\mu D}{4S_{12}} \\ -\frac{D}{2S_{12}} \\ \frac{D}{2S_{12}} \\ \frac{D}{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_7 = \begin{pmatrix} \frac{3S_{13}\rho}{\mu D} \\ \frac{\mu D}{3S_{13}a} \\ \frac{\mu D}{0} \\ \frac{a}{-\mu} \\ \frac{\mu}{0} \\ \frac{3S_{13}c^2\rho}{\mu D} \\ -\frac{\mu D}{4S_{13}} \\ -\frac{D}{2S_{13}} \\ \frac{D}{2S_{13}} \\ \frac{D}{0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_8 = \begin{pmatrix} \frac{3S_{12}\rho}{\mu D} \\ \frac{\mu D}{3S_{12}a} \\ -\frac{\mu D}{a} \\ \frac{\mu}{0} \\ 0 \\ \frac{3S_{12}c^2\rho}{\mu D} \\ -\frac{\mu D}{4S_{12}} \\ -\frac{D}{2S_{12}} \\ \frac{D}{2S_{12}} \\ \frac{D}{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_9 = \begin{pmatrix} \frac{3S_{13}\rho}{\mu D} \\ \frac{\mu D}{3S_{13}a} \\ -\frac{\mu D}{a} \\ \frac{\mu}{0} \\ \frac{a}{-\mu} \\ \frac{3S_{13}c^2\rho}{\mu D} \\ -\frac{\mu D}{4S_{13}} \\ -\frac{D}{2S_{13}} \\ \frac{D}{2S_{13}} \\ \frac{D}{0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{10,11} = u \pm b, b = \sqrt{c^2 + \frac{4\mu}{3\rho} + \frac{S_{11}}{\rho}},$$

$$\mathbf{r}_{10} = \begin{pmatrix} \frac{3\rho}{2\mu} \\ \frac{2\mu}{3b} \\ \frac{2\mu}{0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3c^2\rho}{2\mu} \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_{11} = \begin{pmatrix} \frac{3\rho}{2\mu} \\ \frac{2\mu}{3b} \\ -\frac{2\mu}{0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3c^2\rho}{2\mu} \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(4.14)

В качестве примера возьмем медь и алюминий. Соответствующие параметры приведены в таблице 3.5. При рассмотрении критерия Мизеса, $|S_{ij}| \leq \sqrt{2/3}Y$, тогда $\lambda_{10,11}$ является действительным, т. е. модель (4.11) является гиперболической.

В этой главе мы больше не используем такие названия, как продольные волны и сдвиговые волны, а вместо них используем быстрые волны (соответствующие $\lambda_{10,11}$) и медленные волны (соответствующие λ_{6-9}). Тип каждого

характеристического поля определяется путем $\nabla_{\mathbf{W}} \lambda_i \cdot \mathbf{r}_i$. Контактная волна является линейно вырожденной, а быстрая и медленная волны являются действительно нелинейными, что отличается от модели (1.9) и от случая, когда полная энергия выражается уравнением (1.3), но ситуация аналогична случаю, когда полная энергия выражается как $E = e + 0.5\mathbf{u}^2$. Собственные значения (4.14) показывают, что медленные волны изменяют не только тангенциальные параметры, но и продольные параметры, что означает, что в случаях, подобных показанным на рисунках 3.12 и 3.13, использование модели (4.11) больше не приводит к появлению независимых медленных волн, то есть, для обеспечения непрерывности скорости и соответствующего напряжения на контактной волне должны существовать также быстрые волны. Таким образом, мы больше не используем термин «сдвиговая волна».

Однако решение соответствующей задачи Римана для модели (4.11) в настоящее время является очень сложным. Поскольку при рассмотрении слабых разрывов $\lambda_{6,7}$ и $\lambda_{8,9}$ являются двойными собственными значениями, что уменьшает количество дифференциальных уравнений, задающих соотношения перед и за волной, на одно, становится невозможным однозначно определить состояние за волной. Для сильных разрывов неконсервативная часть должна обрабатываться с использованием обобщенных соотношений Ранкина-Гюгонио, и в настоящее время нет единого мнения относительно выбора путей в фазовом пространстве. В этом случае возникает та же проблема, что и в случае, когда полная энергия имеет форму как $E = e + 0.5\mathbf{u}^2$. Тем не менее, линейная теория может быть использована для качественного анализа некоторых упрощенных ситуаций.

Решение системы (1.30) представляет волну Римана, или простую волну, если \mathbf{W} являются функциями одной величины $\theta = \theta(x, t)$. Здесь принимается $\theta = \xi = x/t$. Согласно уравнению (1.33), интегральные кривые в пространстве \mathbf{W} в каждой точке касаются собственного вектора [101]. Таким образом, для малых разрывов соответствующие свойства могут быть исследованы путем интегрирования правого собственного вектора. Рассмотрим следующую ситуацию, в которой отличается только начальная скорость v ,

$$\begin{aligned} v_L &= -\frac{\Delta v}{2}, \rho_L = \rho_0; u_L, w_L, \Pi_L, S_{ijL} = 0 \\ v_R &= \frac{\Delta v}{2}, \rho_R = \rho_0; u_R, w_R, \Pi_R, S_{ijR} = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Учитывая симметричность проблемы и \mathbf{r}_{1-5} в уравнении (4.14), на контактном разрыве выполняется следующее условие,

$$u_c = 0, v_c = 0, S_{12,c} = S_c. \quad (4.16)$$

Для медленной волны, распространяющейся влево, скорость v перед и за волной должна измениться с $-\Delta v/2$ до 0. Вдоль собственного вектора \mathbf{r}_8 ,

