

Отзыв
официального оппонента на диссертацию
Жилиной Светланы Александровны
на тему «Комбинаторные свойства бинарных отношений
на вещественных алгебрах Кэли-Диксона»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.5 «Математическая логика,
алгебра, теория чисел и дискретная математика»
(01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»)

Диссертационная работа С. А. Жилиной посвящена исследованию графов отношений вещественных алгебр Кэли-Диксона. Изучение графов бинарных отношений на кольцах и алгебрах берёт своё начало в работе Бека 1988 года, посвящённой графам делителей нуля коммутативных колец. Они были вдохновлены графами Кэли для групп, первое известное упоминание которых датируется 1878 годом. За последние три десятилетия было опубликовано множество работ разных авторов, посвящённых графам отношений на различных классах колец и алгебр, ассоциативных и неассоциативных. Важным классом неассоциативных алгебр являются алгебры Кэли-Диксона, естественным образом возникшие в начале XX века при изучении композиционных алгебр. В настоящее время вещественные алгебры Кэли-Диксона, особенно, размерностей 4 и 8, активно используются в физике элементарных частиц, а также в теории йордановых алгебр и алгебр Ли.

В настоящей работе рассматриваются графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля вещественных алгебр Кэли-Диксона. Усилены и обобщены некоторые известные результаты о свойствах делителей нуля, компоненты которых удовлетворяют дополнительным ограничениям на норму и альтернативность, и изучены структуры, образованные такими элементами в графах ортогональности и делителей нуля. Описаны графы отношений вещественных алгебр Кэли-Диксона малых размерностей: контроктонионов, контрседенионов и седенионов. Получен индуктивный алгоритм построения графов ортогональности вещественных алгебр Кэли-Диксона на парах базисных элементов, и решена проблема изоморфизма для этих графов.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 58 источников. Общий объем диссертации составляет 135 страниц.

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится небольшой исторический обзор исследований графов отношений и алгебр Кэли-Диксона,

описывается структура работы и формулируются основные результаты. Глава 1 содержит все основные понятия, а также некоторые известные результаты теории графов отношений и теории неассоциативных алгебр.

Глава 2 посвящена изучению делителей нуля в вещественных алгебрах Кэли-Диксона, компоненты которых имеют ненулевую норму и альтернируют между собой. Основным результатом этой главы является теорема, согласно которой такие элементы образуют шестиугольные структуры в графе делителей нуля. Кроме того, в главе 2 получены признаки того, что два или три элемента образуют ассоциативную или альтернативную подалгебру в алгебре Кэли-Диксона, а также описан явный вид централизаторов, аннуляторов и ортогонализаторов для дважды альтернативных элементов.

В первой половине главы 3 показано, что, в случае алгебр главной последовательности, делители нуля, удовлетворяющие дополнительным условиям на норму и альтернативность, образуют двойные шестиугольники в графе ортогональности. Вторая половина главы 3 и глава 4 посвящены изучению графов коммутативности, ортогональности и делителей нуля для вещественных алгебр Кэли-Диксона малых размерностей: контроктонионов, контрседенионов и седенионов.

В главе 5 рассматриваются делители нуля, являющиеся парами базисных элементов, и устанавливается критерий их ортогональности. Основным результатом этой главы является решение проблемы изоморфизма для графов ортогональности на парах базисных элементов: показано, что две вещественные алгебры Кэли-Диксона размерности не меньше 16 изоморфны, если и только если изоморфны их графы ортогональности.

Все результаты диссертации являются новыми и снабжены строгими доказательствами. Текст диссертации тщательно оформлен, грамотен и выдержан в научном стиле. Доказательства многочисленных предложений, лемм и теорем используют различные алгебраические и комбинаторные методы и, зачастую, нетривиальны и интересны сами по себе.

Отметим отдельные недостатки работы:

1. Некоторые термины и обозначения отличаются от общепринятых. Так, для линейной оболочки векторов лучше использовать обозначение span , а не Lin , сопряжение на алгебрах Кэли-Диксона лучше называть инволюцией, а гибкие алгебры — эластичными.

2. Доказательства некоторых вспомогательных утверждений, в частности, следствия 2.1.10 и леммы 3.1.4, можно было бы упростить. В подразделах 4.5.2 и 4.5.4 большинство утверждений являются излишне техническими, однако не вполне ясно, есть ли у них более идейные доказательства.

3. В тексте встречаются повторы, которых можно было бы избежать. Например, формулировка леммы 1.3.13 на стр. 26 частично повторяется также на страницах 11, 62 и 69, а граф ортогональности седенионов на парах базисных элементов изображён дважды: рисунок 3.3 на стр. 58 и рисунок 5.10 на стр. 109.

4. Присутствует небольшое количество опечаток незначительного характера, стилистические погрешности отсутствуют.

Приведенные выше замечания не снижают научный уровень и значимость диссертационной работы. Она может быть интересна для специалистов в области алгебры, теории графов и комбинаторики.

Диссертация С. А. Жилиной представляет собой законченную и цельную научно-исследовательскую работу в актуальном направлении современной алгебры. Все основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах в журналах, включенных в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК и индексируемых в реферативных базах данных Scopus и/или Web of Science, что подтверждает их высокий уровень и достоверность. Они также прошли апробацию на 8 научных конференциях. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы.

Считаю, что диссертационная работа С. А. Жилиной «Комбинаторные свойства бинарных отношений на вещественных алгебрах Кэли-Диксона» соответствует критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», и оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»).

Доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры высшей
математики ФГБОУ ВО «Национальный
исследовательский университет «МЭИ»



А. А. Туганбаев

Подпись Аскара Акановича Туганбаева подтверждаю:

