МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Тищенко Богдан Викторович

РЕШЕНИЯ С ПЕРЕХОДНЫМИ СЛОЯМИ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С РАЗРЫВНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ РАЗЛИЧНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа подготовлена на кафедре математики физического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Научные руководители: **Нефёдов Николай Николаевич**
доктор физико-математических наук, профессор,
МГУ имени М.В.Ломоносова
физический факультет, кафедра математики,
заведующий кафедрой математики

Левашова Наталия Тимуровна
кандидат физико-математических наук, доцент,
МГУ имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики, доцент

Защита диссертации состоится «__» ____________ 202__ г. в ___ часов ___ минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.8 Московского государственного уиверситета имени М.В.Ломоносова по адресу: Россия, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория ___ .

E-mail: ast.diffiety@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Ломоносовский пр-кт., д. 27, сектор А, этаж 8) и на и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.8/ .

Автореферат разослан «___» ____________ 202___ г.

Учёный секретарь
диссертационного совета МГУ.011.8,
доктор физико-математических наук,
профессор Г. А. Чечкин

Общая характеристика работы

Диссертация относится к специальности дифференциальные уравнения и математическая физика и является, в первую очередь, исследованием в области асимптотической теории систем нелинейных дифференциальных уравнений, а также затрагивает тематику качественной теории систем дифференциальных уравнений вместе с теорией начальных и краевых задач для систем дифференциальных уравнений.

Основная проблематика диссертационной работы — это существование, локальная единственность и устойчивость резко изменяющихся в малых областях вблизи границы и внутри областей рассмотрения решений систем нелинейных (параболических, эллиптических, обыкновенных) уравнений с малым параметром при старшей производной.

Актуальность работы

В задачах математического моделирования в биофизике [1,2], экологии [3,4], астрофизике [5,6], химической кинетике [7,8] и других научных областях естественным образом возникают сингулярно возмущённые дифференциальные уравнения и системы, в частности, возникает предмет исследования диссертации — системы

[1] *Sidorova A. E., Levashova N. T., Semina A. E. Mel'nikova A. A.* The Application of a Distributed Model of Active Media for the Analysis of Urban Ecosystems Development // *Mathematical Biology and Bioinformatics.* — 2018. — Vol. 13, no. 2. — P. 454–465.

[2] *Levashova N. T., Sidorova A. E., Semina A. E., Ni M.* A spatio-temporal autowave model of shanghai territory development // *Sustainability.* — 2019. — Vol. 11, no. 13. — P. 3658 (1–13).

[3] *Левашова Н. Т., Мухартова Ю. В., Ольчев А. В.* Два подхода к описанию турбулентного переноса в приземном слое атмосферы // *Математическое моделирование.* — 2017. — Т. 29, № 5. — С. 46–60.

[4] *Давыдова М. А., Нечаева А. Л.* Асимптотически устойчивые периодические решения в одной задаче атмосферной диффузии примесей: асимптотика, существование, единственность // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2020. — Т. 60, № 3. — С. 451–461.

[5] *Михайлов Е. А.* Задачи с малым параметром и распространение фронтов в теории галактического динамо // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2015. — № 2. — С. 27–31.

[6] *Mikhailov E. A.* Wavefronts of the magnetic field in galaxies: asymptotic and numerical approaches // *Magnetohydrodynamics.* — 2016. — Vol. 52, no. 1. — P. 117–125.

[7] *Белов А. А., Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В.* Моделирование химической кинетики в газах // *Математическое моделирование.* — 2016. — Т. 28, № 8. — С. 46–64.

[8] *Булатов П. Е., Белов А. А., Калиткин Н. Н.* Расчет химической кинетики явными схемами с геометрически-адаптивным выбором шага // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* — 2018. — № 173. — С. 1–32.

реакция-диффузия с различными степенями малого параметра при старших производных, где различие степеней малого параметра моделирует более значительный, на порядок, вклад одной из компонент системы, что характерно, например, для биофизических моделей эволюции урбоэкосистем.

Сингулярно возмущённые уравнения и системы дают возможность описать физические явления, для которых характерны резко изменяющиеся состояния рассматриваемой физической системы, в том числе обусловленные разрывным поведением параметров среды; среди их решений наибольший интерес в настоящее время представляют решения с внутренним переходным слоем, называемые контрастными структурами типа ступеньки, а также решения с пограничными слоями.

Центральным объектом изучения в диссертационной работе является двумерная задача для системы двух параболических уравнений, рассматриваемая в односвязной области D с достаточно гладкой границей Γ и разрывом правых частей на фиксированной достаточно гладкой простой кривой γ, лежащей в D,

$$(2D)\quad \begin{aligned} &\varepsilon^4\Delta u - u_t = f(u,v,\mathbf{x},\varepsilon),\ \ \varepsilon^2\Delta v - v_t = g(u,v,\mathbf{x},\varepsilon),\ \ \mathbf{x}\in D\backslash\gamma,\ t>0,\\ &\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = a,\quad \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} = b,\quad u|_{t=0} = u^0(\mathbf{x}),\quad v|_{t=0} = v^0(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{1}$$

и её одномерный вариант с разрывом правых частей в некоторой точке $x_0\in(-1,1)$

$$(1D)\quad \begin{aligned} &\varepsilon^4 u_{xx} - u_t = f(u,v,x,\varepsilon),\ \ \varepsilon^2 v_{xx} - v_t = g(u,v,x,\varepsilon),\ \ x\in(-1,1)\backslash x_0,\ t>0,\\ &u_x(\mp1) = a^{(\mp)},\quad v_x(\mp1) = b^{(\mp)},\quad u|_{t=0} = u^0(x),\quad v|_{t=0} = v^0(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Основу исследования этих задач составляют задачи для стационарных решений:

$$(2D)\quad \begin{aligned} &\varepsilon^4\Delta u = f(u,v,\mathbf{x},\varepsilon),\quad \varepsilon^2\Delta v = g(u,v,\mathbf{x},\varepsilon),\quad \mathbf{x}\in D\backslash\gamma;\\ &\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = a,\quad \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} = b,\quad \mathbf{x}\in\Gamma; \end{aligned} \tag{3}$$

$$(1D)\quad \begin{aligned} &\varepsilon^4 u_{xx} = f(u,v,x,\varepsilon),\quad \varepsilon^2 v_{xx} = g(u,v,x,\varepsilon),\quad x\in(-1,1)\backslash x_0;\\ &u_x(\mp1) = a^{(\mp)},\quad v_x(\mp1) = b^{(\mp)}. \end{aligned} \tag{4}$$

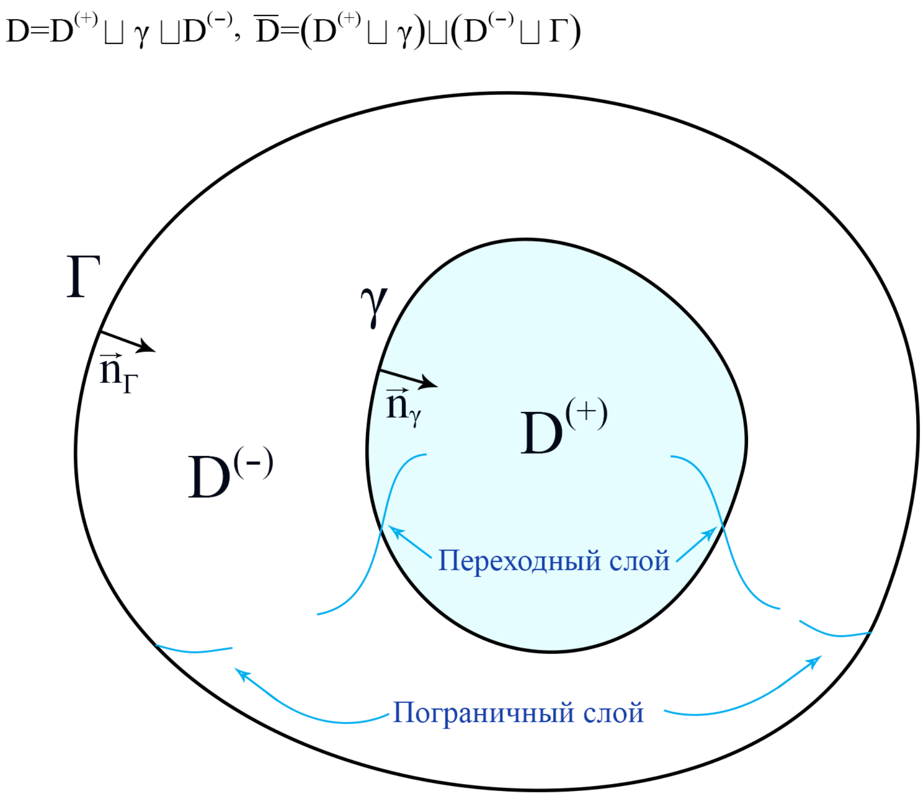

Рисунок 1: Иллюстрация характерной области рассмотрения и характерного поведения решений (3) в двумерном случае