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{3S_{12}a}{\mu D}, \frac{dv}{d\xi} = \frac{a}{\mu}, \frac{dS_{12}}{d\xi} = 1, \quad (4.17)$$

т. е.,

$$dv = \frac{a}{\mu} dS_{12} \Rightarrow \int_{-\Delta v/2}^0 dv = \int_0^{S_c} \frac{a}{\mu} dS_{12} \Rightarrow S_c = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{\Delta v}{2}, \quad (4.18a)$$

$$du = -\frac{3aS_{12}}{\mu D} dS_{12} \Rightarrow \Delta u_L = \int_0^{S_c} -\frac{3aS_{12}}{\mu D} dS_{12} = -\frac{3a}{2\mu D} S_c^2. \quad (4.18b)$$

Следовательно,

$$\Delta u_L = -\frac{3\mu(\Delta v)^2}{8aD}. \quad (4.19)$$

Аналогично, для медленной волны, распространяющейся влево, скорость v должна уменьшаться от $+\Delta v/2$ до 0. Вдоль собственного вектора \mathbf{r}_6 ,

$$dv = -\frac{a}{\mu} dS_{12} \Rightarrow \int_{\Delta v/2}^0 dv = \int_0^{S_c} -\frac{a}{\mu} dS_{12} \Rightarrow S_c = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{\Delta v}{2} \quad (4.20a)$$

$$du = \frac{3aS_{12}}{\mu D} dS_{12} \Rightarrow \Delta u_R = \frac{3\mu(\Delta v)^2}{8aD}. \quad (4.20b)$$

Учитывая уравнение (4.16), за быстрыми волнами, движущимися влево и вправо, должны быть выполнены следующие условия,

$$u_{L1} = -\Delta u_L = +\frac{3\mu(\Delta v)^2}{8aD} \quad (4.21a)$$

$$u_{R1} = -\Delta u_R = -\frac{3\mu(\Delta v)^2}{8aD}. \quad (4.21b)$$

Для быстрой волны, распространяющейся влево, вдоль собственного вектора \mathbf{r}_{11} ,

$$du = -\frac{3b}{2\mu} d\xi. \quad (4.22)$$

Поскольку изменения состояния малы, предположим, что b приблизительно постоянна,

$$u_{L1} - 0 = \int_0^{\xi_{L1}} -\frac{3b}{2\mu} d\xi \Rightarrow \xi_{L1} = -\frac{2\mu}{3b} u_{L1} = -\frac{\mu^2(\Delta v)^2}{4abD}. \quad (4.23)$$

Аналогично, для быстрой волны, распространяющейся вправо, вдоль собственного вектора \mathbf{r}_{10} ,

$$du = \frac{3b}{2\mu} d\xi \quad (4.24a)$$

$$u_{R1} - 0 = \int_0^{\xi_{R1}} \frac{3b}{2\mu} d\xi \Rightarrow \xi_{R1} = -\frac{\mu^2(\Delta v)^2}{4abD}. \quad (4.24b)$$

Следовательно, вдоль собственного вектора \mathbf{r}_{10} и \mathbf{r}_{11} , за быстрыми волнами изменение плотности составляет,

$$d\rho = \frac{3\rho}{2\mu} d\xi \Rightarrow \ln \frac{\rho_{L1}}{\rho_0} = \frac{3}{2\mu} \xi_{L1} = -\frac{3\mu(\Delta v)^2}{8abD} = \ln \frac{\rho_{R1}}{\rho_0}. \quad (4.25)$$

Это означает, что плотность уменьшается. Вдоль собственного вектора \mathbf{r}_6 и \mathbf{r}_8 , за медленными волнами изменение плотности составляет,

$$d\rho = \frac{3\rho S_{12}}{\mu D} dS_{12} \Rightarrow \ln \frac{\rho_{L*}}{\rho_{L1}} = \frac{3}{2\mu D} S_c^2 = \frac{3\mu(\Delta v)^2}{8a^2D} = \ln \frac{\rho_{R*}}{\rho_{R1}}. \quad (4.26)$$

Следовательно, общее изменение плотности составляет,

$$\ln \frac{\rho_{L*}}{\rho_0} = -\frac{3\mu(\Delta v)^2}{8abD} + \frac{3\mu(\Delta v)^2}{8a^2D} = \frac{3\mu(\Delta v)^2}{8aD} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \ln \frac{\rho_{R*}}{\rho_0}. \quad (4.27)$$

Учитывая, что

$$b = \sqrt{c^2 + \frac{4\mu}{3\rho} + \frac{S_{11}}{\rho}} > a = \sqrt{\mu/\rho}, \quad (4.28)$$

плотность увеличивается по сравнению с начальным состоянием после перехода через быстрые и медленные волны,

$$\rho_{L*} = \rho_{R*} > \rho_0. \quad (4.29)$$

Далее для проверки вывода (4.29), использованы результаты численных экспериментов. Численные методы и формулы для соответствующих параметров идентичны тем, которые приведены в разделах 3.1, поскольку параметры после обновления временного шага и в зоне возмущения рассчитываются с использованием консервативной переменной E , а не давления p . При численном решении модели (4.11), после получения термодинамического давления Π из уравнения состояния, давление p может быть получено по уравнению (4.10). Оценивание скорости волны (3.2) требует соответствующих корректировок, поскольку также изменяются характерные значения продольной волны. Описание и постановка численных тестов точно такие же, как в разделе 3.3 и 3.4, а соответствующие параметры приведены в таблице 3.5.

