

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Воронцов Михаил Олегович

**Асимптотические свойства методов
множественной проверки гипотез в условиях
зависимости наблюдений**

1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Шестаков Олег Владимирович

Москва — 2026

Содержание

Обозначения	3
Введение	4
1 Глава 1. FDR–процедура решения задачи множественной проверки гипотез	11
1.1 Постановка задачи	11
1.2 Обработка вектора данных и оценка риска.	12
1.3 Асимптотические свойства среднеквадратичного риска и его оценки для независимых наблюдений.	15
2 Глава 2. Асимптотика риска FDR–процедуры для зависимых наблюдений	21
2.1 Слабая зависимость	21
2.2 Вспомогательные утверждения	22
2.3 Асимптотика среднеквадратичного риска FDR–процедуры в условиях слабой зависимости	31
3 Глава 3. Свойства оценки риска в условиях слабой зависимости	39
3.1 Асимптотическая нормальность оценки риска при применении FDR–процедуры в условиях слабой зависимости	39
3.2 Сильная состоятельность оценки риска при применении FDR–процедуры в условиях слабой зависимости	50
3.3 Скорость сходимости распределения оценки риска к нормальному закону.	53
Заключение	63
Литература	65

Обозначения

$P(A)$	вероятность события A ;
$\mathbb{1}(A)$	индикатор события A ;
$\#A$	число элементов (мощность) множества A ;
$E\xi$	математическое ожидание случайной величины ξ ;
$D\xi$	дисперсия случайной величины ξ ;
$\text{cov}(\xi, \eta)$	ковариация случайных величин ξ и η ;
$\text{corr}(\xi, \eta)$	корреляция случайных величин ξ и η ;
$\Phi(x)$	функция стандартного нормального распределения;
$\varphi(x)$	плотность стандартного нормального распределения;
$[x]$	целая часть числа x .

Введение

Актуальность темы. В эпоху экспоненциального роста объемов информации ключевой вызов для статистического моделирования и машинного обучения заключается в работе с данными высокой размерности, где количество признаков-предикторов может на порядки превышать число наблюдений [44]. Это приводит к переобучению моделей, резкому увеличению вычислительной сложности и затрудняет интерпретацию результатов. В таких условиях критически важным предварительным этапом анализа становится сокращение размерности, цель которого — выделить информативные признаки и отсеять шумовые, переведя данные в «экономное» (sparse) представление без существенной потери информации.

Универсальность метода сжатия является фундаментальным требованием: алгоритм должен быть адаптивен к разнородным типам данных (изображения, сигналы, геномные данные и т.д.) и обеспечивать результат, близкий к оптимальному для каждого конкретного случая. Одним из эффективных подходов к решению этой задачи является сжатие на основе пороговой обработки коэффициентов ортогональных разложений, в частности, Фурье- и вейвлет-преобразований. Классический гармонический анализ, основанный на преобразовании Фурье, предоставляет мощный аппарат для работы со стационарными процессами, раскладывая сигнал на совокупность синусоидальных компонент. Ключевым для теории сжатия является следствие из теоремы Римана–Лебега: для любого сколь угодно малого положительного числа, лишь конечное число коэффициентов Фурье превосходит его по модулю. Это свойство лежит в основе простого, но эффективного алгоритма сжатия: после разложения сигнала в ряд Фурье, все коэффициенты, модуль которых ниже определенного порога, отбрасываются как несущественные. Оставшиеся значимые коэффициенты позволяют восстановить сигнал с заданной точностью.

Однако преобразование Фурье, будучи глобальным, не учитывает локальные особенности сигнала, что ограничивает его применимость для анализа нестационарных процессов. Этот фундаментальный недостаток был преодолен с развитием теории вейвлетов. Термин «вейвлет» (wavelet), или «короткая волна», был введен в 1980-х годах, а теоретический фундамент и практические алгоритмы были заложены в работах И. Мейера, И. Добеши и С. Малла [1, 8, 32, 53, 57]. В отличие от бесконечных синусоид Фурье, вейвлеты являются локализованными во времени и частоте функциями, что позволяет анализировать сигнал на разных масштабах с помощью операций сдвига и растяжения базового вейвлета. Это делает вейвлет-анализ идеальным инструментом для работы с данными, содержащими резкие всплески, разрывы и локальные аномалии. Метод сжатия данных с помощью вейвлет-преобразования также основан на пороговой обработке коэффициентов [54].

Формально пороговая обработка эквивалентна процедуре множественной проверки статистических гипотез [22]. Для каждого коэффициента проверяется гипотеза о его статистической незначимости (т.е. равенстве нулю); если гипотеза не отвергается, коэффициент обнуляется, что и приводит к сжатию. При этом, при одновременной проверке тысяч и миллионов гипотез возникает проблема множественных сравнений — когда стандартные критерии приводят к лавинообразному росту ошибок I рода. Для контроля над этим эффектом были разработаны методы, управляющие обобщенными мерами ошибки. Примеры подобных мер включают FWER (Family-Wise Error Rate) — вероятность хотя бы одной ложноположительной ошибки [59], используется в консервативных методах (например, Бонферрони); FDR (False Discovery Rate) — математическое ожидание доли ложных отклонений среди всех отвергнутых гипотез [25] — менее консервативен, обладает большей мощностью; pFDR (positive False Discovery Rate) — модификация FDR для случая, когда хотя бы одна гипотеза отвергнута [69, 73].

Ключевым шагом в пороговой обработке является выбор порогового значения. Этот выбор представляет собой компромисс между двумя противоположными целями: сохранением значимых компонент сигнала и подавлением шума. Слишком низкий порог оставляет большую часть шума,

тогда как слишком высокий порог приводит к потере полезной информации и чрезмерному упрощению модели. Например, можно использовать так называемый универсальный порог, предложенный в работе [35], однако на практике он часто оказывается излишне жестким, чрезмерно «заглаживая» сигнал и приводя к систематическому смещению. Более адаптивной альтернативой является поиск порога, который минимизирует среднеквадратичную погрешность (риск) восстановленной модели [37, 38]. Однако, поскольку истинное значение риска зависит от ненаблюдаемых исходных данных, на практике используются его несмещенные оценки — наиболее известным и теоретически обоснованным подходом является SURE (Stein’s Unbiased Risk Estimate) [42, 45, 68, 72], который позволяет оценить риск, используя лишь наблюдаемые зашумленные данные. Ряд исследований был посвящен поиску порога, напрямую минимизирующего SURE-оценку [36]. Также существуют подходы, основанные на анализе функции кросс-валидации и ее аналогов [47, 60], которые тоже используют только наблюдаемые данные и приводят к выбору адаптивных порогов, позволяющих тонко учитывать разреженность исходного сигнала. Различные эмпирические байесовские методы выбора порога разработаны в работах [21, 23, 28, 50, 64, 71].

В рамках данной диссертации рассматривается решение задачи сжатия данных методом пороговой обработки с использованием FDR-порога, контролируемого по одноименной мере с помощью алгоритма Бенджамини–Хохберга [25]. Популярность FDR-меры обусловлена тем, что в условиях больших данных допустимо совершить небольшое контролируемое число ошибок I рода в обмен на значительное увеличение статистической мощности (доли верно обнаруженных истинных эффектов), а использование FDR-меры гарантирует, что доля ложнозначимых признаков в итоговой модели не превысит заданного уровня.

Как отмечалось выше, во многих прикладных областях после применения различных методов разложения сигнала лишь малая доля компонент исходного сигнала оказывается значимой. Это явление известно как «разреженность» (sparsity) и является основополагающим принципом в таких областях, как компьютерное зрение (сжатие изображений, выделение признаков [55]), обработка сигналов (фильтрация аудио и видео, шумоподавление), биоинформатика и нейронауки (анализ данных электроэнцефало-

графии для выделения паттернов, связанных с определенной активностью мозга [52], анализ экспрессии генов). В данной диссертации рассматриваются различные способы определения разреженности сигнала.

Свойства риска и оценки риска FDR–метода выбора порога в случае, когда компоненты вектора данных являются независимыми, хорошо изучены. В работе [22] при условии независимости данных было показано, что асимптотический порядок риска является минимаксным. Для оценки риска в независимом случае установлены ее сильная состоятельность [10] и асимптотическая нормальность [61], скорость сходимости к нормальному закону исследована в [11]. В то же время в определенных приложениях, например при анализе полученных в результате использования ДНК–микрочипов данных [43], исследовании геофизических процессов и анализе помех в телекоммуникационных каналах, условие независимости может не выполняться [26]. В диссертации рассматривается случай, когда наблюдения являются слабо зависимыми.

Цель работы. Целью является исследование асимптотических свойств риска (среднеквадратичной погрешности) и оценки риска множественной проверки гипотез с использованием FDR–процедуры в задаче оценивания математического ожидания гауссова вектора большой размерности со слабо зависимыми компонентами.

Научная новизна. Основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем: Получена верхняя граница для риска в задаче множественной проверки гипотез с использованием FDR порога при условии слабой зависимости наблюдений. Доказана сильная состоятельность и асимптотическая нормальность оценки риска в указанной задаче. Проведена оценка скорости сходимости распределения данной оценки риска к нормальному закону.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение при множественной проверке гипотез в условиях зависимости наблюдений в таких областях, как геномика, компьютерное зрение, обработка сигналов в телекоммуникационных каналах и результатов геофизических исследований.

Методы исследования. В работе используются методы теории веро-

ятностей и математической статистики, математического анализа.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Оценка верхней границы для риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в условиях слабой зависимости наблюдений.
2. Сильная состоятельность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в условиях слабой зависимости наблюдений.
3. Асимптотическая нормальность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в условиях слабой зависимости наблюдений.
4. Оценка скорости сходимости к нормальному закону распределения оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в условиях слабой зависимости наблюдений.

Соответствие паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика. Направления исследований:

- Предельные теоремы.
- Оценивание параметров распределений. Проверка статистических гипотез.

Апробация работы. Научные результаты докладывались на следующих конференциях.

1. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2023», Секция вычислительная математика и кибернетика. МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 4–14 апреля 2023.
Тема доклада: Асимптотика риска FDR–метода при наличии слабой зависимости в данных.
2. Научная конференция «Тихоновские чтения 2023», МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 29 октября – 3 ноября 2023.
Тема доклада: Среднеквадратичный риск метода контроля доли ложных отклонений в задаче множественной проверки гипотез для разреженных слабо зависимых данных.

3. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2024». Секция вычислительной математики и кибернетики. МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 20 марта – 3 апреля 2024.
Тема доклада: Анализ оценки риска при использовании методов множественной проверки гипотез в задачах обработки разреженных массивов слабо зависимых данных.
4. Научная конференция «Тихоновские чтения 2024», МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 28 октября – 2 ноября 2024.
Тема доклада: Асимптотические результаты для среднеквадратичного риска при использовании методов множественной проверки гипотез в условиях зависимости наблюдений.
5. Санкт-петербургская молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 25–28 ноября 2024.
Тема доклада: Среднеквадратичный риск FDR-метода в задаче выявления значимых элементов разреженного массива слабо зависимых данных.
6. XXXVII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Shenzhen, Китай, 13–17 октября 2025
Тема доклада: Asymptotic results for the mean-square risk when using multiple hypothesis testing methods for weakly dependent observations.

Также, автор неоднократно докладывал результаты диссертационной работы на семинарах «Современные методы обработки сигналов и изображений» под руководством проф. О. В. Шестакова и «Теория риска и смежные вопросы» под руководством проф. В. Ю. Королева кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова (2021 – 2025 гг.).

Публикации. Все основные результаты по теме диссертации изложены в четырех статьях [74–77] автора. Работы [76, 77] опубликованы в рецензируемом научном журнале, входящем в базу Scopus. Работы [74, 75] опубликованы в рецензируемом научном журнале, входящем в базу RSCI. Также работы автора представлены в материалах конференций [78–83]. Список

работ автора приведен в конце автореферата и диссертации. В этих работах постановки задач принадлежат О. В. Шестакову, а все результаты получены М. О. Воронцовым самостоятельно.

Личный вклад автора. Автором диссертации совместно с научным руководителем проводился выбор темы, а также осуществлялось планирование всей работы. Профессору О. В. Шестакову принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. Автору диссертации принадлежит доказательство теорем, лемм и утверждений работы.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего в себя 83 наименований. Общий объем диссертации составляет 73 страницы.

В первой главе рассматривается постановка задачи, формулируются определения основных понятий, используемых в работе, производится детальный обзор FDR–метода и известных результатов для риска и оценки риска FDR–метода в независимом случае.

Во второй главе приводятся необходимые вспомогательные утверждения и доказываются теоремы, устанавливающие верхние границы для среднеквадратичного риска в зависимом случае.

В третьей главе проводится исследование оценки риска FDR–метода в условиях слабой зависимости наблюдений. Доказана сильная состоятельность и асимптотическая нормальность оценки риска. Оценивается скорость сходимости распределения оценки риска к нормальному закону.

В заключении производится обзор полученных результатов и обсуждаются перспективные направления дальнейших исследований.

Благодарности. Автор диссертации выражает признательность своему научному руководителю — профессору Олегу Владимировичу Шестакову — за постановку задач и их обсуждение, а также за постоянное внимание к работе.

Глава 1. FDR–процедура решения задачи множественной проверки гипотез

Данная глава носит информационный характер: в ней описывается рассматриваемая в диссертации математическая модель и приводятся известные ранее результаты для риска и его оценки в независимом случае.

1.1 Постановка задачи

Описанные во вступлении задачи можно свести к рассмотрению следующей модели:

$$x_i = \mu_i + z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\mu_i \in \mathbb{R}$ – «полезные» данные, а $z_i \sim N(0, \sigma^2)$ – шум. В рамках данной модели задача заключается в нахождении оценки неизвестного вектора $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ как функции наблюдаемого вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ и может рассматриваться как задача множественной проверки гипотез о равенстве нулю компонент вектора μ [22]. При этом часто предполагается, что вектор μ имеет в определенном смысле «разреженную» структуру, т.е. для «полезных» данных используется «экономное» представление (для получения такого представления иногда требуется произвести предварительную обработку данных) [24, 33, 58, 65]. В данной диссертации рассматриваются следующие классы разреженности:

$$l_0[\eta] = \{\mu : \|\mu\|_0 \leq \eta n\}, \quad \eta \in (0, 1),$$

$$m_p[\eta] \equiv \left\{ \mu \in \mathbb{R}^n : |\mu|_{(k)} \leq \eta n^{1/p} k^{-1/p}, k = 1, \dots, n \right\}, \quad p \in (0, 2).$$

Класс $l_0[\eta]$ состоит из векторов таких, что лишь относительно малая доля η их компонент отлична от нуля — в выражении выше мера $\|\mu\|_0$ равна числу элементов вектора μ , не равных нулю. В то время как классу $m_p[\eta]$ принадлежат вектора, абсолютные значения компонент которых, будучи отсортированы:

$$|\mu|_{(n)} \geq |\mu|_{(n-1)} \geq \dots \geq |\mu|_{(1)},$$

убывают достаточно быстро: $|\mu|_{(k)} \leq \eta n^{1/p} k^{-1/p}$. Кроме классов $l_0[\eta]$ и $m_p[\eta]$ иногда также рассматривают класс $l_p[\eta]$, определяемый следующим образом:

$$l_p[\eta] = \left\{ \mu : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_i|^p \leq \eta^p \right\}, \quad p \in (0, 2).$$

В силу вложенности $l_p[\eta] \subset m_p[\eta]$, результаты, полученные для класса $m_p[\eta]$, будут также справедливы и для класса $l_p[\eta]$. Параметр η , как правило, зависит от n , поскольку с ростом числа наблюдений разреженность векторов увеличивается — доля значимых компонент не просто остается маленькой, а именно стремится к нулю с ростом n . Предположение о разреженности не является чисто техническим допущением — оно отражает фундаментальный принцип структурной организации данных во множестве прикладных областей, таких как исследования в области геномики [41], обработка изображений [31], аудиосигналов [24] и результатов электроэнцефалографии [66]. Наиболее убедительное обоснование предположения о разреженности предоставляет вейвлет-анализ, поскольку вейвлет-представление многих гладких и кусочно-гладких сигналов является разреженным точно в том смысле, который задают указанные классы разреженности [39].

1.2 Обработка вектора данных и оценка риска.

При построении оценки $\hat{\mu}$ в случае, когда вектор μ имеет разреженную структуру, часто используется пороговая обработка вектора x с некоторым порогом T . Различают жесткую пороговую обработку, при которой

$$(\hat{\mu})_i = p_H(x_i, T) \equiv \begin{cases} x_i, & |x_i| > T; \\ 0, & |x_i| \leq T, \end{cases}$$

и мягкую пороговую обработку, при которой

$$(\hat{\mu})_i = p_S(x_i, T) \equiv \begin{cases} x_i - T, & x_i > T; \\ x_i + T, & x_i < -T; \\ 0, & |x_i| \leq T. \end{cases}$$

Графики функций $p_H(x_i, T)$ и $p_S(x_i, T)$ аргумента x_i приведены на рисунке 1.1.

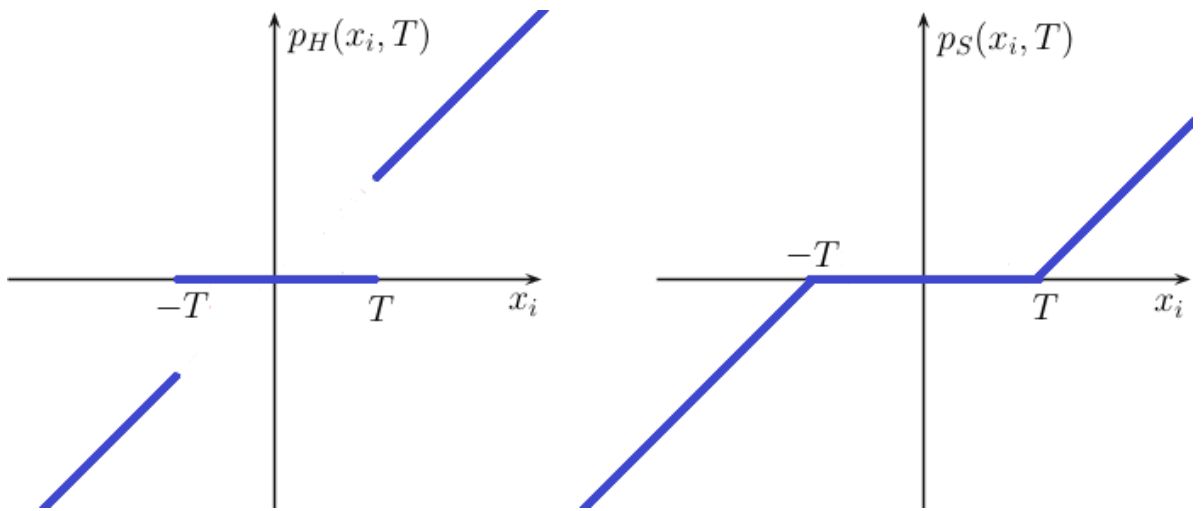


Рис. 1.1 Графики функций жесткой (слева) и мягкой (справа) пороговой обработки.

Преимуществом жесткой пороговой обработки является сохранение амплитуды (все значимые коэффициенты — выше порога — остаются без изменений). Это критически важно в задачах, где амплитуда сигнала несет физический смысл (например, в сейсмологии или обработке электроэнцефалографии). Однако жесткая пороговая обработка неустойчива — небольшое изменение во входном сигнале может привести к скачкообразному изменению результата. Это может приводить к нежелательным эффектам вроде «дрожания» (flickering) в обработанных сигналах и изображениях, особенно когда шум значителен [30].

Мягкая пороговая обработка, напротив, непрерывна и устойчива, дает более гладкие результаты [34]. Основным недостатком мягкой пороговой обработки является смещение. Поскольку все коэффициенты сжимаются на постоянную величину T , истинные коэффициенты сигнала (даже очень

большие) получают постоянное смещение. Это может привести к чрезмерному сглаживанию и потере резкости краев на изображениях или пиков в сигналах.

Критерием качества для методов пороговой обработки обычно служит среднеквадратичный риск, который определяется как

$$R(T) = \mathbb{E} \|\hat{\mu} - \mu\|^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} ((\hat{\mu})_i - \mu_i)^2. \quad (1.1)$$

При пороговой обработке иногда используется так называемый универсальный порог $T_U = \sigma\sqrt{2\ln n}$, предложенный в работе [35]. Порог T_U является в определенном смысле максимальным — рассматривать пороги выше него не имеет смысла [7, 56]. Кроме того, рассуждения, проведенные в работе [51], показывают, что с ростом n «разумный» порог будет расти — если порог не растет, то порядок риска не будет близок к оптимальному. Следовательно, поиск оптимального порога для больших n имеет смысл производить на отрезке $[T_0; T_U]$, где $T_0 > 0$ — некоторое число, не зависящее от n .

Исследуемая задача может рассматриваться как частный случай задачи множественной проверки гипотез [40], а именно — пусть построено n статистик x_i для проверки нулевых гипотез $H_{0,i}$ против альтернатив $H_{1,i}$, причем при верной гипотезе $H_{0,i}$ (соответственно $H_{1,i}$) распределение x_i известно и равно $N(0, \sigma^2)$ (соответственно $N(\mu_i, \sigma^2)$, $\mu_i \neq 0$ и неизвестно). Принятие гипотезы $H_{0,i}$ в такой постановке равносильно заключению $\mu_i = 0$. Обозначим V — число ошибочно отвергнутых гипотез $H_{0,i}$, а R — суммарное число отвергнутых гипотез. Для решения задачи множественной проверки гипотез можно использовать предложенный в работе [25] алгоритм Бенджамини–Хохберга, который заключается в контроле среднего значения отношения числа ошибочно отвергнутых гипотез и суммарного числа отвергнутых гипотез на уровне q :

$$\mathbb{E} \left(\frac{V}{\max(1, R)} \right) \leq q.$$

В работе [22] описана FDR–процедура по построению порога, гарантирующего данное условие в случае, когда статистики x_i имеют нормальное

распределение. Она заключается в жесткой пороговой обработке компонент вектора x с порогом $\hat{t}_F = \hat{t}_F(x)$, и ее результат — оценка $\hat{\mu}_F$ вектора μ с компонентами $(\hat{\mu}_F)_i = p_H(x_i, \hat{t}_F)$, где

$$\hat{t}_F = \sigma z \left(\frac{q \hat{k}_F}{2n} \right), \quad \hat{k}_F = \max \{k : |x|_{(k)} \geq t_k\}, \quad t_k = \sigma z \left(\frac{qk}{2n} \right),$$

$z(\alpha)$ — квантиль уровня $(1 - \alpha)$ стандартного нормального распределения, $|x|_{(k)}$ — k -й элемент вектора, получаемого в результате упорядочения вектора $|x|$ по невозрастанию:

$$|x|_{(1)} \geq |x|_{(2)} \geq \dots \geq |x|_{(n)},$$

а $q \in (0; 1)$ — управляющий параметр FDR-метода. Далее полагается, что $q \equiv q_n$ зависит от n .

В [22] показано, что эта процедура эквивалентна множественной проверке гипотез о равенстве нулю компонент наблюдаемого вектора. Также показано, что с помощью метода штрафных функций данную процедуру можно свести к другим видам пороговой обработки, в частности, к мягкой пороговой обработке.

1.3 Асимптотические свойства среднеквадратичного риска и его оценки для независимых наблюдений.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma_n = (\ln \ln n)^{-1}; \quad \kappa_n^0 = (1 - q_n - \gamma_n)^{-1} [n \eta_n];$$

$$T_1 = \sqrt{2 \ln \eta_n^{-p}}; \quad \kappa_n = \frac{n \eta_n^p T_1^{-p}}{1 - q_n - \gamma_n}.$$

Как уже упоминалось, критерием качества для методов пороговой обработки обычно служит среднеквадратичный риск. Для среднеквадратичного риска

$$\rho(\hat{\mu}_F, \mu) = \mathbf{E} \|\hat{\mu}_F - \mu\|^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{E} ((p_H(x_i, \hat{t}_F) - \mu_i)^2) \equiv R(\hat{t}_F)$$

оценки $\hat{\mu}_F$ в работе [22] авторов Abramovich F., Benjamini Y., Donoho D. и Johnstone I. получен следующий результат.

Теорема 1.1. Пусть $x_i, i = 1, \dots, n$ независимы, $q_n \ln n \geq b_1 > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n < 1$, класс разреженности $\Theta_n = l_0[\eta_n]$ (либо $\Theta_n = m_p[\eta_n]$), а также η_n (соответственно η_n^p) лежит в интервале $[n^{-1} \ln^5 n; n^{-\delta}]$, $\delta > 0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\mu \in \Theta_n} \rho(\hat{\mu}_F, \mu) \leq R_n(\Theta_n) \left(1 + c_{rp} \frac{(2q_n - 1)_+}{1 - q_n} + o(1) \right),$$

где

$$R_n(\Theta_n) = \inf_{\hat{\mu} = \hat{\mu}(x)} \sup_{\mu \in \Theta_n} \rho(\hat{\mu}, \mu),$$

а $c_{rp} = 1$ (соответственно $c_{rp} = 1 - p/2$).

Таким образом, среднеквадратичный риск пороговой обработки при использовании FDR-порога имеет такой же порядок, что и минимаксный риск. В работе также приведены асимптотики

$$R_n(l_0[\eta_n]) \sim c_1 n \eta_n \ln \eta_n^{-1},$$

$$R_n(m_p[\eta_n]) \sim \frac{c_2}{2 - p} n \eta_n^p (2 \ln \eta_n^{-p})^{(2-p)/2},$$

где $c_{1,2} = c_{1,2}(\sigma)$ — константы.

В работе [22] Ф. Абрамовича и соавторов также получено следующее утверждение, устанавливающее нижнюю границу для порога \hat{t}_F , и показывающее, что вероятность того, что \hat{t}_F примет значение, меньшее этой границы, экспоненциально убывает с ростом n :

Лемма 1.1. Если $\eta_n \in [n^{-1}(\ln n)^5, n^{-\delta}]$, $0 < \delta < 1$, то найдется $c > 0$ такое, что для больших n справедливо

$$\sup_{\mu \in l_0[\eta_n]} \mathbf{P}(\hat{k}_F \geq \kappa_n^0) \leq 2n \exp\{-cq_n \kappa_n^0 \gamma_n^2\}.$$

Если же $\eta_n^p \in [n^{-1}(\ln n)^5, n^{-\delta}]$, $0 < \delta < 1$, $0 < p < 2$, то найдется $c > 0$ такое, что для больших n справедливо

$$\sup_{\mu \in m_p[\eta_n]} \mathbf{P}(\hat{k}_F \geq \kappa_n) \leq 2n \exp\{-cq_n \kappa_n \gamma_n^2\}.$$

Обозначим через T_m оптимальное значение порога:

$$T_m : R(T_m) = \min_T R(T).$$

Поскольку в выражении для среднеквадратичного риска (1.1) присутствуют неизвестные величины μ_i , вычислить $R(T_m)$ и T_m не представляется возможным. На практике можно пользоваться, например, следующей оценкой среднеквадратичного риска [54]

$$\hat{R}(T) = \sum_{i=1}^n F[x_i, T],$$

где для жесткой пороговой обработки

$$F[x_i, T] = (x_i^2 - \sigma^2)\mathbb{1}(|x_i| \leq T) + \sigma^2\mathbb{1}(|x_i| > T),$$

а для мягкой пороговой обработки

$$F[x_i, T] = (x_i^2 - \sigma^2)\mathbb{1}(|x_i| \leq T) + (\sigma^2 + T^2)\mathbb{1}(|x_i| > T).$$

Для случая мягкой пороговой обработки рациональность использования данной оценки следует из следующих соображений. Если $|x_i| \leq T$, то из определения процедуры мягкой пороговой обработки следует, что $p_S(x_i, T) = 0$, а следовательно вклад i -го слагаемого в выражении 1.1 в риск равен μ_i^2 . А поскольку

$$\mathbb{E}x_i^2 = \mu_i^2 + \mathbb{E}z_i^2 = \mu_i^2 + \sigma^2,$$

число μ_i^2 можно оценить выражением $(x_i^2 - \sigma^2)$. В свою очередь, в случае $|x_i| > T$ имеем $p_S(x_i, T) = x_i + T$ (если $x_i > 0$) или $p_S(x_i, T) = x_i - T$ (если $x_i < 0$), и тогда вклад i -го слагаемого равен

$$\mathbb{E}(x_i - z_i - x_i \pm T)^2 = \mathbb{E}(z_i \pm T)^2 = \sigma^2 + T^2.$$

Выражение оценки риска для жесткой пороговой обработки следует из похожих соображений — в этом случае оценка получится смещенная, однако смещение будет мало при больших n и не повлияет на основные результаты

диссертации.

В работе [4] показано, что оценка риска состоятельна. В работе [12] С.И. Палионной это утверждение усилено, и показана сильная состоятельность оценки риска при использовании FDR-порога в случае независимых наблюдений для классов разреженности $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$:

Теорема 1.2. Пусть $\mu \in l_0[\eta_n]$, где $\eta_n \in [n^{-1}(\ln n)^5, n^{-\delta}]$ или $\mu \in m_p[\eta_n]$, $0 < p < 2$, где $\eta_n^p \in [n^{-1}(\ln n)^5, n^{-\delta}]$ соответственно, $0 < \delta < 1$. Пусть \hat{t}_F – FDR-порог с управляющим параметром $q_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а также $\frac{q_n \kappa_n^0 \gamma_n^2}{\ln n} \rightarrow \infty$ (соответственно $\frac{q_n \kappa_n \gamma_n^2}{\ln n} \rightarrow \infty$) при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{n} \rightarrow 0 \text{ п.в.}$$

В работе [61] С.И. Палионной и О.В. Шестакова были получены теоремы об асимптотической нормальности оценки риска при использовании FDR-порога в случае независимых наблюдений для классов разреженности $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$:

Теорема 1.3. Пусть $\mu \in l_0[\eta_n]$ и FDR-порог \hat{t}_F вычисляется с управляющим параметром q_n . Если выполняется $\eta_n \in [n^{-1}(\ln n)^5, n^{-\delta}]$ при $1/2 < \delta < 1$ и $q_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ так, что $q_n \kappa_n^0 \gamma_n^2 (\ln n)^{-1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, тогда

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{\sigma^2 \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0, 1).$$

Теорема 1.4. Пусть $\mu \in m_p[\eta_n]$, $0 < p < 2$ и FDR-порог \hat{t}_F вычисляется с управляющим параметром q_n . Если выполняется $\eta_n^p \in [n^{-1}(\ln n)^5, n^{-\delta}]$ при $1/2 < \delta < 1$ и $q_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ так, что $q_n \kappa_n \gamma_n^2 (\ln n)^{-1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, тогда

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{\sigma^2 \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0, 1).$$

В работе [11] С.И. Палионной была оценена скорость сходимости распределения оценки риска к нормальному закону, соответствующие теоремы формулируются следующим образом:

Теорема 1.5. Пусть $\mu \in l_0[\eta_n]$, где $\eta_n \in [n^{-1}(\ln n)^5, n^{-\delta}]$, $1/2 < \delta < 1$. Пусть \hat{t}_F – FDR-порог вычисляется с управляющим параметром $q_n \rightarrow 0$

и $q_n \kappa_n^0 \gamma_n^2 (\ln n)^{-1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для $x \in \mathbb{R}$ выполнены следующие неравенства: для $\delta \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{\sigma^2 \sqrt{2n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq C n^{1/2-\delta} \ln n;$$

для $\delta \in (\frac{3}{4}, 1)$

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{\sigma^2 \sqrt{2n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq C n^{-1/4} \ln n,$$

где в обоих случаях C — это константы, вообще говоря, разные.

Теорема 1.6. Пусть $\mu \in m_p[\eta_n]$, $0 < p < 2$, где $\eta_n^p \in [n^{-1}(\ln n)^5, n^{-\delta}]$, $1/2 < \delta < 1$. Пусть \hat{t}_F — FDR-порог вычисляется с управляющим параметром $q_n \rightarrow 0$ и $q_n \kappa_n \gamma_n^2 (\ln n)^{-1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для $x \in \mathbb{R}$ выполнены следующие неравенства: для $\delta \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{\sigma^2 \sqrt{2n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq C n^{1/2-\delta} (\ln n)^{1+p/2};$$

для $\delta \in (\frac{3}{4}, 1)$

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{\sigma^2 \sqrt{2n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq C n^{-1/4} \ln n,$$

где в обоих случаях C — это константы, вообще говоря, разные.

Эти утверждения показывают, что в случае независимости наблюдений оценки риска обладают хорошими статистическими свойствами. Теорема 1.2 демонстрирует сближение оценки с теоретическим риском, а теоремы 1.3–1.6 дают возможность оценить это сближение количественно (например, с помощью построения асимптотических доверительных интервалов). Таким образом, оценки риска могут использоваться как критерий качества методов выбора порога. В главах 2, 3 настоящей диссертации требование независимости будет опущено и будут доказаны утверждения, аналогичные приведенным в данной главе, при определенных предположениях о харак-

тере зависимости между наблюдениями. Исследованию оценки риска при различных предположениях о характеристиках шума и различных стратегиях выбора порогового значения также посвящены работы [3, 9, 14–20].

Глава 2. Асимптотика риска FDR–процедуры для зависимых наблюдений

В данной главе приводятся необходимые вспомогательные утверждения и доказываются теоремы, устанавливающие верхние границы для средне-квадратичного риска в зависимом случае.

2.1 Слабая зависимость

В случае независимых наблюдений риск и оценка риска FDR–метода выбора порога хорошо исследованы, однако во многих приложениях статистики — в геномике [70], при обработке геоданных и изображений — наблюдения являются заведомо зависимыми. В диссертации исследуется асимптотика риска оценки $\hat{\mu}_F$ в случае, когда компоненты вектора x являются слабо зависимыми, а именно — имеют достаточно быстро убывающий коэффициент сильного перемешивания [27, 29]

$$\alpha(k) = \sup_{1 \leq m \leq n} \sup_{\substack{B \in \sigma(x_i, i \leq m) \\ C \in \sigma(x_i, i \geq m+k)}} |\mathbb{P}(BC) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)|, \quad k = 1, \dots, n - 1.$$

Следует отметить, что для любой измеримой функции $f(\cdot)$ коэффициент сильного перемешивания набора $f(x_1), \dots, f(x_n)$ не больше коэффициента сильного перемешивания набора x_1, \dots, x_n .

Также нам понадобится понятие максимального коэффициента корреляции $\rho(\cdot)$ компонент вектора x [27]:

Определение. *Максимальным коэффициентом корреляции $\rho(\cdot)$ компо-*

нент вектора x называется

$$\rho(k) \equiv \rho_n(k) = \sup_{1 \leq m \leq n} \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{L}^2(\sigma(x_i, i \leq m)) \\ \eta \in \mathcal{L}^2(\sigma(x_i, i \geq m+k))}} |\text{corr}(\xi, \eta)|, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Слабая (или краткосрочная) зависимость часто является естественным предположением. Однако даже в ситуациях, когда наблюдения демонстрируют так называемую долгосрочную зависимость, ее удается свести к слабой, например, с помощью вейвлет–преобразования при соответствующем выборе вейвлет–базисов [48, 49].

