ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Пустовойтова Сергея Евгеньевича
на тему: «Топология и классификация слоений Лиувилля интегрируемых возмущений классических и топологических биллиардов»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Диссертационная работа Пустовойтова Сергея Евгеньевича посвящена популярной в настоящее время и стремительно развивающейся тематике исследования интегрируемых биллиардов. Для привычных систем механики с двумя степенями свободы, к которым, конечно же, относится и классический плоский биллиард, интегрируемость означает существование некоторого закона сохранения наряду с законом сохранения энергии, причем эти два закона сохранения независимы. Это достаточно сильное условие, значительно ограничивающее класс подобных систем. Как известно, в общем случае гамильтонова система не обладает интегрируемостью. К тому же стоит ожидать, что произвольное возмущение исходно интегрируемой системы приведет к потере интегрируемости. В связи с этим возникает интерес, во-первых, как устроены возмущения, сохраняющие интегрируемость системы, и, во-вторых, как будут различаться между собой исходная система и возмущенная. В своих фундаментальных работах Дж. Биркгоф показал, что плоский математический биллиард, ограниченный эллипсом, с абсолютно упругим отражением от границы и свободным движением в промежутках между ударами допускает дополнительный закон сохранения, то есть является интегрируемым. Была выдвинута знаменитая гипотеза, согласно которой плоский выпуклый биллиард, ограниченный гладким контуром, допускает интегрируемость только в случае эллипса. Локально эта гипотеза была доказана В.Ю. Калошиным и А. Соррентино в 2018 году. Результат гласит, что выпуклое возмущение границы эллиптического биллиарда тогда лишь сохранит интегрируемость, когда граница полученного биллиарда останется эллипсом. Но давайте рассмотрим возмущение не границы биллиарда, а его динамики. Например, добавим действие потенциала или магнитного поля. Именно этому сюжету посвящено исследование диссертации С.Е. Пустовойтова.

Задача сравнения интегрируемых систем сводится к определению отношения эквивалентности между ними. Диссертационное исследование лежит в рамках лиувиллевой эквивалентности, т.е. существования гомеоморфизма фазовых пространств, сохраняющего слоения Лиувилля двух систем и ориентацию их критических окружностей. Иными словами, интерес представляет слоение Лиувилля интегрируемых биллиардов: его топология, особенности, локальная и глобальная структура. Методы исследования интегрируемых систем с этой точки зрения были разработаны А.Т.Фоменко, Х.Цишангом, С.В.Матвеевым, А.В.Болсиновым. В ограничение на неособую изоэнергетическую поверхность класс лиувиллевой эквивалентности определяется инвариантом Фоменко- Цишанга (графом Риба слоения с дополнительной информацией, определяющей локальную структуру особенностей слоения и их взаимосвязанность). Таким образом, инвариант Фоменко-Цишанга полностью определяет структуру слоения на неособом уровне энергии.

Диссертационную работу С.Е. Пустовойтова можно разбить на три части: эллиптико-гиперболические биллиарды с потенциалом Гука, эллиптический биллиард с полиномиальным потенциалом и магнитные биллиарды. В каждом случае автор начинает исследование с вопроса интегрируемости возмущения. Так, для полиномиального потенциала, сохраняющего интегрируемость эллиптического биллиарда, была представлена явная формула, записанная в эллиптических координатах. Оказалось, что такие потенциалы полностью определяются некоторым многочленом P над полем вещественных чисел. Затем для полученной интегрируемой системы устанавливается структура слоения Лиувилля: для неособой изоэнергетической поверхности вычисляется инвариант Фоменко-Цишанга; для четырехмерной полулокальной особенности определяется тип почти прямого произведения. Важная особенность такого анализа заключается в наглядности биллиарда: двумерные слои слоения в четырехмерном фазовом или трехмерном изоэнергетическом пространстве изучаются на уровне их плоских проекций на биллиардную область. В связи с этим большой акцент в диссертации уделен иллюстрациям.

Полученные С.Е. Пустовойтовым результаты позволяют устанавливать соответствия между изученными биллиардами и другими интегрируемыми системами с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. В некоторой степени это уже было продемонстрировано в диссертации.

Текст диссертации изложен на 207 страницах и содержит введение, пять глав, заключение и список литературы из 43 наименований, из которых 7 работ автора по теме диссертации.

Введение посвящено истории вопроса и основным положениям диссертационной работы. Изложены основные результаты автора, их научная новизна и актуальность в рамках современной теории математических биллиардов, а также исторический контекст, включающий исследования Дж. Биркгофа, А.Т. Фоменко, В.В. Козлова, М.П. Харламова, А.Е. Миронова, В.И. Драговича, В.В. Ведюшкиной и других.

В **первой главе** изложена теоретическая основа исследования. Приведено определение лиувиллевой эквивалентности интегрируемых систем, понятие 3-атома и инварианта Фоменко-Цишанга, а также сформулированы фундаментальные теоремы теории интегрируемых систем. Все результаты автора изложены в приведенной в этой главе терминологии.

Вторая глава посвящена изучению слоения Лиувилля биллиардов, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами и снабженных потенциалом Гука. Исследование опирается на классификацию эллиптико-гиперболических биллиардных областей, предложенную В.В. Ведюшкиной, однако теперь ключевую роль играет наличие общих точек области с серединным перпендикуляром к фокальному отрезку. Главный результат этой главы, который выносится на защиту, заключается в лиувиллевой классификации неособых изоэнергетических многообразий таких биллиардов. Был получен список инвариантов Фоменко-Цишанга, соответствующих таким системам.