На рисунке 4.1 рассмотрены случай, когда только скорость v имеет начальный разрыв, что согласуется с уравнением (4.29). По сравнению с рисунком 3.16, сдвиговые волны или медленные волны в трех моделях обладают совер-

шенно отличными, даже противоположными свойствами: они не изменяют продольные параметры, вызывают продольное растяжение или сжатие при сдвиге.

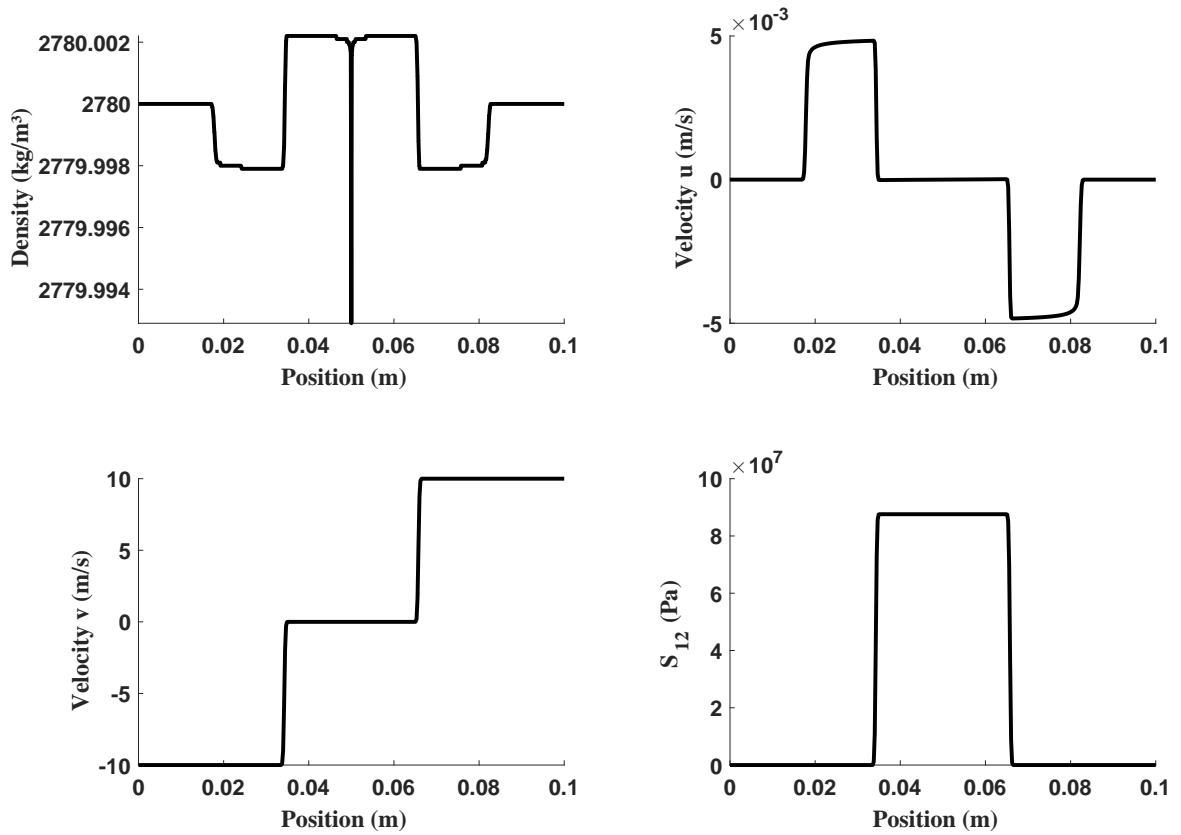


Рисунок 4.1 — Распределения параметров состояния термодинамически согласованной модели при 5×10^{-6} с в случае сдвига алюминия. Начальные условия отличаются только скоростью v , которая составляет -10 м/с в левой части и 10 м/с в правой (количество сеток — 40000).

Для случая продольного растяжения или удара результаты, полученные в модели (4.11), не отличаются значительно от результатов, полученных в модели (1.1) с упругим членом в полной энергии или без него, даже для больших начальных разрывов скорости u , как показано на рисунках 4.2 и 4.3.