Отдельно рассматривается система ОДУ, в которой $f(u,v,x,\varepsilon)$ имеет разрыв по искомой переменной u при $u=0$, а $g(u,v,x,\varepsilon)$ гладкая по всем переменным:

$$\varepsilon^4 u_{xx} = f(u,v,x,\varepsilon), \text{ для п.в. } x \in (-1,1), \quad \varepsilon^2 v_{xx} = g(u,v,x,\varepsilon), \quad x \in (-1,1),$$
$$u'(\mp 1) = a^{(\mp)}, \quad v'(\mp 1) = b^{(\mp)}. \tag{5}$$

Во всех случаях рассматриваются правые части, удовлетворяющие одному из четырёх условий квазимонотонности — условиям на знаки частных производных f_v и g_u. Например, если $f_v > 0$ и $g_u > 0$, то в номенклатуре диссертационной работы говорится, что f и g удовлетворяют PP-типу квазимонотонности, если $f_v < 0$ и $g_u < 0$ — NN-типу, $f_v > 0$ и $g_u < 0$ — PN, $f_v < 0$ и $g_u > 0$ — NP (подробнее — главы 2–5).

Ранее с использованием методов асимптотического анализа подобные системы сингулярно возмущённых уравнений типа реакция-диффузия, имеющих решения вида контрастных структур, в случае когда реактивные слагаемые описывались гладкими функциями, исследовались, в частности, Васильевой А.Б., Бутузовым В.Ф. с соавторами [9,10,11]. Кроме того, более двух десятков работ, касающихся скалярных задач с разрывными коэффициентами, опубликовано авторами, входящими в исследовательскую группу, занимающуюся асимптотической теорией на кафедре математики физического факультета МГУ, — использовались как активно развивающийся асимптотический метод дифференциальных неравенств [12,13,14,15], так и более старый метод сшивания асимптотики [16,17,18].

В диссертации проводится обобщение асимптотического метода дифференциальных неравенств и результатов, касающихся существования, единственности и устойчивости решений с внутренним переходным и пограничными слоями на случай систем с разрывными правыми частями уравнений. Использование асимптотического анализа подготавливается почву для создания новых эффективных численных методов и их обоснования, поскольку асимптотические приближения решений даже низкого порядка (нулевого или первого) позволяют локализовать область переходного слоя и представляют собой хорошее начальное приближение, например, для счёта на установление, находящееся в области устойчивости

---

[9] *Васильева А. Б.* О контрастных структурах в системах сингулярно возмущенных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1994. — Т. 34, № 8–9. — С. 1168–1178.

[10] *Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2012. — Т. 52, № 11. — С. 1983–2003.

[11] *Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Т. 53, № 9. — С. 1427–1447.

[12] *Нефёдов Н. Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // *Дифференц. уравнения.* — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 719–722.

[13] *Левашова Н. Т., Нефёдов Н. Н., Орлов А. О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция-диффузия с разрывным источником // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2019. — Т. 59, № 4. — С. 611–620.

[14] *Левашова Н. Т., Нефёдов Н. Н., Николаева О. А.* Решение с внутренним переходным слоем двумерной краевой задачи реакция-диффузия-адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми // *ТМФ.* — 2021. — Т. 207, № 2. — С. 293–309.

[15] *Нефёдов Н. Н.* Периодические контрастные структуры в задаче реакция-диффузия с быстрой реакцией и малой диффузией // *Матем. заметки.* — 2022. — Т. 112, № 4. — С. 601–612.

[16] Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.

[17] *Ни М. К., Нефёдов Н. Н., Левашова Н. Т.* Асимптотика решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // *Дифференциальные уравнения.* — 2020. — Т. 56, № 3. — С. 303–316.

[18] *Ни М. К., Чи К., Левашова Н.Т.* О внутреннем слое для сингулярно возмущённого уравнения с разрывной правой частью // *Дифференц. уравнения.* — 2020. — Т. 56, № 10. — С. 1310–1317.

стационарного решения.

Цели и задачи работы

Целью диссертационной работы является исследование контрастных структур в нелинейных двухкомпонентных системах реакция-диффузия с различными степенями малого параметра при старших производных в следующих случаях:

- с пограничными слоями и гладкими реактивными членами (частный случай задач (1)–(5);
- с разрывными правыми частями (реактивными членами), имеющими разрыв первого рода в известной внутренней точке интервала (2), (4) и с разрывом на известной внутренней гладкой кривой области (1), (3) в, соответственно, одномерном и двумерном пространствах, а также при различных условиях квазимонотонности;
- с разрывной по первой из искомых переменных правой частью первого уравнения и гладкой по всем переменным правой частью второго уравнения в одномерном случае (задача (5)).

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

- модификация и адаптация известных алгоритмов построения асимптотических приближений, а также верхних и нижних решений под нужды рассматриваемых задач (1)–(5);
- определение условий, обеспечивающих существование решений задач (1)–(5), а также, если возможно, их локальную единственность и асимптотическую устойчивость;
- установление корректности применения метода монотонных итераций;
- разработка иллюстративных примеров.

Научная новизна работы

По сравнению с исследованиями, содержащимися в литературе (см. с. 5, ссылки 9 – 18) для уравнений с непрерывными правыми частями и задач для одного уравнения с разрывом:

- Доказано существование гладкого решения с внутренним переходным слоем для систем уравнений с разрывными правыми частями (1)–(5); показано, что внутренний переходный слой локализован в окрестности разрыва.
- Доказаны локальная единственность и асимптотическая устойчивость глад-

кого решения с внутренним переходным и пограничным слоями задачах с источниками, разрывными в фиксированной точке и на фиксированной кривой (1)–(4), при различных условиях квазимонотонности.

- В задаче с разрывом по искомой переменной (5) получены достаточные условия существования гладкого решения с внутренним переходным и пограничными слоями, проведено доказательство его существования методом монотонных итераций.

Положения, выносимые на защиту

- Теоремы существования стационарных решений начально-краевых задач для систем уравнений реакция-адвекция в средах с разрывными характеристиками с большим градиентом на границе раздела сред в задачах
  - с известной пространственной локализацией разрыва (1)–(4);
  - с разрывом по искомой переменной (5).
- Построение верхних и нижних решения, между которыми заключены решения задач (1)–(5).
- Теоремы об асимптотической устойчивости и выделение локальной области притяжения в задачах с известной пространственной локализацией разрыва (1)–(4).

Основные результаты диссертации

В работе исследованы контрастные структуры в нелинейных двухкомпонентных системах реакция-диффузия с различными степенями малого параметра при старших производных с внутренним переходным слоем и пограничными слоями:

- Разработан алгоритм построения верхних и нижних решений для двухкомпонентных систем типа «реакция-диффузия» с различными разрывными источниками — с известной пространственной локализацией разрыва (1)–(4) и с разрывом вдоль нулевого уровня искомой функции (5).
- Доказано существование гладких решений с внутренним переходным и пограничными слоями систем двух параболических уравнений с разрывными источниками с известной локализацией разрыва (1),(2).
- Доказаны в одномерном и двумерном случаях (1)–(4) асимптотическая устойчивость и локальная единственность гладких решений с внутренним переходным и пограничными слоями стационарного решения системы двух

уравнений диффузии с фиксированным положением разрыва источника.
- Доказано существование гладкого решения с внутренним переходным и пограничными слоями системы (5) двух ОДУ с источником, разрывным по искомой переменной.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость работы состоит в расширении класса задач, для которых применимы метод пограничных функций, метод функций переходного слоя и асимптотический метод дифференциальных неравенств, сформулированы условия их применимости и предложены на их основе доказательства существования, единственности и асимптотической устойчивости решений. Полученные результаты можно использовать для продолжения исследования задач с переходными слоями.

Практическая значимость работы заключается в следующем:
- результаты работы могут быть применены в математическом моделировании в задачах биофизики, химической кинетики, экологии, нелинейной теории упругости и других областей наук, в которых возникают скачкообразные изменения рассматриваемых величин, обусловленных наличием разрывов;
- доказательство существования устойчивого стационарного решения с большим градиентом вблизи линии разрыва делает численное решение этих задач оправданным независимо от применяемых схем решения.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе автором использованы следующие методы:
- асимптотический метод Васильевой — построение асимптотических приближений решений;
- асимптотический метод дифференциальных неравенств — построение верхних и нижних решений на основе асимптотических приближений решений;
- метод монотонных итераций — доказательство существования решений;
- методы теории потенциала — доказательство гладкости решений;
- методы теории пространств Соболева — сходимость монотонных итераций, гладкость решений на промежуточных этапах доказательств.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность изложенных в диссертационной работе результатов обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов в математике.

Апробация работы

Доклады на конференциях:

1. IX Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» с международным участием, посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова, (пос. Дюрсо, Россия, 3–9 сентября 2018);
2. «2nd International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS’19», (Белгород, Россия, 20–24 августа 2019);
3. «Динамика. 2019. Ярославль», (Ярославль, Россия, 10–12 октября 2019);
4. «Тихоновские чтения 2020», (Москва, Россия, 26–31 октября 2020);
5. «Математические идеи П. Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания», (Обнинск, Россия, 14–16 мая 2021);
6. «Актуальные проблемы математической физики», посвященная памяти Валентина Федоровича Бутузова», (Москва, Россия, 2 июня 2022).

Также результаты докладывались в рамках научно-исследовательского семинара научной группы «Нелинейные уравнения математической физики» кафедры математики физического факультета МГУ (1–3 раза в месяц, 2019–2023).

Публикации (статьи в журналах)

Результаты диссертации опубликованы в 5 статьях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, из них 4 — в отечественных журналах (ВМУ, ЖВМ и МФ, ТМФ), индексирующихся РИНЦ; переводные версии этих журналов индексируются в WoS и SCOPUS. Пятая работа, касающаяся тематики диссертации, опубликована в журнале «Algorithms», индексируемом в WoS и SCOPUS, входящем во второй квартиль базы данных SCOPUS (двухлетний импакт-фактор (2024) — 2,1; CiteScore (2024) — 4,5).

Структура и объём

Работа состоит из введения, обзора литературы, пяти глав, заключения и списка литературы. Объём работы составляет 120 страниц. Список литературы содержит 115 наименований.

Основное содержание работы

Введение представляет собой общую характеристику работы, в частности, обосновывается её актуальность, приводятся цели, новизна, значимость, основные результаты работы.

Обзор литературы посвящён краткой истории исследований в области асимптотической теории, а также некоторым современным результатам в области задач с разрывными членами.

Первая глава является вспомогательной в структуре диссертации — во избежание в дальнейшем излишних повторений в ней приводятся универсальные обозначения, замечания, определения и утверждения.

На протяжении работы используются сдедующие обозначения:

- $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$;
- x^* — некоторая фиксированная точка из интервала $(-1, 1)$;
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$;
- ε — малый параметр, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$, где ε_0 — некоторое предельно допустимое значение ε;
- D — односвязная область из $\mathbb{R}^2$, ограниченная простой замкнутой гладкой кривой Γ;
- γ — простая замкнутая гладкая кривая, лежащая в D, то есть $\gamma \subset D$, $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$;
- $D^{(+)}$, $D^{(-)}$ — подобласти D, такие что $\overline{D}^{(-)} \cup D^{(+)} = D^{(-)} \cup \overline{D}^{(+)} = D$, $\overline{D}^{(-)} \cap \overline{D}^{(+)} = \gamma$, $\overline{D} \backslash (D^{(-)} \cup \overline{D}^{(+)}) = \Gamma$;
- I_u, I_v — некоторые допустимые отрезки изменения, соответственно, u и v;
- $\dfrac{\partial}{\partial n_\Gamma}$ — оператор дифференцирования по внутренней нормали $\mathbf{n}_\Gamma$ к кривой Γ.

Полагается, что функции u^0, v^0 удовлетворяют следующему условию.

(CD) Начальные функции u^0 и v^0 непрерывны в замыкании области определения ($[-1, 1]$ в 1D, $\overline{D}$ в 2D), непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности границы и удовлетворяют условиям согласования

$$\text{(1D)}\quad u_x^0(\mp1) = a^{(\mp)}, v_x^0(\mp1) = b^{(\mp)}, \qquad \text{(2D)}\quad \left.\frac{\partial u^0}{\partial n_\Gamma}\right|_\Gamma = a, \quad \left.\frac{\partial v^0}{\partial n_\Gamma}\right|_\Gamma = b.$$

Далее приводятся основные определения; для краткости, они приведены в одномерном случае — в двумерном случае их формулировки аналогичны и не имеют принципиальных отличий.

Асимптотическое приближение решения.

Будем говорить, что пара функций $(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon))$ является на отрезке $[-1,1]$ равномерным с точностью $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$ асимптотическим приближением решения $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ стационарной задачи (4), если

$$|U_n(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)| + |V_n(x,\varepsilon) - v_\varepsilon(x)| \le C_n \cdot \varepsilon^{n+1},\ x \in [-1,1],$$

где C_n — не зависящая от ε и x положительная константа.

Внутренний переходный слой.

Пусть функции $\varphi^{(\mp)}$ и $\psi^{(\mp)}$ определены и непрерывны на $[-1,1]$.

Будем говорить, что решение стационарной задачи (4), имеет внутренний переходный слой, если в некоторой, лежащей строго внутри интервала $(-1,1)$, малой окрестности точки x^* решение резко изменяется от значений близких к $\left(\varphi^{(-)}(x), \psi^{(-)}(x)\right)$ до значений близких к $\left(\varphi^{(+)}(x), \psi^{(+)}(x)\right)$, а вне этой окрестности при $\varepsilon \to +0$ решение равномерно по x стремится к $\left(\varphi^{(+)}(x), \psi^{(+)}(x)\right)$ при $x > x^*$ и к $\left(\varphi^{(-)}(x), \psi^{(-)}(x)\right)$ при $x < x^*$.

Пограничный слой

Будем говорить, что решение стационарной задачи (4), имеет пограничный слой, если в некоторых соответствующих малых односторонних окрестностях точек $x = \mp1$ решение резко изменяется от некоторых значения в этих точках до значений близких к $(\varphi(x), \psi(x))$, а вне этих окрестностей при $\varepsilon \to +0$ решение равномерно по x стремится к $(\varphi(x), \psi(x))$.

Изолированный корень.

Будем говорить, что $w(u,v,x)$, определённая на $I_u \times I_v \times [a,b]$, имеет изолированный корень $u = \phi(v,x)$ на множестве $I_v \times [a,b]$, если $\phi(v,x)$ — это однозначная функция, такая что для некоторого $\delta^{\phi} > 0$ существует множество

$$\{(u, v, x) : \phi(v, x) - \delta^{\phi} \le u \le \phi(v, x) + \delta^{\phi}, v \in I_v, x \in [a, b]\},$$

такое что $w(u, v, x) = 0 \Leftrightarrow u = \phi(v, x), \forall (v, x) \in I_v \times [a, b]$.

