МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Коняев Андрей Юрьевич

Геометрия Нийенхейса и её приложения

1.1.3. Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2025

Диссертация подготовлена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико–математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Официальные – оппоненты

Орлов Дмитрий Олегович,
доктор физико-математических наук,
профессор, академик РАН,
Математический институт им В.А.Стеклова РАН, отдел алгебраической геометрии, заведующий отделом

Миронов Андрей Евгеньевич,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, и. о. директора

Глуцюк Алексей Антонович,
доктор физико-математических наук,
Московский физико-технического институт (национальный исследовательский университет), Высшая школа современной математики, Лаборатория динамики и стохастики сложных систем имени Р. Л. Добрушина, исследователь.

Защита диссертации состоится «19» декабря 2025 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3571/

Автореферат разослан «______» октября 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук **В.А. Кибкало**

Общая характеристика работы

Диссертационная работа относится к области математики, которая находится на пересечении дифференциальной геометрии, теории интегрируемых систем и математической физики. Полученные в работе результаты закладывают основы нового направления дифференциальной геометрии — геометрии Нийенхейса и её приложений.

В диссертационной работе А.Ю.Коняева исследуются многообразия с заданными на них операторными полями с нулевым кручением Нийенхейса, их нормальные формы в регулярных и особых точках, симметрии, законы сохранения, функции от таких операторных полей и пучки нийенхейсовых структур; устанавливается связь с естественными комплексными структурами. Приведённые объекты рассматриваются как в гладком, так и в вещественно-аналитическом и комплексно-аналитическом случаях. Также в работе рассматриваются алгебраические структуры, связанные с операторами Нийенхейса, и их приложениями — коммутативные ассоциативные алгебры и пучки таких алгебр, левосимметрические алгебры, бесконечномерные коммутативные подалгебры в алгебре операторных полей, а также алгебры Ли со специальными базисами.

Полученные в диссертации теоретические результаты применяются к задачам о существовании операторов Нийенхейса на компактных многообразиях, задачам классификации пучков гамильтоновых операторов, задачам из теории проективно-эквивалентных метрик и задачам теории интегрируемых систем, допускающих разделение переменных. Строятся новые классы конечномерных, а также бесконечномерных скобок Пуассона. Для построенных конечномерных систем доказывается полнота и дается классификация в малых размерностях.

История вопроса

В 1951 году Я. А. Схоутен опубликовал статью [1], в которой решил следующую задачу: пусть на многообразии задано операторное поле L, и его собственные значения вещественны и различны в каждой точке. Когда найдется система координат, в которой оператор приводится к диагональному виду? Решение Схоутена выглядело следующим образом: по оператору, диагонализуемому в каждой точке, можно построить метрику g с условием $g(L\xi, \eta) = g(\xi, L\eta) = h(\xi, \eta)$. Обозначим собственные вектора операторного поля как $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда критерий существования «диагональной» системы координат имеет вид

$$\nabla_p h_{qs} \xi_i^p \xi_j^q \xi_k^s = 0, \quad i \neq j, j \neq k, i \neq k.$$

Здесь ∇ — связность Леви-Чивиты, соответствующая метрике g. А. Нийенхейс предложил совершенно иное решение. Он ввел тензор

$$\mathcal{N}_L(\xi, \eta) = L^2[\xi, \eta] + [L\xi, L\eta] - L[L\xi, \eta] - L[\xi, L\eta]$$

Здесь ξ, η — произвольные векторные поля, а скобки $[\,,\,]$ обозначают стандартный коммутатор векторных полей. С его помощью он сформулировал условие на L,

[1] Schouten J. A., Sur les tenseurs de V^n aux directions principales V^{n-1}-normales // Colloque Géom. diff., Louvain, Centre Belge Rech. math, pp. 67–70. (1951)

которое не требовало привлечения дополнительной структуры, то есть метрики [2]. Сам тензор получил название кручения Нийенхейса. Окончательно критерий диагонализуемости был записан в виде обнуления некоторого тензорного поля Й. Хаантьесом в работе [3]. Еще раз подчеркнём, что все упомянутые результаты касались полупростых операторов с вещественным спектром.

Тот факт, что правая часть выражения для $\mathcal{N}_L$определяет тензор, оказался следствием существования естественной операции на векторозначных дифференциальных формах. Сам Нийенхейс называл её просто дифференциальным конкомитантом, а позже она получила название скобки Фролихера-Нийенхейса. Теория этой скобки была развита в серии работ [4] [5] [6] [7] совместно с А. Фролихером. Среди прочего, удалось доказать градуированное тождество Якоби для данной скобки, что дало толчок к развитию теории градуированных супералгебр Ли.

Самым известным приложением кручения Нийенхейса является почти комплексная структура. Говорят, что на многообразии M^n задана почти комплексная структура, если на нём задано операторное поле J с условием $\mathsf{J}^2 = -\mathrm{Id}$. Любое комплексное многообразие, очевидно, является почти комплексным — в качестве оператора J на касательном пространстве к овеществлению достаточно взять оператор умножения на мнимую единицу i . При этом в системе координат, полученной овеществлением комплексной функции, компоненты оператора постоянны. То есть $\mathcal{N}_L = 0$. Верно и обратное: почти комплексная структура J с условием $\mathcal{N}_L = 0$ задает комплексную структуру. Это теорема Ньюландера-Ниренберга[8].

В 60-х годах операторы Нийенхейса стали активно использоваться в изучении G-структур. Как следствие, это привело к пристальному изучению операторов с постоянными собственными значениями и нильпотентных операторов Нийенхейса в частности: [9]. Вопрос о приведении нильпотентного операторного поля к постоянному виду был решён в аналитическом случае при некоторых дополнительных предположениях Х. Осборном [10], а позже М. Грифоном и Дж. Мехди [11] для аналитических операторов Нийенхейса в общем случае. Для гладких операторов ре-

---

[2] Nijenhuis A., X_{n-1}-forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae (Proceedings), **54**, pp. 200-212 (1951)

[3] Haantjes J., On X_m-forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae, **17**, pp.158-162 (1955)

[4] Nijenhuis A., Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. I // Indagationes Mathematicae **58** pp. 390–397 (1955)

[5] Nijenhuis A., Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. II // Indagationes Mathematicae **58** pp. 398–403 (1955)

[6] Frölicher A., Nijenhuis A., Theory of vector-valued differential forms. Part I. Derivations in the Graded Ring of Differential Forms // Indagationes Mathematicae, **18** pp.338–359 (1956) DOI: https://doi.org/10.1016/S1385-7258(56)50046-7

[7] Frölicher A., Nijenhuis A., Theory of vector-valued differential forms. Part II. Almost complex structures // Indagationes Mathematicae, **18** pp. 422–429 (1958)

[8] Newlander A., Nirenberg L., Complex analytic coordinates in almost complex manifolds // Annals of Mathematics. Second Series, **65** (3), pp. 391–404 (1957)

[9] Kobayashi E. T., A remark on the Nijenhuis tensor // Pacific Journal of Mathematics, **12** (4), pp. 1467–1467 (1962)

[10] Osborn H., The existence of conservation laws I // Annals of Mathematics, **69**, pp. 105–118 (1959)

[11] Grifone J., Mehdi M., Existence of conservation laws and characterization of recursion operators for completely integrable systems // Transactions of American Mathematical Society, **349**(11), pp. 4609–4633 (1997)

зультат был получен Дж. Томпсоном в [12]. Доказательство Томпсона содержало лакуны.

В конце 60-х - начале 70-х годов операторы Нийенхейса возникли в бесконечномерных интегрируемых системах в связи с операторами рекурсии. Известно, что уравнение Кортвега-де Фриза $u_t = u_{xxx} + 3uu_x$ может быть записано в виде

$$u_t = D(Ru),$$

где D — дифференцирование по x, а R — интегро-дифференциальный оператор

$$R = D^2 + 2u + 2D^{-1}uD.$$

При этом высшие симметрии уравнения записываются с помощью этого оператора как $u_{t_k} = D(R^k u)$. Впервые этот оператор был предложен Э. Ленардом [13] [14]. Позже такие же операторы были найдены в интегрируемых системах, таких как уравнение sin-Гордона, модифицированное уравнение КдФ, уравнение Бургерса и другие [15]. Ф. Магри в [16] связал наличие оператора рекурсии с существованием пары согласованных скобок Пуассона. В случае КдФ пара скобок Пуассона задается гамильтоновыми операторами $\pi_1 = D$ и $\pi_2 = D^3 + 2uD + u_x$.

