Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Бровкин Вадим Вадимович

О разрешимости второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых многообразиях

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Коньков Андрей Александрович

Москва – 2026

Оглавление

Введение

Диссертация подготовлена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Представленная работа является исследованием в области общей теории нелинейных эллиптических уравнений. В диссертации рассматривается вторая краевая задача для p-лапласиана в областях на римановых многообразиях, изучаются необходимые и достаточные условия ее разрешимости, приводятся примеры применения основных результатов к конкретным краевым задачам.

Актуальность темы

В течение последних нескольких десятилетий теория эллиптических уравнений на римановых многообразиях получила достаточно существенное развитие. Эта теория берет свое начало в работах математиков, посвященных классификации некомпактных римановых многообразий в зависимости от их геометрических характеристик. Одним из наиболее важных вопросов данного направления является выделение класса многообразий, для которых выполнена теорема Лиувилля, утверждающая, что пространство решений рассматриваемого эллиптического уравнения на многообразии тривиально в некотором классе функций. Теоремы такого типа можно найти, например, в работах А. А. Григорьяна [4, 5, 8], Н. С. Надирашвили [37, 8], K.-T. Sturm [71], S. T. Yau [75, 76], P. Li, L. F. Tam [59]. В частности, некомпактные полные многообразия, на которых любая положительная супергармоническая функция равна константе, принято называть параболическими.

Условия параболичности многообразий исследовались такими математиками, как А. А. Григорьян [4], L. Karp [54], S. Y. Cheng, S. T. Yau [42], T. Lyons, D. Sullivan [63], J. L. Fernandez [47], I. Holopainen [52, 53], В. М. Кесельман [11], J. Milnor [65], В. М. Миклюков [34] и другими. Один из первых результатов в этой области получен в работе S. Y. Cheng, S. T. Yau [42]. Именно, было доказано, что полное риманово многообразие является параболическим, если объем геодезического шара радиуса r растет не быстрее, чем r^2 при $r \to \infty$. Некоторые уточнения данного результата можно найти в работе L. Karp [54]. Позже

А. А. Григорьян установил [4], что некомпактное полное риманово многообразие имеет параболический тип тогда и только тогда, когда вариационная емкость любого компакта равна нулю.

С другой стороны, как было обнаружено в 80-х годах 20-го века, имеется достаточно большой класс многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные решения эллиптических дифференциальных уравнений. Например, M. T. Anderson [38] и D. Sullivan [72] показали, что на односвязном римановом многообразии с отрицательной секционной кривизной, отделенной от нуля и бесконечности, множество нетривиальных ограниченных гармонических функций бесконечномерно. Эта тема нашла свое развитие в работах А. А. Григорьяна [4, 6], А. Г. Лосева [23, 24], P. Li, L. F. Tam [59], В. М. Миклюкова [34], H. Donelly [45], S. T. Yau [77] и других. В частности, в работе А. А. Григорьяна [6] исследовался вопрос об оценке размерности пространства гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях в терминах массивных множеств. Именно, было доказано, что размерность пространства гладких решений уравнения Лапласа, удовлетворяющих однородному условию Неймана, можно оценить снизу числом попарно непересекающихся массивных подмножеств многообразия.

Вопрос об оценке размерности пространства решений эллиптических уравнений в случае полных некомпактных римановых многообразий, имеющих несколько концов, изучался, в частности, авторами С. А. Корольков [18, 55], А. Г. Лосев [18, 26, 55], Е. А. Мазепа [26], P. Li [58, 59], L. F. Tam [58, 59, 73], C. J. Sung, J. Wang [73]. Открытое подмножество E многообразия M принято называть концом, если E связно, непредкомпактно и имеет компактную границу [59]. Говорят, что M — многообразие с концами, если M можно представить в виде объединения некоторого компакта и конечного числа непересекающихся концов. Обычно различают концы гиперболического и параболического типа [51]. P. Li и L. F. Tam [59] доказали, что размерность пространства ограниченных гармонических функций на многообразии с концами оценивается снизу числом гиперболических концов. В работе C. J. Sung, L. F. Tam, J. Wang [73] были получены некоторые уточнения данного результата.

В работе С. А. Королькова и А. Г. Лосева [18] рассматривалось уравнение

$$\Delta u + (b, \nabla u) - cu = 0 \qquad (1)$$

на многообразии с концами, где b — гладкое векторное поле, а c — гладкая неотрицательная функция. Используя понятие массивности множества, введенное в работе А. А. Григорьяна [6], авторы получили условия существования и единственности решений некоторых краевых задач для уравнения (1), а также нашли оценки размерностей различных пространств решений. Эти идеи были продолжены в работах [61, 7, 27, 25].

Авторами [24, 66, 8, 43, 60, 65] исследовалось поведение решений эллиптических уравнений на сферически симметричных многообразиях, которые обычно называют модельными многообразиями. Были получены условия параболичности таких многообразий, найдены условия существования решений некоторых краевых задач.

Стоит также отметить, что в последнее время увеличивается количество работ, посвященных изучению асимптотического поведения решений квазилинейных уравнений [12, 17], [28]–[31].

Большая часть из упомянутых ранее работ посвящена краевым задачам для оператора Лапласа, обобщением которого является p-лапласиан. Уравнениями, содержащими p-лапласиан, записывается немалое количество задач в физике и механике. В частности, математические модели, в которых появляется p-лапласиан, возникают при изучении механики жидкостей [41], процессов реакции-диффузии [39], задач теории упругости [67], а также в климатологии [44] и гляциологии [50].

Исследованию разрешимости краевых задач для p-лапласиана посвящено множество работ. Среди первых результатов, касающихся существования и регулярности решений в ограниченных областях, можно отметить работы М. И. Вишика [2], О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой [20], J. Serrin [70]. В монографии О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой [21] изложена достаточно полная теория линейных и квазилинейных эллиптических уравнений, в том числе и для уравнений с p-лапласианом. Позднее теорию существования решений эллиптических уравнений для p-лапласиана усовершенствовал Ж.-Л. Лионс [22]. Также вопросу регулярности решений краевых задач для уравнений с p-лапласианом посвящены работы C. L. Evans [46], J. L. Lewis [56, 57], K. Ulenbeck [74].

В работах M. Franca [48] и B. Franchi, E. Lanconelli, J. Serrin [49] исследованы вопросы существования и единственности радиально-симметричных решений для p-лапласиана, а также изучено качественное поведение ограниченных радиально-симметричных решений, убывающих на бесконечности.

Вопросы существования и единственности решения задач Дирихле и Неймана для p-лапласиана в областях в $\mathbb{R}^n$, представляющих собой дополнение некоторого компакта, изучались в работе G. Auchmuty, Q. Han [40].

В последнее время увеличивается число работ, посвященных исследованию разрешимости краевых задач для уравнений, содержащих p-лапласиан, в случае областей, имеющих особенности на границе. Так, в работе [33] В. Г. Мазья и С. В. Поборчий рассматривали ограниченные области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с вершиной пика на границе. Авторы получили необходимые и достаточные условия существования решения задачи Неймана

$$-\Delta_p u + a|u|^{p-2}u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad |\nabla u|^{p-2}\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = h,$$

где $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ — оператор p-Лапласа, $p > 1$, ν — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $a \in L_\infty(\Omega)$, $a(x) \geqslant \mathrm{const} > 0$ почти всюду в Ω, h — однородный и аддитивный функционал на множестве $W_p^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, обращающийся в нуль на $C_0^\infty(\Omega)$. Также в случае ограниченных областей с нерегулярной границей критерий разрешимости задачи Неймана для оператора p-Лапласа получен в работе [64], где в качестве краевых условий и правых частей уравнения рассматривались заряды (разности конечных мер).

В работе С. М. Бакиева и А. А. Конькова [1] рассматривалась задача Дирихле для уравнения p-Лапласа на полном римановом многообразии с краем. Был получен критерий ее разрешимости в терминах емкости, ассоциированной с функцией.

Некоторые определения и обозначения

Договоримся о следующих обозначениях:

M — связное n-мерное ориентированное полное риманово многообразие с краем (возможно, пустым);

g_{ij} — метрический тензор, согласованный с римановой связностью, g^{ij} — тензор, дуальный к метрическому, т.е. $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$;

$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$, $r > 0$.

Напомним следующие определения. Пусть N — гладкое m-мерное многообразие. Отображение $\Phi : M \to N$ называется гладким отображением класса C^s, если для любых локальных систем координат $(x^1, ..., x^n)$ в окрестности любой точки $P \in M$ и $(y^1, ..., y^m)$ в окрестности точки $Q = \Phi(P) \in N$ представление функции Φ в виде вектор-функции $(y^1, ..., y^m) = (y^1(x^1, ..., x^n), ..., y^m(x^1, ..., x^n))$ является вектор-функцией класса гладкости C^s [36, глава 3, с. 77]. Другими словами, для любых карт (U, φ) на M и (V, ψ) на N отображение

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{2}$$

является гладким (класса C^s) на своей области определения, то есть, на множестве $\varphi(\Phi^{-1}(\Phi(U) \cap V))$. Аналогично, отображение $\Phi : M \to N$ называется липшицевым, если для любых карт (U, φ) на M и (V, ψ) на N отображение (2) является липшицевым на множестве $\varphi(\Phi^{-1}(\Phi(U) \cap V))$ (см. рисунок 1).

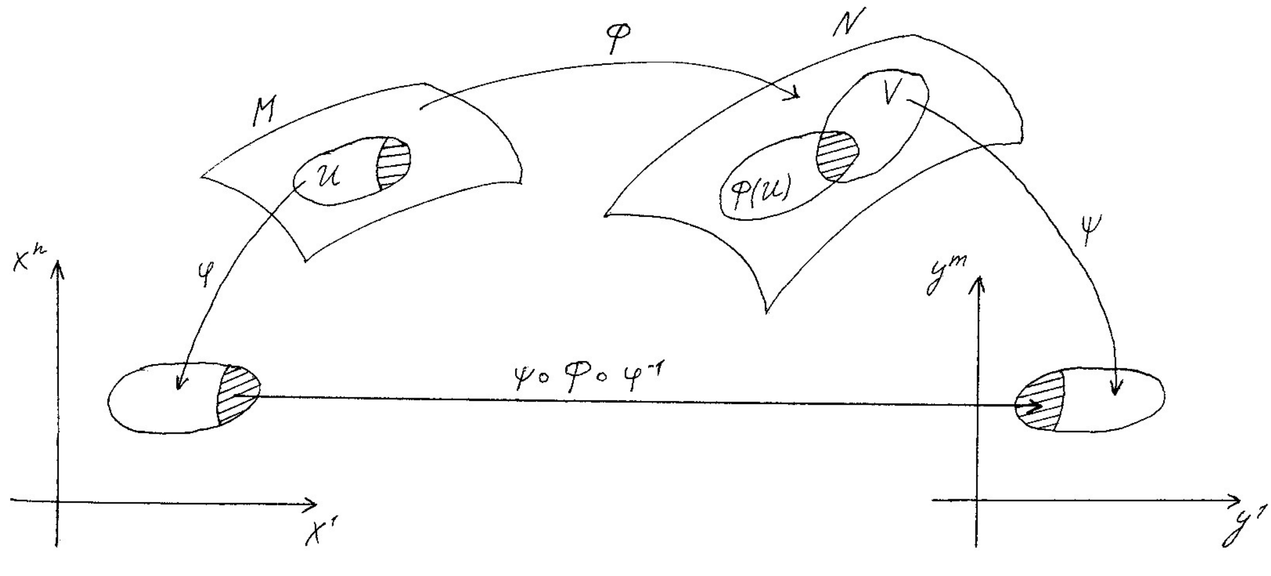

Рисунок 1

Будем говорить, что $\omega \subset M$ — липшицева область (область с липшицевой границей), если у любой точки $x \in \partial\omega$ существует окрестность $U \subset M$ и взаимно-однозначное липшицево отображение

$$\Phi : U \cap \overline{\omega} \to V \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant 0\},$$

где V — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, и при этом $\Phi(U \cap \partial\omega) = V \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$.

Задача, рассматриваемая в диссертации

Пусть $\Omega \subset M \setminus \partial M$ — липшицева область. Будем рассматривать задачу

$$\Delta_p u = f \quad \text{в } \Omega, \quad |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = h, \tag{3}$$

где

$$\Delta_p u = \nabla_i (g^{ij} |\nabla u|^{p-2} \nabla_j u), \quad p > 1,$$

— оператор p-Лапласа, ν — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, а f и h — обобщенные функции из $\mathcal{D}'(M)$, причем $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}$, $\operatorname{supp} h \subset \partial\Omega$. При этом $|\nabla u| = (g^{ij} \nabla_i u \nabla_j u)^{1/2}$.

Следуя [35, глава 1, §11, с. 47], под $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\omega)$, где ω — открытое подмножество M, будем подразумевать пространство измеримых функций, принадлежащих $W^1_p(\omega' \cap \omega)$ для любого открытого множества $\omega' \subset M$ с компактным замыканием. Пространство $L_{p,\mathrm{loc}}(\omega)$ определяется аналогично.

Решением задачи (3) называется функция $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такая, что

$$-\int\limits_{\Omega} g^{ij} |\nabla u|^{p-2} \nabla_j u \nabla_i \varphi \, dV = (f - h, \varphi)$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp} \varphi \Subset M$, где dV — элемент объема многообразия M.

В качестве условия на бесконечности потребуем, чтобы решения (3) удовлетворяли соотношению

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dV < \infty. \tag{4}$$

Обозначим для краткости

$$F = f - h. \tag{5}$$

Цель работы — получить необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (3), (4) в общем случае, применить полученные результаты к случаю многообразий с модельными концами и областей вращения в $\mathbb{R}^n$.

Научная новизна результатов

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные результаты состоят в следующем:

1. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае функционала F общего вида. Отдельно рассмотрен случай функционала F с компактным носителем.

2. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда M является многообразием с модельными концами и $\Omega = M \setminus \partial M$.

3. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, а Ω — область, образованная вращением графика липшицевой функции.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет, в первую очередь, теоретический характер и представляет интерес для специалистов в области общей теории нелинейных эллиптических уравнений. При этом в диссертации рассмотрены примеры, демонстрирующие применение основных результатов к конкретным краевым задачам. Также материалы диссертации могут послужить основой для специального курса в области нелинейных эллиптических уравнений.

Методы исследований

В диссертации использованы методы нелинейной емкости, функционального анализа и дифференциальной геометрии.

Соответствие паспорту научной специальности

В диссертации изучаются необходимые и достаточные условия существования решений второй краевой задачи для p-лапласиана в областях на римановых многообразиях, поэтому тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика по направлениям исследований: общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

1. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае функционала F с компактным носителем.

2. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае функционала F общего вида.

3. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда M является многообразием с модельными концами и $\Omega = M \setminus \partial M$.

4. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, а Ω — область, образованная вращением графика липшицевой функции.

Все выносимые на защиту положения — новые и получены автором лично.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2023”, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10–21 апреля 2023 г.

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 28 июня–4 июля 2024 г.

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2025”, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11–25 апреля 2025 г.

- Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная И. Г. Петровскому, Москва, Россия, 19–24 мая 2025 г.

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах:

- Межвузовский научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений (МГУ имени М. В. Ломоносова, РЭУ имени Г. В. Плеханова, МГТУ имени Н. Э. Баумана) под руководством проф., д.ф.-м.н. И. В. Асташовой, проф., д.ф.-м.н. А. В. Филиновского (14 декабря 2024 г., 20 декабря 2025 г.).

- Научный семинар по уравнениям математической физики под руководством проф., д.ф.-м.н. Г. А. Чечкина, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (ноябрь 2025 г.).

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в 4 публикациях автора. Все 4 работы [78]–[81] опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы SCOPUS, Web of Science, RSCI.

В работе [78] автору принадлежат теоремы 1–4, леммы 4–6 (0.625 п.л.), А.А. Конькову принадлежат методы исследования и постановка задачи.

Также автор имеет 4 публикации в материалах международных конференций [82]–[85].

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего **85** наименований, включая работы автора. Объём диссертации составляет **123** страницы.

Краткое изложение содержания работы

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, посвящённых изучению эллиптических уравнений на римановых многообразиях, а также результатов, касающихся существования и свойств решений краевых задач для уравнений, содержащих p-лапласиан. Обзор подкрепляется ссылками на научные работы, приведённые в списке литературы. Объясняется актуальность темы исследований и научная новизна поставленной задачи, а также значимость полученных результатов. Также во введении приведены основные результаты диссертации.

В **первой главе** получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в областях на римановых многообразиях, которые являются естественным обобщением областей в $\mathbb{R}^n$.

В **первом параграфе первой главы** получен общий критерий разрешимости задачи (3), (4).

Через $L_p^1(\omega)$, где ω — открытое подмножество M, будем обозначать пространство функций $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\omega)$, для которых $\nabla u \in L_p(\omega)$. Полунорма в $L_p^1(\omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{L_p^1(\omega)} = \left(\int\limits_{\omega} |\nabla u|^p \, dV \right)^{1/p}.$$

Для всех $l \in \mathcal{D}'(M)$ обозначим

$$N_\omega(l) = \sup_{\varphi} |(l, \varphi)|,$$

где sup берется по всем функциям $\varphi \in C^\infty(M)$ таким, что $\operatorname{supp} \varphi \Subset M$,

$$\operatorname{supp} \varphi \cap \overline{\Omega} \subset \omega \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)} = 1.$$

Предложение 1.1. *Для разрешимости задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$N_M(F) < \infty,$$

где функционал F определен формулой (5).

Во **втором параграфе первой главы** вводится понятие p-гиперболических и p-параболических областей, изучаются некоторые их свойства.

Пусть $U \subset M \setminus \partial M$ — произвольное открытое множество.

Определение 1.1. (p, U)*-Емкостью компакта $K \subset \overline{U} \cap \omega$ относительно открытого множества $\omega \subset M$ называется величина*

$$\operatorname{cap}_{p,U}(K, \omega) = \inf_{\varphi} \int\limits_{\omega \cap U} |\nabla \varphi|^p \, dV,$$

где inf *берется по всем функциям $\varphi \in C^\infty(\omega)$ таким, что* $\operatorname{supp} \varphi \Subset \omega$ *и $\varphi \equiv 1$ в окрестности K. В случае $\omega = M$ пишем $\operatorname{cap}_{p,U}(K)$ вместо $\operatorname{cap}_{p,U}(K, M)$. Для произвольного замкнутого множества $H \subset \overline{U}$ полагаем*

$$\operatorname{cap}_{p,U}(H) = \sup_{K} \operatorname{cap}_{p,U}(K),$$

где $\sup$ *берется по всем компактам* $K \subset H$. (p,U)*-Емкость пустого множества считается равной нулю.*

Определение 1.2. *Область* Ω *называется p-гиперболической, если* $\mathrm{cap}_{p,\Omega}(\overline{\Omega}) > 0$. *В противном случае область* Ω *называется p-параболической.*

Определение 1.3. *Многообразие* M *называется p-гиперболическим, если* $\mathrm{cap}_{p,M\setminus\partial M}(M) > 0$. *В противном случае многообразие* M *называется p-параболическим.*

Лемма 1.1. *Пусть* $\mathrm{cap}_{p,\Omega}(K) = 0$ *для некоторого компакта* $K \subset \overline{\Omega}$ *ненулевой меры. Тогда* Ω — *p-параболическая область.*

Лемма 1.2. *Пусть* Ω — *p-гиперболическая область, а* $K \subset \overline{\Omega}$ — *произвольный компакт. Тогда*

$$\|\varphi\|_{L_p(K)} \leqslant C\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ *таких, что* $\mathrm{supp}\,\varphi \Subset M$, *где постоянная* $C > 0$ *не зависит от* φ.

В **третьем параграфе первой главы** получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае функционала F с компактным носителем.

Теорема 1.1. *Пусть* Ω — *p-гиперболическая область и функционал* F, *определенный формулой* (5), *имеет компактный носитель. Тогда для существования решения* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы* $N_\omega(F) < \infty$ *для некоторого открытого множества* $\omega \subset M$ *такого, что* $\mathrm{supp}\,F \subset \omega$.

Теорема 1.2. *Пусть* Ω — *p-параболическая область и функционал* F, *определенный формулой* (5), *имеет компактный носитель. Тогда для существования решения* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы* $N_\omega(F) < \infty$ *для некоторого открытого множества* $\omega \subset M$ *такого, что* $\mathrm{supp}\,F \subset \omega$, *и при этом*

$$\lim_{s\to\infty}(F, \eta_s) = 0 \tag{6}$$

для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ *таких, что* $\mathrm{supp}\,\eta_s \Subset M$,

$$\lim_{s\to\infty}\|\eta_s\|_{L_p^1(\Omega)} = 0 \quad и \quad \eta_s|_K = 1, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где $K \subset \overline{\Omega}$ — *некоторый компакт положительной меры.*

Следствие 1.1. *Пусть* Ω — *p-гиперболическая область с компактной* *границей и h — функционал из $\mathcal{D}'(M)$ такой, что* $\operatorname{supp} h \subset \partial\Omega$. *Тогда для существования решения задачи*

$$\Delta_p u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = h, \tag{8}$$

удовлетворяющего условию (4), *необходимо и достаточно, чтобы* $N_\omega(h) < \infty$ *для некоторого открытого множества* $\omega \subset M$ *такого, что* $\partial\Omega \subset \omega$.

Следствие 1.2. *Пусть Ω — p-параболическая область с компактной границей и h — функционал из $\mathcal{D}'(M)$ такой, что* $\operatorname{supp} h \subset \partial\Omega$. *Тогда для существования решения задачи* (8), (4) *необходимо и достаточно, чтобы* $N_\omega(h) < \infty$ *для некоторого открытого множества* $\omega \subset M$ *такого, что* $\partial\Omega \subset \omega$, *и при этом*

$$(h, 1) = 0. \tag{9}$$

В **четвертом параграфе первой главы** получены критерии существования решения задачи (3), (4) в случае функционала F общего вида.

Будем предполагать, что многообразие M допускает локально конечное покрытие

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \tag{10}$$

кратности $k < \infty$, где $\Omega_i \subset M$ — области с компактным замыканием такие, что $\Omega \cap \Omega_i \cap \Omega_{i+1} \neq \varnothing$ и $\Omega \cap \Omega_i$ — липшицева область для каждого $i \in \mathbb{N}$. Пусть при этом $\gamma : M \to (0, \infty)$ — измеримая функция, отделенная от нуля и бесконечности на каждом компактном подмножестве многообразия M.

Теорема 1.3. *Пусть Ω — p-гиперболическая область, а* $\psi_i \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp} \psi_i \Subset \Omega_i$, *— разбиение единицы в окрестности* $\overline{\Omega}$, *подчиненное покрытию* (10), *такое, что*

$$|\nabla \psi_i(x)|^p \leqslant \gamma(x), \quad x \in \Omega_i \cap \Omega, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Пусть также для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ *такой, что* $\operatorname{supp} \varphi \Subset M$, *справедливо неравенство Харди*

$$\int\limits_\Omega \gamma |\varphi|^p \, dV \leqslant C \int\limits_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dV, \tag{12}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ. Тогда для существования решения (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F) < \infty, \tag{13}$$

где F определено с помощью (5).

Теорема 1.4. *Пусть Ω — p-параболическая область, а $\psi_i \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}\psi_i \Subset \Omega_i$, — разбиение единицы в окрестности $\overline{\Omega}$, подчиненное покрытию (10), удовлетворяющее условию (11). Пусть также для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$, равной нулю на множестве $\Omega_1 \cap \Omega$, справедливо неравенство Харди (12), где постоянная $C > 0$ не зависит от φ. Тогда для существования решения (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы имело место (13) и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, были выполнены условия (6) и (7), где $K \subset \overline{\Omega}$ — некоторый компакт положительной меры.*

Пусть $\omega_0 \subset M$ — липщицева область с компактным замыканием.

Определение 1.4. *Говорим, что функция $\mathcal{E}$ является решением задачи*

$$\Delta_p \mathcal{E} = 0 \quad \text{на } M \setminus \overline{\omega}_0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial M \setminus \overline{\omega}_0, \tag{15}$$

где ν — вектор внешней нормали к $\partial M \setminus \overline{\omega}_0$, если $\mathcal{E} \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M \setminus \overline{\omega}_0)$ и при этом

$$\int\limits_{M \setminus \overline{\omega}_0} g^{ij} |\nabla \mathcal{E}|^{p-2} \nabla_i \mathcal{E} \nabla_j \psi \, dV = 0 \tag{16}$$

для любой функции $\psi \in C^\infty(M \setminus \overline{\omega}_0)$ такой, что $\operatorname{supp}\psi \Subset M \setminus \overline{\omega}_0$.

Лемма 1.7. *Пусть непрерывная функция $\mathcal{E}$ является решением задачи (14), (15) и при этом $0 < \mathcal{E} < 1$ на $M \setminus \overline{\omega}_0$, $\mathcal{E}(x) \to 1$ при $\operatorname{dist}(x, \omega_0) \to 0$. Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, справедливо неравенство (12), где $\Omega = M \setminus \partial M$,*

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0 \dfrac{|\nabla \mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p}, & \text{на } M \setminus \overline{\omega}_0, \\ \gamma_0, & \text{на } \overline{\omega}_0, \end{cases} \tag{17}$$

$\gamma_0 > 0$ — *некоторое вещественное число, постоянная* $C > 0$ *не зависит от* φ.

Лемма 1.8. *Пусть непрерывная функция* $\mathcal{E}$ *является решением задачи* (14), (15) *и при этом* $\mathcal{E} > 0$ *на* $M \setminus \overline{\omega}_0$, $\mathcal{E}(x) \to 0$ *при* $\operatorname{dist}(x, \omega_0) \to 0$. *Пусть также для любого вещественного числа* $A > 0$ *множество* $\omega_A = \{x \in M \setminus \overline{\omega}_0 : \mathcal{E}(x) < A\}$ *предкомпактно. Тогда для любой функции* $\varphi \in C^\infty(M)$, *равной нулю в окрестности множества* $\overline{\omega}_0$, *справедливо неравенство* (12), *где* $\Omega = M \setminus \partial M$, *функция* γ *задается равенством* (17), *а постоянная* $C > 0$ *не зависит от* φ.

Теорема 1.5. *Пусть* M — p-*гиперболическое многообразие,* $\omega_0 \subset M$ — *липщицева область с компактным замыканием,* $\mathcal{E}$ — *гладкая функция, удовлетворяющая условию леммы 1.7, и при этом для любых вещественных чисел* A *и* B *таких, что* $0 < A < B < 1$, *множество* $\{x \in M \setminus \omega_0 : A < \mathcal{E}(x) < B\}$ *является липшицевой областью с компактным замыканием. Тогда для разрешимости задачи* (3), (4), *где* $\Omega = M \setminus \partial M$, *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (13), *где функционал* F *задан равенством* (5), $\Omega_1 = \omega_0 \cup \{x \in M \setminus \omega_0 : \mathcal{E}(x) > 1/4\}$ *и* $\Omega_i = \{x \in M \setminus \omega_0 : 2^{-1-i} < \mathcal{E}(x) < 2^{1-i}\}$, $i \geqslant 2$.

Теорема 1.6. *Пусть* M — p-*параболическое многообразие,* $\omega_0 \subset M$ — *липщицева область с компактным замыканием,* $\mathcal{E}$ — *гладкая функция, удовлетворяющая условию леммы 1.8, и при этом для любого вещественного числа* $A > 0$ *множество* $\omega_A = \{x \in M \setminus \overline{\omega}_0 : \mathcal{E}(x) < A\}$ *является липшицевой областью. Тогда для разрешимости задачи* (3), (4), *где* $\Omega = M \setminus \partial M$, *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (13), *где функционал* F *задан равенством* (5), $\Omega_1 = \omega_0 \cup \{x \in M \setminus \omega_0 : \mathcal{E}(x) < 4\}$ *и* $\Omega_i = \{x \in M \setminus \omega_0 : 2^{i-1} < \mathcal{E}(x) < 2^{i+1}\}$, $i \geqslant 2$, *и при этом для некоторой последовательности функций* $\eta_s \in C^\infty(M)$ *таких, что* $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, *были выполнены условия* (6) *и* (7), *где* K — *некоторый компакт положительной меры.*

Во **второй главе** получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда M является многообразием с модельными концами и $\Omega = M \setminus \partial M$.

В **первом параграфе второй главы** введено понятие модельного конца многообразия, доказан критерий p-гиперболичности и p-параболичности модельного конца.

Определение 2.1. *Множество $E \subset M$ называется модельным концом многообразия M, если оно представимо в виде $E = D \times [r_0, \infty)$, где D — компактное риманово многообразие с краем (возможно пустым), $r_0 > 0$ — некоторое вещественное число, причем на E задана метрика*

$$ds^2 = a^2(r)\, dr^2 + b^2(r)\tilde{g}_{ij}(\theta)\, d\theta^i d\theta^j,$$

где a и b — положительные, бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty)$, $\tilde{g}_{ij}$ — метрический тензор на D, θ^i — локальные координаты на D.

Определение 2.2. *Будем говорить, что модельный конец E многообразия M имеет p-гиперболический (p-параболический) тип, если E является p-гиперболическим (p-параболическим) многообразием.*

Предложение 2.1. *Пусть E — модельный конец многообразия M. Тогда E имеет p-гиперболический тип в том и только том случае, когда*

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{a(r)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(r)}\, dr < \infty,$$

и p-параболический тип в том и только том случае, когда

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{a(r)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(r)}\, dr = \infty.$$

Во **втором параграфе второй главы** получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) на многообразиях с модельными концами. Отдельно рассмотрен случай многообразия, имеющего один модельный конец.

Предположим, что найдется липшицева область $\omega \subset M$ с компактным замыканием, такая, что

$$M \setminus \omega = \bigcup_{\tau=1}^{q} E_\tau, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

где $E_\tau = D_\tau \times [r_{0,\tau}, \infty)$ — модельные концы многообразия M с метрикой $ds_\tau^2 = a_\tau^2(r)\, dr^2 + b_\tau^2(r)\tilde{g}_{ij,\tau}(\theta)\, d\theta^i d\theta^j$, $\tau = 1, ..., q$, D_τ — компактные римановы многообразия с краем (возможно пустым), $r_{0,\tau} > 0$ — некоторые вещественные числа, a_τ и b_τ — положительные, бесконечно гладкие функции на $[r_{0,\tau}, \infty)$, $\tilde{g}_{ij,\tau}$ — метрический тензор на D_τ, θ^i — локальные координаты на D_τ.

Положим

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \omega \cup D_1 \times [r_{0,1}, r_{2,1}) \cup \ldots \cup D_q \times [r_{0,q}, r_{2,q}), \\ &\Omega_{i,\tau} = D_\tau \times (r_{i-1,\tau}, r_{i+1,\tau}), \quad i \geqslant 2,\ \tau = 1, \ldots, q, \end{aligned} \tag{19}$$

где последовательность вещественных чисел $r_{i,\tau}$, $i \in \mathbb{N}$, для каждого $\tau = 1, \ldots, q$ определяется из соотношений

$$\int\limits_{r_{i,\tau}}^{\infty} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = \frac{1}{2} \int\limits_{r_{i-1,\tau}}^{\infty} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \in \mathbb{N},$$

в случае, если E_τ — модельный конец p-гиперболического типа, и

$$\int\limits_{r_{0,\tau}}^{r_{1,\tau}} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2, \quad \int\limits_{r_{0,\tau}}^{r_{i+1,\tau}} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2 \int\limits_{r_{0,\tau}}^{r_{i,\tau}} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \in \mathbb{N},$$

в случае, если E_τ — модельный конец p-параболического типа.

Теорема 2.1. *Пусть p-гиперболическое многообразие M удовлетворяет условию* (18). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$N_{\Omega_1}(F) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{\tau=1}^{q} \sum_{i=2}^{\infty} N_{\Omega_{i,\tau}}^{p/(p-1)}(F) < \infty, \tag{20}$$

где функционал F задан равенством (5), *а области Ω_1, $\Omega_{i,\tau}$, $i \geqslant 2$, $\tau = 1, \ldots, q$, определены соотношениями* (19).

