

**ОТЗЫВ научного руководителя
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Пустовойтова Сергея Евгеньевича
на тему «Топология и классификация слоений Лиувилля интегрируемых
возмущений классических и топологических билиардов»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология**

В последнее время теория интегрируемых билиардов привлекает интерес научного сообщества. Математическим билиардом называется динамическая система, описывающая движение точки внутри области на плоскости, ограниченной некоторой кусочно-регулярной кривой, все углы излома которой равны половине развернутого угла. Движение билиардной частицы происходит без потери скорости по отрезкам прямых, а отражения на границы предполагаются абсолютно упругими (при этом падающий и отраженный углы совпадают). Особый интерес представляют билиарды, форма которых обеспечивает сохранение вдоль всей траектории некоторой функции, независимой от энергии системы. К таким билиардам, относятся билиарды в прямоугольнике, круге, области, ограниченной дугами софокусных квадрик. Знаменитая гипотеза Дж.Д.Биркгофа гласит, что если интегрируемый билиард ограничен кривой без изломов, то такая кривая есть эллипс. Данная гипотеза в различных вариантах формулировок была недавно доказана многими российскими математиками совместно с зарубежными коллегами (С.В.Болотин, А.А. Глуцук, М. Бялый, А.Ю. Миронов, В.Ю. Калошин, А. Соррентино). Справедливость этой гипотезы (являющейся теоремой в некоторых естественных предположениях на дополнительный интеграл) означает, что класс классических интегрируемых билиардов довольно узок. Однако, у задачи такого билиарда есть несколько интересных обобщений. Во-первых, пользуясь симметричностью области, можно добавить к системе дополнительные интегрируемые возмущения, к примеру, наличие потенциала и магнитного поля. А во-вторых, можно рассмотреть билиард на клеточном комплексе (так называемую билиардную книжку), двумерные клетки которого принадлежат интегрируемым билиардам из одного интегрируемого класса. Диссертация С.Е.Пустовойтова посвящена указанным обобщениям.

Методы исследования интегрируемых билиардов, применяемые в работе, были разработаны А.Т.Фоменко, Х.Цишангом, С.В.Матвеевым, А.В.Болсиновым для

изучения топологии лиувиллевых слоений интегрируемых гамильтоновых систем. Данный топологический подход позволяет описать качественное поведение замыканий решений (нерезонансных лиувиллевых торов), их бифуркации, устойчивость и неустойчивость критических решений. В частности, он предполагает вычисление меченой молекулы — инварианта Фоменко-Цишанга — кодирующего слоение Лиувилля неособой изоэнергетической поверхности. Данный инвариант является графом Рибба, снабжённым информацией о топологической структуре особых слоев и типах склеек их друг с другом.

Главной ценностью данной работы является разработка метода исследования обобщений интегрируемых билиардов на основе уже известных методов вышеуказанной теории Фоменко-Цишанга. Исследуются два основных обобщения дополнительными силами: добавление потенциала и введение магнитного поля. Для билиардов с потенциалами были получены следующие результаты. Во-первых, были изучены билиарды с потенциалом Гука (данное исследование обобщает работу И.Ф.Кобцева, изучавшего билиард в эллипсе), ограниченные дугами софокусных квадрик. Во-вторых, были исследованы решения уравнения В.В.Козлова, позволяющих получить целый класс полиномиальных потенциалов, сохраняющих интегрируемость классического эллиптического билиарда. Для потенциала четвертой степени (принадлежащему к данному классу) был исследован билиард в эллипсе. А именно, С.Е.Пустовойтовым были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга на произвольном неособом уровне энергии H , построены бифуркационные диаграммы и описана топологию неособого изоэнергетического многообразия. Данное исследование позволило промоделировать с помощью интегрируемых билиардов целый ряд особенностей слоений, содержащих невырожденные точки ранга 0 или вырожденные орбиты. При этом указанные особенности ранга ноль отображения момента имеют структуру прямого или почти прямого произведения минимаксных и седловых особенностей. Для моделирования фокусных особенностей в работе С.Е.Пустовойтовым была изучена билиардная книжка, склеенная из нескольких круговых билиардов, снабженных потенциалом Гука. В рамках исследования таких билиардных книжек с потенциалом, в частности, были вычислены бифуркационные

диаграммы и найдена матрица монодромии вокруг изолированной точки ранга ноль (прообраз которой есть особенность типа фокус-фокус).

Также в работе было полностью завершено исследование топологии слоения Лиувилля интегрируемых плоских бильярдов в постоянном магнитном поле, а также слоение топологических магнитных бильярдов (т.е. бильярдов на многообразиях, склеенных из дисков и колец, ограниченных concentрическими окружностями). А именно, удалось полностью вычислить все инварианты Фоменко-Цишанга и построить бифуркационные диаграммы.

Работа успешно сочетает как уже известные методы, разработанные для изучения гладких интегрируемых гамильтоновых систем, так и методы, успешно применяемые для изучения кусочно-гладких систем. В частности, для вычисления бифуркационной диаграммы был использован метод Харламова, позволяющий избежать вычисления ранга отображения момента в точках негладкости фазового четырёхмерного многообразия. При этом в работе содержится ряд существенных продвижений, в том числе разработаны методы и подходы, которые могут быть применены к системам интегрируемых бильярдов гораздо более широкого класса, в частности, к бильярдным книжкам с потенциалами высоких степеней.

Все результаты диссертации являются новыми, получены С.Е.Пустовойтовым самостоятельно или при равноценном вкладе с соавторами. Результаты изложены в семи статьях, опубликованных в ведущих математических журналах. Неоднократно докладывались на различных конференциях, как всероссийских, так и международных.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Пустовойтова Сергея Евгеньевича удовлетворяет всем требованиям "Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова" и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 Геометрия и топология.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений

механико-математического факультета

ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова"

ВЕДЮШКИНА Виктория Викторовна

30.05.25

17/ Ведюшкина В.В.

Контактные данные:

тел.: , email:

Специальность, по которой научным руководителем

защищена диссертация:

01.01.04 – Геометрия и топология

Адрес места работы:

119991, Москва, Ленинские горы, д. 1,

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

механико-математический факультет

Тел.: 8(495)939-12-63; email: office@mech.math.msu.su

Подпись профессора механико-математического факультета

МГУ имени М.В.Ломоносова В.В. Ведюшкиной удостоверяю:

Декан механико-математического

факультета МГУ, член-корреспондент РАН

профессор А.И. Шафаревич
