ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Пустовойтова Сергея Евгеньевича
на тему: «Топология и классификация слоений Лиувилля интегрируемых возмущений классических и топологических биллиардов»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Диссертация Сергея Евгеньевича Пустовойтова посвящена одному из центральных вопросов, возникающих во многих задачах дифференциальной геометрии, теории динамических систем, классической механики, математической физики, – вопросу интегрируемости. Грубо говоря, интегрируемость – это “решаемость” системы, поскольку изначальный смысл слова “проинтегрировать” как раз заключался в том, чтобы найти решение. Более обще, интегрируемость выделяет достаточно узкий класс динамических систем, которые могут быть точно проинтегрированы, что накладывает существенные ограничения на геометрию фазовых пространств интегрируемых систем вместе с некоторыми геометрическими свойствами, исследованиями которых занимается множество геометров в самых разных областях математики. Например, очень популярным на сегодня являются исследования по торической геометрии, в фокусе которой фазовые пространства с наиболее правильным торическим действием, регулярно вырождающимся на компонентах правильной коразмерности. В таких терминах, например, формулируются конструкции Зеркальной симметрии.

Фазовое пространство вполне интегрируемой системы является геометрическим и топологическим объектом, и естественная задача – классификации интегрируемых систем – может быть произведена исходя из геометрических и топологических свойств фазовых пространств. Один из важных методов классификации был предложен А.Т. Фоменко: вводится понятие лиувиллевой эквивалентности интегрируемых систем и затем предлагается система неполных инвариантов (грубые молекулы) и инвариантов Фоменко-Цишанга (меченые молекулы), при этом оказывается, что две интегрируемые системы лиувиллево эквивалентны, когда и только когда их меченые молекулы совпадают.

С другой стороны, задача классификации требует выделения некоторого образцового класса интегрируемых систем, который бы служил “базисом”. Таким подходящим классом оказался класс интегриуемых биллиардов и их обобщений.

Классическая теорема об интегрируемости плоского биллиарда, ограниченного эллипсом, полученная Дж. Биркгофом, была обобщена В.В. Козловым и Д.В. Трещевым на области с кусочно-гладкими границами, составленными из дуг софокусных квадрик. Далее оказалось, что такие куски можно склеивать в более сложные конфигурации, названные топологическими биллиардами, а затем в работах В.В. Ведюшкиной было показано, что из таких кусочков можно составлять целые комплексы (биллиардные книжки), причем соответствующая система остается интегрируемой. Именно такие системы и оказываются подходящим базисом для классификации интегрируемых систем с двумя степенями свободы по модулю лиувиллевой эквивалентности.

Подробные исследования известных гипотез А.Т. Фоменко, часть из которых была доказана в работах В.В.Ведюшкиной, привели к необходимости рассматривать добавочные данные – магнитные поля или потенциалы, интерпретируемые как возмущение исходных симплектических структур (или скобок Пуассона) на фазовых пространствах. В общем случае подобные возмущения разрушают интегрируемость, – что ожидаемо, поскольку интегрируемость есть очень выделенное условие, но тем интереснее исследовать именно те деформации, которые интегрируемость не нарушают. Вместе с уже известными модельными примерами этим пополняется “копилка” стандартных представителей фазовых пространств вполне интегрируемых систем по модулю лиувиллевой эквивалентности.

Основные результаты диссертационной работы С.Е. Пустовойтова связаны с конкретными вычислениями инвариантов – бифуркационных диаграмм и, более тонких, инвариантов Фоменко-Цишанга – для математических и топологических биллиардов с потенциалами, не нарушающими интегрируемость систем. Но какие деформации не нарушают интегрируемость – необходимо было установить прежде всего, и здесь выделенным является результат третьей главы диссертации, представляющий явный вид потенциала, сохраняющего интегрируемость плоского эллиптического биллиарда. Для этого автор приводит элегантное решение уравнения, выведенного В.В. Козловым на такой потенциал, в эллиптических координатах. Далее, заложив необходимый фундамент, автор диссертации в такой ситуации разрабатывает алгоритм вычисления инварианта Фоменко-Цишанга, описывающего слоение Лиувилля на неособой изоэнергетической поверхности. Далее результаты можно подразбить по виду рассматриваемых более специальных потенциалов: потенциала Гука и полиномиального потенциала четвертой степени. В последнем случае получены полные списки слоений Лиувилля четырехмерных окрестностей особых слоев в случаях, когда слой или содержит невырожденную особую точку ранга нуль, или содержит вырожденную орбиту ранга один потока первых интегралов. Случай потенциала Гука проиллюстрирован в том числе вычислением числовой меток монодромии для биллиардной книжки, склеенной из n копий кругового биллиарда.

Особый интерес вызывает приведенный диссертантом подытоживающий список интегрируемых систем физики и механики, лиувиллево эквивалентных биллиардам, классифицированным в диссертации.

Текст диссертации на 207 страницах содержит введение, пять глав, заключение и список литературы из 43 наименований, включающий в себя 7 работ автора по теме диссертации.

Во **введении** представлены объекты исследования, используемые методы и основные результаты автора. Также приведен научный контекст, в рамках которого лежит исследование, а именно истоки теории интегрируемых биллиардов и актуальное положение этой теории. Далее, представлены основные положения, которые автор выносит на защиту диссертации.

Первая глава посвящена фундаментальной теории, на которой построено исследование. В ней излагаются основные положения теории функций Морса, симплектической геометрии, теории интегрируемых систем и математических биллиардов. В частности, автор дает определения буфуркационной диаграммы, инвариантов Фоменко-Цишанга, конструкции почти прямого произведения Н.Т. Зунга, которыми непосредственно пользуется в своей работе.

Вторая глава посвящена плоским интегрируемым биллиардам, содержащим потенциал Гука. На основе классификации локально плоских биллиардов, предложенной В.В. Ведюшкиной, автор разбивает биллиарды с потенциалом Гука, ограниченные софокусными эллипсами и гиперболами, на 12 типов, и для каждого из них получает список инвариантов Фоменко-Цишанга, описывающих слоение Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях. Эта тема является естественным продолжением работ В.В. Ведюшкиной, а также работы И.Ф. Кобцева об эллиптическом биллиарде с упругим потенциалом.

В **третьей главе** автор переходит от квадратичного потенциала Гука к произвольному полиномиальному потенциалу. Сначала решается вопрос интегрируемости эллиптического биллиарда с потенциалом. На основе критерия, предложенного В.В. Козловым, автор получил явный вид интегрируемого полиномиального потенциала, который имеет достаточно компактный вид в эллиптических координатах. Как оказалось, он зависит лишь от произвольного многочлена P(z) с вещественными коэффициентами. С помощью полученной явной формулы автор строит алгоритм, который вычисляет инвариант Фоменко-Цишанга, исходя из многочлена P и неособого уровня гамильтониана. Также автором была описана топология изоэнергетических многообразий, возникающих для таких биллиардов.

Кроме этого, в третьей главе рассматривается частный случай эллиптического биллиарда, снабженного полиномиальным потенциалом четвертой степени. В этом случае автор строит бифуркационные диаграммы и определяет их зависимость относительно четырех параметров системы – двух полуосей граничного эллипса и двух старших коэффициентов кубического полинома P. Основываясь на полученных результатах, автор в **четвертой главе** описывает полулокальные особенности слоения Лиувилля такого биллиарда. Сначала определяются невырожденные особые точки ранга 0 и вырожденные траектории, и затем описывается структура слоения Лиувилля в четырехмерной окрестности слоев, содержащих найденные особенности.

Последний пункт четвертой главы посвящен реализации фокальных особенностей с помощью биллиардных систем. Было показано, что биллиардная книжка, склеенная из n круговых биллиардов с центральным потенциалом Гука, содержит n особенностей типа фокус-фокус, лежащих на одном слое. Этот результат дополняет недавний результат В.А.Кибкало и А.Т.Фоменко о реализации особенностей типа седло-седло биллиардами.

Наконец, **пятая глава** диссертации посвящена биллиардам в магнитном поле. Автор опирается на результат А.Е. Миронова и М. Бялого, согласно которому плоский магнитный биллиард интегрируем, когда и только когда он ограничен окружностью или парой концентрических окружностей. Автор вычисляет инварианты Фоменко-Цишанга таких биллиардов и на их основе строит топологические магнитные биллиарды. В силу устройства биллиардов-листов, можно выделить четыре типа биллиардов по типу топологии их столов: цилиндрический, дисковый, сферический и торический магнитный биллиард. Для каждого из них автор строит алгоритм, вычисляющий инвариант Фоменко-Цишанга, а также обратный алгоритм, строящий по инварианту определенного вида соответствующий ему магнитный биллиард. Таким образом, были не только классифицированы магнитные биллиарды с точки зрения лиувиллевой эквивалентности, но и определены другие интегрируемые системы, эквивалентные таким биллиардам.

Диссертация С.Е. Пустовойтова является научным исследованием высокого уровня, вызывающим интерес у специалистов как в области динамических систем и математической физики, так и в дифференциальной топологии и геометрии симплектических многообразий. При этом поставленные задачи были полностью решены.

Необходимо отметить, что рецензируемая диссертационная работа являет пример сбалансированного исследования, где четкие теоретические методы и идеи дополняются сложными конкретными вычислениями, что показывает как высокую теоретическую подготовку диссертанта, так и его умение производить технически сложные выкладки.

Сам текст диссертации очень хорошо продуман, что позволило достаточно подробно и выпукло показать геометрию и технику вычислений. Текст достаточно хорошо проработан, и мной было замечено лишь малое число опечаток, которые не мешают чтению и не снижают высокой оценки текста диссертации.

Все результаты диссертации являются новыми, оригинальными, своевременно опубликованными в 7 статьях в математических журналах, индексируемых WoS и Scopus или входящих в список научных журналов, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ, а также представленными автором на различных конференциях.

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Значительный объём выполненных автором исследований по актуальной и важной теме позволяет рассматривать представленную работу, как несомненно удовлетворяющую требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Пустовойтов Сергей Евгеньевич несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор РАН,
начальник сектора лаборатории теоретической физики
имени Н.Н. Боголюбова
ММНИО «Объединенный институт ядерных исследований»

ТЮРИН Николай Андреевич

Контактные данные:
тел.: , e-mail: ntyurin@theor.jinr.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.06 (математическая логика, алгебра и теория чисел)

Адрес места работы:
141980, Московская область, г. Дубна, ул. Жолио - Кюри, д. 6,
Объединенный институт ядерных исследований,
Лаборатория теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова
Тел.: +7(496) 216-23-40; e-mail: bltp@theor.jinr.ru

Подпись сотрудника
ЛТФ ОИЯИ Н.А. Тюрина удостоверяю:
Ученый секретарь ЛТФ ОИЯИ А.В. Андреев