Чуть позже в работах И. М. Гельфанда, И. Я. Дорфман и П. Дж. Олвера [17] [18] [19] было установлено, что оператор рекурсии, связывающий пару гамильтоновых операторов, — оператор Нийенхейса. Для него также определено кручение с той лишь разницей, что коммутаторы в правой части формулы — это коммутаторы эволюционных векторных полей на бесконечномерном расслоении джетов $J^\infty \mathrm{M}^n$. Таким образом, возникла бесконечномерная теория операторов Нийенхейса, как интегро-дифференциальных операторов. Ключевым элементом многокомпонентного оператора рекурсии в работах М. Антановича и А. Форди [20][21][22] является дифференциально невырожденный оператор Нийенхейса.

---

[12] Thompson G., The integrability of a field of endomorphisms // Mathematica Bohemica, **127**(4), pp. 605-611 (2002)

[13] Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., Korteweg-devries equation and generalizations. VI. methods for exact solution, Communications in Pure and Applied Mathematics, **27**(1), pp.97-133 (1974)

[14] Zakharov V.E., Konopelchenko B.G., On the theory of recursion operator // Communications in Mathematical Physics, **94**, pp. 483–509, (1984)

[15] Olver P.J., Evolution equations possessing infinitely many symmetries // Journal of Mathematical Physics, **18**(6), pp. 1212–1215, (1977)

[16] Magri F., A simple model of the integrable Hamiltonian equation // Journal of Mathematical Physiscs, **19**(5), pp. 1156-1162 (1978)

[17] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я., Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функциональный анализ и его приложения, **13**(4), стр. 13–30 (1979) DOI: https://doi.org/10.1007/BF01078363

[18] Dorfman I., Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations // Volume 18 van Nonlinear Science: Theory and Applications, Wiley, 188 p (1993)

[19] Olver P.J., Applications of Lie Groups to Differential Equations // Graduate Texts in Mathematics, Springer (1986)

[20] Antonowicz M., Fordy A., Coupled Harry Dym equations with multi-Hamiltonian structures // Journal of Physics A: Mathematical and General, **21**(5), pp. 345–357 (1987)

[21] Antonowicz M., Fordy A., Coupled KdV equations with multi-Hamiltonian structures // Physica D: Nonlinear Phenomena **28** (3), pp. 345-357 (1987)

[22] Antonowicz M., Fordy A., Factorisation of energy dependent Schrödinger operators: Miura maps and modified systems // Communications in Mathematical Physics, **124**, pp. 465–486, (1989)

В 80-х Б. А. Дубровин и С. П. Новиков предложили гамильтонов формализм для многокомпонентных систем гидродинамического типа [23]. Оказалось, что гамильтонов оператор такой скобки Пуассона записывается в виде

$$\pi^{ij} = g^{ij}D - \Gamma^{ij}_k u^k_x, \tag{1}$$

где g — плоская метрика, а Γ^{ij}_s — её контрвариантные символы Кристоффеля. Для гамильтониана вида $h = \int f(u)$, где плотность функционала зависит только от координат (и не зависит от производных координат) гамильтоново векторное поле принимает вид

$$u^i_t = \nabla^i \nabla_j f u^j_x,$$

то есть является квазилинейным уравнением с операторным полем $L^i_j = \nabla^i \nabla_j f$. Скобки такого вида возникают в физике, например, при квантовании движения гелия-2 вблизи абсолютного нуля в работах Л. Д. Ландау [24] [25].

В более работах [26] [27] Б. А. Дубровин предложил рассматривать согласованные скобки типа гидродинамического типа. Такие скобки, например, возникали в теории фробениусовых многообразий [28]. В этом случае метрики, задающие такие скобки, образуют естественный объект — так называемый плоский пучок метрик. Оказывается, что если метрики образуют плоский пучок, то оператор $L = \bar{g}g^{-1}$ — оператор Нийенхейса [29]. Более того, если спектр оператора вещественный и простой, то это верно и обратное: плоская метрика g и метрика $\bar{g} = Lg$ образуют плоский пучок. Позже эти результаты были значительно обобщены О. И. Моховым [30] [31] [32], в частности, на метрики постоянной кривизны.

В предыдущем примере оператор L — это не весь оператор рекурсии, а лишь его «часть», содержащая при этом довольно много информации. Стоит отметить, что теория классификации согласованных пучков гидродинамического типа (она же теория центральных инвариантов) в общем случае развита только для операторов Нийенхейса с простым вещественным спектром [33]. Что происходит в случае жорданова блока — вопрос открытый.

[23] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема // Доклады Академии Наук СССР, **270**(4), стр. 781–785 (1983)

[24] Ландау Л.Д., Теория сверхтекучести гелия-II // Успехи физических наук, **93**, стр. 495–520 (1967)

[25] Лифшиц Е.М., Теория сверхтекучести гелия II // Успехи физических наук, **34**(4), стр. 512–559 (1948)

[26] Dubrovin B.A., Differential geometry of the space of orbits of a Coxeter group // Preprint SISSA, Trieste, 1993, hep-th/9303152

[27] Dubrovin B.A., Geometry of 2D topological field theories // Lecture Notes in Mathematics,1620, Springer-Verlag pp.120-348 (1996)

[28] Dubrovin B.A., Flat pencils of metrics and Frobenius manifolds, integrable systems and algebraic geometry // Proceedings of the Taniguchi symposium 1997, Kobe, June 30 - July 4, 1997 and Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, July 7 - 11, 1997, (1997)

[29] Ferapontov E.V., Compatible Poisson brackets of hydrodynamic type // Journal of Physics A: Mathematical and General, **34**, pp. 2377–2388 (2001)

[30] Mokhov O.I., Compatible flat metrics // Journal of Applied Mathematics,**2**(7), pp. 337–370 (2002)

[31] Mokhov O.I., Pencils of compatible metrics and integrable systems // Russian Mathematical Surveys, **72**(5), pp. 889–937 (2007)

[32] Мохов О.И., Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики // Функциональный анализ и его приложения, **35**(2), стр. 24–36 (2001)

[33] Dubrovin B., Zhang Y., Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov - Witten invariants // arXiv:math/0108160, 189 pp. (2001)

В конечномерном случае оператор рекурсии для системы записывается для пары согласованных скобок π_1, π_2 как $\pi_1 \pi_2^{-1}$ (π_2 предполагается невырожденной) [34]. Важно помнить, что операторы рекурсии для конечномерных интегрируемых систем в механике и физике, в отличие от бесконечномерного случая, были найдены уже после того, как системы были проинтегрированы.

Отметим, что мы говорим не только о классической механике. Например, в серии работ Дж. Мармо, Г. Виласи и других [35] [36] [37] [38] было предложено искать операторы рекурсии для уравнений общей теории относительности. В 2010-х эта программа была в значительной мере выполнена — операторы были найдены для черных дыр Керра-Ньюмана (вращающаяся заряженная черная дыра), космологической модели Фридмана — Леметра — Робертсона — Уокера [39] и даже таких экзотических решений, как двигатель Алькубьерре [40].

Важно упомянуть, что в теории интегрируемых систем операторы Нийенхейса возникают не только как операторы рекурсии. Напомним, что уравнение Гамильтона-Якоби — один из эквивалентных способов формулирования классической механики [41] [42] [43] [44] [45]. Решение уравнения Гамильтона-Якоби — это функция $W(u, c)$, называемая иногда полным интегралом, которая зависит от координат u, n параметров и удовлетворяет условию невырожденности.

В своих лекциях по механике К. Г. Якоби [46] проинтегрировал задачу Кеплера, показав, что в подходящей системе координат — эллиптической — полный интеграл имеет вид $W(u, c) = W_1(u^1, c) + \cdots + W(u^n, c)$. Полученные системы получили название систем, допускающих разделение переменных, и стали пристальным объ-

[34] Magri F., A geometrical characterization of Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds // Quaderni di Matematica, Working paper del dipartimento (2008)

[35] Marmo G., Vilasi G., When Do Recursion Operators Generate New Conservation Laws? // Physical Letters B, **277** pp. 137–140 (1992)

[36] De Filippo S., Marmo G., Salerno M. and Vilasi G., A New Characterization of Completely Integrable Systems // Nuovo Cimento B, **83** pp. 97–112 (1984)

[37] De Filippo S., Marmo G. and Vilasi G., A Geometrical Setting for the Lax Representation // Physical Letters B, **117** pp. 418–422 (1982)

[38] Landi G., Marmo G. and Vilasi G., Recursion Operators: Meaning and Existence for Completely Integrable Systems // Journal of Mathematical Physics, **35** pp. 808–815 (1994)

[39] Takeuchi T. On the construction of recursion operators for the Kerr-Newman and FLWR metrics // Journal of Geometry and Symmetry in Physics, **37**, pp. 85-96 (2015)

[40] Hounkonnou M.N., Landalidji M.J., Mitrović M., Hamiltonian dynamics of a spaceship in Alcubierre and Gödel metrics: Recursion operators and underlying master symmetries // Theoretical and Mathematical Physics, **212**, pp. 1001–1018 (2022)

[41] Jacobi, C. G. J., Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen Irgendeiner Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen // Journal für die reine und angewandte Mathematik, **17**, pp. 97–162 (1837)

[42] Hamilton W.R., On a general method in dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function // Philosophical Transactions of the Royal Society, pp. 247–308 (1834)

[43] Hamilton W.R., Second essay on a general method in dynamics // Philosophical Transactions of the Royal Society, pp. 95–144 (1835)

[44] Nakane M., Fraser C.G., The Early History of Hamilton-Jacobi Dynamics 1834–1837 // Centaurus, **44**(3-4), pp. 161-227 (2002)

[45] Трофимов В.В., Фоменко А.Т., Алгебра и геометрия интегрируеымых гамильтоновых дифференциальных уравнений // Издательство "Факториал Москва (1995)

[46] Jacobi C.G.J., Lectures on Dynamics: Delivered at the University of Konigsberg in the Winter Semester 1842-1843 and According to the Notes Prepared by C. W. Brockardt // Hindustan Book Agency, India (2009)

ектом изучения таких математиков, как П. Штекель, Л. П. Эйзенхарт, Е. Калнинс, Дж. Кресс, У. Миллер, С. Бененти [47] [48] [49] [50] [51] [52].

Современный подход связывает существование переменных разделения с существованием так называемого конциркулярного конформного тензора Киллинга [53] [54] [55] [56]. Разделяющиеся координаты u в этом случае определяются как $L^* \mathrm{d}u^i = u^i \mathrm{d}u^i$, то есть собственные значения соответствующего оператора. В частности, во всех таких конструкциях оператор является полупростым, а его собственные значения — функционально независимыми.

В работе Б. Л. Рождественского и А. Д. Сидоренко [57] было доказано, что в предположении слабой нелинейности в квазилинейных системах градиентная катастрофа не возникает. Слабонелинейные интегрируемые системы такого типа в диагональном случае рассматривались Е. В. Ферапонтовым [58]. Эти системы оказались связаны с тензорами Киллинга для метрик, допускающих разделение переменных. Также они возникали при построении решений универсальной солитонной иерархии А. Б. Шабата [59] [60].

С задачей разделения переменных тесно связана задача описания геодезически эквивалентных метрик: метрики g и $\tilde{g}$ называются геодезически эквивалентными, если их геодезические совпадают как непараметризованные кривые. Свое начало изучение этих замечательных объектов берет в работах У. Дини, Э. Бельтрами, Т.

[47] Stäckel P., Über die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, // Mathematische Annalen, **42**, pp. 537-563 (1893)

[48] Stäckel P., Über quadatizche Integrale der Differentialgleichungen der Dynamik, // Annali di Matematica Pura ed Applicata, **25**, pp. 55-60 (1897)

[49] Eisenhart L.P., Separable systems of Stäckel // Annals of Mathematics, **35**(2), pp. 284-305 (1934)

[50] Eisenhart L.P., Stäckel Systems in Conformal Euclidean Space // Annals of Mathematics, **36**(2), pp. 57-70 (1935)

[51] Benenti S.,. Orthogonal separable dynamical systems // Differential geometry and its applications, **1**, pp. 163–184 (1993)

[52] E.G. Kalnins, J. M. Kress, Wi. Miller, Separation of Variables and Superintegrability: The symmetry of solvable systems // ISBN: 978-0-7503-1314-8 (2018)

[53] Crampin M., Conformal Killing tensors with vanishing torsion and the separation of variables in the Hamilton–Jacobi equation // Differential Geometry and its Application, **18**, pp. 87–102 (2003)

[54] Rajaratnam K., McLenaghan R.G., Valero C., Orthogonal Separation of the Hamilton–Jacobi Equation on Spaces of Constant Curvature // SIGMA **12**, pp. 117-147 (2016)

[55] Blaszak M., Marciniak K., From Stäckel systems to integrable hierarchies of PDE's: Benenti class of separation relations // Journal of Mathematical Physics, **47**(3) (2006) DOI: https://doi.org/10.1063/1.2176908

[56] Blaszak M., Marciniak K., Stäckel systems generating coupled KdV hierarchies and their finite-gap and rational solutions // Journal of Physics A, **41**(48) (2008). DOI: https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/48/485202

[57] Б. Л. Рождественский, А. Д. Сидоренко, О невозможности "градиентной катастрофы" для слаболинейных систем // Журнал вычислительной математики и математической физики, **7**(5), стр. 1176–1179 (1967)

[58] Ferapontov E. V., Integration of weakly nonlinear hydrodynamic systems in Riemann invariants // Physical Letters A, **158**(3-4), pp. 112–118 (1991)

[59] Шабат А. Б., Симметрические многочлены и законы сохранения // Владикавказский матемематический журнал, **14**(4), стр. 83–94 (2012)

[60] Shabat A., Universal Solitonic Hierarchy // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, **12**, pp. 614–624 (2005)

Леви-Чивита [61] [62] [63] и других. Серьезные достижения в последние 20 лет в этой науке связаны с использованием операторов Нийенхейса, которые нетривиальным образом скрываются в формулировке задачи [64] [65] [66] [67] [68] [69]. Примечательно, что здесь возникают операторы самых разных видов, не обязательно полупростые.

И. Косманн-Шварцбах и Ф. Магри предложили [70] общее понятие структуры Пуассона-Нийенхейса на произвольной алгебре Ли. Эта структура связана как с деформацией алгебры в бесконечномерном случае, так и с интегрируемыми системами в конечномерном. Например, система Манакова [71] возникает как частный случай такой структуры. Вопрос существования такой структуры Пуассона-Нийенхейса для конкретных алгебр оказался сложной и интересной задачей. Интересные результаты в этом направлении были получены Е. Жихаревой [72].

Естественный класс операторов Нийенхейса, который стоит за упомянутыми структурами в конечномерном случае, — это левоинвариантные операторы Нийенхейса на группах. Для таких операторов все точки группы должны быть регулярными, и их собственные значения постоянны.

Левосимметрические алгебры возникли в работах Э. Б. Винберга [73], посвященных однородным конусам. Этот объект связан с гамильтоновым оператором первого порядка, линейно зависящим от координат. Позже такая же алгебраическая структура возникла в работе С. П. Новикова и А. А. Балинского [74] и с подачи Дж. Осборна получила название алгебр Новикова. Приложения таких алгебр в

---

[61] Dini U., Sopra un problema che si presenta nella theoria generale delle rappresetazioni geografice di una superficie su un'altra // Annali di Matematica Pura ed Applicata, **3**, pp. 269–293 (1869)

[62] Beltrami E., Resoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che lelinee geodetische vengano rappresentante da linee rette // Annali di Matematica Pura ed Applicata, **1**(7) pp. 185–204 (1865)

[63] Levi-Civita T., Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per sepa razione di variabili // Mathematische Annalen, **59**, pp. 383-397 (1904)

[64] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Pucacco G., Normal forms for pseudo-Riemannian 2-dimensional metrics whose geodesic flows admit integrals quadratic in momenta // Journal of Geometry and Physics, **59**(7), pp. 1048-1062 (2009)

[65] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Geometrical interpretation of Benenti systems // Journal of Geometry and Physics, **44**(4), pp. 489–506 (2003)

[66] Bolsinov A.V., Kiosak V., Matveev V.S., A Fubini theorem for pseudo-Riemannian geodesically equivalent metrics // Journal of London Mathematical Society, **80**(2) pp. 341–356 (2009)

[67] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Splitting and gluing lemmas for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics // Transactions of AMS, **363** (8) pp. 4081–4107 (2011)

[68] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Local normal forms for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics // Transactions of AMS, **367** (9) pp. 6719–6749 (2015)

[69] А. В. Болсинов, В. С. Матвеев, А. Т. Фоменко, Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия // Математический сборник, **189**(10), стр. 5-32 (1998)

[70] Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F., Poisson-Nijenhuis structures // Annales de l'Institut Henri Poincaré, **53**, pp. 35-81 (1990)

[71] Манаков С.В., Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функциональный анализ и его приложения, **10** (4), стр. 93-94 (1976)

[72] Zhihareva E., Three-dimensional Lie algebras admitting regular semisimple algebraic Nijenhuis operators // preprint, arXiv:2410.10536 (2024)

[73] Vinberg E.B., Convex homogeneous cones // Transactions of the Moscow Mathematical Society, **12**, pp. 340-403 (1963)

[74] Балинский А.А., Новиков С.П., Скобки Пуассона гидродинамического типа, Фробениусовы алгебры и алгебры Ли // Доклады АН СССР, **283**(5), стр. 1036–1039 (1985)

математической физике крайне многочисленны [75] [76] [77].