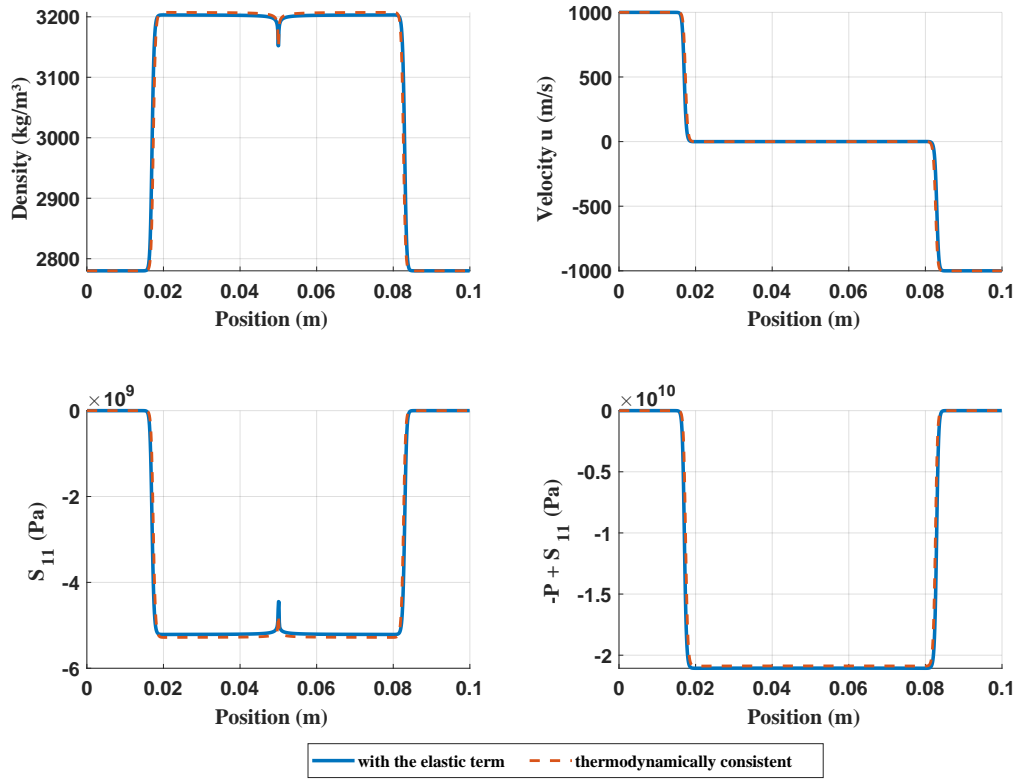


Рисунок 4.2 — Распределения параметров состояния термодинамически согласованной модели при 5×10^{-6} с в случае удара алюминия. Начальные условия отличаются только скоростью u , которая составляет 1000 м/с в левой части и -1000 м/с в правой (количество сеток — 1000).

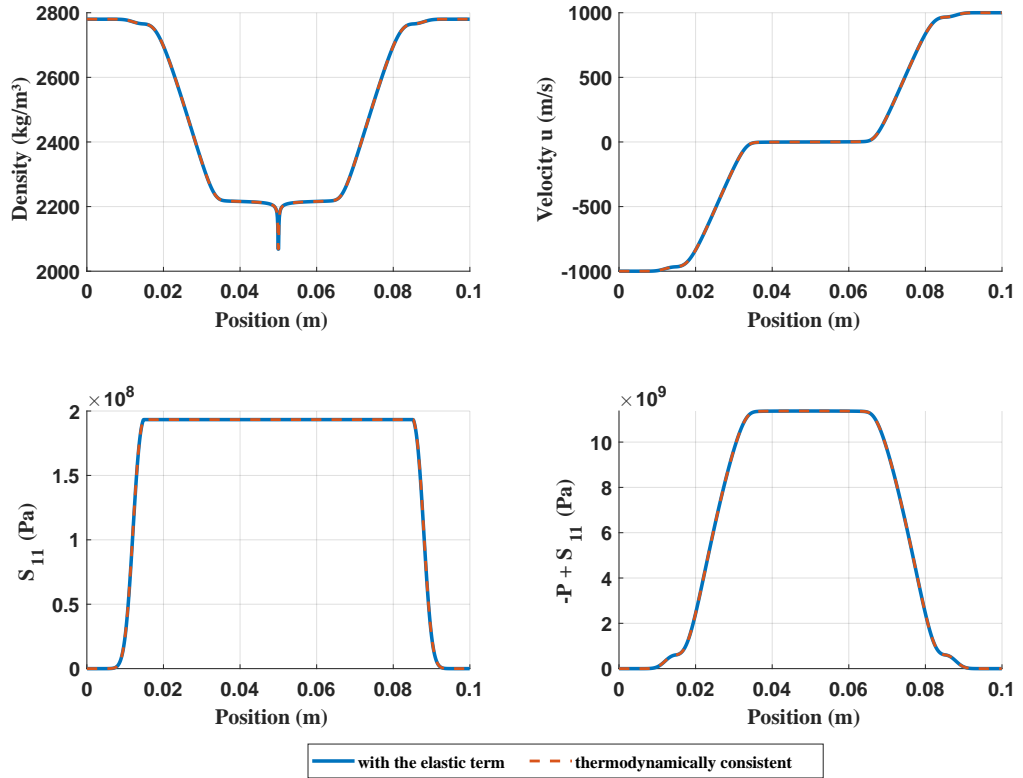


Рисунок 4.3 — Распределения параметров состояния термодинамически согласованной модели при 5×10^{-6} с в случае растяжения алюминия. Начальные условия отличаются только скоростью u , которая составляет -1000 м/с в левой части и 1000 м/с в правой (количество сеток — 1000).

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты

1. Проанализированы математические, механические и термодинамические характеристики широко известной гипоупругой модели Уилкинса. Данная модель может быть расширена до упругопластического течения, где пластическая часть может быть добавлена стандартным способом с использованием уравнения релаксации типа Максвелла для девиаторной части тензора напряжений. Для упрощения в литературе часто используется критерий Мизеса, который также применяется в данной работе. В исходной модели Уилкинса используется полная энергия в виде, применяемой в гидродинамике, а именно сумма внутренней энергии и кинетической энергии. Однако в последние годы в литературе рекомендуется включать энергию сдвиговой упругой деформации в полную энергию без дополнительных объяснений. В данной работе используется последняя формула для полной энергии. Утверждается, что включение упругого члена в полную энергию не только отражает отличительные характеристики твердых тел по сравнению с жидкостями, но и дает возможность сдвиговым волнам в данной модели существовать независимо с математической и механической точки зрения. В результате упрощается решение задачи Римана даже для неконсервативных моделей Уилкинса, что создает основу для последующей разработки численных методов.