Теорема 2.2. *Пусть p-параболическое многообразие M удовлетворяет условию* (18). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (20), *где области Ω_1, $\Omega_{i,\tau}$, $i \geqslant 2$, $\tau = 1, \ldots, q$, определены соотношениями* (19), *и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, были выполнены условия* (6) *и* (7), *где функционал F задаётся равенством* (5), *а K — некоторый компакт положительной меры.*

Предположим, что многообразие M представимо в виде

$$M = \omega \cup E, \tag{21}$$

где $E = D \times [r_0, \infty)$ — модельный конец многообразия M с метрикой

$$ds^2 = a^2(r)\, dr^2 + b^2(r)\tilde{g}_{ij}(\theta)\, d\theta^i d\theta^j,$$

где a и b — положительные, бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty)$, $\tilde{g}_{ij}$ — метрический тензор на D, θ^i — локальные координаты на D. Далее будем обозначать

$$M_{r_0} = \omega \quad \text{и} \quad M_r = \omega \cup D \times [r_0, r), \quad r > r_0.$$

Теорема 2.3. *Пусть M — p-гиперболическое многообразие с модельным концом* (21). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (13), *где функционал F задан равенством* (5), *$\Omega_1 = M_{r_2}$, $\Omega_i = M_{r_{i+1}} \setminus \overline{M}_{r_{i-1}}$, $i \geqslant 2$, а вещественные числа $r_i > r_0$ определяются из соотношений*

$$\int\limits_{r_i}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = \frac{1}{2} \int\limits_{r_{i-1}}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.4. *Пусть M — p-параболическое многообразие с модельным концом* (21). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (13), *где $\Omega_1 = M_{r_2}$, $\Omega_i = M_{r_{i+1}} \setminus \overline{M}_{r_{i-1}}$, $i \geqslant 2$, а вещественные числа $r_i > r_0$ определяются из соотношений*

$$\int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2, \qquad \int\limits_{r_0}^{r_i} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2 \int\limits_{r_0}^{r_{i-1}} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \geqslant 2,$$

и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, были выполнены условия (6) *и* (7), *где функционал F задаётся равенством* (5), *а K — некоторый компакт положительной меры.*

В **третьей главе** получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, а Ω — область, образованная вращением графика липшицевой функции.

Пусть x_1, ..., x_n — декартова система координат в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим сферические координаты r, θ, θ^1, ..., θ^{n-2}, сопоставляя каждой точке $P \in \mathbb{R}^n$ длину $r(P)$ её радиус-вектора, угол $\theta(P) \in [0, \pi]$ между радиус-вектором и положительным направлением оси Ox_n и $\tilde{\theta}(P) = (\theta^1(P), \dots, \theta^{n-2}(P))$ — локальные координаты на единичной $(n-2)$-мерной сфере $\mathbb{S}^{n-2}$.

Пусть $\Theta : [r_0, +\infty) \to (0, \pi)$, $r_0 > 0$, — липшицева функция такая, что

$$A_1 \Theta(r_1) \leqslant \Theta(r_2) \leqslant A_2 \Theta(r_1) \quad \text{при } r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant 2r_1,$$

где $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$ — некоторые постоянные. Предположим, что

$$\Omega = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M},$$

где $\mathcal{M} = \{P \in \mathbb{R}^n : r(P) \in [r_0, +\infty),\ \theta(P) \in [0, \Theta(r)),\ \tilde{\theta} \in \mathbb{S}^{n-2}\}$, а область $\mathcal{M}_0$ содержится в шаре B_{r_0}. Далее будем обозначать $R(r) = r\Theta(r)$, $r \geqslant r_0$.

Положим $r_i = 2^i r_0$, $i \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_1 = B_{r_2}, \quad \Omega_i = B_{r_{i+1}} \setminus \overline{B}_{r_{i-1}},\ i \geqslant 2. \tag{22}$$

Теорема 3.1. *Пусть Ω — p-гиперболическая область и при этом*

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{r^{p-1}}{R^{n-1}(r)} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{R^{n-1}(t)}{t^p}\, dt < \infty.$$

Тогда для разрешимости задачи (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (13), *где функционал F задан равенством* (5), *а области Ω_i определены с помощью* (22).

Теорема 3.2. *Пусть Ω — p-параболическая область и при этом выполнены условия*

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{R^{n-1}(t)}{t^p}\, dt < \infty, \quad \varlimsup_{r \to \infty} \frac{r^{p-1}}{R^{n-1}(r)} < \infty.$$

Тогда для разрешимости задачи (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (13), *где области Ω_i определены с помощью* (22), *и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ были выполнены условия* (6) *и* (7), *где функционал F задаётся равенством* (5), *а $K \subset \overline{\Omega}$ —*

некоторый компакт положительной меры.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Конькову Андрею Александровичу за постановку задачи, ее обсуждение, полезные советы и постоянную поддержку. Автор выражает благодарность сотрудникам кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за внимание к работе и ценные замечания.

Глава 1. Задача Неймана в областях на римановых многообразиях

В данной главе будут получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Неймана (3), (4). Эти условия различны для p-гиперболических и p-параболических областей. Например, в простом случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1$, $n \geqslant 2$, внешняя задача Неймана

$$\Delta_p u = 0 \quad \text{на } \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1, \qquad |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{S_1} = h, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1} |\nabla u|^p \, dV < \infty \tag{1.1}$$

при $n > p$ (в p-гиперболическом случае) имеет решение для любой функции $h \in L_{p/(p-1)}(S_1)$, в то время как при $n \leqslant p$ (в p-параболическом случае) для существования решения необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{S_1} h \, dS = 0. \tag{1.2}$$

В этом смысле p-параболические области ведут себя подобно ограниченным областям в $\mathbb{R}^n$ (см. замечание 1.2 ниже).

1.1 Общий критерий разрешимости

Сначала установим общий критерий разрешимости задачи (3), (4), справедливый как для p-гиперболических, так и для p-параболических областей.

Через $L_p^1(\omega)$, где ω — открытое подмножество M, будем обозначать пространство функций $u \in W_{p,\mathrm{loc}}^1(\omega)$, для которых $\nabla u \in L_p(\omega)$. Полунорма в $L_p^1(\omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{L_p^1(\omega)} = \left(\int\limits_{\omega} |\nabla u|^p \, dV \right)^{1/p}.$$

Известно [32], что $L^1_p(\omega) \subset L_p(K)$ для любого компакта $K \subset \omega$. Можно также показать, что $L^1_p(\omega)/\langle 1\rangle$ — рефлексивное банахово пространство. В самом деле, отображение $u \to \nabla u$ изометрически вкладывает $L^1_p(\omega)/\langle 1\rangle$ в

$$(L_p(\omega))^n = L_p(\omega) \times \ldots \times L_p(\omega).$$

Так как $(L_p(\omega))^n$ — равномерно выпуклое банахово пространство, то $L^1_p(\omega)/\langle 1\rangle$ также является равномерно выпуклым банаховым пространством. Поэтому пространство $L^1_p(\omega)/\langle 1\rangle$ рефлексивно, согласно теореме Мильмана [10, глава 5, §2, теорема 2]. Через $\overset{\circ}{L}{}^1_p(\omega)$ обозначим замыкание в $L^1_p(\omega)$ пространства функций $\varphi \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$. Для всех $l \in \mathcal{D}'(M)$ обозначим

$$N_\omega(l) = \sup_\varphi |(l, \varphi)|,$$

где sup берется по всем функциям $\varphi \in C^\infty(M)$ таким, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$,

$$\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\Omega} \subset \omega \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)} = 1.$$

Несложно проверить, что $N_\omega(l)$ имеет следующие свойства.

(a) Для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$ и $\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\Omega} \subset \omega$, выполнено неравенство

$$|(l, \varphi)| \leqslant N_\omega(l)\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega).}$$

(b) Если $\omega_1 \subset \omega_2$, то

$$N_{\omega_1}(l) \leqslant N_{\omega_2}(l).$$

Предложение 1.1. *Для разрешимости задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$N_M(F) < \infty, \tag{1.3}$$

где функционал F определен формулой (5).

Доказательство. Если u — решение (3), (4), то

$$-\int\limits_\Omega g^{ij}|\nabla u|^{p-2}\nabla_j u \nabla_i \varphi\, dV = (F, \varphi) \tag{1.4}$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, откуда, согласно неравенству Гельдера, получим

$$|(F,\varphi)| \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dV \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\,dV\right)^{(p-1)/p} \left(\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dV\right)^{1/p} = \|u\|^{p-1}_{L^1_p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)}.$$

Тем самым,

$$N_M(F) \leqslant \|u\|^{p-1}_{L^1_p(\Omega)} < \infty,$$

и необходимость доказана. Чтобы доказать достаточность, возьмем последовательность $\varphi_i \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}\varphi_i \Subset M$, $i \in \mathbb{N}$, такую, что

$$\lim_{i\to\infty} L(\varphi_i) = \inf_\varphi L(\varphi),$$

где

$$L(\varphi) = \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dV + (F,\varphi),$$

а inf берется по всем функциям $\varphi \in C^\infty(M)$ таким, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$. Из условия (1.3) следует ограниченность последовательности φ_i, $i \in \mathbb{N}$, в полунорме пространства $L^1_p(\Omega)$. В самом деле, предположим противное. Тогда из последовательности φ_i, $i \in \mathbb{N}$, можно выделить подпоследовательность φ_{i_k}, $k \in \mathbb{N}$, такую, что

$$\|\varphi_{i_k}\|_{L^1_p(\Omega)} \to +\infty \quad \text{при } k \to \infty.$$

Следовательно,

$$L(\varphi_{i_k}) \geqslant \frac{1}{p}\|\varphi_{i_k}\|^p_{L^1_p(\Omega)} - N_M(F)\|\varphi_{i_k}\|_{L^1_p(\Omega)} \to +\infty \quad \text{при } k \to \infty,$$

что противоречит определению последовательности φ_i, $i \in \mathbb{N}$. Из ограниченности последовательности φ_i, $i \in \mathbb{N}$, в свою очередь, следует, что

$$\lim_{i\to\infty} L(\varphi_i) = \inf_\varphi L(\varphi) > -\infty.$$

Выделим из последовательности $\varphi_i + \langle 1\rangle \in L^1_p(\Omega)/\langle 1\rangle$, $i \in \mathbb{N}$, подпоследовательность $\varphi_{i_j} + \langle 1 \rangle$, $j \in \mathbb{N}$, сходящуюся слабо к некоторому элементу $u + \langle 1 \rangle$ пространства $L^1_p(\Omega)/\langle 1 \rangle$. Ввиду рефлексивности $L^1_p(\Omega)/\langle 1 \rangle$, такая подпоследовательность существует. Обозначим через R_m выпуклую оболочку множества $\{\varphi_{i_j}\}_{j \geqslant m}$. По теореме Мазура [10, глава 5, §1, теорема 2], найдется последовательность $r_m \in R_m$, $m \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\|u - r_m\|_{L^1_p(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Поскольку $r_m \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp} r_m \Subset M$, $m \in \mathbb{N}$, отсюда немедленно следует, что $u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)$. Можно также утверждать, что

$$L(r_m) \leqslant \sup_{j \geqslant m} L(\varphi_{i_j}), \quad m \in \mathbb{N},$$

так как L — выпуклый функционал. Таким образом, переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$L(u) \leqslant \inf_{\varphi} L(\varphi).$$

Ввиду того, что обратное неравенство очевидно, будем иметь

$$L(u) = \inf_{\varphi} L(\varphi),$$

откуда, согласно вариационному принципу, следует (1.4). Действительно, зафиксируем произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(M)$ такую, что $\operatorname{supp} \varphi \Subset M$. Тогда

$$\frac{d}{d\lambda} L(u + \lambda\varphi)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\nabla(u+\lambda\varphi)|^p\, dV + (F, u+\lambda\varphi)\right)\Bigg|_{\lambda=0} = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned} |\nabla(u+\lambda\varphi)|^p &= (g^{ij}\nabla_i(u+\lambda\varphi)\nabla_j(u+\lambda\varphi))^{\frac{p}{2}} = \\ &= (|\nabla u|^2 + 2\lambda g^{ij}\nabla_i u \nabla_j \varphi + \lambda^2 |\nabla\varphi|^2)^{\frac{p}{2}}, \end{aligned}$$

то

$$\frac{d}{d\lambda}|\nabla(u+\lambda\varphi)|^p = p|\nabla(u+\lambda\varphi)|^{p-2}(g^{ij}\nabla_i u \nabla_j\varphi + \lambda|\nabla\varphi|^2).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\lambda}L(u+\lambda\varphi)\bigg|_{\lambda=0} = \int\limits_{\Omega} g^{ij}|\nabla u|^{p-2}\nabla_j u \nabla_i \varphi \, dV + (F,\varphi) = 0,$$

что эквивалетно (1.4). Другими словами, u является решением (3), (4). Предложение 1.1 доказано.

1.2 p-Гиперболические и p-параболические области

Изучим теперь некоторые свойства p-гиперболических и p-параболических областей, которые нам потребуются в дальнейшем.

Пусть $U \subset M \setminus \partial M$ — произвольное открытое множество.

Определение 1.1. *(p,U)-Емкостью компакта $K \subset \overline{U} \cap \omega$ относительно открытого множества $\omega \subset M$ называется величина*

$$\mathrm{cap}_{p,U}(K,\omega) = \inf_{\varphi} \int\limits_{\omega \cap U} |\nabla \varphi|^p \, dV,$$

где $\inf$ *берется по всем функциям $\varphi \in C^\infty(\omega)$ таким, что* $\operatorname{supp}\varphi \Subset \omega$ *и $\varphi \equiv 1$ в окрестности K. В случае $\omega = M$ пишем $\mathrm{cap}_{p,U}(K)$ вместо $\mathrm{cap}_{p,U}(K,M)$. Для произвольного замкнутого множества $H \subset \overline{U}$ полагаем*

$$\mathrm{cap}_{p,U}(H) = \sup_{K} \mathrm{cap}_{p,U}(K),$$

где sup берется по всем компактам $K \subset H$. (p,U)-Емкость пустого множества считается равной нулю.

Определение 1.2. *Область Ω называется p-гиперболической, если $\mathrm{cap}_{p,\Omega}(\overline{\Omega}) > 0$. В противном случае область Ω называется p-параболической.*

Определение 1.3. *Многообразие M называется p-гиперболическим, если $\mathrm{cap}_{p,M\setminus\partial M}(M) > 0$. В противном случае многообразие M называется p-параболическим.*

Замечание 1.1. *Если Ω — предкомпактная область, то она является p-параболической.*

В самом деле, возьмем функцию $\varphi \in C^\infty(M)$ такую, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$ и

$\varphi \equiv 1$ в окрестности $\overline{\Omega}$. Тогда

$$\operatorname{cap}_{p,\Omega}(\overline{\Omega}) \leqslant \int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^p \, dV = 0.$$

Лемма 1.1. *Пусть* $\operatorname{cap}_{p,\Omega}(K) = 0$ *для некоторого компакта* $K \subset \overline{\Omega}$ *ненулевой меры. Тогда* Ω *— p-параболическая область.*

Лемма 1.2. *Пусть* Ω *— p-гиперболическая область, а* $K \subset \overline{\Omega}$ *— произвольный компакт. Тогда*

$$\|\varphi\|_{L_p(K)} \leqslant C\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)} \tag{1.5}$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ *таких, что* $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, *где постоянная* $C > 0$ *не зависит от* φ.

Доказательство леммы 1.1. Пусть $H \subset \overline{\Omega}$ — произвольный компакт, содержащий K, а $\omega \subset \Omega$ — произвольная область с компактным замыканием такая, что $H \subset \overline{\omega}$. Достаточно показать, что $\operatorname{cap}_{p,\Omega}(H) = 0$.

Покроем $\overline{\Omega}$ семейством областей ω_s с компактным замыканием таких, что $\overline{\omega} \subset \omega_s \subset \omega_{s+1}$, $s \in \mathbb{N}$. Обозначим через u_s, $s \in \mathbb{N}$, решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_p u_s = 0 & \text{на } (\omega_s \cap \Omega) \setminus K, \\ u_s = 1 & \text{на } K, \\ u_s = 0 & \text{на } \Omega \cap \partial\omega_s, \\ \dfrac{\partial u_s}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \omega_s \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

Другими словами, функция $u_s \in W_p^1(\omega_s \cap \Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\omega_s \cap \Omega} g^{ij} |\nabla u_s|^{p-2} \nabla_i u_s \nabla_j \varphi \, dV = 0$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(\omega_s)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset \omega_s \setminus K$, и при этом

$$u_s = 1 \quad \text{на } K, \qquad u_s = 0 \quad \text{на } \Omega \cap \partial\omega_s.$$

Из вариационного принципа вытекает, что

$$L(u_s) = \inf_{\varphi} L(\varphi),$$

где

$$L(\varphi) = \frac{1}{p} \int\limits_{\omega_s \cap \Omega} |\nabla \varphi|^p \, dV,$$

а inf берется по всем функциям $\varphi \in C^\infty(\omega_s)$ таким, что $\operatorname{supp} \varphi \Subset \omega_s$ и $\varphi \equiv 1$ в окрестности K. Существование функции u_s, $s \in \mathbb{N}$, доказывается с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в доказательстве предложения 1.1.

Согласно принципу максимума, $0 \leqslant u_s(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \omega_s \cap \Omega$, $s \in \mathbb{N}$. Заметим, что $0 = u_s(x) \leqslant u_{s+1}(x)$ при $x \in \partial\omega_s \cap \Omega$, $s \in \mathbb{N}$. Поэтому, снова используя принцип максимума, приходим к выводу, что $0 \leqslant u_s(x) \leqslant u_{s+1}(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \omega_s \cap \Omega$, $s \in \mathbb{N}$. Тем самым, существует измеримая функция $u : \omega \to [0, 1]$ такая, что $u_s(x) \to u(x)$ для всех $x \in \omega$ при $s \to \infty$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\int\limits_{\omega} |u_s - u|^p \, dV \to 0 \quad \text{при } s \to \infty.$$

В частности, u_s, $s \in \mathbb{N}$, — фундаментальная последовательность в $L_p(\omega)$. В то же время, из условия леммы и вариационного принципа следует, что

$$\|u_s\|^p_{L^1_p(\omega_s \cap \Omega)} = \int\limits_{\omega_s \cap \Omega} |\nabla u_s|^p \, dV = \operatorname{cap}_{p,\Omega}(K, \omega_s) \to 0 \quad \text{при } s \to \infty. \tag{1.6}$$

При этом

$$\|u_i - u_j\|^p_{W^1_p(\omega)} = \int\limits_{\omega} |u_i - u_j|^p \, dV + \int\limits_{\omega} |\nabla(u_i - u_j)|^p \, dV \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\omega} |u_i - u_j|^p \, dV + 2^p \int\limits_{\omega} |\nabla u_i|^p \, dV + 2^p \int\limits_{\omega} |\nabla u_j|^p \, dV, \quad i, j \in \mathbb{N},$$

откуда вытекает, что u_s, $s \in \mathbb{N}$, — фундаментальная последовательность в $W^1_p(\omega)$. Следовательно, $u_s \to u$ в $W^1_p(\omega)$ при $s \to \infty$. Соотношение (1.6) позволяет утверждать, что $|\nabla u| = 0$ почти всюду на ω. Поскольку $u = 1$ на K, получим, что $u = 1$ почти всюду на ω, и $u_s \to 1$ в $W_p^1(\omega)$ при $s \to \infty$.

Обозначим через w_s, $s \in \mathbb{N}$, решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_p w_s = 0 & \text{на } (\omega_s \cap \Omega) \setminus H, \\ w_s = 1 & \text{на } H, \\ w_s = 0 & \text{на } \Omega \cap \partial\omega_s, \\ \dfrac{\partial w_s}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \omega_s \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

Другими словами, функция $w_s \in W_p^1(\omega_s \cap \Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\omega_s \cap \Omega} g^{ij} |\nabla w_s|^{p-2} \nabla_i w_s \nabla_j \varphi \, dV = 0$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(\omega_s)$ таких, что $\operatorname{supp} \varphi \Subset \omega_s \setminus H$, и при этом

$$w_s = 1 \quad \text{на } H, \qquad w_s = 0 \quad \text{на } \Omega \cap \partial\omega_s.$$

Из вариационного принципа вытекает, что

$$L(w_s) = \inf_{\varphi} L(\varphi),$$

где

$$L(\varphi) = \frac{1}{p} \int\limits_{\omega_s \cap \Omega} |\nabla \varphi|^p \, dV,$$

а inf берется по всем функциям $\varphi \in C^\infty(\omega_s)$ таким, что $\operatorname{supp} \varphi \Subset \omega_s$ и $\varphi \equiv 1$ в окрестности H. Существование функции w_s, $s \in \mathbb{N}$, доказывается с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в доказательстве предложения 1.1.

Согласно принципу максимума, $u_s(x) \leqslant w_s(x)$ и $0 \leqslant w_s(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \omega_s \cap \Omega$, $s \in \mathbb{N}$. Тем самым, $w_s(x) \to 1$ для всех $x \in \omega$ при $s \to \infty$. Далее, поскольку

$$\|w_s\|^p_{L_p^1(\omega_s \cap \Omega)} = \int\limits_{\omega_s \cap \Omega} |\nabla w_s|^p \, dV = \operatorname{cap}_{p,\Omega}(H, \omega_s),$$

последовательность $\|w_s\|_{L_p^1(\Omega)}$ ограничена и не возрастает. Выделим из последовательности $\nabla w_s \in L_p(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, подпоследовательность ∇w_{s_j}, $j \in \mathbb{N}$, сходящуюся слабо к некоторой вектор-функции $v \in L_p(\Omega)$. Ввиду рефлексивности

$L_p(\Omega)$, такая подпоследовательность существует. Обозначим через R_m выпуклую оболочку множества $\{w_{s_j}\}_{j\geqslant m}$. По теореме Мазура [10, глава 5, §1, теорема 2], найдется последовательность $r_m \in R_m$, $m \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \|\nabla r_m - v\|_{L_p(\Omega)} = 0. \tag{1.7}$$

Так как для всякого натурального числа m элемент $r_m \in R_m$ имеет вид

$$r_m = \sum_{j=m}^{m+q(m)} \alpha_j w_{s_j}, \quad \text{где } \alpha_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=m}^{m+q(m)} \alpha_j = 1, \; q(m) \in \mathbb{N},$$

то $r_m = 1$ на H для любого $m \in \mathbb{N}$, $r_m \to 1$ при $m \to \infty$ на ω. Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, $r_m \to 1$ в $L_p(\omega)$ при $m \to \infty$. Более того, из неравенства

$$\|r_i - r_j\|^p_{W^1_p(\omega)} \leqslant C \left(\|r_i - r_j\|^p_{L_p(H)} + \|r_i - r_j\|^p_{L^1_p(\omega)} \right),$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от i, j, вытекает, что последовательность r_m, $m \in \mathbb{N}$ фундаментальна в $W^1_p(\omega)$ и, тем самым, сходится к 1 в $W^1_p(\omega)$. Поэтому

$$\int\limits_\omega |\nabla r_m|^p \, dV \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \tag{1.8}$$

Из соотношений (1.7) и (1.8) следует, что $\|v\|_{L_p(\omega)} = 0$. В силу произвольности области ω, приходим к выводу, что $v = 0$ почти всюду на Ω. Тем самым, равенство (1.7) позволяет утверждать, что $\|\nabla r_m\|_{L_p(\Omega)} \to 0$ при $m \to \infty$. Заметим теперь, что

$$\mathrm{cap}_{p,\Omega}(H, \omega_{s_{m+q(m)}}) \leqslant \|\nabla r_m\|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant \mathrm{cap}_{p,\Omega}(H, \omega_{s_m}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $m \to \infty$, немедленно получим $\mathrm{cap}_{p,\Omega}(H) = 0$. Лемма 1.1 доказана.

Доказательство леммы 1.2. Возьмем область $\omega \subset M$ с компактным замыканием такую, что $K \subset \omega$ и при этом $\omega \cap \Omega$ — липшицева область. Предположим от противного, что найдется последовательность функций $\varphi_i \in C^\infty(M)$

таких, что $\operatorname{supp}\varphi_i \Subset M$, удовлетворяющая условию

$$\|\varphi_i\|_{L_p(\omega\cap\Omega)} > i\,\|\varphi_i\|_{L^1_p(\Omega)}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\|\varphi_i\|_{L_p(\omega\cap\Omega)} = \operatorname{mes}(\omega\cap\Omega) > 0, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Если последнее условие не выполнено, заменим φ_i на

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{\operatorname{mes}(\omega\cap\Omega)}{\|\varphi_i\|_{L_p(\omega\cap\Omega)}}\,\varphi_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда из (1.9) и (1.10) следует, что

$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi_i\|_{L^1_p(\Omega)} = 0, \tag{1.11}$$

и, тем самым, последовательность φ_i, $i \in \mathbb{N}$, ограничена в $W^1_p(\omega\cap\Omega)$. Так как $W^1_p(\omega\cap\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $L_p(\omega\cap\Omega)$, существует подпоследовательность последовательности φ_i, $i \in \mathbb{N}$, сходящаяся в $L_p(\omega\cap\Omega)$ к некоторой функции φ. Для простоты будем обозначать эту подпоследовательность также через φ_i, $i \in \mathbb{N}$. Ввиду (1.11), последовательность φ_i, $i \in \mathbb{N}$, фундаментальна в $W^1_p(\omega\cap\Omega)$, и $\varphi_i \to \varphi$ в $W^1_p(\omega\cap\Omega)$ при $i\to\infty$. Из (1.10) и (1.11) вытекает, что $\varphi = 1$ почти всюду на $\omega\cap\Omega$. Таким образом, $\varphi_i \to 1$ в $W^1_p(\omega\cap\Omega)$ при $i\to\infty$, поэтому некоторая подпоследовательность этой последовательности, которую мы снова обозначим за φ_i, $i \in \mathbb{N}$, сходится к единице почти всюду на $\omega\cap\Omega$. По теореме Егорова, найдется множество $E \subset \omega\cap\Omega$ положительной меры, такое, что последовательность φ_i, $i \in \mathbb{N}$, стремится к единице равномерно на E. Поскольку φ_i — непрерывные функции, последовательность φ_i, $i \in \mathbb{N}$, будет также стремиться к единице равномерно на компакте $\overline{E} \subset \overline{\omega}\cap\overline{\Omega}$. Возьмем, далее, функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную нулю на промежутке $(-\infty, 1/4]$ и единице на $[3/4, \infty)$. Тогда с учетом (1.11) будем иметь

$$\|\eta\circ\varphi_i\|_{L^1_p(\Omega)} \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |\eta'(x)| \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi_i|^p \, dV \right)^{1/p} =$$
$$= \|\eta'\|_{C(\mathbb{R})} \|\varphi_i\|_{L^1_p(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } i\to\infty.$$

Следовательно,

$$\operatorname{cap}_{p,\Omega}(\overline{E}) \leqslant \lim_{i\to\infty} \|\eta \circ \varphi_i\|^p_{L^1_p(\Omega)} = 0,$$

откуда, ввиду леммы 1.1, вытекает, что Ω — p-параболическая область. Полученное противоречие доказывает, что

$$\|\varphi\|_{L_p(\omega\cap\Omega)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)}$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, где постоянная $C > 0$ не зависит от φ, откуда немедленно следует (1.5). Лемма 1.2 доказана.

В дальнейшем мы будем использовать следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Пространство $\mathbb{R}^n$ является p-параболическим многообразием при $p \geqslant n$ и p-гиперболическим при $p < n$.*

Доказательство. Пусть $p \geqslant n$. Возьмем вещественные числа R_0 и R такие, что $0 < R_0 < R$. Положим

$$\varphi_{R_0,R}(x) = \begin{cases} \varphi\left(\dfrac{\ln \frac{R}{|x|}}{\ln \frac{R}{R_0}}\right), & |x| \neq 0, \\ 1, & |x| = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

где $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — некоторая функция, равная нулю на промежутке $(-\infty, 1/4]$ и единице на промежутке $[3/4, \infty)$. Несложно увидеть, что $\varphi_{R_0,R} \in C_0^\infty(B_R)$, причем $\varphi_{R_0,R} \equiv 1$ в окрестности множества $\overline{B}_{R_0}$. При $R_0 < |x| < R$ имеем

$$|\nabla\varphi_{R_0,R}|^p = \left|\frac{\partial\varphi_{R_0,R}}{\partial|x|}\right|^p = \left|\frac{1}{|x|\ln\frac{R}{R_0}}\,\varphi'\left(\frac{\ln\frac{R}{|x|}}{\ln\frac{R}{R_0}}\right)\right|^p \leqslant \frac{\|\varphi'\|^p_{C(\mathbb{R})}}{|x|^p\ln^p\frac{R}{R_0}}. \tag{1.13}$$

Обозначим $r = |x|$. Тогда, переходя к многомерным полярным координатам, получим

$$\operatorname{cap}_{p,\mathbb{R}^n}(\overline{B}_{R_0}, B_R) \leqslant \int\limits_{B_R\setminus\overline{B}_{R_0}} |\nabla\varphi_{R_0,R}|^p\,dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|\varphi'\|^p_{C(\mathbb{R})}}{\ln^p\frac{R}{R_0}} \int\limits_{S_1}\int\limits_{R_0}^{R} r^{n-p-1}\,dr\,dS_1 = \frac{C}{\ln^p\frac{R}{R_0}}\int\limits_{R_0}^{R} r^{n-p-1}\,dr, \tag{1.14}$$

где dS_1 — элемент объема единичной сферы S_1 в $\mathbb{R}^n$,

$$C = \|\varphi'\|^p_{C(\mathbb{R})} \operatorname{mes}_{n-1} S_1.$$

Если $n = p$, из (1.14) следует, что

$$\operatorname{cap}_{p,\mathbb{R}^n}(\overline{B}_{R_0}, B_R) \leqslant \frac{C}{\ln^{p-1} \frac{R}{R_0}} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty,$$

откуда

$$\operatorname{cap}_{p,\mathbb{R}^n}(\overline{B}_{R_0}) = 0. \tag{1.15}$$

Если же $n < p$, то, устремляя R к бесконечности, из соотношения (1.14) снова получим (1.15). В силу произвольности числа $R_0 > 0$, из равенства (1.15) вытекает, что $\operatorname{cap}_{p,\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n) = 0$.

Предположим теперь, что $n > p$. Пусть $R > R_0 > 0$. Рассмотрим вариационную задачу

$$L(\varphi) = \int\limits_{B_R} |\nabla\varphi|^p \, dV \to \inf,$$

где inf берётся по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$, тождественно равным единице в окрестности $\overline{B}_{R_0}$. Из вариационного принципа следует, что inf функционала L достигается на обобщенном решении краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_p u = 0 & \text{на } B_R \setminus \overline{B}_{R_0}, & (1.16)\\ u = 1 & \text{на } \overline{B}_{R_0}, & (1.17)\\ u = 0 & \text{на } \partial B_R. & (1.18) \end{cases}$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве предложения 1.1, несложно показать, что решение задачи (1.16)–(1.18) существует. Более того, это решение единственно. В самом деле, предположим от противного, что u_1, u_2 — решения задачи (1.16)–(1.18). Тогда

$$\int\limits_{B_R} |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla\varphi \, dV = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{B_R} |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \nabla\varphi \, dV = 0$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Положим $\varphi = u_1 - u_2$. Тогда

$$\int\limits_{B_R} (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dV = 0.$$

Тем самым,

$$(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2) = 0 \quad \text{почти всюду на } B_R,$$

откуда вытекает, что $\nabla u_1 = \nabla u_2$ почти всюду на B_R. Так как $u_1 - u_2 = 0$ на B_{R_0}, то $u_1 = u_2$ почти всюду на B_R.

Будем искать решение задачи (1.16)–(1.18) в виде некоторой функции, зависящей только от r. Непосредственными вычислениями можно показать, что в этом случае уравнение (1.16) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \quad \text{на } B_R \setminus \overline{B}_{R_0},$$

откуда, с учётом условий (1.17) и (1.18), будем иметь

$$u(r) = \frac{R^{\frac{p-n}{p-1}} - r^{\frac{p-n}{p-1}}}{R^{\frac{p-n}{p-1}} - R_0^{\frac{p-n}{p-1}}}, \quad R_0 < r < R.$$

Следовательно,

$$|\nabla u|^p = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \frac{r^{\frac{p(1-n)}{p-1}}}{\left(R_0^{\frac{p-n}{p-1}} - R^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^p}, \quad R_0 < r < R.$$

Тем самым,

$$\operatorname{cap}_{p,\mathbb{R}^n}(\overline{B}_{R_0}, B_R) = \int\limits_{B_R \setminus \overline{B}_{R_0}} |\nabla u|^p\, dV =$$

$$= \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \frac{1}{\left(R_0^{\frac{p-n}{p-1}} - R^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^p} \int\limits_{S_1}\int\limits_{R_0}^{R} r^{\frac{1-n}{p-1}}\, dr\, dS_1 =$$

$$= \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} \frac{\mathrm{mes}_{n-1} S_1}{\left(R_0^{\frac{p-n}{p-1}} - R^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{p-1}}.$$

Устремляя R к бесконечности, из последнего соотношения получим

$$\mathrm{cap}_{p,\mathbb{R}^n}(\overline{B}_{R_0}) = R_0^{n-p} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} \mathrm{mes}_{n-1} S_1 > 0 \quad \text{для всех } R_0 > 0,$$

откуда вытекает, что $\mathrm{cap}_{p,\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n) > 0$.

1.3 Случай функционала F с компактным носителем

Теорема 1.1. *Пусть Ω — p-гиперболическая область и функционал F, определенный формулой* (5)*, имеет компактный носитель. Тогда для существования решения* (3)*,* (4) *необходимо и достаточно, чтобы $N_\omega(F) < \infty$ для некоторого открытого множества $\omega \subset M$ такого, что $\operatorname{supp} F \subset \omega$.*

Теорема 1.2. *Пусть Ω — p-параболическая область и функционал F, определенный формулой* (5)*, имеет компактный носитель. Тогда для существования решения* (3)*,* (4) *необходимо и достаточно, чтобы $N_\omega(F) < \infty$ для некоторого открытого множества $\omega \subset M$ такого, что $\operatorname{supp} F \subset \omega$, и при этом*

$$\lim_{s\to\infty} (F, \eta_s) = 0 \tag{1.19}$$

для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$,

$$\lim_{s\to\infty} \|\eta_s\|_{L_p^1(\Omega)} = 0 \quad \text{и} \quad \eta_s|_K = 1, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{1.20}$$

где $K \subset \overline{\Omega}$ — некоторый компакт положительной меры.

Доказательство теоремы 1.1. Необходимость очевидна, так как из условия $N_M(F) < \infty$ следует, что $N_\omega(F) < \infty$ в для любого открытого подмножества ω многообразия M. Докажем достаточность. Пусть $N_\omega(F) < \infty$ для некоторого открытого множества ω такого, что $\operatorname{supp} F \subset \omega$. Покажем, что в этом случае $N_M(F) < \infty$. Возьмем функцию $\psi \in C^\infty(\omega)$ такую, что $\operatorname{supp} \psi \Subset \omega$ и $\psi = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} F$. Имеем

$$|(F, \psi\varphi)| \leqslant N_\omega(F) \|\psi\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, откуда, ввиду того, что $(F,\varphi) = (F,\psi\varphi)$ и

$$\|\psi\varphi\|_{L^1_p(\Omega)} \leqslant \left(\int\limits_\Omega |\psi\nabla\varphi|^p\,dV\right)^{1/p} + \left(\int\limits_\Omega |\varphi\nabla\psi|^p\,dV\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \|\psi\|_{C(\omega)}\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)} + \|\nabla\psi\|_{C(\omega)}\|\varphi\|_{L_p(\overline{\Omega}\cap\operatorname{supp}\psi)},$$

вытекает неравенство

$$|(F,\varphi)| \leqslant N_\omega(F)\left(\|\psi\|_{C(\omega)}\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)} + \|\nabla\psi\|_{C(\omega)}\|\varphi\|_{L_p(\overline{\Omega}\cap\operatorname{supp}\psi)}\right)$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$. Далее в доказательстве теоремы 1.1 через C будем обозначать всевозможные положительные постоянные, не зависящие от φ. Согласно лемме 1.2,

$$\|\varphi\|_{L_p(\overline{\Omega}\cap\operatorname{supp}\psi)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)}$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$. Таким образом,

$$|(F,\varphi)| \leqslant CN_\omega(F)\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)}$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, откуда следует, что

$$N_M(F) \leqslant CN_\omega(F) < \infty.$$

Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Как и в случае теоремы 1.1, требуется доказать лишь достаточность, так как необходимость очевидна. Пусть $\Omega' \subset M$ — область с компактным замыканием такая, что $K \subset \Omega'$, $\operatorname{supp} F \subset \Omega'$ и $\Omega' \cap \Omega$ — липшицева область. Далее в доказательстве теоремы 1.2 через C будем обозначать всевозможные положительные постоянные, зависящие только от p, ω, Ω', Ω и носителя функционала F. В силу неравенства

$$\|\eta_s\|^p_{W^1_p(\Omega'\cap\Omega)} \leqslant C\left(\|\eta_s\|^p_{L^1_p(\Omega'\cap\Omega)} + \|\eta_s\|^p_{L_p(K)}\right), \tag{1.21}$$

нормы $\|\eta_s\|_{W_p^1(\Omega'\cap\Omega)}$ ограничены некоторой постоянной, не зависящей от s. Поскольку $W_p^1(\Omega'\cap\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $L_p(\Omega'\cap\Omega)$, существует подпоследовательность последовательности η_s, $s\in\mathbb{N}$, сходящаяся в $L_p(\Omega'\cap\Omega)$ к некоторой функции η. Для простоты будем обозначать эту подпоследовательность также через η_s, $s\in\mathbb{N}$. Ввиду (1.20), последовательность η_s, $s\in\mathbb{N}$, фундаментальна в $W_p^1(\Omega'\cap\Omega)$, и $\eta_s\to\eta$ в $W_p^1(\Omega'\cap\Omega)$ при $s\to\infty$, причем $\eta=1$ почти всюду на $\Omega'\cap\Omega$. Таким образом,

$$\|1-\eta_s\|_{W_p^1(\Omega'\cap\Omega)}\to 0\quad\text{при } s\to\infty. \tag{1.22}$$

Предположим, что $\varphi\in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}\varphi\Subset M$. Согласно неравенству Пуанкаре,

$$\int\limits_{\Omega'\cap\Omega}|\varphi-\alpha|^p\,dV\leqslant C\int\limits_{\Omega'\cap\Omega}|\nabla\varphi|^p\,dV, \tag{1.23}$$

где

$$\alpha=\frac{1}{\operatorname{mes}(\Omega'\cap\Omega)}\int\limits_{\Omega'\cap\Omega}\varphi\,dV. \tag{1.24}$$

Возьмем функцию $\psi\in C^\infty(\omega\cap\Omega')$ такую, что $\operatorname{supp}\psi\Subset\omega\cap\Omega'$ и $\psi=1$ в окрестности $\operatorname{supp}F$. Обозначим

$$\varphi_j'=(\varphi-\alpha\eta_j)(1-\psi)\quad\text{и}\quad\varphi_j''=(\varphi-\alpha\eta_j)\psi,\quad j\in\mathbb{N}. \tag{1.25}$$

Так как $\varphi=\varphi_j'+\varphi_j''+\alpha\eta_j$, можно утверждать, что

$$|(F,\varphi)|\leqslant|(F,\varphi_j')|+|(F,\varphi_j'')|+|\alpha||(F,\eta_j)|,\quad j\in\mathbb{N}. \tag{1.26}$$

Поскольку $(F,\varphi_j')=0$ и $\varphi_j''\in C^\infty(\omega)$, $\operatorname{supp}\varphi_j''\Subset\omega$, это, очевидно, влечет оценку

$$|(F,\varphi)|\leqslant N_\omega(F)\|\varphi_j''\|_{L_p^1(\Omega)}+|\alpha||(F,\eta_j)|,\quad j\in\mathbb{N},$$

объединяя которую с неравенством

$$\|\varphi_j''\|_{L_p^1(\Omega)}\leqslant\|\psi\|_{C(\Omega'\cap\Omega)}\|\varphi-\alpha\eta_j\|_{L_p^1(\Omega)}+\|\nabla\psi\|_{C(\Omega'\cap\Omega)}\|\varphi-\alpha\eta_j\|_{L_p(\Omega'\cap\Omega)},$$

получим

$$|(F,\varphi)| \leqslant CN_\omega(F)\left(\|\varphi-\alpha\eta_j\|_{L^1_p(\Omega)}+\|\varphi-\alpha\eta_j\|_{L_p(\Omega'\cap\Omega)}\right)+|\alpha||(F,\eta_j)|, \quad j\in\mathbb{N}.$$

Переходя в последней формуле к пределу при $j\to\infty$, с учетом соотношений

$$\|\varphi-\alpha\eta_j\|_{L^1_p(\Omega)} \leqslant \|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)}+|\alpha|\|\eta_j\|_{L^1_p(\Omega)} \to \|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)} \quad \text{при } j\to\infty \tag{1.27}$$

и

$$\begin{aligned}\|\varphi-\alpha\eta_j\|_{L_p(\Omega'\cap\Omega)} &= \|\varphi-\alpha+\alpha(1-\eta_j)\|_{L_p(\Omega'\cap\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi-\alpha\|_{L_p(\Omega'\cap\Omega)}+|\alpha|\|1-\eta_j\|_{L_p(\Omega'\cap\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant C\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega'\cap\Omega)}+|\alpha|\|1-\eta_j\|_{L_p(\Omega'\cap\Omega)} \to C\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega'\cap\Omega)} \quad \text{при } j\to\infty,\end{aligned} \tag{1.28}$$

будем иметь

$$|(F,\varphi)| \leqslant CN_\omega(F)\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)},$$

откуда следует, что

$$N_M(F) \leqslant CN_\omega(F) < \infty.$$

Теорема 1.2 доказана.

Следствие 1.1. *Пусть Ω — p-гиперболическая область с компактной границей и h — функционал из $\mathcal{D}'(M)$ такой, что $\operatorname{supp} h\subset\partial\Omega$. Тогда для существования решения задачи*

$$\Delta_p u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega} = h, \tag{1.29}$$

удовлетворяющего условию (4)*, необходимо и достаточно, чтобы $N_\omega(h)<\infty$ для некоторого открытого множества $\omega\subset M$ такого, что $\partial\Omega\subset\omega$.*

Следствие 1.2. *Пусть Ω — p-параболическая область с компактной границей и h — функционал из $\mathcal{D}'(M)$ такой, что $\operatorname{supp} h\subset\partial\Omega$. Тогда для существования решения задачи* (1.29), (4) *необходимо и достаточно, чтобы $N_\omega(h)<\infty$ для некоторого открытого множества $\omega\subset M$ такого, что $\partial\Omega\subset\omega$, и при этом*

$$(h,1)=0. \tag{1.30}$$

Следствия 1.1 и 1.2 немедленно вытекают из теорем 1.1 и 1.2. Считая без ограничения общности, что $\overline{\omega}$ — компакт, заметим лишь, что (1.30) влечет (1.19) для любой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, и удовлетворяющих (1.20), где $K = \overline{\omega}$. В случае p-параболической области такая последовательность, очевидно, существует. С другой стороны, если $N_M(h) < \infty$, то (1.19) будет выполнено для любой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, и удовлетворяющих (1.20), где $K = \overline{\omega}$. Это, в свою очередь, влечет справедливость (1.30).

Замечание 1.2. *Задача* (1.1) *при* $n > p$ *имеет решение для любой функции* $h \in L_{p/(p-1)}(S_1)$, *в то время как при* $n \leqslant p$ *для существования решения необходимо и достаточно, чтобы имело место* (1.2).

Доказательство. Пусть $h \in L_{p/(p-1)}(S_1)$. Положим $\omega = B_2$. Покажем, что $N_\omega(h) < \infty$ для функционала

$$\varphi \to \int\limits_{S_1} h\varphi \, dS, \quad \varphi \in C_0^\infty(B_2).$$

Согласно неравенству Гельдера,

$$|(h,\varphi)| \leqslant \int\limits_{S_1} |h\varphi| \, dS \leqslant \left(\int\limits_{S_1} |\varphi|^p \, dS \right)^{1/p} \left(\int\limits_{S_1} |h|^{p/(p-1)} \, dS \right)^{(p-1)/p} = \\ = \|h\|_{L_{p/(p-1)}(S_1)} \|\varphi\|_{L_p(\partial(B_2 \setminus \overline{B}_1))}. \qquad (1.31)$$

Далее в доказательстве замечания 1.2 через C будем обозначать всевозможные положительные постоянные, не зависящие от φ. По теореме вложения,

$$\|\varphi\|_{L_p(\partial(B_2 \setminus \overline{B}_1))} \leqslant C \|\varphi\|_{W_p^1(B_2 \setminus \overline{B}_1)}. \qquad (1.32)$$

В то же время, в силу неравенства Фридрихса,

$$\|\varphi\|_{W_p^1(B_2 \setminus \overline{B}_1)} \leqslant C \|\varphi\|_{L_p^1(B_2 \setminus \overline{B}_1)}. \qquad (1.33)$$

Объединяя соотношения (1.31), (1.32) и (1.33), получим

$$|(h,\varphi)| \leqslant C \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)},$$

откуда следует, что $N_\omega(h) \leqslant C$. Предположим сначала, что $n > p$. В этом случае область $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1$ является p-гиперболической (см. предложение 1.2). Тем самым, согласно следствию 1.1, задача (1.1) имеет решение. Если же $n \leqslant p$, то Ω — p-параболическая область. Поэтому для завершения доказательства остается заметить, что условие (1.2) эквивалентно (1.30), и воспользоваться следствием 1.2.

1.4 Случай функционала F общего вида

Будем предполагать, что многообразие M допускает локально конечное покрытие

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \tag{1.34}$$

кратности $k < \infty$, где $\Omega_i \subset M$ — области с компактным замыканием такие, что $\Omega \cap \Omega_i \cap \Omega_{i+1} \neq \varnothing$ и $\Omega \cap \Omega_i$ — липшицева область для каждого $i \in \mathbb{N}$. Пусть при этом $\gamma : M \to (0, \infty)$ — измеримая функция, отделенная от нуля и бесконечности на каждом компактном подмножестве многообразия M.

1.4.1 Неравенство Харди

В данном подразделе будут получены достаточные условия выполнения неравенства Харди (12), на которое опирается доказательство основных результатов параграфа 1.4.

1.4.1.1 Условие на бесконечности

Нам потребуется следующее известное утверждение.

Лемма 1.3 (неравенство Пуанкаре). *Допустим, что $\omega \subset M$ — липшицева область с компактным замыканием. Тогда*

$$\int_\omega \gamma |u - \bar{u}| \, dV \leqslant C \int_\omega \gamma^{1-1/p} |\nabla u| \, dV \tag{1.35}$$

для любой функции $u \in W_1^1(\omega)$, *где*

$$\bar{u} = \frac{\int\limits_{\omega} \gamma u \, dV}{\int\limits_{\omega} \gamma \, dV},$$

а постоянная $C > 0$ *не зависит от* u.

Лемма 1.4. *Пусть* ω_1 *и* ω_2 — *измеримые подмножества липшицевой области* $\omega \Subset M$ *такие, что*

$$\gamma_i = \int\limits_{\omega_i} \gamma \, dV > 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$\frac{1}{\gamma_1} \int\limits_{\omega_1} \gamma |u| \, dV \leqslant C \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \int\limits_{\omega} \gamma^{1-1/p} |\nabla u| \, dV + \frac{1}{\gamma_2} \int\limits_{\omega_2} \gamma |u| \, dV$$

для любой функции $u \in W_1^1(\omega)$, *где* $C > 0$ — *постоянная в неравенстве Пуанкаре* (1.35).

Доказательство. Принимая во внимание (1.35), имеем

$$\int\limits_{\omega_1} \gamma |u - \bar{u}| \, dV \leqslant C \int\limits_{\omega} \gamma^{1-1/p} |\nabla u| \, dV,$$

откуда, ввиду неравенства $|u| - |\bar{u}| \leqslant |u - \bar{u}|$, следует, что

$$\int\limits_{\omega_1} \gamma |u| \, dV - \int\limits_{\omega_1} \gamma |\bar{u}| \, dV \leqslant C \int\limits_{\omega} \gamma^{1-1/p} |\nabla u| \, dV$$

или, другими словами,

$$\frac{1}{\gamma_1} \int\limits_{\omega_1} \gamma |u| \, dV \leqslant \frac{C}{\gamma_1} \int\limits_{\omega} \gamma^{1-1/p} |\nabla u| \, dV + |\bar{u}|. \tag{1.36}$$

Согласно (1.35), будем также иметь

$$\int\limits_{\omega_2} \gamma |u - \bar{u}|\, dV \leqslant C \int\limits_{\omega} \gamma^{1-1/p} |\nabla u|\, dV,$$

откуда, ввиду неравенства $|\bar{u}| - |u| \leqslant |u - \bar{u}|$, немедленно получим

$$\int\limits_{\omega_2} \gamma |\bar{u}|\, dV - \int\limits_{\omega_2} \gamma |u|\, dV \leqslant C \int\limits_{\omega} \gamma^{1-1/p} |\nabla u|\, dV,$$

что, очевидно, эквивалентно соотношению

$$|\bar{u}| \leqslant \frac{C}{\gamma_2} \int\limits_{\omega} \gamma^{1-1/p} |\nabla u|\, dV + \frac{1}{\gamma_2} \int\limits_{\omega_2} \gamma |u|\, dV,$$

объединяя которое с формулой (1.36), завершаем доказательство.

Лемма 1.5. *Пусть для покрытия* (1.34) *выполнено условие*

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} C_i \left(\frac{1}{\int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} \gamma\, dV} + \frac{1}{\int\limits_{\Omega_{i+1} \cap \Omega} \gamma\, dV} \right) \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{\Omega_j \cap \Omega} \gamma\, dV < \infty, \tag{1.37}$$

где $C_i > 0$ *— постоянная в неравенстве* (1.35) *для области* $\omega = (\Omega_i \cup \Omega_{i+1}) \cap \Omega$. *Тогда для любой функции* $\varphi \in C^\infty(M)$ *такой, что* $\operatorname{supp} \varphi \Subset M$, *справедливо неравенство Харди*

$$\int\limits_{\Omega} \gamma |\varphi|^p\, dV \leqslant C \int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi|^p\, dV, \tag{1.38}$$

где постоянная $C > 0$ *зависит только от* p, *кратности покрытия* (1.34) *и от левой части* (1.37).

Доказательство. Обозначим через $C_i > 0$ постоянную в неравенстве Пуанкаре (1.35) для $\omega = (\Omega_i \cup \Omega_{i+1}) \cap \Omega$. Положим

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{\Omega_j \cap \Omega} \gamma\, dV \quad \text{и} \quad \gamma_i = \int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} \gamma\, dV, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Будем также считать, что $S_0 = 0$. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(M)$ такую, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$. Имеем

$$\int\limits_{\Omega} \gamma|\varphi|^p\,dV \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_i\cap\Omega} \gamma|\varphi|^p\,dV = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i - S_{i-1}}{\gamma_i} \int\limits_{\Omega_i\cap\Omega} \gamma|\varphi|^p\,dV =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} S_i \left(\frac{1}{\gamma_i} \int\limits_{\Omega_i\cap\Omega} \gamma|\varphi|^p\,dV - \frac{1}{\gamma_{i+1}} \int\limits_{\Omega_{i+1}\cap\Omega} \gamma|\varphi|^p\,dV \right),$$

откуда, ввиду неравенства

$$\frac{1}{\gamma_i} \int\limits_{\Omega_i\cap\Omega} \gamma|\varphi|^p\,dV \leqslant C_i \left(\frac{1}{\gamma_i} + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \right) p \int\limits_{(\Omega_i\cup\Omega_{i+1})\cap\Omega} \gamma^{1-1/p}|\varphi|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dV +$$
$$+ \frac{1}{\gamma_{i+1}} \int\limits_{\Omega_{i+1}\cap\Omega} \gamma|\varphi|^p\,dV,$$

вытекающего из леммы 1.4, приходим к оценке

$$\int\limits_{\Omega} \gamma|\varphi|^p\,dV \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} S_i C_i \left(\frac{1}{\gamma_i} + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \right) p \int\limits_{(\Omega_i\cup\Omega_{i+1})\cap\Omega} \gamma^{1-1/p}|\varphi|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dV. \tag{1.39}$$

Заметим теперь, что для любых вещественных чисел α, $\beta \in [0,\infty)$ и $\varepsilon > 0$ существует число $C_\varepsilon > 0$, зависящее только от ε и p, такое, что выполнено неравенство

$$\alpha\beta \leqslant \varepsilon\alpha^{p'} + C_\varepsilon\beta^p,$$

где

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1, \quad \text{т.е.} \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Полагая

$$\alpha = \gamma^{1-1/p}|\varphi|^{p-1} \quad \text{и} \quad \beta = S_i C_i \left(\frac{1}{\gamma_i} + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \right) p|\nabla\varphi|,$$

получим

$$S_i C_i \left(\frac{1}{\gamma_i} + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \right) p \int\limits_{(\Omega_i\cup\Omega_{i+1})\cap\Omega} \gamma^{1-1/p}|\varphi|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dV \leqslant \varepsilon \int\limits_{(\Omega_i\cup\Omega_{i+1})\cap\Omega} \gamma|\varphi|^p\,dV +$$

$$+ AS_i^p C_i^p \left(\frac{1}{\gamma_i} + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \right)^p \int\limits_{(\Omega_i \cup \Omega_{i+1}) \cap \Omega} |\nabla \varphi|^p \, dV$$

для любого $\varepsilon > 0$, где постоянная $A > 0$ зависит только от ε и p, поэтому (1.39) позволяет утверждать, что

$$\int\limits_{\Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV \leqslant 2k\varepsilon \int\limits_{\Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV + B \int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi|^p \, dV$$

для любого $\varepsilon > 0$, где k — кратность покрытия (1.34) и $B > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от ε, p, k и от левой части (1.37). Таким образом, взяв в последнем неравенстве $\varepsilon > 0$ достаточно малым, завершаем доказательство.

Лемма 1.6. *Пусть для покрытия* (1.34) *выполнено условие*

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} C_i \left(\frac{1}{\int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} \gamma \, dV} + \frac{1}{\int\limits_{\Omega_{i+1} \cap \Omega} \gamma \, dV} \right) \sum_{j=i+1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_j \cap \Omega} \gamma \, dV < \infty, \tag{1.40}$$

где $C_i > 0$ — постоянная в неравенстве (1.35) *для области $\omega = (\Omega_i \cup \Omega_{i+1}) \cap \Omega$. Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$, равной нулю на множестве $\Omega_1 \cap \Omega$, справедливо неравенство* (1.38)*, где постоянная $C > 0$ зависит только от p, кратности покрытия* (1.34) *и от левой части* (1.40).

Доказательство. Положим

$$S_i = \sum_{j=i+1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_j \cap \Omega} \gamma \, dV \quad \text{и} \quad \gamma_i = \int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} \gamma \, dV, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Условие (1.40), в частности, означает, что $S_i < \infty$ для всех натуральных чисел i. Как и прежде, через $C_i > 0$ будем обозначать постоянную в неравенстве (1.35) для области $\omega = (\Omega_i \cup \Omega_{i+1}) \cap \Omega$. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(M)$, равную нулю на множестве $\Omega_1 \cap \Omega$. Можно увидеть, что

$$\int\limits_{\Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_{i+1} \cap \Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i - S_{i+1}}{\gamma_{i+1}} \int\limits_{\Omega_{i+1} \cap \Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} S_i \left(\frac{1}{\gamma_{i+1}} \int\limits_{\Omega_{i+1}\cap\Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV - \frac{1}{\gamma_i} \int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV \right),$$

откуда, согласно неравенству

$$\frac{1}{\gamma_{i+1}} \int\limits_{\Omega_{i+1}\cap\Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV \leqslant C_i \left(\frac{1}{\gamma_i} + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \right) p \int\limits_{(\Omega_i \cup \Omega_{i+1})\cap\Omega} \gamma^{1-1/p} |\varphi|^{p-1} |\nabla\varphi| \, dV +$$
$$+ \frac{1}{\gamma_i} \int\limits_{\Omega_i\cap\Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV,$$

вытекающему из леммы 1.4, получим (1.39). В заключение остается повторить рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 1.5.

Замечание 1.3. *Если для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, справедливо неравенство* (1.38), *то область Ω является p-гиперболической.*

Доказательство. Пусть $K \subset \overline{\Omega}$ — произвольный компакт ненулевой меры. Тогда

$$0 < \int\limits_K \gamma \, dV \leqslant C \int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^p \, dV$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$ и $\varphi = 1$ в окрестности K, где постоянная $C > 0$ не зависит от φ. Таким образом, $\operatorname{cap}_{p,\Omega}(K) > 0$.

Следствие 1.3. *Если покрытие* (1.34) *удовлетворяет условию* (1.37), *то область Ω является p-гиперболической.*

Следствие 1.3 сразу вытекает из леммы 1.5 и замечания 1.3.

1.4.1.2 Потенциал Эванса-Селберга

В подразделе 1.4.1.2 будем расссматривать случай $\Omega = M \setminus \partial M$. Пусть $\omega_0 \subset M$ — липщицева область с компактным замыканием.

Определение 1.4. *Говорим, что функция $\mathcal{E}$ является решением задачи*

$$\Delta_p \mathcal{E} = 0 \quad \text{на } M \setminus \overline{\omega}_0, \tag{1.41}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial M \setminus \overline{\omega}_0, \tag{1.42}$$

где ν — вектор внешней нормали к $\partial M \setminus \overline{\omega}_0$, если $\mathcal{E} \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M \setminus \overline{\omega}_0)$ и при этом

$$\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0} g^{ij}|\nabla\mathcal{E}|^{p-2}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\psi\, dV = 0 \qquad (1.43)$$

для любой функции $\psi \in C^\infty(M \setminus \overline{\omega}_0)$ такой, что $\operatorname{supp}\psi \Subset M \setminus \overline{\omega}_0$.

Заметим, что для любой функции $\psi \in W^1_p(M \setminus \overline{\omega}_0)$ такой, что $\operatorname{supp}\psi \Subset M \setminus \overline{\omega}_0$, существует последовательность функций $\psi_i \in C^\infty(M \setminus \overline{\omega}_0)$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $\operatorname{supp}\psi_i \Subset M \setminus \overline{\omega}_0$ и $\|\psi - \psi_i\|_{W^1_p(M\setminus\overline{\omega}_0)} \to 0$ при $i \to \infty$. Тем самым, если $\mathcal{E}$ является решением задачи (1.41), (1.42), то интегральное тождество (1.43) справедливо для любой функции $\psi \in W^1_p(M \setminus \overline{\omega}_0)$ такой, что $\operatorname{supp}\psi \Subset M \setminus \overline{\omega}_0$.

Лемма 1.7. *Пусть непрерывная функция $\mathcal{E}$ является решением задачи (1.41), (1.42) и при этом $0 < \mathcal{E} < 1$ на $M \setminus \overline{\omega}_0$, $\mathcal{E}(x) \to 1$ при $\operatorname{dist}(x, \omega_0) \to 0$. Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, справедливо неравенство (1.38), где $\Omega = M \setminus \partial M$,*

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0 \dfrac{|\nabla\mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p}, & \text{на } M \setminus \overline{\omega}_0, \\ \gamma_0, & \text{на } \overline{\omega}_0, \end{cases} \qquad (1.44)$$

$\gamma_0 > 0$ — некоторое вещественное число, постоянная $C > 0$ не зависит от φ.

Доказательство. Рассмотрим неубывающую функцию $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную нулю на $(-\infty, 1/2]$ и единице на $[1, \infty)$. Для любого вещественного числа $\tau > 0$ положим $\lambda_\tau(t) = \lambda(t/\tau)$. Возьмем произвольную бесконечно гладкую функцию φ на M с компактным носителем. Тогда, подставляя в интегральное тождество (1.43) пробную функцию

$$\psi = \frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}\lambda_\tau(1-\mathcal{E})|\varphi|^p,$$

будем иметь

$$0 = \int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0} g^{ij}|\nabla\mathcal{E}|^{p-2}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\left(\frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}\lambda_\tau(1-\mathcal{E})|\varphi|^p\right) dV \leqslant$$

$$\leqslant (1-p)\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0} \frac{1}{\mathcal{E}^p}|\nabla\mathcal{E}|^p\lambda_\tau(1-\mathcal{E})|\varphi|^p\, dV +$$

$$+p\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0}\frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}|\nabla\mathcal{E}|^{p-2}|g^{ij}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\varphi||\varphi|^{p-1}\lambda_\tau(1-\mathcal{E})\,dV-$$

$$-\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0}\frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}|\nabla\mathcal{E}|^{p}|\varphi|^{p}\lambda'_\tau(1-\mathcal{E})\,dV.$$

Так как функция λ_τ является неубывающей, то

$$-\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0}\frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}|\nabla\mathcal{E}|^{p}|\varphi|^{p}\lambda'_\tau(1-\mathcal{E})\,dV\leqslant 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0}\frac{1}{\mathcal{E}^{p}}|\nabla\mathcal{E}|^{p}\lambda_\tau(1-\mathcal{E})|\varphi|^{p}\,dV\leqslant$$

$$\leqslant\frac{p}{p-1}\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0}\frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}|\nabla\mathcal{E}|^{p-2}|g^{ij}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\varphi||\varphi|^{p-1}\lambda_\tau(1-\mathcal{E})\,dV. \tag{1.45}$$

Заметим, что $\lambda_\tau(1-\mathcal{E})\to 1$ всюду на $M\setminus\overline{\omega}_0$ при $\tau\to 0$. Тем самым, устремляя τ к нулю в неравенстве (1.45), получим

$$\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0}\frac{|\nabla\mathcal{E}|^{p}}{\mathcal{E}^{p}}|\varphi|^{p}\,dV\leqslant\frac{p}{p-1}\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0}\frac{|\nabla\mathcal{E}|^{p-2}}{\mathcal{E}^{p-1}}|g^{ij}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\varphi||\varphi|^{p-1}\,dV. \tag{1.46}$$

Далее, применяя к правой части (1.46) неравенство Коши–Буняковского

$$|g^{ij}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\varphi|\leqslant|\nabla\mathcal{E}||\nabla\varphi|,$$

будем иметь

$$\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0}\frac{|\nabla\mathcal{E}|^{p}}{\mathcal{E}^{p}}|\varphi|^{p}\,dV\leqslant\frac{p}{p-1}\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0}\frac{|\nabla\mathcal{E}|^{p-1}}{\mathcal{E}^{p-1}}|\varphi|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dV. \tag{1.47}$$

Заметим теперь, что для любых вещественных чисел $\alpha,\beta\in[0,\infty)$ и $\varepsilon>0$ существует число $C_\varepsilon>0$, зависящее только от ε и p, такое, что выполнено неравенство

$$\alpha\beta\leqslant\varepsilon\alpha^{p'}+C_\varepsilon\beta^{p},$$

где

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1, \quad \text{т.е.} \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Полагая

$$\alpha = \frac{|\nabla \mathcal{E}|^{p-1}}{\mathcal{E}^{p-1}} |\varphi|^{p-1} \quad \text{и} \quad \beta = |\nabla \varphi|,$$

получим из (1.47)

$$\int\limits_{M \setminus \overline{\omega}_0} \frac{|\nabla \mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p} |\varphi|^p \, dV \leqslant \frac{\varepsilon p}{p-1} \int\limits_{M \setminus \overline{\omega}_0} \frac{|\nabla \mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p} |\varphi|^p \, dV + \frac{C_\varepsilon p}{p-1} \int\limits_{M \setminus \overline{\omega}_0} |\nabla \varphi|^p dV.$$

Таким образом, взяв

$$\varepsilon = \frac{p-1}{2p},$$

будем иметь неравенство

$$\int\limits_{M \setminus \overline{\omega}_0} \frac{|\nabla \mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p} |\varphi|^p \, dV \leqslant C \int\limits_{M \setminus \overline{\omega}_0} |\nabla \varphi|^p \, dV, \tag{1.48}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от p.

Заметим, что из неравенства (1.48), в частности, следует p-гиперболичность многообразия M. В самом деле, возьмем произвольный компакт $K \subset M \setminus \omega_0$ ненулевой меры. Для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp} \varphi \Subset M$ и $\varphi \equiv 1$ в окрестности K, имеем

$$\int\limits_M |\nabla \varphi|^p \, dV \geqslant \int\limits_{M \setminus \overline{\omega}_0} |\nabla \varphi|^p \, dV \geqslant \frac{1}{C} \int\limits_{M \setminus \overline{\omega}_0} \frac{|\nabla \mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p} |\varphi|^p \, dV \geqslant \frac{1}{C} \int\limits_K \frac{|\nabla \mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p} \, dV > 0,$$

откуда вытекает, что $\operatorname{cap}_{p, M \setminus \partial M}(M \setminus \omega_0) > 0$. Поэтому $\operatorname{cap}_{p, M \setminus \partial M}(M) > 0$.

Всюду далее в доказательстве леммы 1.7 через C мы будем обозначать всевозможные положительные постоянные, не зависящие от φ. Для функции γ, определенной равенством (1.44), имеем

$$\int\limits_M \gamma |\varphi|^p \, dV = \gamma_0 \int\limits_{\overline{\omega}_0} |\varphi|^p \, dV + \int\limits_{M \setminus \overline{\omega}_0} \gamma |\varphi|^p \, dV.$$

При этом, ввиду (1.48),

$$\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0} \gamma|\varphi|^p\,dV \leqslant C \int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0} |\nabla\varphi|^p\,dV.$$

Таким образом, чтобы показать справедливость неравенства (1.38), достаточно заметить, что

$$\int\limits_{\overline{\omega}_0} |\varphi|^p\,dV \leqslant C \int\limits_{M} |\nabla\varphi|^p\,dV,$$

согласно лемме 1.2. Лемма 1.7 доказана.

Лемма 1.8. *Пусть непрерывная функция $\mathcal{E}$ является решением задачи* (1.41), (1.42) *и при этом $\mathcal{E} > 0$ на $M \setminus \overline{\omega}_0$, $\mathcal{E}(x) \to 0$ при* $\operatorname{dist}(x,\omega_0) \to 0$. *Пусть также для любого вещественного числа $A > 0$ множество $\omega_A = \{x \in M \setminus \overline{\omega}_0 : \mathcal{E}(x) < A\}$ предкомпактно. Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$, равной нулю в окрестности множества $\overline{\omega}_0$, справедливо неравенство* (1.38), *где $\Omega = M \setminus \partial M$, функция γ задается равенством* (1.44), *а постоянная $C > 0$ не зависит от φ.*

Доказательство. Для любого вещественного числа $\tau > 0$ определим функцию λ_τ так же, как и в доказательстве леммы 1.7. Возьмем произвольную бесконечно гладкую функцию φ на M, равную нулю в окрестности множества $\overline{\omega}_0$, и зафиксируем вещественное число $A > 0$. Тогда, подставляя в интегральное тождество (1.43) пробную функцию

$$\psi = \frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}\lambda_\tau\left(1 - \frac{\mathcal{E}}{A}\right)|\varphi|^p,$$

будем иметь

$$0 = \int\limits_{\omega_A} g^{ij}|\nabla\mathcal{E}|^{p-2}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\left(\frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}\lambda_\tau\left(1 - \frac{\mathcal{E}}{A}\right)|\varphi|^p\right)dV \leqslant$$

$$\leqslant (1-p)\int\limits_{\omega_A} \frac{1}{\mathcal{E}^p}|\nabla\mathcal{E}|^p\lambda_\tau\left(1 - \frac{\mathcal{E}}{A}\right)|\varphi|^p\,dV +$$

$$+p\int\limits_{\omega_A} \frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}|\nabla\mathcal{E}|^{p-2}|g^{ij}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\varphi||\varphi|^{p-1}\lambda_\tau\left(1 - \frac{\mathcal{E}}{A}\right)dV-$$

$$-\frac{1}{A}\int\limits_{\omega_A}\frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}|\nabla\mathcal{E}|^p|\varphi|^p\lambda_\tau'\left(1-\frac{\mathcal{E}}{A}\right)dV.$$

Так как функция λ_τ является неубывающей, то

$$-\frac{1}{A}\int\limits_{\omega_A}\frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}|\nabla\mathcal{E}|^p|\varphi|^p\lambda_\tau'\left(1-\frac{\mathcal{E}}{A}\right)dV\leqslant 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\omega_A}\frac{1}{\mathcal{E}^p}|\nabla\mathcal{E}|^p\lambda_\tau\left(1-\frac{\mathcal{E}}{A}\right)|\varphi|^p\,dV\leqslant$$
$$\leqslant\frac{p}{p-1}\int\limits_{\omega_A}\frac{1}{\mathcal{E}^{p-1}}|\nabla\mathcal{E}|^{p-2}|g^{ij}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\varphi||\varphi|^{p-1}\lambda_\tau\left(1-\frac{\mathcal{E}}{A}\right)dV. \tag{1.49}$$

Заметим, что

$$\lambda_\tau\left(1-\frac{\mathcal{E}}{A}\right)\to 1$$

всюду на $\omega_A\backslash\overline{\omega}_0$ при $\tau\to 0$. Тем самым, устремляя τ к нулю в неравенстве (1.49), получим

$$\int\limits_{\omega_A}\frac{|\nabla\mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p}|\varphi|^p\,dV\leqslant\frac{p}{p-1}\int\limits_{\omega_A}\frac{|\nabla\mathcal{E}|^{p-2}}{\mathcal{E}^{p-1}}|g^{ij}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\varphi||\varphi|^{p-1}\,dV.$$

Далее, с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в доказательстве леммы 1.7, будем иметь

$$\int\limits_{\omega_A}\frac{|\nabla\mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p}|\varphi|^p\,dV\leqslant C\int\limits_{\omega_A}|\nabla\varphi|^p\,dV, \tag{1.50}$$

где постоянная $C>0$ зависит только от p. Несложно увидеть, что множества $\{\omega_A\}_{A>0}$ образуют покрытие $M\setminus\overline{\omega}_0$, другими словами,

$$\bigcup_{A>0}\omega_A=M\setminus\overline{\omega}_0.$$

При этом для любых положительных действительных чисел A_1 и A_2, таких, что $A_1<A_2$, имеем $\omega_{A_1}\subset\omega_{A_2}$. Следовательно, устремляя A к бесконечности, из

(1.50) немедленно получим неравенство (1.48), которое, очевидно, эквивалентно (1.38), где функция γ определена равенством (1.44). Лемма 1.8 доказана.

Замечание 1.4. *Функцию $\mathcal{E}$, удовлетворяющую условию одной из двух последних лемм, принято называть потенциалом Эванса-Селберга многообразия M. Теоремы существования потенциала Эванса-Селберга можно найти в работах [68, 69]. Ниже будут приведены некоторые примеры потенцилов Эванса-Селберга (см. замечание 2.2).*

1.4.2 Теоремы существования

Теорема 1.3. *Пусть Ω — p-гиперболическая область, а $\psi_i \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}\psi_i \Subset \Omega_i$, — разбиение единицы в окрестности $\overline{\Omega}$, подчиненное покрытию* (1.34), *такое, что*

$$|\nabla\psi_i(x)|^p \leqslant \gamma(x), \quad x \in \Omega_i \cap \Omega, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.51}$$

Пусть также для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, справедливо неравенство Харди (1.38), *где постоянная $C > 0$ не зависит от φ. Тогда для существования решения* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F) < \infty, \tag{1.52}$$

где F определено с помощью (5).

Теорема 1.4. *Пусть Ω — p-параболическая область, а $\psi_i \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}\psi_i \Subset \Omega_i$, — разбиение единицы в окрестности $\overline{\Omega}$, подчиненное покрытию* (1.34), *удовлетворяющее условию* (1.51). *Пусть также для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$, равной нулю на множестве $\Omega_1 \cap \Omega$, справедливо неравенство Харди* (1.38), *где постоянная $C > 0$ не зависит от φ. Тогда для существования решения* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (1.52) *и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, были выполнены условия* (1.19) *и* (1.20), *где $K \subset \overline{\Omega}$ — некоторый компакт положительной меры.*

Доказательство теоремы 1.3. Будем следовать идее, предложенной в [33]. Допустим, что задача (3), (4) имеет решение. В этом случае, согласно предложению 1.1, $N_M(F) < \infty$. Покажем справедливость неравенства (1.52). Возьмем функции $\varphi_i \in C^\infty(M)$ такие, что $\operatorname{supp}\varphi_i \Subset M$,

$$\operatorname{supp}\varphi_i \cap \overline{\Omega} \subset \Omega_i, \quad \|\varphi_i\|_{L^1_p(\Omega)} = 1 \quad \text{и} \quad (F,\varphi_i) \geqslant \frac{1}{2} N_{\Omega_i}(F), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Полагая

$$\Phi_j(x) = \sum_{i=1}^{j} N_{\Omega_i}^{1/(p-1)}(F)\varphi_i(x), \quad j \in \mathbb{N},$$

будем иметь

$$(F,\Phi_j) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1.53}$$

С другой стороны, очевидно,

$$(F,\Phi_j) \leqslant N_M(F)\|\Phi_j\|_{L^1_p(\Omega)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, принимая во внимание соотношение

$$\|\Phi_j\|^p_{L^1_p(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla\Phi_j|^p\,dV \leqslant \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{j} N_{\Omega_i}^{1/(p-1)}(F)|\nabla\varphi_i|\right)^p dV \leqslant$$
$$\leqslant k^p \sum_{i=1}^{j} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F)\int\limits_\Omega |\nabla\varphi_i|^p\,dV = k^p\sum_{i=1}^{j} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F),$$

где k — кратность покрытия (1.34), получим

$$(F,\Phi_j) \leqslant kN_M(F)\left(\sum_{i=1}^{j} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F)\right)^{1/p}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Объединяя последнее неравенство с неравенством (1.53), приходим к выводу, что

$$\left(\sum_{i=1}^{j} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F)\right)^{1-1/p} \leqslant 2kN_M(F), \quad j \in \mathbb{N},$$

откуда в пределе при $j \to \infty$ следует (1.52).

Покажем теперь, что условие (1.52) влечет (1.3). Действительно, пусть $\varphi \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$. Так как $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт, а (1.34) — локально конечное покрытие, носитель функции φ может пересекаться лишь с конечным числом областей Ω_i. Тем самым, в некоторой окрестности множества $\overline{\Omega}$ выполнено равенство

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \varphi,$$

где в правой части почти все слагаемые равны нулю, откуда будем иметь

$$|(F, \varphi)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |(F, \psi_i \varphi)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}(F) \|\psi_i \varphi\|_{L_p^1(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F) \right)^{(p-1)/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i \varphi\|_{L_p^1(\Omega)}^p \right)^{1/p}. \qquad (1.54)$$

Несложно увидеть, что

$$\|\psi_i \varphi\|_{L_p^1(\Omega)}^p = \int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} |\nabla(\psi_i \varphi)|^p \, dV \leqslant 2^p \int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} |\nabla \psi_i|^p |\varphi|^p \, dV + 2^p \int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} \psi_i^p |\nabla \varphi|^p \, dV,$$

откуда, ввиду (1.51) и того обстоятельства, что $0 \leqslant \psi_i^p \leqslant \psi_i \leqslant 1$ на множестве Ω_i, получим

$$\|\psi_i \varphi\|_{L_p^1(\Omega)}^p \leqslant 2^p \int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV + 2^p \int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} \psi_i |\nabla \varphi|^p \, dV, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i \varphi\|_{L_p^1(\Omega)}^p \leqslant 2^p k \int\limits_{\Omega} \gamma |\varphi|^p \, dV + 2^p \int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi|^p \, dV,$$

где k — кратность покрытия (1.34), откуда, в силу неравенства (1.38), следует оценка

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i \varphi\|_{L_p^1(\Omega)}^p \leqslant C \int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi|^p \, dV,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ, поэтому соотношение (1.54) позволяет утверждать, что

$$|(F,\varphi)| \leqslant C^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F) \right)^{(p-1)/p} \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}. \tag{1.55}$$

Следовательно,

$$N_M(F) \leqslant C^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F) \right)^{(p-1)/p} < \infty.$$

Теорема 1.3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Необходимость доказывается так же, как и в случае теоремы 1.3. Заметим лишь, что, ввиду p-параболичности области Ω, найдется последовательность $\eta_s \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, удовлетворяющая (1.20). Для нее будет также выполнено (1.19), так как из существования решения задачи (3), (4) следует (1.3).

Докажем достаточность. Предположим, что $\eta_s \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$ — некоторая последовательность, удовлетворяющая условиям (1.19), (1.20). Возьмем область $\Omega' \subset M$ с компактным замыканием такую, что $K \subset \Omega'$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega'$ и $\Omega' \cap \Omega$ — липшицева область. Далее в доказательстве теоремы 1.2 через C будем обозначать всевозможные положительные постоянные, зависящие только от p, покрытия (1.34), разбиения единицы $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$, областей Ω и Ω'. В силу неравенства (1.21), нормы $\|\eta_s\|_{W_p^1(\Omega' \cap \Omega)}$ ограничены некоторой постоянной, не зависящей от s. Поскольку $W_p^1(\Omega' \cap \Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $L_p(\Omega' \cap \Omega)$, существует подпоследовательность последовательности η_s, $s \in \mathbb{N}$, сходящаяся в $L_p(\Omega' \cap \Omega)$. Сохраним для этой подпоследовательности то же обозначение η_s, $s \in \mathbb{N}$. Принимая во внимание (1.20), можно утверждать, что имеет место (1.22).

Пусть $\varphi \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp} \varphi \Subset M$, и при этом α — вещественное число, определенное формулой (1.24). Ввиду неравенства Пуанкаре, справедлива оценка (1.23). Предположим также, что φ'_j и φ''_j определены с помощью (1.25), где $\psi \in C^\infty(\Omega')$ — некоторая функция такая, что $\operatorname{supp} \psi \Subset \Omega'$ и $\psi = 1$ на Ω_1. В некоторой окрестности множества $\overline{\Omega}$ для каждого натурального числа j имеем

$$\varphi'_j = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi'_j \psi_i,$$

где почти все слагаемые в правой части равны нулю, поэтому

$$|(F,\varphi'_j)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |(F,\psi_i\varphi'_j)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}(F)\|\psi_i\varphi'_j\|_{L^1_p(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F)\right)^{(p-1)/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\varphi'_j\|^p_{L^1_p(\Omega)}\right)^{1/p}.$$

Таким образом, заменяя в рассуждениях, с помощью которых была получена оценка (1.55), функцию φ на φ'_j, получим

$$|(F,\varphi'_j)| \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F)\right)^{(p-1)/p} \|\varphi'_j\|_{L^1_p(\Omega)}. \tag{1.56}$$

Не представляет труда убедиться, что

$$\|\varphi'_j\|_{L^1_p(\Omega)} \leqslant \|1-\psi\|_{C(\Omega'\cap\Omega)}\|\varphi-\alpha\eta_j\|_{L^1_p(\Omega)} + \|\nabla\psi\|_{C(\Omega'\cap\Omega)}\|\varphi-\alpha\eta_j\|_{L_p(\Omega'\cap\Omega)}$$

и при этом имеют место (1.27) и (1.28), поэтому (1.56) влечет оценку

$$\limsup_{j\to\infty} |(F,\varphi'_j)| \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F)\right)^{(p-1)/p} \|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)}. \tag{1.57}$$

Поскольку $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega'$, в некоторой окрестности множества $\overline{\Omega}$ функцию φ''_j можно представить в виде

$$\varphi''_j = \sum_{\Omega'\cap\Omega_i\neq\varnothing} (\varphi-\alpha\eta_j)\psi\psi_i.$$

Заметим, что областей Ω_i, удовлетворяющих условию $\Omega'\cap\Omega_i\neq\varnothing$, конечное число, так как $\overline{\Omega'}$ — компакт, а покрытие (1.34) локально конечное. Тем самым,

$$|(F,\varphi''_j)| \leqslant \sum_{\Omega'\cap\Omega_i\neq\varnothing} |(F,(\varphi-\alpha\eta_j)\psi\psi_i)| \leqslant \sum_{\Omega'\cap\Omega_i\neq\varnothing} N_{\Omega_i}(F)\|(\varphi-\alpha\eta_j)\psi\psi_i\|_{L^1_p(\Omega)}.$$

В то же время,

$$\|(\varphi-\alpha\eta_j)\psi\psi_i\|_{L^1_p(\Omega)} \leqslant \|\psi\psi_i\|_{C(\Omega'\cap\Omega)}\|\varphi-\alpha\eta_j\|_{L^1_p(\Omega)}+$$

$$+ \|\nabla(\psi\psi_i)\|_{C(\Omega'\cap\Omega)}\|\varphi - \alpha\eta_j\|_{L_p(\Omega'\cap\Omega)},$$

откуда, ввиду (1.27) и (1.28), получим

$$\limsup_{j\to\infty} \|(\varphi - \alpha\eta_j)\psi\psi_i\|_{L^1_p(\Omega)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)}$$

для всех i таких, что $\Omega' \cap \Omega_i \neq \varnothing$. Таким образом, можно утверждать, что

$$\limsup_{j\to\infty} |(F, \varphi''_j)| \leqslant C \sum_{\Omega'\cap\Omega_i\neq\varnothing} N_{\Omega_i}(F)\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)}.$$

Согласно неравенству Гельдера,

$$\sum_{\Omega'\cap\Omega_i\neq\varnothing} N_{\Omega_i}(F) \leqslant N^{1/p} \left(\sum_{\Omega'\cap\Omega_i\neq\varnothing} N^{p/(p-1)}_{\Omega_i}(F)\right)^{(p-1)/p},$$

где N — число областей Ω_i, удовлетворяющих условию $\Omega' \cap \Omega_i \neq \varnothing$, поэтому справедлива оценка

$$\limsup_{j\to\infty} |(F, \varphi''_j)| \leqslant C \left(\sum_{\Omega'\cap\Omega_i\neq\varnothing} N^{p/(p-1)}_{\Omega_i}(F)\right)^{(p-1)/p} \|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)},$$

объединяя которую с (1.19), (1.26) и (1.57), будем иметь

$$|(F, \varphi)| \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{\infty} N^{p/(p-1)}_{\Omega_i}(F)\right)^{(p-1)/p} \|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$N_M(F) \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{\infty} N^{p/(p-1)}_{\Omega_i}(F)\right)^{(p-1)/p} < \infty.$$

Теорема 1.4 полностью доказана.

Теорема 1.5. *Пусть M — p-гиперболическое многообразие, $\omega_0 \subset M$ — липщицева область с компактным замыканием, $\mathcal{E}$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию леммы 1.7, и при этом для любых вещественных чисел*

A и B таких, что $0 < A < B < 1$, множество $\{x \in M \setminus \omega_0 : A < \mathcal{E}(x) < B\}$ является липшицевой областью с компактным замыканием. Тогда для разрешимости задачи (3), (4), где $\Omega = M \setminus \partial M$, необходимо и достаточно, чтобы имело место (1.52), где функционал F задан равенством (5), $\Omega_1 = \omega_0 \cup \{x \in M \setminus \omega_0 : \mathcal{E}(x) > 1/4\}$ и $\Omega_i = \{x \in M \setminus \omega_0 : 2^{-1-i} < \mathcal{E}(x) < 2^{1-i}\}$, $i \geqslant 2$.

Теорема 1.6. *Пусть M — p-параболическое многообразие, $\omega_0 \subset M$ — липщицева область с компактным замыканием, $\mathcal{E}$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию леммы 1.8, и при этом для любого вещественного числа $A > 0$ множество $\omega_A = \{x \in M \setminus \overline{\omega}_0 : \mathcal{E}(x) < A\}$ является липшицевой областью. Тогда для разрешимости задачи (3), (4), где $\Omega = M \setminus \partial M$, необходимо и достаточно, чтобы имело место (1.52), где функционал F задан равенством (5), $\Omega_1 = \omega_0 \cup \{x \in M \setminus \omega_0 : \mathcal{E}(x) < 4\}$ и $\Omega_i = \{x \in M \setminus \omega_0 : 2^{i-1} < \mathcal{E}(x) < 2^{i+1}\}$, $i \geqslant 2$, и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, были выполнены условия (1.19) и (1.20), где K — некоторый компакт положительной меры.*

Доказательство теоремы 1.5. Построим разбиение единицы ψ_i, подчиненное покрытию многообразия M областями Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию (1.51), где функция γ определена равенством (1.44). Возьмем функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную нулю в окрестности промежутков $(-\infty, 1]$ и $[4, +\infty)$, и единице в окрестности отрезка $[3/2, 7/2]$. Положим

$$\tilde{\psi}_1(x) = \begin{cases} \psi((14 - 8\mathcal{E}(x))/3), & x \in \Omega_1 \setminus \overline{\omega}_0, \\ 1, & x \in \overline{\omega}_0, \end{cases}$$

и $\tilde{\psi}_i(x) = \psi(2^{i+1}\mathcal{E}(x))$, $x \in \Omega_i$, $i \geqslant 2$. Обозначим

$$\psi_i(x) = \frac{\tilde{\psi}_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j(x)}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.58}$$

Несложно увидеть, что функции ψ_i образуют разбиение единицы, подчиненное покрытию многообразия M областями Ω_i, $i \in \mathbb{N}$. Покажем, что при достаточно большом $\gamma_0 > 0$ построенное разбиение единицы удовлетворяет неравенству (1.51). Из определения функций $\tilde{\psi}_i$, $i \in \mathbb{N}$ вытекает, что $|\nabla\tilde{\psi}_1| = 0$ на $\Omega_1 \setminus \Omega_2$,

$$|\nabla\tilde{\psi}_1| \leqslant \frac{4}{3}\|\psi'\|_{C(\mathbb{R})}\frac{|\nabla\mathcal{E}|}{\mathcal{E}} \quad \text{на } \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad |\nabla\tilde{\psi}_i| \leqslant 4\|\psi'\|_{C(\mathbb{R})}\frac{|\nabla\mathcal{E}|}{\mathcal{E}} \quad \text{на } \Omega_i,\ i \geqslant 2,$$

причем

$$1 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\tilde{\psi}_j \leqslant 2 \quad \text{на } M. \tag{1.59}$$

Следовательно, $|\nabla\psi_1| = 0$ на $\Omega_1 \setminus \Omega_2$,

$$|\nabla\psi_1| \leqslant \frac{|\nabla\tilde{\psi}_1|}{\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2} + \frac{\tilde{\psi}_1(|\nabla\tilde{\psi}_1| + |\nabla\tilde{\psi}_2|)}{(\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)^2} \leqslant$$
$$\leqslant 2|\nabla\tilde{\psi}_1| + |\nabla\tilde{\psi}_2| \leqslant \frac{20}{3}\|\psi'\|_{C(\mathbb{R})}\frac{|\nabla\mathcal{E}|}{\mathcal{E}} \quad \text{на } \Omega_1 \cap \Omega_2$$

и

$$|\nabla\psi_i| \leqslant \frac{|\nabla\tilde{\psi}_i|}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\tilde{\psi}_j} + \frac{\tilde{\psi}_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}\tilde{\psi}_j\right)^2}\sum_{j=1}^{\infty}|\nabla\tilde{\psi}_j| \leqslant |\nabla\tilde{\psi}_i| + \sum_{j=1}^{\infty}|\nabla\tilde{\psi}_j| \leqslant$$
$$\leqslant 12\|\psi'\|_{C(\mathbb{R})}\frac{|\nabla\mathcal{E}|}{\mathcal{E}} \quad \text{на } \Omega_i, \quad i \geqslant 2. \tag{1.60}$$

Тем самым, условие (1.51) выполнено при любом $\gamma_0 \geqslant 12^p\|\psi'\|^p_{C(\mathbb{R})}$. Таким образом, для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 1.3.

Доказательство теоремы 1.6. Построим разбиение единицы ψ_i, подчиненное покрытию многообразия M областями Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию (1.51), где функция γ определена соотношением

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0 & \text{на } \overline{\omega}_0, \\ \gamma_0\dfrac{|\nabla\mathcal{E}|^p}{(1+\mathcal{E})^p} & \text{на } \Omega_1 \setminus (\overline{\omega}_0 \cup \Omega_2), \\ \gamma_0\dfrac{|\nabla\mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p} & \text{на } \bigcup\limits_{i=2}^{\infty}\Omega_i. \end{cases}$$

Возьмем функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную нулю в окрестности промежутков

$(-\infty, 1]$ и $[4, +\infty)$, и единице в окрестности отрезка $[3/2, 7/2]$. Положим

$$\tilde{\psi}_1(x) = \begin{cases} \psi((4\mathcal{E}(x) + 9)/6), & x \in \Omega_1 \setminus \overline{\omega}_0, \\ 1, & x \in \overline{\omega}_0, \end{cases}$$

и $\tilde{\psi}_i(x) = \psi(2^{1-i}\mathcal{E}(x))$, $x \in \Omega_i$, $i \geqslant 2$. Определяя функции ψ_i, $i \in \mathbb{N}$, по формуле (1.58), получим разбиение единицы ψ_i, подчиненное покрытию многообразия M областями Ω_i, $i \in \mathbb{N}$. Покажем, что при достаточно большом $\gamma_0 > 0$ построенное разбиение единицы удовлетворяет неравенству (1.51). Из определения функций $\tilde{\psi}_i$, $i \in \mathbb{N}$ вытекает, что $|\nabla \tilde{\psi}_1| = 0$ на $\Omega_1 \setminus \Omega_2$,

$$|\nabla \tilde{\psi}_1| \leqslant \frac{8}{3} \|\psi'\|_{C(\mathbb{R})} \frac{|\nabla \mathcal{E}|}{\mathcal{E}} \quad \text{на } \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad |\nabla \tilde{\psi}_i| \leqslant 4 \|\psi'\|_{C(\mathbb{R})} \frac{|\nabla \mathcal{E}|}{\mathcal{E}} \quad \text{на } \Omega_i, \ i \geqslant 2,$$

причем справедливо соотношение (1.59). Следовательно, $|\nabla \psi_1| = 0$ на $\Omega_1 \setminus \Omega_2$,

$$|\nabla \psi_1| \leqslant \frac{|\nabla \tilde{\psi}_1|}{\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2} + \frac{\tilde{\psi}_1(|\nabla \tilde{\psi}_1| + |\nabla \tilde{\psi}_2|)}{(\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)^2} \leqslant$$
$$\leqslant 2|\nabla \tilde{\psi}_1| + |\nabla \tilde{\psi}_2| \leqslant \frac{22}{3} \|\psi'\|_{C(\mathbb{R})} \frac{|\nabla \mathcal{E}|}{\mathcal{E}} \quad \text{на } \Omega_1 \cap \Omega_2,$$

и имеет место оценка (1.60). Тем самым, условие (1.51) выполнено при любом $\gamma_0 \geqslant 12^p \|\psi'\|^p_{C(\mathbb{R})}$. Таким образом, для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 1.4.

Глава 2. Задача Неймана на многообразиях с модельными концами

В данной главе будут получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда M является многообразием с модельными концами и $\Omega = M \setminus \partial M$.

2.1 Понятие модельного конца. Его p-гиперболичность и p-параболичность

Определение 2.1. *Множество $E \subset M$ называется модельным концом многообразия M, если оно представимо в виде $E = D \times [r_0, \infty)$, где D — компактное риманово многообразие с краем (возможно пустым), $r_0 > 0$ — некоторое вещественное число, причем на E задана метрика*

$$ds^2 = a^2(r)\, dr^2 + b^2(r)\tilde{g}_{ij}(\theta)\, d\theta^i d\theta^j, \tag{2.1}$$

где a и b — положительные, бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty)$, $\tilde{g}_{ij}$ — метрический тензор на D, θ^i — локальные координаты на D.

Определение 2.2. *Будем говорить, что модельный конец E многообразия M имеет p-гиперболический (p-параболический) тип, если E является p-гиперболическим (p-параболическим) многообразием.*

Предложение 2.1. *Пусть E — модельный конец многообразия M. Тогда E имеет p-гиперболический тип в том и только том случае, когда*

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{a(r)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(r)}\, dr < \infty, \tag{2.2}$$

и p-параболический тип в том и только том случае, когда

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{a(r)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(r)}\, dr = \infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Положим

$$E_r = D \times [r_0, r), \quad r > r_0. \tag{2.4}$$

Пусть $r_0 < R_0 < R$. Рассмотрим вариационную задачу

$$L(\varphi) = \int\limits_{E_R} |\nabla \varphi|^p \, dV \to \inf,$$

где inf берётся по всем функциям $\varphi \in C^\infty(E_R)$ таким, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset E_R$ и $\varphi \equiv 1$ в окрестности $\overline{E}_{R_0}$. Из вариационного принципа следует, что inf функционала L достигается на обобщенном решении краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_p u = 0 & \text{на } E_R \setminus \overline{E}_{R_0}, \\ u = 1 & \text{на } \overline{E}_{R_0}, \\ u = 0 & \text{на } \partial E_R \setminus \partial E, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \partial E_R \cap \partial E. \end{cases} \tag{2.5}$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве предложения 1.1, несложно показать, что решение задачи (2.5) существует. Более того, это решение единственно. В самом деле, предположим от противного, что u_1, u_2 — решения задачи (2.5). Тогда

$$\int\limits_{E_R} |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi \, dV = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{E_R} |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \nabla \varphi \, dV = 0$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(E_R)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset E_R$. Положим $\varphi = u_1 - u_2$. Тогда

$$\int\limits_{E_R} (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2) \, dV = 0.$$

Тем самым,

$$(|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2) = 0 \quad \text{почти всюду на } E_R,$$

откуда вытекает, что $\nabla u_1 = \nabla u_2$ почти всюду на E_R. Так как $u_1 - u_2 = 0$ на E_{R_0}, то $u_1 = u_2$ почти всюду на E_R.

Будем искать решение (2.5) в виде некоторой функции, зависящей только от r. Матрица метрического тензора на E выглядит следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} b^2(r)\tilde{g}_{ij}(\theta) & 0 \\ & \\ 0 & a^2(r) \end{pmatrix},$$

что следует из (2.1). Тем самым,

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b^2(r)}\tilde{g}^{ij}(\theta) & 0 \\ & \\ 0 & \dfrac{1}{a^2(r)} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{g}^{ij}(\theta)$ — тензор, дуальный к $\tilde{g}_{ij}(\theta)$. Далее мы будем обозначать $x^i = \theta^i$, $i \in \{1, ..., n-1\}$, $x^n = r$. Уравнение (2.5) в координатах $(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет вид

$$\frac{1}{(\det G)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left((\det G)^{1/2} g^{ij} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) = 0 \quad \text{на } E_R \setminus \overline{E}_{R_0}. \tag{2.6}$$

Так как функция u зависит только от r, то $\partial u/\partial x^i \neq 0$ только при $i = n$. Кроме того, из вида матрицы G^{-1} следует, что $g^{nj} = \delta^{nj}/a^2$ для любого $j \in \{1, ..., n\}$, где δ^{nj} – символ Кронекера. Поэтому в левой части уравнения (2.6) не равно нулю только одно слагаемое при $i = j = n$. Таким образом, подставляя в (2.6)

$$|\nabla u|^{p-2} = \left(g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^{\frac{p}{2}-1} = \frac{1}{a^{p-2}(r)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2}$$

и

$$(\det G)^{1/2} = a(r)\, b^{n-1}(r)\, J(\theta),$$

где $J(\theta) = (\det\, (\tilde{g}_{ij}(\theta)))^{1/2}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{b^{n-1}(r)}{a^{p-1}(r)} \right) = 0 \quad \text{на } E_R \setminus \overline{E}_{R_0},$$

откуда, с учётом граничных условий $u(R_0)=1$ и $u(R)=0$, будем иметь

$$u = \frac{\int\limits_R^r \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\,ds}{\int\limits_R^{R_0} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\,ds} \quad \text{на } E_R \setminus \overline{E}_{R_0}. \tag{2.7}$$

Найдём теперь значение $L(u)$, которое совпадает с $\operatorname{cap}_{p,E\setminus\partial E}(\overline{E}_{R_0}, E_R)$. Имеем

$$|\nabla u|^p = \left(g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{a^p(r)}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^p$$

и

$$dV = (\det G)^{1/2}\,dr\,d\theta = a(r)\,b^{n-1}(r)\,J(\theta)\,dr\,d\theta.$$

Тем самым, учитывая, что $u\equiv 1$ на $\overline{E}_{R_0}$, получим

$$\operatorname{cap}_{p,E\setminus\partial E}(\overline{E}_{R_0}, E_R) = L(u) = \int\limits_{E_R\setminus\overline{E}_{R_0}} |\nabla u|^p\,dV = C\int\limits_{R_0}^{R} \frac{b^{n-1}(r)}{a^{p-1}(r)}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^p dr, \tag{2.8}$$

где

$$C = \int\limits_D J(\theta)\,d\theta.$$

Подставляя (2.7) в равенство (2.8), будем иметь

$$\operatorname{cap}_{p,E\setminus\partial E}(\overline{E}_{R_0}, E_R) = \frac{C}{\left(\int\limits_{R_0}^{R} \frac{a(r)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(r)}\,dr\right)^{p-1}},$$

откуда следует, что

$$\operatorname{cap}_{p,E\setminus\partial E}(\overline{E}_{R_0}) = \operatorname{cap}_{p,E\setminus\partial E}(\overline{E}_{R_0}, E) = \frac{C}{\left(\int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{a(r)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(r)}\,dr\right)^{p-1}}.$$

Таким образом, если выполнено условие (2.3), то $\operatorname{cap}_{p,E\setminus\partial E}(\overline{E}_{R_0}) = 0$ для всех

$R_0 > r_0$, поэтому E является p-параболическим многообразием. В противном случае, $\mathrm{cap}_{p,E\setminus\partial E}(\overline{E}_{R_0}) > 0$ для всех $R_0 > r_0$, следовательно, E — p-гиперболическое многообразие. Предложение 2.1 доказано.