Асимптотическая устойчивость с областью притяжения.

Будем говорить, что решение $(u_{\varepsilon}(x), v_{\varepsilon}(x))$ стационарной задачи (4) асимптотически устойчиво как решение задачи (2) с областью притяжения $[\underline{U}(x), \overline{U}(x)] \times [\underline{V}(x), \overline{V}(x)]$, если для любых начальных функций $u^0(x), v^0(x)$, удовлетворяющих (CD), таких что

$$\underline{U}(x) \le u^0(x) \le \overline{U}(x),\ \underline{V}(x) \le v^0(x) \le \overline{V}(x),\ \forall x \in [-1, 1],$$

решение $(u_{\varepsilon}(x, t), v_{\varepsilon}(x, t))$ задачи (2) удовлетворяет условиям

$$\underline{U}(x) \le u^0(x) \equiv u_{\varepsilon}(x, 0) \le \overline{U}(x),\ \underline{V}(x) \le v^0(x) \equiv v_{\varepsilon}(x, 0) \le \overline{V}(x),\ \forall x \in [-1, 1];$$

$$\|u_{\varepsilon}(x, t) - u_{\varepsilon}(x)\|_{C([-1,1])} + \|v_{\varepsilon}(x, t) - v_{\varepsilon}(x)\|_{C([-1,1])} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Локальная единственность решения.

Будем говорить, что решение $(u_{\varepsilon}(x), v_{\varepsilon}(x))$ стационарной задачи (4) локально единственно на множестве $[\underline{U}(x), \overline{U}(x)] \times [\underline{V}(x), \overline{V}(x)]$, если из того, что $(u_{\varepsilon}^*(x), v_{\varepsilon}^*(x))$ — решение (4), и $\underline{U}(x) \le u_{\varepsilon}^*(x) \le \overline{U}(x)$, $\underline{V}(x) \le v_{\varepsilon}^*(x) \le \overline{V}(x)$, $\forall x \in [-1, 1]$, вытекает, что $(u_{\varepsilon}^*(x), v_{\varepsilon}^*(x)) \equiv (u_{\varepsilon}(x), v_{\varepsilon}(x))$.

Вторая глава посвящена исследованию одномерной задачи с гладкими реактивными членами, решение которой имеет только пограничные слои.

Изучаются одномерная параболическая задача (2)

$$\begin{gathered}\varepsilon^4 u_{xx} - u_t = f(u, v, x, \varepsilon),\ \ \varepsilon^2 v_{xx} - v_t = g(u, v, x, \varepsilon),\ \ x \in (-1, 1) \backslash x_0,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u_x(\mp 1) = a^{(\mp)},\ \ v_x(\mp 1) = b^{(\mp)},\ \ u|_{t=0} = u^0(x),\ \ v|_{t=0} = v^0(x),\end{gathered} \tag{2}$$

и соответствующая ей стационарная задача (4)

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 u_{xx} = f(u,v,x,\varepsilon), \quad \varepsilon^2 v_{xx} = g(u,v,x,\varepsilon), \quad x \in (-1,1)\backslash x_0; \\ &u_x(\mp 1) = a^{(\mp)}, \quad v_x(\mp 1) = b^{(\mp)}, \end{aligned} \tag{4}$$

с правыми частями $f(u,v,x,\varepsilon)$, $g(u,v,x,\varepsilon)$, принадлежащими классу $C^{(n+2)}(I_u \times I_v \times [-1,1] \times [0,\varepsilon_0])$, где n — порядок требуемого асимптотического приближения.

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 2.1. На множестве $I_v \times [-1,1]$ уравнение $f(u,v,x,0) = 0$ имеет изолированный корень $u = \varphi(v,x)$ и выполняется неравенство $f_u(\varphi(v,x),v,x,0) > 0$.

Условие 2.2. Обозначим $h(v,x) = g(\varphi(v,x),v,x,0)$. На отрезке $[-1,1]$ уравнение $h(v,x) = 0$ имеет изолированный корень $v = \psi(x)$, и всюду на этом отрезке выполняется неравенство $h_v(\psi(x),x) > 0$.

Пусть при всех $(u,v) \in I_u \times I_v$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ на отрезке $[-1,1]$ правые части уравнений задачи (2), (4) удовлетворяют одному из четырёх типов квазимонотонности (КМ), то есть выполняются неравенства:

Условие 2.3(а).

$$f_v(u,v,x,\varepsilon) < 0, \quad g_u(u,v,x,\varepsilon) < 0 \quad \text{(NN тип);}$$
$$f_v(u,v,x,\varepsilon) > 0, \quad g_u(u,v,x,\varepsilon) > 0 \quad \text{(PP тип).}$$

Условие 2.3(б).

$$f_v(u,v,x,\varepsilon) < 0, \quad g_u(u,v,x,\varepsilon) > 0 \quad \text{(NP тип);}$$
$$f_v(u,v,x,\varepsilon) > 0, \quad g_u(u,v,x,\varepsilon) < 0 \quad \text{(PN тип).}$$

Введём на множестве $(v,x) = I_v \times [-1,1]$ функции

$$\nu(v,x) := g_v(\varphi(v,x),v,x,0) + \frac{f_v(\varphi(v,x),v,x,0)}{f_u(\varphi(v,x),v,x,0)} \cdot g_u(\varphi(v,x),v,x,0),$$
$$\bar{\nu}(x) := \nu(\psi(x),x) \quad \text{и константы} \quad \bar{\nu}^{(\mp)} := \bar{\nu}(\mp 1).$$

Условие 2.4. $\bar{\nu}(x) > 0$ на отрезке $[-1,1]$.

Методом Васильевой построено асимптотическое приближение решения стационарной задачи $(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon))$. При помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств построены верхнее и нижнее решения задачи (4) как модификации асимптотического приближения: $\left(\overline{U}_n(x,\varepsilon), \overline{V}_n(x,\varepsilon)\right)$ — верхнее решение, $\left(\underline{U_n}(x,\varepsilon), \underline{V_n}(x,\varepsilon)\right)$ — нижнее решение, построенные на основе асимптотического приближения n-ого порядка;

Используя классическую теорию метода монотонных итераций [19], доказаны основные результаты главы.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются Условия 2.1–2.3(а) или 2.1–2.3(б),2.4. Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует классическое решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (4)*, для которого пара функций* $(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon))$ *является равномерным на отрезке* $[-1,1]$ *асимптотическим приближением с точностью* $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются Условия 2.1–2.3(а) или 2.1–2.3(б),2.4. Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (4) *локально единственно на множестве* $[\underline{U_1}(x,\varepsilon), \overline{U}_1(x,\varepsilon)] \times [\underline{V_1}(x,\varepsilon), \overline{V}_1(x,\varepsilon)]$ *и, как решение задачи* (2)*, асимптотически устойчиво с областью притяжения не меньше* $[\underline{U_1}(x,\varepsilon), \overline{U}_1(x,\varepsilon)] \times [\underline{V_1}(x,\varepsilon), \overline{V}_1(x,\varepsilon)]$.

Третья глава — проводится исследование одномерной задачи, имеющей реактивные члены с известной фиксированной локализацией разрыва; решение этой задачи имеет как пограничный так и внутренний переходный слой.

Рассматриваются одномерные параболическая задача (2)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^4 u_{xx} - u_t = f(u,v,x,\varepsilon), \;\; \varepsilon^2 v_{xx} - v_t = g(u,v,x,\varepsilon), \;\; x \in (-1,1)\backslash x_0, \; t \in \mathbb{R}^+, \\
&u_x(\mp 1) = a^{(\mp)}, \;\; v_x(\mp 1) = b^{(\mp)}, \;\; u|_{t=0} = u^0(x), \;\; v|_{t=0} = v^0(x),
\end{aligned} \tag{2}$$

и соответствующая ей стационарная задача (4)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^4 u_{xx} = f(u,v,x,\varepsilon), \;\; \varepsilon^2 v_{xx} = g(u,v,x,\varepsilon), \;\; x \in (-1,1)\backslash x_0; \\
&u_x(\mp 1) = a^{(\mp)}, \;\; v_x(\mp 1) = b^{(\mp)}.
\end{aligned} \tag{4}$$

[19] *Pao C. V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations — Plenum Press, New York, 1992. — p. XV, 777.