2.2 Вспомогательные утверждения

Для доказательства основных утверждений диссертации потребуется ряд лемм и вспомогательных утверждений, приведенных в данной секции.

Следующее утверждение приведено в работе [27] Д. Боска — оно представляет собой аналог неравенства Бернштейна для слабо зависимых случайных величин.

Лемма 2.1. Пусть для набора действительных случайных величин X_1, \dots, X_k с коэффициентом сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ выполняется $\mathbf{E}X_i = 0$, $|X_i| \leq b$, $i = 1, \dots, k$. Тогда для любого целого числа $m \in [1; n/2]$ и любого $\varepsilon > 0$ справедливо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^k X_i \right| > \varepsilon \right) &\leq 4 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 m}{8v^2 k^2} \right\} + \\ &+ 22 \left(1 + \frac{4bk}{\varepsilon} \right)^{1/2} m \alpha \left(\left[\frac{k}{2m} \right] \right), \end{aligned}$$

где $p = k/(2m)$ и

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{b\varepsilon}{2k} + \frac{2}{p^2} \max_{j \in [0, 2m-1]} \mathbf{E} \left(([jp] + 1 - jp) X_{[jp]+1} + X_{[jp]+2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + X_{[(j+1)p]} + ((j+1)p - [(j+1)p]) X_{[(j+1)p+1]} \right)^2 \end{aligned}$$

Замечание. Если существует такое число $S > 0$, что сразу для всех

$i \in [1, k]$ выполняется $\mathbf{E}X_i^2 \leq S^2$, то в качестве v^2 можно взять

$$v^2 = \frac{b\varepsilon}{2k} + 8S^2.$$

Неравенство Беннета [63] утверждает, что для независимых центрированных ограниченных по модулю числом M случайных величин X_1, \dots, X_n , сумма дисперсий которых ограничена сверху числом V , и для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n X_i \right| > \varepsilon \right) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2V} B \left(\frac{M\varepsilon}{V} \right) \right\},$$

где $B(\lambda) = 2\lambda^{-2}((1 + \lambda) \ln(1 + \lambda) - \lambda)$, $\lambda > 0$. Следующее утверждение, доказанное в работе [76] М.О. Воронцова и О.В. Шестакова, обобщает неравенство Беннета на случай зависимых случайных величин.

Утверждение 2.1. Пусть для набора действительных случайных величин X_1, \dots, X_n с коэффициентом сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ выполняется $\mathbf{E}X_i = 0$, $|X_i| \leq b$, $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого целого числа $m \in [1; n/2]$ и любого $\varepsilon > 0$ справедливо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n X_i \right| > \varepsilon \right) &\leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{32v_0} B \left(\frac{nb\varepsilon}{8mv_0} \right) \right\} + \\ &+ 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{32v_1} B \left(\frac{nb\varepsilon}{8mv_1} \right) \right\} + 22 \left(1 + \frac{4bn}{\varepsilon} \right)^{1/2} m \alpha \left(\left[\frac{n}{2m} \right] \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} v_0 &= \sum_{j=1}^m \mathbf{E} \left(([2(j-1)p] + 1 - (2(j-1)p)) X_{[2(j-1)p]+1} + X_{[2(j-1)p]+2} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + X_{[(2j-1)p]} + ((2j-1)p - [(2j-1)p]) X_{[(2j-1)p]+1} \right)^2, \\ v_1 &= \sum_{j=1}^m \mathbf{E} \left((([2j-1)p] + 1 - ((2j-1)p)) X_{[(2j-1)p]+1} + X_{[(2j-1)p]+2} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + X_{[2jp]} + (2jp - [2jp]) X_{[2jp]+1} \right)^2, \end{aligned}$$

$$p = \frac{n}{2m}, \quad B(\lambda) = 2\lambda^{-2}((1 + \lambda) \ln(1 + \lambda) - \lambda), \quad \lambda > 0.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 1.3 из [27] показано, что

$$\mathbf{P} \left(\left| \sum_{j=1}^m V_j \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \mathbf{P} \left(\left| \sum_{j=1}^m W_j \right| > \frac{\varepsilon}{4} \right) + 11 \left(1 + \frac{4bn}{\varepsilon} \right)^{1/2} m\alpha \left(\left[\frac{n}{2m} \right] \right),$$

где

$$V_j = ([2(j-1)p] + 1 - (2(j-1)p))X_{[2(j-1)p]+1} + X_{[2(j-1)p]+2} + \dots + \\ + X_{[(2j-1)p]} + ((2j-1)p - [(2j-1)p])X_{[(2j-1)p]+1}, \quad W_j \stackrel{d}{=} V_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

а случайные величины W_1, \dots, W_m независимы. Применяя для случайных величин W_1, \dots, W_m неравенство Беннета для независимых случайных величин, получим

$$\mathbf{P} \left(\left| \sum_{j=1}^m W_j \right| > \frac{\varepsilon}{4} \right) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{32v_0} B \left(\frac{pb\varepsilon}{4v_0} \right) \right\}.$$

Проводя аналогичные рассуждения для случайных величин

$$V'_j = ([(2j-1)p] + 1 - ((2j-1)p))X_{[(2j-1)p]+1} + X_{[(2j-1)p]+2} + \\ + \dots + X_{[2jp]} + (2jp - [2jp])X_{[2jp]+1}, \quad j = 1, \dots, m,$$

и объединяя результаты с учетом

$$\mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n X_i \right| > \varepsilon \right) \leq \mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^m V_i \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) + \mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^m V'_i \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

получаем требуемое. □

Далее будут использоваться следующие обозначения:

$$k_n^0 = [\eta_n n]; \quad \gamma_n = (\ln \ln n)^{-1}; \quad \kappa_n^0 = (1 - q_n - \gamma_n)^{-1} k_n^0;$$

$$T_1 = \sqrt{2 \ln \eta_n^{-p}}; \quad k_n = n \left(\frac{\eta_n}{T_1} \right)^p; \quad \kappa_n = \frac{k_n}{1 - q_n - \gamma_n};$$

$$p_i = \mathbf{P}(|x_i| \geq t_k), \quad X_i = \mathbb{1}(|x_i| \geq t_k) - p_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$N(t_k) = \#\{i : |x_i| \geq t_k\}; \quad M = \mathbf{E}N(t_k) = \sum_{i=1}^n p_i.$$

Заметим, что $\mathbf{E}X_i = 0$, $|X_i| < 1$, $\mathbf{D}X_i = p_i(1 - p_i)$ для всех i, k . Вспомним также, что

$$t_{\kappa_n^0} = \sigma z \left(\frac{q_n \kappa_n^0}{2n} \right); \quad t_{\kappa_n} = \sigma z \left(\frac{q_n \kappa_n}{2n} \right).$$

Следующее утверждение доказано в работе [76] М.О. Воронцова и О.В. Шестакова — оно показывает, что случайный порог \hat{t}_F в случае $\mu \in l_0[\eta_n]$ с большой вероятностью будет не меньше $t_{\kappa_n^0}$. Это утверждение обобщает приведенный в лемме 1.1 результат на случай зависимых наблюдений.

Лемма 2.2. Пусть $\eta_n \leq b < 1$, $m \in [1; n/2] \cap \mathbb{N}$, а $\alpha(\cdot)$ — коэффициент сильного перемешивания компонент вектора x . Для некоторого $N \in \mathbb{N}$ при $n \geq N$ справедливо

$$\begin{aligned} \sup_{\mu \in l_0[\eta_n]} \mathbf{P} \left(\hat{k}_F \geq \kappa_n^0 \right) &\leq 4n \exp \left\{ -\frac{(1-b)m}{64n} \kappa_n^0 q_n \gamma_n^2 \right\} + \\ &+ 22 \left(1 + \frac{4n}{(1-b)\kappa_n^0 q_n \gamma_n} \right)^{1/2} n m \alpha \left(\left\lfloor \frac{n}{2m} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Фиксируем $\mu \in l_0[\eta_n]$.

Имеем

$$\mathbf{P}(\hat{k}_F \geq \kappa_n^0) \leq \sum_{k \geq \kappa_n^0} \mathbf{P}(N(t_k) \geq k). \quad (2.2)$$

Фиксируем $k \geq \kappa_n^0$; наша задача — ограничить вероятность $\mathbf{P}(N(t_k) \geq k)$ сверху. Ниже показано, что $M < k$ для всех $k \geq \kappa_n^0$ и всех достаточно больших n . По утверждению 1 имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N(t_k) \geq k) &= \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \geq k - M \right) \leq \mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \geq k - M \right) \leq \\ &\leq 2 \exp \left\{ -\frac{(k-M)^2}{32v_0} B \left(\frac{n(k-M)}{8mv_0} \right) \right\} + \end{aligned}$$

$$+2 \exp \left\{ -\frac{(k-M)^2}{32v_1} B \left(\frac{n(k-M)}{8mv_1} \right) \right\} + 22 \left(1 + \frac{4n}{(k-M)} \right)^{1/2} m\alpha \left(\left[\frac{n}{2m} \right] \right). \quad (2.3)$$

Для произвольного набора центрированных случайных величин ξ_1, \dots, ξ_l с конечными дисперсиями справедливо

$$E(\xi_1 + \dots + \xi_l)^2 \leq l \sum_{i=1}^l D\xi_i,$$

откуда

$$v_{0,1} \leq \left(\left[\frac{n}{2m} \right] + 1 \right) \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) \leq \frac{nM}{m}.$$

Рассмотрим первое слагаемое в (2.3). Пусть сначала $n(k-M)/(8mv_0) \leq 1$. Так как функция $B(\lambda)$ убывает по λ и $v_0 \leq nM/m$, то

$$\frac{(k-M)^2}{32v_0} B \left(\frac{n(k-M)}{8mv_0} \right) \geq \frac{(k-M)^2 m}{32nM} B(1) = \frac{mM}{32n} \left(\frac{k}{M} - 1 \right)^2 B(1).$$

Если же $n(k-M)/(8mv_0) > 1$, то, поскольку $\lambda B(\lambda)$ возрастает по λ при $\lambda \geq 1$,

$$\frac{(k-M)^2}{32v_0} B \left(\frac{n(k-M)}{8mv_0} \right) \geq \frac{(k-M)m}{4n} B(1) = \frac{mM}{4n} \left(\frac{k}{M} - 1 \right) B(1).$$

Объединяя данные результаты, с учетом $B(1) > 1/2$ получим

$$\begin{aligned} & 2 \exp \left\{ -\frac{(k-M)^2}{32v_0} B \left(\frac{n(k-M)}{8mv_0} \right) \right\} \leq \\ & \leq 2 \exp \left\{ -\frac{mM}{64n} \min \left\{ \left(\frac{k}{M} - 1 \right)^2, \left(\frac{k}{M} - 1 \right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

и аналогично для слагаемого с v_1 .

Перейдем к поиску границ возможных значений M . Вспомним, что в векторе $\mu \in l_0[\eta_n]$ не более $k_n^0 = [\eta_n n] \leq bn$ ненулевых, а следовательно и не менее $n - k_n^0$ нулевых компонент, откуда при $k \geq \kappa_n^0$ для M получим

оценку снизу

$$M = \sum_{i=1}^n p_i \geq k_n^0 \cdot 0 + (n - k_n^0) \cdot \frac{kq_n}{n} \geq \frac{(n - k_n^0)}{n} kq_n \geq (1 - b)\kappa_n^0 q_n. \quad (2.5)$$

С другой стороны,

$$M \leq k_n^0 \cdot 1 + (n - k_n^0) \cdot \frac{kq_n}{n} = k_n^0 + (1 - k_n^0/n)kq_n.$$

Рассмотрим функцию $g(x) = x/(k_n^0 + (1 - k_n^0/n)xq_n)$. Тогда $k/M \geq g(k)$ для любого k . Заметим, что функция $g(x)$ возрастает по x . Поэтому при $k \geq \kappa_n^0$ имеем

$$g(k) \geq g(\kappa_n^0) = \frac{\kappa_n^0}{k_n^0 + (1 - k_n^0/n)\kappa_n^0 q_n} = (1 - \gamma_n - k_n^0 q_n/n)^{-1} > 1 + \gamma_n,$$

откуда

$$\left(\frac{k}{M} - 1\right) > \gamma_n. \quad (2.6)$$

Также здесь показано, что $k > M$.

Наконец, заметим, что неравенство

$$\left(\frac{k}{M} - 1\right)^2 > \left(\frac{k}{M} - 1\right),$$

выполняется лишь в случае $(k/M - 1) > 1$. Но тогда тем более $(k/M - 1) > \gamma_n^2$, откуда

$$\min \left\{ \left(\frac{k}{M} - 1\right)^2, \left(\frac{k}{M} - 1\right) \right\} > \gamma_n^2. \quad (2.7)$$

Собирая неравенства (2.3)–(2.7), , получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t_k) \geq k) &\leq 4 \exp \left\{ -\frac{(1-b)m}{64n} \kappa_n^0 q_n \gamma_n^2 \right\} + \\ &+ 22 \left(1 + \frac{4n}{(1-b)\kappa_n^0 q_n \gamma_n} \right)^{1/2} m \alpha \left(\left[\frac{n}{2m} \right] \right), \end{aligned}$$

что вместе с (2.2) дает утверждение леммы. □

Аналогичное утверждение, доказанное в работе [74] М.О. Воронцова, справедливо для случая $\mu \in m_p[\eta_n]$.

Лемма 2.3. Пусть $n^{-\delta_1} \leq \eta_n^p \leq n^{-\delta_2}$, $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$, $\liminf q_n \ln n \geq C > 0$, $m \in [1; n/2] \cap \mathbb{N}$, а $\alpha(\cdot)$ – коэффициент сильного перемешивания компонент вектора x . Для некоторого $N \in \mathbb{N}$ при $n \geq N$ справедливо

$$\begin{aligned} \sup_{\mu \in m_p[\eta_n]} \mathbb{P} \left(\hat{k}_F \geq \kappa_n \right) &\leq 4n \exp \left\{ -\frac{m}{256n} \kappa_n q_n \gamma_n^2 \right\} + \\ &+ 22 \left(1 + \frac{8n}{\kappa_n q_n \gamma_n} \right)^{1/2} n m \alpha \left(\left[\frac{n}{2m} \right] \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Фиксируем $\mu \in m_p[\eta_n]$. Имеем

$$\mathbb{P}(\hat{k}_F \geq \kappa_n) \leq \sum_{k \geq \kappa_n} \mathbb{P}(N(t_k) \geq k). \quad (2.8)$$

Фиксируем $k \geq \kappa_n$. В работе [22] показано, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{M}{k} \leq 1 - \gamma_n + o(\gamma_n), \quad (2.9)$$

откуда, в частности, следует, что $M < k$ для всех $k \geq \kappa_n$ и всех достаточно больших n . По утверждению 2.1 имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t_k) \geq k) &= \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \geq k - M \right) \leq \mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \geq k - M \right) \leq \\ &\leq 2 \exp \left\{ -\frac{(k - M)^2}{32v_0} B \left(\frac{n(k - M)}{8mv_0} \right) \right\} + \\ &+ 2 \exp \left\{ -\frac{(k - M)^2}{32v_1} B \left(\frac{n(k - M)}{8mv_1} \right) \right\} + 22 \left(1 + \frac{4n}{(k - M)} \right)^{1/2} m \alpha \left(\left[\frac{n}{2m} \right] \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

С помощью рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве леммы 2.2, нетрудно получить

$$2 \exp \left\{ -\frac{(k - M)^2}{32v_0} B \left(\frac{n(k - M)}{8mv_0} \right) \right\} \leq$$

$$\leq 2 \exp \left\{ -\frac{mM}{64n} \min \left\{ \left(\frac{k}{M} - 1 \right)^2, \left(\frac{k}{M} - 1 \right) \right\} \right\} \quad (2.11)$$

и аналогично для слагаемого с v_1 .

Заметим, что M как функция k возрастает по k . Используя простейшие свойства нормального распределения, при $k \geq \kappa_n$ (откуда $t_k \leq t_{\kappa_n}$) получим

$$M = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(|x_i| \geq t_k) \geq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(|z_i| \geq t_{\kappa_n}) = 2n \frac{q_n \kappa_n}{2n} = q_n \kappa_n. \quad (2.12)$$

Из (2.9) следует, что при всех достаточно больших n справедливо

$$\frac{M}{k} < 1 - \frac{\gamma_n}{2} < 1 - \frac{\gamma_n}{2 + \gamma_n},$$

откуда $k/M > (2 + \gamma_n)/2$ и

$$\left(\frac{k}{M} - 1 \right) > \frac{\gamma_n}{2}. \quad (2.13)$$

Наконец, заметим, что неравенство $(k/M - 1)^2 > (k/M - 1)$ выполняется лишь в случае $(k/M - 1) > 1$. Но тогда тем более $(k/M - 1) > (\gamma_n/2)^2$, откуда

$$\min \left\{ \left(\frac{k}{M} - 1 \right)^2, \left(\frac{k}{M} - 1 \right) \right\} > \frac{\gamma_n^2}{4}. \quad (2.14)$$

Собирая неравенства (2.10)–(2.14), получим

$$\mathbf{P}(N(t_k) \geq k) \leq 4 \exp \left\{ -\frac{m}{256n} \kappa_n q_n \gamma_n^2 \right\} + 22 \left(1 + \frac{8n}{\kappa_n q_n \gamma_n} \right)^{1/2} m \alpha \left(\left[\frac{n}{2m} \right] \right),$$

что вместе с (2.8) дает утверждение леммы. \square

Следующее утверждение получено в работе [22] Ф. Абрамовича и соавторов для $\sigma = 1$, приведенное здесь обобщение справедливо для любого $\sigma > 0$.

Лемма 2.4. Пусть \hat{t} - произвольный случайный порог, $T > T_0 > 0$, $x_i = \mu_i + z_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $(\hat{\mu})_i = p(x_i, \hat{t})$, $i = 1, \dots, n$, где p обозначает мягкую

или жесткую пороговую обработку. Тогда с некоторой константой $c \equiv c(\sigma, T_0)$,

$$\mathbb{E} \|\hat{\mu} - \mu\|^2 \mathbb{1}(\hat{t} \leq T) \leq cT^2 n (\mathbb{P}(\hat{t} \leq T))^{1/2}.$$

Доказательство. Используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\hat{\mu} - \mu\|^2 \mathbb{1}(\hat{t} \leq T) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} |(\hat{\mu})_i - \mu_i|^2 \mathbb{1}(\hat{t} \leq T) \leq \\ &\leq \sqrt{\mathbb{P}(\hat{t} \leq T)} \sum_{i=1}^n \sqrt{\mathbb{E} |(\hat{\mu})_i - \mu_i|^4 \mathbb{1}(\hat{t} \leq T)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Рассмотрим выражение $|(\hat{\mu})_i - \mu_i|^4$. В случае жесткой пороговой обработки

$$|(\hat{\mu})_i - \mu_i|^4 = \begin{cases} |z_i|^4, & |x_i| > \hat{t}; \\ |z_i - x_i|^4, & |x_i| \leq \hat{t}, \end{cases}$$

а в случае мягкой пороговой обработки

$$|(\hat{\mu})_i - \mu_i|^4 = \begin{cases} |z_i - \hat{t}|^4, & x_i > \hat{t}; \\ |z_i + \hat{t}|^4, & x_i < -\hat{t}; \\ |z_i - x_i|^4, & |x_i| \leq \hat{t}. \end{cases}$$

Заметим, что на событии $\{\hat{t} \leq T\}$ во всех случаях справедливо

$$|(\hat{\mu})_i - \mu_i|^4 \leq (|z_i| + T)^4 \leq 8(z_i^4 + T^4),$$

откуда

$$\mathbb{E} |(\hat{\mu})_i - \mu_i|^4 \mathbb{1}(\hat{t} \leq T) \leq 8(\mathbb{E} z_i^4 + T^4) = 8(\mathbb{E} z_i^4 / T^4 + 1) T^4 \leq c^2 T^4,$$

где $c \equiv c(\sigma, T_0) = 2\sqrt{2(1 + \mathbb{E} z_i^4 / T_0^4)}$. Подставляя данный результат в (2.15), получаем требуемое утверждение. \square

Следующее утверждение приведено в работе [22] Ф. Абрамовича и соавторов.

Лемма 2.5. Для $y \leq 0,01$ справедливы представления

$$z^2(y) = 2 \ln y^{-1} - \ln \ln y^{-1} - r_2(y), \quad r_2(y) \in [1,8; 3]. \quad (2.16)$$

$$z(y) = \sqrt{2 \ln y^{-1}} - r_1(y), \quad r_1(y) \in [0; 1,5]. \quad (2.17)$$

2.3 Асимптотика среднеквадратичного риска FDR–процедуры в условиях слабой зависимости

Следующая теорема, доказанная в работе [76] М.О. Воронцова и О.В. Шестакова, дает верхнюю границу для среднеквадратичного риска FDR–процедуры в случае $\mu \in l_0[\eta_n]$. Ее доказательство проведено для жесткой пороговой обработки, для мягкой пороговой обработки доказательство аналогично.

Теорема 2.1. Пусть $\eta_n \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$, $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; $q_n \leq Q < 1$; $\liminf q_n \ln n > 0$; а также существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, что $\alpha(k) \leq c_1 k^{-1-(9/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда с некоторой константой c не зависящей от n для всех достаточно больших n справедливо

$$\sup_{\mu \in l_0[\eta_n]} \rho(\hat{\mu}_F, \mu) \leq cn\eta_n T_U^2.$$

Доказательство. Пусть $\mu \in l_0[\eta_n]$. Имеем

$$\rho(\hat{\mu}_F, \mu) = \mathbf{E} \|\hat{\mu}_F - \mu\|^2 \mathbf{1}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n^0}) + \mathbf{E} \|\hat{\mu}_F - \mu\|^2 \mathbf{1}(\hat{t}_F > t_{\kappa_n^0}). \quad (2.18)$$

Рассмотрим вероятность

$$\mathbf{P}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n^0}) = \mathbf{P}(\hat{k}_F \geq \kappa_n^0).$$

Заметив, что $\gamma_n > \ln^{-1} n$, $\kappa_n^0 > \eta_n n/2$, $q_n > (\liminf(q_n \ln n)/2) \ln^{-1} n$ для всех достаточно больших n , и применив лемму 2.2 с $m = n^{\delta_1} \ln^5 n$ и произвольным $b \in (0, 1)$, получим

$$\sup_{\mu \in l_0[\eta_n]} \mathbf{P}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n^0}) \leq 4n \exp \left\{ -\frac{(1-b)}{256} n^{\delta_1} \ln^2 n \eta_n \liminf(q_n \ln n) \right\} +$$

$$+22 \left(1 + \frac{16 \ln^2 n}{(1-b)\eta_n \liminf(q_n \ln n)} \right)^{1/2} n^{1+\delta_1} \ln^5 n \alpha \left(\left[\frac{n^{1-\delta_1}}{2 \ln^5 n} \right] \right) = o(\eta_n^2). \quad (2.19)$$

Используя (2.19), лемму 2.4 и $t_{\kappa_n^0} \leq T_U$, для первого слагаемого в (2.18) получим

$$\mathbf{E} \|\hat{\mu}_F - \mu\|^2 \mathbb{1}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n^0}) \leq n o(\eta_n) T_U^2. \quad (2.20)$$

Заметим, что

$$(p_H(x_i, t) - \mu_i)^2 = \begin{cases} (x_i - \mu_i)^2 & |x_i| > t; \\ \mu_i^2 & |x_i| \leq t. \end{cases}$$

Отсюда, и поскольку порог \hat{t}_F выбирается на отрезке $[0, T_U]$, для второго слагаемого в (2.18) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|\hat{\mu}_F - \mu\|^2 \mathbb{1}(\hat{t}_F > t_{\kappa_n^0}) &= \mathbf{E} \sum_{i=1}^n (p(x_i, \hat{t}_F) - \mu_i)^2 \mathbb{1}(t_{\kappa_n^0} < \hat{t}_F \leq T_U) = \\ &= \mathbf{E} \sum_{i=1}^n [(x_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}(|x_i| > \hat{t}_F) + \mu_i^2 \mathbb{1}(|x_i| \leq \hat{t}_F)] \mathbb{1}(t_{\kappa_n^0} < \hat{t}_F \leq T_U) \leq \\ &\leq \mathbf{E} \sum_{i=1}^n [(x_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}(|x_i| > t_{\kappa_n^0}) + \mu_i^2 \mathbb{1}(|x_i| \leq T_U)] \equiv E_1 + E_2, \end{aligned}$$

где

$$E_1 = \mathbf{E} \sum_{i:|\mu_i|>0} [(x_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}(|x_i| > t_{\kappa_n^0}) + \mu_i^2 \mathbb{1}(|x_i| \leq T_U)],$$

$$E_2 = \mathbf{E} \sum_{i:|\mu_i|=0} x_i^2 \mathbb{1}(|x_i| > t_{\kappa_n^0}).$$

Пусть $\xi \sim N(0, 1)$, $x > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \xi^2 \mathbb{1}(|\xi| > x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} u^2 e^{-u^2/2} du = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(u e^{-u^2/2} \Big|_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du \right) = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{-x^2/2} + 2(1 - \Phi(x)) \leq 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \varphi(x),$$

где использовано неравенство $1 - \Phi(x) \leq \varphi(x)/x$, $x \geq 0$. Отсюда

$$E_2 \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} n(t_{\kappa_n^0}/\sigma) e^{-t_{\kappa_n^0}^2/(2\sigma^2)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n\sigma}{t_{\kappa_n^0}} e^{-t_{\kappa_n^0}^2/(2\sigma^2)}.$$

Поскольку $t_{\kappa_n^0} \rightarrow +\infty$, второе слагаемое мало по сравнению с первым. Рассмотрим выражение в экспоненте первого слагаемого. Используя представление (2.16) и ограничения, наложенные на q_n , при больших n получим (здесь $c_3 = \liminf q_n \ln n$)

$$\begin{aligned} -t_{\kappa_n^0}^2/(2\sigma^2) &\leq -\ln \frac{2n(1 - q_n - \gamma_n)}{q_n n \eta_n} + \frac{1}{2} \ln (\ln(\eta_n^{-1} 2c_3^{-1} \ln n)) + \frac{3}{2} \leq \\ &\leq \ln \frac{Q}{1 - Q} + \ln \eta_n + \ln \sqrt{\ln \eta_n^{-1}} + \frac{3}{2} + o(1), \end{aligned}$$

а следовательно

$$E_2 \leq O(n\eta_n T_U^2). \quad (2.21)$$

Перейдем к оценке E_1 . Поскольку в векторе $\mu \in l_0[\eta_n]$ не более $k_n^0 = [\eta_n n]$ ненулевых компонент, имеем

$$\mathbb{E} \sum_{i:|\mu_i|>0} (x_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}(|x_i| > t_{\kappa_n^0}) \leq \mathbb{E} \sum_{i:|\mu_i|>0} z_i^2 \leq n\eta_n \sigma^2.$$

Пусть далее $\xi \sim N(\mu, \sigma)$, тогда если $|\mu| \leq T_U$, то $\mu^2 \mathbb{P}(|\xi| \leq T_U) \leq T_U^2$. Если же $\mu > T_U$ (для $\mu < -T_U$ аналогично), используя $2(1 - \Phi(x)) \leq e^{-x^2/2}$ для $x \geq 0$, получим

$$\mu^2 \mathbb{P}(|\xi| \leq T_U) < \mu^2 \left(1 - \Phi \left(\frac{\mu - T_U}{\sigma} \right) \right) \leq \frac{\mu^2}{2} e^{-(\mu - T_U)^2/(2\sigma^2)},$$

а поскольку при $\mu > T_U$

$$\left(\frac{\mu^2}{2} e^{-(\mu - T_U)^2/(2\sigma^2)} \right)'_{\mu} = \left(\mu - \frac{\mu^2(\mu - T_U)}{2\sigma^2} \right) e^{-(\mu - T_U)^2/(2\sigma^2)},$$

данное выражение не превышает своего значения при

$$\mu = \frac{T_U + \sqrt{T_U^2 + 8\sigma^2}}{2},$$

откуда

$$\mu^2 \mathbf{P}(|\xi| \leq T_U) \leq T_U^2/2 + O(T_U). \quad (2.22)$$

Отсюда и из неравенства

$$\mathbf{E} \sum_{i:|\mu_i|>0} (x_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}(|x_i| > t_{\kappa_n^0}) \leq n\eta_n\sigma^2$$

следует, что для \mathbf{E}_1 справедлива оценка

$$E_1 \leq n\eta_n\sigma^2 + \sum_{i:|\mu_i|>0} \mu_i^2 \mathbf{P}(|x_i| \leq T_U) \leq n\eta_n T_U^2 (1 + o(1)). \quad (2.23)$$

Объединяя (2.20), (2.21) и (2.23), получаем утверждение теоремы. \square

От степени разреженности вектора μ (скорости убывания η_n) зависит асимптотический порядок верхней границы риска, полученной в теореме 2.1. Например, при $\eta_n = n^{-\delta}$, $\delta \in (0, 1)$, получим

$$\sup_{\mu \in l_0[\eta_n]} \rho(\hat{\mu}_F, \mu) \leq 2c\sigma^2 n^{1-\delta} \ln n,$$

Сравнивая данный результат с результатами из работы [22] убеждаемся в том, что в случае $\mu \in l_0[\eta_n]$ при переходе от независимого к слабо зависимому случаю верхняя граница среднеквадратичного риска увеличивается на множитель, не превышающий константы.

Следующая теорема, доказанная в работе [74] М.О. Воронцова, дает верхнюю границу для среднеквадратичного риска FDR-процедуры в случае $\mu \in m_p[\eta_n]$.

Теорема 2.2. Пусть $\eta_n^p \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$, $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; $\liminf q_n \ln n > 0$; $q_n \leq Q < 1$; а также существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, что для коэффициента сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ компонент вектора x

справедливо $\alpha(k) \leq c_1 k^{-1-(9/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sup_{\mu \in m_p[\eta_n]} \rho(\hat{\mu}_F, \mu) \leq n \eta_n^p T_1^p T_U^2 (1 + \varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Доказательство. Пусть $\mu \in m_p[\eta_n]$. Имеем

$$\rho(\hat{\mu}_F, \mu) = \mathbf{E} \|\hat{\mu}_F - \mu\|^2 \mathbb{1}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) + \mathbf{E} \|\hat{\mu}_F - \mu\|^2 \mathbb{1}(\hat{t}_F > t_{\kappa_n}). \quad (2.24)$$

В дальнейших рассуждениях используется соотношение

$$t_{\kappa_n} \leq \sigma T_1 (1 + o(1)),$$

которое сразу следует из представления (2.17) и ограничения на q_n .

Рассмотрим вероятность

$$\mathbf{P}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) = \mathbf{P}(\hat{k}_F \geq \kappa_n).$$

Заметив, что $\gamma_n > \ln^{-1} n$, $\kappa_n > \eta_n n/2$, $q_n > (\liminf q_n \ln n/2) \ln^{-1} n$ для всех достаточно больших n , и применив лемму 2.3 с $m = n^{\delta_1} \ln^5 n$, получим

$$\begin{aligned} \sup_{\mu \in m_p[\eta_n]} \mathbf{P}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) &\leq 4n \exp \left\{ -\frac{1}{1024} n^{\delta_1} \ln^2 n \eta_n \liminf(q_n \ln n) \right\} + \\ &+ 22 \left(1 + \frac{32 \ln^2 n}{\eta_n \liminf(q_n \ln n)} \right)^{1/2} n^{1+\delta_1} \ln^5 n \alpha \left(\left[\frac{n^{1-\delta_1}}{2 \ln^5 n} \right] \right) = o(\eta_n^{2p}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Используя также лемму 2.4, для первого слагаемого в (2.24) получим

$$\mathbf{E} \|\hat{\mu}_F - \mu\|^2 \mathbb{1}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) \leq n o(\eta_n^p) T_1^2. \quad (2.26)$$

Заметим, что

$$(p_H(x_i, t) - \mu_i)^2 = \begin{cases} (x_i - \mu_i)^2, & |x_i| > t; \\ \mu_i^2, & |x_i| \leq t. \end{cases}$$

Отсюда для второго слагаемого в (2.24)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \|\hat{\mu}_F - \mu\|^2 \mathbb{1}(\hat{t}_F > t_{\kappa_n}) &= \mathbf{E} \sum_{i=1}^n (p(x_i, \hat{t}_F) - \mu_i)^2 \mathbb{1}(t_{\kappa_n} < \hat{t}_F \leq T_U) = \\
&= \mathbf{E} \sum_{i=1}^n ((x_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}(|x_i| > \hat{t}_F) + \mu_i^2 \mathbb{1}(|x_i| \leq \hat{t}_F)) \mathbb{1}(t_{\kappa_n} < \hat{t}_F \leq T_U) \leq \\
&\leq \mathbf{E} \sum_{i=1}^n ((x_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}(|x_i| > t_{\kappa_n}) + \mu_i^2 \mathbb{1}(|x_i| \leq T_U)) \equiv E_1 + E_2 + E_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
E_1 &= \mathbf{E} \sum_{i:|\mu_i|>1/T_1} ((x_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}(|x_i| > t_{\kappa_n}) + \mu_i^2 \mathbb{1}(|x_i| \leq T_U)), \\
E_2 &= \mathbf{E} \sum_{i:|\mu_i|\leq 1/T_1} (x_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}(|x_i| > t_{\kappa_n}), \\
E_3 &= \mathbf{E} \sum_{i:|\mu_i|\leq 1/T_1} \mu_i^2 \mathbb{1}(|x_i| \leq T_U).
\end{aligned}$$

Поскольку $\mu \in m_p[\eta_n]$, сумма в выражении для E_1 содержит не более, чем $n\eta_n^p T_1^p$ слагаемых. Используя рассуждения, аналогичные проделанным при получении неравенств (2.22) и (2.21), нетрудно получить

$$E_1 \leq \sum_{i:|\mu_i|>1/T_1} (\sigma^2 + \mu_i^2 \mathbf{P}(|x_i| \leq T_U)) \leq n\eta_n^p T_1^p T_U^2 (1 + o(1)). \quad (2.27)$$

Пусть далее $\xi \sim N(0, 1)$, $x > 0$. Тогда

$$\mathbf{E} \xi^2 \mathbb{1}(|\xi| > x) \leq 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \varphi(x),$$

где использовано неравенство $1 - \Phi(x) \leq \varphi(x)/x$, $x > 0$. Отсюда для i таких, что $|\mu_i| \leq 1/T_1$, имеем

$$\mathbf{E} (x_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}(|x_i| > t_{\kappa_n}) \leq \mathbf{E} \sigma^2 \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma} \right)^2 \mathbb{1} \left(\left| \frac{x_i - \mu_i}{\sigma} \right| > \frac{t_{\kappa_n}}{\sigma} - \frac{1}{\sigma T_1} \right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{t_{\kappa_n}}{\sigma} - \frac{1}{\sigma T_1} \right) (1 + o(1)) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t_{\kappa_n}}{\sigma} - \frac{1}{\sigma T_1} \right)^2 \right\} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1 (1 + o(1)) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(z \left(\frac{q_n \kappa_n}{2n} \right) \right)^2 + \frac{t_{\kappa_n}}{\sigma T_1} \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение в экспоненте. Второе слагаемое не превышает $1 + o(1)$. Для первого слагаемого, используя представление (2.16) и ограничения, наложенные на q_n , при больших n получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(z \left(\frac{q_n \kappa_n}{2n} \right) \right)^2 &\leq -\ln \frac{2n(1 - q_n - \gamma_n)}{q_n n \eta_n^p T_1^{-p}} + \frac{1}{2} \ln (\ln(\eta_n^{-p} 2c_4^{-1} T_1^p \ln n)) + \frac{3}{2} \leq \\ &\leq \ln \frac{Q}{1 - Q} + \ln \eta_n^p + \ln T_1^{-p} + \ln T_1 + \frac{3}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений следует, что

$$E_2 \leq O \left(n \eta_n^p T_1^{2-p} \right) = o \left(n \eta_n^p T_1^p T_U^2 \right). \quad (2.28)$$

Наконец, поскольку $\mu \in m_p[\eta_n]$, для E_3 имеем

$$\begin{aligned} E_3 &\leq \sum_{k=n\eta_n^p T_1^p}^n \left(\eta_n n^{1/p} k^{-1/p} \right)^2 \leq T_1^{-2} + \int_{n\eta_n^p T_1^p}^n \left(\eta_n n^{1/p} y^{-1/p} \right)^2 dy \leq \\ &\leq \frac{p}{2-p} n \eta_n^p T_1^{p-2} (1 + o(1)) = o \left(n \eta_n^p T_1^p T_U^2 \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Объединяя (2.24)–(2.29), получаем утверждение теоремы. \square

В теореме 2.2 исследована зависимость от степени разреженности вектора $\mu \in m_p[\eta_n]$ (скорости убывания η_n) верхней границы среднеквадратичного риска использования оценки $\hat{\mu}_F$ в условиях слабой зависимости компонент вектора x . Например, при $\eta_n = n^{-\delta/p}$, $\delta \in (0, 1)$, имеем

$$\sup_{\mu \in m_p[\eta_n]} \rho(\hat{\mu}_F, \mu) \leq 2^{1+p/2} \delta^{p/2} \sigma^2 n^{1-\delta} (\ln n)^{1+p/2} (1 + o(1))$$

при $n \rightarrow \infty$. В то же время теорема 1.1 утверждает, что при условии

независимости компонент вектора x справедливо

$$\sup_{\mu \in m_p[\eta_n]} \rho(\hat{\mu}_F, \mu) = O(n^{1-\delta}(\ln n)^{1-p/2}).$$

Следовательно, в данном случае при переходе от независимого к слабо зависимому случаю верхняя граница среднеквадратичного риска увеличивается на множитель, не превышающий $O((\ln n)^p)$.

Глава 3. Свойства оценки риска в условиях слабой зависимости

В данной главе проводится исследование оценки риска FDR–метода в условиях слабой зависимости наблюдений. Доказана сильная состоятельность и асимптотическая нормальность оценки риска. Оценивается скорость сходимости распределения оценки риска к нормальному закону. В данной главе предполагается, что вектор данных x имеет многомерное нормальное распределение.

3.1 Асимптотическая нормальность оценки риска при применении FDR–процедуры в условиях слабой зависимости

Следующая теорема доказана в работе [77] М.О. Воронцова и О.В. Шестакова, она задает достаточные условия для асимптотической нормальности оценки риска $\hat{R}(\hat{t}_F)$ в случае $\mu \in m_p[\eta_n]$.

Теорема 3.1. Пусть $\mu \in m_p[\eta_n]$, $\eta_n^p \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$, $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; имеются такие константы $c_1, c_2 > 0$, что для коэффициента сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ компонент вектора x справедливо $\alpha(k) \leq c_1 k^{-1-(5/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$, $k = 1, \dots, n-1$; $q_n < c_3 < 1$; $\liminf q_n \ln n = c_4 > 0$; и, кроме того, для максимального коэффициента корреляции $\rho(\cdot)$ компонент вектора x справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \rho^*(k) = c_5 < \infty.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_\rho \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0, 1),$$

где

$$C_\rho = \sigma^2 \sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j)}.$$

Доказательство приводится для метода мягкой пороговой обработки, в случае жесткой пороговой обработки доказательство аналогично.

Обозначим

$$U(T) = \hat{R}(T) - \hat{R}(T_m) = \sum_{i=1}^n H_i(T, T_m),$$

где

$$H_i(T, T_m) = F[x_i, T] - F[x_i, T_m].$$

Имеем

$$\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m) + \hat{R}(T_m) - \hat{R}(T_m) = \hat{R}(T_m) - R(T_m) + U(\hat{t}_F). \quad (3.1)$$

Покажем, что

$$\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{C_\rho \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0, 1). \quad (3.2)$$

Повторяя рассуждения из [5, 6, 46], можно показать, что $T_m \geq t_{\kappa_n}$. Учитывая также $T_m \leq T_U$, имеем $C\sqrt{\ln n} \leq T_m \leq C'\sqrt{\ln n}$ для некоторых положительных констант C, C' .

В случае мягкой пороговой обработки $\hat{R}(T_m)$ представляет собой несмещенную оценку $R(T_m)$, а при жесткой пороговой обработке и выполнении условий теоремы смещение стремится к нулю при делении на \sqrt{n} [54].

Для дисперсии числителя (3.2) имеем:

$$D\left(\hat{R}(T_m) - R(T_m)\right) = \sum_{i=1}^n DF[x_i, T_m] + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]).$$

Поскольку $\mu \in m_p[\eta_n]$,

$$\sum_{i: |\mu_i| > 1/T_1} DF[x_i, T_m] \leq 4(\sigma^2 + T_m^2)^2 n \eta_n^p T_1^p = o(n), \quad (3.3)$$

$$\sum_{i, j: \max\{|\mu_i|, |\mu_j|\} > 1/T_1, j \neq i} \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]) \leq 16(\sigma^2 + T_m^2)^2 n \eta_n^p T_1^p c_5 = o(n).$$

Далее, учитывая что $Dx_i^2 = 2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu_i^2$, нетрудно убедиться, что

$$\sum_{i:|\mu_i|\leq 1/T_1} DF[x_i, T_m] = \sum_{i:|\mu_i|\leq 1/T_1} Dx_i^2 + o(n) = 2\sigma^4 n + o(n). \quad (3.4)$$

Введем обозначение $D_n = \{(i, j) : \max\{|\mu_i|, |\mu_j|\} \leq 1/T_1, j \neq i\}$. Для суммы ковариаций аналогично (3.4) получим

$$\sum_{(i,j)\in D_n} \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]) = \sum_{(i,j)\in D_n} \text{cov}(x_i^2, x_j^2) + o(n).$$

Воспользуемся тождеством [2]

$$\text{cov}(x_i^2, x_j^2) = 4\mathbf{E}x_i\mathbf{E}x_j\text{cov}(x_i, x_j) + 2\text{cov}^2(x_i, x_j)$$

для вектора (x_i, x_j) , имеющего двумерное нормальное распределение. Заметим, что

$$\sum_{(i,j)\in D_n} 4|\mathbf{E}x_i\mathbf{E}x_j\text{cov}(x_i, x_j)| \leq 8T_1^{-2}\sigma^2nc_5 = o(n);$$

$$\sum_{(i,j)\in D_n} 2\text{cov}^2(x_i, x_j) = 2\sigma^4 \sum_{(i,j)\in D_n} \text{corr}^2(x_i, x_j).$$

Более того, поскольку

$$\sum_{i,j:\max\{|\mu_i|,|\mu_j|\}>1/T_1, j\neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j) \leq 4n\eta_n^p T_1^p c_5 = o(n),$$

имеем

$$\sum_{(i,j)\in D_n} \text{corr}^2(x_i, x_j) = \sum_{j\neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j) + o(n) = c_6 n + o(n),$$

где

$$c_6 = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{j\neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j) \leq 2c_5.$$

Полагая $C_\rho = \sigma^2 \sqrt{1 + c_6}$, получим, наконец,

$$\mathbf{D} \left(\hat{R}(T_m) - R(T_m) \right) = 2nC_\rho^2 + o(n). \quad (3.5)$$

Заметим, что из (3.3), (3.4) и (3.5) следует, что

$$\sup_n \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{D}F[x_i, T_m]}{V_n^2} < \infty, \quad (3.6)$$

где $V_n^2 = \mathbf{D} \sum_{i=1}^n (F[x_i, T_m] - \mathbf{E}F[x_i, T_m])$. Кроме того, поскольку $F[x_i, T_m]$ по модулю ограничены величиной $\sigma^2 + T_m^2$, выполнено условие Линдберга: для любого $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{V_n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{E} \left((F[x_i, T_m] - \mathbf{E}F[x_i, T_m])^2 \mathbb{1} (|(F[x_i, T_m] - \mathbf{E}F[x_i, T_m])| > \varepsilon V_n) \right) \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Из (3.5), (3.6), (3.7), очевидного неравенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \rho^*(k) < 1$$

и центральной предельной теоремы для сильно перемешанных случайных величин [62] следует (3.2).

Перейдем к доказательству того, что $U(\hat{t}_F) n^{-1/2} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Всюду далее, не ограничивая общности, полагаем $\sigma = 1$. Введем обозначения

$$S_1(T) = \sum_{i: |\mu_i| > 1/T_1} H_i(T, T_m), \quad S_2(T) = \sum_{i: |\mu_i| \leq 1/T_1} H_i(T, T_m);$$

$$Z_l(T) = S_l(T) - \mathbf{E}S_l(T), \quad l = 1, 2; \quad d_n = \frac{T_U - t_{\kappa_n}}{n};$$

$$T'_j = t_{\kappa_n} + j d_n, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Поскольку $t_{\kappa_n} \leq T_U$ и $\hat{t}_F \leq T_U$, для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ справедливо

$$\{|U(\hat{t}_F)| > \varepsilon_0\} \subset \{\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}\} \cup \left\{ \sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |U(T)| > \varepsilon_0 \right\},$$

при этом из справедливости тождества $U(T) = \mathbf{E}U(T) + Z_1(T) + Z_2(T)$ следует

$$\begin{aligned} \sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |U(T)| &\leq \sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |\mathbf{E}U(T)| + \sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| + \\ &+ \sup_{j \in [0, n-1]} |Z_2(T'_j)| + \sup_{\substack{j \in [0, n-1] \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)|. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Заметим, что если произошло событие $\{\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |U(T)| > \varepsilon_0\}$, то хотя бы одно слагаемое в правой части неравенства (3.8) будет больше $\varepsilon_0/4$. Отсюда, фиксируя произвольное $\varepsilon > 0$ и полагая $\varepsilon_0 = 4\varepsilon\sqrt{n}$ в рассуждениях выше, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{|U(\hat{t}_F)|}{\sqrt{n}} > 4\varepsilon\right) &\leq \mathbf{P}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) + \mathbf{P}\left(\frac{\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |U(T)|}{\sqrt{n}} > 4\varepsilon\right) \leq \\ &\leq \mathbf{P}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) + \mathbf{P}\left(\frac{\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |\mathbf{E}U(T)|}{\sqrt{n}} > \varepsilon\right) + \\ &+ \mathbf{P}\left(\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| > \varepsilon\sqrt{n}\right) + \mathbf{P}\left(\sup_{j \in [0, n-1]} |Z_2(T'_j)| > \varepsilon\sqrt{n}\right) + \\ &+ \mathbf{P}\left(\sup_{\substack{j \in [0, n-1] \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| > \varepsilon\sqrt{n}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Заметим, что $\gamma_n > \ln^{-1} n$, $\kappa_n > n\eta_n^p \ln^{-1} n \geq n^{1-\delta_1} \ln^{-1} n$, $q_n > c_4 \ln^{-1} n/2$ для всех достаточно больших n . Для первого слагаемого в (3.9) по лемме 2.3 с $m = n^{\delta_1} \ln^7 n$ для больших n имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) &= \mathbf{P}(\hat{k}_F \geq \kappa_n) \leq \\ &\leq 4ne^{-\ln^2 n} + n^{1+\frac{3}{2}\delta_1} \ln^9 n \alpha\left(\left[\frac{n^{1-\delta_1}}{\ln^7 n}\right]\right) = o(1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

при $n \rightarrow \infty$. Для оценки второго слагаемого в (3.9) заметим, что при $T \in$

$[t_{\kappa_n}, T_U]$ справедливо

$$\mathbf{E}H_i(T, T_m) \leq T_U^2 + 1. \quad (3.11)$$

Если же кроме $T \in [t_{\kappa_n}, T_U]$ также выполнено $|\mu_i| \leq T_1^{-1}$, то при больших n

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}H_i(T, T_m)| &\leq 2T_U^2 \mathbf{P}(|x_i| > t_{\kappa_n}) \leq 2T_U^2 \mathbf{P}(|x_i - \mu_i| > t_{\kappa_n} - T_1^{-1}) \leq \\ &\leq 2T_U^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (t_{\kappa_n} - T_1^{-1})^2 \right\} \leq 4(\ln n) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(z \left(\frac{q_n \kappa_n}{2n} \right) \right)^2 + t_{\kappa_n} T_1^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

где использовано неравенство $2(1 - \Phi(x)) \leq e^{-x^2/2}/x$ для $x \geq 0$. Рассмотрим выражение в экспоненте. Второе слагаемое не превышает $1 + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, поскольку $t_{\kappa_n} \leq T_1(1 + o(1))$ при $\sigma = 1$, что нетрудно получить из определения t_{κ_n} , представления (2.17) и ограничения на q_n из формулировки теоремы. Для первого слагаемого, используя представление (2.16) и ограничения, наложенные на q_n , при больших n получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(z \left(\frac{q_n \kappa_n}{2n} \right) \right)^2 &\leq -\ln \frac{2n(1 - q_n - \gamma_n)}{q_n n \eta_n^p T_1^{-p}} + \frac{1}{2} \ln (\ln(\eta_n^{-p} 2c_4^{-1} T_1^p \ln n)) + \frac{3}{2} \leq \\ &\leq \ln \frac{c_3}{1 - c_3} + \ln \eta_n^p + \ln T_1^{-p} + \ln T_1 + \frac{3}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений следует, что с некоторой константой $c_7 = c_7(c_3, p, \delta_1, \delta_2, c_4)$

$$\sup_{\substack{i: |\mu_i| \leq 1/T_1 \\ T \in [t_{\kappa_n}, T_U]}} |\mathbf{E}H_i(T, T_m)| \leq c_7 (\ln n)^{(3-p)/2} \eta_n^p. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) с учетом $\delta_2 > 1/2$ следует

$$\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |\mathbf{E}U(T)| \leq n \eta_n^p T_1^p (T_U^2 + 1) + c_7 (\ln n)^{(3-p)/2} n \eta_n^p = o(\sqrt{n})$$

при $n \rightarrow \infty$, а следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ второе слагаемое в (3.9) обращается в ноль для всех достаточно больших n .

Далее, поскольку при $T \leq T_U$ и $\sigma = 1$

$$|H_i(T, T_m) - \mathbf{E}H_i(T, T_m)| \leq 2(T_U^2 + 2), \quad i = 1, \dots, n,$$

а число слагаемых в $Z_1(T)$ не превосходит $n\eta_n^p T_1^p$, то

$$\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| \leq 2n\eta_n^p T_1^p (T_U^2 + 2) = o(\sqrt{n}) \quad (3.13)$$

при $n \rightarrow \infty$, а следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ и третье слагаемое в (3.9) обращается в ноль для всех достаточно больших n .