Замечание 2.1. *Все модельные концы p-параболического многообразия имеют p-параболический тип. В то же время p-гиперболическое многообразие может иметь концы как p-гиперболического, так и p-параболического типа.*

Доказательство. Пусть E — модельный конец p-параболического многообразия M. Для любой функции $\varphi \in L^1_p(M)$, очевидно, выполнено неравенство

$$\int\limits_E |\nabla\varphi|^p\, dV \leqslant \int\limits_M |\nabla\varphi|^p\, dV. \tag{2.9}$$

Возьмем произвольный компакт $K \subset E$. Взяв в обеих частях неравенства (2.9) inf по всем функциям $\varphi \in C^\infty(M)$ таким, что $\mathrm{supp}\,\varphi \Subset M$ и $\varphi \equiv 1$ в окрестности K, получим

$$\mathrm{cap}_{p,E\setminus\partial E}(K) \leqslant \mathrm{cap}_{p,M\setminus\partial M}(K) = 0,$$

откуда немедленно следует, что E — p-параболическое многообразие.

2.2 Случай многообразия с модельными концами

В данном параграфе будем рассматривать случай $\Omega = M \setminus \partial M$. Предположим, что найдется липшицева область $\omega \subset M$ с компактным замыканием, такая, что

$$M \setminus \omega = \bigcup_{\tau=1}^{q} E_\tau, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

где $E_\tau = D_\tau \times [r_{0,\tau}, \infty)$ — модельные концы многообразия M с метрикой $ds^2_\tau = a^2_\tau(r)\, dr^2 + b^2_\tau(r)\tilde{g}_{ij,\tau}(\theta)\, d\theta^i d\theta^j$, $\tau = 1, ..., q$, D_τ — компактные римановы многообразия с краем (возможно пустым), $r_{0,\tau} > 0$ — некоторые вещественные числа, a_τ и b_τ — положительные, бесконечно гладкие функции на $[r_{0,\tau}, \infty)$, $\tilde{g}_{ij,\tau}$ — метрический тензор на D_τ, θ^i — локальные координаты на D_τ.

Положим

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \omega \cup D_1 \times [r_{0,1}, r_{2,1}) \cup \ldots \cup D_q \times [r_{0,q}, r_{2,q}), \\ &\Omega_{i,\tau} = D_\tau \times (r_{i-1,\tau}, r_{i+1,\tau}), \quad i \geqslant 2,\ \tau = 1, \ldots, q, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где последовательность вещественных чисел $r_{i,\tau}$, $i \in \mathbb{N}$, для каждого $\tau = 1, \ldots, q$ определяется из соотношений

$$\int\limits_{r_{i,\tau}}^{\infty} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = \frac{1}{2} \int\limits_{r_{i-1,\tau}}^{\infty} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \in \mathbb{N},$$

в случае, если E_τ — модельный конец p-гиперболического типа, и

$$\int\limits_{r_{0,\tau}}^{r_{1,\tau}} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2, \quad \int\limits_{r_{0,\tau}}^{r_{i+1,\tau}} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2 \int\limits_{r_{0,\tau}}^{r_{i,\tau}} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \in \mathbb{N},$$

в случае, если E_τ — модельный конец p-параболического типа.

2.2.1 Неравенство Харди

Далее будем обозначать

$$M_\tau = \omega \cup E_\tau, \quad \Omega_{1,\tau} = \Omega_1 \cap M_\tau, \quad \tau = 1, \ldots, q.$$

Лемма 2.1. *Пусть E_τ — модельный конец p-гиперболического типа. Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp} \varphi \Subset M$, справедливо неравенство*

$$\int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \frac{|\nabla \mathcal{E}_\tau|^p}{\mathcal{E}_\tau^p} |\varphi|^p \, dV \leqslant C \int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} |\nabla \varphi|^p \, dV, \tag{2.12}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от p, а функция $\mathcal{E}_\tau$ задается равенством

$$\mathcal{E}_\tau(r) = \frac{\displaystyle\int\limits_{r}^{\infty} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{(n-1)/(p-1)}(s)}\, ds}{\displaystyle\int\limits_{r_{0,\tau}}^{\infty} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{(n-1)/(p-1)}(s)}\, ds}, \quad r \geqslant r_{0,\tau}. \tag{2.13}$$

Для доказательства леммы 2.1 достаточно заметить, что функция $\mathcal{E}_\tau$, заданная равенством (2.13), удовлетворяет условию леммы 1.7, где $M = M_\tau$ и $\omega_0 = \omega$, и дословно повторить рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 1.7, с помощью которых была получена оценка (1.48).

Лемма 2.2. *Пусть E_τ — модельный конец p-параболического типа. Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$, равной нулю в окрестности множества $\overline{\omega}$, справедливо неравенство* (2.12), *где постоянная $C > 0$ зависит только от p, а функция $\mathcal{E}_\tau$ задается равенством*

$$\mathcal{E}_\tau(r) = \int\limits_{r_{0,\tau}}^{r} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{(n-1)/(p-1)}(s)\, ds}, \quad r \geqslant r_{0,\tau}. \tag{2.14}$$

Для доказательства леммы 2.2 достаточно заметить, что функция $\mathcal{E}_\tau$, заданная равенством (2.14), удовлетворяет условию леммы 1.8, где $M = M_\tau$ и $\omega_0 = \omega$, и дословно повторить рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 1.8, с помощью которых была получена оценка (1.48).

Лемма 2.3. *Пусть p-гиперболическое многообразие M удовлетворяет условию* (2.10), *причем модельные концы $E_1, \ldots, E_m$ имеют p-гиперболический тип, а $E_{m+1}, \ldots, E_q$ — p-параболический тип. Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, справедливо неравенство* (1.38), *где $\Omega = M \setminus \partial M$,*

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0 & \text{на } \overline{\omega}, \\ \gamma_0 \dfrac{|\nabla \mathcal{E}_\tau|^p}{\mathcal{E}_\tau^p} & \text{на } M_\tau \setminus \overline{\omega}, \quad \tau = 1, \ldots, m, \\ \gamma_0 \dfrac{|\nabla \mathcal{E}_\tau|^p}{(1+\mathcal{E}_\tau)^p} & \text{на } \Omega_{1,\tau} \setminus (\overline{\omega} \cup \Omega_{2,\tau}), \quad \tau = m+1, \ldots, q, \\ \gamma_0 \dfrac{|\nabla \mathcal{E}_\tau|^p}{\mathcal{E}_\tau^p} & \text{на } \bigcup\limits_{i=2}^{\infty} \Omega_{i,\tau}, \quad \tau = m+1, \ldots, q, \end{cases} \tag{2.15}$$

$\gamma_0 > 0$ — некоторое вещественное число, функции $\mathcal{E}_\tau$ задаются соотношениями (2.13) *при $\tau = 1, \ldots, m$ и* (2.14) *при $\tau = m+1, \ldots, q$, постоянная $C > 0$ не зависит от φ.*

Доказательство. Договоримся обозначать через C всевозможные положительные постоянные, не зависящие от φ. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(M)$ такую, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$. Прежде всего заметим, что, согласно лемме 2.1,

$$\int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \gamma |\varphi|^p \, dV \leqslant C \int\limits_M |\nabla \varphi|^p \, dV \tag{2.16}$$

для любого $\tau \in \{1, \dots, m\}$. Покажем, что неравенство (2.16) справедливо также при $\tau \in \{m+1, \dots, q\}$. Возьмем произвольную функцию $\psi \in C^\infty(M)$, тождественно равную нулю в окрестности $\overline{\omega}$ и единице в окрестности множества $M \setminus \Omega_1$. Так как $\varphi = \psi\varphi + (1-\psi)\varphi$, то для любого $\tau \in \{m+1, \dots, q\}$ имеем

$$\int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \gamma |\varphi|^p \, dV \leqslant 2^p \int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \gamma |\psi\varphi|^p \, dV + 2^p \int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \gamma |(1-\psi)\varphi|^p \, dV. \tag{2.17}$$

В силу леммы 2.2,

$$\begin{aligned} \int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \gamma |\psi\varphi|^p \, dV &\leqslant C \int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} |\nabla(\psi\varphi)|^p \, dV \leqslant \\ &\leqslant C 2^p \int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} |\varphi \nabla\psi|^p \, dV + C 2^p \int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} |\psi \nabla\varphi|^p \, dV \leqslant \\ &\leqslant C 2^p \|\nabla\psi\|^p_{C(\Omega_1)} \int\limits_{\overline{\Omega}_1} |\varphi|^p \, dV + C 2^p \|\psi\|^p_{C(\Omega_1)} \int\limits_{M} |\nabla\varphi|^p \, dV. \end{aligned}$$

для любого $\tau \in \{m+1, \dots, q\}$. При этом, согласно лемме 1.2,

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_1} |\varphi|^p \, dV \leqslant C \int\limits_{M} |\nabla\varphi|^p \, dV. \tag{2.18}$$

Тем самым,

$$\int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \gamma |\psi\varphi|^p \, dV \leqslant C \int\limits_{M} |\nabla\varphi|^p \, dV \tag{2.19}$$

для любого $\tau \in \{m+1, \dots, q\}$. Заметим теперь, что $(1-\psi)\varphi \in C^\infty(\Omega_1)$, $\operatorname{supp}(1-\psi)\varphi \Subset \Omega_1$, а функция γ ограничена на каждом компактном подмножестве многообразия M. Следовательно, существует постоянная $\gamma_{max} > 0$ такая, что $\gamma < \gamma_{max}$ на $\overline{\Omega}_1$. Поэтому, используя лемму 1.2, получим

$$\int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \gamma |(1-\psi)\varphi|^p \, dV \leqslant \gamma_{max} \int\limits_{\overline{\Omega}_1} |(1-\psi)\varphi|^p \, dV \leqslant C\gamma_{max} \int\limits_{M} |\nabla((1-\psi)\varphi)|^p \, dV$$

для любого $\tau \in \{m{+}1, \dots, q\}$. Далее, принимая во внимание (2.18), будем иметь

$$\int\limits_M |\nabla((1-\psi)\varphi)|^p\, dV \leqslant 2^p \int\limits_M |\varphi \nabla\psi|^p\, dV + 2^p \int\limits_M |(1-\psi)\nabla\varphi|^p\, dV \leqslant$$
$$\leqslant 2^p \|\nabla\psi\|^p_{C(\Omega_1)} \int\limits_{\overline{\Omega}_1} |\varphi|^p\, dV + 2^p \|1-\psi\|^p_{C(\Omega_1)} \int\limits_M |\nabla\varphi|^p\, dV \leqslant C \int\limits_M |\nabla\varphi|^p\, dV,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \gamma |(1-\psi)\varphi|^p\, dV \leqslant C \int\limits_M |\nabla\varphi|^p\, dV \tag{2.20}$$

для любого $\tau \in \{m+1, \dots, q\}$. Объединяя соотношения (2.17), (2.19) и (2.20), приходим к выводу, что для любого $\tau \in \{m+1, \dots, q\}$ выполнено неравенство (2.16).

Несложно увидеть, что

$$\int\limits_M \gamma |\varphi|^p\, dV = \gamma_0 \int\limits_{\overline{\omega}} |\varphi|^p\, dV + \sum_{\tau=1}^{q} \int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \gamma |\varphi|^p\, dV.$$

Таким образом, чтобы показать справедливость неравенства (1.38), достаточно заметить, что, согласно лемме 1.2,

$$\int\limits_{\overline{\omega}} |\varphi|^p\, dV \leqslant C \int\limits_M |\nabla\varphi|^p\, dV,$$

и воспользоваться доказанным неравенством (2.16) для всех $\tau \in \{1, \dots, q\}$. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. *Пусть p-параболическое многообразие M удовлетворяет условию* (2.10). *Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$, равной нулю в окрест-*

ности множества $\overline{\omega}$, справедливо неравенство (1.38), *где* $\Omega = M \setminus \partial M$,

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0 & \text{на } \overline{\omega}, \\ \gamma_0 \dfrac{|\nabla \mathcal{E}_\tau|^p}{(1+\mathcal{E}_\tau)^p} & \text{на } \Omega_{1,\tau} \setminus (\overline{\omega} \cup \Omega_{2,\tau}), \quad \tau = 1, \ldots, q, \\ \gamma_0 \dfrac{|\nabla \mathcal{E}_\tau|^p}{\mathcal{E}_\tau^p} & \text{на } \bigcup\limits_{i=2}^{\infty} \Omega_{i,\tau}, \quad \tau = 1, \ldots, q, \end{cases} \tag{2.21}$$

$\gamma_0 > 0$ — *некоторое вещественное число, функции* $\mathcal{E}_\tau$, $\tau = 1, \ldots, q$, *задаются соотношениями* (2.14), *постоянная* $C > 0$ *не зависит от* φ.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(M)$, равную нулю в окрестности множества $\overline{\omega}$. Так как все модельные концы многообразия M имеют p-параболический тип (см. замечание 2.1), то, согласно лемме 2.2, выполнено неравенство (2.16) для любого $\tau \in \{1, \ldots, q\}$. Поэтому, принимая во внимание очевидное соотношение

$$\int\limits_M \gamma |\varphi|^p \, dV = \sum_{\tau=1}^{q} \int\limits_{M_\tau \setminus \overline{\omega}} \gamma |\varphi|^p \, dV,$$

получим неравенство (1.38).

2.2.2 Теоремы существования

Теорема 2.1. *Пусть p-гиперболическое многообразие M удовлетворяет условию* (2.10). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$N_{\Omega_1}(F) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{\tau=1}^{q} \sum_{i=2}^{\infty} N_{\Omega_{i,\tau}}^{p/(p-1)}(F) < \infty, \tag{2.22}$$

где функционал F задан равенством (5), *а области* Ω_1, $\Omega_{i,\tau}$, $i \geqslant 2$, $\tau = 1, \ldots, q$, *определены соотношениями* (2.11).

Теорема 2.2. *Пусть p-параболическое многообразие M удовлетворяет условию* (2.10). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (2.22), *где области* Ω_1, $\Omega_{i,\tau}$, $i \geqslant 2$, $\tau = 1, \ldots, q$, *определены соотношениями* (2.11), *и при этом для некоторой* *последовательности функций* $\eta_s \in C^\infty(M)$ *таких, что* $\operatorname{supp}\eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, *были выполнены условия* (1.19) *и* (1.20), *где функционал* F *задаётся равенством* (5), *а* K *— некоторый компакт положительной меры.*

Доказательство теорем 2.1 и 2.2. Докажем сначала теорему 2.1. Пусть модельные концы $E_1, \dots, E_m$ имеют p-гиперболический тип, а $E_{m+1}, \dots, E_q$ — p-параболический тип. Построим разбиение единицы ψ_1, $\psi_{i,\tau}$, подчиненное покрытию многообразия M областями Ω_1, $\Omega_{i,\tau}$, $i \geqslant 2$, $\tau = 1, \dots, q$, удовлетворяющее условию

$$\begin{aligned} &|\nabla\psi_1(x)|^p \leqslant \gamma(x), \quad x \in \Omega_1, \\ &|\nabla\psi_{i,\tau}(x)|^p \leqslant \gamma(x), \ \ x \in \Omega_{i,\tau}, \ i \geqslant 2, \ \tau = 1, \dots, q, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где функция γ определена соотношением (2.15). Возьмем функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную нулю в окрестности промежутков $(-\infty, 1]$ и $[4, +\infty)$, и единице в окрестности отрезка $[3/2, 7/2]$. Положим

$$\tilde\psi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\omega}, \\ \psi((14 - 8\mathcal{E}_\tau(x))/3), & x \in \Omega_{1,\tau} \setminus \overline{\omega}, \ \tau = 1, \dots, m, \\ \psi((4\mathcal{E}_\tau(x) + 9)/6), & x \in \Omega_{1,\tau} \setminus \overline{\omega}, \ \tau = m+1, \dots, q \end{cases}$$

и

$$\tilde\psi_{i,\tau}(x) = \begin{cases} \psi(2^{i+1}\mathcal{E}_\tau(x)), & x \in \Omega_{i,\tau}, \ i \geqslant 2, \ \tau = 1, \dots, m, \\ \psi(2^{1-i}\mathcal{E}_\tau(x)), & x \in \Omega_{i,\tau}, \ i \geqslant 2, \ \tau = m+1, \dots, q. \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{\tilde\psi_1(x)}{\tilde\psi_1(x) + \sum\limits_{\tau=1}^{q} \sum\limits_{j=2}^{\infty} \tilde\psi_{j,\tau}(x)}, \\ \psi_{i,\tau}(x) &= \frac{\tilde\psi_{i,\tau}(x)}{\tilde\psi_1(x) + \sum\limits_{j=2}^{\infty} \tilde\psi_{j,\tau}(x)}, \quad i \geqslant 2, \ \tau = 1, \dots, q. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Несложно увидеть, что функции ψ_1, $\psi_{i,\tau}$ образуют разбиение единицы, подчиненное покрытию многообразия M областями Ω_1, $\Omega_{i,\tau}$, $i \geqslant 2$, $\tau = 1, \dots, q$. Покажем, что при достаточно большом $\gamma_0 > 0$ построенное разбиение единицы удовлетворяет условию (2.23). Из определения функций ψ_1, $\psi_{i,\tau}$, $i \geqslant 2$, $\tau = 1, \dots, q$ вытекает, что

$$
\begin{aligned}
&|\nabla\tilde{\psi}_1| = 0 && \text{на } \Omega_1 \setminus \bigcup_{\tau=1}^{q} \Omega_{2,\tau},\\
&|\nabla\tilde{\psi}_1| \leqslant \frac{8}{3}\|\psi'\|_{C(\mathbb{R})}\frac{|\nabla\mathcal{E}_\tau|}{\mathcal{E}_\tau} && \text{на } \Omega_1 \cap \Omega_{2,\tau},\ \tau = 1, \dots, q,\\
&|\nabla\tilde{\psi}_{i,\tau}| \leqslant 4\|\psi'\|_{C(\mathbb{R})}\frac{|\nabla\mathcal{E}_\tau|}{\mathcal{E}_\tau} && \text{на } \Omega_{i,\tau},\ i \geqslant 2,\ \tau = 1, \dots, q,
\end{aligned}
$$

причем

$$
1 \leqslant \tilde{\psi}_1 + \sum_{\tau=1}^{q}\sum_{j=2}^{\infty}\tilde{\psi}_{j,\tau} \leqslant 2 \quad \text{на } M. \tag{2.25}
$$

Следовательно,

$$
|\nabla\psi_1| = 0 \quad \text{на } \Omega_1 \setminus \bigcup_{\tau=1}^{q} \Omega_{2,\tau},
$$

$$
\begin{aligned}
|\nabla\psi_1| &\leqslant \frac{|\nabla\tilde{\psi}_1|}{\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_{2,\tau}} + \frac{\tilde{\psi}_1(|\nabla\tilde{\psi}_1| + |\nabla\tilde{\psi}_{2,\tau}|)}{(\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_{2,\tau})^2} \leqslant\\
&\leqslant 2|\nabla\tilde{\psi}_1| + |\nabla\tilde{\psi}_{2,\tau}| \leqslant \frac{28}{3}\|\psi'\|_{C(\mathbb{R})}\frac{|\nabla\mathcal{E}_\tau|}{\mathcal{E}_\tau} \quad \text{на } \Omega_1 \cap \Omega_{2,\tau},\ \tau = 1, \dots, q
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
|\nabla\psi_{i,\tau}| &\leqslant \frac{|\nabla\tilde{\psi}_{i,\tau}|}{\tilde{\psi}_1 + \sum\limits_{j=2}^{\infty}\tilde{\psi}_{j,\tau}} + \frac{\tilde{\psi}_{i,\tau}}{\left(\tilde{\psi}_1 + \sum\limits_{j=2}^{\infty}\tilde{\psi}_{j,\tau}\right)^2}\left(|\nabla\tilde{\psi}_1| + \sum_{j=2}^{\infty}|\nabla\tilde{\psi}_{j,\tau}|\right) \leqslant\\
&\leqslant |\nabla\tilde{\psi}_{i,\tau}| + |\nabla\tilde{\psi}_1| + \sum_{j=2}^{\infty}|\nabla\tilde{\psi}_{j,\tau}| \leqslant 16\|\psi'\|_{C(\mathbb{R})}\frac{|\nabla\mathcal{E}_\tau|}{\mathcal{E}_\tau} \quad \text{на } \Omega_{i,\tau},\ i \geqslant 2,\ \tau = 1, \dots, q.
\end{aligned}
$$

Тем самым, условие (2.23) выполнено при любом $\gamma_0 \geqslant 16^p\|\psi'\|^p_{C(\mathbb{R})}$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 2.1 остается воспользоваться леммой 2.3 и теоремой 1.3. Для доказательства теоремы 2.2 достаточно повторить рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 2.1, с заменой леммы 2.3 и теоремы 1.3, соответственно, на лемму 2.4 и теорему 1.4.

2.2.3 Случай многообразия, имеющего один модельный конец

Простейшим частным случаем многообразия, удовлетворяющего условию (2.10), является многообразие, имеющее один модельный конец. Рассмотрим этот случай отдельно.

Предположим, что многообразие M представимо в виде

$$M = \omega \cup E, \tag{2.26}$$

где $E = D \times [r_0, \infty)$ — модельный конец многообразия M с метрикой

$$ds^2 = a^2(r)\, dr^2 + b^2(r)\tilde{g}_{ij}(\theta)\, d\theta^i d\theta^j, \tag{2.27}$$

где a и b — положительные, бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty)$, $\tilde{g}_{ij}$ — метрический тензор на D, θ^i — локальные координаты на D.

Тривиальным примером многообразия с модельным концом является пространство $\mathbb{R}^n$. В качестве другого примера можно взять поверхность, полученную вращением графика гладкой функции v вокруг луча Or в $\mathbb{R}^n$. В этом случае, очевидно, $a(r) = \sqrt{1 + (v'(r))^2}$, $b(r) = v(r)$, а $\tilde{g}_{ij}$ — метрический тензор на единичной сфере $D = S_1$.

Далее будем обозначать

$$M_{r_0} = \omega \quad \text{и} \quad M_r = \omega \cup D \times [r_0, r), \quad r > r_0.$$

Частным случаем теорем 2.1 и 2.2 являются следующие теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть M — p-гиперболическое многообразие с модельным концом* (2.26). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (1.52), *где функционал F задан равенством* (5), $\Omega_1 = M_{r_2}$, $\Omega_i = M_{r_{i+1}} \setminus \overline{M}_{r_{i-1}}$, $i \geqslant 2$, *а вещественные числа $r_i > r_0$ определяются из соотношений*

$$\int\limits_{r_i}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = \frac{1}{2} \int\limits_{r_{i-1}}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.4. *Пусть M — p-параболическое многообразие с модельным концом* (2.26). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (1.52), *где* $\Omega_1 = M_{r_2}$, $\Omega_i = M_{r_{i+1}} \setminus \overline{M}_{r_{i-1}}$, $i \geqslant 2$, *а вещественные числа* $r_i > r_0$ *определяются из соотношений*

$$\int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2, \qquad \int\limits_{r_0}^{r_i} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2 \int\limits_{r_0}^{r_{i-1}} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \geqslant 2,$$

и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ *таких, что* $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, *были выполнены условия* (1.19) *и* (1.20), *где функционал* F *задаётся равенством* (5), *а* K *— некоторый компакт положительной меры.*

Замечание 2.2. *Теоремы 2.3 и 2.4 являются следствием теорем 1.5 и 1.6.*

В самом деле, несложно проверить, что функция

$$\mathcal{E}(r) = \frac{\int\limits_{r}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\, ds}{\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\, ds}, \quad r \geqslant r_0,$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.5, где $\omega_0 = \omega$.

Аналогично, нетрудно убедиться, что функция

$$\mathcal{E}(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\, ds, \quad r \geqslant r_0,$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.6, где $\omega_0 = \omega$.

Пример 2.1. Пусть $p < 2$, $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1,\ x_3 \geqslant 1\}$ — плоскость Лобачевского (см. рисунок 2.1).

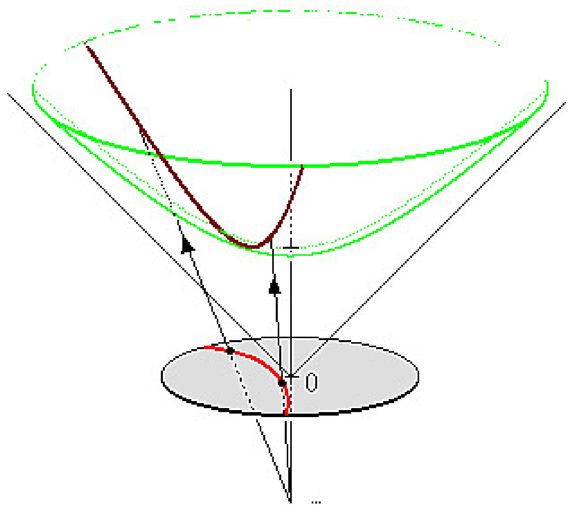

Рисунок 2.1

Заметим, что M является многообразием с модельным концом (2.26), где $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in M : x_3 < 2\}$, $r = x_3$, $r_0 = 2$ и D — единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с угловой координатой θ. При этом, очевидно, имеем

$$ds^2 = a^2(r)\,dr^2 + b^2(r)\,d\theta^2, \tag{2.28}$$

где

$$a(r) = \sqrt{\frac{2r^2-1}{r^2-1}} \quad \text{и} \quad b(r) = \sqrt{r^2-1}.$$

Рассмотрим задачу (3), (4), где $h = 0$ и $f = r^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Так как $a(r) \sim \sqrt{2}$ и $b(r) \sim r$ при $r \to \infty$, то

$$\frac{a(s)}{b^{1/(p-1)}(s)} \sim \frac{\sqrt{2}}{s^{1/(p-1)}} \quad \text{при } s \to \infty, \tag{2.29}$$

откуда, согласно предложению 2.1, вытекает, что M — p-гиперболическое многообразие. Из (2.29) также следует, что существует $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $i \geqslant i_0$ имеем

$$\int\limits_{r_i}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{1/(p-1)}(s)}\,ds \asymp r_i^{(p-2)/(p-1)},$$

где r_i — вещественные числа, определенные в теореме 2.1. Другими словами, существуют положительные вещественные числа β_1 и β_2 такие, что при $i \geqslant i_0$

выполнено неравенство

$$\beta_1 r_i^{(p-2)/(p-1)} \leqslant \int\limits_{r_i}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{1/(p-1)}(s)}\, ds \leqslant \beta_2 r_i^{(p-2)/(p-1)}. \tag{2.30}$$

Так как для любого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{r_{i_0+m}}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{1/(p-1)}(s)}\, ds = \frac{1}{2^m} \int\limits_{r_{i_0}}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{1/(p-1)}(s)}\, ds,$$

то из неравенства (2.30) для $i = i_0$ получим

$$\frac{1}{2^m} \beta_1 r_{i_0}^{(p-2)/(p-1)} \leqslant \int\limits_{r_{i_0+m}}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{1/(p-1)}(s)}\, ds \leqslant \frac{1}{2^m} \beta_2 r_{i_0}^{(p-2)/(p-1)}.$$

Объединяя последнее соотношение и неравенство (2.30) для $i = i_0 + m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, приходим к выводу, что

$$2^{\frac{m(p-1)}{2-p}} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} r_{i_0} \leqslant r_{i_0+m} \leqslant 2^{\frac{m(p-1)}{2-p}} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} r_{i_0}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

то есть,

$$\beta_3 2^{\frac{i(p-1)}{2-p}} \leqslant r_i \leqslant \beta_4 2^{\frac{i(p-1)}{2-p}} \quad \text{при } i \geqslant i_0, \tag{2.31}$$

где

$$\beta_3 = \left(\frac{2^{i_0} \beta_2}{\beta_1} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} r_{i_0} \quad \text{и} \quad \beta_4 = \left(\frac{2^{i_0} \beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} r_{i_0}.$$

Таким образом,

$$r_i \asymp 2^{i(p-1)/(2-p)} \quad \text{при } i \to \infty.$$

Из (2.31), в частности, вытекает, что для любых натуральных чисел m_1 и m_2 таких, что $m_2 \geqslant m_1 \geqslant i_0$, существует вещественное число $\beta_{m_1,m_2} \in [\beta_3/\beta_4, \beta_4/\beta_3]$ такое, что

$$r_{m_2} = \beta_{m_1,m_2} 2^{\frac{(m_2-m_1)(p-1)}{2-p}} r_{m_1}. \tag{2.32}$$

Пусть Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, — области, определенные в теореме 2.3. Для каждого $i \geqslant i_0$ возьмем произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_i)$ такую, что $\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega_i)} = 1$.

Учитывая (2.31), будем иметь

$$|(F,\varphi)| \leqslant \int\limits_{\Omega_i} |r^\sigma \varphi|\, dV \leqslant r_{i+1}^\sigma \int\limits_{\Omega_i} |\varphi|\, dV \leqslant \beta_5 2^{\frac{i(p-1)\sigma}{2-p}} \int\limits_{\Omega_i} |\varphi|\, dV, \tag{2.33}$$

где

$$\beta_5 = \beta_4^\sigma 2^{\frac{\sigma(p-1)}{2-p}}.$$

Из равенства (2.28) следует, что

$$dV = a(r)b(r)\, dr\, d\theta \quad \text{и} \quad |\nabla_{(r,\theta)}\varphi| = \left(\frac{1}{a^2(r)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{b^2(r)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.34}$$

Найдем натуральное число $k_0 \geqslant i_0$ такое, что при $r \geqslant \beta_3 r_{k_0}/\beta_4$

$$\frac{1}{2}r \leqslant a(r)b(r) \leqslant 2r \tag{2.35}$$

и

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant |\nabla_{(r,\theta)}\varphi|^p \leqslant 2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{2.36}$$

Обозначим

$$\mathcal{M}_0 = D \times \left(\frac{\beta_3}{\beta_4} r_{k_0}, \frac{\beta_4}{\beta_3} r_{k_0+2}\right)$$

и

$$\mathcal{M}_i = D \times \left(\frac{\beta_3}{\beta_4} 2^{\frac{(i-k_0-1)(p-1)}{2-p}} r_{k_0}, \frac{\beta_4}{\beta_3} 2^{\frac{(i-k_0-1)(p-1)}{2-p}} r_{k_0+2}\right), \quad i > k_0 + 1.$$

Заметим, что, в силу (2.32), $\Omega_i \subset \mathcal{M}_i$, $i > k_0 + 1$. Для каждого $i > k_0 + 1$ положим

$$\rho_i = 2^{\frac{(i-k_0-1)(p-1)}{2-p}}$$

и рассмотрим диффеоморфизм $\Phi_i : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathcal{M}_i$, действующий по правилу

$$\Phi_i : (\rho, \theta) \mapsto (r, \theta) = (\rho_i \rho, \theta).$$

Согласно неравенству Фридрихса [32, §3.2.3],

$$\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\varphi_i|\, dV_0 \leqslant C \int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)}\varphi_i|\, dV_0, \tag{2.37}$$

где $\varphi_i = \varphi \circ \Phi_i$, а постоянная $C > 0$ не зависит от φ. В то же время, в силу неравенства Гёльдера,

$$\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)}\varphi_i|\, dV_0 \leqslant |\mathcal{M}_0|^{(p-1)/p} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)}\varphi_i|^p\, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.38}$$

Объединяя соотношения (2.37) и (2.38), приходим к выводу, что

$$\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\varphi_i|\, dV_0 \leqslant C_0 \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)}\varphi_i|^p\, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.39}$$

где $C_0 = C|\mathcal{M}_0|^{(p-1)/p}$, $dV = a(\rho)b(\rho)\, d\rho\, d\theta$,

$$|\nabla_{(\rho,\theta)}\varphi_i| = \left(\frac{1}{a^2(\rho)} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{b^2(\rho)} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{M}_0} |\varphi_i|\, dV_0 \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{M}_0} |\varphi_i| \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{2\rho_i^2} \int\limits_{\mathcal{M}_i} |\varphi| r\, dr\, d\theta \geqslant& \\ \geqslant \frac{1}{4\rho_i^2} \int\limits_{\mathcal{M}_i} |\varphi|\, dV = \frac{1}{4\rho_i^2} \int\limits_{\Omega_i} |\varphi|\, dV.& \end{aligned} \tag{2.40}$$

С другой стороны, так как

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} = \rho_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r},$$

то

$$|\nabla_{(\rho,\theta)}\varphi_i|^p \leqslant 2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leqslant 4\rho_i^p |\nabla_{(r,\theta)}\varphi_i|^p.$$

Тем самым,

$$\left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)}\varphi_i|^p \, dV_0\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 4^{\frac{1}{p}}\rho_i \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(r,\theta)}\varphi_i|^p \, 2\rho \, d\rho \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{\frac{3}{p}}\rho_i^{1-\frac{2}{p}} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_i} |\nabla_{(r,\theta)}\varphi|^p \, r \, dr \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{\frac{4}{p}}\rho_i^{1-\frac{2}{p}} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_i} |\nabla_{(r,\theta)}\varphi|^p \, dV\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{\frac{4}{p}}\rho_i^{1-\frac{2}{p}} \|\varphi\|_{L^1_p(\Omega_i)} = 2^{\frac{4}{p}}\rho_i^{1-\frac{2}{p}}. \quad (2.41)$$

Объединяя соотношения (2.39), (2.40), (2.41) и полагая

$$\beta_6 = 2^{2+\frac{4}{p}} C_0,$$

получим

$$\int\limits_{\Omega_i} |\varphi| \, dV \leqslant \beta_6 \rho_i^{3-\frac{2}{p}} = \beta_7 2^{i(p-1)(3-2/p)/(2-p)}, \quad (2.42)$$

где

$$\beta_7 = \beta_6 2^{(k_0+1)(p-1)(3-2/p)/(p-2)}.$$

Таким образом, из (2.33) и (2.42) вытекает оценка

$$N_{\Omega_i}(F) \leqslant \beta_8 2^{i(p-1)(\sigma+3-2/p)/(2-p)}, \quad i > k_0+1, \quad (2.43)$$

где постоянная $\beta_8 = \beta_5\beta_7$ не зависит от i.

Зафиксируем теперь произвольную неотрицательную функцию $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathcal{M}_0)$ такую, что $\|\varphi_0\|_{L^1_p(\mathcal{M}_0)} \neq 0$ и $\varphi_{0,i} = \varphi_0 \circ \Phi_i^{-1} \in C_0^\infty(\Omega_i)$ для всех $i > k_0+1$. Принимая во внимание (2.31), будем иметь

$$|(F, \varphi_{0,i})| \geqslant \int\limits_{\Omega_i} r^\sigma \varphi_{0,i} \, dV \geqslant r_{i-1}^\sigma \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{0,i} \, dV \geqslant \beta_9 2^{\frac{i(p-1)\sigma}{2-p}} \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{0,i} \, dV \quad (2.44)$$

для всех $i > k_0+1$, где

$$\beta_9 = \beta_3^\sigma 2^{\frac{\sigma(p-1)}{p-2}}.$$

Далее,

$$\int\limits_{\mathcal{M}_0} \varphi_0 \, dV_0 \leqslant 2\int\limits_{\mathcal{M}_0} \varphi_0 \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{2}{\rho_i^2}\int\limits_{\mathcal{M}_i} \varphi_{0,i} r \, dr \, d\theta \leqslant \frac{4}{\rho_i^2}\int\limits_{\mathcal{M}_i} \varphi_{0,i} \, dV = \frac{4}{\rho_i^2}\int\limits_{\Omega_i} \varphi_{0,i} \, dV$$

для всех $i > k_0 + 1$, откуда следует, что

$$\int\limits_{\Omega_i} \varphi_{0,i}\, dV \geqslant \frac{\rho_i^2}{4} \int\limits_{\mathcal{M}_0} \varphi_0\, dV_0 = \beta_{10} 2^{2i(p-1)/(2-p)} \tag{2.45}$$

для всех $i > k_0 + 1$, где

$$\beta_{10} = 2^{2(k_0+1)(p-1)/(p-2)-2} \int\limits_{\mathcal{M}_0} \varphi_0\, dV_0.$$

Объедниняя соотношения (2.44) и (2.45), получим неравенство

$$|(F, \varphi_{0,i})| \geqslant \beta_{11} 2^{i(p-1)(\sigma+2)/(2-p)} \tag{2.46}$$

для всех $i > k_0 + 1$, где $\beta_{11} = \beta_9 \beta_{10}$. Так как

$$|\nabla_{(\rho,\theta)} \varphi_0|^p \geqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{\frac{p}{2}} \geqslant \frac{\rho_i^p}{4} |\nabla_{(r,\theta)} \varphi_0|^p,$$

то

$$\begin{gathered} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)} \varphi_0|^p\, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 4^{-\frac{1}{p}} \rho_i \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(r,\theta)} \varphi_0|^p \frac{1}{2} \rho\, d\rho\, d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = \\ = 2^{-\frac{3}{p}} \rho_i^{1-\frac{2}{p}} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_i} |\nabla_{(r,\theta)} \varphi_{0,i}|^p\, r\, dr\, d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 2^{-\frac{4}{p}} \rho_i^{1-\frac{2}{p}} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_i} |\nabla_{(r,\theta)} \varphi_{0,i}|^p\ dV \right)^{\frac{1}{p}} = \\ = 2^{-\frac{4}{p}} \rho_i^{1-\frac{2}{p}} \|\varphi_{0,i}\|_{L_p^1(\Omega_i)} \end{gathered} \tag{2.47}$$

для всех $i > k_0 + 1$. Следовательно,

$$\|\varphi_{0,i}\|_{L_p^1(\Omega_i)} \leqslant 2^{\frac{4}{p}} \rho_i^{\frac{2}{p}-1} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)} \varphi_0|^p\, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}} = \beta_{12} 2^{i(p-1)(2/p-1)/(2-p)} \tag{2.48}$$

для всех $i > k_0 + 1$, где

$$\beta_{12} = 2^{4/p+(k_0+1)(p-1)(2/p-1)/(p-2)} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)}\varphi_0|^p \, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тем самым, из (2.46) и (2.48) вытекает соотношение

$$N_{\Omega_i}(F) \geqslant \frac{|(F, \varphi_{0,i})|}{\|\varphi_{0,i}\|_{L_p^1(\Omega_i)}} \geqslant \beta_{13} 2^{i(p-1)(\sigma+3-2/p)/(2-p)}, \quad i > k_0 + 1,$$

где $\beta_{13} = \beta_{11}/\beta_{12}$, объединяя которое с (2.43), приходим к выводу, что

$$N_{\Omega_i}(F) \asymp 2^{i(p-1)(\sigma+3-2/p)/(2-p)} \quad \text{при } i \to \infty. \tag{2.49}$$

Заметим теперь, что $N_{\Omega_1}(F) < \infty$. В самом деле, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ такой, что $\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega_1)} = 1$, согласно неравенству Фридрихса [32, §3.2.3], имеем

$$\int\limits_{\Omega_1} |\varphi| \, dV \leqslant C \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\varphi| \, dV \leqslant C|\Omega_1|^{(p-1)/p} \left(\int\limits_{\Omega_1} |\nabla\varphi|^p \, dV \right)^{\frac{1}{p}} = C|\Omega_1|^{(p-1)/p},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ. Поэтому

$$|(F, \varphi)| \leqslant \int\limits_{\Omega_1} |r^\sigma \varphi| \, dV \leqslant r_2^\sigma \int\limits_{\Omega_1} |\varphi| \, dV \leqslant C r_2^\sigma |\Omega_1|^{(p-1)/p} < \infty,$$

откуда следует, что

$$N_{\Omega_1}(F) \leqslant C r_2^\sigma |\Omega_1|^{(p-1)/p} < \infty.$$

Аналогично, $N_{\Omega_i}(F) < \infty$ при $i \geqslant 2$. Таким образом, ввиду оценки (2.49) и теоремы 2.3, получим, что задача (3), (4) имеет решение в том и только том случае, когда

$$\sigma < \frac{2}{p} - 3.$$

Пример 2.2. Пусть $p > 2$, M — плоскость Лобачевского, рассмотренная в предыдущем примере. Обозначим через Q_i^+ точку многообразия M с координатами $r = 2^i$ и $\theta = \pi/2$, а через Q_i^- — с координатами $r = 2^i$ и $\theta = -\pi/2$.

Рассмотрим задачу (3), (4), где $h = 0$ и

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (\delta_{Q_i^+}(x) - \delta_{Q_i^-}(x)).$$

Здесь $\alpha_i \geqslant 0$ — вещественные числа, а $\delta_{Q_i^+}(x)$ и $\delta_{Q_i^-}(x)$ — дельта-функции Дирака, сосредоточенные в точках Q_i^+ и Q_i^-. Другими словами,

$$(f, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (\varphi(Q_i^+) - \varphi(Q_i^-)), \quad \varphi \in C_0^\infty(M).$$

Из (2.29), согласно предложению 2.1, вытекает, что M — p-параболическое многообразие. При этом несложно увидеть, что числа r_i, $i \in \mathbb{N}$, определенные в теореме 2.2, удовлетворяют соотношению

$$\int_{r_0}^{r_i} \frac{a(s)}{b^{1/(p-1)}(s)}\, ds = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{a(s)}{b^{1/(p-1)}(s)}\, ds = 2^i, \quad i \in \mathbb{N},$$

которое позволяет утверждать, что

$$\int_{r_i}^{r_{i+m}} \frac{a(s)}{b^{1/(p-1)}(s)}\, ds = \sum_{j=i}^{i+m-1} 2^j \asymp 2^{i+m}, \quad i, m \in \mathbb{N}.$$

Поэтому из (2.29) следует, что существует число $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого натурального числа m выполнена оценка

$$r_{i_0+m}^{(p-2)/(p-1)} - r_{i_0}^{(p-2)/(p-1)} \asymp 2^{i_0+m}. \tag{2.50}$$

Найдем число $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $r_{i_0}^{(p-2)/(p-1)} \leqslant 2^{i_0+m_0}$. Тогда, принимая во внимание (2.50), будем иметь

$$\beta_1 2^{\frac{i(p-1)}{p-2}} \leqslant r_i \leqslant \beta_2 2^{\frac{i(p-1)}{p-2}} \quad \text{при } i \geqslant j_0 = i_0 + m_0, \tag{2.51}$$

где постоянные $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$ не зависят от i. Таким образом,

$$r_i \asymp 2^{i(p-1)/(p-2)} \quad \text{при } i \to \infty.$$

Из (2.51), в частности, вытекает, что для любых натуральных чисел m_1 и m_2 таких, что $m_2 \geqslant m_1 \geqslant j_0$, существует вещественное число $\beta_{m_1,m_2} \in [\beta_1/\beta_2, \beta_2/\beta_1]$ такое, что

$$r_{m_2} = \beta_{m_1,m_2} 2^{\frac{(m_2-m_1)(p-1)}{p-2}} r_{m_1}. \tag{2.52}$$

Пусть Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, — области, определенные в теореме 2.4. Для каждого $i \geqslant 2$ возьмем произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_i)$ такую, что $\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega_i)} = 1$. Имеем

$$|(F,\varphi)| \leqslant \sum_{\log_2 r_{i-1}<j<\log_2 r_{i+1}} \alpha_j |\varphi(Q_j^+) - \varphi(Q_j^-)| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{x\in\Omega_i} |\varphi(x)| \sum_{\log_2 r_{i-1}<j<\log_2 r_{i+1}} \alpha_j. \tag{2.53}$$

Отметим, что из равенства (2.28) следуют соотношения (2.34). Найдем натуральное число $k_0 \geqslant j_0$ такое, что при $r \geqslant \beta_1 r_{k_0}/\beta_2$ справедливы неравенства (2.35) и (2.36). Обозначим

$$\mathcal{M}_0 = D \times \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} r_{k_0}, \frac{\beta_2}{\beta_1} r_{k_0+2} \right) \tag{2.54}$$

и

$$\mathcal{M}_i = D \times \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} 2^{\frac{(i-k_0-1)(p-1)}{p-2}} r_{k_0}, \frac{\beta_2}{\beta_1} 2^{\frac{(i-k_0-1)(p-1)}{p-2}} r_{k_0+2} \right), \quad i > k_0+1. \tag{2.55}$$

Заметим, что, в силу (2.52), $\Omega_i \subset \mathcal{M}_i$, $i > k_0+1$. Для каждого $i > k_0+1$ положим

$$\rho_i = 2^{\frac{(i-k_0-1)(p-1)}{p-2}}$$

и рассмотрим диффеоморфизм $\Phi_i : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathcal{M}_i$, действующий по правилу

$$\Phi_i : (\rho, \theta) \mapsto (r, \theta) = (\rho_i \rho, \theta).$$

Согласно теореме вложения Соболева,

$$\sup_{x\in\Omega_i} |\varphi(x)| = \sup_{x\in\mathcal{M}_i} |\varphi(x)| = \sup_{x\in\mathcal{M}_0} |\varphi_i(x)| \leqslant \tilde{C}_1 \|\varphi_i\|_{W_p^1(\mathcal{M}_0)},$$

где $\varphi_i = \varphi \circ \Phi_i$, а постоянная $\tilde{C}_1 > 0$ не зависит от φ. Применяя к последнему соотношению неравенство Фридрихса

$$\|\varphi_i\|_{W_p^1(\mathcal{M}_0)} \leqslant \tilde{C}_2 \|\varphi_i\|_{L_p^1(\mathcal{M}_0)},$$

где постоянная $\tilde{C}_2 > 0$ не зависит от φ, получим

$$\sup_{x \in \Omega_i} |\varphi(x)| \leqslant C_0 \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)} \varphi_i|^p \, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}},$$

где постоянная $C_0 > 0$ не зависит от φ. При этом, в силу выбора числа k_0, справедлива цепочка неравенств (2.41). Следовательно,

$$\sup_{x \in \Omega_i} |\varphi(x)| \leqslant C_0 2^{\frac{4}{p}} \rho_i^{1-\frac{2}{p}} = \beta_3 2^{i(p-1)/p}, \tag{2.56}$$

где

$$\beta_3 = C_0 2^{\frac{4-(k_0+1)(p-1)}{p}}.$$

Таким образом, из (2.53) и (2.56) вытекает оценка

$$N_{\Omega_i}(F) \leqslant \beta_4 2^{i(p-1)/p} \sum_{\log_2 r_{i-1} < j < \log_2 r_{i+1}} \alpha_j, \quad i > k_0 + 1, \tag{2.57}$$

где постоянная $\beta_4 = 2\beta_3$ не зависит от i.

Зафиксируем теперь произвольную функцию $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathcal{M}_0)$ такую, что $\|\varphi_0\|_{L_p^1(\mathcal{M}_0)} \neq 0$, $\varphi_{0,i} = \varphi_0 \circ \Phi_i^{-1} \in C_0^\infty(\Omega_i)$ и

$$\min_{\log_2 r_{i-1} < j < \log_2 r_{i+1}} (\varphi_{0,i}(Q_j^+) - \varphi_{0,i}(Q_j^-)) \geqslant 1$$

для всех $i > k_0 + 1$. Имеем

$$|(F, \varphi_{0,i})| = \sum_{\log_2 r_{i-1} < j < \log_2 r_{i+1}} \alpha_j (\varphi_{0,i}(Q_j^+) - \varphi_{0,i}(Q_j^-)) \geqslant \sum_{\log_2 r_{i-1} < j < \log_2 r_{i+1}} \alpha_j \tag{2.58}$$

для всех $i > k_0 + 1$. При этом, в силу выбора числа k_0, выполнено соотношение (2.47). Следовательно,

$$\|\varphi_{0,i}\|_{L^1_p(\Omega_i)} \leqslant 2^{\frac{4}{p}} \rho_i^{\frac{2}{p}-1} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)} \varphi_0|^p \, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}} = \beta_5 2^{-i(p-1)/p} \tag{2.59}$$

для всех $i > k_0 + 1$, где

$$\beta_5 = 2^{\frac{4+(k_0+1)(p-1)}{p}} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)} \varphi_0|^p \, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тем самым, из (2.58) и (2.59) вытекает соотношение

$$N_{\Omega_i}(F) \geqslant \frac{|(F, \varphi_{0,i})|}{\|\varphi_{0,i}\|_{L^1_p(\Omega_i)}} \geqslant \beta_6 2^{i(p-1)/p} \sum_{\log_2 r_{i-1} < j < \log_2 r_{i+1}} \alpha_j, \quad i > k_0 + 1,$$

где $\beta_6 = 1/\beta_5$, объединяя которое с (2.57), приходим к выводу, что

$$N_{\Omega_i}(F) \asymp 2^{i(p-1)/p} \sum_{\log_2 r_{i-1} < j < \log_2 r_{i+1}} \alpha_j \quad \text{при } i \to \infty. \tag{2.60}$$

Заметим теперь, что $N_{\Omega_1}(F) < \infty$. В самом деле, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ такой, что $\|\varphi\|_{L^1_p(\Omega_1)} = 1$, согласно теореме вложения Соболева, имеем

$$\sup_{x \in \Omega_1} |\varphi(x)| \leqslant \tilde{C}_3 \|\varphi\|_{W^1_p(\Omega_1)},$$

где постоянная $\tilde{C}_3 > 0$ не зависит от φ. Применяя к последнему соотношению неравенство Фридрихса

$$\|\varphi\|_{W^1_p(\Omega_1)} \leqslant \tilde{C}_4 \|\varphi\|_{L^1_p(\Omega_1)},$$

где постоянная $\tilde{C}_4 > 0$ не зависит от φ, получим

$$\sup_{x \in \Omega_1} |\varphi(x)| \leqslant \tilde{C}_3 \tilde{C}_4.$$

Поэтому

$$|(F,\varphi)| \leqslant \sum_{1\leqslant j<\log_2 r_2} \alpha_j |\varphi(Q_j^+) - \varphi(Q_j^-)| \leqslant 2 \sup_{x\in\Omega_1} |\varphi(x)| \sum_{1\leqslant j<\log_2 r_2} \alpha_j \leqslant$$
$$\leqslant 2\tilde{C}_3\tilde{C}_4 \sum_{1\leqslant j<\log_2 r_2} \alpha_j < \infty,$$

откуда следует, что

$$N_{\Omega_1}(F) \leqslant 2\tilde{C}_3\tilde{C}_4 \sum_{1\leqslant j<\log_2 r_2} \alpha_j < \infty.$$

Аналогично, $N_{\Omega_i}(F) < \infty$ при $i \geqslant 2$.

Наконец, возьмем невозрастающую функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную единице на промежутке $(-\infty, 1]$ и нулю на $[2,\infty)$. Покажем, что последовательность

$$\eta_i(r) = \begin{cases} \eta(2^{-i}r) & \text{на } M\setminus\overline{\omega}, \\ 1 & \text{на } \overline{\omega}, \end{cases}$$

$i \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию теоремы 2.4. Прежде всего заметим, что $(F,\eta_i) = 0$ и $\eta_i\big|_{\overline{\omega}} = 1$, $i \in \mathbb{N}$. Далее,

$$|\nabla\eta_i| \leqslant 2^{-i}\|\eta'\|_{C(\mathbb{R})}, \quad i\in\mathbb{N}.$$

Несложно увидеть, что функция $a(r)$ монотонно убывает на $[2,\infty)$. Тем самым, $a(r) \leqslant a_{max} = a(2) = \sqrt{7/3}$, $r\in[2,\infty)$, и

$$\|\eta_i\|^p_{L^1_p(M)} = \int\limits_M |\nabla\eta_i|^p\, dV \leqslant 2^{-ip}\|\eta'\|^p_{C(\mathbb{R})} a_{max} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{2^i}^{2^{i+1}} r\, dr\, d\theta =$$
$$= 3\pi\|\eta'\|^p_{C(\mathbb{R})} a_{max} 2^{i(2-p)} \to 0 \quad \text{при } i\to\infty.$$

Таким образом, ввиду оценки (2.60) и теоремы 2.4, получим, что задача (3), (4) имеет решение в том и только том случае, когда

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \alpha_i^{p/(p-1)} < \infty.$$

Пример 2.3. Пусть $p > 2$, M — часть плоскости Лобачевского, рассмотренной в предыдущих примерах, состоящая из точек (x_1, x_2, x_3) таких, что $x_1 \geqslant 0$. Заметим, что M является многообразием с модельным концом (2.26), где $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in M : x_3 < 2\}$, $r = x_3$, $r_0 = 2$ и D — единичная полуокружность в $\mathbb{R}^2$ с угловой координатой θ. Положим правую часть f уравнения (1) равной нулю, а функцию h, параметризуя край многообразия координатой x_2, зададим соотношением

$$h(x_2) = (1 + x_2^2)^{\sigma/2} \operatorname{sign} x_2,$$

где $\sigma \in \mathbb{R}$. Заметим, что h — нечетная, вообще говоря, разрывная функция переменной x_2.

Предположим, что Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, — области, определенные в теореме 2.4. Пусть j_0 и k_0 — натуральные числа, определенные в примере 2.2. Для каждого $i \geqslant j_0$ возьмем произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(\Omega_i)$ такую, что $\operatorname{supp} \varphi \Subset \Omega_i$ и $\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega_i)} = 1$. Учитывая (2.51), будем иметь

$$|(F, \varphi)| \leqslant \int\limits_{\partial M \cap \Omega_i} |r^\sigma \varphi| \, dS \leqslant$$
$$\leqslant r_{i+1}^\sigma \int\limits_{\partial M \cap \Omega_i} |\varphi| \, dS \leqslant \beta_0 2^{\frac{i(p-1)\sigma}{p-2}} \int\limits_{\partial M \cap \Omega_i} |\varphi| \, dS, \qquad (2.61)$$

где постоянная $\beta_0 > 0$ не зависит от i. Пусть множества $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_i$, $i > k_0 + 1$, определены с помощью равенств (2.54) и (2.55). Заметим, что, в силу (2.52), $\partial M \cap \Omega_i \subset \partial M \cap \mathcal{M}_i$, $i > k_0 + 1$. Для каждого $i > k_0 + 1$ положим

$$\rho_i = 2^{\frac{(i-k_0-1)(p-1)}{p-2}}$$

и рассмотрим диффеоморфизм $\Phi_i : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathcal{M}_i$, действующий по правилу

$$\Phi_i : (\rho, \theta) \mapsto (r, \theta) = (\rho_i \rho, \theta).$$

Далее в примере 2.3 через C будем обозначать всевозможные положительные постоянные, не зависящие от φ. По теореме вложения,

$$\int\limits_{\partial\mathcal{M}_0} |\varphi_i|\, dS_0 \leqslant C \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\varphi_i|\, dV_0 + \int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla\varphi_i|\, dV_0 \right),$$

где $\varphi_i = \varphi \circ \Phi_i$. Применяя к последнему соотношению неравенство Фридрихса [32, §3.2.3]

$$\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\varphi_i|\, dV_0 \leqslant C \int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla\varphi_i|\, dV_0,$$

будем иметь

$$\int\limits_{\partial\mathcal{M}_0} |\varphi_i|\, dS_0 \leqslant C \int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla\varphi_i|\, dV_0,$$

откуда, ввиду неравенства Гельдера, получим

$$\int\limits_{\partial\mathcal{M}_0} |\varphi_i|\, dS_0 \leqslant C \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)}\varphi_i|^p\, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.62}$$

Несложно увидеть, что $1 < a(r) < 2$, $r \in [2, \infty)$. Следовательно,

$$\int\limits_{\partial M\cap\mathcal{M}_0} |\varphi_i|\, dS_0 = \int\limits_{\frac{\beta_1}{\beta_2}r_{k_0}}^{\frac{\beta_2}{\beta_1}r_{k_0+2}} (|\varphi(\rho_i\rho,0)| + |\varphi(\rho_i\rho,\pi)|)a(\rho)\, d\rho \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{\frac{\beta_1}{\beta_2}r_{k_0}}^{\frac{\beta_2}{\beta_1}r_{k_0+2}} (|\varphi(\rho_i\rho,0)| + |\varphi(\rho_i\rho,\pi)|)\, d\rho = \frac{1}{\rho_i} \int\limits_{\frac{\beta_1}{\beta_2}r_{k_0}\rho_i}^{\frac{\beta_2}{\beta_1}r_{k_0+2}\rho_i} (|\varphi(r,0)| + |\varphi(r,\pi)|)\, dr \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2\rho_i} \int\limits_{\frac{\beta_1}{\beta_2}r_{k_0}\rho_i}^{\frac{\beta_2}{\beta_1}r_{k_0+2}\rho_i} (|\varphi(r,0)| + |\varphi(r,\pi)|)a(r)\, dr = \frac{1}{2\rho_i} \int\limits_{\partial M\cap\mathcal{M}_i} |\varphi|\, dS = \frac{1}{2\rho_i} \int\limits_{\partial M\cap\Omega_i} |\varphi|\, dS. \tag{2.63}$$

При этом, в силу выбора числа k_0, справедлива цепочка неравенств (2.41). Тем самым, из (2.62) и (2.63) получим

$$\int\limits_{\partial M\cap\Omega_i} |\varphi|\, dS \leqslant 2^{1+\frac{4}{p}} C\rho_i^{2-\frac{2}{p}} = \beta_5 2^{\frac{2i(p-1)^2}{p(p-2)}}, \tag{2.64}$$

где

$$\beta_5 = 2^{1+\frac{4}{p}+\frac{2(k_0+1)(p-1)^2}{p(2-p)}} C.$$

Таким образом, из (2.61) и (2.64) вытекает оценка

$$N_{\Omega_i}(F) \leqslant \beta_6 2^{\frac{i(p-1)}{p-2}\left(\sigma+\frac{2(p-1)}{p}\right)}, \quad i > k_0+1, \tag{2.65}$$

где постоянная $\beta_6 = \beta_0\beta_5$ не зависит от i.

Зафиксируем теперь произвольную функцию $\varphi_0 \in C^\infty(\mathcal{M}_0)$ такую, что $\operatorname{supp}\varphi_0 \Subset \mathcal{M}_0$, $\|\varphi_0\|_{L^1_p(\mathcal{M}_0)} \neq 0$, $\operatorname{supp}\varphi_0\circ\Phi_i^{-1} \Subset \Omega_i$ для всех $i > k_0+1$,

$$\varphi_0(\rho,0) \geqslant \varphi_0(\rho,\pi), \quad \rho \in \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} r_{k_0}, \frac{\beta_2}{\beta_1} r_{k_0+2}\right),$$

причем существует интервал $(c,d) \subset (\beta_1 r_{k_0}/\beta_2, \beta_2 r_{k_0+2}/\beta_1)$ такой, что

$$\varphi_0(\rho,0) > \varphi_0(\rho,\pi), \quad \rho \in (c,d).$$

Для каждого $i > k_0+1$ обозначим $\varphi_{0,i} = \varphi_0\circ\Phi_i^{-1}$. Принимая во внимание (2.51), будем иметь

$$|(F,\varphi_{0,i})| = \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} r^\sigma(\varphi_{0,i}(r,0) - \varphi_{0,i}(r,\pi))a(r)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant r_{i-1}^\sigma \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} (\varphi_{0,i}(r,0) - \varphi_{0,i}(r,\pi))\, dr \geqslant \beta_7 2^{\frac{i(p-1)\sigma}{p-2}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} (\varphi_{0,i}(r,0) - \varphi_{0,i}(r,\pi))\, dr \tag{2.66}$$

для всех $i > k_0+1$, где

$$\beta_7 = \beta_1^\sigma 2^{\frac{\sigma(p-1)}{2-p}}.$$

Далее,

$$\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} (\varphi_{0,i}(r,0) - \varphi_{0,i}(r,\pi))\, dr = \int\limits_{\frac{\beta_1}{\beta_2} r_{k_0}\rho_i}^{\frac{\beta_2}{\beta_1} r_{k_0+2}\rho_i} \left(\varphi_0\left(\frac{r}{\rho_i}, 0\right) - \varphi_0\left(\frac{r}{\rho_i}, \pi\right)\right) dr =$$

$$= \rho_i \int\limits_{\frac{\beta_1}{\beta_2} r_{k_0}}^{\frac{\beta_2}{\beta_1} r_{k_0+2}} (\varphi_0(\rho,0) - \varphi_0(\rho,\pi))\, d\rho = \beta_8 2^{\frac{i(p-1)}{p-2}} \quad (2.67)$$

для всех $i > k_0 + 1$, где

$$\beta_8 = 2^{\frac{(k_0+1)(p-1)}{2-p}} \int\limits_{\frac{\beta_1}{\beta_2} r_{k_0}}^{\frac{\beta_2}{\beta_1} r_{k_0+2}} (\varphi_0(\rho,0) - \varphi_0(\rho,\pi))\, d\rho.$$

Из (2.66) и (2.67) следует, что

$$|(F, \varphi_{0,i})| \geqslant \beta_9 2^{\frac{i(p-1)}{p-2}(\sigma+1)} \quad (2.68)$$

для всех $i > k_0+1$, где $\beta_9 = \beta_7\beta_8$. При этом, в силу выбора числа k_0, выполнено соотношение (2.47). Следовательно,

$$\|\varphi_{0,i}\|_{L_p^1(\Omega_i)} \leqslant \beta_{10} 2^{-i(p-1)/p} \quad (2.69)$$

для всех $i > k_0 + 1$, где

$$\beta_{10} = 2^{\frac{4+(k_0+1)(p-1)}{p}} \left(\int\limits_{\mathcal{M}_0} |\nabla_{(\rho,\theta)}\varphi_0|^p\, dV_0\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тем самым, из (2.68) и (2.69) вытекает соотношение

$$N_{\Omega_i}(F) \geqslant \frac{|(F,\varphi_{0,i})|}{\|\varphi_{0,i}\|_{L_p^1(\Omega_i)}} \geqslant \beta_{11} 2^{\frac{i(p-1)}{p-2}\left(\sigma + \frac{2(p-1)}{p}\right)}, \quad i > k_0 + 1,$$

где $\beta_{11} = \beta_9/\beta_{10}$, объединяя которое с (2.65), приходим к выводу, что

$$N_{\Omega_i}(F) \asymp 2^{\frac{i(p-1)}{p-2}\left(\sigma + \frac{2(p-1)}{p}\right)} \quad \text{при } i \to \infty.$$

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в примере 2.2, можно показать, что $N_{\Omega_i}(F) < \infty$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, применяя теорему 2.4 с той же последовательностью η_i, $i \in \mathbb{N}$, что и в предыдущем примере, получим, что для разрешимости задачи (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma < -\frac{2(p-1)}{p}.$$

Глава 3. Задача Неймана в областях вращения в $\mathbb{R}^n$

В данной главе будут получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, а Ω — область, образованная вращением графика липшицевой функции.

Пусть x_1, ..., x_n — декартова система координат в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим сферические координаты r, θ, θ^1, ..., θ^{n-2}, сопоставляя каждой точке $P \in \mathbb{R}^n$ длину $r(P)$ её радиус-вектора, угол $\theta(P) \in [0, \pi]$ между радиус-вектором и положительным направлением оси Ox_n и $\tilde{\theta}(P) = (\theta^1(P), \dots, \theta^{n-2}(P))$ — локальные координаты на единичной $(n-2)$-мерной сфере $\mathbb{S}^{n-2}$. Метрика в пространстве $\mathbb{R}^n$ в координатах r, θ, θ^1, ..., θ^{n-2} имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) \tilde{g}_{ij}\, d\theta^i d\theta^j, \tag{3.1}$$

где $\tilde{g}_{ij}$ — метрический тензор на $\mathbb{S}^{n-2}$.

Пусть $\Theta : [r_0, +\infty) \to (0, \pi)$, $r_0 > 0$, — липшицева функция такая, что

$$A_1 \Theta(r_1) \leqslant \Theta(r_2) \leqslant A_2 \Theta(r_1) \quad \text{при } r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant 2r_1, \tag{3.2}$$

где $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$ — некоторые постоянные. Предположим, что

$$\Omega = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M},$$

где $\mathcal{M} = \{P \in \mathbb{R}^n : r(P) \in [r_0, +\infty),\, \theta(P) \in [0, \Theta(r)),\, \tilde{\theta} \in \mathbb{S}^{n-2}\}$, а область $\mathcal{M}_0$ содержится в шаре B_{r_0}. Далее будем обозначать $R(r) = r\Theta(r)$, $r \geqslant r_0$.

Положим $r_i = 2^i r_0$, $i \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_1 = B_{r_2}, \quad \Omega_i = B_{r_{i+1}} \setminus \overline{B}_{r_{i-1}},\ i \geqslant 2. \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. *Для любой функции $u \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство*

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int\limits_{\omega_i} |u - c|\, dV \leqslant 2^i A \int\limits_{\omega_i} |\nabla u|\, dV, \quad i \geqslant 2, \tag{3.4}$$

где $\omega_i = (\Omega_i \cup \Omega_{i+1}) \cap \Omega = \{(r, \theta, \tilde{\theta}) : r \in (r_{i-1}, r_{i+2}),\ \theta \in [0, \Theta(r)),\ \tilde{\theta} \in \mathbb{S}^{n-2}\}$, Ω_i *— области, определенные с помощью* (3.3), *и постоянная* $A > 0$ *не зависит от* u, i.

Доказательство. Из равенства (3.1) следует, что

$$dV = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta \, dr \, d\theta \, dS_{n-2},$$

где dS_{n-2} — элемент $(n-2)$-мерного объема сферы в $\mathbb{R}^{n-1}$, и

$$|\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})} u| = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \tilde{g}^{lj} \frac{\partial u}{\partial \theta^l} \frac{\partial u}{\partial \theta^j} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим сначала случай

$$\omega_i = \{(r, \theta, \tilde{\theta}) : r \in (r_{i-1}, r_{i+2}),\ \theta \in [0, \theta_0),\ \tilde{\theta} \in \mathbb{S}^{n-2}\},$$

где $\theta_0 \in (0, \pi/2]$. Заметим, что область ω_i диффеоморфна множеству $\omega_0 = \{(\rho, \vartheta, \tilde{\vartheta}) : \rho \in (1, 8),\ \vartheta \in [0, 1),\ \tilde{\vartheta} \in \mathbb{S}^{n-2}\}$. В самом деле, в качестве диффеоморфизма $\Phi_i : \omega_0 \mapsto \omega_i$ можно взять отображение, действующее по правилу

$$\Phi_i : (\rho, \vartheta, \tilde{\vartheta}) \mapsto (r, \theta, \tilde{\theta}) = (r_{i-1}\rho, \theta_0 \vartheta, \tilde{\vartheta}).$$

Якобиан J_i отображения Φ_i, очевидно, имеет вид $J_i = r_{i-1}\theta_0$. Согласно неравенству Пуанкаре, для любой функции $u \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int\limits_{\omega_0} |u_i - c| \, dV_0 \leqslant C_0 \int\limits_{\omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})} u_i| \, dV_0, \tag{3.5}$$

где $u_i = u \circ \Phi_i$, постоянная $C_0 > 0$ не зависит от u, $dV_0 = \rho^{n-1} \sin^{n-2} \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, dS_{n-2}$,

$$|\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})} u_i| = \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta} \tilde{g}^{lj} \frac{\partial u_i}{\partial \vartheta^l} \frac{\partial u_i}{\partial \vartheta^j} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

будем иметь

$$
\begin{aligned}
\inf_{c\in\mathbb{R}} \int\limits_{\omega_0} |u_i - c|\, dV_0 &= \inf_{c\in\mathbb{R}} \int\limits_{\omega_0} |u_i - c|\, \rho^{n-1} \sin^{n-2}\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, dS_{n-2} = \\
&= \inf_{c\in\mathbb{R}} \int\limits_{\omega_i} |u - c| \left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)^{n-1} \sin^{n-2}\frac{\theta}{\theta_0}\frac{1}{J_i}\, dr\, d\theta\, dS_{n-2} \geqslant \\
&\geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-2} \frac{1}{r_{i-1}^{n}\theta_0^{n-1}} \inf_{c\in\mathbb{R}} \int\limits_{\omega_i} |u - c| r^{n-1}\theta^{n-2}\, dr\, d\theta\, dS_{n-2} \geqslant \\
&\geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-2} \frac{1}{r_{i-1}^{n}\theta_0^{n-1}} \inf_{c\in\mathbb{R}} \int\limits_{\omega_i} |u - c|\, dV. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

С другой стороны, так как

$$
\frac{\partial u_i}{\partial\rho} = r_{i-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial\vartheta} = \theta_0\frac{\partial u_i}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial\vartheta^l} = \frac{\partial u_i}{\partial\theta^l}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-2,
$$

то

$$
\begin{aligned}
|\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})} u_i|^2 &\leqslant r_{i-1}^2 \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{\theta_0^2}{r^2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\theta_0^2}{r^2\theta^2}\tilde{g}^{lj}\frac{\partial u_i}{\partial\theta^l}\frac{\partial u_i}{\partial\theta^j}\right) \leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 r_{i-1}^2 |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})} u_i|^2.
\end{aligned}
$$

Тем самым,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})} u_i|\, dV_0 &\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 r_{i-1} \int\limits_{\omega_0} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})} u_i|\, \rho^{n-1} \sin^{n-2}\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, dS_{n-2} = \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 r_{i-1} \int\limits_{\omega_i} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})} u| \left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)^{n-1} \sin^{n-2}\frac{\theta}{\theta_0}\frac{1}{J_i}\, dr\, d\theta\, dS_{n-2} \leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{r_{i-1}^{n-1}\theta_0^{n-1}} \int\limits_{\omega_i} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})} u| r^{n-1}\theta^{n-2}\, dr\, d\theta\, dS_{n-2} \leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \frac{1}{r_{i-1}^{n-1}\theta_0^{n-1}} \int\limits_{\omega_i} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})} u|\, dV. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Объединяя соотношения (3.5), (3.6), (3.7) и полагая

$$A = A_0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2} \frac{C_0 r_0}{2},$$

немедленно получим неравенство (3.4).

Пусть теперь

$$\Theta_{i,\max} = \max_{r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_{i+2}} \Theta(r) \leqslant \pi/2.$$

Из условия леммы следует, что существует вещественное число $B \in (0,1)$ такое, что

$$\Theta_{i,\min} = \min_{r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_{i+2}} \Theta(r) \geqslant B.$$

Возьмем произвольную функцию $u \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и вещественное число $c \in \mathbb{R}$. Обозначим $w = u - c$. Известно [32, §1.1.3], что функция w абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси. Следовательно, для почти всех $(r, \tilde{\theta}) \in (r_{i-1}, r_{i+2}) \times \mathbb{S}^{n-2}$ имеем

$$w(r, \theta, \tilde{\theta}) = w(r, t, \tilde{\theta}) + \int\limits_t^\theta \frac{\partial w}{\partial \tau}(r, \tau, \tilde{\theta})\, d\tau$$

при всех $\theta \in [0, \Theta(r))$, $t \in (B\Theta_{i,\min}, \Theta_{i,\min})$. Из последнего соотношения получим неравенство

$$|w(r, \theta, \tilde{\theta})| \leqslant |w(r, t, \tilde{\theta})| + \int\limits_{B\Theta_{i,\min}}^{\Theta(r)} \left| \frac{\partial w}{\partial \tau}(r, \tau, \tilde{\theta}) \right| d\tau \tag{3.8}$$

для почти всех $(r, \tilde{\theta}) \in (r_{i-1}, r_{i+2}) \times \mathbb{S}^{n-2}$. Несложно увидеть, что

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-2} A_3 \Theta_{i,\min}^{n-1} \leqslant \int\limits_{B\Theta_{i,\min}}^{\Theta_{i,\min}} \sin^{n-2} t\, dt \leqslant A_3 \Theta_{i,\min}^{n-1}, \quad \text{где } A_3 = \frac{1 - B^{n-1}}{n-1}.$$

Поэтому из неравенства (3.8) вытекает соотношение

$$|w(r, \theta, \tilde{\theta})| \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{A_3 \Theta_{i,\min}^{n-1}} \int\limits_{B\Theta_{i,\min}}^{\Theta_{i,\min}} |w(r, t, \tilde{\theta})| \sin^{n-2} t\, dt +$$

$$+\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2}\int\limits_{B\Theta_{i,\min}}^{\Theta(r)}\left|\frac{\partial w}{\partial\tau}(r,\tau,\tilde{\theta})\right|\,d\tau \tag{3.9}$$

для почти всех $(r,\tilde{\theta})\in(r_{i-1},r_{i+2})\times\mathbb{S}^{n-2}$. Из условия (3.2) следует, что для любых вещественных чисел r', $r''\in[r_{i-1},r_{i+2}]$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^3\Theta(r')\leqslant\Theta(r'')\leqslant\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^3\Theta(r').$$

Тем самым,

$$\int\limits_0^{\Theta(r)}\sin^{n-2}\theta\,d\theta\leqslant\frac{1}{n-1}\Theta^{n-1}(r)\leqslant\frac{1}{n-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{3(n-1)}\Theta_{i,\min}^{n-1}.$$

Объединяя последнее соотношение и неравенство (3.9), приходим к выводу, что

$$\int\limits_0^{\Theta(r)}|w(r,\theta,\tilde{\theta})|\sin^{n-2}\theta\,d\theta\leqslant A_4\int\limits_0^{\Theta_{i,\min}}|w(r,t,\tilde{\theta})|\sin^{n-2}t\,dt+$$

$$+\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2}\frac{1}{n-1}\Theta^{n-1}(r)\int\limits_{B\Theta_{i,\min}}^{\Theta(r)}\left|\frac{\partial w}{\partial\tau}(r,\tau,\tilde{\theta})\right|\,d\tau \tag{3.10}$$

для почти всех $(r,\tilde{\theta})\in(r_{i-1},r_{i+2})\times\mathbb{S}^{n-2}$, где

$$A_4=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2}\frac{1}{A_3(n-1)}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{3(n-1)}.$$

Заметим теперь, что

$$\sin^{n-2}\tau\geqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-2}B^{n-2}\Theta_{i,\min}^{n-2}\geqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}B^{n-2}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{3(n-2)}\Theta^{n-1}(r)$$

для всех $\tau\in(B\Theta_{i,\min},\Theta(r))$, откуда, ввиду (3.10), получим

$$\int\limits_0^{\Theta(r)}|w(r,\theta,\tilde{\theta})|\sin^{n-2}\theta\,d\theta\leqslant A_4\int\limits_0^{\Theta_{i,\min}}|w(r,t,\tilde{\theta})|\sin^{n-2}t\,dt+$$

$$+ A_5 \int\limits_{B\Theta_{i,\min}}^{\Theta(r)} \left| \frac{\partial w}{\partial \tau}(r, \tau, \tilde{\theta}) \right| \sin^{n-2} \tau \, d\tau \tag{3.11}$$

для почти всех $(r, \tilde{\theta}) \in (r_{i-1}, r_{i+2}) \times \mathbb{S}^{n-2}$, где

$$A_5 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3} \frac{B^{2-n}}{n-1} \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{3(n-2)}.$$

Так как при $r \in (r_{i-1}, r_{i+2})$ и $\tau \in (B\Theta_{i,\min}, \Theta(r))$ справедливо соотношение

$$\left| \frac{\partial w}{\partial \tau}(r, \tau, \tilde{\theta}) \right| \leqslant r_{i+2} |\nabla w| = 4 r_0 2^i |\nabla w|,$$

неравенство (3.11) позволяет утверждать, что

$$\int\limits_{\omega_i} |w| \, dV \leqslant A_4 \int\limits_{\omega_{i,\min}} |w| \, dV + A_6 2^i \int\limits_{\omega_i} |\nabla w| \, dV, \tag{3.12}$$

где $\omega_{i,\min} = \{(r, \theta, \tilde{\theta}) : r \in (r_{i-1}, r_{i+2}),\ \theta \in [0, \Theta_{i,\min}),\ \tilde{\theta} \in \mathbb{S}^{n-2}\}$, $A_6 = 4 r_0 A_5$. Согласно ранее доказанному, найдется такая константа c, что $w = u - c$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{\omega_{i,\min}} |w| \, dV \leqslant A_0 2^i \int\limits_{\omega_{i,\min}} |\nabla w| \, dV.$$

Таким образом, из соотношения (3.12) немедленно следует (3.4).

Наконец, пусть

$$\Theta_{i,\max} = \max_{r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_{i+2}} \Theta(r) > \pi/2.$$

Возьмем произвольную функцию $u \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и вещественное число $c \in \mathbb{R}$. Обозначим $v = |u - c|$. Пусть $\mathcal{R}_i = \{r \in (r_{i-1}, r_{i+2}) : \Theta(r) > \pi/2\}$. Для почти всех $(r, \tilde{\theta}) \in \mathcal{R}_i \times \mathbb{S}^{n-2}$ имеем

$$v(r, \theta, \tilde{\theta}) \sin^{n-2} \theta = v(r, t, \tilde{\theta}) \sin^{n-2} t + \int\limits_t^\theta \frac{\partial (v(r, \tau, \tilde{\theta}) \sin^{n-2} \tau)}{\partial \tau} \, d\tau \tag{3.13}$$

при всех $\theta \in [\pi/2, \Theta(r)]$, $t \in [\pi/4, \pi/2]$. Так как

$$\int\limits_t^\theta \frac{\partial(v(r,\tau,\tilde\theta)\sin^{n-2}\tau)}{\partial\tau}\,d\tau =$$

$$= \int\limits_t^\theta \frac{\partial v}{\partial\tau}(r,\tau,\tilde\theta)\sin^{n-2}\tau\,d\tau + (n-2)\int\limits_t^\theta v(r,\tau,\tilde\theta)\sin^{n-3}\tau\cos\tau\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\Theta(r)} \left|\frac{\partial v}{\partial\tau}(r,\tau,\tilde\theta)\right|\sin^{n-2}\tau\,d\tau + (n-2)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} v(r,\tau,\tilde\theta)\sin^{n-2}\tau\,d\tau,$$

то из (3.13) вытекает неравенство

$$v(r,\theta,\tilde\theta)\sin^{n-2}\theta \leqslant A_7\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} v(r,t,\tilde\theta)\sin^{n-2}t\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\Theta(r)}\left|\frac{\partial v}{\partial\tau}(r,\tau,\tilde\theta)\right|\sin^{n-2}\tau\,d\tau$$

для почти всех $(r,\tilde\theta) \in \mathcal{R}_i \times \mathbb{S}^{n-2}$, где $A_7 = 4/\pi + n - 2$. Следовательно,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\Theta(r)} v(r,\theta,\tilde\theta)\sin^{n-2}\theta\,d\theta \leqslant \frac{\pi}{2}A_7\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} v(r,t,\tilde\theta)\sin^{n-2}t\,dt +$$

$$+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\Theta(r)}\left|\frac{\partial v}{\partial\tau}(r,\tau,\tilde\theta)\right|\sin^{n-2}\tau\,d\tau$$

для почти всех $(r,\tilde\theta) \in \mathcal{R}_i \times \mathbb{S}^{n-2}$. Интегрируя последнюю оценку по $r \in \mathcal{R}_i$, $\tilde\theta \in \mathbb{S}^{n-2}$ и обозначая $\omega_i^+ = \omega_i \cap \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant 0\}$ и $\omega_i^- = \omega_i \cap \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$, получим

$$\int\limits_{\omega_i^-} v\,dV \leqslant \frac{\pi}{2}A_7\int\limits_{\omega_i^+} v\,dV + \frac{\pi}{2}r_{i+2}\int\limits_{\omega_i}|\nabla v|\,dV. \tag{3.14}$$

Согласно ранее доказанному, найдется такая константа c, что

$$\int\limits_{\omega_i^+} v\,dV \leqslant A_8 2^i\int\limits_{\omega_i^+}|\nabla u|\,dV, \tag{3.15}$$

где постоянная A_8 не зависит от u, i. При этом, очевидно,

$$\int\limits_{\omega_i} |\nabla v|\, dV \leqslant \int\limits_{\omega_i} |\nabla u|\, dV. \tag{3.16}$$

Тем самым, используя соотношения (3.14), (3.15) и (3.16), будем иметь

$$\int\limits_{\omega_i} |u - c|\, dV = \int\limits_{\omega_i} v\, dV = \int\limits_{\omega_i^-} v\, dV + \int\limits_{\omega_i^+} v\, dV \leqslant A2^i \int\limits_{\omega_i} |\nabla u|\, dV,$$

где $A = A_8 + \pi A_7 A_8/2 + 2\pi r_0$, откуда следует неравенство (3.4). Лемма 3.1 полностью доказана.

3.1 Теоремы существования

Теорема 3.1. *Пусть Ω — p-гиперболическая область и при этом*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{r^{p-1}}{R^{n-1}(r)} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{R^{n-1}(t)}{t^p}\, dt < \infty. \tag{3.17}$$

Тогда для разрешимости задачи (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (1.52), *где функционал F задан равенством* (5), *а области Ω_i определены с помощью* (3.3).

Теорема 3.2. *Пусть Ω — p-параболическая область и при этом выполнены условия*

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{R^{n-1}(t)}{t^p}\, dt < \infty, \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{r^{p-1}}{R^{n-1}(r)} < \infty. \tag{3.18}$$

Тогда для разрешимости задачи (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (1.52), *где области Ω_i определены с помощью* (3.3), *и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ были выполнены условия* (1.19) *и* (1.20), *где функционал F задаётся равенством* (5), *а $K \subset \overline{\Omega}$ — некоторый компакт положительной меры.*

Доказательство теоремы 3.1. Пусть

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0/r_i^p & \text{на } \Omega_i \setminus \Omega_{i-1},\ i \geqslant 2, \\ \gamma_0 & \text{на } \Omega_1, \end{cases} \tag{3.19}$$

где $\gamma_0 > 0$ — некоторое вещественное число. Заметим, что

$$\int\limits_{\Omega_1 \cap \Omega} \gamma\, dV = \gamma_0 |\Omega_1 \cap \Omega| \tag{3.20}$$

и

$$\int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} \gamma\, dV \asymp \frac{1}{r_i^p} r_i R^{n-1}(r_i) = \frac{R^{n-1}(r_i)}{r_i^{p-1}}, \quad i \geqslant 2. \tag{3.21}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{\int\limits_{\Omega_i \cap \Omega} \gamma\, dV} + \frac{1}{\int\limits_{\Omega_{i+1} \cap \Omega} \gamma\, dV} \right) \asymp \frac{r_i^{p-1}}{R^{n-1}(r_i)}, \quad i \geqslant 2, \tag{3.22}$$

и

$$\sum_{j=2}^{i} \int\limits_{\Omega_j \cap \Omega} \gamma\, dV \asymp \sum_{j=2}^{i} \frac{R^{n-1}(r_j)}{r_j^{p-1}} \asymp \sum_{j=2}^{i} \int\limits_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{R^{n-1}(x)}{x^p}\, dx = \int\limits_{r_1}^{r_i} \frac{R^{n-1}(x)}{x^p}\, dx, \quad i \geqslant 2. \tag{3.23}$$

Далее, так как на $\omega_i = (\Omega_i \cup \Omega_{i+1}) \cap \Omega$, $i \geqslant 2$, функция γ удовлетворяет неравенству

$$C_\gamma 2^{-ip} \leqslant \gamma \leqslant 2^{2p} C_\gamma 2^{-ip},$$

где $C_\gamma = \gamma_0 2^{-p} r_0^{-p}$, то, используя лемму 3.1, получим

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int\limits_{\omega_i} \gamma |u - c|\, dV \leqslant 2^{2p+2} C_\gamma^{1/p} A \int\limits_{\omega_i} \gamma^{1-1/p} |\nabla u|\, dV, \quad i \geqslant 2.$$

Таким образом,

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} C_i \leqslant \max\{C_1, 2^{2p+2} C_\gamma^{1/p} A\} < \infty, \tag{3.24}$$

где $C_i > 0$ — постоянная в неравенстве (1.35) для области ω_i. Из соотношений (3.17), (3.20), (3.22), (3.23) и (3.24) следует, что построенные выше функция γ

и области Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условию леммы 1.5.

Построим теперь разбиение единицы $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$, удовлетворяющее условию (1.51). Возьмем функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную нулю в окрестности промежутков $(-\infty, 1]$ и $[4, +\infty)$, и единице в окрестности отрезка $[3/2, 7/2]$. Будем строить ψ_i, $i \in \mathbb{N}$, в виде функций, зависящих только от r. Положим $\tilde{\psi}_1(r) = \psi(r/r_1 + 2)$, $r \in [0, r_2)$, и $\tilde{\psi}_i(r) = \psi(r/r_{i-1})$, $r \in (r_{i-1}, r_{i+1})$, $i \geqslant 2$. Обозначим

$$\psi_i(r) = \frac{\tilde{\psi}_i(r)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j(r)}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Несложно увидеть, что функции $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ образуют разбиение единицы, для которого, взяв $\gamma_0 > 0$ достаточно большим, будем, очевидно, иметь неравенство (1.51). Таким образом, для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 1.3.

Доказательство теоремы 3.2. Пусть функция γ определена равенством (3.19), где $\gamma_0 > 0$ — некоторое вещественное число. Тогда имеют место соотношения (3.20) и (3.21). Следовательно, справедлива оценка (3.22), и при этом

$$\sum_{j=i+1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_j \cap \Omega} \gamma \, dV \asymp \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{R^{n-1}(r_j)}{r_j^{p-1}} \asymp \sum_{j=i+1}^{\infty} \int\limits_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{R^{n-1}(x)}{x^p} \, dx = \int\limits_{r_i}^{\infty} \frac{R^{n-1}(x)}{x^p} \, dx, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Также из леммы 3.1 вытекает (3.24), где $C_\gamma = \gamma_0 2^{-p} r_0^{-p}$, $C_i > 0$ — постоянная в неравенстве (1.35) для области $\omega_i = (\Omega_i \cup \Omega_{i+1}) \cap \Omega$. Из соотношений (3.18), (3.20), (3.22), (3.25) и (3.24) следует, что построенные выше функция γ и области Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условию леммы 1.6. Построим разбиение единицы $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ так же, как и в доказательстве теоремы 3.1. Тогда для завершения доказательства остается воспользоватся теоремой 1.4.

Следствие 3.1. *Если выполнено условие* (3.17), *то область* Ω *является* p*-гиперболической.*

Доказательство. В доказательстве теоремы 3.1 было показано, что функция γ, заданная соотношением (3.19), и области Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, определенные с помощью (3.3), удовлетворяют условиям леммы 1.5. Согласно следствию 1.3, отсюда вытекает, что Ω — p-гиперболическая область.

3.2 Случай области специального типа

Пусть
$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| < x_n^\lambda,\ x_n > 1\}, \tag{3.26}$$
где $n \geqslant 2$, а $\lambda \geqslant 0$ — некоторое вещественное число. Несложно увидеть, что
$$\begin{aligned} &\Theta(r) \sim r^{\lambda-1} \ \text{ при } r \to \infty,\ \text{если } \lambda < 1,\\ &\Theta(r) \equiv \pi/4 \ \text{ при } r \geqslant r_0,\ \text{если } \lambda = 1,\\ &\Theta(r) \to \pi/2 \ \text{ при } r \to \infty,\ \text{если } \lambda > 1. \end{aligned} \tag{3.27}$$
Далее будем обозначать $\Omega_r = \Omega \cap B_r$, $r > 1$.

Предложение 3.1. *Область Ω является p-гиперболической тогда и только тогда, когда*
$$n > p \quad \text{и} \quad \lambda > (p-1)/(n-1). \tag{3.28}$$

Доказательство. Если $n \leqslant p$, то область Ω является p-параболической, поскольку в этом случае $\mathbb{R}^n$ — p-параболическое многообразие (см. предложение 1.2).

Предположим теперь, что $n > p$ и $\lambda \leqslant (p-1)/(n-1)$. Согласно (3.27), $\Theta(r) \sim r^{\lambda-1}$ при $r \to \infty$. Поэтому существует вещественное число $\rho_0 > 0$ такое, что при $r \geqslant \rho_0$ выполнено неравенство $\Theta(r) \leqslant 2r^{\lambda-1}$. Определим функцию $\varphi_{R_0,R}$ равенством (1.12), где $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — некоторая функция, равная нулю на промежутке $(-\infty, 1/4]$ и единице на промежутке $[3/4, \infty)$. Несложно увидеть, что $\varphi_{R_0,R} \in C_0^\infty(B_R)$, причем $\varphi_{R_0,R} \equiv 1$ в окрестности множества $\overline{B}_{R_0}$. При $R_0 < |x| < R$ выполнено соотношение (1.13). Переходя к координатам r, θ, θ^1, ..., θ^{n-2}, для любого $R_0 \geqslant \rho_0$ получим
$$\operatorname{cap}_{p,\Omega}(\overline{\Omega}_{R_0}, B_R) \leqslant \int\limits_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega}_{R_0}} |\nabla \varphi_{R_0,R}|^p \, dV \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|\varphi'\|^p_{C(\mathbb{R})}}{\ln^p \frac{R}{R_0}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_{R_0}^{R} \int\limits_{0}^{\Theta(r)} r^{n-p-1} \sin^{n-2}\theta \, d\theta \, dr \, dS_{n-2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|\varphi'\|^p_{C(\mathbb{R})}}{(n-1)\ln^p\frac{R}{R_0}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_{R_0}^{R} r^{n-p-1}\Theta^{n-1}(r)\,dr\,dS_{n-2} \leqslant \frac{C}{\ln^p\frac{R}{R_0}} \int\limits_{R_0}^{R} r^{\lambda(n-1)-p}\,dr, \quad (3.29)$$

где

$$C = \frac{2^{n-1}\|\varphi'\|^p_{C(\mathbb{R})}\operatorname{mes}_{n-2}\mathbb{S}^{n-2}}{n-1}.$$

Если $\lambda = (p-1)/(n-1)$, из (3.29) следует, что

$$\operatorname{cap}_{p,\Omega}(\overline{\Omega}_{R_0}, B_R) \leqslant \frac{C}{\ln^{p-1}\frac{R}{R_0}} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty,$$

откуда

$$\operatorname{cap}_{p,\Omega}(\overline{\Omega}_{R_0}) = 0. \quad (3.30)$$

Если же $\lambda < (p-1)/(n-1)$, то, устремляя R к бесконечности, из соотношения (3.29) снова получим (3.30). В силу произвольности числа $R_0 \geqslant \rho_0$, из равенства (3.30) вытекает, что $\operatorname{cap}_{p,\Omega}(\overline{\Omega}) = 0$, то есть, Ω — p-параболическая область.

Наконец, пусть $n > p$ и $\lambda > (p-1)/(n-1)$. Покажем, что в этом случае область Ω является p-гиперболической. Согласно следствию 3.1, для этого достаточно проверить выполнение условия (3.17). Предположим сначала, что $(p-1)/(n-1) < \lambda < 1$. Тогда, в силу (3.27), $R(r) \sim r^\lambda$ при $r \to \infty$. Следовательно,

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{r^{p-1}}{R^{n-1}(r)} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{R^{n-1}(t)}{t^p}\,dt = \varlimsup_{r\to\infty} r^{p-1-\lambda(n-1)} \int\limits_{r_0}^{r} t^{\lambda(n-1)-p}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda(n-1)-p+1} \varlimsup_{r\to\infty} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{p-1-\lambda(n-1)}\right) = \frac{1}{\lambda(n-1)-p+1} < \infty.$$

Если же $\lambda \geqslant 1$, то, ввиду (3.27), $R(r) \sim Cr$ при $r \to \infty$, где

$$C = \begin{cases} \pi/4, & \text{если } \lambda = 1, \\ \pi/2, & \text{если } \lambda > 1. \end{cases}$$

Тем самым,

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{r^{p-1}}{R^{n-1}(r)} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{R^{n-1}(t)}{t^p}\,dt = \varlimsup_{r\to\infty} r^{p-n} \int\limits_{r_0}^{r} t^{n-p-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{n-p} \varlimsup_{r\to\infty} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{p-n}\right) = \frac{1}{n-p} < \infty.$$

Предложение 3.1 доказано.

Пример 3.1. Пусть область Ω, определенная равенством (3.26), является p-гиперболической, причем $(p-1)/(n-1) < \lambda < 1$. Рассмотрим задачу (3), (4), где $f = 0$, $h = |x|^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

В силу (3.27), $\Theta(r) \sim r^{\lambda-1}$ при $r \to \infty$. Положим $r_0 = 2$, и пусть области Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, определены с помощью (3.3). Найдем число $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{1}{2} r^{\lambda-1} \leqslant \Theta(r) \leqslant 2r^{\lambda-1} \quad \text{при } r \geqslant r_{i_0-1} \tag{3.31}$$

и

$$2(\lambda-1)r^{\lambda-2} \leqslant \Theta'(r) \leqslant \frac{1}{2}(\lambda-1)r^{\lambda-2} \quad \text{при } r \geqslant r_{i_0-1}. \tag{3.32}$$

Заметим, что элемент объема $\partial\Omega \setminus B_{r_0}$ имеет вид

$$dS = \sqrt{1 + r^2 \left(\Theta'(r)\right)^2}\, r^{n-2} \sin^{n-2}\Theta(r)\, dr\, dS_{n-2}. \tag{3.33}$$

Из (3.32) видно, что $r\Theta'(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Поэтому существует натуральное число $k_0 \geqslant i_0$ такое, что

$$1 \leqslant \sqrt{1 + r^2 \left(\Theta'(r)\right)^2} \leqslant 2 \quad \text{при } r \geqslant r_{k_0-1}. \tag{3.34}$$

Принимая во внимание соотношения (3.31), (3.34) и выполненное при всех $r \geqslant r_0$ неравенство

$$\frac{2}{\pi}\Theta(r) \leqslant \sin\Theta(r) \leqslant \Theta(r),$$

приходим к выводу, что

$$\frac{1}{\pi^{n-2}} r^{\lambda(n-2)}\, dr\, dS_{n-2} \leqslant dS \leqslant 2^{n-1} r^{\lambda(n-2)}\, dr\, dS_{n-2} \quad \text{при } r \geqslant r_{k_0-1}. \tag{3.35}$$

Для каждого $i \geqslant k_0$ возьмем произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\Omega} \subset \Omega_i \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)} = 1.$$

Имеем

$$|(F,\varphi)| \leqslant \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} |r^\sigma \varphi|\, dS \leqslant r_{i+1}^\sigma \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} |\varphi|\, dS = 2^{(i+2)\sigma} \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} |\varphi|\, dS. \tag{3.36}$$

Заметим, что область

$$\Omega \cap \Omega_i = \{(r,\theta,\tilde{\theta}) : r \in (r_{i-1}, r_{i+1}),\, \theta \in [0,\Theta(r)),\, \tilde{\theta} \in \mathbb{S}^{n-2}\}$$

диффеоморфна множеству

$$\Omega_0 = \{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta}) : \rho \in (1,4),\, \vartheta \in [0,1),\, \tilde{\vartheta} \in \mathbb{S}^{n-2}\}.$$

В самом деле, в качестве диффеоморфизма $\Phi_i : \Omega_0 \mapsto \Omega \cap \Omega_i$ можно взять отображение, действующее по правилу

$$\Phi_i : (\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta}) \mapsto (r,\theta,\tilde{\theta}) = (r_{i-1}\rho, \vartheta\Theta(r_{i-1}\rho), \tilde{\vartheta}). \tag{3.37}$$

Якобиан J_i отображения Φ_i, очевидно, имеет вид $J_i = r_{i-1}\Theta(r_{i-1}\rho)$. Из (3.31) вытекает, что

$$2^{2\lambda-3} r_{i-1}^{\lambda-1} \leqslant \Theta(r) \leqslant 2 r_{i-1}^{\lambda-1} \quad \text{при } r \in (r_{i-1}, r_{i+1}) \tag{3.38}$$

и

$$2^{2\lambda-3} r_{i-1}^{\lambda} \leqslant J_i \leqslant 2 r_{i-1}^{\lambda}. \tag{3.39}$$

Далее в примере 3.1 через C будем обозначать всевозможные положительные постоянные, не зависящие от φ. По теореме вложения,

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} |\varphi_i|\, dS_0 \leqslant C \left(\int\limits_{\Omega_0} |\varphi_i|\, dV_0 + \int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_i|\, dV_0 \right), \tag{3.40}$$

где $\varphi_i = \varphi \circ \Phi_i$,

$$dV_0 = \rho^{n-1} \sin^{n-2} \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, dS_{n-2}, \quad dS_0 = \rho^{n-2} \sin^{n-2} 1 \, d\rho \, dS_{n-2}$$

и

$$|\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})} \varphi_i| = \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta} \tilde{g}^{lj} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta^l} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta^j} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя к соотношению (3.40) неравенство Фридрихса [32, §3.2.3]

$$\int\limits_{\Omega_0} |\varphi_i| \, dV_0 \leqslant C \int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})} \varphi_i| \, dV_0,$$

будем иметь

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} |\varphi_i| \, dS_0 \leqslant C \int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})} \varphi_i| \, dV_0,$$

откуда, ввиду неравенства Гельдера, получим

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} |\varphi_i| \, dS_0 \leqslant C \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})} \varphi_i|^p \, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.41}$$

Принимая во внимание (3.35), будем иметь

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} |\varphi_i| \, dS_0 = \sin^{n-2} 1 \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_1^4 |\varphi_i| \rho^{n-2} \, d\rho \, dS_{n-2} \geqslant$$
$$\geqslant \sin^{n-2} 1 \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_1^4 |\varphi_i| \rho^{\lambda(n-2)} \, d\rho \, dS_{n-2} \geqslant \frac{\sin^{n-2} 1}{r_{i-1}^{\lambda(n-2)+1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} |\varphi| r^{\lambda(n-2)} \, dr \, dS_{n-2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha_1}{r_{i-1}^{\lambda(n-2)+1}} \int\limits_{\partial\Omega \cap \Omega_i} |\varphi| \, dS, \tag{3.42}$$

где $\alpha_1 = 2^{1-n} \sin^{n-2} 1$. Далее, ввиду соотношения (3.32), существует постоянная

$\tilde{C} > 0$ такая, что $|r\Theta'(r)| \leqslant \tilde{C}$ при $r \geqslant r_{i_0-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho} = r_{i-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r} + r_{i-1}\vartheta\Theta'(r_{i-1}\rho)\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta} \leqslant r_{i-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r} + \tilde{C}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta},\\ &\frac{\partial\varphi_i}{\partial\vartheta} = \Theta(r_{i-1}\rho)\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta},\\ &\frac{\partial\varphi_i}{\partial\vartheta^l} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta^l}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-2, \end{aligned} \tag{3.43}$$

откуда несложно получить оценку

$$|\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_i| \leqslant \alpha_2 r_{i-1}|\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_i|,$$

где $\alpha_2 = \pi^2\max\{1, \tilde{C}\}$,

$$|\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_i| = \left(\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\tilde{g}^{lj}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta^l}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta^j}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, с учетом соотношения (3.38), получим

$$\begin{aligned} \left(\int\limits_{\Omega_0}|\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_i|^p\,dV_0\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \alpha_2 r_{i-1}\left(\int\limits_{\Omega_0}|\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_i|^p\rho^{n-1}\sin^{n-2}\vartheta\,d\rho\,d\vartheta\,dS_{n-2}\right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \alpha_2 r_{i-1}\left(\int\limits_{\Omega\cap\Omega_i}|\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi|^p\left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)^{n-1}\sin^{n-2}\frac{\theta}{\Theta(r)}\frac{1}{J_i}\,dr\,d\theta\,dS_{n-2}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\ &\leqslant \alpha_2 r_{i-1}^{1-\frac{n}{p}}\left(\int\limits_{\Omega\cap\Omega_i}|\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi|^p r^{n-1}\theta^{n-2}\Theta^{1-n}(r)\,dr\,d\theta\,dS_{n-2}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-2}{p}}2^{(2\lambda-3)(1-n)/p}\alpha_2 r_{i-1}^{1+\frac{\lambda(1-n)-1}{p}}\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi|^p\,dV\right)^{\frac{1}{p}} = \alpha_3 r_{i-1}^{1+\frac{\lambda(1-n)-1}{p}}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

где

$$\alpha_3 = \pi^{\frac{n-2}{p}}2^{\frac{2(1-n)(\lambda-1)+1}{p}}.$$

Объединяя соотношения (3.41), (3.42) и (3.44), приходим к выводу, что

$$\int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} |\varphi|\, dS \leqslant \alpha_4 r_{i-1}^{\lambda(n-2)+\frac{\lambda(1-n)-1}{p}+2} = \alpha_4 2^{i\left(\frac{\lambda n(p-1)}{p}+(1-\lambda)\left(2-\frac{1}{p}\right)\right)}, \tag{3.45}$$

где $\alpha_4 = C\alpha_3/\alpha_1$. Таким образом, из (3.36) и (3.45) вытекает оценка

$$N_{\Omega_i}(F) \leqslant \alpha_5 2^{i\left(\sigma+\frac{\lambda n(p-1)}{p}+(1-\lambda)\left(2-\frac{1}{p}\right)\right)}, \quad i \geqslant k_0, \tag{3.46}$$

где постоянная $\alpha_5 = 4^\sigma \alpha_4$ не зависит от i.