2. На основе метода диффузной границы и усреднения по пространству создана неравновесная биматериальная модель упругого тела, которую можно рассматривать как аналог гидродинамической двухфазной модели Баера-Нунциато. Усреднение консервативной части уравнения Уилкинса осуществляется в соответствии со стандартными процедурами, тогда как усреднение неконсервативной части требует определенных предположений. Методом асимптотического анализа в предельном случае малых времен релаксации выведена равновесная односкоростная модель для течений гетерогенных упругих сред с разрешенными межфазными интерфейсами. В приближении одноосной деформации построенная модель совпадает с моделью, получаемой на основе принципа гидродинамической аналогии.

3. Разработан новый численный метод решения предложенной гипоупругой модели гетерогенных сред на фиксированной Эйлеровой сетке, основанный на консервативных вдоль пути в фазовом пространстве схемах (path-conservative schemes). Однако, в настоящее время не существует единой теории выбора

пути, и разные выборы пути могут приводить к различным результатам или даже к не сходящимся решениям. Обычно в качестве пути выбирается отрезок прямой линии, что приводит в случае гипопругой модели к нелинейной системе уравнений. В работе предложен специальный путь, который преобразует задачу в решение линейного матричного уравнения. Выбор этого пути имеет понятную физическую интерпретацию, его достоверность подтверждается сравнением результатов, полученных с использованием различных методов, таких как теоретические решения и другие численные решения. Используя предложенный численный метод, проанализированы гомогенные и гетерогенные упругопластические течения в случае одноосной деформации. В этом случае численные результаты для двух моделей — одной с упругим членом в полной энергии и другой без него оказались очень близки. Исследовано различие между двумя моделями в общем случае, включающем сдвиговую деформацию. В частности показано, что, в модели, включающей упругие члены может существовать изолированная линейно-вырожденная сдвиговая волна, тогда как в модели без упругих членов сдвиговые волны нелинейные и обязательно сопровождаются возникновением продольных волн. Проведены численные исследования вопросов, не обсуждавшихся ранее в литературе, а именно упругопластические течения в расширенной одномерной модели. Показано, что материалы могут оставаться устойчивыми к сдвиговой деформации даже на пластической стадии. Непрерывность скорости v на контактном разрыве зависит от размера начальной скорости разрыва.

4. Обе модели Уилкинса, широко используемые в настоящее время, имеют свои недостатки, главным из которых является термодинамическая несогласованность. Исходя из предположения, что внутренняя энергия является функцией плотности, энтропии и второго инварианта девиаторного напряжения, делается вывод, что термодинамическое давление и механическое давление не являются идентичными физическими параметрами. На основе этого предложена новая термодинамически согласованная модель, и проанализированы ее отличия от предыдущих моделей.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук:

1. Ван Л., Меньшов И.С., Серёжкин А.А. Численное и аналитическое исследование ударно-волновых процессов в упругопластических средах // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2023. — Т. 63, № 10. — С. 1660-1673. EDN: FOZVKE. Импакт-фактор 0,68 (РИНЦ) [0.8 п.л. / 0.875 п.л.].
2. Wang L., Menshov I. S., Serezhkin A. A. Numerical modelling of large elastoplastic multi-material deformations on eulerian grids // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2024. — vol. 39, № 3. — pp. 165-174. EDN: YEDXQB. Импакт-фактор 0,6 (JIF) [0.6 п.л. / 0.625 п.л.].
3. Wang L., Menshov I. S., Serezhkin A. A. One-dimensional model for multi-material hypoelastic medium // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2024. — vol. 16, № S2. — pp. S234-S249. EDN: PDGYJN. Импакт-фактор 0,306 (SJR) [0.9 п.л. / 1 п.л.].

Список литературы

- [1] Pickett A. K. et al. Failure Prediction for Advanced Crashworthiness of Transportation Vehicles // International Journal of Impact Engineering. — 2004. — vol. 30, № 7, — pp. 853–872.
- [2] Lukichev S. V., Kozyrev S. A., Buyanova T. V. Seismoexplosive Deformation and Failure of Rock // Journal of Mining Science. — 1994. — vol. 29, № 6, — pp. 488–492.
- [3] Коротков П. Ф. О математической модели постепенного разрушения горных пород и превращении их в пористые сыпучие среды // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 253, № 6, — С. 1357–1360.
- [4] Mühlstätter C., Hartmann M. Material Modelling of Cast Aluminium by Application of the Wilkins Damage Model // VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. Crete Island, Greece, 2016.
- [5] Wilkins M. L., Streit R. D., Reaugh J. E. Cumulative-Strain-Damage Model of Ductile Fracture: Simulation and Prediction of Engineering Fracture Tests. UCRL-53058. Lawrence Livermore National Lab., CA (USA); Science Applications, Inc., San Leandro, CA (USA), 1980.
- [6] Hallquist J. O. LS-DYNA Theory Manual. Livermore software Technology corporation, 2006.
- [7] ANSYS Autodyn User's Manual. ANSYS, Inc., 2025.
- [8] Favrie N., Gavriluk S. L. Diffuse Interface Model for Compressible Fluid – Compressible Elastic–Plastic Solid Interaction // Journal of Computational Physics. — 2012. — vol. 231, № 7, — pp. 2695–2723.
- [9] Favrie N., Gavriluk S. L., Saurel R. Solid–Fluid Diffuse Interface Model in Cases of Extreme Deformations // Journal of Computational Physics. — 2009. — vol. 228, № 16, — pp. 6037–6077.
- [10] Ndanou S., Favrie N., Gavriluk S. Multi-Solid and Multi-Fluid Diffuse Interface Model: Applications to Dynamic Fracture and Fragmentation // Journal of Computational Physics. — 2015. — vol. 295, — pp. 523–555.
- [11] Jones R. M. Deformation Theory of Plasticity. Bull Ridge Corporation, 2009. 641 pp.

- [12] Khan A. S., Huang S. Continuum Theory of Plasticity. John Wiley & Sons, 1995. 452 pp.
- [13] Zyczkowski M. Combined Loadings in the Theory of Plasticity. Springer Science & Business Media, 1981. 750 pp.
- [14] Truesdell C. Hypo-Elasticity // Journal of Rational Mechanics and Analysis. — 1955. — vol. 4, — pp. 83–133.
- [15] Truesdell C. The Simplest Rate Theory of Pure Elasticity // Communications on pure and applied mathematics. — 1955. — vol. 8, № 1, — pp. 123–132.
- [16] Truesdell C. Hypo-elastic Shear // Journal of Applied Physics. — 1956. — vol. 27, № 5, — pp. 441–447.
- [17] Truesdell C. Remarks on Hypo-Elasticity // Journal of Research of the National Bureau of Standards B. — 1963. — vol. 67, — pp. 141–143.
- [18] Wilkins M. L. Calculation of Elastic-Plastic Flow. University of California Lawrence Radiation Laboratory, 1963. 70 pp.
- [19] Wilkins M. L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Springer Science & Business Media, 2013. 260 pp.
- [20] Margolin L. G. A Strain Space Framework for Numerical Hyperplasticity // Mathematics and Computers in Simulation. — 2016. Special Issue: Nonlinear Waves: Computation and Theory-IX — vol. 127, — pp. 178–188.
- [21] Trangenstein J. A., Colella P. A Higher-order Godunov Method for Modeling Finite Deformation in Elastic-plastic Solids // Communications on Pure and Applied Mathematics. — vol. 44, № 1, — pp. 41–100.
- [22] Maire P.-H. et al. A Nominally Second-Order Cell-Centered Lagrangian Scheme for Simulating Elastic–Plastic Flows on Two-Dimensional Unstructured Grids // Journal of Computational Physics. — 2013. — vol. 235, — pp. 626–665.
- [23] Sambasivan S. K., Shashkov M. J., Burton D. E. A Cell-Centered Lagrangian Finite Volume Approach for Computing Elasto-Plastic Response of Solids in Cylindrical Axisymmetric Geometries // Journal of Computational Physics. — 2013. — vol. 237, — pp. 251–288.
- [24] Burton D. E. et al. A Cell-Centered Lagrangian Godunov-like Method for Solid Dynamics // Computers & Fluids. — 2013. Numerical Methods for Highly Compressible Multi-Material Flow Problems — vol. 83, — pp. 33–47.
- [25] Dobrev V. A., Kolev T. V., Rieben R. N. High Order Curvilinear Finite Elements for Elastic–Plastic Lagrangian Dynamics // Journal of Computational Physics. — 2014. Physics-Compatible Numerical Methods — vol. 257, — pp. 1062–1080.

- [26] Korobeynikov S. N. Analysis of Hooke-like Isotropic Hypoelasticity Models in View of Applications in FE Formulations // *Archive of Applied Mechanics*. — 2020. — vol. 90, № 2, — pp. 313–338.
- [27] Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Elastoplasticity beyond Small Deformations // *Acta Mechanica*. — 2006. — vol. 182, № 1, — pp. 31–111.
- [28] Simo J. C., Pister K. S. Remarks on Rate Constitutive Equations for Finite Deformation Problems: Computational Implications // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1984. — vol. 46, № 2, — pp. 201–215.
- [29] Naghdi P. M. A Critical Review of the State of Finite Plasticity // *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP*. — 1990. — vol. 41, № 3, — pp. 315–394.
- [30] Bruhns O. The Prandtl-Reuss Equations Revisited // *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics: Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik*. — 2014. — vol. 94, — pp. 187–202.
- [31] Hackett R. M. *Hyperelasticity Primer*. Springer, 2018. 192 pp.
- [32] Gurtin M. E., Fried E., Anand L. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, 2010. 721 pp.
- [33] Simo J. C., Hughes T. J. R. *Computational Inelasticity*. Springer Science & Business Media, 2006. 405 pp.
- [34] Godunov S. K., Romenskii E. I. *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws*. Springer Science & Business Media, 2013. 263 pp.
- [35] Peshkov I., Romenski E. A Hyperbolic Model for Viscous Newtonian Flows // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. — 2016. — vol. 28, № 1, — pp. 85–104.
- [36] Bruce Stewart H., Wendroff B. Two-Phase Flow: Models and Methods // *Journal of Computational Physics*. — 1984. — vol. 56, № 3, — pp. 363–409.
- [37] Pai S.-i. *Two-Phase Flows*. Springer-Verlag, 2013. 373 pp.
- [38] Balachandar S. *Fundamentals of Dispersed Multiphase Flows*. Cambridge University Press, 2024. 675 pp.
- [39] Anderson D. M., McFadden G. B., Wheeler A. A. Diffuse-Interface Methods in Fluid Mechanics // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 1998. № Volume 30, 1998. — vol. 30, — pp. 139–165.
- [40] Yue P. et al. A Diffuse-Interface Method for Simulating Two-Phase Flows of Complex Fluids // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2004. — vol. 515, — pp. 293–317.