Правые части систем (2) и (4) имеют вид:

$$f(u,v,x,\varepsilon)=\begin{cases} f^{(-)}(u,v,x,\varepsilon), & u\in I_u, v\in I_v,\ -1\le x<x_0\,,\\ f^{(+)}(u,v,x,\varepsilon), & u\in I_u, v\in I_v,\ x_0\le x\le 1\,;\end{cases}$$

$$g(u,v,x,\varepsilon)=\begin{cases} g^{(-)}(u,v,x,\varepsilon), & u\in I_u, v\in I_v,\ -1\le x<x_0\,,\\ g^{(+)}(u,v,x,\varepsilon), & u\in I_u, v\in I_v,\ x_0\le x\le 1\,,\end{cases}$$

причём $f^{(-)}(u,v,x_0,\varepsilon)\neq f^{(+)}(u,v,x_0,\varepsilon)$, $\quad g^{(-)}(u,v,x_0,\varepsilon)\neq g^{(+)}(u,v,x_0,\varepsilon)$ для всех допустимых (u,v) и ε.

Гладкость функций $f^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)$ и $g^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)$ связана с порядком асимптотического приближения, которое требуется построить. Для построения приближения n-го порядка необходимо, чтобы функции $f^{(\mp)}$ и $g^{(\mp)}$ принадлежали классу $C^{(n+2)}$ по совокупности переменных в замыканиях своих областей определения.

Решения задач (2) и (4) определяются следующим образом.

Определение 3.1. Пара функций $(u(x,t),v(x,t))$ из класса

$$C([-1,1]\times\mathbb{R}_0^+)\cap C^{1,0}\left([-1,1]\times\mathbb{R}^+\right)\cap C^{2,1}\left(((-1,1)\backslash x_0)\times\mathbb{R}^+\right)$$

называется решением задачи (2), если она удовлетворяет уравнениям (2) при $(x,t)\in((-1,1)\backslash x_0)\times\mathbb{R}^+$, а также граничным и начальным условиям.

Определение 3.2. Пара функций $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ из класса

$$C^1([-1,1])\cap C^2((-1,1)\backslash x_0)$$

называется решением задачи (4), если она удовлетворяет уравнениям (4) при $x\in(-1,1)\backslash x_0$ и граничным условиям.

Исследуется устойчивое стационарное решение $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ задачи (2), имеющее внутренний переходный слой в окрестности точки x_0.

Условие 3.1. Каждое из уравнений $f^{(\mp)}(u,v,x,0)=0$ имеет изолированный корень $u=\varphi^{(\mp)}(v,x)$ соответственно в областях $I_v\times[-1,x_0]$ и $I_v\times[x_0,1]$, и для всех $v \in I_v$ выполняются неравенства

$$\varphi^{(-)}(v, x_0) < \varphi^{(+)}(v, x_0),$$
$$f_u^{(-)}(\varphi^{(-)}(v, x), v, x, 0) > 0,\ x \in [-1, x_0],\quad f_u^{(+)}(\varphi^{(+)}(v, x), v, x, 0) > 0,\ x \in [x_0, 1].$$

Обозначим $h^{(\mp)}(v, x) = g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, x), v, x, 0)$.

Условие 3.2. Каждое из уравнений $h^{(\mp)}(v, x) = 0$ имеет изолированный корень $v = \psi^{(\mp)}(x)$ соответственно на отрезках $[-1, x_0]$ и $[x_0, 1]$, и выполняются неравенства

$$\psi^{(-)}(x_0) < \psi^{(+)}(x_0),$$
$$h_v^{(-)}(\psi^{(-)}(x), x) > 0,\ x \in [-1, x_0],\quad h_v^{(+)}(\psi^{(+)}(x), x) > 0,\ x \in [x_0, 1].$$

Условие 3.3. Пусть при всех $(u, v) \in I_u \times I_v$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ на соответствующих отрезках $[-1, x_0]$ и $[x_0, 1]$ правые части уравнений (2), (4) удовлетворяют одной из четырех систем неравенств, называемых «условиями квазимонотонности»:

$$f_v^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon) < 0,\quad g_u^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon) < 0\ \text{(NN тип)};$$
$$f_v^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon) > 0,\quad g_u^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon) > 0\ \text{(PP тип)};$$
$$f_v^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon) < 0,\quad g_u^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon) > 0\ \text{(NP тип)};$$
$$f_v^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon) > 0,\quad g_u^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon) < 0\ \text{(PN тип)}.$$

Условие 3.4. Пусть выполняются неравенства

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{v} h^{(-)}(s, x_0)ds > 0,\quad v \in (\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)],$$
$$\int\limits_{\psi^{(+)}(x_0)}^{v} h^{(+)}(s, x_0)ds > 0,\quad v \in [\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)),$$

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(v,x_0)}^{u} f^{(-)}(s,v,x_0,0)ds > 0, \quad u \in (\varphi^{(-)}(v,x_0), \varphi^{(+)}(v,x_0)], \quad v \in [\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)],$$

$$\int\limits_{\varphi^{(+)}(v,x_0)}^{u} f^{(+)}(s,v,x_0,0)ds > 0, \quad u \in [\varphi^{(-)}(v,x_0), \varphi^{(+)}(v,x_0)), \quad v \in [\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)].$$

Условие 3.5. Пусть существует величина $v = q_0 \in \big(\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)\big)$ — единственное решение уравнения

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{v} h^{(-)}(s,x_0)ds = \int\limits_{\psi^{(+)}(x_0)}^{v} h^{(+)}(s,x_0)ds$$

и величина $u = p_0 \in \big(\varphi^{(-)}\left(q_0, x_0\right), \varphi^{(+)}\left(q_0, x_0\right)\big)$ — единственное решение уравнения

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(q_0,x_0)}^{u} f^{(-)}(s,q_0,x_0,0)ds = \int\limits_{\varphi^{(+)}(q_0,x_0)}^{u} f^{(+)}(s,q_0,x_0,0)ds.$$

Пусть кроме того выполняются неравенства

- $f^{(-)}(p_0,q_0,x_0,0) > f^{(+)}(p_0,q_0,x_0,0)$;
- $h^{(-)}(q_0,x_0) > h^{(+)}(q_0,x_0)$ (NN, PP); $h^{(-)}(q_0,x_0) \neq h^{(+)}(q_0,x_0)$ (NP, PN).

Введём функции

$$\nu^{(\mp)}(v,x) := g_v^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0) + \frac{f_v^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)}{f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)} \cdot g_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)$$

соответственно на множествах $(v,x) = I_v \times [-1,x_0]$ для функций с верхним индексом «$(-)$» и $(v,x) = I_v \times [x_0,1]$ для функций с индексом «$(+)$», а также введём обозначения $\bar{\nu}^{(\mp)}(x) := \nu^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x),x)$.