А. Винтерхалдер показал [78], что конечномерные левосимметрические алгебры находятся во взаимно-однозначном соответствии с операторами Нийенхейса, которые линейно (в смысле некоторой аффинной структуры) зависят от координат. В целом, алгебраических структур, связанных с операторами Нийенхейса, крайне много. Например, связанных с группоидами и алгеброидами [79].

Масштаб и актуальность темы исследования

Как мы видим, в середине 2010-х годов накопилось большое количество результатов, связанных с операторами Нийенхейса, а сами операторы прочно заняли свое место в самых разных приложениях. Несмотря на это, хорошо видно, что общей теории операторов Нийенхейса не существовало. Более того, большинство примеров операторов Нийенхейса были либо диагональными, либо имели постоянные собственные значения (теоремы Томпсона и Ньюландера-Ниренберга). Случай комплексных значений рассматривался лишь спорадически.

Во многом это всё напоминало ситуацию с пуассоновой геометрией. Скобка Пуассона была открыта В. Р. Гамильтоном в начале XIX века. Скобка на двойственном пространстве к алгебре Ли изучалась ещё С. Ли. При этом полноценная геометрическая теория скобок Пуассона появилась только в работах второй половины XX века. Основные объекты — пуассоново многообразие, симплектическое слоение, функции Казимира — возникли в работах А. Вайнштейна [80] [81] [82].

С целью создания последовательной теории операторов Нийенхейса в 2017 году возник проект «геометрия Нийенхейса», основные идеи которого были заложены в статье А. В. Болсинова, А. Ю. Коняева, В. С. Матвеева [83].

Геометрией в современном понимании принято называть многообразие, снабженное тензорным полем с некоторым «условием интегрируемости». Приведем несколько примеров.

1. Риманова геометрия. Здесь многообразие снабжено невырожденным симметричным тензором с нижними индексами g_{ij}. Условия интегрируемости, возникающие в этом случае, носят характер условий на тензор кривизны. На-

[75] Osborn J. M., Novikov algebras // Nova Journal of Algebra and Geometry, **1**, pp. 1-14 (1992)

[76] Osborn J. M., Simple Novikov algebras with an idempotent // Commutative Algebra, **20**(9), pp. 2729–2753 (1992)

[77] Burde D., Left-Symmetric Algebras, or Pre-Lie Algebras in Geometry and Physics // Central European Journal of Mathematics **4**(3), pp. 323-357 (2006)

[78] Winterhalder A., Linear Nijenhuis-Tensors and the Construction of Integrable Systems // arXiv.org:9709008, 1997

[79] Pugliese F., Sparano G., Vitagliano L., Integrating Nijenhuis structures // Annali di Matematica Pura ed Applicata, **220**, pp. 1907–1930 (2023)

[80] da Silva A.C., Weinstein A., Geometric Models for Noncommutative Algebras // Berkeley Mathematics Lecture Notes, (1999) ISBN 978-0-8218-0952-5

[81] Weinstein A., The local structure of Poisson manifolds // Journal of Differential Geometry, **18**(3), pp. 523-557 (1983)

[82] Арнольд В. И.,Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Электронное издание, Москва: МЦНМО, 2014, 379 с.

[83] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., Applications of Nijenhuis geometry: non-degenerate singular points of Poisson–Nijenhuis structures // European Journal of Mathematics, **8**, pp. 1355—1376 (2021) DOI: https://doi.org/10.1007/s40879-020-00429-6

пример,

$$R^{ij}_{kl} = K(\delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k),$$

где K — некоторая константа (метрика постоянной секционной кривизны). В общей теории относительности метрика удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{ij},$$

где R_{ij} — тензор Риччи, R — скалярная кривизна, Λ — космологический член, c — скорость света в вакууме, G — гравитационная постоянная Ньютона, а T_{ij} — тензор энергии-импульса материи

2. Пуассонова геометрия. Скобка Пуассона на многообразии задается бивектором Пуассона π^{ij}, то есть кососимметрическим тензором с двумя верхними индексами. Условие интегрируемости в этом случае имеет вид

$$\pi^{is}\frac{\partial \pi^{jk}}{\partial u^s} + \pi^{js}\frac{\partial \pi^{ki}}{\partial u^s} + \pi^{ks}\frac{\partial \pi^{ij}}{\partial u^s} = 0, \quad 1 \le i, j, k \le n.$$

Это условие — это тождество Якоби для скобки Пуассона, и оно же — обращение в ноль скобки Схоутена π с собой.

3. Симплектическая геометрия. В этом случае на многообразии задан невырожденный кососимметрический тензор с двумя нижними индексами ω_{ij}. Условие интегрируемости в данном случае $\mathrm{d}\omega = 0$.

В геометрии Нийенхейса тензорное поле также имеет ранг два, как в римановой и пуассоновой геометриях, однако, относится к смешанному типу тензоров. Другими словами, мы рассматриваем многообразие, снабженное тензорным полем типа $(1,1)$.

В книге Колара, Словака и Микора[84] вводится понятие естественной тензорной операции. Оказывается [85], что любое естественное отображение из тензорных полей $\Psi^1(\mathrm{M}^n)$ типа $(1,1)$ в тензорные поля типа $(1,2)$, которое линейно по компонентам L^i_j и производным $\frac{\partial L^i_j}{\partial u^k}$, представляется как линейная комбинация выражений вида

$$\mathcal{N}_L, \quad L\otimes \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L, \quad \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L\otimes L, \quad \mathrm{Id}\otimes L^*\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L, \quad L^*\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L\otimes \mathrm{Id},$$
$$\mathrm{Id}\otimes \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L^2, \quad \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L^2\otimes \mathrm{Id}, \quad \mathrm{tr}\,L\cdot \mathrm{Id}\otimes \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L \quad \mathrm{tr}\,L\cdot \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,L\otimes \mathrm{Id}$$

с постоянными коэффициентами. Легко увидеть, что кручение Нийенхейса — единственное из представленных нетривиальное тензорное соотношение.

Таким образом, основным объектом изучения диссертационной работы А. Ю. Коняева является многообразие, снабженное операторным полем L с условием $\mathcal{N}_L = 0$. Такие операторные поля мы будем называть операторами Нийенхейса.

