

**ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
Кандидата физико-математических наук
Никулина Михаила Александровича
на тему: «Некоторые свойства квантовых и классических
бильярдов на софокусных столах»
по специальности 1.1.3 Геометрия и топология**

Диссертационная работа Михаила Александровича Никулина естественно вкладывается в большую программу исследований вполне интегрируемых систем, проводимую на протяжении уже многих лет школой А.Т. Фоменко. Однако на фоне замечательных результатов, полученных самим Анатолием Тимофеевичем и его многочисленными учениками, задачи, решаемые в настоящей диссертации, выглядят оригинальным примером приложения основных идей этой программы как к классическому случаю, так и к квантовому. Прежде всего скажем о квантовом случае: аналогом плоского бильярда в ограничиваемой некоторой кривой области является задача на собственные значения оператора Шредингера с потенциалом специального вида. А именно, потенциал считается равным нулю в самой ограниченной области и бесконечности вне этой области. Под интегрируемостью понимается вычисления точных или приближенных собственных значений, что естественно с точки зрения теории дифференциальных уравнений. Известные результаты для круговой области (решения даются функциями Бесселя) и области, ограниченной эллипсом (функции Матье) могут быть естественно продолжены на часто встречающийся в работах школы Фоменко случай области, ограниченной дугами софокусных квадрик, или софокусные столы. В диссертации получены результаты для нескольких случаев областей с комбинированной границей: сначала для эллипсного кольца (области, ограничиваемой парой софокусных эллипсов), затем для эллиптического сектора, и наконец рассматриваются два самых сложных случая — симметрический A_δ и несимметрический B_δ . Автором исследовано асимптотическое поведение уровней энергии свободной квантовой частицы в этих двух областях, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса,

которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора. Полученные аналитические выражения справедливы при стремлении фокального расстояния к нулю с точностью до второго порядка включительно, при этом коэффициент при нулевом порядке совпадает с энергетическим спектром свободной частицы в круговом секторе. Замечательно, что предложенная в диссертации автором техника может быть продолжена на еще более высокие порядки.

Классическая задача, решаемая в диссертации, также весьма оригинальна: рассматривается классический бильярд на софокусных столах, разделенных софокусными квадрами на области, которые считаются заполненными изотропными средами с различными показателями "оптической плотности". Обычно в геометрической оптике законом преломления при переходе из среды в среду выступает закон синусов для углов падения и преломления. В диссертации рассматривается другой закон преломления, называемый закон косинусов: в формулу для углов вместо синусов включаются косинусы. Оказывается такой бильярд является интегрируемым: в диссертации приводится явная формула дополнительного интеграла. Замечательным является то, что в зависимости от параметров "оптических плотностей" изотропных сред и параметров разделяющих их квадрик, дополнительный интеграл может принимать значения не только в вещественной прямой, но и, к примеру, в окружности. В общем случае в каждой точке пересечения софокусных квадрак дополнительный интеграл имеет по одной точке ветвления.

Кроме доказательства интегрируемости такой системы, автор решает стандартную для исследований подобных бильярдов задачу и описывает слоения изоэнергетического многообразия на поверхности постоянного уровня дополнительного интеграла для двух таких систем: в первом случае дополнительный интеграл не имеет ветвления, во втором примере имеет одну точку ветвления. Автором было получено описание поверхностей

регулярного значения дополнительного интеграла, а также их бифуркации в обоих этих случаях.

Диссертация объемом 137 страниц состоит из Введения, пяти глав, Заключение и списка литературы, в котором отдельным разделом выделен список публикаций автора диссертационной работы.

Во **Введении** формулируется цель работы, кратко излагаются результаты и содержание. Далее следуют пять глав, первые две из которых посвящены квантовой части диссертации, а затем последние три — классической, исследующей новую динамическую систему, основанную на косинусном законе predominance траекторий.

В **Первой** главе приведены сведения, необходимые для исследования асимптотики уровней энергии оператора Шрёдингера на софокусных столах при близком к нулю расстоянии между фокусами. Рассматривается уравнение свободной квантовой частицы с потенциалом бесконечной ямы. При этом устанавливается соответствие между решениями стационарного уравнения Шрёдингера и собственными функциями и оператора Лапласа с условием Дирихле на границе области © С №2. Один из разделов первой главы посвящен задаче об асимптотике уровня энергии свободной квантовой частицы в эллипсе с точки зрения теории специальных функций. Эта задача призвана сформировать базовый инструментарий, который получит дальнейшее развитие и применение при рассмотрении задач из следующей главы.

Вторая глава начинается с вычислений асимптотик собственных значений для эллиптического кольца. Далее представлены рассмотрения поведения квантовой свободной частицы в областях двух типов: симметричной А; и несимметричной В,. Для каждого случая находятся собственные функции и собственные значения, в Теоремах 5 и 6. В завершение главы приведена постоянная наблюдаемая величина для квантовой свободной частицы на софокусных столах.

Начиная с Третьей главы мы возвращаемся к классическому случаю: приводятся основные понятия теории интегрируемого математического бильярда, а затем представлена формулировка косинусного закона преломления. Для бильярдов на софокусных столах, подчиняющихся такому косинусному закону преломления, явно приводится выражение для функции E и затем в Теореме 9 доказана инвариантность этой функции вдоль траекторий движения системы.

Последние главы — **Четвертая** и **Пятая** — посвящены описаниям слоений изоэнергетических многообразий на поверхностях уровней первого интеграла & для подчиняющейся косинусному закону бильярдной системы в двух типах областей, соответствующих случая без ветвлений и с единственной точкой ветвления.

Диссертация М.А. Никулина является научным исследованием высокого уровня, вызывающим интерес у специалистов как в области динамических систем и математической физики, так и в дифференциальной топологии и геометрии симплектических многообразий. При этом поставленные задачи были полностью решены.

Необходимо отметить, что рецензируемая диссертационная работа является пример сбалансированного исследования, где четкие теоретические методы и идеи дополняются сложными конкретными вычислениями, что показывает как высокую теоретическую подготовку диссертанта, так и его умение производить технически сложные выкладки.

Все результаты диссертации являются новыми, оригинальными, своевременно опубликованными в 4 статьях в математических журналах, индексируемых WoS и Scopus или входящих в список научных журналов, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ, а также представленными автором на различных конференциях.

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Сам текст диссертации очень хорошо продуман, что позволило на небольшом объеме достаточно подробно и выпукло показать геометрию и

технику вычислений, а также изложить выполненные автором исследования по актуальной и важной теме. Текст достаточно хорошо проработан, и мной было замечено небольшое число опечаток, которые не мешают чтению.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Никулин Михаил Александрович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор РАН,
начальник сектора ЛТФ ОИЯИ
28 апреля 2026 г.

Н.А. Тюрин

ntyurin@theor.jinr.ru; ; +7(496)2163005
Лаборатория Теоретической Физики им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенный Институт Ядерных Исследований (Дубна)
141980, Жолио - Кюри, 6, г. Дубна, Московская область

Подпись Н.А. Тюрина удостоверяю
Ученый секретарь ЛТФ ОИЯИ

А.В. Андреев