Условие 3.6 (только для КМ типов PN и NP). Пусть $\bar{\nu}^{(\mp)}(x) > 0$ соответственно на отрезках $[-1,x_0]$ и $[x_0,1]$, а для функций $\nu^{(\mp)}(v,x)$ справедливы соотношения

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{v} \nu^{(-)}(s,x_0)ds \geq 0, \quad v \in [\psi^{(-)}(x_0), q_0), \qquad \int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{q_0} \nu^{(-)}(s,x_0)ds > 0,$$
$$\int\limits_{v}^{\psi^{(+)}(x_0)} \nu^{(+)}(s,x_0)ds \geq 0, \quad v \in (q_0, \psi^{(+)}(x_0)], \qquad \int\limits_{q_0}^{\psi^{(+)}(x_0)} \nu^{(+)}(s,x_0)ds > 0.$$

Методом Васильевой построено асимптотическое приближение решения стационарной задачи $(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon))$: оно строится отдельно слева и справа от точки x_0.

$$U_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \leq x < x_0\,, \\ U_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \leq x \leq 1\,, \end{cases} \quad V_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} V_n^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \leq x < x_0\,, \\ V_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Каждая из функций $U_n^{(\mp)}$, $V_n^{(\mp)}$ представляется в виде суммы функций, описывающих решение вдали от переходного слоя и границ отрезка (регулярная часть), функций переходного слоя, зависящих от растянутых переменных различных масштабов $\tau = (x-x_0)/\varepsilon$ и $\sigma = (x-x_0)/\varepsilon^2$, и пограничных функций, которые также зависят от различных растянутых переменных $\zeta_\mp = (x \pm 1)/\varepsilon$ и $\eta_\mp = (x \pm 1)/\varepsilon^2$ в окрестностях точек $x = \mp 1$:

$$U_n^{(\mp)} = \bar{u}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q_n^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon) + M_n^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon) + P_{n+1}^{(\mp)}u(\zeta_\mp,\varepsilon) + R_{n+2}^{(\mp)}u(\eta_\mp,\varepsilon),$$
$$V_n^{(\mp)} = \bar{v}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q_n^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon) + M_{n+2}^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon) + P_{n+1}^{(\mp)}v(\zeta_\mp,\varepsilon) + R_{n+2}^{(\mp)}v(\eta_\mp,\varepsilon).$$

При помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств на основе асимптотического приближения n-ого порядка построены верхнее $\big(\overline{U}_n(x,\varepsilon), \overline{V}_n(x,\varepsilon)\big)$ и нижнее $\big(\underline{U_n}(x,\varepsilon), \underline{V_n}(x,\varepsilon)\big)$ решения задачи (4):

$$\overline{U}_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}_n^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \leq x < x_0, \\ \overline{U}_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \overline{V}_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{V}_n^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \leq x < x_0, \\ \overline{V}_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\underline{U_n}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{U_n}^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \le x < x_0, \\ \underline{U_n}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \le x \le 1, \end{cases} \quad \underline{V_n}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{V_n}^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \le x < x_0, \\ \underline{V_n}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \le x \le 1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{U}_n^{(\mp)} &= U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \left(\alpha^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}u(\tau) + m^{(\mp)}u(\sigma)\right) + \varepsilon^{n+2} C_u e^{-k_u|\eta_\mp|}, \\
\underline{U_n}^{(\mp)} &= U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \left(\alpha^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}u(\tau) + m^{(\mp)}u(\sigma)\right) - \varepsilon^{n+2} C_u e^{-k_u|\eta_\mp|}, \\
\overline{V}_n^{(\mp)} &= V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \left(\beta^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}v(\tau)\right) + \varepsilon^{n+1} C_v e^{-k_v|\zeta_\mp|} + \varepsilon^{n+2} m^{(\mp)} v(\sigma) - \\
&\qquad - \varepsilon^{n+1} M_{n+1}^{(\mp)} v(0) - \varepsilon^{n+2}\left(M_{n+2}^{(\mp)} v(0) + m^{(\mp)} v(0)\right), \\
\underline{V_n}^{(\mp)} &= V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \left(\beta^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}v(\tau)\right) - \varepsilon^{n+1} C_v e^{-k_v|\zeta_\mp|} - \varepsilon^{n+2} m^{(\mp)} v(\sigma) - \\
&\qquad - \varepsilon^{n+1} M_{n+1}^{(\mp)} v(0) - \varepsilon^{n+2}\left(M_{n+2}^{(\mp)} v(0) - m^{(\mp)} v(0)\right).
\end{aligned}$$

Проверена корректность применения метода монотонных итераций с использованием лемм о положительности для функций из пространств Соболева, и на его основе в совокупности с методами теорией потенциала доказано основные результаты главы.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются Условия 3.1–3.5 и 3.6 (последнее для квазимонотонностей NP и PN типов). Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (4) *в смысле Определения 3.2, для которого пара функций* $(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon))$ *является равномерным на отрезке* $x \in [-1,1]$ *асимптотическим приближением с точностью* $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$

Теорема 3.2. *Пусть выполняются Условия 3.1–3.5 и 3.6 (последнее для квазимонотонностей NP и PN типов). Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (4) *локально единственно на множестве* $[\,\underline{U_1}(x,\varepsilon), \overline{U}_1(x,\varepsilon)\,] \times [\,\underline{V_1}(x,\varepsilon), \overline{V}_1(x,\varepsilon)\,]$ *и, как решение задачи* (2)*, асимптотически устойчиво с областью притяжения не меньше* $[\,\underline{U_1}(x,\varepsilon), \overline{U}_1(x,\varepsilon)\,] \times [\,\underline{V_1}(x,\varepsilon), \overline{V}_1(x,\varepsilon)\,]$.

Четвёртая глава представляет собой обобщение в тандеме результатов глав 2 и 3 на случай двумерной области, поскольку достаточно рассмотреть задачу (1)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^4 \Delta u - u_t = f(u,v,\mathbf{x},\varepsilon), \;\; \varepsilon^2 \Delta v - v_t = g(u,v,\mathbf{x},\varepsilon), \;\; \mathbf{x} \in D\backslash\gamma, \; t > 0, \\
&\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = a, \;\; \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} = b, \;\; u|_{t=0} = u^0(\mathbf{x}), \;\; v|_{t=0} = v^0(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{1}$$

и соответствующую ей эллиптическую задачу (3).

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 \Delta u = f(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 \Delta v = g(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in D \backslash \gamma; \\ &\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} = b, \quad \mathbf{x} \in \Gamma; \end{aligned} \tag{3}$$

Кривые γ и Γ полагаются принадлежащими классу C^∞.

Аналогично главе 3 правые части (1), (3) претерпевают разрыв первого рода, но уже на кривой — при $\mathbf{x} \in \gamma$:

$$f(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \ \mathbf{x} \in D^{(-)}, \\ f^{(+)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \ \mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}; \end{cases}$$

$$g(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} g^{(-)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \ \mathbf{x} \in D^{(-)}, \\ g^{(+)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \ \mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}. \end{cases}$$

Гладкость функций $f^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon)$ и $g^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon)$ связана с порядком асимптотического приближения, которое требуется построить. Для построения приближения n-го порядка необходимо, чтобы $f^{(\mp)} \in C^{(n+2)}(I_u \times I_v \times \overline{D}^{(\mp)} \times [0, \varepsilon_0])$ и $g^{(\mp)} \in C^{(n+2)}(I_u \times I_v \times \overline{D}^{(\mp)} \times [0, \varepsilon_0])$.

Решение задачи (1) понимается в смысле следующего определения.

Определение 4.1. Пара функций $(u_\varepsilon(\mathbf{x}, t), v_\varepsilon(\mathbf{x}, t))$ из класса

$$C\left(\overline{D} \times \mathbb{R}_0^+\right) \cap C^{1,0}\left(\overline{D} \times \mathbb{R}^+\right) \cap C^{2,1}\left((D \backslash \gamma) \times \mathbb{R}^+\right)$$

называется решением задачи (1), если она удовлетворяет уравнениям (1) при $(\mathbf{x}, t) \in (D \backslash \gamma) \times \mathbb{R}^+$, а также граничным и начальным условиям этой задачи.

Решение стационарной задачи (3) понимается следующим образом.

Определение 4.2. Пара функций $(u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$ из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D \backslash \gamma)$ называется решением задачи (3), если она удовлетворяет уравнениям (3) при $\mathbf{x} \in D \backslash \gamma$ и граничным условиям.