- [41] Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries // Journal of Computational Physics. — 1981. — vol. 39, № 1, — pp. 201–225.
- [42] Osher S., Sethian J. A. Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-jacobi Formulations // Journal of Computational Physics. — 1988. — vol. 79, № 1, — pp. 12–49.
- [43] Perigaud G., Saurel R. A Compressible Flow Model with Capillary Effects // Journal of Computational Physics. — 2005. — vol. 209, № 1, — pp. 139–178.
- [44] Saurel R., Petitpas F., Abgrall R. Modelling Phase Transition in Metastable Liquids: Application to Cavitating and Flashing Flows // Journal of Fluid Mechanics. — 2008. — vol. 607, — pp. 313–350.
- [45] Strang G. On the Construction and Comparison of Difference Schemes // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1968. — vol. 5, № 3, — pp. 506–517.
- [46] Kozlov R., Kværnø A., Owren B. The Behaviour of the Local Error in Splitting Methods Applied to Stiff Problems // Journal of Computational Physics. — 2004. — vol. 195, № 2, — pp. 576–593.
- [47] Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // Journal of Computational Physics. — 1999. — vol. 150, № 2, — pp. 425–467.
- [48] Maso G., Floch P. L., Murat F. Definition and Weak Stability of Non-conservative Products // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1995. — vol. 74, — pp. 483–548.
- [49] Parés C. Numerical Methods for Nonconservative Hyperbolic Systems: A Theoretical Framework // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2006. — vol. 44, № 1, — pp. 300–321.
- [50] Kulikovskii A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Y. Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems. CRC Press, 2000. 564 pp.
- [51] Gavriluk S. L., Favrie N., Saurel R. Modelling Wave Dynamics of Compressible Elastic Materials // Journal of Computational Physics. — 2008. — vol. 227, № 5, — pp. 2941–2969.
- [52] Landau L. D. et al. Theory of Elasticity: Volume 7. Elsevier, 1986. 200 pp.
- [53] Chaves E. W. V. Notes on Continuum Mechanics. Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013.
- [54] Lai W. M., Rubin D., Krempl E. Introduction to Continuum Mechanics. Butterworth-Heinemann, 2009. 549 pp.

- [55] Barton P. T. et al. Exact and Approximate Solutions of Riemann Problems in Non-Linear Elasticity // *Journal of Computational Physics*. — 2009. — vol. 228, № 18, — pp. 7046–7068.
- [56] Anandarajah A. *Computational Methods in Elasticity and Plasticity*. New York, NY: Springer, 2010.
- [57] Jeffrey A., Engelbrecht J., eds. *Nonlinear Waves in Solids*. Vienna: Springer, 1994.
- [58] Drumheller D. S. *Introduction to Wave Propagation in Nonlinear Fluids and Solids*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [59] Wang L. *Foundations of Stress Waves*. Elsevier, 2011. 549 pp.
- [60] Peshkov I. et al. Theoretical and Numerical Comparison of Hyperelastic and Hypoelastic Formulations for Eulerian Non-Linear Elastoplasticity // *Journal of Computational Physics*. — 2019. — vol. 387, — pp. 481–521.
- [61] Castro M., Gallardo J. M., Parés C. High Order Finite Volume Schemes Based on Reconstruction of States for Solving Hyperbolic Systems with Nonconservative Products. Applications to Shallow-Water Systems // *Mathematics of Computation*. — 2006. — vol. 75, № 255, — pp. 1103–1134.
- [62] Dumbser M., Balsara D. S. A New Efficient Formulation of the HLLEM Riemann Solver for General Conservative and Non-Conservative Hyperbolic Systems // *Journal of Computational Physics*. — 2016. — vol. 304, — pp. 275–319.
- [63] Despres B. A Geometrical Approach to Nonconservative Shocks and Elastoplastic Shocks // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. — 2007. — vol. 186, № 2, — pp. 275–308.
- [64] Bazant Z., Beghini A. Which Formulation Allows Using a Constant Shear Modulus for Small-Strain Buckling of Soft-Core Sandwich Structures? // *Journal of Applied Mechanics*. — 2005. — vol. 72, № 5, — pp. 785–787.
- [65] Bažant Z. P., Gattu M., Vorel J. Work Conjugacy Error in Commercial Finite-Element Codes: Its Magnitude and How to Compensate for It // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2012. — vol. 468, № 2146, — pp. 3047–3058.
- [66] Ji W., Waas A., Bazant Z. Errors Caused by Non-Work-Conjugate Stress and Strain Measures and Necessary Corrections in Finite Element Programs // *Journal of Applied Mechanics-transactions of the Asme - J APPL MECH*. — 2010. — vol. 77.
- [67] Kim H.-G. A Comparative Study of Hyperelastic and Hypoelastic Material Models with Constant Elastic Moduli for Large Deformation Problems // *Acta Mechanica*. — 2016. — vol. 227, № 5, — pp. 1351–1362.