Круг задач новой геометрии выглядит следующим образом:

[84] Kolář I., Slovák, Michor P.W., Natural Operations in Differential Geometry // Springer-Verlag Berlin Heidelberg, VI, 434 pp. (1993) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-02950-3

[85] Пунинский Е. Г., Естественные операторы на тензорных полях // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика, **5**, стр. 58-62 (2014)

1. Локальные вопросы. Описание нормальных или полунормальных форм операторов Нийенхейса в окрестности точки общего положения. При этом, вообще говоря, требуется определить, что означает понятие точки общего положения. Учитывая, что уже на линейном уровне задача классификации операторов значительно сложнее, чем, скажем, задача классификации билинейных форм, естественно ожидать, что некоторые регулярные точки окажутся сложнее сингулярных;

2. Полулокальные вопросы или особые точки. Теорема о расщеплении [86] сводит эту задачу описания нормальной формы оператора Нийенхейса к описанию нормальных форм в окрестностях точек, где все собственные значения оператора совпадают. Среди прочего здесь подразумевается выделения классов особых точек для изучения. В частности, существуют особые точки, в окрестностях которых можно найти подходящие нормальные формы. Отметим, что особые точки операторов Нийенхейса в классических работах вовсе не рассматривались;

3. Глобальные вопросы. Здесь речь идет о результатах, связывающих топологические свойства многообразий с наличием на них операторов с определёнными характеристиками. Скажем, о утверждениях в духе теоремы Стинрода, запрещающей почти-комплексные структуры на сферах всех размерностей, кроме двух и шести. Либо теория когомологий, связанная с операторами Нийенхейса. Кроме того, поиск естественных классов многообразий Нийенхейса (желательно, топологически нетривиальных), которые интересны в приложениях к смежным областям — интегрируемым системам и математической физике в частности;

4. Алгебраические вопросы. Как мы видим, операторы Нийенхейса связаны с различными видами конечномерных и бесконечномерных алгебр, возникающих в интегрируемых системах.

Помимо внутренних вопросов, теория должна быть полезна для приложений. Эмпирически было установлено, что приложения чаще всего связаны с наличием у оператора Нийенхейса некоторого родственного объекта-компаньона, который через него выражается. Чаще всего это дополнительное тензорное поле — форма, векторное поле, метрика и так далее — которое задается либо явной формулой, либо алгебраическими уравнениями, либо уравнениями, интегрируемыми в квадратурах. В свою очередь, в диссертации А. Ю. Коняева возникает целый класс новых вопросов:

1. Идентифицировать в приложениях, где возник оператор Нийенхейса, партнерский объект. Решение возникающих уравнений — например, когда они интегрируются в квадратурах — само по себе может представлять значительный интерес;

2. Локальная, полулокальная и глобальная теория. Все те же вопросы, которые возникали в случае одного оператора L, уместно задать в случае наличия

[86] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., Nijenhuis geometry // Advances in Mathematics, **394**, p. 108001 (2022) DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.108001

партнерских объектов. Скажем, если партнерский объект — векторное поле, то возникает вопрос, к какому виду приводится пара оператор-векторное поле, какие возникают особенности и так далее;

3. Специфические вопросы, связанные с конкретными приложениями. Здесь всё зависит от конкретных примеров.

Хорошо видно, что задачи, стоящие перед геометрией Нийенхейса, многочисленны и разнообразны.

Цели и задачи диссертации

Основными целями диссертации являются создание теории многообразий Нийенхейса и приложения этой теории к задачам интегрируемых систем, алгебры и математической физики. В частности, возникают следующие конкретные задачи:

1. Описания нормальных форм оператора Нийенхейса в регулярных точках. Введение классов сингулярных точек, пригодных для изучение. Описание нормальных или полунормальных форм. Описание групп, действующих на полунормальных формах;

2. Описание естественных классов многообразий Нийенхейса. Сюда включаются компактные многообразия, допускающие операторы Нийенхейса. Изучение ограничений, накладываемых топологией многообразия на свойства оператора Нийенхейса;

3. Описание нийенхейсовых пучков, геометрическая (инвариантная) классификация подобных объектов;

4. Построение общей теории симметрий и законов сохранения для определенных операторов Нийенхейса. В частности, речь идет про gl-регулярные операторы и овеществление комплексных операторов;

5. Приложение геометрии Нийенхейса к задачам разделения переменных, теории проективно-эквивалентных метрик, теории пуассоново согласованных метрик (что то же самое, к теории согласованных пучков гидродинамического типа);

6. Приложение геометрии Нийенхейса к теории операторов Дарбу-Гамильтона. Классификация пучков общего положения для таких пучков;

7. Приложение теории алгебраических операторов Нийенхейса к задаче построения полных коммутативных наборов на двойственных пространствах к алгебрам Ли.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту:

1. В регулярных точках:

(a) существует эффективный критерий приведения операторного поля к постоянному виду;

(b) сопряженный жордановой клетке максимальной размерности оператор Нийенхейса L с невырожденным дифференциалом приводится к теплицевой форме;

2. На сфере произвольной размерности существует оператор Нийенхейса с вещественными непостоянными собственными значениями;

3. У любого оператора Нийенхейса на 4-мерной сфере собственные значения вещественны;

4. В размерности два существует 12 неизоморфных классов вещественных левосимметрических алгебр;

5. В особых точках скалярного типа:

   (a) на касательном пространстве существует каноническая структура левосимметрической алгебры;

   (b) задача линеаризации полностью разрешима в размерности два в гладком и аналитическом случаях;

   (c) обнуление больших когомологий Нийенхейса дает достаточное условие линеаризации в формальной категории;

6. Для gl-регулярных операторов Нийенхейса:

   (a) оператор приводится к первой сопровождающей форме в окрестности произвольной точки в аналитическом случае и регулярной точки в гладком случае;

   (b) оператор приводится ко второй сопровождающей форме в окрестности произвольной точки в аналитическом случае и регулярной точки в гладком случае;

   (c) все симметрии являются сильными симметриями, а законы сохранения — общими законами сохранения для всех симметрий;

   (d) уравнения, задающие симметрии и законы сохранения, решаются явно в окрестности произвольной точки в аналитическом случае и в регулярной точке в гладком случае;

   (e) недиагональный аналог слабо нелинейных квазилинейных систем, построенных по операторам Нийенхейса, интегрируется в квадратурах;

   (f) в окрестности особых точек жорданова типа существует 2 особые нормальные формы и 8 классов, параметризованных как непрерывными, так и дискретными параметрами;

7. Регулярные законы сохранения для алгебры симметрий $\operatorname{Sym} L$ находятся во взаимно однозначном соответствии с новым классом конечномерных интегрируемых систем;

8. Для метрик, геодезически согласованных с данным gl-регулярным оператором Нийенхейса, существует явная алгебраическая процедура построения;

9. В плоских координатах метрики произвольной сигнатуры геодезически согласованные с ней операторы Нийенхейса задаются явной формулой;

10. Для нийенхейсовых пучков:

    (a) существует единственный максимальный пучок, содержащий данный n^2-мерный плоский пучок.

    (b) существует ровно два максимальных пучка, содержащих в качестве подпучка плоский симметрический пучок;

11. Для невырожденного пуассонова пучка дифференциально невырожденный оператор рекурсии приводится к нормальной форме в окрестности произвольной точки;

12. Для операторов Дарбу-Гамильтона:

    (a) операторы Дарбу-Гамильтона находятся во взаимно однозначном соответствии с фробениусовыми парами;

    (b) для пары операторов Дарбу-Гамильтона в общем положении плоские координаты первых членов их фробениусовых пар совпадают;

    (c) в размерности два существует 11 неизоморфных классов операторов Дарбу-Гамильтона;

    (d) в каждой размерности существует единственный дисперсионный AFF-пучок;

    (e) для пары операторов Дарбу-Гамильтона с фробениусовыми парами общего положения существует вложение такой пары в канонический дисперсионный AFF-пучок;

13. Построенные с помощью операторов Соколова-Одесского коммутативные наборы на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$ являются полными.

Научная новизна

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, были получены автором лично. В некоторых случаях при равноценном вкладе с соавторами. В частности, получены следующие результаты:

1. Заложены основы геометрии Нийенхейса. Доказаны основополагающие теоремы о локальных, полулокальных и глобальных свойствах операторов Нийенхейса. В частности:

    (a) Получены нормальные формы оператора Нийенхейса в регулярных точках — для жорданова блока и операторов сложной структуры. Введены классы сингулярных точек, пригодные для изучения: скалярные точки и gl-регулярные точки. Получены нормальные и полунормальные формы:

первая и вторая сопровождающие формы, полиномиальные нормальные формы в размерности два, линейные нормальные формы. Построены группы, действующие на полунормальных формах — они параметризуются n функциями одной переменной;

(b) Получены естественные классы многообразий Нийенхейса — в частности, сферы и левосимметрические алгебры. Доказано, что на сфере размерности четыре у оператора Нийенхейса всегда только вещественные собственные значения;

(c) Открыты два класса нийенхейсовых пучков; дана их геометрическая (инвариантная) классификация;

(d) Построена теория симметрий и законов сохранения для операторов Нийенхейса; явно построены такие законы для жордановых клеток в гладком и произвольных операторов в аналитическом случае. Симметрии и законы сохранения для овеществлений комплексного оператора описаны в терминах комплексных симметрий и законов сохранения, а также соответствующих объектов комплексной структуры;

2. Получены приложения геометрии Нийенхейса к задачам разделения переменных, теории проективно-эквивалентных метрик и теории пуассоново согласованных метрик;

3. Получено приложение геометрии Нийенхейса к теории операторов Дарбу-Гамильтона. Построена классификация пучков общего положения для таких пучков;

4. Получено приложение теории алгебраических операторов Нийенхейса к задаче построения полных коммутативных наборов на двойственных пространствах к алгебрам Ли. Для конкретных операторов Соколова-Одесского доказана полнота возникающих коммутативных наборов.

Методология и методы исследования

В работе используются методы линейной алгебры, дифференциальной геометрии, тензорного анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Существенная часть методов была разработана автором диссертации самостоятельно.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в таких теоретических разделах математики, как дифференциальная геометрия, интегрируемые системы и уравнения в частных производных. Также результаты могут найти применение в теоретической физике и математическом моделировании.

Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованными с помощью строгих математических доказательств и опубликованы как в международных, так и в российских рецензируемых журналах. Результаты других авторов, использованные в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация работы

Результаты диссертации многократно докладывались на семинаре «Современные геометрические методы», на кафедральном семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений, на семинаре «Группы Ли и теория инвариантов» механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова; на семинарах «Динамические системы» математического факультета Высшей школы экономики, на семинаре факультета компьютерных наук Высшей школы экономики, на математическом семинаре факультета математического образования Университета Лафборо, на семинаре «Интегрируемые системы» Университета Лидса, на российско-китайском коллоквиуме в МГУ 24 февраля 2022 года.

Результаты диссертации были доложены на международных и всероссийских научных конференциях, среди которых:

- Конференция Finite-dimensional integrable systems, 3-7 июля 2017 года, Барселона, Испания;

- Journées ASD: Classical and quantum integrable systems, 24-27 сентября 2017 года, Париж, Франция;

- Workshop at CIRM, 23-30 сентября, 2019 года, Тренто, Италия;

- Workshop on Nijenhuis Geometry, 16-23 февраля 2020 года, Лафборо, Великобритания;

- Конференция международных математических центров мирового уровня, 9 -13 августа 2021 года, образовательный центр «Сириус», Сочи, Россия;

- MATRIX-SMRI Symposium: Nijenhuis Geometry and Integrable Systems, 7-18 февраля 2022 года, Австралия, математический центр Matrix;

- Современные геометрические методы и их приложения - 2023, 29 октября-4 ноября 2023 года, МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия, миникурс (3 лекции);

- Pre-workshop on Nijenhuis Geometry, 12-18 февраля 2024 года, Мельбурн, Австралия;

- Nijenhuis Geometry and Integrable Systems II, 18-23 февраля 2024 года, математический центр Matrix, Австралия;

- Конференция Finite-dimensional integrable systems, 4-8 августа 2025 года, CIMAT, Гуанахуато, Мексика.

Результаты, представленные в диссертации, легли в основу нескольких авторских курсов соискателя:

- «Введение в геометрию Нийенхейса и приложения», читается на механико-математическом факультете МГУ имени М.В.Ломоносова (курс отмечен премией фонда "Базис");
- Nijenhuis Geometry, читался (совместно с А. В. Болсиновым) в 2020 году в математической школе Пекинского университета;
- Nijenhuis Geometry, онлайн-курс (совместно с А. В. Болсиновым) университета Сиднея;
- Geometry and topology of integrable Hamiltonian systems, читался в 2023 году в математической школе Пекинского университета.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации представлены в 20 работах в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология, индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus, RSCI и РИНЦ.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, одиннадцати глав и трех приложений. Текст диссертации изложен на 352 страницах. Список литературы содержит 177 наименований.

Краткое содержание диссертации

В диссертационной работе А.Ю.Коняева заложены основы геометрии Нийенхейса — новой области математики, которая лежит на стыке дифференциальной геометрии, алгебры, теории интегрируемых систем и математической физики. В работе решены задачи описания локальной структуры операторов Нийенхейса, их особых точек и глобальных свойств. Получены приложения новой геометрии к задачам разделения переменных, теории проективно-эквивалентных метрик и теории пуассоново-согласованных метрик. Получена теорема единственности для пучков Дарбу-Гамильтона общего положения и приложения к интегрируемым системам на двойственных к алгебрам Ли пространствах.

Глава 1 является вводной. Глава 2 содержит базовые результаты по геометрии Нийенхейса. В разделе 2.1 приведены необходимые определения. Там же собраны базовые факты об операторах Нийенхейса и приведены ключевые примеры. В разделе 2.2 приводятся классические результаты Хаантьеса и Нийенхейса. Все утверждения в этих разделах снабжены доказательствами, так как они не являются общеизвестными.

Раздел 2.3 имеет преимущественно технический характер и посвящен элементам теории матричнозначных функций операторов Нийенхейса.

В разделе 2.4 доказывается, что по оператору Нийенхейса с комплексным спектром строится естественная комплексная структура. Относительно этой структуры оператор Нийенхейса голоморфен и также является оператором Нийенхейса уже в смысле комплексного кручения Нийенхейса. Наконец, в разделе 2.5 приводится теорема о расщеплении для операторов Нийенхейса с доказательством.

В главе 3 рассматривается вопрос нормальных форм оператора Нийенхейса в окрестности регулярной точки, а так же приводятся примеры компактных многообразий Нийенхейса. В разделе 3.1 рассматривается вопрос о нормальной форме оператора Нийенхейса с интегрируемыми распределениями ядер в вещественном и комплексном случаях. Эта теорема обобщает теорему Томпсона и, как следствие, закрывает пробелы оригинальной работы.

В разделе 3.2 разбирается безнадежная задача классификации оператора Нийенхейса с условием $L^2 = 0$. В разделе 3.3 описаны нормальные формы операторов Нийенхейса, сопряженных с жордановой клеткой с непостоянным собственным значением. Наконец, в разделе 3.4 получены результаты по глобальной геометрии Нийенхейса: показано, что сферы — нийенхейсовы многообразия и любой оператор Нийенхейса на сфере S^4 обязан иметь только вещественный спектр.

В главе 4 устанавливается связь геометрии Нийенхейса и левосимметрических алгебр. В разделе 4.1 доказано, что любая конечномерная левосимметрическая алгебра — естественное многообразие Нийенхейса.

В разделе 4.2 все такие многообразия (или, что то же самое, вещественные левосимметрические алгебры) классифицированы в размерности два. Их оказывается десять классов, два из которых содержат непрерывный вещественный параметр. Левосимметрические алгебры из разных классов и из одного класса с различными значениями параметров попарно не изоморфны.

В разделе 4.3 доказано, что касательное пространство к точке скалярного типа имеет естественную структуру левосимметрической алгебры. Там же формулируется задача линеаризации для оператора Нийенхейса в окрестности точки скалярного типа.

Разделы 4.4 и 4.5 носят вспомогательный характер: в одном решается задача линеаризации треугольного векторного поля на плоскости, а в другом — вопрос существования первого интеграла в окрестности особой точки на плоскости в гладком и аналитическом случаях. Используя результаты этих двух разделов, в 4.6 полностью решена задача линеаризации в размерности два в гладком и аналитическом случаях.

В разделе 5 рассматриваются нормальные формы gl-регулярного оператора Нийенхейса в вещественно-аналитическом случае. В разделах 5.1 и 5.2 доказаны теоремы о приведении к первой и второй сопровождающим формам. Раздел 5.3 посвящён интегрированию спаренного уравнения Хопфа и применению этого уравнения к геометрии Нийенхейса. В разделе 5.4 построены полиномиальные нормальные формы gl-регулярных операторов Нийенхейса в размерности два как в точках общего положения, так и в особых точках. В особых точках таких форм оказывается восемь бесконечных серий, параметризованных как дискретными, так и непрерывными параметрами, и два специальных класса.

Глава 6 посвящена симметриям и законам сохранения оператора Нийенхейса. В разделе 6.1 доказывается теорема о расщеплении для симметрий и законов сохранения. В разделе 6.2 приведены базовые свойства симметрий и законов сохранения для gl-регулярных операторов Нийенхейса. Там же устанавливается связь между регулярными симметриями, законами сохранения и координатами, в которых оператор L принимает первую или вторую сопровождающую форму.