Методология, используемая в главе 4, а также накладываемые условия, принципиально не отличаются от глав 2 и 3, однако при построении асимптотического приближения дополнительно использован метод Вишика-Люстерника, что приводит к появлению во всех выражениях параметров, задающих положение на кривой разрыва и/или на границе, тогда как форма самих выражений почти полностью сохраняется.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются Условия 4.1–4.4 и 4.5 (последнее для квазимонотонностей NP и PN типов). Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение $(u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$ задачи* (3) *в смысле Определения 4.2, для которого пара функций $(U_n(\mathbf{x},\varepsilon), V_n(\mathbf{x},\varepsilon))$ является равномерным в $\overline{D}$ асимптотическим приближением с точностью $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$.*

Теорема 4.2. *Пусть выполняются Условия 4.1–4.4 и 4.5 (последнее для квазимонотонностей NP и PN типов). Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение $(u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$ задачи* (3) *локально единственно на множестве $[\,\underline{U_1}(\mathbf{x},\varepsilon), \overline{U}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\,] \times [\,\underline{V_1}(\mathbf{x},\varepsilon), \overline{V}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\,]$ и, как решение задачи* (1)*, асимптотически устойчиво с областью притяжения не меньше $[\,\underline{U_1}(\mathbf{x},\varepsilon), \overline{U}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\,] \times [\,\underline{V_1}(\mathbf{x},\varepsilon), \overline{V}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\,]$.*

В конце главы приведён пример, рассматривается задача в единичном открытом диске D с центром в $(0,0)$, ограниченном окружностью Γ:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^4\Delta u - u_t = u(u-a(\mathbf{x}))(u-1) + uv, \ \ \varepsilon^2\Delta v - v_t = v - b(\mathbf{x})u, \ \ \mathbf{x}\in D, \ t\in\mathbb{R}^+;\\
&\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(\mathbf{x}_\Gamma,t) = \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma}(\mathbf{x}_\Gamma,t) = 0, \ \ \mathbf{x}_\Gamma\in\Gamma, \ t\in\mathbb{R}^+;\\
&u(\mathbf{x},0) = u^0(\mathbf{x}), \ \ v(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \ \mathbf{x}\in\overline{D}.
\end{aligned} \tag{158}$$

При положительных $a(\mathbf{x})$ и $b(\mathbf{x})$ правые части этих уравнений отвечают PN типу квазимонотонности — в таком случае задача (158) представляет собой модель развития Мегаполисов из работ [5,6] с. 3.

Пусть γ — эллипс, заданный уравнением $4x_1^2+9x_2^2 = 1$, тогда $D^{(+)} = \{(x_1,x_2) : 4x_1^2+9x_2^2 < 1\}$ и $D^{(-)} = D\backslash\overline{D}^{(+)}$; положим

$$a(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \mathbf{x}\in D^{(-)}, \\ 0.2, & \mathbf{x}\in\overline{D}^{(+)}; \end{cases} \qquad b(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0.5, & \mathbf{x}\in D^{(-)}, \\ 0.2, & \mathbf{x}\in\overline{D}^{(+)}. \end{cases}$$

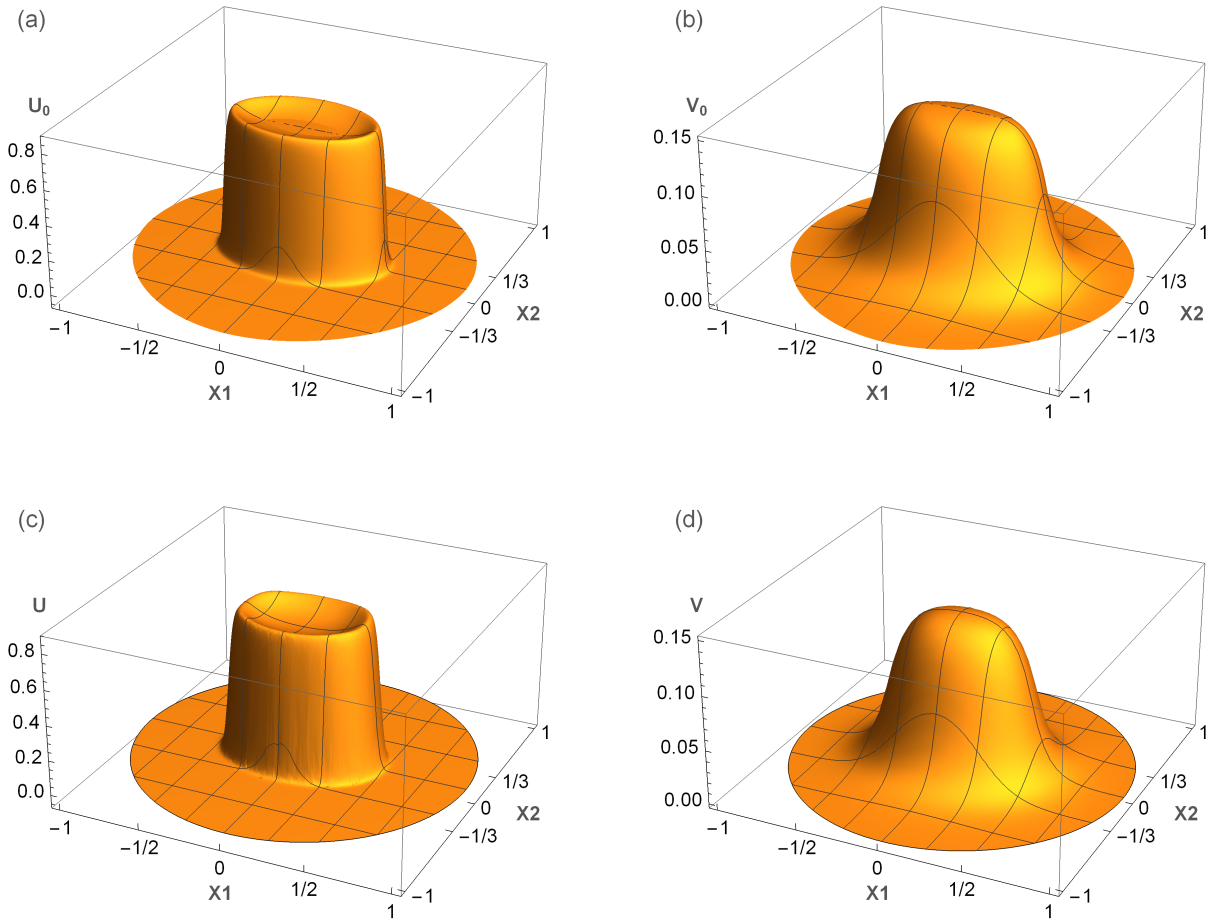

Рисунок 2: Асимптотическое приближение нулевого порядка решения (158) (начальные данные): (a) – U-компонента, (b) – V-компонента. Стабилизированное при большом времени численное решение: (c) – U-компонента, (d)– V-компонента.

<u>Пятая глава</u> посвящена исследованию системы ОДУ (5), первое уравнение которой имеет разрыв правой части по первой искомой переменной, а правая часть второго уравнения представляет собой гладкую по всем переменным функцию.

Рассматривается одномерная задача (5)

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^4 u_{xx} = f(u, v, x, \varepsilon), \quad \text{для п.в. } x \in (-1, 1),\\
&\varepsilon^2 v_{xx} = g(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1),\\
&u'(\mp 1) = a^{(\mp)}, \quad v'(\mp 1) = b^{(\mp)}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Пусть $0 \in Int(I_u)$. Обозначим $S_u^+ := I_u \cap \{u > 0\}, \quad S_u^- := I_u \cap \{u < 0\}$.

Функцию $f(u,v,x,\varepsilon)$ в (5) считаем таковой, что

$$f(u,v,x,\varepsilon)=\begin{cases} f^{(-)}(u,v,x,\varepsilon), & u\in S_u^-, v\in I_v,\ x\in(-1,1)\,,\\ f^{(+)}(u,v,x,\varepsilon), & u\in \overline{S_u^+}, v\in I_v,\ x\in(-1,1)\,. \end{cases}$$

Гладкость функций $f^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,\varepsilon)$ связана с порядком асимптотического приближения, которое требуется построить. Для построения приближения n-го порядка необходимо, чтобы $f^{(\mp)}\in C^{(n+3)}(\overline{S_u^\mp}\times I_v\times[-1,1]\times[0,\varepsilon_0])$ и $g\in C^{(n+3)}(I_u\times I_v\times[-1,1]\times[0,\varepsilon_0])$.