- [68] Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. 564 pp.
- [69] Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // Journal of Computational Physics. — 1997. — vol. 135, № 2, — pp. 260–278.
- [70] Menshov I. S., Mischenko A. V., Serejkin A. A. Numerical Modeling of Elastoplastic Flows by the Godunov Method on Moving Eulerian Grids // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2014. — vol. 6, № 2, — pp. 127–141.
- [71] Gao S., Liu T. 1D Exact Elastic-Perfectly Plastic Solid Riemann Solver and Its Multi-Material Application // Advances in Applied Mathematics and Mechanics. — 2017. — vol. 9, № 3, — pp. 621–650.
- [72] Li X., Zhai J., Shen Z. The Complete Exact Riemann Solution for One-Dimensional Elastic-Perfectly Plastic Riemann Problem // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2022. — vol. 390, p. 114346.
- [73] Drew D. A., Passman S. L. Theory of Multicomponent Fluids. Applied Mathematical Sciences, vol.35. New York, NY: Springer, 1999. 310 pp.
- [74] Baer M. R., Nunziato J. W. A Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDt) in Reactive Granular Materials // International Journal of Multiphase Flow. — 1986. — vol. 12, № 6, — pp. 861–889.
- [75] Dumbser M. et al. FORCE Schemes on Unstructured Meshes II: Non-Conservative Hyperbolic Systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2010. — vol. 199, № 9, — pp. 625–647.
- [76] Dumbser M. A Simple Two-Phase Method for the Simulation of Complex Free Surface Flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2011. — vol. 200, № 9, — pp. 1204–1219.
- [77] Dumbser M., Hidalgo A., Zanotti O. High Order Space-Time Adaptive ADER-WENO Finite Volume Schemes for Non-Conservative Hyperbolic Systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2014. — vol. 268, — pp. 359–387.
- [78] Abgrall R. How to Prevent Pressure Oscillations in Multicomponent Flow Calculations: A Quasi Conservative Approach // Journal of Computational Physics. — 1996. — vol. 125, № 1, — pp. 150–160.
- [79] Powers J. M., Stewart D. S., Krier H. Theory of Two-Phase Detonation—Part II: Structure // Combustion and Flame. — 1990. — vol. 80, № 3, — pp. 280–303.
- [80] Schwendeman D. W., Wahle C. W., Kapila A. K. The Riemann Problem and a High-Resolution Godunov Method for a Model of Compressible Two-

- Phase Flow // Journal of Computational Physics. — 2006. — vol. 212, № 2, — pp. 490–526.
- [81] Tokareva S. A., Toro E. F. HLLC-type Riemann Solver for the Baer–Nunziato Equations of Compressible Two-Phase Flow // Journal of Computational Physics. — 2010. — vol. 229, № 10, — pp. 3573–3604.
 - [82] Kapila A. K. et al. Two-Phase Modeling of Deflagration-to-Detonation Transition in Granular Materials: Reduced Equations // Physics of Fluids. — 2001. — vol. 13, № 10, — pp. 3002–3024.
 - [83] Maltsev V., Skote M., Tsoutsanis P. High-Order Methods for Diffuse-Interface Models in Compressible Multi-Medium Flows: A Review // Physics of Fluids. — 2022. — vol. 34, № 2, p. 21301.
 - [84] Murrone A., Guillard H. A Five Equation Reduced Model for Compressible Two Phase Flow Problems // Journal of Computational Physics. — 2005. — vol. 202, № 2, — pp. 664–698.
 - [85] Murray J. D. Asymptotic Analysis. Под ред. Marsden J. E., Sirovich L., John F. — Т. 48. Applied Mathematical Sciences. New York, NY: Springer, 1984.
 - [86] Zhang C. et al. Mathematical Modeling of Transport Phenomena in Compressible Multicomponent Flows // Journal of Computational Physics. — 2023. — vol. 472, p. 111628.
 - [87] Чао Ч. Математическое моделирование течения гетерогенной многоматериальной среды. Москва: МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019.
 - [88] Castro M. J. et al. Why Many Theories of Shock Waves Are Necessary. Convergence Error in Formally Path-Consistent Schemes // Journal of Computational Physics. — 2008. — vol. 227, № 17, — pp. 8107–8129.
 - [89] Harten A., Lax P. D., Leer B. van. On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM Review. — 1983. — vol. 25, № 1, — pp. 35–61.
 - [90] Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-riemann Solver // Shock Waves. — 1994. — vol. 4, № 1, — pp. 25–34.
 - [91] Toro E. F. The HLLC Riemann Solver // Shock Waves. — 2019. — vol. 29, № 8, — pp. 1065–1082.
 - [92] Serezhkin A. HLLEPJ and HLLCEPJ Riemann Solvers for the Wilkins Model of Elastoplasticity // Journal of Computational Physics. — 2023. — vol. 492, p. 112419.
 - [93] Einfeldt B. On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1988. — vol. 25, № 2, — pp. 294–318.

- [94] Liu L., Cheng J.-b., Shen Y. An Exact Riemann Solver for One- Dimensional Multimaterial Elastic- Plastic Flows with Mie- Gr \tilde{A} $\frac{1}{4}$ neisen Equation of State without Vacuum // — 2021.
- [95] Saurel R., Abgrall R. A Simple Method for Compressible Multifluid Flows // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1999. — vol. 21, № 3, — pp. 1115–1145.
- [96] Boscheri W., Dumbser M., Loubère R. Cell Centered Direct Arbitrary- Lagrangian-Eulerian ADER-WENO Finite Volume Schemes for Nonlinear Hyperelasticity // Computers & Fluids. — 2016. — vol. 134–135, — pp. 111–129.
- [97] Glimm J. et al. Three-Dimensional Front Tracking // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1998. — vol. 19, № 3, — pp. 703–727.
- [98] Eringen A. C. Nonlinear Theory of Continuous Media. McGraw-Hill, 1962. 506 pp.
- [99] Dienes J. K. On the Analysis of Rotation and Stress Rate in Deforming Bodies // Acta Mechanica. — 1979. — vol. 32, № 4, — pp. 217–232.
- [100] Favrie N., Gavriluk S. A Well-Posed Hypoelastic Model Derived from a Hyperelastic One. *Dynamic Damage and Fragmentation*. 2019, — pp. 417–427.
- [101] Куликовский А., Свешникова Е. Нелинейные волны в упругих средах. Моск. лицей, 1998. 412 с.