Перейдем к оценке четвертого слагаемого в (3.9). Аналогично (3.12) можно получить

$$\sup_{\substack{i: |\mu_i| \leq 1/T_1 \\ T \in [t_{\kappa_n}, T_U]}} \mathbf{D}H_i(T, T_m) \leq \sup_{\substack{i: |\mu_i| \leq 1/T_1 \\ T \in [t_{\kappa_n}, T_U]}} \mathbf{E}(H_i(T, T_m))^2 \leq 2c_7(\ln n)^{(5-p)/2} \eta_n^p. \quad (3.14)$$

По лемме 2.1 с $m = \sqrt{n}(\ln n)^3$ и $k = n - [n\eta_n^p T_1^p]$ для четвертого слагаемого в (3.9) имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{j \in [0, n-1]} |Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \leq \sum_{j \in [0, n-1]} \mathbf{P} (|Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n}) \leq \\ & \leq 4n \exp \left\{ - \frac{\varepsilon^2 n^{3/2} (n - [n\eta_n^p T_1^p])^{-1} (\ln n)^3}{8(T_U^2 + 2)\varepsilon \sqrt{n} + 128c_7(\ln n)^{(5-p)/2} \eta_n^p (n - [n\eta_n^p T_1^p])} \right\} + \\ & + 22 \left(1 + \frac{8(T_U^2 + 2)(n - [n\eta_n^p T_1^p])}{\varepsilon \sqrt{n}} \right)^{1/2} n^{3/2} (\ln n)^3 \alpha \left(\left[\frac{n - [n\eta_n^p T_1^p]}{2(\ln n)^3 \sqrt{n}} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Используя ограничения $n^{-\delta_1} \leq \eta_n^p \leq n^{-\delta_2}$, $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$, из (3.15) получим для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{j \in [0, n-1]} |Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим, наконец, пятое слагаемое в (3.9). Введем обозначение

$$N_2(a, b) = \sum_{i: |\mu_i| \leq 1/T_1} \mathbb{1}(a < |x_i| \leq b).$$

Заметим, что при $0 < a < b$ справедливо

$$|Z_2(b) - Z_2(a)| \leq 2|N_2(a, b) - \mathbf{E}N_2(a, b)| + n(b^2 - a^2);$$

полагая $a = T'_j$, $b = T \in [T'_j, T'_j + d_n]$ для произвольного $j \in [0, n-1]$ и учитывая, что

$$(T^2 - (T'_j)^2) = (T - T'_j)(T + T'_j) \leq 2d_n T_U < 2T_U^2 n^{-1},$$

$$\mathbf{P}(T'_j < |x_i| \leq T) \leq \mathbf{P}(T'_j < |x_i| \leq T'_j + d_n) < d_n < T_U n^{-1},$$

получим оценку

$$|Z_2(T) - Z_2(T'_j)| \leq 2N_2(T'_j, T) + 3T_U^2.$$

Далее, поскольку $N_2(T'_j, T) \leq N_2(T'_j, T'_j + d_n)$ и $\mathbf{E}N_2(T'_j, T'_j + d_n) < T_U^2$, имеем

$$\sup_{T \in [T'_j, T'_j + d_n]} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| \leq 2|N_2(T'_j, T'_j + d_n) - \mathbf{E}N_2(T'_j, T'_j + d_n)| + 5T_U^2.$$

Аналогично (3.12) показывается, что

$$\sup_{\substack{i: |\mu_i| \leq 1/T_1 \\ j \in [0, n-1]}} \mathbf{D}\mathbb{1}(T'_j < |x_i| \leq T'_j + d_n) < c_7 (\ln n)^{(1-p)/2} \eta_n^p. \quad (3.16)$$

Пусть $n > N(\varepsilon)$ настолько, что $(\varepsilon\sqrt{n} - 5T_U^2)/2 > \varepsilon\sqrt{n}/4$. Тогда для пятого слагаемого в (3.9) по лемме 2.1 с

$$X_i = \mathbb{1}(T'_j < |x_i| \leq T'_j + d_n) - \mathbf{E}\mathbb{1}(T'_j < |x_i| \leq T'_j + d_n),$$

$m = \sqrt{n}(\ln n)^2$ и $k = n - [n\eta_n^p T_1^p]$ имеем

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\sup_{\substack{j \in [0, n-1] \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \leq \\
& \leq \sum_{j \in [0, n-1]} \mathbb{P} (|N_2(T'_j, T'_j + d_n) - \mathbb{E}N_2(T'_j, T'_j + d_n)| > \varepsilon \sqrt{n}/4) \leq \\
& \leq 4n \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 n^{3/2} (n - [n\eta_n^p T_1^p])^{-1} (\ln n)^2}{16\varepsilon \sqrt{n} + 64c_7 (\ln n)^{(1-p)/2} \eta_n^p (n - [n\eta_n^p T_1^p])} \right\} + \\
& + 22 \left(1 + \frac{16(n - [n\eta_n^p T_1^p])}{\varepsilon \sqrt{n}} \right)^{1/2} n^{3/2} (\ln n)^2 \alpha \left(\left\lfloor \frac{n - [n\eta_n^p T_1^p]}{2(\ln n)^2 \sqrt{n}} \right\rfloor \right). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Используя ограничения $n^{-\delta_1} \leq \eta_n^p \leq n^{-\delta_2}$, $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$, из (3.17) получим для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left(\sup_{\substack{j \in [0, n-1] \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, показано, что для любого $\varepsilon > 0$ все слагаемые в (3.9) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\frac{|U(\hat{t}_F)|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

что вместе с (3.2) завершает доказательство теоремы. \square

Следующая теорема доказана в работе [77] М.О. Воронцова и О.В. Шестакова, она дает достаточные условия для асимптотической нормальности оценки риска $\hat{R}(\hat{t}_F)$ в случае $\mu \in l_0[\eta_n]$.

Теорема 3.2. Пусть $\mu \in l_0[\eta_n]$, $\eta_n \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$, $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; имеются такие константы $c_1, c_2 > 0$, что для коэффициента сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ компонент вектора x справедливо $\alpha(k) \leq c_1 k^{-1-(5/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$, $k = 1, \dots, n-1$; $q_n < c_3 < 1$; $\liminf q_n \ln n = c_4 > 0$; и, кроме того, для максимального коэффициента корреляции $\rho(\cdot)$ компонент вектора x спра-

ведливо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \rho^*(k) = c_5 < \infty.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_\rho \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0, 1),$$

где

$$C_\rho = \sigma^2 \sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j)}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.1. Вместо κ_n используется κ_n^0 . D_n теперь определяется как $D_n = \{(i, j) : |\mu_i| = |\mu_j| = 0, j \neq i\}$. Условия вида $|\mu_i| < T_1^{-1}$ (вида $|\mu_i| \geq T_1^{-1}$) заменяются условиями $\mu_i = 0$ (соответственно $|\mu_i| > 0$). Поскольку $\mu \in l_0[\eta_n]$, количество i таких, что $|\mu_i| > 0$ (а значит, и число слагаемых в $Z_1(T)$), не превышает $[n\eta_n]$. С этими замечаниями доказательство сходимости

$$\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{C_\rho \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0, 1)$$

полностью аналогично.

При доказательстве сходимости $U(\hat{t}_F) n^{-1/2} \xrightarrow{P} 0$ следует использовать следующие обозначения:

$$S_1(T) = \sum_{i: |\mu_i| > 0} H_i(T, T_m), \quad S_2(T) = \sum_{i: \mu_i = 0} H_i(T, T_m).$$

Для оценки первого слагаемого в (3.9) используется лемма 2.2, в которой можно взять, например, $b = 1/2$, а для κ_n^0 использовать оценку $\kappa_n^0 > n\eta_n/2$. Неравенство (3.11), очевидно, справедливо и в условиях текущей теоремы. Попробуем получить оценку, аналогичную (3.12). Заметим, что при $\sigma = 1$, если выполнено $T \in [t_{\kappa_n}, T_U]$ и $\mu_i = 0$, то при больших n

$$|\mathbf{E}H_i(T, T_m)| \leq 2T_U^2 \mathbf{P}(|x_i| > t_{\kappa_n^0}) \leq 2T_U^2 \exp\left\{-\frac{t_{\kappa_n^0}^2}{2}\right\} =$$

$$= 4(\ln n) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(z \left(\frac{q_n \kappa_n^0}{2n} \right) \right)^2 \right\},$$

где использовано неравенство $2(1 - \Phi(x)) \leq e^{-x^2/2}$ для $x \geq 1$. Для выражения в экспоненте, используя представление (2.16) и ограничения, наложенные на q_n , при больших n имеем

$$\begin{aligned} -t_{\kappa_n^0}^2 / (2\sigma^2) &\leq -\ln \frac{2n(1 - q_n - \gamma_n)}{q_n n \eta_n} + \frac{1}{2} \ln (\ln(\eta_n^{-1} 2c_4^{-1} \ln n)) + \frac{3}{2} \leq \\ &\leq \ln \frac{c_3}{1 - c_3} + \ln \eta_n + \ln \sqrt{\ln \eta_n^{-1}} + \frac{3}{2} + o(1), \end{aligned}$$

а следовательно, с некоторой константой $c_8 = c_8(c_3, p, \delta_1, \delta_2, c_4)$

$$\sup_{\substack{i: \mu_i=0 \\ T \in [t_{\kappa_n^0}, T_U]}} |\mathbf{E}H_i(T, T_m)| \leq c_8 (\ln n)^{3/2} \eta_n. \quad (3.18)$$

Из (3.11) и (3.18) с учетом $\delta_2 > 1/2$ следует

$$\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |\mathbf{E}U(T)| \leq n \eta_n (T_U^2 + 1) + c_8 (\ln n)^{3/2} n \eta_n = o(\sqrt{n})$$

при $n \rightarrow \infty$, а следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ второе слагаемое в (3.9) обращается в ноль для всех достаточно больших n . Аналогичное утверждение о третьем слагаемом следует из неравенства (3.13), которое в условиях текущей теоремы принимает вид

$$\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| \leq 2n \eta_n (T_U^2 + 2) = o(\sqrt{n}).$$

Аналогично (3.18) получаются неравенства

$$\sup_{\substack{i: \mu_i=0 \\ T \in [t_{\kappa_n^0}, T_U]}} \mathbf{D}H_i(T, T_m) \leq 2c_8 (\ln n)^{5/2} \eta_n,$$

$$\sup_{\substack{i: \mu_i=0 \\ j \in [0, n-1]}} \mathbf{D}\mathbb{1}(T'_j < |x_i| \leq T'_j + d_n) < c_8 (\ln n)^{1/2} \eta_n,$$

с помощью которых затем показывается сходимость к нулю при $n \rightarrow \infty$

четвертого и пятого слагаемых в (3.9), что завершает доказательство теоремы. \square

3.2 Сильная состоятельность оценки риска при применении FDR-процедуры в условиях слабой зависимости

Следующая теорема доказана в работе [77] М.О. Воронцова и О.В. Шестакова, она дает достаточные условия для сильной состоятельности оценки риска $\hat{R}(\hat{t}_F)$ в случаях $\mu \in m_p[\eta_n]$ и $\mu \in l_0[\eta_n]$.

Теорема 3.3. Пусть $\mu \in m_p[\eta_n]$, $\eta_n^p \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$ либо $\mu \in l_0[\eta_n]$, $\eta_n \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$; $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; имеются такие константы $c_1, c_2 > 0$, что для коэффициента сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ компонент вектора x справедливо $\alpha(k) \leq c_1 k^{-2-(7/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$, $k = 1, \dots, n-1$; $q_n < c_3 < 1$; $\liminf q_n \ln n = c_4 > 0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{n} \rightarrow 0 \text{ п. в.}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (3.1).

Покажем, что $(\hat{R}(T_m) - R(T_m))n^{-1} \rightarrow 0$ почти всюду при $n \rightarrow \infty$. При мягкой пороговой обработке $\mathbf{E}\hat{R}(T_m) = R(T_m)$, а при жесткой пороговой обработке

$$\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{n} = \frac{\hat{R}(T_m) - \mathbf{E}\hat{R}(T_m)}{n} + \frac{\mathbf{E}\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{n},$$

где второе слагаемое стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ [54]. Следовательно, достаточно показать, что $(\hat{R}(T_m) - \mathbf{E}\hat{R}(T_m))n^{-1} \rightarrow 0$ п. в.

Полагая в лемме 2.1 $k = n$, $X_i = F[x_i, T_m] - \mathbf{E}F[x_i, T_m]$, $b = 2(\sigma^2 + T_m^2)$, $m = n^{1/4}$ и учитывая ограничения на $\alpha(\cdot)$ из условия, нетрудно убедиться, что для всех n

$$\mathbf{P} \left(\left| \frac{\hat{R}(T_m) - \mathbf{E}\hat{R}(T_m)}{n} \right| > \varepsilon \right) \leq 4 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 n^{-3/4}}{8(\sigma^2 + T_m^2)(\varepsilon + 4n)} \right\} +$$

$$+22 \left(1 + \frac{8(\sigma^2 + T_m^2)n}{\varepsilon} \right)^{1/2} n^{1/4} \alpha \left(\left[\frac{n^{3/4}}{2} \right] \right) \leq \frac{C}{n^{1+C'}},$$

где константы C, C' положительны. Откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{\hat{R}(T_m) - \mathbf{E}\hat{R}(T_m)}{n} \right| > \varepsilon \right) < \infty,$$

и по теореме 1.3.4 из [67] $(\hat{R}(T_m) - \mathbf{E}\hat{R}(T_m))n^{-1} \rightarrow 0$ п. в.

Покажем теперь, что $U(\hat{t}_F)n^{-1} \rightarrow 0$ п. в. Доказательство проведено для $\mu \in m_p[\eta_n]$, в случае $\mu \in l_0[\eta_n]$ доказательство аналогично. Аналогично формуле (3.9), для произвольного $\varepsilon > 0$ в терминах теоремы 3.1 можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{|U(\hat{t}_F)|}{n} > 4\varepsilon \right) &\leq \mathbf{P}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) + \mathbf{P} \left(\frac{\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |\mathbf{E}U(T)|}{n} > \varepsilon \right) + \\ &+ \mathbf{P} \left(\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| > \varepsilon n \right) + \mathbf{P} \left(\sup_{j \in [0, n-1]} |Z_2(T'_j)| > \varepsilon n \right) + \\ &+ \mathbf{P} \left(\sup_{\substack{j \in [0, n-1] \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| > \varepsilon n \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 3.1, можно показать, что

$$\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |\mathbf{E}U(T)| = o(n), \quad \sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| = o(n), \quad (3.20)$$

откуда следует, что второе и третье слагаемые в (3.19) обращаются в ноль для всех достаточно больших n .

Используя рассуждения, аналогичные приведенным при выводе формулы (3.1), можно показать, что для больших n с некоторыми положи-

тельными константами C, C' справедливо

$$\mathbf{P}(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) \leq 4ne^{-\ln^2 n} + n^{1+\frac{3}{2}\delta_1} \ln^9 n \alpha \left(\left[\frac{n^{1-\delta_1}}{\ln^7 n} \right] \right) \leq \frac{C}{n^{1+C'}}. \quad (3.21)$$

Для оценки четвертого и пятого слагаемых в (3.19) применим подход, аналогичный использованному при выводе формул (3.15) и (3.17), с тем отличием, что при применении леммы 2.1 положим $m = (\ln n)^3$. Получим оценки

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{j \in [0, n-1]} |Z_2(T'_j)| > \varepsilon n \right) \leq \\ & \leq 4n \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 n^2 (n - [n\eta_n^p T_1^p])^{-1} (\ln n)^3}{8(T_U^2 + 2)\varepsilon n + 128c_7 (\ln n)^{(5-p)/2} \eta_n^p (n - [n\eta_n^p T_1^p])} \right\} + \\ & + 22 \left(1 + \frac{8(T_U^2 + 2)(n - [n\eta_n^p T_1^p])}{\varepsilon n} \right)^{1/2} n (\ln n)^3 \alpha \left(\left[\frac{n - [n\eta_n^p T_1^p]}{2(\ln n)^3} \right] \right) \leq \frac{C}{n^{1+C'}}; \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{\substack{j \in [0, n-1] \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| > \varepsilon n \right) \leq \\ & \leq 4n \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 n^2 (n - [n\eta_n^p T_1^p])^{-1} (\ln n)^3}{16\varepsilon n + 64c_7 (\ln n)^{(1-p)/2} \eta_n^p (n - [n\eta_n^p T_1^p])} \right\} + \\ & + 22 \left(1 + \frac{16(n - [n\eta_n^p T_1^p])}{\varepsilon n} \right)^{1/2} n (\ln n)^3 \alpha \left(\left[\frac{n - [n\eta_n^p T_1^p]}{2(\ln n)^3} \right] \right) \leq \frac{C'''}{n^{1+C'''}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

где константы C, C', C'', C''' положительны. Из соотношений (3.19)–(3.23) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left(\frac{|U(\hat{t}_F)|}{n} > 4\varepsilon \right) < \infty,$$

и по теореме 1.3.4 из [67] $U(\hat{t}_F) n^{-1} \rightarrow 0$ п. в., что завершает доказательство теоремы. \square

3.3 Скорость сходимости распределения оценки риска к нормальному закону.

Для сходимости к нормальному закону в теореме 3.1 в случае $\mu \in m_p[\eta_n]$ справедлива следующая полученная в работе [75] М.О. Воронцова оценка скорости,

Теорема 3.4. Пусть $\mu \in m_p[\eta_n]$, $\eta_n^p \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$; $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; $q_n < Q < 1$; $\liminf q_n \ln n > 0$; и для максимального коэффициента корреляции $\rho(\cdot)$ компонент вектора x справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k) = c_1 < \infty.$$

Тогда если найдутся такие константы $c_2 > 0$, $\gamma > \max\{48, (5/2)\delta_1/(1-\delta_1) + 1\}$, что для коэффициента сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ компонент вектора x справедливо $\alpha(k) \leq c_2 k^{-\gamma}$, $k = 1, \dots, n-1$, то для любого числа

$$l < \min \left\{ \gamma(1 - \delta_1) - 1 - \frac{3}{2}\delta_1, \delta_2 - \frac{1}{2}, \frac{2\gamma}{3}(1 - \delta_2) - \frac{5}{6} - \frac{2\delta_2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{21}{\gamma - 6} \right\}$$

найдется такая положительная константа C (не зависящая от μ), что для всех n

$$\sup_y \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_n \sqrt{2n}} < y \right) - \Phi(y) \right| \leq C n^{-l},$$

где

$$C_n = \sigma^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j)};$$

Если же найдутся такие константы $c_3 > 0$, $\lambda > 0$, что $\alpha(k) \leq c_3 e^{-\lambda k}$, $k = 1, \dots, n-1$, то приведенное утверждение будет справедливо для любого числа $l < \delta_2 - 1/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Второе утверждение теоремы сразу следует из того, что при выполнении его условия выполняется также и условие первого утверждения, причем значение γ можно взять произвольно большим.

Покажем справедливость первого утверждения теоремы в случае использования мягкой пороговой обработки — для жесткой пороговой обработки доказательство аналогично. Обозначим $\varepsilon = n^{-l}$. При доказательстве данной теоремы будут использоваться следующие обозначения:

$$D_n = \{(i, j) : \max\{|\mu_i|, |\mu_j|\} \leq 1/T_1, j \neq i\};$$

$$H_i(T, T_m) = F[x_i, T] - F[x_i, T_m];$$

$$S_1(T) = \sum_{i:|\mu_i|>1/T_1} H_i(T, T_m); S_2(T) = \sum_{i:|\mu_i|\leq 1/T_1} H_i(T, T_m);$$

$$Z_l(T) = S_l(T) - \mathbf{E}S_l(T), l = 1, 2; d_n = \frac{T_U - t_{\kappa_n}}{n};$$

$$T'_j = t_{\kappa_n} + jd_n, j = 0, \dots, n - 1.$$

Заметим, что C_n ограничено сверху и снизу положительными константами. Можем записать

$$\begin{aligned} & \sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_n \sqrt{2n}} < x \right) - \Phi(x) \right| = \\ & = \sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{C_n \sqrt{2n}} + \frac{U(\hat{t}_F)}{C_n \sqrt{2n}} < x \right) - \Phi(x) \right|, \end{aligned}$$

где использовано обозначение

$$U(T) = \hat{R}(T) - \hat{R}(T_m).$$

Из [13] следует, что

$$\begin{aligned} & \sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{C_n \sqrt{2n}} + \frac{U(\hat{t}_F)}{C_n \sqrt{2n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \\ & \leq \sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{C_n \sqrt{2n}} < x \right) - \Phi(x) \right| + \frac{2\varepsilon}{C_n \sqrt{\pi}} + \mathbf{P} \left(\frac{|U(\hat{t}_F)|}{\sqrt{n}} \geq 4\varepsilon \right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Второе слагаемое можно оценить сверху величиной Cn^{-l} , где C - некоторая положительная константа. Для доказательства теоремы достаточно показать, что первое и третье слагаемые пренебрежимо малы по сравнению со вторым (не влияют на порядок выражения). Для третьего слагаемого имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} \left(\frac{|U(\hat{t}_F)|}{\sqrt{n}} > 4\varepsilon \right) &\leq \mathbf{P} (\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) + \mathbf{P} \left(\frac{\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |U(T)|}{\sqrt{n}} > 4\varepsilon \right) \leq \\
&\leq \mathbf{P} (\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) + \mathbf{P} \left(\frac{\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |\mathbf{E}U(T)|}{\sqrt{n}} > \varepsilon \right) + \\
&+ \mathbf{P} \left(\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| > \varepsilon\sqrt{n} \right) + \mathbf{P} \left(\sup_{j \in \{0, \dots, n-1\}} |Z_2(T'_j)| > \varepsilon\sqrt{n} \right) + \\
&+ \mathbf{P} \left(\sup_{\substack{j \in \{0, \dots, n-1\} \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| > \varepsilon\sqrt{n} \right).
\end{aligned}$$

При доказательстве теоремы 3.1 показано, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} (\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) &\leq 4ne^{-\ln^2 n} + n^{1+\frac{3}{2}\delta_1} \ln^9 n \alpha \left(\left[\frac{n^{1-\delta_1}}{\ln^7 n} \right] \right) \leq \\
&\leq C(\ln n)^{C'} n^{1+\frac{3}{2}\delta_1 - \gamma(1-\delta_1)}
\end{aligned}$$

с некоторыми положительными константами C, C' . Следовательно, при

$$l < \gamma(1 - \delta_1) - 1 - \frac{3}{2}\delta_1$$

данная вероятность не влияет на порядок выражения (3.24).

Из доказательства теоремы 3.1 следует, что вторая и третья вероятности обращаются в ноль, если выполняются неравенства

$$\varepsilon\sqrt{n} \geq n\eta_n^p T_1^p (T_U^2 + 1) + c_7(\ln n)^{(3-p)/2} n\eta_n^p,$$

$$\varepsilon\sqrt{n} \geq 2n\eta_n^p T_1^p (T_U^2 + 2),$$

которые, очевидно, выполняются (начиная с некоторого номера n) при

$$l < \delta_2 - \frac{1}{2}.$$

Для оценки четвертой и пятой вероятностей применим подход, аналогичный использованному при доказательстве теоремы 3.1, с тем отличием, что при использовании леммы 4 положим $m = n^{\delta_2} \ln^3 n$ и $m = n^{\delta_2} \ln^2 n$ соответственно. Получим оценку сверху четвертой и пятой вероятностей соответственно выражениями

$$\begin{aligned} & 4n \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_0^2 n^{1+\delta_2} (n - [n\eta_n^p T_1^p])^{-1} (\ln n)^3}{8(T_U^2 + 2)\varepsilon_0\sqrt{n} + 128c_7(\ln n)^{(5-p)/2}\eta_n^p (n - [n\eta_n^p T_1^p])} \right\} + \\ & + 22 \left(1 + \frac{8(T_U^2 + 2)(n - [n\eta_n^p T_1^p])}{\varepsilon_0\sqrt{n}} \right)^{1/2} n^{1+\delta_2} (\ln n)^3 \alpha \left(\left[\frac{n - [n\eta_n^p T_1^p]}{2(\ln n)^3 n^{\delta_2}} \right] \right); \\ & 4n \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_0^2 n^{1+\delta_2} (n - [n\eta_n^p T_1^p])^{-1} (\ln n)^2}{16\varepsilon_0\sqrt{n} + 64c_7(\ln n)^{(1-p)/2}\eta_n^p (n - [n\eta_n^p T_1^p])} \right\} + \\ & + 22 \left(1 + \frac{16(n - [n\eta_n^p T_1^p])}{\varepsilon_0\sqrt{n}} \right)^{1/2} n^{1+\delta_2} (\ln n)^2 \alpha \left(\left[\frac{n - [n\eta_n^p T_1^p]}{2(\ln n)^2 n^{\delta_2}} \right] \right), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ произвольно. Положим $\varepsilon_0 = n^{-l}$, где $l < \delta_2 - 1/2$. Первые части этих выражений убывают быстрее любой степени n , а вторые части можно оценить сверху выражением

$$C(\ln n)^{C'} n^{5/4+l/2+\delta_2-\gamma(1-\delta_2)},$$

где C, C' — некоторые положительные константы. Отсюда следует, что для того чтобы порядок четвертой и пятой вероятностей не влиял на порядок выражения (3.24) достаточно

$$l < \frac{2\gamma}{3}(1 - \delta_2) - \frac{5}{6} - \frac{2\delta_2}{3}.$$

Итак, при указанных условиях третье слагаемое в (3.24) не влияет на порядок.

Перейдем к анализу первого слагаемого в (3.24). Обозначим

$$D = \mathbf{D} \left(\hat{R}(T_m) - R(T_m) \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{C_n \sqrt{2n}} < x \right) - \Phi(x) \right| = \\ & = \sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{\sqrt{D}} < x \frac{C_n \sqrt{2n}}{\sqrt{D}} \right) - \Phi(x) \right| \leq \\ & \leq \sup_y \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{\sqrt{D}} < y \right) - \Phi(y) \right| + \sup_x \left| \Phi \left(x \frac{C_n \sqrt{2n}}{\sqrt{D}} \right) - \Phi(x) \right|. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь для первого слагаемого по теореме 10 из [13] с некоторой константой K

$$\sup_y \left| \mathbf{P} \left(\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{\sqrt{D}} < y \right) - \Phi(y) \right| \leq K n^{(\gamma+15)/(\gamma-6)} \frac{8(T_m^2 + \sigma^2)^3}{D^{3/2}},$$

а следовательно, данное слагаемое не влияет на порядок выражения (3.24), если

$$l < \frac{3}{2} - \frac{\gamma + 15}{\gamma - 6} = \frac{\gamma - 48}{2\gamma - 12}.$$

Для второго слагаемого в (3.25) запишем

$$\begin{aligned} & \sup_x \left| \Phi \left(x \frac{C_n \sqrt{2n}}{\sqrt{D}} \right) - \Phi(x) \right| \leq \sup_x |x| \varphi(x) \left| \frac{C_n \sqrt{2n}}{\sqrt{D}} - 1 \right| = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \left| \frac{(C_n \sqrt{2n} - \sqrt{D})(C_n \sqrt{2n} + \sqrt{D})}{\sqrt{D}(C_n \sqrt{2n} + \sqrt{D})} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \left| \frac{2nC_n^2 - D}{C_n \sqrt{2nD} + D} \right|. \end{aligned}$$

При доказательстве теоремы 3.1 используется разложение

$$D = \sum_{i: |\mu_i| > 1/T_1} \mathbf{D}F[x_i, T_m] + \sum_{i: |\mu_i| \leq 1/T_1} \mathbf{D}F[x_i, T_m] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j:\max\{|\mu_i|,|\mu_j|\}>1/T_1, j\neq i} \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]) + \\
& + \sum_{(i,j)\in D_n} \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]), \tag{3.26}
\end{aligned}$$

при этом было показано, что первая и третья суммы здесь не превышают $n\eta_n^p$ умноженного на некоторую степень логарифма.

Введем обозначения

$$\zeta_i = \mathbb{1}(|x_i| > T_m), \quad p_i = \mathbb{P}(|x_i| > T_m)$$

Для слагаемых из второй суммы в (3.26) справедливо разложение

$$\begin{aligned}
DF[x_i, T_m] &= Dx_i^2 + 2Ex_i^2Ex_i^2\zeta_i - (Ex_i^2\zeta_i)^2 - Ex_i^4\zeta_i - \\
&- 2p_i(T_m^2 + 2\sigma^2)(Ex_i^2 - Ex_i^2\zeta_i) + p_i(1 - p_i)(T_m^2 + 2\sigma^2)^2.
\end{aligned}$$

Пусть $\xi \sim N(0, 1)$, $x > 0$, тогда с помощью неравенства $1 - \Phi(x) \leq e^{-x^2/2}/x$, $x > 0$ можно показать, что

$$\mathbb{E}\xi^4\mathbb{1}(|\xi| > x) \leq 2 \left(x^3 + 3x + \frac{3}{x} \right) e^{-x^2/2},$$

откуда, и поскольку $T_m > t_{\kappa_n}$, $|\mu_i| < T_1^{-1} \lll T_m$, $t_{\kappa_n} \leq \sigma T_1(1 + o(1))$, получим

$$\begin{aligned}
Ex_i^4\mathbb{1}(|x_i| > T_m) &\leq 16\sigma^4 \mathbb{E} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma} \right)^4 \mathbb{1} \left(\left| \frac{x_i - \mu_i}{\sigma} \right| > \frac{t_{\kappa_n}}{\sigma} - \frac{1}{T_1\sigma} \right) < \\
&< CT_1^3 \exp \left\{ -\frac{(t_{\kappa_n} - T_1^{-1})^2}{2\sigma^2} \right\} < C'(\ln n)^{C''} \eta_n^p, \tag{3.27}
\end{aligned}$$

где C, C', C'' — некоторые положительные константы, не зависящие от i, n , а последнее неравенство следует из рассуждений, аналогичных проделанным при доказательстве теоремы 3.1 и сводящихся к тому, что $t_{\kappa_n} - T_1^{-1}$ достаточно близко к $\sigma\sqrt{2\ln\eta_n^p}$. Аналогичные неравенства можно получить

для выражений $\mathbf{E}x_i^2\zeta_i$ и p_i . Наконец, учитывая, что

$$\mathbf{D}x_i^2 = 2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu_i^2, \quad \mathbf{E}x_i^2 = \sigma^2 + \mu_i^2,$$

$$\sum_{i:|\mu_i|<1/T_1} \mu_i^2 \leq T_1^{-2} + \int_{n\eta_n^p T_1^p}^n \left(\eta_n n^{1/p} y^{-1/p}\right)^2 dy = o(n\eta_n^p T_1^p),$$

можем заключить, что с некоторой положительной константой C справедливо

$$\sum_{i:|\mu_i|\leq 1/T_1} \mathbf{D}F[x_i, T_m] = 2\sigma^4 n + o(n\eta_n^p (\ln n)^C).$$

Перейдем к анализу четвертой суммы в (3.26). Для слагаемых этой суммы справедливо разложение

$$\begin{aligned} \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]) &= \text{cov}(x_i^2, x_j^2) + \\ &+ \text{cov}(x_i^2\zeta_i, x_j^2\zeta_j) - \text{cov}(x_i^2, x_j^2\zeta_j) - \text{cov}(x_j^2, x_i^2\zeta_i) + \\ &+ (T_m^2 + 2\sigma^2) (\text{cov}(x_i^2(1 - \zeta_i), \zeta_j) + \text{cov}(x_j^2(1 - \zeta_j), \zeta_i)) + \\ &+ \text{cov}(\zeta_i, \zeta_j)(T_m^2 + 2\sigma^2)^2. \end{aligned}$$

Здесь для модуля третьего слагаемого имеем (используя определение корреляции и оценивая дисперсию сверху через второй момент)

$$|\text{cov}(x_i^2, x_j^2\zeta_j)| \leq \sqrt{\mathbf{E}x_i^4} \sqrt{\mathbf{E}x_j^4\zeta_j} |\text{corr}(x_i^2, x_j^2\zeta_j)| \leq C(\ln n)^{C'} \eta_n^{p/2} |\text{corr}(x_i^2, x_j^2\zeta_j)|,$$

где C, C' — некоторые положительные константы. При этом для второго корня берется оценка (3.27), а первый корень оценивается константой, поскольку при $|\mu_i| < 1/T_1 < 1$ справедливо

$$\mathbf{E}x_i^4 = \mu_i^4 + 6\mu_i^2\sigma^2 + 3\sigma^4 < 1 + 6\sigma^2 + 3\sigma^4.$$

Остальные слагаемые (кроме первого) оцениваются аналогично. Суммируя

по всем $(i, j) \in D_n$ и учитывая, что для любых функций f, g

$$\sum_{i=1}^{j-1} |\text{corr}(f(x_i), g(x_j))| + \sum_{i=j+1}^{\infty} |\text{corr}(f(x_i), g(x_j))| \leq 2c_1,$$

получим

$$\sum_{(i,j) \in D_n} \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]) = \sum_{(i,j) \in D_n} \text{cov}(x_i^2, x_j^2) + O\left(n\eta_n^{p/2}(\ln n)^C\right).$$

где C — некоторая положительная константа.

Для суммы ковариаций квадратов при доказательстве теоремы 3.1 получено следующее представление:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in D_n} \text{cov}(x_i^2, x_j^2) &= \sum_{(i,j) \in D_n} 4\mathbf{E}x_i\mathbf{E}x_j\text{cov}(x_i, x_j) + \\ &+ 2\sigma^4 \left(\sum_{i \neq j} \text{corr}^2(x_i, x_j) - \sum_{i,j: \max\{|\mu_i|, |\mu_j|\} > 1/T_1, j \neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j) \right), \end{aligned}$$

откуда, используя неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i,j: \max\{|\mu_i|, |\mu_j|\} > 1/T_1, j \neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j) &\leq 4n\eta_n^p T_1^p c_1, \\ \sum_{(i,j) \in D_n} 4|\mathbf{E}x_i\mathbf{E}x_j\text{cov}(x_i, x_j)| &\leq 8\sigma^2 c_1 \sum_{i: |\mu_i| < 1/T_1} |\mu_i| \leq \\ &\leq 8\sigma^2 c_1 \left(T_1^{-1} + \int_{n\eta_n^p T_1^p}^n \eta_n n^{1/p} y^{-1/p} dy \right) = o(n^{1-\delta_2/2}), \end{aligned}$$

получим

$$\sum_{(i,j) \in D_n} \text{cov}(x_i^2, x_j^2) = 2\sigma^4 \sum_{i \neq j} \text{corr}^2(x_i, x_j) + o(n^{1-\delta_2/2}).$$

Итак, в результате анализа разложения (3.26) показано, что с некоторой

положительной константой C справедливо

$$D = 2nC_n^2 + O(n^{1-\delta_2/2}(\ln n)^C),$$

и поскольку с некоторыми положительными константами M_1, M_2 справедливо $M_1n \leq C_n\sqrt{2nD} + D \leq M_2n$, имеем (с некоторой положительной константой C)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \left| \frac{2nC_n^2 - D}{C_n\sqrt{2nD} + D} \right| = O(n^{-\delta_2/2}(\ln n)^C) = o(n^{1/2-\delta_2}),$$

а следовательно, второе слагаемое в (3.25) не влияет на порядок выражения (3.24) при $l < \delta_2 - 1/2$.

Теорема доказана. \square

Аналогичное утверждение, доказанное в работе [75] М.О. Воронцова, справедливо для класса разреженности $l_0[\eta_n]$

Теорема 3.5. Пусть $\mu \in l_0[\eta_n]$, $\eta_n \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$; $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$; $q_n < Q < 1$; $\liminf q_n \ln n > 0$; и для максимального коэффициента корреляции $\rho(\cdot)$ компонент вектора x справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k) = c_1 < \infty.$$

Тогда если найдутся такие константы $c_2 > 0$, $\gamma > \max\{48, (5/2)\delta_1/(1-\delta_1) + 1\}$, что для коэффициента сильного перемешивания $\alpha(\cdot)$ компонент вектора x справедливо $\alpha(k) \leq c_2k^{-\gamma}$, $k = 1, \dots, n-1$, то для любого числа l такого, что

$$l < \min \left\{ \gamma(1 - \delta_1) - 1 - \frac{3}{2}\delta_1, \delta_2 - \frac{1}{2}, \frac{2\gamma}{3}(1 - \delta_2) - \frac{5}{6} - \frac{2\delta_2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{21}{\gamma - 6} \right\},$$

найдется такая положительная константа C (не зависящая от μ), что для всех n

$$\sup_y \left| \mathbb{P} \left(\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_n\sqrt{2n}} < y \right) - \Phi(y) \right| \leq Cn^{-l},$$

где

$$C_n = \sigma^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j)};$$

Если же найдутся такие константы $c_3 > 0$, $\lambda > 0$, что $\alpha(k) \leq c_3 e^{-\lambda k}$, $k = 1, \dots, n-1$, то приведенное утверждение будет справедливо для любого числа $l < \delta_2 - 1/2$.

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. Обозначения S_1 , S_2 , D_n определяются как

$$S_1(T) = \sum_{i:|\mu_i|>0} H_i(T, T_m), \quad S_2(T) = \sum_{i:|\mu_i|=0} H_i(T, T_m);$$

$$D_n = \{(i, j) : |\mu_i| = |\mu_j| = 0, j \neq i\}.$$

Разложение (3.26) принимает вид

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i:|\mu_i|>0} \mathbf{D}F[x_i, T_m] + \sum_{i:|\mu_i|=0} \mathbf{D}F[x_i, T_m] + \\ &+ \sum_{i,j:|\mu_i|+|\mu_j|>0, j \neq i} \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]) + \sum_{(i,j) \in D_n} \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]). \end{aligned}$$

Оценки вида (3.27) получаются из следующих рассуждений:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} x_i^4 \mathbf{1}(|x_i| > T_m) &\leq \sigma^4 \mathbf{E} \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^4 \mathbf{1} \left(\left| \frac{x_i}{\sigma} \right| > \frac{t_{\kappa_n^0}}{\sigma} \right) < \\ &< C T_1^3 \exp \left\{ -\frac{(t_{\kappa_n^0})^2}{2\sigma^2} \right\} < C' (\ln n)^{C''} \eta_n, \end{aligned}$$

где C , C' , C'' — некоторые положительные константы, не зависящие от i , n . Получение остальных оценок производится аналогично соответствующим оценкам из теоремы 3.4. \square

Заключение

Обзор проведенного исследования. Настоящая работа выполнена в области математической статистики и посвящена исследованию асимптотических свойств среднеквадратичного риска и оценки среднеквадратичного риска применения FDR–порога в задаче множественной проверки гипотез со слабо зависимыми наблюдениями. Основные научные результаты данной работы заключаются в следующем:

- Получена верхняя граница для среднеквадратичного риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в случае классов разреженности исходных данных $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$ и при условии слабой зависимости наблюдений.
- Доказана сильная состоятельность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в случае классов разреженности исходных данных $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$ и при условии слабой зависимости наблюдений.
- Доказана асимптотическая нормальность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR–порогом в случае классов разреженности исходных данных $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$ и при условии слабой зависимости наблюдений.
- Получены оценки скорости сходимости распределения оценки риска FDR–процедуры к нормальному закону в случае классов разреженности исходных данных $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$ и при условии слабой зависимости наблюдений.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы диссертации.

- Продолжение исследования в направлении улучшения оценок скорости сходимости к нормальному закону распределений оценок риска пороговой обработки для классов разреженности $l_0[\eta_n]$ и $m_p[\eta_n]$.
- Исследование асимптотического поведения среднеквадратичного риска и статистических свойств его оценок в моделях с негауссовым шумом при условии слабой зависимости наблюдений.
- Обобщение результатов диссертации на модели, возникающие при решении обратных статистических задач, в которых наблюдения представляют собой некоторое линейное преобразование от вектора данных, для которого требуется построить оценку.
- Обобщение результатов диссертации на модель с долгосрочной зависимостью.
- Рассмотрение случая, когда исходные данные представимы в виде разреженной матрицы $\mu \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ (или тензора более высокого порядка), и исследование асимптотического поведения среднеквадратичного риска и статистических свойств его оценок при условии быстрого падения зависимости шума по мере увеличения расстояния между элементами матрицы (тензора).

Литература

- [1] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 стр.
- [2] *Ерошенко А.А.* Статистические свойства оценок сигналов и изображений при пороговой обработке коэффициентов в вейвлет-разложениях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.05. — Моск. гос. университет, Москва, 2015 — 82 с.
- [3] *Ерошенко А.А., Шестаков О.В.* Асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов в модели с коррелированным шумом // Информатика и ее применения, 2014. Т. 8. № 1. С. 36–44.
- [4] *Засна А.Ю., Шестаков О.В.* Состоятельность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR-порогом // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, 2017. Вып. 1. С. 5–16.
- [5] *Кудрявцев А.А., Шестаков О.В.* Асимптотически оптимальная пороговая обработка вейвлет-коэффициентов в моделях с негауссовым распределением шума // Доклады Академии наук. 2016. Т. 471. № 1. С. 11–15.
- [6] *Кудрявцев А.А., Шестаков О.В.* Асимптотическое поведение порога, минимизирующего усредненную вероятность ошибки вычисления вейвлет-коэффициентов // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468, № 5. С. 487–491.
- [7] *Лидбеттер М., Линдгрэн Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. — М.: Мир, 1989.
- [8] *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов. // М.: Мир, 2005. 304 стр.

- [9] *Маркин А.В.* Предельное распределение оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Информатика и ее применения, 2009. Т. 3. № 4. С. 57–63.
- [10] *Палионная С.И.* Сильная состоятельность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR-порогом // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2020. Вып. 4, С. 34–39.
- [11] *Палионная С.И.* Скорость сходимости оценки риска к нормальному закону в задаче множественной проверки гипотез с использованием FDR-порога // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2021. Вып. 3, С. 31–36.
- [12] *Палионная С.И.* Асимптотические свойства оценок риска в задачах множественной проверки гипотез: дис. ... канд. физ.-мат. наук 1.1.4 / Палионная С.И. — М., 2023. — 83 с.
- [13] *Сунклодас Й.* Аппроксимация распределений сумм слабо зависимых случайных величин нормальным распределением — Теория вероятностей — 6. Предельные теоремы теории вероятностей, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, Т. 81. — М.: ВИНТИ, 1991. С. 140–199.
- [14] *Шестаков О.В.* Асимптотическая нормальность оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов при выборе адаптивного порога // Доклады РАН, 2012. Т. 445. № 5. С. 513–515.
- [15] *Шестаков О.В.* О скорости сходимости оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов к нормальному закону при использовании робастных оценок дисперсии // Информатика и ее применения, 2012. Т. 6. № 2. С. 122–128.
- [16] *Шестаков О.В.* О точности приближения распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов сигнала нормальным законом при неизвестном уровне шума // Системы и средства информатики, 2012. Т. 22. № 1. С. 142–152.

- [17] *Шестаков О.В.* Центральная предельная теорема для функции обобщенной кросс-валидации при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Информатика и ее применения, 2013. Т. 7. № 2. С. 40–49.
- [18] *Шестаков О.В.* Предельные теоремы для оценки риска в моделях с негауссовым шумом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2018. № 2. С. 36–39.
- [19] *Шестаков О.В.* Пороговые функции в методах подавления шума, основанных на вейвлет-разложении сигнала // Информатика и ее применения, 2021. Т. 15, № 3. С. 51–56.
- [20] *Шестаков О.В.* Несмещенная оценка риска пороговой обработки с двумя пороговыми значениями // Информатика и ее применения, 2022. Т. 16, № 4. С. 14–19.
- [21] *Abramovich F., Sapatinas T., Silverman B.W.* Wavelet Thresholding via A Bayesian Approach // Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 1998. Vol. 60. Issue 4. P. 725–749
- [22] *Abramovich F., Benjamini Y., Donoho D., Johnstone I.* Adapting to Unknown Sparsity by controlling the False Discovery Rate // The Annals of Statistics, 2006. Vol. 34. No. 2. P. 584–653.
- [23] *Batvandi Z., Afshari M., Karamikabir H.* Bayesian shrinkage wavelet estimation of mean matrix of the matrix variate normal distribution with application in de-noising // Comp. Appl. Math., 2024. 44.
- [24] *Benedetto, J.* A wavelet auditory model and data compression // Applied and Computational Harmonic Analysis, 1993. Vol. 1. No. 1. P. 3–28.
- [25] *Benjamini Y., Hochberg Y.* Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing // Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 1995. Vol. 57. P. 289–300.
- [26] *Benjamini Y., Yekutieli D.* The control of the false discovery rate in multiple testing under dependency // Ann. Statist., 2001. — Vol. 29. No. 4. — P. 1165–1188.

- [27] *Bosq D.* Nonparametric Statistics for Stochastic Processes: Estimation and Prediction. Lecture Notes in Statistics, Vol. 110. — Springer New York, NY, 1996. 188 p.
- [28] *Boubchir L., Fadili J.M., Bloye D.* Bayesian denoising in the wavelet-domain using an analytical approximate alpha-stable prior // Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR 2004). Cambridge, UK, 2004. Vol. 4. P. 889–892.
- [29] *Bradley R.C.* Basic properties of strong mixing conditions. A survey and some open questions // Probability Surveys, 2005. Vol. 2. P. 107–144.
- [30] *Breiman L.* Heuristics of Instability and Stabilization in Model Selection // Ann. Statist., 1996. Vol. 24. No. 6. P. 2350–2383.
- [31] *Chang S.G., Yu B., M. V.* Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression // IEEE transactions on image processing, 2000. Vol. 9. No. 9. P. 1532–1546
- [32] *Cohen A., Daubechies I., Vial P.* Wavelets on the interval and fast wavelet transforms // Applied and computational harmonic analysis, 1993. Vol. 1. No. 1. P. 54–81
- [33] *DeVore R.A., Jawerth B., Lucier B.* Image compression through wavelet transform coding // IEEE Transactions on Information Theory, 1992. Vol 38. No 2. P. 719–746.
- [34] *Donoho D.* Denoising by soft–thresholding // IEEE transactions on information theory, 1995. Vol. 41. No. 3. P. 613–627.
- [35] *Donoho D., Johnstone I.M.* Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage // Biometrika, 1994. Vol. 81. No. 3. P. 425–455.
- [36] *Donoho D., Johnstone I.M.* Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // Journal of the American Statistical Association, 1995. Vol. 90. P. 1200–1224.
- [37] *Donoho D., Johnstone I.M.* Neo–classical minimax problems, thresholding and adaptive function estimation // Bernoulli, 1996. Vol. 2. No. 1. P. 39–62.

- [38] *Donoho D., Johnstone I.M.* Minimax estimation via wavelet shrinkage // Ann. Statist., 1998. Vol. 26. No. 3. P. 879–921.
- [39] *Donoho D., Johnstone I.M., Kerkyacharian G., Picard D.* Wavelet shrinkage: Asymptopia? // Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 1995. Vol 57. Issue 2. P. 301–369.
- [40] *Dudoit S., Laan M.* Multiple Testing Procedures With Applications to Genomics. — 2008.
- [41] *Efron B.* Large-scale inference: empirical Bayes methods for estimation, testing, and prediction. — Cambridge University Press, 2010.
- [42] *Eldar Y. C.* Generalized SURE for exponential families: Applications to regularization // IEEE Transactions on Signal Processing, 2009. Vol. 57. No. 2. P. 471–481.
- [43] *Farcomeni A.* Some Results on the Control of the False Discovery Rate under Dependence // Scandinavian Journal of Statistics, 2007. Vol. 34. No. 2. P. 275–297.
- [44] *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction. — Springer Science and Business Media, 2009. 764 p.
- [45] *Huang H.C., Lee T.C. M.* Stabilized thresholding with generalized sure for image denoising // Proceedings of 2010 IEEE 17th International Conference on Image Processing (ICIP 2010). IEEE, 2010. P. 1881–1884.
- [46] *Jansen M.* Noise Reduction by Wavelet Thresholding. — New York: Springer: Lecture Notes in Statistics, 2001. 161 p.
- [47] *Jansen M., Malfait M., Bultheel A.* Generalized Cross Validation for waveletthresholding // Signal Processing, 1997. Vol. 56. No. 1. P. 33–44.
- [48] *Johnstone I.M.* Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems adaptivity results // Statist. Sinica, 1999. Vol. 9. P. 51–83.

- [49] *Johnstone I.M., Silverman B.W.* Wavelet threshold estimates for data with correlated noise // Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 1997. Vol. 59. P. 319–351.
- [50] *Johnstone I.M., Silverman B.W.* Empirical Bayes selection of wavelet thresholds // Annals of Statistics, 2005. 33(4). P. 1700–1752.
- [51] *Kudryavtsev A.A., Shestakov O.V.* Properties of the SURE Estimates When Using Continuous Thresholding Functions for Wavelet Shrinkage // Mathematics, 2024. Vol. 12. No. 23. P. 3646.
- [52] *Makeig, S., Debener, S., Onton, J., Delorme, A.* Mining event-related brain dynamics // Trends in cognitive sciences, 2004. — Vol. 8. No 5. P. 204–210.
- [53] *Mallat S.* Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L_2(\mathbb{R})$ // Transactions of Amer. Math. Soc., 1989. Vol. 315. No. 1. P. 69–87.
- [54] *Mallat S.* A Wavelet Tour of Signal Processing. — New York: Academic Press, 1999. 857 p.
- [55] *Mallat S.* A wavelet tour of signal processing: the sparse way. — Academic press, 2008. 109 p.
- [56] *Marron J.S., Adak S., Johnstone I.M., Neumann M.H., Patil P.* Exact risk analysis of wavelet regression // Journal of Computational and Graphical Statistics, 1998. Vol. 7. P. 278–309.
- [57] *Meyer Y.* Wavelets and operators // Cambridge University Press, 1992. 223 p.
- [58] *Muller P., Vidakovic B.* Bayesian Inference in Wavelet Based Models. — NY: Springer, 1999. — 394 p.
- [59] *Nabaneet D., Subir K.B.* FWER for normal distribution in nearly independent setup // Statistics and Probability Letters, 2025. 219:110340.
- [60] *Nason G.P.* Wavelet shrinkage using cross validation // Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 1996. Vol. 58. P. 463–479.

- [61] *Palionnaya S.I., Shestakov O.V.* Asymptotic Properties of MSE Estimate for the False Discovery Rate Controlling Procedures in Multiple Hypothesis Testing // Mathematics, 2020. Vol. 8. No. 11. P. 1913.
- [62] *Peligrad M.* On the Asymptotic Normality of Sequences of Weak Dependent Random Variables // Journal of Theoretical Probability, 1996. Vol. 9. No. 3. P. 703–715.
- [63] *Pollard D.* Convergence of Stochastic Processes. Springer Series in Statistics. — Springer New York, NY, 1984. 215 p.
- [64] *Raath K.C., Ensor K.B., Crivello A., Scott D.W.* Denoising Non-Stationary Signals via Dynamic Multivariate Complex Wavelet Thresholding // Entropy, 2023. 25(11):1546.
- [65] *Ruderman D.L.* The Statistics of Natural Images // Network: Computation in Neural Systems, 1994. Vol. 5. No. 4. P. 517–548.
- [66] *Selesnick I.W.* Sparse signal representations using the tunable Q-factor wavelet transform // Proceedings of SPIE : Wavelets and Sparsity XIV, 2011. Vol. 8138. P. 1–15
- [67] *Serfling R.J.* Approximation theorems of mathematical statistics. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2002. 371 p.
- [68] *Stein C.* Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // The Annals of Statistics, 1981. Vol. 9. No. 6. P. 1135–1151.
- [69] *Storey J.D.* A direct approach to false discovery rates // Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 2002. Vol. 64. No. 3. P. 479–498.
- [70] *Storey J. D., Tibshirani R.* Statistical significance for genomewide studies // Proceedings of the National Academy of Sciences, 2003. Vol. 100. No. 16. P. 9440–9445.
- [71] *Taassori M.* Enhanced Wavelet-Based Medical Image Denoising with Bayesian-Optimized Bilateral Filtering // Sensors, 2024. 24(21):6849.

- [72] *Tony Cai, Harrison H. Zhou* A Data-Driven Block Thresholding Approach to Wavelet Estimation // The Annals of Statistics, 2009. Vol. 37. No. 2. P. 569–595.
- [73] *Xinrui He, Jay Bartroff* Asymptotically optimal sequential FDR and pFDR control with (or without) prior information on the number of signals // J. of Stat. Planning and Inference, 2021. — Vol. 210. — P. 87–99.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка RSCI

- [74] *Воронцов М.О.* Анализ среднеквадратичного риска при использовании методов множественной проверки гипотез для выбора параметров пороговой обработки в условиях слабой зависимости // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2024. Вып. 2, С. 18–24.
- [75] *Воронцов М.О.* Скорость сходимости оценки риска к нормальному закону при использовании FDR-порога в условиях слабой зависимости // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2025. Вып. 3, С. 23–31.
- [76] *Воронцов М.О., Шестаков О.В.* Среднеквадратичный риск FDR-процедуры в условиях слабой зависимости // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 34–40.
- [77] *Воронцов М.О., Шестаков О.В.* Асимптотическая нормальность и сильная состоятельность оценки риска при использовании FDR-порога в условиях слабой зависимости // Информатика и ее применения, 2024. Т. 18, Вып. 3, С. 69–79.

В сборниках трудов конференций

- [78] *Воронцов М.О.* Среднеквадратичный риск FDR-метода в задаче выявления значимых элементов разреженного массива слабо зависимых данных // Санкт-петербургская молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 25–28 ноября 2024. Тезисы: https://indico.eimi.ru/event/1672/attachments/427/892/abstracts_2024.pdf
- [79] *Воронцов М.О., Шестаков О.В.* Асимптотика риска FDR-метода при наличии слабой зависимости в данных // Ломоносовские чтения — 2023: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов, серия «Вычислительная математика и кибернетика». — 2023. — С. 98–99.
- [80] *Воронцов М.О., Шестаков О.В.* Среднеквадратичный риск метода контроля доли ложных отклонений в задаче множественной проверки гипотез для разреженных слабо зависимых данных // Тезисы докладов научной конференции «Тихоновские чтения». — 2023. — С. 88–88
- [81] *Воронцов М.О., Шестаков О.В.* Анализ оценки риска при использовании методов множественной проверки гипотез в задачах обработки разреженных массивов слабо зависимых данных // Ломоносовские чтения — 2023: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов, серия «Вычислительная математика и кибернетика». — 2024. — С. 134–135.
- [82] *Воронцов М.О., Шестаков О.В.* Асимптотические результаты для среднеквадратичного риска при использовании методов множественной проверки гипотез в условиях зависимости наблюдений // Тезисы докладов научной конференции «Тихоновские чтения». — 2024. — С. 112–112
- [83] *Воронцов М.О., Шестаков О.В.* Asymptotic results for the mean-square risk when using multiple hypothesis testing methods for weakly dependent observations // XXXVII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Shenzhen, Китай, 13-17 октября 2025. Тезисы: <https://cs.msu.ru/sites/cmc/files/attachs/abstracts.pdf>