Полагается выполнение шести условий (5.1–5.6), почти идентичных условиям из [11], к которым добавлено новое Условие 5.7.

Условие 5.7. Для всех $(v,x)\in I_v\times[-1,1]$ справедливы неравенства

$$f^{(-)}(0,v,x,0)>0>f^{(+)}(0,v,x,0).$$

Рассматривается только NN-случай квазимонотонности правых частей.

Назовём точку x^*, в которой $u(x^*)=0$, точкой перехода.

Исследуется существование решения (5), имеющего единственное пересечение нуля u-компонентой, причём, аналогично предыдущим двум главам, это решение $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ имеет внутренний переходный слой в окрестности теперь уже заранее неизвестной точки x^*.

Определение 5.1. Пусть x^* — некоторая точка из интервала $(-1,1)$. Назовём пару функций $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ таких, что

$$u_\varepsilon(x)\in C^1[-1,1]\cap C^2((-1,1)\backslash x^*),\quad v_\varepsilon(x)\in C^1[-1,1]\cap C^2(-1,1),$$

решением задачи (5), если $v_\varepsilon(x)$ поточечно удовлетворяет второму уравнению (5) и граничным условиям, а $u_\varepsilon(x)$ удовлетворяет граничным условиям и дифференциальному уравнению $\varepsilon^4u''_\varepsilon=f(u_\varepsilon,v_\varepsilon,x,\varepsilon)$ при всех $x\in(-1,1)\backslash x^*$.

Почти идентично [11] строится асимптотическое приближение решения задачи (5), а также верхнее и нижнее решения. При помощи метода монотонных итераций с использованием методов теории потенциала доказано существование гладкого решения.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются Условия 5.1–5.7. Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (5)*, для которого пара функций* $(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon))$ *является равномерным на отрезке* $[-1,1]$ *асимптотическим приближением с точностью* $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$.

Замечание 5.2. *Для любого решения задачи* (5)*, заключённого между* $\left(\underline{U_n}(x,\varepsilon), \underline{V_n}(x,\varepsilon)\right)$ *и* $\left(\overline{U}_n(x,\varepsilon), \overline{V}_n(x,\varepsilon)\right)$*, пара функций* $(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon))$ *является равномерным асимптотическим приближением одинаковой точности.*

Заключение

Проведён подробный анализ для одномерной (2) и двумерной (1) параболических задач в отношении гладких решений с пограничными слоями и внутренним переходным слоем, порождаемым разрывом первого рода правых частей (реактивных членов) по пространственной переменной. Специального развёрнутого исследования этих задач в пространствах с размерностью 3 и выше не требуется по причине универсальности метода Вишика–Люстерника — достаточно обозначить технические отличия от 2D случая и указать гладкость границы области и многообразия разрыва.

В задаче с разрывом по первой из искомых переменных (5) доказано существование гладкого решения, пересекающего единожды уровень разрыва и имеющего внутренний переходный и пограничные слои.

Доказанные в обоих случаях существование и гладкость решений, а также корректность асимптотического приближения могут служить хорошим подспорьем для разработки численных методов решения исследованных задач, которые являются жёсткими.

Для задачи с известной локализацией разрыва возможен счёт на установление, поскольку доказаны локальная единственность и асимптотическая устойчивость решения.

Перспективным направлением, где могут быть применены результаты диссертационной работы, является исследование изученных задач в контексте стационирования бегущих фронтов, что в настоящее время находит обширное применение в биофизике и других дисциплинах, использующих нелинейные модели распространения волн, — оно имеет свои, иные особенности, обусловленные разрывами правых частей.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Тищенко Б. В.* Существование, локальная единственность и асимптотическая устойчивость погранслойного решения краевой задачи Неймана для системы двух нелинейных уравнений с разными степенями малого параметра // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2021. — № 5. — С. 44–50; 0,44 п.л.
   (РИНЦ; двухлетний импакт-фактор РИНЦ (2024) — 0,169)

   Tishchenko B. V. The Existence, Local Uniqueness, and Asymptotic Stability of the Boundary Layer Type Solution of the Neumann Problem for a Two-Equation Nonlinear System with Different Powers of a Small Parameter // *Moscow University Physics Bulletin* — 2021. — Vol. 76 — P. 296–304; 0,56 п.л.
   (SCOPUS, WoS; 2-year impact factor (2024) — 0,4, SJR (2024) — 0,159)

2. *Левашова Н. Т., Тищенко Б. В.* Существование и устойчивость решения системы двух нелинейных уравнений диффузии в среде с разрывными характеристиками // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2021. — Т. 61, № 11. — С. 1850–1872; 1,44 п.л.
   (РИНЦ; двухлетний импакт-фактор РИНЦ (2024) — 0,680)

   Levashova N. T., Tishchenko B. V. Existence and Stability of the Solution to a System of Two Nonlinear Diffusion Equations in a Medium with Discontinuous Characteristics // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2021. — Vol. 61, no. 11. — P. 1811–1833; 1,44 п.л.
   (SCOPUS, WoS; 2-year impact factor (2024) — 0,7, SJR (2024) — 0,516), CiteScore (2024) — 1,4

   Вклад соавторов

Н. Т. Левашова — постановка задачи.

Б. В. Тищенко — доказательство теорем.

3. *Левашова Н. Т., Тищенко Б. В.* Существование и устойчивость стационарного решения системы уравнений диффузии в среде с разрывными характеристиками при различных условиях квазимонотонности // *ТМФ.* — 2022. — Т. 212, № 1. — С. 62–82; 1,31 п.л.
(РИНЦ; двухлетний импакт-фактор РИНЦ (2024) — 0,506)

   Levashova N. T., Tishchenko B. V. Existence and stability of a stationary solution of the system of diffusion equations in a medium with discontinuous characteristics under various quasimonotonicity conditions // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2021. — Vol. 212, — P. 944–961; 1,13 п.л.
(SCOPUS, WoS; 2-year impact factor (2024) — 1,1, SJR (2024) — 0,353, CiteScore (2024) — 1,8)

   Вклад соавторов
   Н. Т. Левашова — постановка задачи.
   Б. В. Тищенко — доказательство теорем.

4. *Тищенко Б. В.* Существование решений системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейностью модульно-кубического типа // *ТМФ.* — 2023. — Т. 215, № 2. — С. 318–335; 1,13 п.л.
(РИНЦ; двухлетний импакт-фактор РИНЦ (2024) — 0,506)

   Tishchenko B. V. Existence of solutions of a system of two ordinary differential equations with a modular–cubic type nonlinearity // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2023. — Vol. 215, — P. 735–750; 1 п.л.
(SCOPUS, WoS; 2-year impact factor (2024) — 1,1, SJR (2024) — 0.353, CiteScore (2024) — 1,8)

5. *Nefedov N. N., Tishchenko B. V., Levashova N. T.* An Algorithm for Construction of the Asymptotic
Approximation of a Stable Stationary Solution to a Diffusion Equation System with a Discontinuous Source Function // *Algorithms.* — 2023. — Vol. 16, no. 9. — P. 359; 1,44 п.л.

(SCOPUS, WoS; 2-year impact factor (2024) — 2,1, SJR (2024) — 0,515, CiteScore (2024) — 4,5)

Вклад соавторов

Н. Н. Нефёдов — постановка задачи.

Н. Т. Левашова — предложена постановка задачи иллюстративного примера 4.6 (см. Рис. 2).

Б. В. Тищенко — доказательство теорем, численно-аналитическая реализация иллюстративного пример 4.6 (см. Рис. 2).

Также Н. Т. Левашова и Н. Н. Нефёдов в процессе выполнения всех работ участвовали в обсуждении результатов работы.

Научное издание

Тищенко Богдан Викторович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук на тему:

Решения с переходными слоями в системе уравнений реакция-диффузия с разрывными источниками различной интенсивности