Зафиксируем теперь произвольную неотрицательную функцию $\varphi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}_0 \cap (B_4 \setminus \overline{B}_1))$, зависящую только от ρ, такую, что

$$\operatorname{supp}\varphi_0 \subset \overline{\Omega}_0 \cap (B_4 \setminus \overline{B}_1) \quad \text{и} \quad \|\varphi_0\|_{L^1_p(\Omega_0)} \neq 0.$$

Для каждого $i \geqslant k_0$ обозначим через $\varphi_{0,i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ произвольное продолжение функции $\varphi_0 \circ \Phi_i^{-1} : \overline{\Omega} \cap \Omega_i \to \mathbb{R}$ такое, что $\varphi_{0,i} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp}\varphi_{0,i} \cap \overline{\Omega} \subset \Omega_i$ для каждого $i \geqslant k_0$. Имеем

$$|(F, \varphi_{0,i})| = \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} r^\sigma \varphi_{0,i}\, dS \geqslant r_{i-1}^\sigma \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} \varphi_{0,i}\, dS = 2^{i\sigma} \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} \varphi_{0,i}\, dS \tag{3.47}$$

для всех $i \geqslant k_0$. Далее, используя соотношение (3.35), получим

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Omega_0} \varphi_0\, dS_0 &= \sin^{n-2} 1 \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_1^4 \varphi_0 \rho^{n-2}\, d\rho\, dS_{n-2} \leqslant \\
&\leqslant 4^{(1-\lambda)(n-2)} \sin^{n-2} 1 \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_1^4 \varphi_0 \rho^{\lambda(n-2)}\, d\rho\, dS_{n-2} = \\
&= \frac{4^{(1-\lambda)(n-2)} \sin^{n-2} 1}{r_{i-1}^{\lambda(n-2)+1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \varphi_{0,i} r^{\lambda(n-2)}\, dr\, dS_{n-2} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\alpha_6}{r_{i-1}^{\lambda(n-2)+1}} \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} \varphi_{0,i}\, dS = \frac{\alpha_6}{2^{i(\lambda(n-2)+1)}} \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} \varphi_{0,i}\, dS
\end{aligned} \tag{3.48}$$

для всех $i \geqslant k_0$, где $\alpha_6 = \pi^{n-2} 4^{(1-\lambda)(n-2)} \sin^{n-2} 1$. Из (3.47) и (3.48) следует, что

$$|(F, \varphi_{0,i})| \geqslant \alpha_7 2^{i(\sigma+\lambda(n-2)+1)} \tag{3.49}$$

для всех $i \geqslant k_0$, где

$$\alpha_7 = \frac{1}{\alpha_6} \int\limits_{\partial\Omega_0} \varphi_0 \, dS_0.$$

Так как

$$|\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_0| = r_{i-1} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_0|,$$

то, принимая во внимание (3.38), будем иметь

$$\left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_0|^p \, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}} = r_{i-1} \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_0|^p \rho^{n-1} \sin^{n-2}\vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, dS_{n-2} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= r_{i-1} \left(\int\limits_{\Omega\cap\Omega_i} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_{0,i}|^p \left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)^{n-1} \sin^{n-2}\frac{\theta}{\Theta(r)} \frac{1}{J_i} \, dr \, d\theta \, dS_{n-2} \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n-2}{p}} r_{i-1}^{1-\frac{n}{p}} \left(\int\limits_{\Omega\cap\Omega_i} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_{0,i}|^p r^{n-1} \theta^{n-2} \Theta^{1-n}(r) \, dr \, d\theta \, dS_{n-2} \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_8 r_{i-1}^{1+\frac{\lambda(1-n)-1}{p}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_{0,i}|^p \, dV \right)^{\frac{1}{p}} = \alpha_8 r_{i-1}^{1+\frac{\lambda(1-n)-1}{p}} \|\varphi_{0,i}\|_{L_p^1(\Omega)}$$

для всех $i \geqslant k_0$, где $\alpha_8 = 2^{-1/p}\pi^{(2-n)/p}$. Тем самым,

$$\|\varphi_{0,i}\|_{L_p^1(\Omega)} \leqslant \alpha_9 r_{i-1}^{\frac{\lambda(n-1)+1}{p}-1} = \alpha_9 2^{i\left(\frac{\lambda(n-1)+1}{p}-1\right)} \tag{3.50}$$

для всех $i \geqslant k_0$, где

$$\alpha_9 = \frac{1}{\alpha_8} \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_0|^p \, dV_0 \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, из (3.49) и (3.50) вытекает соотношение

$$N_{\Omega_i}(F) \geqslant \frac{|(F,\varphi_{0,i})|}{\|\varphi_{0,i}\|_{L^1_p(\Omega)}} \geqslant \alpha_{10} r_{i-1}^{\sigma+\lambda(n-2)+\frac{\lambda(1-n)-1}{p}+2} = \\ = \alpha_{10} 2^{i\left(\sigma+\frac{\lambda n(p-1)}{p}+(1-\lambda)\left(2-\frac{1}{p}\right)\right)}, \quad i \geqslant k_0,$$

где $\alpha_{10} = \alpha_7/\alpha_9$, объединяя которое с (3.46), приходим к выводу, что

$$N_{\Omega_i}(F) \asymp 2^{i\left(\sigma+\frac{\lambda n(p-1)}{p}+(1-\lambda)\left(2-\frac{1}{p}\right)\right)} \quad \text{при } i \to \infty. \tag{3.51}$$

Заметим теперь, что $N_{\Omega_1}(F) < \infty$. В самом деле, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\Omega} \subset \Omega_1 \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)} = 1,$$

согласно теореме вложения, имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_1} |\varphi|\, dS \leqslant \tilde{C}_1 \left(\int\limits_{\Omega_1\cap\Omega} |\varphi|\, dV + \int\limits_{\Omega_1\cap\Omega} |\nabla\varphi|\, dV \right),$$

где постоянная $\tilde{C}_1$ не зависит от φ. Применяя к последнему соотношению неравенство Фридрихса [32, §3.2.3]

$$\int\limits_{\Omega_1\cap\Omega} |\varphi|\, dV \leqslant \tilde{C}_2 \int\limits_{\Omega_1\cap\Omega} |\nabla\varphi|\, dV,$$

где постоянная $\tilde{C}_2$ не зависит от φ, будем иметь

$$\int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_1} |\varphi|\, dS \leqslant \tilde{C}_3 \int\limits_{\Omega_1\cap\Omega} |\nabla\varphi|\, dV,$$

где постоянная $\tilde{C}_3$ не зависит от φ, откуда, ввиду неравенства Гельдера, получим

$$\int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_1} |\varphi|\, dS \leqslant \tilde{C}_4 \left(\int\limits_{\Omega_1\cap\Omega} |\nabla\varphi|^p\, dV \right)^{\frac{1}{p}} = \tilde{C}_4,$$

где постоянная $\tilde{C}_4$ не зависит от φ. Поэтому

$$|(F,\varphi)| \leqslant \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_1} |r^\sigma \varphi|\, dV \leqslant 8^\sigma \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_1} |\varphi|\, dV \leqslant 8^\sigma \tilde{C}_4 < \infty,$$

Аналогично, $N_{\Omega_i}(F) < \infty$ при $i \geqslant 2$. Таким образом, ввиду оценки (3.51) и теоремы 3.1, получим, что задача (3), (4) имеет решение в том и только том случае, когда

$$\sigma < -\frac{\lambda n(p-1)}{p} - (1-\lambda)\left(2 - \frac{1}{p}\right).$$

Пример 3.2. Пусть область Ω, определенная равенством (3.26), является p-гиперболической, причем $\lambda \geqslant 1$. Рассмотрим задачу (3), (4), где $f = 0$, $h = |x|^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Положим $r_0 = 2$, и пусть области Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, определены с помощью (3.3). В силу (3.27), существует натуральное число i_0 такое, что $\pi/4 \leqslant R'(r) \leqslant \pi$ при $r \geqslant r_{i_0-1}$. Поэтому

$$r\Theta'(r) \leqslant \pi \quad \text{при } r \geqslant r_{i_0-1} \tag{3.52}$$

и

$$1 \leqslant \sqrt{1 + r^2\left(\Theta'(r)\right)^2} \leqslant 4 \quad \text{при } r \geqslant r_{i_0-1}. \tag{3.53}$$

При этом, очевидно,

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \Theta(r) \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{при } r \geqslant r_0. \tag{3.54}$$

Из оценок (3.53) и (3.54) вытекает, что элемент объема dS множества $\partial\Omega \setminus B_{r_0}$, имеющий вид (3.33), удовлетворяет соотношению

$$2^{2-n} r^{n-2}\, dr\, dS_{n-2} \leqslant dS \leqslant 4r^{n-2}\, dr\, dS_{n-2} \quad \text{при } r \geqslant r_{i_0-1}. \tag{3.55}$$

Для каждого $i \geqslant k_0$ возьмем произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\Omega} \subset \Omega_i \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)} = 1.$$

Тогда имеет место (3.36). Заметим, что область

$$\Omega \cap \Omega_i = \{(r,\theta,\tilde{\theta}) : r \in (r_{i-1}, r_{i+1}),\, \theta \in [0, \Theta(r)),\, \tilde{\theta} \in \mathbb{S}^{n-2}\}$$

диффеоморфна множеству

$$\Omega_0 = \{(\rho, \vartheta, \tilde{\vartheta}) : \rho \in (1,4),\ \vartheta \in [0,1),\ \tilde{\vartheta} \in \mathbb{S}^{n-2}\}.$$

В самом деле, в качестве диффеоморфизма $\Phi_i : \Omega_0 \mapsto \Omega \cap \Omega_i$ можно взять отображение, действующее по правилу (3.37). Якобиан J_i отображения Φ_i, очевидно, имеет вид $J_i = r_{i-1}\Theta(r_{i-1}\rho)$. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в примере 3.1, можно получить неравенство (3.41), где постоянная $C > 0$ не зависит от φ. Ввиду (3.55), имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} |\varphi_i|\, dS_0 = \sin^{n-2} 1 \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_1^4 |\varphi_i| \rho^{n-2}\, d\rho\, dS_{n-2} =$$

$$= \frac{\sin^{n-2} 1}{r_{i-1}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} |\varphi| r^{n-2}\, dr\, dS_{n-2} \geqslant \frac{\alpha_1}{r_{i-1}^{n-1}} \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} |\varphi|\, dS, \quad (3.56)$$

где $\alpha_1 = \sin^{n-2} 1/4$. Далее, в силу (3.52), выполнены соотношения (3.43), где $\tilde{C} = \pi$. Следовательно,

$$|\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_i| \leqslant \pi^3 r_{i-1} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_i|,$$

откуда, с учетом (3.54), получим

$$\left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_i|^p\, dV_0\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \pi^3 r_{i-1} \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_i|^p \rho^{n-1} \sin^{n-2}\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, dS_{n-2}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \pi^3 r_{i-1} \left(\int\limits_{\Omega\cap\Omega_i} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi|^p \left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)^{n-1} \sin^{n-2}\frac{\theta}{\Theta(r)} \frac{1}{J_i}\, dr\, d\theta\, dS_{n-2}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \pi^3 r_{i-1}^{1-\frac{n}{p}} \left(\int\limits_{\Omega\cap\Omega_i} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi|^p r^{n-1}\theta^{n-2}\Theta^{1-n}(r)\, dr\, d\theta\, dS_{n-2}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-2}{p}} \pi^3 \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1-n}{p}} r_{i-1}^{1-\frac{n}{p}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi|^p\, dV\right)^{\frac{1}{p}} = \alpha_2 r_{i-1}^{1-\frac{n}{p}}, \quad (3.57)$$

где $\alpha_2 = \pi^{3-1/p} 2^{n/p}$. Объединяя соотношения (3.41), (3.56) и (3.57), приходим к выводу, что

$$\int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} |\varphi|\, dS \leqslant \alpha_3 r_{i-1}^{\frac{n(p-1)}{p}} = \alpha_3 2^{\frac{in(p-1)}{p}}, \tag{3.58}$$

где $\alpha_3 = C\alpha_2/\alpha_1$. Таким образом, из (3.36) и (3.58) вытекает оценка

$$N_{\Omega_i}(F) \leqslant \alpha_4 2^{i\left(\sigma + \frac{n(p-1)}{p}\right)}, \quad i \geqslant i_0, \tag{3.59}$$

где постоянная $\alpha_4 = 4^\sigma \alpha_3$ не зависит от i.

Зафиксируем теперь произвольную неотрицательную функцию $\varphi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}_0 \cap (B_4 \setminus \overline{B}_1))$, зависящую только от ρ, такую, что

$$\operatorname{supp} \varphi_0 \subset \overline{\Omega}_0 \cap (B_4 \setminus \overline{B}_1) \quad \text{и} \quad \|\varphi_0\|_{L_p^1(\Omega_0)} \neq 0.$$

Для каждого $i \geqslant i_0$ обозначим через $\varphi_{0,i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ произвольное продолжение функции $\varphi_0 \circ \Phi_i^{-1} : \overline{\Omega} \cap \Omega_i \to \mathbb{R}$ такое, что $\varphi_{0,i} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \varphi_{0,i} \cap \overline{\Omega} \subset \Omega_i$ для каждого $i \geqslant i_0$. Заметим, что имеет место (3.47) для всех $i \geqslant i_0$. Далее, используя соотношение (3.55), получим

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Omega_0} \varphi_0\, dS_0 &= \sin^{n-2} 1 \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_1^4 \varphi_0 \rho^{n-2}\, d\rho\, dS_{n-2} = \\
&= \frac{\sin^{n-2} 1}{r_{i-1}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \varphi_{0,i} r^{n-2}\, dr\, dS_{n-2} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\alpha_5}{r_{i-1}^{n-1}} \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} \varphi_{0,i}\, dS = \frac{\alpha_5}{2^{i(n-1)}} \int\limits_{\partial\Omega\cap\Omega_i} \varphi_{0,i}\, dS
\end{aligned} \tag{3.60}$$

для всех $i \geqslant i_0$, где $\alpha_5 = 2^{n-2} \sin^{n-2} 1$. Из (3.47) и (3.60) следует, что

$$|(F, \varphi_{0,i})| \geqslant \alpha_6 2^{i(\sigma+n-1)} \tag{3.61}$$

для всех $i \geqslant i_0$, где

$$\alpha_6 = \frac{1}{\alpha_5} \int\limits_{\partial\Omega_0} \varphi_0\, dS_0.$$

Так как

$$|\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_0| = r_{i-1}|\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_0|,$$

то, принимая во внимание (3.54), будем иметь

$$\left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_0|^p \, dV_0\right)^{\frac{1}{p}} = r_{i-1}\left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_0|^p \rho^{n-1}\sin^{n-2}\vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, dS_{n-2}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= r_{i-1}\left(\int\limits_{\Omega\cap\Omega_i} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_{0,i}|^p \left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)^{n-1}\sin^{n-2}\frac{\theta}{\Theta(r)}\frac{1}{J_i}\, dr\, d\theta\, dS_{n-2}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n-2}{p}} r_{i-1}^{1-\frac{n}{p}}\left(\int\limits_{\Omega\cap\Omega_i} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_{0,i}|^p r^{n-1}\theta^{n-2}\Theta^{1-n}(r)\, dr\, d\theta\, dS_{n-2}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_7 r_{i-1}^{1-\frac{n}{p}}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla_{(r,\theta,\tilde{\theta})}\varphi_{0,i}|^p \, dV\right)^{\frac{1}{p}} = \alpha_7 r_{i-1}^{1-\frac{n}{p}}\|\varphi_{0,i}\|_{L_p^1(\Omega)}$$

для всех $i \geqslant i_0$, где

$$\alpha_7 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3-2n}{p}}.$$

Тем самым,

$$\|\varphi_{0,i}\|_{L_p^1(\Omega)} \leqslant \alpha_8 r_{i-1}^{\frac{n}{p}-1} = \alpha_8 2^{i\left(\frac{n}{p}-1\right)} \tag{3.62}$$

для всех $i \geqslant i_0$, где

$$\alpha_8 = \frac{1}{\alpha_7}\left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla_{(\rho,\vartheta,\tilde{\vartheta})}\varphi_0|^p \, dV_0\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, из (3.61) и (3.62) вытекает соотношение

$$N_{\Omega_i}(F) \geqslant \frac{|(F,\varphi_{0,i})|}{\|\varphi_{0,i}\|_{L_p^1(\Omega)}} \geqslant \alpha_9 r_{i-1}^{\sigma+\frac{n(p-1)}{p}} = \alpha_9 2^{i\left(\sigma+\frac{n(p-1)}{p}\right)}, \quad i \geqslant i_0,$$

где $\alpha_9 = \alpha_6/\alpha_8$, объединяя которое с (3.59), приходим к выводу, что

$$N_{\Omega_i}(F) \asymp 2^{i\left(\sigma+\frac{n(p-1)}{p}\right)} \quad \text{при } i \to \infty. \tag{3.63}$$

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в примере 3.1, можно показать, что $N_{\Omega_i}(F) < \infty$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, ввиду оценки (3.63) и теоремы 3.1, получим, что задача (3), (4) имеет решение в том и только том случае, когда

$$\sigma < -\frac{n(p-1)}{p}.$$

Замечание 3.1. *Если область Ω, определенная равенством* (3.26), *является p-параболической, то решение задачи* (3), (4), *где $f = 0$, $h = |x|^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, не существует ни при каких σ.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность функций $\eta_s \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условиям (1.20), где $K \subset \overline{\Omega}$ — некоторый компакт положительной меры. Заметим, что из этой последовательности можно выделить подпоследовательность η_{s_i}, $i \in \mathbb{N}$, такую, что $\eta_{s_i} \to 1$ почти всюду на Ω при $i \to \infty$. Поскольку η_{s_i} — непрерывные функции, $\eta_{s_i} \to 1$ почти всюду на $\partial\Omega$ при $i \to \infty$. По теореме Егорова, существует множество $E \subset \partial\Omega$ такое, что $\operatorname{mes}_{n-1} E > 0$ и последовательность η_{s_i}, $i \in \mathbb{N}$, равномерно сходится к единице на E при $i \to \infty$. Тем самым, существует натуральное число i_0 такое, что при $i \geqslant i_0$

$$\eta_{s_i} \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{на } E.$$

Поэтому при $i \geqslant i_0$

$$(F, \eta_{s_i}) = -\int\limits_{\partial\Omega} |x|^\sigma \eta_{s_i}\, dS \leqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{E} |x|^\sigma\, dS < 0.$$

Таким образом, условие (1.19) не выполнено, и, согласно теореме 3.2, задача (3), (4) не имеет решение.

Заключение

В настоящей диссертации получены необходимые и достаточные условия разрешимости второй краевой задачи для p-лапласиана в областях на римановых многообразиях. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае функцонала F общего вида. Отдельно рассмотрен случай функцонала F с компактным носителем.

2. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда M является многообразием с модельными концами и $\Omega = M \setminus \partial M$.

3. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, а Ω — область, образованная вращением графика липшицевой функции.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с обобщением полученных результатов на внешние формы и тензоры произвольного ранга.

Список литературы

[1] Бакиев С. М., Коньков А. А. О существовании решений задачи Дирихле для p-лапласиана на римановых многообразиях // Матем. заметки. 2023. Т. 114. № 5. С. 659–668.

[2] Вишик М. И. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму // Тр. ММО. 1963. Т. 12. С. 125–184.

[3] Гадыльшин Р. Р., Чечкин Г. А. Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. матем. журнал. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.

[4] Григорьян А. А. О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях // Матем. сб. 1985. Т. 170. № 3. С. 354–363.

[5] Григорьян А. А. О лиувиллевых теоремах для гармонических функций с конечным интегралом Дирихле // Матем. сб. 1987. Т. 174. № 4. С. 496–516.

[6] Григорьян А. А. О размерности пространств гармонических функций // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 55–61.

[7] Григорьян А. А., Лосев А. Г. О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // Матем. физика и компьют. моделирование. 2017. Т. 20. № 3. С. 34–42.

[8] Григорьян А. А., Надирашвили Н. С. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи // Изв. вузов. Матем. 1987. № 5. С. 25–33.

[9] Денисов В. Н. Необходимые и достаточные условия стабилизации решения первой краевой задачи для параболического уравнения // Труды семинара имени И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 248–280.

[10] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

[11] Кесельман В. М. О римановых многообразиях α-параболического типа // Изв. вузов. Матем. 1985. № 4. С. 81–83.

[12] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1986. Т. 135. № 3. С. 346–360.

[13] Кондратьев В. А., Олейник О. А. О периодических по времени решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1985. № 4. С. 38–47.

[14] Коньков А. А. Теоремы единственности для эллиптических уравнений в неограниченных областях: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 19.05.1989 // Коньков Андрей александрович. — Москва, 1988. 142 стр.

[15] Коньков А. А. О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 23–52.

[16] Коньков А. А. О пространстве решений эллиптических уравнений на римановых многообразиях // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 5. С. 805–813.

[17] Коньков А. А. Поведение решений квазилинейных эллиптических неравенств // СМФН. 2004. Т. 7. С. 3–158.

[18] Корольков С. А., Лосев А. Г. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Мат. Физ. 2011. № 1. С. 23–40.

[19] Кудрявцев Л. Д. Решение первой краевой задачи для самосопряженных эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1967. Т. 31. № 5. С. 1179–1199.

[20] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи со многими независимыми переменными // УМН. 1961. Т. 16. № 1. С. 19–90.

[21] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

[22] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Пер. с фр. М.: Мир, 1972.

[23] Лосев А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Матем. 1991. № 12. С. 15–24.

[24] Лосев А. Г. О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журнал. 1998. Т. 39. № 1. С. 87–93.

[25] Лосев А. Г. Гармонические потенциалы на некомпактных римановых многообразиях // Матем. физика и компьют. моделирование. 2024. Т. 27. № 3. С. 6–14.

[26] Лосев А. Г., Мазепа Е. А. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 1. С. 84–110.

[27] Лосев А. Г., Филатов В. В. О некоторых емкостных характеристиках некомпактных римановых многообразий // Изв. вузов. Матем. 2021. № 3. С. 67–75.

[28] Мазепа Е. А. Краевые задачи и лиувиллевы теоремы для полулинейных эллиптических уравнений на римановых многообразиях // Изв. вузов. Матем. 2005. № 3. С. 59–66.

[29] Мазепа Е. А. О существовании целых решений одного полулинейного эллиптического уравнения на некомпактных римановых многообразиях // Матем. заметки. 2007. Т. 81. № 1. С. 153–156.

[30] Мазепа Е. А. Лиувиллево свойство и краевые задачи для полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журнал. 2012. Т. 53. № 1. С. 165–179.

[31] Мазепа Е. А. О разрешимости краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 1026–1034.

[32] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

[33] Мазья В. Г., Поборчий С. В. О разрешимости задачи Неймана в области с пиком // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 5. С. 109–154.

[34] Миклюков В. М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей // Изв. РАН. Сер. Матем. 1996. Т. 60. № 4. С. 111–158.

[35] Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.

[36] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[37] Надирашвили Н. С. Об одной теореме лиувиллева типа на римановом многообразии // УМН. 1985. Т. 40. № 5. С. 259–260.

[38] Anderson M. T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 701–721.

[39] Aris R. The Mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts. Oxford: Clarendon Press, 1975.

[40] Auchmuty G., Han Q. p-Laplacian boundary value problems on exterior regions // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 417. № 1. P. 260–271.

[41] Bognar G. Numerical and analytic investigation of some nonlinear problems in fluid mechanics // Comput. Simul. Mod. Sci. 2008. V. 2. P. 172–179.

[42] Cheng S. Y., Yau S. T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. № 3. P. 333–354.

[43] Davies E. B. L^1 properties of second order elliptic operators // Bull. London Math. Soc. 1985. V. 17. № 5. P. 417-436.

[44] Diaz J. I., Hernandez J., Tello L. On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in climatology // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 216. № 2. P. 593–613.

[45] Donnelly H. Bounded harmonic functions and positive Ricci curvature // Math. Z. 1986. V. 191. P. 559–565.

[46] Evans C. L. A new proof of local $C^{1,\alpha}$ regularity for solutions of certain degenerate elliptic P.D.E. // J. Differ. Equ. 1982. V. 45. P. 356–373.

[47] Fernandez J. L. On the existence of Green's function on Riemannian manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 96. P. 284–286.

[48] Franca M. Radial ground states and singular ground states for a spatial-dependent p-Laplace equation // J. Differ. Equ. 2010. V. 218. P. 2629–2656.

[49] Franchi B., Lanconelli E., Serrin J. Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in $\mathbb{R}^n$ // Adv. Math. 1996. V. 118. № 2. P. 177–243.

[50] Glowinski R., Rappaz J. Approximation of a nonlinear elliptic problem arising in a non-Newtonian fluid model in glaciology // M2AN Math. Model. Numer. Anal. 2003. V. 37. № 1. P. 175–186.

[51] Grigor'yan A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 135–249.

[52] Holopainen I. Solutions of elliptic equations on manifolds with roughly Euclidean ends // Math. Z. 1994. V. 217. P. 459–477.

[53] Holopainen I. Volume growth, Green's functions and parabolicity of ends // Duke Math. J. 1999. V. 97. № 2. P. 319–346.

[54] Karp L. Subharmonic functions, harmonic mappings and isometric immersions // Ann. Math. Studies. 1982. № 102. P. 133–142.

[55] Korolkov S. A., Losev A. G. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // Math. Z. 2012. V. 272. № 1–2. P. 459–472.

[56] Lewis J. L. Smoothness of certain degenerate elliptic equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 80. P. 201–224.

[57] Lewis J. L. Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations // Indiana Univ. Math. J. 1983. V. 32. № 6. P. 849–858.

[58] Li P., Tam L. F. Positive harmonic functions on complete manifolds with non-negative curvature outside a compact set // Ann. Math. 1987. V. 125. P. 171–207.

[59] Li P., Tam L. F. Harmonic functions and the structure of complete manifolds // J. Diff. Geom. 1992. V. 35. № 2. P. 359–383.

[60] Li P., Yau S. T. On the parabolic kernel of the Schrodinger operator // Acta Math. 1986. V. 156. P. 153—201.

[61] Losev A. G., Filatov V. V. Dimensions of solution spaces of the Schrodinger equation with finite Dirichlet integral on non-compact Riemannian manifolds // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. P. 1363–1370.

[62] Losev A. G., Mazepa E. A. On solvability of the boundary value problems for harmonic function on noncompact Riemannian manifolds // Пробл. анал. Issues Anal. 2019. V. 8(26). № 3. P. 73–82.

[63] Lyons T., Sullivan D. Function theory, random paths and covering spaces // J. Diff. Geom. 1984. V. 19. № 2. P. 299-323.

[64] Maz'ya V. Solvability criteria for the Neumann p-Laplacian with irregular data // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 3. С. 129–139.

[65] Milnor J. On Deciding Whether a Surface Is Parabolic or Hyperbolic // Amer. Math. Monthly. 1977. V. 84. № 1. P. 43–46.

[66] Murata M. Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds // Potential Theory. Walter de Gruyter. Berlin. 1992. P. 251–259.

[67] Otani M. A remark on certain nonlinear elliptic equations // Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. 1984. V. 19. P. 23—28.

[68] Pigola S., Rigoli M., Setti A. G. Some non-linear function theoretic properties of Riemannian manifolds // Rev. Mat. Iberoamericana. 2006. V. 22. № 3. P. 801–831.

[69] Pigola S., Rigoli M., Setti A. G. Aspects of potential theory on manifolds, linear and non-linear // Milan J. Math. 2008. V. 76. P. 229—256.

[70] Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations // Acta Math. 1964. V. 111. P. 247—302.

[71] Sturm K.-T. Analysis on local Dirichlet spaces I. Recurrence, conservativeness and L^p-Liouville properties // J. Reine. Angew. Math. 1994. V. 456. P. 173—196.

[72] Sullivan D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 723–732.

[73] Sung C. J., Tam L. F., Wang J. Spaces of Harmonic Functions // J. London Math. Soc. 2000. V. 61. № 3. P. 789–806.

[74] Ulenbeck K. Regularity for a class of nonlinear elliptic systems // Acta Math. 1977. V. 138. P. 219—240.

[75] Yau S. T. Harmornic function on complete Riemannian manifolds // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. P. 201–228.

[76] Yau S. T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry // Indiana Univ. Math. J. 1976. V. 25. № 7. P. 659–670.

[77] Yau S. T. Nonlinear analysis in geometry // Enseign. Math. 1987. V. 33. № 2. P. 109–158.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.8 по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика и входящих в базы цитирования Web of Science, Scopus и RSCI

[78] Бровкин В. В., Коньков А. А. О существовании решений второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых многообразиях // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 2. С. 180–195.

[79] Бровкин В. В. О существовании решений задачи Неймана для p-лапласиана на гиперболических многообразиях с модельным концом // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 139–141.

[80] Бровкин В. В. О существовании решений задачи Неймана для p-лапласиана на параболических многообразиях с модельным концом // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 1. С. 30–34.

[81] Бровкин В. В. О разрешимости задачи Неймана для p-лапласиана на многообразиях с модельным концом // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. № 3. С. 3–10.

Тезисы докладов в материалах научных конференций

[82] Бровкин В. В. О задаче Неймана для p-лапласиана на многообразиях с модельным концом // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов-2023. МАКС Пресс Москва, 2023. С. 1–2.

[83] Бровкин В. В. О задаче Неймана для p-лапласиана на многообразиях специального типа // Тезисы докладов Международной конференции по Дифференциальным уравнениям и динамическим системам DIFF-2024 и Международной школы молодых ученых "Моделирование и оптимизация сложных систем" MOCS-2024, ВлГУ Владимир. С. 117–118.

[84] Бровкин В. В. О задаче Неймана для p-лапласиана в неограниченных областях // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов-2025. МАКС Пресс Москва, 2025. С. 1–1.

[85] Бровкин В. В. О существовании решений задачи Неймана в областях на римановых многообразиях // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной И. Г. Петровскому. Ленанд Москва, 2025. С. 110–112.