Раздел 6.3 посвящен связи симметрий и законов сохранения голоморфного оператора Нийенхейса и его овеществления. В разделе 6.4 описываются симметрии для операторов Нийенхейса, сопряженных с вещественными и комплексными жордановыми блоками. В разделе 6.5 решается вопрос о существовании регулярных симметрий и законов сохранения в аналитической категории в окрестности произвольной точки и в гладкой окрестности точки общего положения.

В разделе 6.6 обобщаются слабонелинейные квазилинейные системы в случае нетривиальной жордановой структуры. В качестве приложения геометрии Нийенхейса для таких систем описаны симметрии и законы сохранения, а также представлена процедура интегрирования данной системы в квадратурах.

Глава 7 посвящена применениям разработанных инструментов геометрии Нийенхейса к задачам разделения переменных и геодезически эквивалентным метрикам.

Раздел 7.1 технический; в нем доказывается фундаментальная теорема о свойствах поднятия операторных полей на кокасательное расслоение. В разделе 7.2 описан алгоритм построения вполне интегрируемых систем на кокасательном расслоении по базису в $\operatorname{Sym} L$, регулярному закону сохранения и n функциям двух переменных. Там же приведён конкретный пример новой интегрируемой системы размерности четыре, который описан в конце раздела.

В разделе 7.3 рассматривается случай геодезических потоков с потенциалами. Показано, что в размерности два алгоритм из раздела 7.2 даёт все потоки с квадратичными интегралами. В разделе 7.5 доказывается, что тензор Киллинга такой системы задает интегрируемую квазилинейную систему.

В разделе 7.4 показано, что выбор стандартного базиса в $\operatorname{Sym} L$ позволяет получать метрики, геодезически согласованные с L. Более того, для данного gl-регулярного оператора все геодезически согласованные с ним метрики получаются таким образом. Тем самым результаты этого раздела дают решение важной проблемы в теории геодезически эквивалентных метрик.

Глава 8 посвящена приложению геометрии Нийенхейса к теории пуассоново согласованных метрик и пучкам Нийенхейса. В разделе 8.1 классифицируются все операторы Нийенхейса, геодезически согласованные с данной плоской метрикой. Они образуют нийенхейсов пучок. Разделы 8.2 и 8.3 носят технический характер и посвящены теории пуассоново согласованных метрик и теории пучков Нийенхейса соответственно. В разделе 8.4 представлена геометрическая характеристика двух специальных нийенхейсовых пучков, один из которых — пучок из раздела 8.1. В разделе 8.5 дана геометрическая характеристика AFF-пучка метрик.

В главе 9 рассматриваются приложения геометрии Нийенхейса к бигамильтоновым структурам как в конечномерном, так и в бесконечномерном случаях. В разделе 9.1 показано, что кокасательное расслоение над многообразием Нийенхейса — всегда многообразие Пуассона-Нийенхейса, а также доказана теорема о нормальной форме структуры Пуассона-Нийенхейса для дифференциально-невырожденного случая.

В разделе 9.2 устанавливается связь между фробениусовыми парами и алгебрами Фробениуса и доказывается, что между фробениусовыми парами и операторами Дарбу-Гамильтона типа $1 + 3$ существует взаимно однозначное соответствие. В разделе 9.3 классифицируются скобки Дарбу-Гамильтона в размерности два. В разделе 9.4 доказана теорема о нормальной форме пучков гамильтоновых операторов общего положения, состоящих исключительно из операторов Дарбу-Гамильтона.

В разделе 9.5 рассматривается специальный случай многомерного пучка операторов Дарбу-Гамильтона. Он представляет собой «дисперсионное возмущение» AFF-пучка. Основным результатом раздела является следующий факт: в некоторых естественных предположениях двумерный пучок, им удовлетворяющий, может быть реализован как подпучок в дисперсионном AFF-пучке. Этот результат является решением гипотезы Ферапонтова-Павлова [87] в классе операторов Дарбу-Гамильтона.

Глава 10 посвящена изучению алгебраических операторов Нийенхейса. В разделе 10.1 доказываются основные свойства алгебраических операторов. Раздел 10.2 посвящен вопросу существования алгебраических операторов Нийенхейса с простым спектром на конечномерных алгебрах Ли. В разделе 10.3 устанавливается связь алгебраических операторов Нийенхейса с левыми пучками.

Раздел 10.4 посвящен операторам Соколова-Одесского на алгебре $gl(n)$ и возникающим бигамильтоновым цепочкам. Описаны регулярные операторы с точки зрения множества параметров и их структуры. Доказано, что для операторов общего положения возникающие коммутативные наборы действительно полны. В разделе 10.5 установлена связь между алгебраическими операторами Нийенхейса и методом сдвига аргумента.

Глава 11 посвящена теории когомологий Нийенхейса: с оператором Нийенхейса связано сразу две когомологические теории — большая и малая. Разделы 11.1 и 11.2 носят технический характер: в них излагаются теория градуированных дифференцирований и теория векторозначных дифференциальных форм соответственно. В разделе 11.3 большие когомологии связываются с задачей линеаризации.

В 11.4 доказывается теорема об изоморфизме для малых когомологий, которая связывает малые когомологии Нийенхейса и когомологии де Рама. Там же доказана лемма Пуанкаре для малых когомологий. Раздел 11.5 посвящён теореме о расщеплении когомологий и её применениям. В разделе 11.6 речь идет об операторе Нийенхейса L, определенном в окрестности точки вырождения, то есть такой точки p, что $\det L = 0$. Среди прочего там вычисляются когомологии для примера Кобаяши [88] (они оказываются крайне нетривиальными).

В приложении I излагаются элементы теории квазилинейных интегрируемых систем, вводятся понятия симметрий и законов сохранения. Кроме того, рассматриваются несколько важных примеров таких систем. В приложении II излагаются основные результаты, связанные с гамильтоновым формализмом как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае. В приложении III представлены три варианта теоремы Фробениуса в гладком и комплексно-аналитическом случаях.

[87] Ferapontov E.V., Pavlov M.V., Quasiclassical limit of coupled KdV equations. Riemann invariants and multi-Hamiltonian structure // Physica D: Nonlinear Phenomena, **52**(2-3), pp. 211-219 (1991) DOI: https://doi.org/10.1016/0167-2789(91)90123-Q

[88] Kobayashi E. T., A remark on the Nijenhuis tensor // Pacific Journal of Mathematics, **12** (4), pp. 1467–1467 (1962)

Заключение

В диссертационной работе А.Ю.Коняева заложены основы геометрии Нийенхейса - новой дисциплины, лежащей на стыке дифференциальной геометрии, алгебры, интегрируемых систем и математической физики. В частности, исследованы многообразия с заданными на них операторными полями с нулевым кручением Нийенхейса, их нормальные формы в регулярных и особых точках, симметрии, законы сохранения, функции от таких операторных полей и пучки нийенхейсовых структур. Установлена связь с естественными комплексными структурами. Приведённые объекты рассматриваются как в гладком, так и в вещественно-аналитическом и комплексно-аналитическом случаях. Также в работе рассмотрены алгебраические структуры, связанные с операторами Нийенхейса, и их приложения — коммутативные ассоциативные алгебры и пучки таких алгебр, левосимметрические алгебры, бесконечномерные коммутативные подалгебры в алгебре операторных полей, алгебры Ли со специальными базисами.

Полученные в диссертации теоретические результаты нашли применение в задачах о существовании операторов Нийенхейса на компактных многообразиях, задачах классификации пучков гамильтоновых операторов, задачах из теории проективно-эквивалентных метрик и задачах теории интегрируемых систем, допускающих разделение переменных. Построены новые классы конечномерных, а также бесконечномерных скобок Пуассона. Для построенных конечномерных систем доказана полнота и получена классификация в малых размерностях. Полученные результаты могут быть интересны специалистам по интегрируемым системам, математической физике, алгебре и теории дифференциальных уравнений. Часть результатов может служить для создания новых вычислительных алгоритмов для изучения точных решений конечномерных и бесконечномерных интегрируемых систем.

Благодарности

Автор благодарит академика А. Т. Фоменко, профессора А. В. Болсинова и профессора В. С. Матвеева за помощь, веру и плодотворное сотрудничество.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

1. Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Finite-dimensional reductions and finite-gap type solutions of multicomponent integrable PDEs* // Studies in Applied Mathematics. – 2025 – vol. 155, No. 2, – p. e70100.
   DOI: 10.1111/sapm.70100
   Импакт фактор 2.3 (JIF), объем 1.938 п.л.
   Коняевым А.Ю. выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем раздела 1. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 1,28 п.л.

2. Antonov E.I., Konyaev A.Yu., *Nijenhuis operators with a unity and F-manifolds* // Journal of the London Mathematical Society. – 2024 – vol. 110, No. 3, – p. e12983.
   EDN: LNBCXA
   Импакт-фактор 1.2 (JIF), объем 1.313 п.л.
   Коняевым А.Ю. доказаны теоремы 2.5, 3.1 и 3.2. Общая доля диссертанта составвляет 50%, объем 0.66 п.л.

3. Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Orthogonal separation of variables for spaces of constant curvature* // Forum Mathematicum. – 2024 – vol. 37, No. 1, – pp. 13-41.
   EDN: EXJBXI
   Импакт-фактор 0.9 (JIF), объем 1.750 п.л.
   А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем раздела 1. Общая доля диссертанта составляет 33%, объем 0.58 п.л.

4. Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Nijenhuis geometry IV: conservation laws, symmetries and integration of certain non-diagonalisable systems of hydrodynamic type in quadratures* // Nonlinearity. – 2024 – vol. 37, No. 10, – p. 105003.
   EDN: OEOIZF
   Импакт-фактор 1.6 (JIF), объем 1.688 п.л.
   А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем раздела 1. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 1.114 п.л.

5. Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Applications of Nijenhuis Geometry V: Geodesic Equivalence and Finite-Dimensional Reductions of Integrable Quasilinear Systems* // Journal of Nonlinear Science. – 2024 – vol. 34, No. 2, – p. e33.
   EDN: WDYCMJ
   Импакт-фактор 2.6 (JIF), объем 1 п.л.
   А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем раздела 1. Общая доля диссертанта составляет 33%, объем 0.33 п.л.

6. Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Nijenhuis geometry III: gl-regular Nijenhuis operators* // Revista Matematica Iberoamericana. – 2023 – vol. 40, No. 1, – pp. 155–188.
   EDN: IXDOLU
   Импакт-фактор 1 (JIF), объем 2.25 п.л.
   А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем разделов 1, 5, 6, 7. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 1.485 п.л.

7. Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Applications of Nijenhuis geometry IV: Multicomponent KdV and Camassa–Holm equations* // Dynamics of Partial Differential Equations. – 2023 – vol. 20, No. 1, – pp. 73–98.
   EDN: FFTOYH
   Импакт-фактор 1 (JIF), объем 1.875 п.л.
   А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем разделов 2 и 3. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 1.238 п.л.

8. Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Applications of Nijenhuis Geometry III: Frobenius Pencils and Compatible Non-homogeneous Poisson Structures* // Journal of Geometric Analysis. – 2023 – vol. 33, No. 6, – p. 193.
   EDN: ZZVTUA
   Импакт-фактор 1.5 (JIF), объем 3.188 п.л.
   А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем разделов 2, 3, 4. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 2.104 п.л.

9. Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Nijenhuis geometry*// Advances in Mathematics. – 2022 – vol. 394, – p. 108001.
   EDN: IEEKCH
   Импакт-фактор 1.5 (JIF), объем 3.438 п.л.
   А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем разделов 4, 5, 6. Общая доля диссертанта составляет 33%, объем 1.136 п.л.

10. Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Applications of Nijenhuis geometry II: maximal pencils of multi-Hamiltonian structures of hydrodynamic type* // Nonlinearity. – 2021 – vol. 34, No. 8, – pp. 5136–5162.
    EDN: UFNIRH
    Импакт-фактор 1.6 (JIF), объем 2.563 п.л.
    А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем раздела 2. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 1.691 п.л.

11. Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S., *Applications of Nijenhuis geometry: non-degenerate singular points of Poisson–Nijenhuis structures* // European Journal of Mathematics. – 2021 – vol. 8, – pp. 1355-1376.
    EDN: BXASNZ
    Импакт-фактор 0.5 (JIF), объем 1.188 п.л.
    А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем разделов 2, 3, 6. Общая доля диссертанта составляет 66%, объем 0.784 п.л.

12. Fomenko A.T., Konyaev A.Yu., *Geometry, dynamics and different types of orbits* // Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2015 – vol. 15, No. 49, – pp. 49-66.
    EDN: UFKSWT
    Импакт-фактор 1.1 (JIF), объем 1.063 п.л.
    А.Ю.Коняеву пренадлежат теоремы 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. Общая доля диссертанта составляет 50%, объем 0.532 п.л.

13. Konyaev A.Yu., *On the Linearization of Certain Singularities of Nijenhuis Operators* // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2024 – vol. 31, No. 1, – pp. 106-111.
    EDN: ZIOSCW
    Импакт-фактор 1.5 (JIF), объем 0.375 п.л.

14. Konyaev A.Yu., Kress J.M., Matveev V.S., *When a (1,1)-tensor generates separation of variables of a certain metric* // Journal of Geometry and Physics – 2024 – vol. 195, – p. 105031.

EDN: JJWYBW
Импакт-фактор 1.2 (JIF), объем 1 п.л.
А.Ю.Коняевым выполнены ключевые шаги в доказательствах теорем раздела 1. Общая доля диссертанта составляет 33%, объем 0.33 п.л.

15. Коняев А.Ю., *Симметрические матрицы и максимальные нийенхейсовы пучки* // Математический сборник. – 2023. – Т. 214, вып. 8. – С. 53–62.
EDN: FWDDWZ
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 0.625 п.л.
Английская версия: Konyaev A. Yu., *Symmetric matrices and maximal Nijenhuis pencils* // Sbornik: Mathematics. – 2023 – vol. 214, No. 8, – pp. 1101–1110.
EDN: GKKUMH
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 0.625 п.л.

16. Konyaev A.Yu., *Geometry of Inhomogeneous Poisson Brackets, Multicomponent Harry Dym Hierarchies, and Multicomponent Hunter–Saxton Equations* // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2022 – vol. 29, – pp. 518–541.
EDN: RNQNOX
Импакт-фактор 1.5 (JIF), объем 1.938 п.л.

17. Konyaev A. Yu., *Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators* // Differential Geometry and its Applications. – 2021 – vol. 74, – p. 101706.
EDN: FRXEEV
Импакт-фактор 0.7 (JIF), объем 2.563 п.л.

18. Коняев А.Ю., *Полнота коммутативных подалгебр Соколова–Одесского и операторы Нийенхейса на* $gl(n)$ // Математический сборник. – 2020 – Т. 211, вып. 4, – С. 583-593.
EDN: KIOOFD
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 0.688 п.л.
Английская версия: Konyaev A. Yu., *Completeness of commutative Sokolov-Odesskii subalgebras and Nijenhuis operators on* $gl(n)$ // Sbornik: Mathematics. – 2020 – vol. 211, No. 4, – pp. 583–593.
EDN: QGLLUZ
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 0.688 п.л.

19. Коняев А.Ю., *Полнота некоторых коммутативных подалгебр, ассоциированных с операторами Нийенхейса на алгебрах Ли* // Доклады Академии наук. – 2018 –Т. 479, вып. 3 – С. 247-249.
EDN: YTFPNQ
Импакт-фактор 0.6 (JIF), объем 0.188 п.л.
Английская версия: Konyaev A. Yu., *Completeness of Some Commutative Subalgebras Associated with Nijenhuis Operators of Lie Algebras* // Doklady Mathematics. – 2018. – vol. 97, No. 2. – pp. 137-139.
EDN: XXDOUH
Импакт-фактор 0.6 (JIF), объем 0.188 п.л.

20. Коняев А.Ю., *Классификация алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 2* // Математический сборник. – 2014 – Т. 205, вып. 1, – С. 47–66.
EDN: RXPTJV
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 1.25 п.л.
Английская версия: Konyaev A. Yu., *Classification of Lie algebras with generic orbits of dimension 2 in the coadjoint representation* // Sbornik: Mathematics. – 2014 – vol. 205, No. 1, – pp. 45–62.
EDN: SKOQGF
Импакт-фактор 0.8 (JIF), объем 1.125 п.л.