В **третьей главе** рассматривается эллиптический биллиард с потенциалом, полиномиальным в декартовых координатах. В первую очередь автор задается вопросом интегрируемости такого биллиарда. Используя общий критерий, предложенный В.В. Козловым, была получена явная формула полиномиального потенциала, сохраняющего интегрируемость. Это новый результат, и он выносится на защиту.

Таким образом, был получен новый класс интегрируемых биллиардов. Далее, автор решает задачу лиувиллевой классификации их неособых изоэнергетических многообразий. Главным результатом этой главы является алгоритм вычисления соответствующего инварианта Фоменко-Цишанга. Грубая молекула инварианта строится, исходя из вида полиномиального потенциала, а числовые метки на ребре определяются ее 3-атомами. На защиту выносится теорема о свойствах построенного инварианта, подробно описывающих его структуру.

Кроме того, была изучена структура бифуркационной диаграммы такого биллиарда. Доказана общая теорема о бифуркационных дугах, и затем рассмотрен частный случай потенциала четвертой степени. В явном виде были построены 18 бифуркационных диаграмм и установлена их зависимость от параметров системы. Этот результат также выносится на защиту.

Четвертая глава посвящена четырехмерным особенностям биллиардов с потенциалом. В первом и втором разделе вычисляются невырожденные точки ранга 0 и вырожденные критические траектории уже рассмотренного эллиптического биллиарда с потенциалом четвертой степени, и затем описываются слоения Лиувилля в четырехмерных окрестностях слоев, содержащих найденные особенности. На защиту выносится результат, записанный в терминах почти прямого произведения Н.Т. Зунга.

Третий раздел главы посвящен реализации фокальных особенностей с помощью биллиардов с потенциалом. В качестве базового биллиарда был выбран биллиард, ограниченный окружностью, с центральным отталкивающим потенциалом Гука. Было доказано, что биллиардная книжка, склеенная из n его копий, реализует наперед заданную особенность типа фокус-фокус. На защиту выносится вычисление матрицы монодромии этой особенности.

В последней **пятой главе** рассматриваются интегрируемые магнитные биллиарды с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. Автор опирается на результат А.Е. Миронова и М. Бялого, согласно которому интегрируемость магнитного биллиарда достигается только в случае круговой биллиардной области либо в случае кольца, ограниченного окружностями с общим центром. Эти области берутся в качестве элементарных для построения магнитных топологических биллиардов, т.е. биллиардных книжек, имеющих структуру ориентируемого многообразия. Основным результатом, который выносится на защиту, служит алгоритм, строящий инвариант Фоменко-Цишанга магнитного топологического биллиарда для фиксированного неособого уровня энергии, исходя из формы этого биллиарда. Кроме этого, был разработан обратный алгоритм, который строит топологический биллиард по инварианту.

В **заключении** автор подводит итоги проведенной работы и указывает на дальнейшие пути развития тематики диссертации.

Стоит также отметить, что в ходе решения задач диссертации по топологической классификации биллиардов были установлены лиувиллево эквивалентные им интегрируемые системы с двумя степенями свободы. Так, во второй главе был установлен список интегрируемых случаев динамики твердого тела, эквивалентный биллиардам с потенциалом Гука, а в пятой главе показано, что геодезические потоки на поверхностях вращения с потенциалом эквивалентны магнитным топологическим биллиардам. Полученные соответствия устанавливают связь между разными по своей природе системами, весьма неочевидную и интересную.

Работа С.Е. Пустовойтова выполнена на высоком математическом уровне: она требует не только теоретической подготовленности, но и практических навыков применения специальных методов и проведения сложных технических вычислений. Все результаты диссертационного исследования являются новыми, оригинальными и опубликованы в журналах, индексируемых WoS и Scopus, а также прошли апробацию на многочисленных российских и международных конференциях и научных семинарах.

Задачи, поставленные в рецензируемой работе, весьма нетривиальны. Полученные результаты, а также лежащие в основе методы, могут быть интересны специалистам в области исследований интегрируемых систем и математических биллиардов. Теоремы доказаны строго, с использованием многочисленных иллюстраций. Это позволяет наглядно понять идеи доказательств и увидеть возникающие эффекты. Текст диссертации хорошо проработан, содержит незначительные опечатки, которые не мешают пониманию. Среди замечаний можно отметить следующие:

1. следует подчеркивать значимость основных теорем, в особенности тех, которые выносятся в качестве положений на защиту. Например, Следствие 3.16., Утверждение 3.4.1., Замечание 3.7. являются важными теоремами в рамках исследования, их следует обозначать теоремами;
2. на некоторых иллюстрациях надписи очень малы, их сложно разобрать. Среди них рис. 3.10, 4.18, 4.26, 4.31, 5.23.

Также интересен вопрос:

3. в четвертой главе были рассмотрены особенности биллиарда с потенциалом четвертой степени. Какие сложности возникают при переходе к общему случаю?

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Пустовойтов Сергей Евгеньевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой фундаментальной математики
факультета информатики, математики и компьютерных наук
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”», Нижегородский филиал

ПОЧИНКА Ольга Витальевна

Контактные данные:
тел.: +7(831)432-78-84, e-mail:
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.02 (дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление)

Адрес места работы:
603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12,
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород,
факультет информатики, математики и компьютерных наук
Тел.: +7(831)432-78-84; e-mail: opochinka@hse.ru

Подпись сотрудника
НИУ ВШЭ О.В. Починки удостоверяю: