Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

На правах рукописи

Трифонова Екатерина Евгеньевна

О СВОЙСТВАХ КОНЕЧНО ПОРОЖДАЮЩИХ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ КЛАССОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук
Колпаков Роман Максимович;
доктор физико-математических наук
Яшунский Алексей Дмитриевич

Москва — 2025 г.

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Диссертация относится к одному из основных направлений дискретной математики и математической кибернетики — теории функциональных систем (см., например, [29, 75, 77]). С. В. Яблонский определял теорию функциональных систем как область знания, которая занимается изучением функций, описывающих работу дискретных преобразователей, и считал [77], что роль теории функциональных систем для дискретной математики сравнима с ролью математического анализа для непрерывной математики. В диссертации изучаются дискретные случайные величины с позиций теории функциональных систем.

В современных представлениях (см., например, [29]) функциональная система — это пара (P, ψ), где P — некоторое множество, а ψ — некоторое отображение множества $\mathcal{B}(P)$ всех подмножеств множества P в себя. Основными типами задач, которые возникают при исследовании функциональных систем, являются задачи выразимости и полноты (см., например, обзор [71]). К задачам выразимости, в частности, относится задача определения по множеству $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq P$, и произвольной функции f, $f \in P$, принадлежности этой функции множеству $\psi(\mathcal{A})$. Решение задач полноты представляет собой получение ответа на вопрос, выполнено ли для заданного множества $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(P)$, и произвольной системы $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq P$, условие $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$, т. е. порождает ли система $\mathcal{A}$ множество $\mathcal{F}$. Разновидностями задач полноты являются задачи исследования классов на наличие конечных порождающих систем и задачи о существовании базиса. Еще одним важным классом задач при изучении функциональных систем является исследование свойств семейства классов $\{\psi(\mathcal{A}) | \mathcal{A} \subseteq P\}$, а именно: определение мощности такого семейства классов, его структуры, свойств его элементов и т. д.

В качестве отображения ψ часто рассматривается оператор замыкания (см., например, [28]), который для любых множеств $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ из $\mathcal{B}(P)$, удовлетворяет условиям:

1) $\mathfrak{A} \subseteq \psi(\mathfrak{A})$;

2) если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, то $\psi(\mathfrak{A}) \subseteq \psi(\mathfrak{B})$;

3) $\psi(\psi(\mathfrak{A})) = \psi(\mathfrak{A})$.

Множество $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subseteq P$, является *замкнутым относительно оператора* ψ, если выполняется равенство $\psi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Замкнутые множества также называются *замкнутыми классами* (относительно ψ).

Одной из первых функциональных систем, для которой были решены вышеприведенные задачи, стала система $\mathcal{P}_2 = (P_2, \varphi)$, где P_2 — множество всех булевых функций, а φ — оператор суперпозиции. Для функциональной системы (P_2, φ) в работах Э. Л. Поста [107, 108] были описаны все замкнутые относительно операции суперпозиции классы булевых функций и показано, что каждый такой класс имеет конечный базис.

После решения основных задач для функциональной системы (P_2, φ) внимание исследователей естественным образом обратилось к функциональной системе $\mathcal{P}_k = (P_k, \varphi)$, содержащей P_k — множество всех функций k-значной логики ($k \geq 3$) и φ — оператор суперпозиции, отображающий множество $\mathcal{B}(P_k)$ в себя.

Существуют принципиальные отличия многозначных логик от двузначной, в частности, при любом $k \geq 3$ в P_k есть замкнутые классы, не имеющие базиса, и замкнутые классы со счетным базисом, откуда следует, что семейство замкнутых классов в P_k является континуальным [78]. Задача о полноте в P_3 была решена С. В. Яблонским [74]. Выявлению различных семейств предполных классов в P_k посвящено большое число работ [11,12,30,32,38,102–106], описание всех предполных классов функций из P_k завершено И. Розенбергом [110, 111].

Также важным направлением исследования стало изучение свойств функциональных системы (P_k, φ^+), где в качестве оператора φ^+ рассматривается какое-нибудь усиление оператора суперпозиции φ. К данному направлению исследований можно, в частности, отнести работы ряда авторов [6, 14, 15, 33, 42–44, 47–49, 53, 63, 92].

Помимо широко известных функциональных систем для множества функций $P_k,$ исследователями рассматривались менее распространенные, но так же чрезвычайно интересные и значимые с практической точки зрения функциональные системы, связанные с дискретными случайными величинами — функциями на вероятностном пространстве. При этом изначально такие задачи могли рассматриваться с общих позиций дискретных моделей, а переход к их рассмотрению именно с позиции теории функциональных систем происходил постепенно. В середине XX века в классических работах Дж. фон Неймана [50], К. Э. Шеннона и Э. Ф. Мура [46] возникает задача синтеза надежных устройств из ненадежных элементов. В ЭВМ стали использоваться датчики случайных величин для решения различных задач методом Монте-Карло [66]. При этом механизмы жеребьевки можно было рассматривать как вычисление некоторых булевых функций от величин, выдаваемых датчиком [66]. Примерно в это же время А. Гиллом [100] рассматривались вопросы преобразования последовательностей случайных величин конечными автоматами, а Р. Г. Бухараев [3] изучал возможности построения управляемого генератора вероятностей. Все это послужило толчком к развитию еще одного направления теории функциональных систем — моделированию бернуллиевских (или булевых) случайных величин (т. е. величин, принимающих только два значения: 0 и 1) с наперед заданными вероятностями с помощью логических функций. При подобном моделировании мы имеем дело с семейством функциональных систем вида $([0;1], V_F),$ где V_F — оператор выразимости, определенный множеством F рассматриваемых булевых функций. А. А. Ляпунов в 50-е годы XX века предложил задачу моделирования бернуллиевских случайных величин с наперед заданными вероятностями с помощью логических функций для решения своему ученику Р. Л. Схиртладзе. При решении этой задачи можно выделить несколько направлений исследований. Одним из основных является задача конструирования булевой функции, имеющей заданный закон распределения значений, если известен закон распределения аргументов [66].

В общем виде задача о булевых преобразованиях случайных величин формулируется следующим образом. Пусть есть (потенциально бесконечное) множество независимых в совокупности бернуллиевских случайных величин с распределениями из множества G, и пусть F — некоторая система булевых функций. Подстановка случайных величин вместо переменных в булеву функцию из множества F порождает новую бернуллиевскую случайную величину, распределение которой уже может не принадлежать множеству G. Эту процедуру можно повторять многократно, используя при этом в качестве аргументов помимо случайных величин с распределениями из множества G также и ранее полученные случайные величины. Требуется определить, какие бернуллиевские распределения могут быть получены таким образом для заданного множества G и системы F. Данная задача является *задачей о выразимости* распределений. Множество выразимых распределений будем обозначать через $V_F(G)$. С точки зрения теории функциональных систем в рамках решения данной задачи имеем дело с семейством функциональных систем вида $([0;1], V_F)$.

Поскольку вероятность того, что бернуллиевская случайная величина принимает значение 1, полностью определяет распределение этой случайной величины, множество G можно рассматривать как набор чисел из отрезка $[0;1]$. Для бернуллиевских случайных величин термины «преобразование распределений» и «преобразование вероятностей» далее будут использоваться как взаимозаменяемые. Важный частный случай поставленной задачи — преобразования рациональных распределений, т. е. ситуация, когда все элементы множества G являются рациональными числами. В этом случае множество выразимых вероятностей также содержится в некотором подклассе рациональных чисел, а именно, в семействе дробей, у которых в разложениях знаменателей встречаются только те простые множители, которые встречаются в разложениях знаменателей дробей из множества G. Класс всех дробей, у которых в разложении знаменателя могут встречаться числа $p_1, \ldots, p_s$, обозначим через $\Gamma[p_1, \ldots, p_s]$. Для заданных простых чисел $p_1, \ldots, p_s$ и набора булевых функций F возникает важный вопрос о конечной порожденности класса $\Gamma[p_1, \ldots, p_s]$, т. е. существовании такого конечного множества G, что $V_F(G) = \Gamma[p_1, \ldots, p_s]$. Данная задача называется *задачей о конечной порожденности* семейств рациональных распределений. Если существует такое конечное множество G, что $V_F(G) = \Gamma[p_1, \ldots, p_s]$, то систему булевых функций F мы называем *конечно порождающей*. С точки зрения теории функциональных систем в данном случае мы имеем дело с семейством функциональных систем вида $(\Gamma[p_1, \ldots, p_s], V_F)$, для которых решается задача о существовании конечного базиса.

Как в задаче о выразимости, так и в задаче о конечной порожденности семейств распределений, различные системы булевых функций F могут, вообще говоря, задавать один и тот же класс преобразований на множестве распределений. Действительно, итерационный процесс порождения случайных величин путем подстановки в булевы функции независимых в совокупности случайных величин соответствует бесповторной суперпозиции булевых функций, поэтому совокупность всевозможных преобразований над системой F в точности соответствует множеству булевых функций, выразимых бесповторными формулами над системой F, иначе говоря — бесповторному замыканию множества булевых функций F. С точки зрения теории функциональных систем при работе с бесповторно замкнутыми классами булевых функций мы изучаем функциональную систему виде (P_2, φ_0), где P_2 — множество всех булевых функций, φ_0 — бесповторная суперпозиция. Исследования бесповторно замкнутых классов булевых функций ведутся с середины XX века [4, 5, 13, 31, 54, 72], однако к настоящему моменту исчерпывающего описания бесповторно замкнутых классов, подобного решетке Поста, не получено. В контексте задачи о преобразованиях бернуллиевских случайных величин бесповторно замкнутые классы булевых функций возникают в работах Ф. И. Салимова [57] и А. Д. Яшунского [87].

По-видимому, первые результаты решения задачи конечной порожденности для бернуллиевских случайных величин с вероятностями из конечного множества рациональных вероятностей были получены Р. Л. Схиртладзе. В его работах [64–66] было показано, что преобразования с помощью конъюнкций и дизъюнкций ($\&$ и $\vee$) позволяют из единственного начального распределения $\{\frac{1}{2}\}$ породить все множество двоично-рациональных чисел. Им же было доказано, что это верно и для троично-рациональных распределений для множества начальных распределений $\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\}$. При этом для простого числа p, $p > 3$, доказано, что порождение всего множества p-ично рациональных распределений с помощью системы функций $\{\&, \vee\}$ при использовании в качестве множества начальных распределений $\{\frac{1}{p}; \ldots; \frac{p-1}{p}\}$ невозможно. Такие же результаты независимо существенно позже были заново получены Дж. Браком, Д. Вильгельмом и Х. Чжоу [116, 117]. В работе Р. Л. Схиртладзе [64] была также высказана гипотеза, что для простых p, $p > 3$, не существует конечного множества рациональных бернуллиевских распределений, порождающего все множество p-ично-рациональных распределений. Эта гипотеза до настоящего момента не подтверждена и не опровергнута.

Дальнейшие результаты в этой области были получены Ф. И. Салимовым [56–62]. Он показал, что множества p-ично-рациональных распределений являются конечно порожденными при использовании в качестве системы преобразующих операций набора функций $\{x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3, 0, 1\}$. При этом в качестве множества начальных распределений можно взять множество $\{\frac{1}{p}; \ldots; \frac{p-1}{p}\}$.

В работах Р. М. Колпакова [16, 18] показано, что для множеств рациональных бернуллиевских распределений $\Gamma[p_1, \ldots, p_s]$ относительно преобразований системой $\{\&, \vee\}$ при $s \geq 2$ всегда существуют конечные множества начальных распределений, порождающие всю совокупность $\Gamma[p_1, \ldots, p_s]$. Более того, если среди $p_1, \ldots, p_s$ встречается 2 или 3, в качестве порождающего множества начальных распределений можно взять все правильные дроби со знаменателем $p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$. Также в статье Р. М. Колпакова [17] в качестве усиления системы $\{\&, \vee\}$ рассмотрен класс функций, реализуемых бесповторными контактными схемами, относительно которых множества распределений $\Gamma[5]$ и $\Gamma[7]$ оказываются конечно порожденными. Наконец, в работе Р. М. Колпакова [19] предложена система монотонных функций $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_4, 0, 1\}$, относительно которой множество $\Gamma[p]$ при любом простом p порождается множеством всех правильных дробей со знаменателем p. В работах Р. М. Колпакова [20–27] для системы преобразований, состоящей из всех функций k-значной логики (функциональное множество P_k), построена вся решетка замкнутых классов рациональных распределений, тем самым полностью решена задача выразимости рациональных распределений относительно преобразований системой, состоящей из всех функций k-значной логики.

Впоследствии в работе В. Квана, М. Ридела, Дж. Брака и Х. Чжоу [109] были частично заново получены результаты Ф. И. Салимова [56–62]. В этой же работе [109] показано, что если брать в качестве системы преобразующих операций систему $\{\&, \neg\}$, то из множества начальных распределений $\{0{,}4; 0{,}5\}$ возможно получить произвольную десятичную дробь. Из этого результата работы [109] вытекает, что система $\{\&, \neg\}$ является конечно порождающей в множестве десятичных дробей. Вместе с тем, конечная порожденность десятичных дробей относительно системы $\{\&, \vee\}$

(не более сильной, чем $\{\&, \neg\}$) была ранее доказана в работах Р. М. Колпакова [16, 18] как частный случай более общего утверждения.

В работах А. Д. Яшунского [10, 79–91, 118–120] изучались итеративные системы конечных случайных величин, и в частности — вопросы аппроксимации распределений дискретных случайных величин. В статье А. Д. Яшунского [83], посвященной решению задачи приближенного выражения распределений бернуллиевских случайных величин, были выделены классы булевых функций, которые не позволяют аппроксимировать произвольное распределение. Такие классы заведомо не являются конечно порождающими в указанном ранее смысле.

Вопросы конечной порожденности и выразимости рассматривались в основном для рациональных распределений, исключением являются работы Н. Н. Нурмеева [51, 52], в которых были анонсированы некоторые результаты для алгебраических и трансцендентных распределений, однако доказательства, по-видимому, так и не были опубликованы.

Автором диссертационной работы установлены новые свойства конечно порождающих систем для классов дискретных случайных величин с рациональными вероятностями. Найдены новые бесповторно замкнутые классы булевых функций.

Цели и задачи диссертации

В диссертации получены принципиально новые представления о свойствах конечно порождающих систем булевых функций для множеств рациональных распределений. В работе доказываются конечная и бесконечная порожденность множеств рациональных распределений для различных систем булевых функций, а также устанавливаются определенные свойства, которыми должны обладать конечно порождающие системы булевых функций для множеств рациональных распределений.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются булевы функции и индуцированные ими преобразования распределений. Исследуется вопрос конечной порожденности классов рациональных распределений бернуллиевских случайных величин относительно различных систем преобразований посредством булевых функций.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Получены следующие основные результаты:

1. Установлена бесконечная порожденность класса p-ично-рациональных распределений (для простого p, $p \geq 5$) при преобразованиях функцией голосования.
2. Введено понятие p-сократимости для классификации вероятностных функций, индуцированных булевыми функциями, для простых p. Оценена доля p-сократимых вероятностных функций среди всех вероятностных индуцированных функций. Для p-ично-рациональных распределений получено необходимое условие для конечно порождающей системы булевых функций, индуцирующих p-несократимые вероятностные функции, для простого $p, p \geq 5$.
3. Установлено существование бесповторно замкнутых классов булевых функций, индуцирующих p-сократимые и p-несократимые вероятностные функции для простых p, изучены их свойства, в том числе их расположение относительно решетки замкнутых классов.
4. Доказано, что существует континуум различных бесповторно замкнутых классов булевых функций, а также, что класс всех булевых функций P_2 может быть представлен в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов булевых функций.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и, в частности, теории функциональных систем, а также методы математического анализа.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа имеет теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы в исследованиях по теории функциональных систем, математической кибернетике и теоретической информатике.

Положения, выносимые на защиту

1. Класс p-ично-рациональных распределений для простого p, $p \geq 5$, бесконечно порожден относительно преобразований функцией голосования.
2. Каждая из вероятностных индуцированных функций принадлежит одному из трех классов, введенных согласно p-сократимости для простых p. В конечно порождающей системе булевых функций, индуцирующих p-несократимые вероятностные функции, для p-ично-рациональных распределений для простого p, $p \geq 5$, присутствуют хотя бы одна функция, содержащая ровно одну единицу в таблице истинности, хотя бы одна функция, содержащая ровно один ноль в таблице истинности, и хотя бы одна из этих функций существенно зависит от не менее чем двух переменных.
3. Доля p-сократимых функций первого типа среди всех индуцированных функций от n переменных для простого p при $n \to \infty$ асимптотически убывает как функция $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2^{n/2}}$, доля p-сократимых функций второго типа среди всех индуцированных функций от n переменных для простого p при $n \to \infty$ асимптотически не превышает значения $\frac{1}{p}$.
4. Существует континуум различных непустых бесповторно замкнутых классов булевых функций. Класс всех булевых функций P_2 представим в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов булевых функций.

Степень достоверности и апробация диссертации

Все результаты математически строго доказаны. Результаты диссертации докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях и научных семинарах:

1. XIV Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова, Россия, Москва, 20–25 июня 2022 г.

2. XI Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем», Россия, Красновидово, 26—29 мая 2023 г.

3. XX Международная научная конференция «Проблемы теоретической кибернетики», Россия, Москва, МГУ, 5–8 декабря 2024 г.

4. Семинар «Теоретическая кибернетика» ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (в 2020–2025 гг. многократно).

5. Семинар кафедры дискретной математики МГУ имени М. В. Ломоносова «Функции многозначной логики и смежные вопросы» (2023 г.).

6. Семинар кафедры дискретной математики МГУ имени М. В. Ломоносова «Синтез управляющих систем» (в 2024–2025 гг. неоднократно).

7. Объединенный семинар кафедры дискретной математики, кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета и кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова «Математические вопросы кибернетики» (2025 г.).

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика, в том числе 3 статьи — в рецензируемых научных изданиях, входящих в ядро РИНЦ и международные базы цитирования (Web of Science, Scopus), RSCI, и 1 статья — в рецензируемом научном издании из дополнительного списка МГУ, рекомендованном для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и входящем в список ВАК.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 124 наименований. Утверждения и уравнения нумеруются внутри каждой главы отдельно, их номера предваряются номером главы. Внутри каждой главы для всех утверждений (лемм, теорем, следствий) нумерация сплошная. Общий объем работы: 94 стр.

Содержание работы

Во **введении** описана постановка задачи, рассматривается история вопроса и актуальность темы исследования, а также формулируются основные результаты диссертации.

В **первой главе** изложены основные определения и базовые утверждения, связанные с постановкой задачи, приведены примеры. Помимо уже введенных выше обозначений и понятий, вводится обозначение: $A(r)$ — множество правильных дробей со знаменателем r.

Формулируется определение индуцированной вероятностной функции, построенной по данной булевой функции:

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n) = \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n):\\ f(x_1,\cdots,x_n)=1}} \prod_{i=1}^{n} (x_i\widehat{x}_i + (1-x_i)(1-\widehat{x}_i)),$$

где $f(x_1,\ldots,x_n)\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — булева функция, $\widehat{f}(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n)\colon [0;1]^n \to [0;1]$ — индуцированная вероятностная функция, x_i — случайные величины, принимающие значения 1 и 0 с вероятностями $\widehat{x}_i$ и $1-\widehat{x}_i$ соответственно, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Итерационно определяется множество $V_F(G)$ *выразимых вероятностей*. Для множества булевых функций F и множества правильных дробей G полагаем $V_F^1(G) = G$. Для $i \geq 1$ полагаем $V_F^{i+1}(G) = V_F^i(G) \cup \{\widehat{f}(a_1, \ldots, a_n) | f \in F, a_j \in V_F^i(G)\}$. Далее полагаем $V_F(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_F^i(G)$. Множество булевых функций F является *конечно порождающим в множестве* $\Gamma[p]$ для простого p, $p \geq 5$, если найдется такое конечное множество G, $G \subset \Gamma[p]$, что $V_F(G) = \Gamma[p]$.

В разделе 1.2 первой главы приведены примеры построения индуцированных вероятностных функций для некоторых булевых функций.

Раздел 1.3 посвящен доказательству бесконечной порожденности для медианы (также ее называют функцией голосования) $m(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ для простого p, $p \geq 5$. Выбор этой функции обусловлен тем, что, как показано в [83], система $\{m(x, y, z)\}$ позволяет аппроксимировать произвольное бернуллиевское распределение с произвольной точностью, если множество начальных распределений G имеет вид $G = \{g_1; g_2\}$, где $g_1, g_2 \in (0, 1)$, $g_1 < 1/2$, $g_2 > 1/2$. Доказывается ряд утверждений, позволяющих доказать следующую теорему, которая является основным результатом первой главы.

Теорема 1.8. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и простого* $p, p \geq 5$, *имеет место соотношение* $V_{\{m\}}(A(p^k)) \neq \Gamma[p]$.

Для любого конечного множества G, $G \subset \Gamma[p]$, существует такое k, что $G \subset A(p^k)$. Поэтому справедливо

Следствие 1.9. *Для любой конечной системы* G, $G \subset \Gamma[p]$, *где* p *— простое,* $p \geq 5$, *выполняется неравенство* $V_{\{m\}}(G) \neq \Gamma[p]$.

Тем самым доказана бесконечная порожденность классов рациональных вероятностей при преобразованиях медианой (функцией голосования).

Во **второй главе** вводится понятие p-сократимых и p-несократимых индуцированных функций. Для этого вероятностная индуцированная функция записывается в виде суммы одночленов с целыми коэффициентами:

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \sum_{\kappa_1, \ldots, \kappa_n : \in \{0;1\}} \alpha_{\kappa_1 \ldots \kappa_n} \widehat{x}_1^{\kappa_1} \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_n^{\kappa_n},$$

где $\widehat{x}_1^{\kappa_i}$ — возведение в степень, т. е. $\widehat{x}_i^0 = 1$, $\widehat{x}_i^1 = \widehat{x}_i$. Обозначим $\alpha_{1\ldots1}$ через $\alpha(\widehat{f})$. Для простого p вероятностные функции классифицируются следующим образом:

1. Если $\alpha(\widehat{f}) = 0$, то функция $\widehat{f}$ — *p-сократимая первого типа*.
2. Если $\alpha(\widehat{f}) = p^t A$, где $t \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0 \pmod p$, то функция $\widehat{f}$ — *p-сократимая второго типа*.
3. Если $\alpha(\widehat{f}) = A$, где $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0 \pmod p$, то функция $\widehat{f}$ — *p-несократимая*.

В разделе 2.1 второй главы для простых p оценена доля p-сократимых функций среди всех индуцированных вероятностных функций от n переменных.

Теорема 2.6. *Доля p-сократимых функций первого типа среди всех индуцированных функций от n переменных для простого p при $n \to \infty$ асимптотически убывает как функция $\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{2^{n/2}}}$.*

Теорема 2.7. *Доля p-сократимых функций второго типа среди всех индуцированных функций от n переменных для простого p при $n \to \infty$ асимптотически не превышает значения $\frac{1}{p}$.*

Следовательно, p-несократимые функции составляют асимптотически «большую часть» всех индуцированных вероятностных функций от n переменных для простых p при $n \to \infty$.

В разделе 2.2 исследуется, какими свойствами должна обладать конечно порождающая система булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции для простых p, $p \geq 5$. Вводятся обозначения: $\omega_1(f)$ — число единичных наборов функции f, $\omega_0(f)$ — число наборов, на которых функция f равна нулю.

Теорема 2.14. *Пусть для произвольного простого p, $p \geq 5$, в множестве булевых функций F содержатся только функции f, существенно зависящие от всех своих переменных, и такие, что функция $\widehat{f}$ является p-несократимой функцией. Тогда если множество функций F является конечно порождающим в множестве $\Gamma[p]$, то в нем найдутся хотя бы две такие функции f_1 и f_2 из множества F, что*

1) $\omega_1(f_1) = 1,$

2) $\omega_0(f_2) = 1,$

3) *либо функция f_1, либо функция f_2 существенно зависит не менее чем от двух переменных.*

Сформулированное в теореме 2.14 необходимое условие для конечно порождающей системы булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции, обобщает результат, полученный в первой главе, поскольку медиана индуцирует p-несократимую функцию для любого простого p, $p \geq 5$.

В **третьей главе** классифицируются булевы функции с точки зрения индуцирования ими p-сократимых или p-несократимых вероятностных функций для простых p. Вводятся следующие обозначения: $\mathcal{Z}$ — множество всех булевых функций, которые индуцируют p-сократимые функции первого типа, $\mathcal{R}_p$ — множество всех булевых функций, которые индуцируют p-сократимые функции второго типа, $\mathcal{N}_p$ — множество всех булевых функций, которые индуцируют p-несократимые функции. Множества всех вероятностных индуцированных функций, которые являются p-сократимыми функциями первого типа, p-сократимыми функциями второго типа, p-несократимыми функциями обозначаются через $\widehat{\mathcal{Z}}$, $\widehat{\mathcal{R}_p}$, $\widehat{\mathcal{N}_p}$ соответственно.

В разделе 3.1 вводится понятие бесповторного замыкания над множеством операций. Пусть задано некоторое бесконечное множество переменных. Определим *формулу* над множеством операций $\mathcal{F}$ индуктивно. Каждую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}$, положим формулой над $\mathcal{F}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из множества $\mathcal{F}$, и $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — выражения, являющиеся либо переменными, либо формулами над $\mathcal{F}$, тогда выражение $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ назовем *формулой* над $\mathcal{F}$. Формулу будем называть *бесповторной*, если все входящие в нее переменные различны. Каждой формуле $\Phi[x_1, \ldots, x_n]$ над множеством $\mathcal{F}$, зависящей от переменных $x_1, \ldots, x_n$, сопоставим функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, которая является суперпозицией функций из множества $\mathcal{F}$. Множество функций, выраженных бесповторными формулами над множеством $\mathcal{F}$, будем обозначать через $[\mathcal{F}]_0$ и называть *бесповторным замыканием* множества $\mathcal{F}$.

В теореме 3.3 доказывается, что классы $\widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{N}_p}, \widehat{\mathcal{R}_p}$ бесповторно замкнуты, а в следствии 3.4 показано, что соответствующие классы булевых функций $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ бесповторно замкнуты. Аналогично бесповторной замкнутости классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ доказывается существование других бесповторно замкнутых классов булевых функций.

Теорема 3.5. *Пусть P — произвольное множество простых чисел. Тогда множество всех булевых функций f, у которых коэффициент $\alpha(\widehat{f})$ может быть разложен на простые множители только из множества P, образует бесповторно замкнутый класс.*

В лемме 3.6 доказывается, что каково бы ни было натуральное число a, всегда найдется такая булева функция f, что выполнено равенство $\alpha(\widehat{f}) = a$. Отсюда вытекает, что все бесповторно замкнутые классы в теореме 3.5 не пустые.

Следствие 3.7. *Существует континуум различных бесповторно замкнутых классов булевых функций.*

Как известно, классы булевых функций, замкнутые относительно обычной суперпозиции, обладают конечным базисом. Для бесповторно замкнутых классов булевых функций $\mathcal{R}_p$ и $\mathcal{N}_p$ (и соответствующих им классов вероятностных функций $\widehat{\mathcal{R}_p}$ и $\widehat{\mathcal{N}_p}$) в теореме 3.9 и следствии 3.10 доказывается отсутствие конечного базиса относительно бесповторной суперпозиции.

Известно, что не существует разбиения множества всех булевых функций P_2 на непересекающиеся замкнутые классы.

Теорема 3.12. *Класс всех булевых функций P_2 может быть представлен в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов.*

Для бесповторного замыкания в теореме 3.12 доказано, что класс всех булевых функций P_2 может быть представлен в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов: $P_2 = \mathcal{Z} \sqcup \mathcal{N}_p \sqcup \mathcal{R}_p \sqcup \{0; 1\}$ для любого простого p. Таких разбиений существует бесконечное множество, для каждого простого p свое.

В разделе 3.2 рассматривается соотношение классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ с классами булевых функций, замкнутыми по суперпозиции. Все обычные замкнутые классы булевых функций также замкнуты бесповторно, следовательно, они входят в решетку бесповторно замкнутых классов. Используются следующие обозначения для замкнутых классов булевых функций: T_0, T_1 — множества булевых функций, сохраняющих константу 0 и константу 1 соответственно, K — класс всех конъюнкций, D — класс всех дизъюнкций, L — класс линейных функций, M — класс монотонных функций, SM — класс самодвойственных монотонных функций; I^∞ — класс булевых функций, представимых в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \& f_0(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})$ для некоторой переменной x_i и булевой функции f_0; класс O^∞ определяется двойственным к классу I^∞ образом; $D_{01} = D \cap T_0 \cap T_1$, $K_{01} = K \cap T_0 \cap T_1$, $L_{01} = L \cap T_0 \cap T_1$, $MO_0^\infty = M \cap O^\infty \cap T_0$, $MI_1^\infty = M \cap I^\infty \cap T_1$.

В теореме 3.14 доказывается, что для простых p классы K_{01}, D_{01} лежат в классе $\mathcal{N}_p$, в теореме 3.16 — что классы $MI_1^\infty, MO_0^\infty, SM$ не лежат ни в одном из классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$.

В теореме 3.15 показано, что для простых p, $p \geq 3$, класс L_{01} лежит в классе $\mathcal{N}_p$, при этом класс L_{01} не лежит ни в классе $\mathcal{N}_2$, ни в классе $\mathcal{R}_2$, а класс $[\{x \oplus y \oplus z\}]_0$ лежит в классе $\mathcal{R}_2$.

Четвертая глава посвящена доказательству того, что классы булевых функций $\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}$ и $\mathcal{N}_5$ являются конечно порождающими для множества всех пятеричных дробей. Вводится понятие *представления* для натурального числа X:

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} (3b_i + 2a_i) 4^i,$$

где b_i, a_i — целые числа от 0 до C_{n-1}^i, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, i — номер разряда представления, n — количество разрядов представления.

Теорема 4.6. *Определенное выше представление с* n *разрядами* ($n \geq 4$) *позволяет выразить все числа от* 10 *до* $5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1)$. *При этом для такого представления дополнительно выполняется следующее свойство:*

— либо найдется такой разряд представления с номером j *от* 2 *до* $n-1$, *что для разрядов представления с номером* i *от* 1 *до* $j-1$ *выполнено соотношение* $(0 < b_i < C_{n-1}^i) \vee (0 < a_i < C_{n-1}^i)$, *а для разрядов представления с номером* i *от* j *до* $n-1$ *выполнено соотношение* $(b_i = 0) \& (a_i = 0)$*;*

— либо для всех разрядов представления с номером i *от* 1 *до* $n-2$ *выполнено соотношение* $(0 < b_i < C_{n-1}^i) \vee (0 < a_i < C_{n-1}^i)$, *а для* $(n-1)$*-го разряда представления выполнено соотношение* $(b_{n-1} = 1) \& (a_{n-1} = 0) \vee (b_{n-1} = 0) \& (a_{n-1} = 1)$.

Используя свойства представления, определенного выше, доказываются вспомогательные утверждения и основные результаты четвертой главы, сформулированные в виде двух теорем.

Теорема 4.13. *Класс булевых функций* $\mathcal{N}_5$ *является конечно порождающим в множестве* $\Gamma[5]$. *В качестве начального множества можно взять* $A(5^2)$.

Теорема 4.14. *Класс булевых функций* $\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}$ *является конечно порождающим в множестве* $\Gamma[5]$. *В качестве начального множества можно взять* $A(5)$.

В заключении представлено краткое изложение основных результатов диссертации и дана оценка дальнейших перспектив работы в данном направлении.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физико-математических наук Алексею Дмитриевичу Яшунскому и доктору физико-математических наук Роману Максимовичу Колпакову за постановку задачи и внимание к работе. Автор искренне благодарит весь коллектив сектора теоретической кибернетики математического отдела ИПМ им. М. В. Келдыша и всех сотрудников кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за поддержку, многочисленные обсуждения и создание плодотворной научной атмосферы.

Глава 1

Бесконечная порожденность в одном классе преобразователей вероятностей

1.1 Основные определения и свойства

Пусть x — случайная величина, принимающая значение 1 и 0 с вероятностью $\widehat{x}$ и $1-\widehat{x}$ соответственно. Тогда распределение этой случайной величины однозначно определяется значением $\widehat{x}$. Будем считать, что каждой случайной величине x, принимающей значения 0 и 1, сопоставлено число $\widehat{x} \in [0;1]$.

Будем рассматривать преобразования, осуществляемые в результате подстановки независимых в совокупности случайных величин со значениями 0 и 1 вместо переменных булевых функций. Такие преобразования описываются с помощью вероятностных индуцированных функций.

Пусть задана булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, тогда *вероятностная функция* $\widehat{f}(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n)\colon [0;1]^n \to [0;1]$, *индуцированная булевой функцией* $f(x_1,\ldots,x_n)$, определяется соотношением:

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n) = \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\colon \\ f(x_1,\cdots,x_n)=1}} \prod_{i=1}^{n} (x_i\widehat{x}_i + (1-x_i)(1-\widehat{x}_i)). \tag{1.1}$$

Содержательно $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ выражает вероятность того, что случайная величина $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 1, если вероятности обращения в единицу величин $x_1, \ldots, x_n$ равны $\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n$ соответственно. Будем рассматривать индуцированные вероятностные функции, построенные по булевым функциям без фиктивных переменных.

Для множества правильных дробей со знаменателем r введем обозначение $A(r) = \{\frac{1}{r}, \frac{2}{r} \ldots, \frac{(r-1)}{r}\}, r \in \mathbb{N}$. Здесь и далее в этой главе, если не оговорено иное, p —простое число, $p \geq 5$. Введем следующее обозначение для множества чисел, выразимых правильными p-ичными дробями: $\Gamma[p] = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathbb{N}} A(p^\alpha)$. Будем обозначать как $H(p^k)$ всевозможные правильные несократимые дроби со знаменателем p^k, где $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, $H(p^k) = A(p^k) \setminus A(p^{k-1})$.

Пусть задано множество булевых функций F и множество правильных дробей G. Определим множество *выразимых вероятностей* $V_F(G)$ итерационно. Положим $V_F^1(G) = G$. Для $i \geq 1$ положим $V_F^{i+1}(G) = V_F^i(G) \cup \{\widehat{f}(a_1, \ldots, a_n) | f \in F, a_j \in V_F^i(G)\}$. Далее положим $V_F(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_F^i(G)$.

Будем говорить, что для простого $p \geq 5$ множество булевых функций F является *конечно порождающим в множестве* $\Gamma[p]$, если найдется такое конечное множество G, $G \subset \Gamma[p]$, что $V_F(G) = \Gamma[p]$. Очевидно, что если такое конечное множество G существует, то найдется такое натуральное k, что $G \subset A(p^k)$. Таким образом, при проверке того, является ли множество булевых функций конечно порождающим в множестве $\Gamma[p]$, достаточно проверить, найдется ли такое натуральное k, что $V_F(A(p^k)) = \Gamma[p]$.

Для системы булевых функций F', содержащей одну или две константы из множества $\{0; 1\}$, назовем *эквивалентной* такую не содержащую констант систему булевых функций F, что выполнено $V_{F'}(G) \setminus \{0; 1\} = V_F(G)$.

Утверждение 1.1. *Пусть F' — система булевых функций, для которой выполнено соотношение $F' \cap \{0; 1\} \neq \varnothing$. Тогда существует система булевых функций F, не содержащая констант 0 и 1, эквивалентная системе F'.*

Доказательство. Система F может быть построена по следующему правилу: для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, входящей в F', добавим в F саму функцию, а также все функции, которые получаются при подстановке вместо переменных констант, содержащихся в F', при этом число заменяемых переменных будет изменяться от 1 до $n-1$. Тогда из определения множества выразимых вероятностей следует, что выполняется $V_{F'}(G) \setminus \{0;1\} = V_F(G)$. $\square$

Таким образом, без ограничения общности при изучении конечно порождающих возможностей систем булевых функций можно рассматривать системы булевых функций, не включающие константы 0 и 1.

Если F— какое-то множество булевых функций, то будем обозначать как $\widehat{F}$ множество, состоящее из вероятностных функций, индуцированных функциями из множества F.

Напомним, что двойственной для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

Следующее утверждение приведено, в частности, в работе Ф.И.Салимова [61].

Утверждение 1.2 (принцип двойственности). *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ — *двойственные функции, тогда для вероятностных функций, индуцированных* f *и* f^*, *справедливо соотношение* $\widehat{f}^*(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = 1 - \widehat{f}(1 - \widehat{x}_1, \ldots, 1 - \widehat{x}_n)$.

1.2 Примеры

Приведем примеры построения индуцированных вероятностных функций для некоторых булевых функций.

Пример 1.1. Рассмотрим булевы функции: $f_1(x) = \bar{x}$, $f_2(x,y) = x\&y$, $f_3(x,y) = x \vee y$. Исходя из соотношения (1.1) для первых двух функций индуцированные функции получаются непосредственно: $\widehat{f_1}(\widehat{x}) = 1 - \widehat{x}$, $\widehat{f_2}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widehat{x}\widehat{y}$, для функции f_3 запишем СДНФ: $f_3(x,y) = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xy$, далее по СДНФ построим индуцированную функцию следующим образом: $\bar{x}$ соответствует $1 - \widehat{x}$, а x соответствует $\widehat{x}$ индуцированной функции. Получим:

$$\widehat{f_3}(\widehat{x}, \widehat{y}) = (1-\widehat{x})\widehat{y} + \widehat{x}(1-\widehat{y}) + \widehat{x}\widehat{y} = \widehat{y} - \widehat{x}\widehat{y} + \widehat{x} - \widehat{x}\widehat{y} + \widehat{x}\widehat{y} = \widehat{x} + \widehat{y} - \widehat{x}\widehat{y}.$$

Пример 1.2. Пусть даны булевы функции $f_1(x,y) = x \oplus y$, $f_2(x,y) = x|y$, $f_3(x,y) = x \to y$. Запишем СДНФ этих функций: $f_1(x,y) = \bar{x}y \vee x\bar{y}$, $f_2(x,y) = \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$, $f_3(x,y) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy$.

По СДНФ запишем индуцированные функции: $\widehat{f_1}(\widehat{x}, \widehat{y}) = (1-\widehat{x})\widehat{y} + \widehat{x}(1-\widehat{y}) = \widehat{x} + \widehat{y} - 2\widehat{x}\widehat{y}$, $\widehat{f_2}(\widehat{x}, \widehat{y}) = (1-\widehat{x})(1-\widehat{y}) + \widehat{x}(1-\widehat{y}) + (1-\widehat{x})\widehat{y} = 1 - \widehat{x}\widehat{y}$, $\widehat{f_3}(\widehat{x}, \widehat{y}) = (1-\widehat{x})(1-\widehat{y}) + (1-\widehat{x})\widehat{y} + \widehat{x}\widehat{y} = 1 - \widehat{x} + \widehat{x}\widehat{y}$.

1.3 Доказательство бесконечной порожденности

Напомним, что булева функция $m(x,y,z) = xy \vee yz \vee xz$ называется *медианой* или *функцией голосования*. Соответствующая индуцированная вероятностная функция выражается следующим образом:

$$\widehat{m}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z}) = \widehat{x}\widehat{y}\widehat{z} + \widehat{x}\widehat{y}(1-\widehat{z}) + (1-\widehat{x})\widehat{y}\widehat{z} + \widehat{x}(1-\widehat{y})\widehat{z} = \widehat{x}\widehat{y} + \widehat{y}\widehat{z} + \widehat{x}\widehat{z} - 2\widehat{x}\widehat{y}\widehat{z}.$$

Из работы А. Д. Яшунского [83] следует, что в отличие от некоторых других систем функций, система $\{m(x,y,z)\}$ позволяет аппроксимировать произвольное бернуллиевское распределение с произвольной точностью, если множество начальных распределений G имеет вид $G = \{g_1; g_2\}$, где $g_1, g_2 \in (0,1)$, $g_1 < 1/2$, $g_2 > 1/2$. Примерами систем, которые не позволяют провести подобную аппроксимацию, являются, в частности, системы $\{\&\}$ и $\{\vee\}$. Для множества начальных распределений $G = \{g_1, \dots, g_l\}$, $g_1, \dots, g_l \in (0,1)$ все аппроксимируемые системой $\{\&\}$ распределения лежат в интервале $(0, \max_i g_i)$, системой $\{\vee\}$ — в интервале $(\min_i g_i, 1)$. Рассмотрим выразимость рациональных вероятностей путем преобразования медианой случайных величин с распределениями из некоторого начального множества. Результаты, приведенные в данном разделе, опубликованы в статье автора [121].

Лемма 1.3. *Функция $\widehat{m}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z})$ является возрастающей по каждому из аргументов на множестве $\left[\frac{1}{p^{k_1}}; \frac{p^{k_1}-1}{p^{k_1}}\right] \times \left[\frac{1}{p^{k_2}}; \frac{p^{k_2}-1}{p^{k_2}}\right] \times \left[\frac{1}{p^{k_3}}; \frac{p^{k_3}-1}{p^{k_3}}\right]$ и принимает минимальное и максимальное значения в точках $\left(\frac{1}{p^{k_1}}, \frac{1}{p^{k_2}}, \frac{1}{p^{k_3}}\right)$ и $\left(\frac{p^{k_1}-1}{p^{k_1}}, \frac{p^{k_2}-1}{p^{k_2}}, \frac{p^{k_3}-1}{p^{k_3}}\right)$ соответственно, где p — простое, $p \geq 5$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Рассмотрим $\widehat{m}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z})$ как функцию трех переменных. Тогда частные производные по каждой из трех переменных могут быть записаны как

$$\begin{cases} \widehat{m}'_{\widehat{x}}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z}) = \widehat{y} + \widehat{z} - 2\widehat{y}\widehat{z} = \widehat{y}(1-\widehat{z}) + \widehat{z}(1-\widehat{y}) \\ \widehat{m}'_{\widehat{y}}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z}) = \widehat{x} + \widehat{z} - 2\widehat{x}\widehat{z} = \widehat{x}(1-\widehat{z}) + \widehat{z}(1-\widehat{x}) \\ \widehat{m}'_{\widehat{z}}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z}) = \widehat{x} + \widehat{y} - 2\widehat{x}\widehat{y} = \widehat{x}(1-\widehat{y}) + \widehat{y}(1-\widehat{x}) \end{cases}$$

В особых точках частные производные функции по каждой из трех переменных должны обращаться в ноль, т. е.:

$$\begin{cases} \widehat{y}(1-\widehat{z}) + \widehat{z}(1-\widehat{y}) = 0 \\ \widehat{x}(1-\widehat{z}) + \widehat{z}(1-\widehat{x}) = 0 \\ \widehat{x}(1-\widehat{y}) + \widehat{y}(1-\widehat{x}) = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем, что особыми являются только точки $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$, которые не принадлежат области $\left[\frac{1}{p^{k_1}}; \frac{p^{k_1}-1}{p^{k_1}}\right] \times \left[\frac{1}{p^{k_2}}; \frac{p^{k_2}-1}{p^{k_2}}\right] \times \left[\frac{1}{p^{k_3}}; \frac{p^{k_3}-1}{p^{k_3}}\right]$.

На области определения все частные производные больше 0, функция возрастает по каждой из переменных. Следовательно, в рассматриваемой области в силу возрастания функции и отсутствия особых точек внутри нее, минимальное значение функция принимает в точке $\left(\frac{1}{p^{k_1}}, \frac{1}{p^{k_2}}, \frac{1}{p^{k_3}}\right)$, а максимальное — в точке $\left(\frac{p^{k_1}-1}{p^{k_1}}, \frac{p^{k_2}-1}{p^{k_2}}, \frac{p^{k_3}-1}{p^{k_3}}\right)$. □

Следствие 1.4. *Пусть $\widehat{x} = \frac{a}{p^{k_1}}$, $\widehat{y} = \frac{b}{p^{k_2}}$, $\widehat{z} = \frac{c}{p^{k_3}}$ — правильные дроби. Тогда справедлива следующая оценка для значения $\widehat{m}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$:*

$$\frac{p^{k_1} + p^{k_2} + p^{k_3} - 2}{p^{k_1+k_2+k_3}} \leq \widehat{m}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \leq \frac{p^{k_1+k_2+k_3} - p^{k_1} - p^{k_2} - p^{k_3} + 2}{p^{k_1+k_2+k_3}}, \tag{1.2}$$

где p — простое, $p \geq 5$, a, b, c, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Согласно лемме 1.3 наименьшее значение на дробях со знаменателями $p^{k_1}, p^{k_2}, p^{k_3}$ функция $\widehat{m}$ принимает в точке $\left(\frac{1}{p^{k_1}}, \frac{1}{p^{k_2}}, \frac{1}{p^{k_3}}\right)$. Тогда справедливо:

$$\widehat{m}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \geq \widehat{m}\left(\frac{1}{p^{k_1}}, \frac{1}{p^{k_2}}, \frac{1}{p^{k_3}}\right) = \frac{1}{p^{k_1+k_2}} + \frac{1}{p^{k_1+k_3}} + \frac{1}{p^{k_2+k_3}} - 2 \cdot \frac{1}{p^{k_1+k_2+k_3}} = \frac{p^{k_1}+p^{k_2}+p^{k_3}-2}{p^{k_1+k_2+k_3}}.$$

Аналогично используем лемму 1.3 для оценки наибольшего значения:

$$\widehat{m}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \leq \widehat{m}\left(\frac{p^{k_1}-1}{p^{k_1}}, \frac{p^{k_2}-1}{p^{k_2}}, \frac{p^{k_3}-1}{p^{k_3}}\right) = \frac{(p^{k_1}-1)(p^{k_2}-1)}{p^{k_1+k_2}} + \frac{(p^{k_1}-1)(p^{k_3}-1)}{p^{k_1+k_3}} + \frac{(p^{k_2}-1)(p^{k_3}-1)}{p^{k_2+k_3}} -$$

$$- 2 \cdot \frac{(p^{k_1}-1)(p^{k_2}-1)(p^{k_3}-1)}{p^{k_1+k_2+k_3}} = \frac{p^{k_1+k_2+k_3} - p^{k_1} - p^{k_2} - p^{k_3} + 2}{p^{k_1+k_2+k_3}}.$$

Лемма доказана. □

Утверждение 1.5. *Если $\widehat{x} = \frac{a}{p^{k_1}}, \widehat{y} = \frac{b}{p^{k_2}}, \widehat{z} = \frac{c}{p^{k_3}}$ — несократимые правильные дроби, a, b, c, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$, то значение $\widehat{m}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$ не может быть представлено в виде $\frac{B}{p^h}$, где $B, h \in \mathbb{N}$, $h < k_1 + k_2 + k_3$, для простых p, $p \geq 5$.*

Доказательство. Предположим, что $\widehat{m}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z}) = \frac{B}{p^h}$, где $B, h \in \mathbb{N}$, $h < k_1 + k_2 + k_3$. тогда $(p^{k_1+k_2+k_3} \cdot \widehat{m}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z})) \bmod p = 0$. Подставляя значения $\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z}$ в функцию $\widehat{m}$, получим равенства:

$$(p^{k_1+k_2+k_3} \cdot \widehat{m}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z})) \bmod p = (\tfrac{ab\cdot p^{k_3}+bc\cdot p^{k_1}+ac\cdot p^{k_2}-2abc}{p^{k_1+k_2+k_3}} \cdot p^{k_1+k_2+k_3}) \bmod p =$$
$$= (ab \cdot p^{k_3} + bc \cdot p^{k_1} + ac \cdot p^{k_2} - 2abc) \bmod p = -2abc \bmod p.$$

Тогда, если наше предположение верно, то $2abc \bmod p = 0$. Это может быть выполнено, только если a, b или c равны нулю по $\mathrm{mod}\ p$. Однако это невозможно, поскольку по условию дроби $\frac{a}{p^{k_1}}, \frac{b}{p^{k_2}}, \frac{c}{p^{k_3}}$ являются несократимыми и правильными. Отсюда получаем, что значение $\widehat{m}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z})$ не может быть представлено в виде $\frac{B}{p^h}$, где $B, h \in \mathbb{N}$, $h < k_1 + k_2 + k_3$. □

Утверждение 1.6. *Для любых чисел $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ удовлетворяющих $k_1 + k_2 + k_3 = l$, выполняется: $p^{k_1} + p^{k_2} + p^{k_3} \geq 3 \cdot p^{[\frac{l}{3}]}$ для простого p, $p \geq 5$.*

Доказательство. Функция $\varphi(x, y, z) = p^{k_1} + p^{k_2} + p^{k_3}$ возрастает по каждой из переменных. Так как $k_1 + k_2 + k_3 = l$, то возможны два варианта:

1. Одно из значений k_1, k_2, k_3 больше $[\frac{l}{3}]$. Без нарушения общности можно считать, что $k_1 > [\frac{l}{3}]$. Тогда получаем:

$$p^{k_1} + p^{k_2} + p^{k_3} \geq p \cdot p^{[\frac{l}{3}]} + p^{k_2} + p^{k_3} > p \cdot p^{[\frac{l}{3}]} > 3 \cdot p^{[\frac{l}{3}]}.$$

2. Выполнено условие $k_1, k_2, k_3 \leq [\frac{l}{3}]$. Это возможно только в том случае, когда l делится на 3 и $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{l}{3}$. Тогда выполнено:

$$p^{k_1} + p^{k_2} + p^{k_3} = 3 \cdot p^{\frac{l}{3}} = 3 \cdot p^{[\frac{l}{3}]}.$$

Утверждение доказано. □

Отметим, что утверждение 1.6 частично следует из S-выпуклости функции $\varphi(x, y, z)$ (см. [45]), однако во всей полноте его проще доказать непосредственно, чем выводить из более общих свойств.

Утверждение 1.7. *Для любого $l \in \mathbb{N}, l > 3$ найдется такое D, что $\frac{D}{p^l}$ не представимо в виде $\widehat{m}\left(\frac{a}{p^{k_1}}, \frac{b}{p^{k_2}}, \frac{c}{p^{k_3}}\right)$, где $\frac{a}{p^{k_1}}, \frac{b}{p^{k_2}}, \frac{c}{p^{k_3}}$ — несократимые правильные дроби, $a, b, c, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$, p — простое, $p \geq 5$.*

Доказательство. Положим $D = 3 \cdot p^{[\frac{l}{3}]} - 3$. Очевидно, что $\frac{D}{p^l}$ является правильной несократимой дробью. Предположим, что дробь $\frac{D}{p^l}$ может быть выражена путем применения $\widehat{m}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$ к трем p-ичным дробям со знаменателями $p^{k_1}, p^{k_2}, p^{k_3}$ и рассмотрим различные случаи соотношения между $k_1 + k_2 + k_3$ и l.

1. Если $l = k_1 + k_2 + k_3$, то по утверждению 1.6 и следствию 1.4 получаем:

$$\frac{D}{p^l} < \frac{3 \cdot p^{[\frac{l}{3}]} - 2}{p^l} \leq \frac{p^{k_1} + p^{k_2} + p^{k_3} - 2}{p^l} \leq \widehat{m}\left(\frac{a}{p^{k_1}}, \frac{b}{p^{k_2}}, \frac{c}{p^{k_3}}\right)$$

   Таким образом, случай $k_1 + k_2 + k_3 = l$ невозможен.

2. Из утверждения 1.5 следует невозможность случая $l < k_1 + k_2 + k_3$.

3. Наконец, если предположить, что $l > k_1 + k_2 + k_3$, и при этом выполнено равенство

$$\widehat{m}\left(\frac{a}{p^{k_1}}, \frac{b}{p^{k_2}}, \frac{c}{p^{k_3}}\right) = \frac{B}{p^{k_1+k_2+k_3}} = \frac{D}{p^l},$$

   то $D = B \cdot p^{l-(k_1+k_2+k_3)}$. Из этого следует, что $D \bmod p = 0$, что противоречит тому, что $\frac{D}{p^l}$ — несократимая дробь.

Следовательно, ни для каких a, b, c, k_1, k_2, k_3 нельзя представить дробь $\frac{3 \cdot p^{[\frac{l}{3}]} - 3}{p^l}$ в виде $\widehat{m}\left(\frac{a}{p^{k_1}}, \frac{b}{p^{k_2}}, \frac{c}{p^{k_3}}\right)$. Утверждение доказано. □

Теорема 1.8 [121]. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и простого* p, $p \geq 5$, *имеет место соотношение* $V_{\{m\}}(A(p^k)) \neq \Gamma[p]$.

Доказательство. Пусть задано какое-то $k \in \mathbb{N}$. Докажем для него утверждение теоремы. Возьмем $l = k + 1$. Тогда дробь $\frac{3 \cdot p^{[\frac{l}{3}]} - 3}{p^l}$, очевидно, будет являться правильной и несократимой. Представим все дроби, содержащиеся в $A(p^k)$, в несократимом виде. Тогда для $\frac{3 \cdot p^{[\frac{l}{3}]} - 3}{p^l}$ выполнено следующее:

1. Она не лежит в $A(p^k)$, поскольку $l > k$.

2. Если ли бы она принадлежала $V_{\{m\}}(A(p^k))$, то в силу утверждения 1.5 она должна выражаться путем подстановки в $\widehat{m}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$ элементов из $A(p^k)$. Однако последнее невозможно в силу следствия 1.4 (см. доказательство утв. 1.7).

Следовательно, по определению $\frac{3 \cdot p^{[\frac{l}{3}]} - 3}{p^l} \notin V_{\{m\}}(A(p^k))$. Отсюда получаем, что $V_{\{m\}}(A(p^k)) \neq \Gamma[p]$, какое бы k мы не взяли. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1.9. *Для любой конечной системы G, $G \subset \Gamma[p]$, где p — простое, $p \geq 5$, выполняется неравенство $V_{\{m\}}(G) \neq \Gamma[p]$.*

Следовательно, с помощью функции, индуцированной медианой, и конечного множества p-ичных дробей невозможно выразить произвольную p-ичную дробь.

Таким образом, доказана бесконечная порожденность класса рациональных вероятностей при преобразованиях функцией голосования, являющейся достаточно мощным преобразователем вероятностей. Хотя использованные методы не переносятся непосредственно на другие важные преобразующие системы (например, $\{\&, \vee\}$), они предоставляют нетривиальный пример доказанной бесконечной порожденности класса вероятностей.

Глава 2

Свойство *p*-сократимости функций

2.1 Определение *p*-сократимых и *p*-несократимых функций

Из формулы (1.1), определяющей вероятностную индуцированную функцию, следует, что если булева функция f задана своей СДНФ, то индуцированная функция может быть построена формальной заменой дизъюнкции на сложение, конъюнкции — на умножение, переменной x_i — на $\widehat{x}_i$, переменной $\bar{x}_i$ — на $1 - \widehat{x}_i$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получаем вероятностную функцию, записанную в виде суммы одночленов с целыми коэффициентами. В общем виде эта запись выглядит так:

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \sum_{\kappa_1, \ldots, \kappa_n : \in \{0;1\}} \alpha_{\kappa_1 \ldots \kappa_n} \widehat{x}_1^{\kappa_1} \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_n^{\kappa_n}, \tag{2.1}$$

где $\widehat{x}_1^{\kappa_i}$ — возведение в степень, т. е. $\widehat{x}_i^0 = 1$, $\widehat{x}_i^1 = \widehat{x}_i$.

Тогда для простого p классифицируем вероятностные функции по значению коэффициента $\alpha_{1\ldots1}$ перед самым длинным одночленом $\widehat{x}_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_n$ следующим образом:

1. Если $\alpha_{1\ldots1} = 0$, то функцию $\widehat{f}$ будем называть *p-сократимой первого типа*.

2. Если $\alpha_{1\ldots1} = p^t A$, где $t \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0 \pmod p$, то функцию $\widehat{f}$ будем называть *p-сократимой второго типа*.

3. Если $\alpha_{1\ldots1} = A$, где $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0 \pmod p$, то функцию $\widehat{f}$ будем называть *p-несократимой*.

Заметим, что p-сократимые функции первого типа будут p-сократимыми для любого простого p, а p-сократимые функции второго типа и p-несократимые будут являться таковыми для одних простых p и не будут для других. Будем также обозначать коэффициент $\alpha_{1\ldots1}$ перед самым длинным одночленом индуцированной функции $\widehat{f}$ как $\alpha(\widehat{f})$.

Пример 2.1. Булева функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2x_3x_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4x_5 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5$ индуцирует вероятностную функцию $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3, \widehat{x}_4, \widehat{x}_5) = \widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_5 + \widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_3 + \widehat{x}_1\widehat{x}_4\widehat{x}_5 + \widehat{x}_3\widehat{x}_4\widehat{x}_5 - 2\widehat{x}_1\widehat{x}_3\widehat{x}_4\widehat{x}_5 - \widehat{x}_2\widehat{x}_3\widehat{x}_4\widehat{x}_5 - 2\widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_3\widehat{x}_5 - 2\widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_4\widehat{x}_5 - \widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_3\widehat{x}_4 + 5\widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_3\widehat{x}_4\widehat{x}_5$. Коэффициент $\alpha(\widehat{f}) = 5$, соответственно, функция $\widehat{f}$ является 5-сократимой 2-го типа и r-несократимой для любого простого $r \neq 5$, например, она является 7-несократимой.

Пример 2.2. Булева функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3$ индуцирует вероятностную функцию $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) = \widehat{x}_3 - \widehat{x}_1\widehat{x}_3 + \widehat{x}_1\widehat{x}_2$. Коэффициент $\alpha(\widehat{f}) = 0$, соответственно, функция $\widehat{f}$ является p-сократимой 1-го типа для любого простого p.

2.2 Оценка числа *p*-сократимых функций

Раздел посвящен оценке числа p-сократимых функций среди всех вероятностных функций от n переменных для простого p и содержит результаты, опубликованные в работе автора [124]. Напомним, что для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ единичными наборами называются совокупности значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, на которых функция f принимает единичное значение. Обозначим как $\omega_1(f)$ число единичных наборов функции f, $\omega_0(f)$ — число наборов, на которых функция f равна нулю. Следовательно, $\omega_1(f) + \omega_0(f) = 2^n$ для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим число нулей в наборе $(x_1, \ldots, x_n)$ как

$$\theta(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(1 - x_i).$$

Количество наборов с нечетным числом нулей среди единичных наборов булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ запишем как

$$\eta_o(f) = \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n): \\ f(x_1,\ldots,x_n)=1}} \theta(x_1, \ldots, x_n) \bmod 2.$$

Выразим количество наборов с четным числом нулей среди единичных наборов булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$\eta_e(f) = \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n): \\ f(x_1,\ldots,x_n)=1}} (1 - \theta(x_1, \ldots, x_n) \bmod 2).$$

Лемма 2.1. *Для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, не содержащей фиктивных переменных, и индуцированной ей функции $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ выполняется $\alpha(\widehat{f}) = \eta_e(f) - \eta_o(f)$.*

Доказательство. Из определения вероятностной функции $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$, индуцированной булевой функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$, следует, что функцию $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ можно записать в виде:

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \sum_{j=1}^{\omega_1(f)} \delta_{1j} \ldots \delta_{nj},$$

где $\delta_{1j} \ldots \delta_{nj}$ соответствует единичному набору функции f следующим образом: $\delta_{ij} = \widehat{x}_i$, если $x_i = 1$, $\delta_{ij} = 1 - \widehat{x}_i$, если $x_i = 0$.

Очевидно, что после раскрытия всех скобок у выражения $\delta_{1j} \ldots \delta_{nj}$, коэффициент перед слагаемым $\widehat{x}_1 \ldots \widehat{x}_n$ будет равен либо 1, либо -1. Коэффициент будет равен 1 в том случае, если число скобок вида $1 - \widehat{x}_i$ будет четно, и будет равен -1, если нечетно. Соответственно, для всех единичных наборов получим, что суммарный коэффициент (обозначаемый как $\alpha(\widehat{f})$) перед $\widehat{x}_1 \ldots \widehat{x}_n$ будет равен $\eta_e(f) - \eta_o(f)$. Таким образом, $\alpha(\widehat{f}) = \eta_e(f) - \eta_o(f)$. □

Лемма 2.2. *Если f индуцирует p-сократимую функцию первого типа $\widehat{f}$, то $\eta_e(f) = \eta_o(f)$.*

Доказательство. По определению p-сократимой функции первого типа $\alpha(\widehat{f}) = 0$. Из леммы 2.1 получаем, что $\alpha(\widehat{f}) = \eta_e(f) - \eta_o(f) = 0$. Следовательно, $\eta_e(f) = \eta_o(f)$. □

Лемма 2.3. *Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ содержит фиктивные переменные, то $\eta_e(f) = \eta_o(f)$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что x_1 — фиктивная переменная. Тогда для любого набора $(x_2, \ldots, x_n)$ будет выполнено $f(0, x_2, \ldots, x_n) = f(1, x_2, \ldots, x_n)$. Отсюда очевидно следует, что $\eta_e(f) = \eta_o(f)$. □

Лемма 2.4. *Для булевой функции f выполнено $\eta_e(f) = \eta_o(f)$ тогда и только тогда, когда f содержит не менее одной фиктивной переменной или f индуцирует p-сократимую функция первого типа.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть для булевой функции f $\eta_e(f) = \eta_o(f)$, а наше предположение неверно. Т. е. f не будет содержать фиктивных переменных и индуцированная функция $\widehat{f}$ не будет являться p-сократимой первого типа, то есть $\alpha(\widehat{f}) \neq 0$. По лемме 2.1 имеем $\alpha(\widehat{f}) = \eta_e(f) - \eta_o(f)$, т. е. $\alpha(\widehat{f}) = 0$. Получили противоречие, необходимость доказана.

Достаточность доказана в леммах 2.2 и 2.3. □

Лемма 2.5. *Если булевая функция f индуцирует p-сократимую функцию второго типа $\widehat{f}$, то разность $\eta_e(f) - \eta_o(f)$ будет кратна p.*

Доказательство. Следует из леммы 2.1 и определения p-сократимых функций второго типа. □

2.2.1 Число *p*-сократимых функций первого типа

Число булевых функций f таких, что $\eta_e(f) = \eta_o(f)$, мы можем посчитать следующим образом. Выбираем от 0 до 2^{n-1} единичных наборов функции среди 2^{n-1} наборов с четным числом нулей и столько же единичных наборов выбираем среди 2^{n-1} наборов с нечетным числом нулей:

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}} C_{2^{n-1}}^{k} C_{2^{n-1}}^{k}.$$

При этом согласно лемме 2.4 это число будет включать в себя все функции, которые индуцируют p-сократимые первого типа, и также и все функции, которые содержат фиктивные переменные.

Число функций от n, содержащих фиктивные переменные, может быть вычислено как:

$$2^{2^n} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}} = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}}.$$

Тогда число p-сократимых функций первого типа, будет равно разности двух выражений, приведенных выше:

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}} C_{2^{n-1}}^k C_{2^{n-1}}^k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}}.$$

Используя свертку Вандермонда [55], преобразуем первое слагаемое следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}} C_{2^{n-1}}^k C_{2^{n-1}}^k = \sum_{k=0}^{2^{n-1}} C_{2^{n-1}}^k C_{2^{n-1}}^{2^{n-1}-k} = C_{2^{n-1}+2^{n-1}}^{2^{n-1}} = C_{2^n}^{2^{n-1}} = C_{2^n}^{2^n/2}.$$

Теперь оценим величину второго слагаемого.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}} = -n2^{2^{n-1}} + \ldots.$$

Известно, что его асимптотика равна $-n2^{2^{n-1}}$.

Для оценки значения выражения вида C_{2l}^l при $n \to \infty$ будем использовать формулу Стирлинга в виде $l! \sim \sqrt{2\pi l}(\frac{l}{e})^l$. Тогда $C_{2l}^l \sim \frac{2^{2l}}{\sqrt{\pi l}}$. Подставим 2^n вместо $2l$, а 2^{n-1} вместо l. Получаем, что $C_{2^n}^{2^{n-1}} \sim \frac{2^{2^n}}{\sqrt{\pi 2^{n-1}}} = \frac{2^{2^n}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2^n})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^{2^n}}{2^{n/2}}$.

Оценим асимптотику разности выражений $C_{2^n}^{2^n/2} - n2^{2^{n-1}}$. Для этого представим $n2^{2^{n-1}}$ как $n\sqrt{2^{2^n}}$.

Тогда $C_{2^n}^{2^n/2} - n2^{2^{n-1}} \sim \sqrt{2^{2^n}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{2^{2^n}}}{2^{n/2}} - n\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^{2^n}}{2^{n/2}}$.

Заметим, что число всех булевых функций асимптотически равно числу всех булевых функций без фиктивных переменных.

Поскольку число всех булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}, то получаем, что тем самым доказана

Теорема 2.6 [124]. *Доля p-сократимых функций первого типа среди всех индуцированных функций от n переменных для простого p при $n \to \infty$ асимптотически убывает как функция $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2^{n/2}}$.*

2.2.2 Число *p*-сократимых функций второго типа

Для p-сократимых функций второго типа по определению $\alpha(\widehat{f}) = p^t A$, где $t \geq 1$, p — простое, $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0 \pmod{p}$. По лемме 2.1 имеем, что $\eta_e(f) - \eta_o(f) = \alpha(\widehat{f}) = p^t A$. Тогда можем записать, что $|\eta_e(f) - \eta_o(f)| = sp$, где $s \in \mathbb{N}$, т. е. либо $\eta_e(f) = \eta_o(f) + ps$, если $\eta_e(f) > \eta_o(f)$, либо $\eta_o(f) = \eta_e(f) + ps$, если $\eta_o(f) > \eta_e(f)$. Для фиксированного s число таких функций равно

$$2 \sum_{i=0}^{2^{n-1}-sp} C_{2^{n-1}}^{sp+i} C_{2^{n-1}}^{i},$$

для всех допустимых s получаем, что общее число таких функций равно

$$\sum_{s=1}^{[\frac{2^{n-1}}{p}]} 2 \sum_{i=0}^{2^{n-1}-sp} C_{2^{n-1}}^{sp+i} C_{2^{n-1}}^{i}.$$

Таким образом, число p-сократимых функций второго типа можно записать как

$$2 \sum_{s=1}^{[\frac{2^{n-1}}{p}]} \sum_{i=0}^{2^{n-1}-sp} C_{2^{n-1}}^{sp+i} C_{2^{n-1}}^{i}.$$

Преобразуем выражение $C_{2^{n-1}}^{i}$ следующим образом

$$C_{2^{n-1}}^{i} = C_{2^{n-1}}^{2^{n-1}-i} = C_{2^{n-1}}^{2^{n-1}-i+sp-sp} = C_{2^{n-1}}^{2^{n-1}+sp-(sp+i)}.$$

Запишем число p-сократимых функций второго типа в виде

$$2 \sum_{s=1}^{[\frac{2^{n-1}}{p}]} \sum_{i} C_{2^{n-1}}^{sp+i} C_{2^{n-1}}^{2^{n-1}+sp-(sp+i)}.$$

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{i} C_{2^{n-1}}^{sp+i} C_{2^{n-1}}^{2^{n-1}+sp-(sp+i)}$. Положим $j = sp + i$. Применяя свертку Вандермонда [55], получаем следующую оценку сверху:

$$\sum_{i} C_{2^{n-1}}^{sp+i} C_{2^{n-1}}^{2^{n-1}+sp-(sp+i)} \leq \sum_{j=0}^{2^{n-1}+sp} C_{2^{n-1}}^{j} C_{2^{n-1}}^{2^{n-1}+sp-j} = C_{2^n}^{2^{n-1}+sp}.$$

Оценим значение

$$2 \sum_{s=1}^{[\frac{2^{n-1}}{p}]} C_{2^n}^{2^{n-1}+sp}.$$

Используя метод мультисекции рядов (см., например, [55]), и применяя его к формуле бинома Ньютона, получим $p \sum_{s=0}^{[\frac{n-m}{p}]} C_n^{m+sp} \sim 2^n$ при $m < p$. Следовательно, с учетом симметрии биномиальных коэффициентов можем получить, что

$$2 \sum_{s=1}^{[\frac{2^{n-1}}{p}]} C_{2^n}^{2^{n-1}+sp} \sim 2\frac{1}{2p}2^{2^n} = \frac{1}{p}2^{2^n}.$$

Тем самым доказана

Теорема 2.7 [124]. *Доля p-сократимых функций второго типа среди всех индуцированных функций от n переменных для простого p при $n \to \infty$ асимптотически не превышает значения $\frac{1}{p}$.*

2.3 Необходимое условие для конечно порождающих систем из *p*-несократимых функций

Получено, что при $n \to \infty$ доля p-сократимых функций первого типа среди всех индуцированных функций от n переменных асимптотически убывает как функция $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2^{n/2}}$, а доля p-сократимых функций второго типа среди всех индуцированных функций от n переменных асимптотически не превышает значения $\frac{1}{p}$ для простого p.

Следовательно, p-несократимые функции составляют асимптотически при простых p «большую часть» всех индуцированных вероятностных функций от n переменных, однако если с ростом n доля p-сократимых функций первого типа уменьшается, то верхняя оценка доли p-сократимых функций второго типа асимптотически постоянна и зависит только от величины p. Таким образом, представляется важным изучение вопроса о том, какими свойствами должна обладать конечно порождающая система булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции. Результаты этого раздела опубликованы в работе автора [122].

Утверждение 2.8. *Пусть $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ — вероятностная функция, индуцированная булевой функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$, содержащей ровно одну единицу* *в таблице истинности и существенно зависящей от всех своих переменных. Тогда для простого* p, $p \geq 5$, *минимальное значение* $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ *при* $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$ *равно* $\frac{1}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$.

Доказательство. Можем представить булеву функцию f в виде $x_1^{\sigma_1}\& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i \in \{0,1\}$, $x_i^1 = x_i, x_i^0 = \bar{x}_i$. Запишем индуцированную функцию в виде $\delta_1 \cdot \cdots \cdot \delta_n$, где δ_i равно $\widehat{x}_i$ для литерала x_i, δ_i равно $1-\widehat{x}_i$ для литерала $\bar{x}_i$. Получаем, что $\min \widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \min \prod_{i=1}^{n} \delta_i = \prod_{i=1}^{n} \min \delta_i$. Для каждого δ_i минимум будет равен $\frac{1}{p^{k_i}}$. Для $\delta_i = \widehat{x}_i$ он будет достигаться при $\widehat{x}_i = \frac{1}{p^{k_i}}$; для $\delta_i = 1 - \widehat{x}_i$ минимум будет достигаться при $\widehat{x}_i = 1 - \frac{1}{p^{k_i}}$. Таким образом, $\min \widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \prod_{i=1}^{n} \min \delta_i = \frac{1}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$. Утверждение доказано. □

Заметим, что если $\widehat{x} \in H(p^k)$, то очевидно, что $1 - \widehat{x} \in H(p^k)$.

Утверждение 2.9. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ *— двойственные функции, тогда для индуцированных ими функций* f *и* f^**, справедливо следующее:* $\widehat{f}^*$ *будет являться* p*-несократимой функцией тогда и только тогда, когда* $\widehat{f}$ *является* p*-несократимой функцией.*

Доказательство. Пусть $\widehat{f}$ является p-несократимой функцией, тогда $\alpha(\widehat{f}) = A$, где $A \in \mathbb{Z}, A \neq 0 \pmod p$. Из принципа двойственности 1.2 следует, что $\widehat{f}^*(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = 1 - \widehat{f}(1-\widehat{x}_1, \ldots, 1-\widehat{x}_n)$. Тогда, представляя обе функции в виде суммы одночленов (2.1), получаем, что $\alpha(\widehat{f}^*) = -(-1)^n \alpha(\widehat{f}) = (-1)^{n+1} A = B$, где $B \in \mathbb{Z}$, $B \neq 0 \pmod p$. Таким образом, согласно классификации, $\widehat{f}^*$ — p-несократимая функция. Из равенства $\alpha(\widehat{f}^*) = (-1)^{n+1}\alpha(\widehat{f})$ также непосредственно следует, что если f^* — p-несократимая функция, то $\widehat{f}$ является p-несократимой функцией. Утверждение доказано.

□

Очевидно, что из определения выразимых вероятностей следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.10. *Для любого множества вероятностей* G *и системы булевых функций* F *имеет место следующее равенство* $V_F(G) = V_{F \cup \{x\}}(G)$.

Заметим, что из утверждения 2.10 получаем, что добавление и удаление тождественной булевой функции к множеству других булевых функций не изменяет множество выразимых вероятностей.

Утверждение 2.11. *Для значений, которые может при $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$ принимать вероятностная функция $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$, индуцированная булевой функцией $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящей от всех своих переменных, выполнено $\frac{\omega_1(f)}{p^{k_1+\dots+k_n}} \le \widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) \le 1 - \frac{\omega_0(f)}{p^{k_1+\dots+k_n}}$.*

Доказательство. Любую индуцированную функцию можно представить в виде $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) = \sum\limits_{j=1}^{\omega_1(f)} \widehat{g}_j(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$, где каждая функция $\widehat{g}_j$ соответствует одной единице в таблице истинности булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Согласно утверждению 2.8 получаем, что для любого j выполняется $\widehat{g}_j(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) \ge \frac{1}{p^{k_1+\dots+k_n}}$. Отсюда справедливо, что $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) \ge \frac{\omega_1(f)}{p^{k_1+\dots+k_n}}$. Рассмотрим функцию $f^*(y_1, \dots, y_n)$, двойственную к функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Для них справедливо равенство $\omega_0(f) = \omega_1(f^*)$. По только что доказанному имеем, что $\widehat{f}^*(\widehat{y}_1, \dots, \widehat{y}_n) \ge \frac{\omega_1(f^*)}{p^{k_1+\dots+k_n}} = \frac{\omega_0(f)}{p^{k_1+\dots+k_n}}$. По принципу двойственности $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) = 1 - \widehat{f}^*(\widehat{y}_1, \dots, \widehat{y}_n)$, где $\widehat{y}_i = 1 - \widehat{x}_i$. Тогда получаем, что $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) \le 1 - \frac{\omega_0(f)}{p^{k_1+\dots+k_n}}$. Утверждение доказано. $\square$

Заметим, что оценки значений, которые может принимать вероятностная индуцированная функция, можно усилить, однако для дальнейших рассуждений достаточно вышеприведенной оценки.

Теорема 2.12 [122]. *Если в множестве булевых функций F содержатся только такие функции f, существенно зависящие от всех своих переменных, что $\omega_1(f) \ge 2$, а индуцированные функции $\widehat{f}$ являются p-несократимыми функциями, то множество F не будет являться конечно порождающим в множестве $\Gamma[p]$, где p — простое, $p \ge 5$.*

Доказательство. Докажем, что для любого фиксированного k выполнено $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F(A(p^k))$. Для этого покажем индукцией по i, что для любого фиксированного k выполнено $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$.

Базис индукции, $i = 1$. Представим все дроби, содержащиеся в $A(p^k)$, в виде несократимых дробей. Из определения множества выразимых вероятностей получаем, что $V_F^1(A(p^k))) = A(p^k)$. Очевидно, что $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^1(A(p^k)))$. Кроме того, в $V_F^1(A(p^k)))$ содержатся только правильные несократимые p-ичные дроби со знаменателем, не превышающим p^k.

Шаг индукции. Предположим, что для какого-то i выполнено $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$ и в $V_F^i(A(p^k))$ содержатся только правильные несократимые p-ичные дроби. Тогда по определению p-несократимой функции $\forall \widehat{f} \in$

$\widehat{F}$, $\forall \widehat{x}_i \in V_F^i(A(p^k))$, $i \in \{1,\dots,n\}$, имеем, что $\widehat{f}(\widehat{x}_1,\dots,\widehat{x}_n) = \frac{D}{p^{k_1+\dots+k_n}}$, где $\frac{D}{p^{k_1+\dots+k_n}}$ — несократимая дробь. По определению множества выразимых вероятностей имеем, что все такие $\frac{D}{p^{k_1+\dots+k_n}}$ будут включены в $V_F^{i+1}(A(p^k))$. При этом поскольку $\omega_1(f) \geq 2$, то согласно утверждению 2.8 будет выполнено $\frac{D}{p^{k_1+\dots+k_n}} \geq \frac{2}{p^{k_1+\dots+k_n}}$. Следовательно, получаем, что $\frac{1}{p^{k_1+\dots+k_n}} \notin V_F^{i+1}(A(p^k))$, а также в $V_F^{i+1}(A(p^k))$ будут содержаться только правильные несократимые дроби.

Тогда по индукции получаем, что $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$ для любого сколь угодно большого i и для любого фиксированного k. Таким образом, множество F не является конечно порождающим в $\Gamma[p]$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.13. *Если в множестве булевых функций F содержатся только такие функции f, существенно зависящие от всех своих переменных, что $\omega_0(f) \geq 2$, а функция $\widehat{f}$ является p-несократимой функцией, то для простого p, $p \geq 5$, множество F не будет являться конечно порождающим.*

Доказательство. Рассмотрим множество F^*, состоящее из функций f^*, двойственных функциям f, содержащимся в множестве F. Из принципа двойственности 1.2 следует, что F и F^* являются или не являются конечно порождающими одновременно. Очевидно, $\forall f^* \in F^*$ выполнено $\omega_1(f^*) \geq 2$, и по утверждению 2.9 имеем, что функции из множества F^* являются p-несократимыми функциями. Тогда для множества F^* справедлива теорема 2.12, т. е. F^* не будет являться конечно порождающим в $\Gamma[p]$. Тогда и F не будет являться конечно порождающим в $\Gamma[p]$. Следствие доказано. $\square$

Теорема 2.14 [122]. *Пусть для произвольного простого p, $p \geq 5$, в множестве булевых функций F содержатся только функции f, существенно зависящие от всех своих переменных, и такие, что функция $\widehat{f}$ является p-несократимой функцией. Тогда если множество функций F является конечно порождающим в множестве $\Gamma[p]$, то в нем найдутся хотя бы две такие функции f_1 и f_2 из множества F, что*

1) $\omega_1(f_1) = 1$,

2) $\omega_0(f_2) = 1$,

3) *либо функция f_1, либо функция f_2 существенно зависит не менее чем от двух переменных.*

Доказательство. Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда множество F является конечно порождающим в $\Gamma[p]$, но в нем нет требуемых функций.

Тогда возможны следующие варианты:

1. В F нет ни одной булевой функции с одной единицей в таблице истинности.

2. В F нет ни одной булевой функции с одним нулем в таблице истинности.

3. В F есть булева функция с одним нулем в таблице истинности и есть булева функция с одной единицей в таблице истинности, но среди них нет ни одной, которая зависит существенно от двух и более переменных.

В первом случае получаем, что выполнено условие теоремы 2.12, что противоречит нашему предположению. Во втором случае получаем, что выполнено условие следствия 2.13, что также противоречит нашему предположению.

Рассмотрим третий случай подробнее. Подобных функций среди всех булевых функций всего две: тождественная функция x и отрицание $\bar{x}$. Из утверждения 2.9 следует, что добавление или удаление тождественной функции x никак не изменяет множество выразимых вероятностей. Таким образом, ее можно не рассматривать. Тогда в качестве функции с одним нулем и одновременно функции с одной единицей может быть использовано только отрицание, т.е. $f_1 = f_2 = \bar{x}$.

Представим множество F следующим образом: $F = \{\bar{x}\} \cup F_1$, где в F_1 содержатся все функции из F, у которых более чем одна единица и более чем один ноль в таблице истинности.

По аналогии с доказательством теоремы 2.12 рассмотрим процесс формирования множества $V_F(A(p^k))$ в итерационной форме и покажем методом индукции по i, что дробь $\frac{1}{p^{k+1}}$ не будет принадлежать $V_F^i(A(p^k))$ ни для какого фиксированного k.

Базис индукции. $i = 1$. Запишем дроби, содержащиеся в $A(p^k)$, в виде несократимых дробей. Очевидно, что $\frac{1}{p^{k+1}}, \frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} = 1 - \frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^1(A(p^k)))$. Кроме того, в $V_F^1(A(p^k)))$ содержатся только правильные несократимые p-ичные дроби со знаменателем, не превышающем p^k.

Предположим, что для произвольного i выполнено $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$, $\frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$, а также в $V_F^i(A(p^k))$ содержатся только правильные несократимые p-ичные дроби. Покажем, что $\frac{1}{p^{k+1}}, \frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} \notin V_F^{i+1}(A(p^k))$. Рассмотрим, какие дроби войдут в $V_F^{i+1}(A(p^k))$. Во-первых, все дроби, которые содержались в $V_F^i(A(p^k))$. Во-вторых, туда войдут несократимые дроби вида $\frac{D}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$, которые можем построить из дробей, содержащихся в $V_F^i(A(p^k))$, используя функции из $\widehat{F}_1$. При этом согласно утверждению 2.11 выполняется $\frac{2}{p^{k_1+\cdots+k_n}} \leq \frac{D}{p^{k_1+\cdots+k_n}} \leq 1 - \frac{2}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$. То есть ни дробь $\frac{1}{p^{k+1}}$, ни дробь $\frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}}$ нельзя получить с помощью функций из $\widehat{F}_1$. И наконец, значения дробей, которые добавляются в $V_F^{i+1}(A(p^k))$ с использованием функции $1-\widehat{x}$ представляют собой числа вида $1-b$, где $b \in V_F^i(A(p^k))$. Так что поскольку $\frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} = 1 - \frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$, то $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^{i+1}(A(p^k))$. Далее, поскольку $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$, то и $\frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} = 1 - \frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^{i+1}(A(p^k))$. Также очевидно, что при применении к дробям из $V_F^i(A(p^k))$ функций из множества $\widehat{F}$ могут быть получены только правильные несократимые дроби, а значит, и добавлены в $V_F^{i+1}(A(p^k))$.

По индукции для сколько угодно большого i получаем, что выполнено $\frac{1}{p^{k+1}}, \frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$. А значит, и в третьем случае наша система не является конечно порождающей в $\Gamma[p]$.

Таким образом, наше предположение неверно. Теорема доказана. $\square$

Сформулированное в теореме 2.14 необходимое условие для конечно порождающей системы булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции, обобщает результат, полученный в первой главе, поскольку медиана индуцирует p-несократимую функцию для любого простого p, $p \geq 5$. Тем самым теорема 2.14 позволяет среди систем булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции, для простого p ($p \geq 5$) выделить те, которые не являются конечно порождающими.

Построим для конечно порождающей системы булевых функций $\{x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3, 0, 1\}$, предложенной Ф. И. Салимовым [61], эквивалентную, не содержащую константы $\{0; 1\}$. Запишем ее после проведения процедуры подстановки констант и эквивалентных преобразований: $\{x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3, \bar{x}, x_1x_2, x_1 \vee x_2\}$. Тогда среди вероятностных функций, индуцируемых булевыми функциями этой системы, содержатся как p-сократимые, так и p-несократимые функции.

Эквивалентная система без констант для конечно порождающей системы монотонных функций $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_4, 0, 1\}$, предложенной Р. М. Колпаковым [19] выглядит так: $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_4, x_1 \vee x_2, x_1x_2, x_1 \vee x_2x_3, x_1x_2 \vee x_2x_3\}$. Среди вероятностных функций, индуцируемых булевыми функциями эквивалентной системы, содержатся как p-сократимые, так и p-несократимые функции.

Таким образом, в ранее построенных конечно порождающих системах булевых функциях содержатся как индуцирующие p-сократимые, так и p-несократимые функции. Возникает вопрос, существуют ли конечно порождающие системы булевых функций, содержащие только индуцирующие p-сократимые или только p-несократимые функции. Ответ на этот вопрос дается в четвертой главе диссертации.

Глава 3

Сократимость и бесповторная замкнутость

Классифицируем булевы функции с точки зрения индуцирования ими p-сократимых или p-несократимых вероятностных функций. Для каждой из булевых функций сначала удалим фиктивные переменные, для булевой функции без фиктивных переменных построим индуцированную функцию. И по тому, какой тип индуцированной функции получился, классифицируем исходную булеву функцию. Будем считать, что после удаления фиктивных переменных в каждой из булевых функций останется хотя бы одна существенная переменная, т. е. константы 0 и 1 не будем относить ни к какому из вышеперечисленных классов.

В рамках данной главы будем под p подразумевать произвольное простое число, если не оговорено иное. Обозначим как $\mathcal{Z}$ множество всех булевых функций, которые индуцируют p-сократимые функции первого типа, $\mathcal{R}_p$ — множество всех булевых функций, которые индуцируют p-сократимые функции второго типа, $\mathcal{N}_p$ — множество всех булевых функций, которые индуцируют p-несократимые функции. Множества всех вероятностных индуцированных функций, которые являются p-сократимыми функциями первого типа, p-сократимыми функциями второго типа, p-несократимыми функциями будем обозначать как $\widehat{\mathcal{Z}}$, $\widehat{\mathcal{R}_p}$, $\widehat{\mathcal{N}_p}$ соответственно.

Каждому произвольному классу булевых функций F сопоставим класс вероятностных индуцированных функций $\widehat{F}$ следующим образом. Для каждой булевой функции $f \in F$ после устранения из нее фиктивных переменных построим индуцированную вероятностную функцию $\widehat{f}$, константам 0 и 1, если они получатся после устранения фиктивных переменных, сопоставим соответственно числа 0 и 1 среди индуцированных функций. Множество всех таких образом построенных вероятностных индуцированных функций будем обозначать как $\widehat{F}$. Результаты главы опубликованы в работе автора [123].

3.1 Бесповторно замкнутые классы

Пусть задано некоторое бесконечное множество переменных. Определим *формулу* над множеством операций $\mathcal{F}$ индуктивно. Каждую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}$, положим формулой над $\mathcal{F}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из множества $\mathcal{F}$, и $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — выражения, являющиеся либо переменными, либо формулами над $\mathcal{F}$, тогда выражение $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ назовем *формулой* над $\mathcal{F}$. Формулу будем называть *бесповторной*, если все входящие в нее переменные различны. Каждой формуле $\Phi[x_1, \ldots, x_n]$ над множеством $\mathcal{F}$, зависящей от переменных $x_1, \ldots, x_n$, сопоставим функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, которая является суперпозицией функций из множества $\mathcal{F}$. Множество функций, выраженных бесповторными формулами над множеством $\mathcal{F}$, будем обозначать через $[\mathcal{F}]_0$ и называть *бесповторным замыканием* множества $\mathcal{F}$.

Утверждение 3.1 [87]. *Построенной с помощью бесповторной суперпозиции булевой функции* $f(x_{11}, \ldots, x_{mn_m}) = g_0(g_1(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}), \ldots, g_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn_m}))$ *однозначно соответствует построенная с помощью бесповторной суперпозиции индуцированная функция* $\widehat{f}(\widehat{x}_{11}, \ldots, \widehat{x}_{mn_m}) = \widehat{g}_0(\widehat{g}_1(\widehat{x}_{11}, \ldots, \widehat{x}_{1n_1}), \ldots, \widehat{g}_m(\widehat{x}_{m1}, \ldots, \widehat{x}_{mn_m}))$.

Лемма 3.2. *Класс булевых функций F бесповторно замкнут тогда и только тогда, когда $\widehat{F}$ — бесповторно замкнут.*

Доказательство. Классу булевых функций F однозначно соответствует класс индуцированных вероятностных функций $\widehat{F}$. В утверждении 3.1 доказано, что построенной с помощью бесповторной суперпозиции булевой функции однозначно соответствует построенная с помощью бесповторной суперпозиции индуцированная функция. Таким образом, классы F и $\widehat{F}$ бесповторно замкнуты или не замкнуты одновременно. □

Заметим, что бесповторная суперпозиция является более слабой операцией по сравнению с обычной суперпозицией. Например, система $\{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$ с использованием обычной суперпозиции позволяет выразить все булевы функции, а с помощью бесповторной суперпозиции все булевы функции посредством системы $\{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$ выразить нельзя [5, 31].

Теорема 3.3 [123]. *Классы $\widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{N}_p}, \widehat{\mathcal{R}_p}$ бесповторно замкнуты.*

Доказательство. Запишем выражение для бесповторной суперпозиции произвольных функций из $\widehat{F}$

$$\widehat{f}(\widehat{x}_{11}, \ldots, \widehat{x}_{mn_m}) = \widehat{g}_0(\widehat{g}_1(\widehat{x}_{11}, \ldots, \widehat{x}_{1n_1}), \ldots, \widehat{g}_m(\widehat{x}_{m1}, \ldots, \widehat{x}_{mn_m})),$$

где $\widehat{g}_0 \in \widehat{F}$, $\widehat{g}_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, — либо являются переменными, либо принадлежат $\widehat{F}$, а переменные $\widehat{x}_{11}, \ldots, \widehat{x}_{mn_m}$ различны. Представим функции $\widehat{g}_i$, $i \in \{0, \ldots, m\}$ в виде суммы одночленов, тогда

$$\begin{gathered}
\widehat{g}_0(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_m) = \ldots + \alpha(\widehat{g}_0) \cdot \widehat{x}_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_m, \\
\widehat{g}_1(\widehat{x}_{11}, \ldots, \widehat{x}_{1n_1}) = \ldots + \alpha(\widehat{g}_1) \cdot \widehat{x}_{11} \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_{1n_1}, \\
\ldots, \\
\widehat{g}_m(\widehat{x}_{m1}, \ldots, \widehat{x}_{mn_m}) = \ldots + \alpha(\widehat{g}_m) \cdot \widehat{x}_{m1} \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_{mn_m},
\end{gathered}$$

Вместо каждой из переменных $\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_m$ в функцию $\widehat{g}_0$ подставим выражение для соответствующей функции $\widehat{g}_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Тогда выражение для $\widehat{f}$ может быть записано следующим образом:

$$\begin{multline}
\widehat{f}(\widehat{x}_{11}, \ldots, \widehat{x}_{mn_m}) = \widehat{g}_0(\widehat{g}_1(\widehat{x}_{11}, \ldots, \widehat{x}_{1n_1}), \ldots, \widehat{g}_m(\widehat{x}_{m1}, \ldots, \widehat{x}_{mn_m})) = \\
= \ldots + \alpha(\widehat{g}_0)((\ldots + \alpha(\widehat{g}_1) \cdot \widehat{x}_{11} \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_{1n_1}) \cdot \ldots \cdot (\ldots + \alpha(\widehat{g}_m) \cdot \widehat{x}_{m1} \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_{mn_m})) = \\
= \ldots + \alpha(\widehat{g}_0) \cdot \alpha(\widehat{g}_1) \cdot \ldots \cdot \alpha(\widehat{g}_m) \cdot \widehat{x}_{11} \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_{mn_m}.
\end{multline}$$

Следовательно,

$$\alpha(\widehat{f}) = \prod_{i=0}^{m} \alpha(\widehat{g}_i), \tag{3.1}$$

т. е. коэффициент $\alpha(\widehat{f})$ для функции $\widehat{f}$, полученной в результате бесповторной суперпозиции функций $\widehat{g}_i$ равен произведению всех коэффициентов $\alpha(\widehat{g}_i)$ этих функций. Заметим, что если при бесповторной суперпозиции $\widehat{g}_i$ — переменная, то $\alpha(\widehat{g}_i) = 1$.

Тогда

- для произвольной функции $\widehat{f} \in [\widehat{\mathcal{Z}}]_0$ получаем, что $\alpha(\widehat{f}) = 0$, поскольку $\alpha(\widehat{g}_i) = 0$ (так как $\widehat{g}_i \in \widehat{\mathcal{Z}}$), т. е. $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{Z}}$.

- для произвольной функции $\widehat{f} \in [\widehat{\mathcal{N}_p}]_0$ получаем, что поскольку $\widehat{g}_i \in \widehat{\mathcal{N}_p}$, то $\alpha(\widehat{g}_i) = A_i$, где $A_i \neq 0 \pmod p$, $A_i \in \mathbb{Z}$. Тогда $\alpha(\widehat{f}) = \prod_{i=0}^{m} A_i = B$, следовательно, $B \neq 0 \pmod p$, $B \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{N}_p}$.

- для произвольной функции $\widehat{f} \in [\widehat{\mathcal{R}_p}]_0$ получаем, что поскольку $\widehat{g}_i \in \widehat{\mathcal{R}_p}$, то $\alpha(\widehat{g}_i) = p^{t_i} \cdot A_i$, $A_i \neq 0 \pmod p$, $A_i \in \mathbb{Z}$, $t_i \in \mathbb{N}$. Тогда $\alpha(\widehat{f}) = \prod_{i=0}^{m} p^{t_i} \cdot A_i = p^t \cdot B$, где $B = \prod_{i=0}^{m} A_i$, $t = \sum_{i=0}^{m} t_i$. Следовательно, $B \neq 0 \pmod p$, $B \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем, что $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{R}_p}$.

Следовательно, данные три класса бесповторно замкнуты. □

Следствие 3.4. *Классы $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ бесповторно замкнуты.*

Доказательство. Следует из леммы 3.2 и теоремы 3.3. □

Из формулы (3.1), используемой в доказательстве теоремы 3.3 и леммы 3.2, вытекает также следующее утверждение:

Теорема 3.5 [123]. *Пусть P — произвольное множество простых чисел. Тогда множество всех булевых функций f, у которых коэффициент $\alpha(\widehat{f})$ может быть разложен на простые множители только из множества P, образует бесповторно замкнутый класс.*

Напомним, что для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, не содержащей фиктивных переменных, и индуцированной ей функции $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$ выполняется $\alpha(\widehat{f}) = \eta_e(f) - \eta_o(f)$ (см. лемму 2.1), где $\eta_o(f)$ — число наборов с нечетным числом нулей среди единичных наборов булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, $\eta_e(f)$ — число наборов с четным числом нулей среди единичных наборов булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$. При этом $\eta_e(f) \leq 2^{n-1}$, $\eta_o(f) \leq 2^{n-1}$ для функции f от n переменных.

Лемма 3.6. *Каково бы ни было натуральное число a, всегда найдется такая булева функция f: $\alpha(\widehat{f}) = a$.*

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по значению a. Базис индукции. Для $a = 1$ возьмем $f(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$. Индуцированная функция будет равна $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = \widehat{x}_1 \widehat{x}_2$. И соответственно, $\alpha(\widehat{f}) = 1$.

Предположим, что для некоторого $a \in \mathbb{N}$, $\exists f(x_1, \ldots, x_n) : \alpha(\widehat{f}) = a$. Построим функцию g от $n+1$ переменной следующим образом. Среди всех 2^{n+1} наборов выберем $\eta_e(f)+1$ наборов с четным числом нулей и $\eta_o(f)$ наборов с нечетным числом нулей, на которых функция g будет принимать значение 1. Так как $\eta_e(f)+\eta_o(f) \le 2^n$, то очевидно, что $\eta_e(f)+\eta_o(f)+1 \le 2^{n+1}$ для $n \in \mathbb{N}$, и следовательно, нам хватит наборов для подобного определения функции. Тогда $\alpha(\widehat{g}) = \eta_e(g)-\eta_o(g) = \eta_e(f)+1-\eta_o(f) = \alpha(\widehat{f})+1 = a+1$.

Таким образом по индукции получаем, что $\forall a \in \mathbb{N}$ можем построить такую булеву функцию, что $\alpha(\widehat{f}) = a$. $\square$

Лемма 3.6 обеспечивает существование непустого бесповторно замкнутого класса булевых функций для любого множества простых чисел P из теоремы 3.5. Поэтому будет справедливо

Следствие 3.7. *Существует континуум различных бесповторно замкнутых классов булевых функций.*

Следствие 3.8. *В классах $\widehat{\mathcal{R}_p}$, $\widehat{\mathcal{N}_p}$ содержатся индуцированные функции $\widehat{f}$ со всеми положительными коэффициентами $\alpha(\widehat{f})$, удовлетворяющими определениям классов.*

Доказательство. Следует из леммы 3.6 и определения классов $\widehat{\mathcal{R}_p}, \widehat{\mathcal{N}_p}$. $\square$

Теорема 3.9 [123]. *У классов индуцированных функций $\widehat{\mathcal{R}_p}$ и $\widehat{\mathcal{N}_p}$ нет конечного базиса относительно бесповторной суперпозиции.*

Доказательство. 1) Докажем, что у класса индуцированных функций $\widehat{\mathcal{N}_p}$ не будет конечного базиса. Возьмем какое-то конечное множество функций $\widehat{F_0} \subset \widehat{\mathcal{N}_p}$. Пусть в $\widehat{F_0}$ содержится m элементов. Обозначим коэффициенты $\alpha(\widehat{f_i})$ функций $\widehat{f_i}$, содержащихся в $\widehat{F_0}$, как $\alpha(\widehat{f_i}) = B_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. По определению класса $\widehat{\mathcal{N}_p}$ имеем $B_i \neq 0 \pmod p$, $B_i \in \mathbb{Z}$. Возьмем простое число B, такое что $B > \max_i |B_i|$. Его нельзя выразить с помощью произведения коэффициентов $\alpha(\widehat{f_i})$, тогда, соответственно, мы не сможем построить функцию $\widehat{f}$ с коэффициентом $\alpha(\widehat{f}) = B$, хотя согласно следствию 3.8 в $\widehat{\mathcal{N}_p}$ она содержится. Получаем, что каким бы образом мы не выбрали множество $\widehat{F_0} \subset \widehat{\mathcal{N}_p}$, оно не будет базисным. Следовательно, у класса $\widehat{\mathcal{N}_p}$ нет конечного базиса.

2) Аналогичным образом проведем доказательство того, что у класса индуцированных функций $\widehat{\mathcal{R}_p}$ не будет конечного базиса. Возьмем какое-то конечное множество функций $\widehat{F}_0 \subset \widehat{\mathcal{R}_p}$. Пусть в $\widehat{F}_0$ содержится m элементов. Тогда коэффициенты $\alpha(\widehat{f}_i)$ функций $\widehat{f}_i$, содержащихся в $\widehat{F}_0$, могут быть записаны как $\alpha(\widehat{f}_i) = p^{t_i} \cdot A_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. По определению класса $\widehat{\mathcal{R}_p}$ имеем $A_i \neq 0 \pmod p$, $A_i \in \mathbb{Z}$, $t_i \in \mathbb{N}$. Возьмем простое число A, такое что $A > \max_i |A_i|$. Выражение $p \cdot A$ нельзя получить с помощью произведения чисел $\alpha(\widehat{f}_i)$, тогда, соответственно, мы не сможем построить функцию $\widehat{f}$ с коэффициентом $\alpha(\widehat{f}) = p \cdot A$, хотя согласно следствию 3.8 в $\widehat{\mathcal{R}_p}$ она содержится. Тогда каким бы образом мы не выбрали множество $\widehat{F}_0 \subset \widehat{\mathcal{R}_p}$, оно не будет базисным, т. е. у класса $\widehat{\mathcal{R}_p}$ нет конечного базиса. □

Следствие 3.10. *У классов булевых функций $\mathcal{R}_p$ и $\mathcal{N}_p$ нет конечного базиса относительно бесповторной суперпозиции.*

Доказательство. Предположим, что у класса $\mathcal{N}_p$ есть конечный базис F, состоящий из m функций, тогда любая функция $f \in \mathcal{N}_p$, может быть выражена как бесповторная суперпозиция функций из F. Тогда согласно утверждению 3.1 имеем, что соответствующую индуцированную функцию $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{N}_p}$ можем выразить, используя бесповторную суперпозицию индуцированных функций из $\widehat{F}$, т. е. у класса $\widehat{\mathcal{N}_p}$ есть конечный базис, что противоречит доказанному в теореме 3.9.

Аналогичным образом доказывается отсутствие конечного базиса у класса $\mathcal{R}_p$. □

Теорема 3.11 [123]. *Для классов $\mathcal{R}_p, \mathcal{N}_p, \mathcal{Z}$ булевых функций справедливо следующее:*

1) $[\mathcal{N}_p \cup \mathcal{Z}]_0 = \mathcal{N}_p \cup \mathcal{Z}$,

2) $[\mathcal{R}_p \cup \mathcal{Z}]_0 = \mathcal{R}_p \cup \mathcal{Z}$,

3) $[\mathcal{R}_p \cup \mathcal{N}_p]_0 = \mathcal{R}_p \cup \mathcal{N}_p$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 3.3 следует, что в $[\widehat{\mathcal{N}_p \cup \mathcal{Z}}]_0$ содержатся только функции $\widehat{f}$ с коэффициентами $\alpha(\widehat{f}) = 0$ или $\alpha(\widehat{f}) = A$, $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0 \pmod p$. А значит, $[\widehat{\mathcal{N}_p \cup \mathcal{Z}}]_0 = \widehat{\mathcal{N}_p \cup \mathcal{Z}}$. Отсюда в силу леммы 3.2 справедливо соответствующее соотношение $[\mathcal{N}_p \cup \mathcal{Z}]_0 = \mathcal{N}_p \cup \mathcal{Z}$ для классов булевых функций. Аналогично получаем, что в $[\widehat{\mathcal{R}_p \cup \mathcal{Z}}]_0$ содержатся только функции $\widehat{f}$ с коэффициентами, представимыми в виде

$\alpha(\widehat{f}) = 0$ или $\alpha(\widehat{f}) = p^t \cdot A$, $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0 \pmod p), t \in \mathbb{N}$. А значит, $[\widehat{\mathcal{R}_p \cup \mathcal{Z}}]_0 = \widehat{\mathcal{R}_p \cup \mathcal{Z}}$. Следовательно, справедливо $[\mathcal{R}_p \cup \mathcal{Z}]_0 = \mathcal{R}_p \cup \mathcal{Z}$. Аналогично получаем, что в $[\widehat{\mathcal{R}_p \cup \mathcal{N}_p}]_0$ содержатся только функции $\widehat{f}$ с коэффициентами, представимыми в виде $\alpha(\widehat{f}) = A$ или $\alpha(\widehat{f}) = p^t \cdot A$, $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0 \pmod p), t \in \mathbb{N}$. Следовательно, $[\widehat{\mathcal{R}_p \cup \mathcal{N}_p}]_0 = \widehat{\mathcal{R}_p \cup \mathcal{N}_p}$. А значит, выполняется $[\mathcal{R}_p \cup \mathcal{N}_p]_0 = \mathcal{R}_p \cup \mathcal{N}_p$. □

Таким образом, используя бесповторную суперпозицию двух классов, нельзя получить функцию из третьего класса.

Замечание 3.1. Известно, что не существует разбиения множества всех булевых функций P_2 на непересекающиеся замкнутые классы.

Теорема 3.12 [123]. *Класс всех булевых функций P_2 может быть представлен в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов.*

Доказательство. Приведенная выше классификация однозначно относит каждую булеву функцию, кроме констант 0 и 1, к какому-либо из классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$. Таким образом, P_2 может быть представлен как

$$P_2 = \mathcal{Z} \sqcup \mathcal{N}_p \sqcup \mathcal{R}_p \sqcup \{0; 1\}$$

для любого простого p. Согласно следствию 3.4 каждый из классов бесповторно замкнут. □

Замечание 3.2. Разбиений, подобных указанному в теореме 3.12, существует бесконечное множество, для каждого простого p — свое.

Теорема 3.13 [123]. *Каждый из классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ является самодвойственным.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ — двойственные функции, тогда для вероятностных функций, индуцированных f и f^*, справедливо соотношение: $\widehat{f}^*(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = 1 - \widehat{f}(1 - \widehat{x}_1, \ldots, 1 - \widehat{x}_n)$ (см. утверждение 1.2). Представим функции $\widehat{f}$ и $\widehat{f}^*$ в виде суммы одночленов. Нетрудно заметить, что $\alpha(\widehat{f}^*) = -(-1)^n \cdot \alpha(\widehat{f})$.

Тогда для функции $\widehat{f}^*$ коэффициент

$$\alpha(\widehat{f}^*) = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha(\widehat{f}) = 0; \\ (-1)^{n+1} B, \text{ если } \alpha(\widehat{f}) = B, B \neq 0 \pmod p), B \in \mathbb{Z}; \\ (-1)^{n+1} p^t \cdot A, \text{ если } \alpha(\widehat{f}) = p^t \cdot A, t \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{Z}, A \neq 0 \pmod p). \end{cases}$$

Таким образом, булева функция и двойственная ей принадлежат одному и тому же классу. Следовательно, классы $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ — самодвойственные. $\square$

3.2 Место классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ в решетке бесповторно замкнутых булевых классов

В данном разделе будем рассматривать замкнутые классы булевых функций в тех обозначениях, которые были даны в [39]. Напомним, что T_0, T_1 — множества булевых функций, сохраняющих константу 0 и константу 1 соответственно, K — класс всех конъюнкций, D — класс всех дизъюнкций, L — класс линейных функций, M — класс монотонных функций, SM — класс самодвойственных монотонных функций. I^∞ — класс булевых функций, представимых в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \& f_0(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})$ для некоторой переменной x_i и булевой функции f_0, класс O^∞ определяется двойственным к классу I^∞ образом. Также напомним, что $D_{01} = D \cap T_0 \cap T_1$, $K_{01} = K \cap T_0 \cap T_1$, $L_{01} = L \cap T_0 \cap T_1$, $MO_0^\infty = M \cap O^\infty \cap T_0$, $MI_1^\infty = M \cap I^\infty \cap T_1$.

Все обычные замкнутые классы булевых функций также замкнуты бесповторно, следовательно, они входят в решетку бесповторно замкнутых классов. Тогда можем рассматривать, как классы $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ расположены относительно обычных замкнутых классов.

Теорема 3.14 [123]. *Классы K_{01}, D_{01} лежат в классе $\mathcal{N}_p$.*

Доказательство. Рассмотрим класс K_{01}. Все функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в нем после удаления фиктивных переменных могут быть представлены в виде: $x_1 \& \ldots \& x_n$. Тогда индуцированные функции $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ можно представить как: $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \widehat{x}_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_n$, т. е. $\alpha(\widehat{f}) = 1$ для таких функций. Таким образом, $K_{01} \subset \mathcal{N}_p$ для любого простого p. Из соображений двойственности $D_{01} \subset \mathcal{N}_p$. $\square$

Теорема 3.15 [123]. *Класс L_{01} лежит в классе $\mathcal{N}_p$ для простых p, $p \geq 3$, при этом класс L_{01} не лежит ни в классе $\mathcal{N}_2$, ни в классе $\mathcal{R}_2$, а класс $[\{x \oplus y \oplus z\}]_0$ лежит в классе $\mathcal{R}_2$.*

Доказательство. Рассмотрим класс L_{01}. Любая функция $f \in L_{01}$ может быть записана как $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$, где n — нечетное, и равна единице на таких наборах $x_1, \ldots, x_n$, у которых число единиц будет нечетным, а число нулей — четным. Число таких наборов для n-местной функции будет 2^{n-1}, соответственно, $\eta_e(f) = 2^{n-1}$, $\eta_o(f) = 0$. Следовательно, по лемме 2.1 $\alpha(\widehat{f}) = \eta_e(f) - \eta_o(f) = 2^{n-1}$, где n — нечетное.

Таким образом $\alpha(\widehat{f}) \neq 0$, $\alpha(\widehat{f}) \neq 0 \pmod p$, т. е. $L_{01} \subset \mathcal{N}_p$ для простых $p \geq 3$.

Для $p = 2$ класс L_{01} не лежит целиком ни в одном из классов $\mathcal{N}_2, \mathcal{R}_2$, поскольку при $n = 1$ коэффициент $\alpha(\widehat{f}) = 1$, т. е. не кратен 2, и такая функция принадлежит $\mathcal{N}_2$, а для $n \geq 3$ коэффициент $\alpha(\widehat{f})$ будет равен степени двойки, т. е. $f \in \mathcal{R}_2$. Однако для бесповторно замкнутого подкласса $[\{x \oplus y \oplus z\}]_0$ класса L_{01} выполняется $L_{01} \setminus \{x\} = [\{x \oplus y \oplus z\}]_0$. Тогда для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $[\{x \oplus y \oplus z\}]_0$ справедливо равенство $\alpha(\widehat{f}) = 2^{n-1}$, где n — нечетное. Таким образом, $[\{x \oplus y \oplus z\}]_0$ лежит в классе $\mathcal{R}_2$. $\square$

Теорема 3.16 [123]. *Классы $MI_1^\infty, MO_0^\infty, SM$ не лежат ни в одном из классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$.*

Доказательство. В классе SM содержатся, в частности, функции $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$, $m_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4$. Коэффициенты при самом длинном одночлене соответствующих индуцированных функций равны $\alpha(\widehat{m}) = -2$, $\alpha(\widehat{m}_2) = 0$, т. е. $m_2 \in \mathcal{Z}$ для любого простого p, $m \in \mathcal{N}_p$ для простых $p \geq 3$, а для $p = 2$ выполнено $m \in \mathcal{R}_2$. Таким образом, класс SM не будет лежать ни в одном из классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ для любого простого p.

В классе MI_1^∞ будут содержаться функции $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 \& m(x_1, x_2, x_3)$, $\alpha(\widehat{f_1}) = -2$, $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_5 \& m_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\alpha(\widehat{f_2}) = 0$, т. е. $f_2 \in \mathcal{Z}$ для любого простого p, $f_1 \in \mathcal{N}_p$ для простых $p \geq 3$, $f_1 \in \mathcal{R}_2$ для $p = 2$. Следовательно, класс MI_1^∞ не будет лежать ни в одном из классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ для любого простого p.

Из соображений двойственности класс MO_0^∞ также не будет лежать ни в одном из классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$. $\square$

Результаты, полученные в теоремах 3.14–3.16, отражены в графической форме на рис. 3.1. Приведено размещение классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ относительно решетки замкнутых классов для простых p, $p \geq 3$. Сплошной ли-

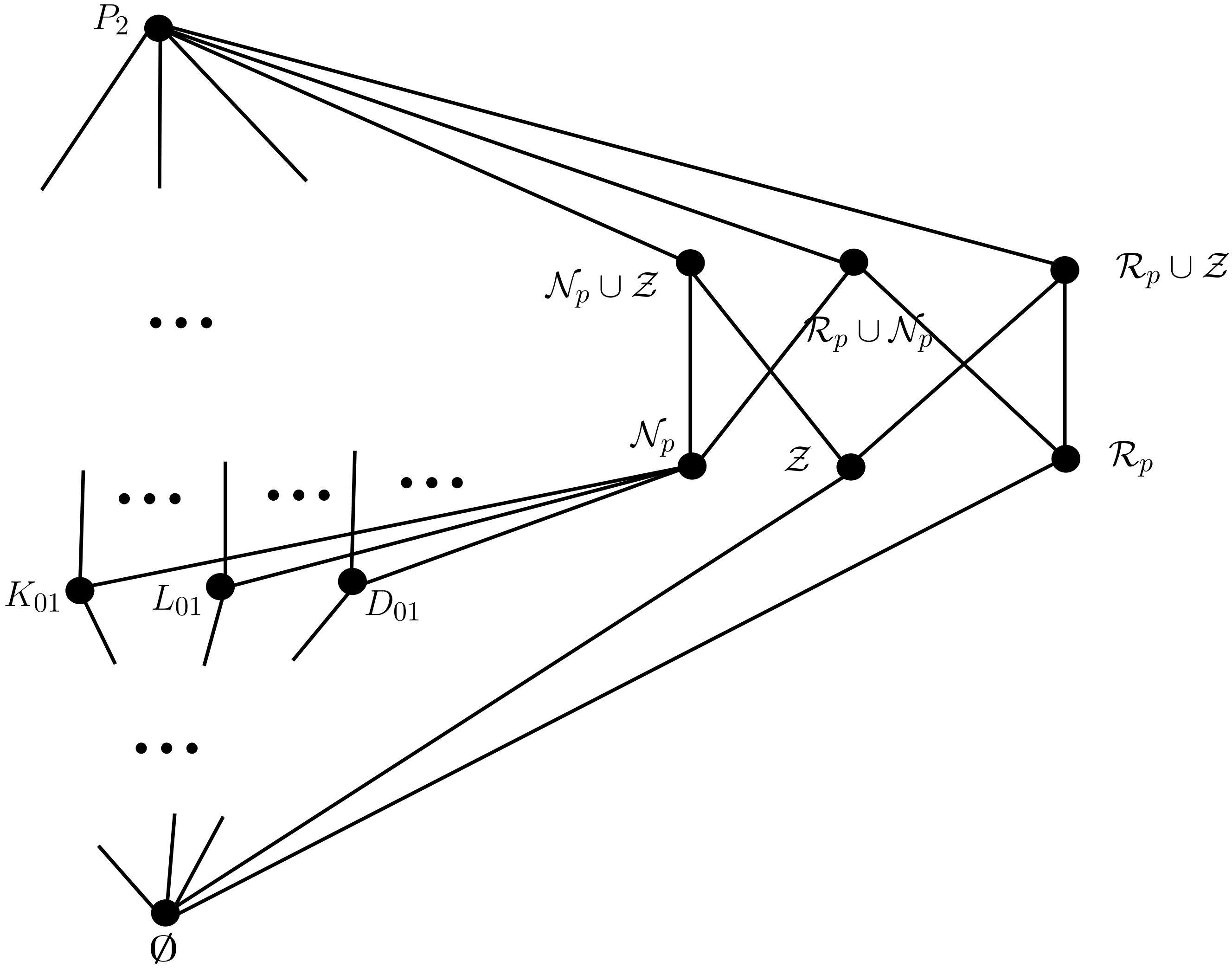

Рис. 3.1: Размещение классов $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$ относительно решетки замкнутых классов для простого p, $p \geq 3$.

нией обозначено включение классов, при этом возможно существование других подклассов и надклассов на протяжении всей сплошной линии.

Глава 4

Конечное порождение пятеричных дробей

Известные к настоящему моменту конечно порождающие системы булевых функций не принадлежат целиком ни одному из выделенных бесповторно замкнутых классов булевых функций $\mathcal{Z}, \mathcal{N}_p, \mathcal{R}_p$. Поэтому естественным образом возникает вопрос о том, является ли хотя бы один из этих классов конечно порождающим. Глава посвящена доказательству того, что объединение двух классов 5-сократимых функций, а также класс 5-несократимых функций являются конечно порождающими для множества всех пятеричных дробей. Результаты главы опубликованы в работе автора [70].

Лемма 4.1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ не содержит фиктивных переменных, $\widehat{f}$ — индуцированная f вероятностная функция. Вместо переменных в $\widehat{f}$ будем подставлять значения $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$, где p — простое, $k_i \in \mathbb{N}$ для $i \in \{1, \ldots, n\}$. Представим значение индуцированной функции $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \frac{D}{p^m}$, $D \neq 0 \pmod p$. Тогда*

- *если найдутся такие значения $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i}), i \in \{1, \ldots, n\}$, что выполняется $m = k_1 + \cdots + k_n$, то $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{N}_p}$;*
- *если найдутся такие значения $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i}), i \in \{1, \ldots, n\}$, что выполняется $m < k_1 + \cdots + k_n$, то $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{R}_p} \cup \widehat{\mathcal{Z}}$.*

Доказательство. При подстановке в $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ значений $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$ (для $i \in \{1, \ldots, n\}$) для результирующего выражения $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \frac{D}{p^m}$, $D \neq 0$

$(\text{mod } p)$, степень знаменателя m зависит от коэффициента $\alpha(\widehat{f})$ следующим образом: если $\alpha(\widehat{f})$ кратен p, то $m < k_1 + \cdots + k_n$, если $\alpha(\widehat{f})$ не кратен p, то $m = k_1 + \cdots + k_n$. Таким образом, если вместо переменных в $\widehat{f}$ подставим несократимые дроби со знаменателями вида p^{k_i}, то по степени знаменателя получившейся несократимой дроби можно определить, кратен коэффициент $\alpha(\widehat{f})$ числу p или нет. Соответственно, когда $m < k_1 + \cdots + k_n$, то $\alpha(\widehat{f})$ либо равен 0, либо кратен p, т. е. $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{R}_p} \cup \widehat{\mathcal{Z}}$. А когда $m = k_1 + \cdots + k_n$, то $\alpha(\widehat{f})$ не равен 0 и не кратен p, т. е. $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{N}_p}$. $\square$

Следствие 4.2. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$*— булева функция, возможно, с фиктивными переменными,* $\widehat{f}$ *— индуцированная* f *вероятностная функция. Вместо переменных в* $\widehat{f}$ *будем подставлять значения* $\widehat{x}_i \in A(5)$ *для* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Представим значение индуцированной функции* $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \frac{D}{5^m}$, *где* $m \in \mathbb{N}$, $D \bmod 5 \neq 0$. *Тогда если найдутся такие значения* $\widehat{x}_i \in A(5)$ *для* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *что выполняется* $m < n$, *то* $\alpha(\widehat{f}) = 5B$, *где* $B \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Следует из лемм 4.1, 2.1, 2.4. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть для индуцированной функции* $\widehat{f}$ *найдутся такие значения* $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$, *где* p *— простое,* $k_i \in \mathbb{N}$ *для* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *что выполнено* $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \frac{D}{p^m}$, $D \neq 0 \pmod p$, $m = \sum_1^n k_i$. *Тогда* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *не содержит фиктивных переменных.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что $\alpha(\widehat{f}) \neq 0$, следовательно, согласно лемме 2.1 выполнено $\eta_e(f) - \eta_o(f) \neq 0$, т. е. $\eta_e(f) \neq \eta_o(f)$ и по лемме 2.4 булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не содержит фиктивных переменных. $\square$

Лемма 4.4. *Если булева функция* f *принадлежит одному из классов* $\mathcal{Z}$, $\mathcal{R}_p$, $\mathcal{N}_p$, *то функция* $\bar{f}$ *принадлежит тому же классу.*

Доказательство. Будем рассматривать f после удаления фиктивных переменных. Построим индуцированную функцию $\widehat{f}$ и классифицируем f по величине $\alpha(\widehat{f})$. Пусть $f_1(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(x_1, \ldots, x_n)$, тогда $\widehat{f_1}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = 1 - \widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$. Представим $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ и $\widehat{f_1}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ в виде суммы одночленов с целыми коэффициентами, тогда выполнено $\alpha(\widehat{f}) = -\alpha(\widehat{f_1})$. Отсюда по определению классов получаем, что f_1 принадлежит тому же классу, что и f. Лемма доказана. $\square$

Следствие 4.5. *Если правильная дробь вида $a/5^k$ принадлежит одному из классов $V_{\mathcal{N}_5}(G)$, $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(G)$, то дробь вида $1 - a/5^k$ принадлежит этому же классу.*

4.1 Специальное представление натуральных чисел и его свойства

Пусть натуральное число X выражается как

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} (3b_i + 2a_i) 4^i, \tag{4.1}$$

где b_i, a_i — целые числа от 0 до C_{n-1}^i, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Будем называть подобное выражение числа X *представлением*, число i — номером разряда представления, n — количеством разрядов представления и записывать следующим образом: $b_{n-1}a_{n-1}. \ldots .b_3a_3.b_2a_2.b_1a_1.b_0a_0$.

Теорема 4.6 [70]. *Определенное выше представление с n разрядами $(n \geq 4)$ позволяет выразить все числа от 10 до $5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1)$. При этом для такого представления дополнительно выполняется следующее свойство:*

— либо найдется такой разряд представления с номером j от 2 до $n-1$, что для разрядов представления с номером i от 1 до $j-1$ выполнено соотношение $(0 < b_i < C_{n-1}^i) \vee (0 < a_i < C_{n-1}^i)$, а для разрядов представления с номером i от j до $n-1$ выполнено соотношение $(b_i = 0) \& (a_i = 0)$;

— либо для всех разрядов представления с номером i от 1 до $n-2$ выполнено соотношение $(0 < b_i < C_{n-1}^i) \vee (0 < a_i < C_{n-1}^i)$, а для $(n-1)$-го разряда представления выполнено соотношение $(b_{n-1} = 1) \& (a_{n-1} = 0) \vee (b_{n-1} = 0) \& (a_{n-1} = 1)$.

Доказательство. Покажем, что для $n \geq 4$ подобным образом можно представить все числа, начиная с 10 вплоть до $5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1)$.

Представление для 10 выглядит как $00. \ldots .00.01.01$. Очевидно, что свойство для него выполняется.

Покажем, как будем строить представления для чисел, больших 10, и что для каждого вновь построенного представления свойство будет выполняться.

Будем вести доказательство по индукции. Представление для первого числа 10 мы построили, и свойство для него выполняется. Предположим, у нас есть представление для какого-то числа X и свойство для него выполняется. Покажем, как построить представление для числа $X' = X + 1$ и что для этого представления свойство также будет выполняться. Элементы представления числа X будем обозначать как b_i, a_i, а элементы представления числа X' будем обозначать как b'_i, a'_i, где $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Тогда значения элементов b'_i, a'_i для числа X' определим следующим образом.

1. Попытаемся прибавить единицу к 0-му разряду. Тогда возможны следующие варианты:

   - $b_0 = 0$, $a_0 = 1$, тогда $b'_0 = 1$, $a'_0 = 0$, а для остальных $i \geq 0$ положим $b'_i = b_i$, $a'_i = a_i$, построение представления для X' закончено. Запишем формулу для получившегося числа:

     $$X' = \sum_{i=0}^{n-1}(3b'_i + 2a'_i)4^i = \sum_{i=1}^{n-1}(3b_i + 2a_i)4^i + 3 = \sum_{i=1}^{n-1}(3b_i + 2a_i)4^i + \\ + (2+1) = X + 1.$$

   - $b_0 = 1$, $a_0 = 0$, тогда $b'_0 = 0$, $a'_0 = 0$ и прибавляем единицу к 1-му разряду. Запишем формулу для произведенной операции:

     $$X' = \sum_{i=0}^{n-1}(3b'_i + 2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1}(3b_i + 2a_i)4^i + (3b_1 + 2a_1 + 1) \cdot 4 = \\ = \sum_{i=1}^{n-1}(3b_i + 2a_i)4^i + 3 + 1 = \sum_{i=0}^{n-1}(3b_i + 2a_i)4^i + 1 = X + 1.$$

   - $b_0 = 0$, $a_0 = 0$, тогда $b'_0 = 1$, $a'_0 = 1$ и в зависимости от значений в 1-м разряде возможны следующие варианты:

     – $b_1 \leq 1$, $a_1 \geq 2$, тогда $b'_1 = b_1 + 1$, $a'_1 = a_1 - 2$, а для остальных $i > 1$ положим $b'_i = b_i$, $a'_i = a_i$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_1 < C^1_{n-1}$). Запишем формулу получившегося числа:

$$X' = \sum_{i=0}^{n-1}(3b'_i+2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i+(3(b_1+1)+2(a_1-2))\cdot 4+$$
$$+3+2 = \sum_{i=1}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i-4+5 = \sum_{i=0}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i+1 = X+1.$$

- $b_1 = 1$, $a_1 \leq 1$, тогда $b'_1 = b_1 - 1$, $a'_1 = a_1 + 1$, а для остальных $i > 1$ положим $b'_i = b_i$, $a'_i = a_i$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < a'_1 < C^1_{n-1}$). Запишем формулу получившегося числа:

$$X' = \sum_{i=0}^{n-1}(3b'_i+2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i+(3(b_1-1)+2(a_1+1))\cdot 4+$$
$$+3+2 = \sum_{i=1}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i-4+5 = \sum_{i=0}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i+1 = X+1.$$

- $1 < b_1 \leq C^1_{n-1}$, $a_1 < C^1_{n-1}$, тогда $b'_1 = b_1 - 1$, $a'_1 = a_1 + 1$, а для остальных $i > 1$ положим $b'_i = b_i$, $a'_i = a_i$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_1 < C^1_{n-1}$). Запишем формулу получившегося числа:

$$X' = \sum_{i=0}^{n-1}(3b'_i+2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i+(3(b_1-1)+2(a_1+1))\cdot 4+$$
$$+3+2 = \sum_{i=1}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i-4+5 = \sum_{i=0}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i+1 = X+1.$$

- $1 < b_1 < C^1_{n-1}$, $a_1 = C^1_{n-1}$, тогда $b'_1 = b_1 + 1$, $a'_1 = a_1 - 2$, а для остальных $i > 1$ положим $b'_i = b_i$, $a'_i = a_i$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < a'_1 < C^1_{n-1}$). Запишем формулу получившегося числа:

$$X' = \sum_{i=0}^{n-1}(3b'_i+2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i+(3(b_1+1)+2(a_1-2))\cdot 4+$$
$$+3+2 = \sum_{i=1}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i-4+5 = \sum_{i=0}^{n-1}(3b_i+2a_i)4^i+1 = X+1.$$

Заметим, что случай, когда $b_1 = 0$ и $a_1 = 1$ не рассматривается сознательно, обоснование того, что не может быть такого представления числа, у которого $b_0 = 0$, $a_0 = 0$, $b_1 = 0$ и $a_1 = 1$, будет приведено далее.

- $b_0 = 1$, $a_0 = 1$, тогда $b'_0 = 0$, $a'_0 = 1$ и прибавляем единицу к 1-му разряду. Запишем формулу для произведенной операции:

$$X' = \sum_{i=0}^{n-1}(3b'_i + 2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1}(3b_i + 2a_i)4^i + (3b_1 + 2a_1 + 1) \cdot 4 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}(3b_i + 2a_i)4^i + 3 + 1 = \sum_{i=0}^{n-1}(3b_i + 2a_i)4^i + 1 = X + 1.$$

Далее, в зависимости от того, что произошло на данном этапе, либо построение представления закончено и для каждого из разобранных случаев свойство не перестало выполняться, либо прибавляем 1 к 1-му разряду. Определим операцию прибавления к i-му разряду для $i \geq 1$.

2. Операцию прибавления 1 к i-му разряду ($0 < i < n - 1$) определим так:

   - $0 \leq b_i < C_{n-1}^i - 1$, $a_i > 0$, тогда $b'_i = b_i + 1$, $a'_i = a_i - 1$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_i < C_{n-1}^i$).
   - $b_i = C_{n-1}^i - 1$, $a_i > 1$, тогда $b'_i = b_i + 1$, $a'_i = a_i - 1$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < a'_i < C_{n-1}^i$).

     Для двух вышеприведенных случаев запишем формулу, показывающую, что происходит в ходе данного преобразования с частью числа X', соответствующей i-му разряду:

     $$(3b'_i + 2a'_i)4^i = (3(b_i + 1) + 2(a_i - 1)) \cdot 4^i = (3b_i + 2a_i + 1) \cdot 4^i,$$

     т. е. выполнение данного действия действительно позволяет добавить единицу к i-му разряду.
   - $0 < b_i \leq C_{n-1}^i - 1$, $a_i = 0$, тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i + 2$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < a'_i < C_{n-1}^i$).
   - $b_i = C_{n-1}^i - 1$, $a_i = 1$, тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i + 2$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_i < C_{n-1}^i$, $0 < a'_i \leq C_{n-1}^i$).

- $b_i = C_{n-1}^i$, $a_i = 0$, тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i + 2$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_i < C_{n-1}^i$, $0 < a'_i < C_{n-1}^i$).
- $b_i = C_{n-1}^i$, $0 < a_i < C_{n-1}^i - 1$, тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i + 2$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_i < C_{n-1}^i$).

  Для четырех вышеприведенных случаев запишем формулу, показывающую, что происходит в ходе данного преобразования с частью числа X', соответствующей i-му разряду:

$$(3b'_i + 2a'_i)4^i = (3(b_i - 1) + 2(a_i + 2)) \cdot 4^i = (3b_i + 2a_i + 1) \cdot 4^i,$$

  т. е. выполнение данного действия действительно позволяет добавить единицу к i-му разряду.
- $b_i = C_{n-1}^i$, $a_i = C_{n-1}^i - 1$, $b_{i+1} \neq 0$ или $a_{i+1} \neq 0$ тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i$, прибавляем 1 к $(i+1)$-му разряду (после этой операции $0 < a'_i < C_{n-1}^i$, $0 < b'_i < C_{n-1}^i$). Запишем формулу, показывающую, что происходит в ходе данного преобразования с частью числа X', соответствующей i-му и $(i+1)$-му разрядам:

$$(3b'_{i+1} + 2a'_{i+1}) \cdot 4^{i+1} + (3b'_i + 2a'_i) \cdot 4^i = (3b_{i+1} + 2a_{i+1} + 1) \cdot 4^{i+1} + \\ + (3(b_i - 1) + 2a_i) \cdot 4^i = (3b_{i+1} + 2a_{i+1}) \cdot 4^{i+1} + 4 \cdot 4^i + (3b_i + 2a_i - 3) \cdot 4^i = \\ = (3b_{i+1} + 2a_{i+1}) \cdot 4^{i+1} + (3b_i + 2a_i + 1) \cdot 4^i.$$

- $b_i = C_{n-1}^i$, $a_i = C_{n-1}^i - 1$, $b_{i+1} = 0$, $a_{i+1} = 0$, тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i - 2$, $b'_{i+1} = 0$, $a'_{i+1} = 1$, а для остальных $j > i + 1$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_i < C_{n-1}^i$, $a'_{i+1} = 1$, $b'_{i+1} = 0$). Запишем формулу, показывающую, что происходит в ходе данного преобразования с частью числа X', соответствующей i-му и $(i+1)$-му разрядам:

$$(3b'_{i+1} + 2a'_{i+1}) \cdot 4^{i+1} + (3b'_i + 2a'_i) \cdot 4^i = 2 \cdot 4^{i+1} + (3(b_i - 1) + 2(a_i - 2)) \cdot 4^i = \\ = (3b_i + 2a_i - 3 - 4 + 8) \cdot 4^i = (3b_i + 2a_i + 1) \cdot 4^i.$$

Таким образом, после добавления 1 к i-му разряду ($0 < i < n - 1$) свойство не перестает выполняться.

3. Проведем операцию прибавления 1 к $(n-1)$-му разряду:

   - $b_{n-1} = 0, a_{n-1} = 1$, тогда после добавления единицы получаем, что $b'_{n-1} = 1, a'_{n-1} = 0$, построение представления для X' закончено. Запишем формулу, показывающую, что происходит в ходе данного преобразования с частью числа X', соответствующей $(n-1)$-му разряду:

     $$(3b'_{n-1}+2a'_{n-1})4^{n-1} = 3\cdot 4^{n-1} = (2+1)\cdot 4^{n-1} = (3b_{n-1}+2a_{n-1}+1)\cdot 4^{n-1},$$

     т. е. выполнение данного действие действительно позволяет добавить единицу к $(n-1)$-му разряду.

   - $b_{n-1} = 1, a_{n-1} = 0$, тогда не можем построить представление для числа X', число X является максимально возможным для представления с n разрядами.

   Очевидно, что после прибавления единицы к $(n-1)$-му разряду свойство не перестает выполняться.

Таким образом, по индукции можем построить представление для чисел начиная с 10 вплоть до максимального, при этом свойство будет выполняться.

Докажем, что в процессе построения представления для чисел, начиная с 10, не возникнет такая ситуация, что в первом и нулевом разряде будут содержаться 01 и 00, то есть ни для какого числа не возникнет представления вида $\ldots.01.00$. Произведем доказательство от противного. Пусть у нас есть представление вида $\ldots.01.00$, последовательно построенное согласно приведенному выше алгоритму, для какого-то числа. Обозначим число с подобным представление как Y, поскольку все числа, как описано выше, могут быть получены путем последовательного прибавления 1 к представлению числа 10, рассмотрим, как выглядит представление для числа, равного $Y-1$, из которого прибавлением 1 по приведенному выше алгоритму можно получить Y. Будем обозначать элементы представления числа Y как $b'_1 = 0, a'_1 = 1, b'_0 = 0, a'_0 = 0$. Очевидно, что $(b'_2 \neq 0) \vee (a'_2 \neq 0)$, иначе Y было бы меньше 10 или не выполнялось бы свойство представления. Пусть элементы числа $Y-1$ будем обозначать как b_i, a_i, тогда очевидно, что для них справедливо $b_0 = 1, a_0 = 0$, рассмотрим, каковы могут быть значения b_1, a_1. Поскольку $b_0 = 1, a_0 = 0$, то после прибавления единицы к числу имеем $b'_0 = 0, a'_0 = 0$ и добавляем 1 к первому разряду. Запишем, какое соотношение должно выполняться для 1-го разряда:$(3b'_1 + 2a'_1) \cdot 4 = (3b_1 + 2a_1 + 1) \cdot 4$. Отсюда следует, что $(3b_1 + 2a_1) \cdot 4 = 4$, т. е. $3b_1 + 2a_1 = 1$, откуда не могут быть получены неотрицательные целые значения для b_1, a_1. Таким образом, получили противоречие в том, что число Y может быть получено с помощью прибавления 1 из представления какого-то числа. Следовательно, Y не является представлением и, следовательно, не может быть ситуации, когда в первом и нулевом разрядах содержатся соответственно 01 и 00.

Посчитаем, какова будет величина X — максимального числа, для которого можем записать подобное представление с использованием только n разрядов. Согласно представленному алгоритму, это число будет равно:

$$X = \sum_{i=0}^{n-1}(3C^i_{n-1} + 2(C^i_{n-1} - 1))4^i = 5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1).$$

Таким образом, с помощью данного представления с помощью n разрядов можно выразить все числа в диапазоне от 10 до $5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1)$, при этом будет выполняться сформулированное свойство. □

Следствие 4.7. *С помощью представления с n разрядами выражаются все числа от 10 до $5^n/2$ при $n \geq 4$.*

Доказательство. Следует из теоремы 4.6 и того, что $5^n/2 \leq 5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1)$ для $n \geq 4$. □

Лемма 4.8. *По представлению с помощью n разрядов $(n \geq 4)$ для числа X, $10 \leq X < 5^n/2$, можно построить семейство таких булевых функций, что каждая из этих функций индуцирует вероятностную функцию $\widehat{f}$, для которой найдутся $\widehat{x}_i \in A(5) : \widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = X/5^n$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Построенное представление для числа X будет соответствовать семейству булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, построенных следующим образом: каждый i-й разряд соответствует части СДНФ в следующей форме: b_i — число слагаемых, представимых в виде $\bar{x}_1 \underbrace{x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}}_{i \text{ отрицаний}}$, где $\sigma_j \in \{0; 1\}$, $x_j^0 = \bar{x}_j$, $x_j^1 = x_j$, a_i — число слагаемых, представимых в виде $x_1 \underbrace{x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}}_{i \text{ отрицаний}}$, где $\sigma_j \in \{0; 1\}$, $x_j^0 = \bar{x}_j$, $x_j^1 = x_j$. Целиком булеву функцию будем записывать как дизъюнкцию всех таких частей, записанных для каждого разряда. Очевидно, что подобный алгоритм с учетом свойств представления, сформулированных в теореме 4.6, позволяет построить не одну, а целое семейство булевых функций.

Запишем по СДНФ одной из построенных булевых функций индуцированную вероятностную функцию. Дизъюнкцию заменяем на сложение, конъюнкцию — на умножение. Вместо переменной x_i записываем $\widehat{x}_i$, вместо переменной $\bar{x}_i$ записываем $1 - \widehat{x}_i$. Рассмотрим значение полученной индуцированной функции $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ при подстановке $2/5$ вместо переменной $\widehat{x}_1$, и значения $1/5$ вместо переменных $\widehat{x}_2, \ldots \widehat{x}_n$.

В этом случае значение индуцированной функции будет равно:

$$\widehat{f}(2/5, 1/5, \ldots, 1/5) = \sum_{i=0}^{n-1} (3/5 \cdot b_i + 2/5 \cdot a_i)(4/5)^i (1/5)^{n-1-i} = X/5^n,$$

где X— число от 10 до $5^n/2$. Тем самым мы показали, как для любой дроби вида $X/5^n$, где $n \geq 4$, $10 \leq X < 5^n/2$ можно построить индуцированную функцию, которая позволяет выразить $X/5^n$, используя значения переменных из $A(5)$. $\square$

Пример 4.1. Покажем, как с помощью индуцированной функции можно получить дробь $311/5^4$. Представление, введенное в теореме 4.6, для числителя 311 выглядит как $01.21.32.10$. Это соответствует семейству булевых функций, определяемых согласно лемме 4.8 следующим образом:

- один единичный набор вида $(1, 0, 0, 0)$, что соответствует элементарной конъюнкции $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ в СДНФ,
- два единичных набора вида $(0, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{\text{2 нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$.
- один единичный набор вида $(1, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{\text{2 нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$.
- три единичных набора вида $(0, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{\text{1 нуль}})$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$.
- два единичных набор вида $(1, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{\text{1 нуль}})$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$.

- один единичный набор вида $(0,1,1,1)$, что соотвествует элементарной конъюнкции $\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$ в СДНФ функции.

Выберем, на каких конкретных наборах, удовлетворяющих записанным выраженим, функция будет принимать единичное значение. Запишем СДНФ получившейся функции:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \\ \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4.$$

Тогда индуцированная функция равна:

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1,\widehat{x}_2,\widehat{x}_3,\widehat{x}_4) = \widehat{x}_1(1-\widehat{x}_2)(1-\widehat{x}_3)(1-\widehat{x}_4) + (1-\widehat{x}_1)(1-\widehat{x}_2)(1-\widehat{x}_3)\widehat{x}_4 + \\ + (1-\widehat{x}_1)x_2(1-\widehat{x}_3)(1-\widehat{x}_4) + \widehat{x}_1(1-\widehat{x}_2)(1-\widehat{x}_3)\widehat{x}_4 + (1-\widehat{x}_1)(1-\widehat{x}_2)\widehat{x}_3\widehat{x}_4 + \\ + (1-\widehat{x}_1)\widehat{x}_2(1-\widehat{x}_3)\widehat{x}_4 + (1-\widehat{x}_1)\widehat{x}_2\widehat{x}_3(1-\widehat{x}_4) + \widehat{x}_1(1-\widehat{x}_2)\widehat{x}_3\widehat{x}_4 + \widehat{x}_1\widehat{x}_2(1-\widehat{x}_3)\widehat{x}_4 + \\ + (1-\widehat{x}_1)\widehat{x}_2\widehat{x}_3\widehat{x}_4.$$

Значение индуцированной функции после подстановки значений из $A(5)$ равно:

$$\widehat{f}\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right) = \frac{2\cdot 4^3 + 2\cdot 3\cdot 4^2 + 1\cdot 2\cdot 4^2 + 3\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 2\cdot 4 + 3}{5^4} = \frac{311}{5^4}.$$

Лемма 4.9. *Для любой булевой функции f, построенной по представлению числа X, $10 \le X < 5^n/2$, с помощью n $(n \ge 4)$ разрядов выполнено:*

$$\alpha(\widehat{f}) = \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(\alpha_{2i} + \beta_{2i+1}) - \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(\alpha_{2i+1} + \beta_{2i}).$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1 имеем, что $\alpha(\widehat{f}) = \eta_e(f) - \eta_o(f)$. Из леммы 4.8 следует, что b_{2i} и a_{2i+1} будут соответствовать единичным наборам с нечетным числом нулей, а b_{2i+1} и a_{2i} будут соответствовать единичным наборам с четным числом нулей, где $1 \le i \le [\frac{n-1}{2}]$. Отсюда непосредственно выводится требуемая формула. □

Следствие 4.10. *Если в формулировке леммы 4.9 величина X кратна 5, то дополнительно выполнено*

$$\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(\alpha_{2i} + \beta_{2i+1}) - \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(\alpha_{2i+1} + \beta_{2i}) = 5B,$$

где $B \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Следует из леммы 4.9 и следствия 4.2. □

Лемма 4.11. *Для любой дроби* $X/5^n$, *у которой для числителя* X *выполнены соотношения* $20 \leq X < 5^n/2$, $n \geq 4$, $X \bmod 5 = 0$, *можем построить* n*-местную булеву функцию* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *без фиктивных переменных, которая индуцирует вероятностную функцию* $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$, *для которой найдутся* $\widehat{x}_i \in A(5) : \widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = X/5^n, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Для числа X построим представление. Напомним, что переменная x_i называется существенной [77], если найдутся такие два набора

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n),$$

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n),$$

что

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \neq f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n),$$

где $\sigma_j \in \{0; 1\}$.

Покажем, что можно так определить функцию по представлению (согласно описанному в лемме 4.8), что каждая из n переменных будет существенной.

Для 0-го разряда представления возможны следующие варианты:

1. $b_0 = 0, a_0 = 0$. Это соответствует тому, что $f(0, 1, \ldots, 1, 1) = 0$, $f(1, 1, \ldots, 1, 1) = 0$. Для 1-го разряда представления возможны следующие варианты:

   (a) $0 < a_1 < n - 1 = C^1_{n-1}, b_1 = 0$. Справедливость равенства $b_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$, в том числе выполнено $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 0$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и еще хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$, $f(1, 1, \ldots, 1, 0) = 0$. Отсюда следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

(b) $0 < b_1 < n-1, a_1 = 0$. Выполнение соотношения $a_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, $f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$, в том числе $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 0$. Справедливость неравенства $0 < b_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 0, f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 1$. Отсюда следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

(c) $0 < a_1 < n-1, b_1 = n-1$. Равенство $b_1 = n-1$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, в том числе $f(0, 1, \ldots, 0) = 1$ Поскольку $f(0, 1, \ldots, 1) = 0$ (в силу $b_0 = 0$), следовательно, все переменные $x_2, \ldots, x_n$ являются существенными. Поскольку $a_1 < n-1$, то найдется хотя бы один набор вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, на котором функция равна нулю. Определим $f(1, 1, \ldots, 1, 0) = 0$. Соответственно, переменная x_1 тоже существенная. Таким образом, все n переменных являются существенными.

(d) $0 < b_1 < n-1, a_1 = n-1$. Из равенства $a_1 = n-1$ следует, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, в том числе $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$. Поскольку $f(1, 1, \ldots, 1) = 0$ (в силу $a_0 = 0$), следовательно, все переменные $x_2, \ldots, x_n$ являются существенными. Поскольку $b_1 < n-1$, то есть хотя бы один набор вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, на котором функция равна нулю. Определим $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 0$. Соответственно, переменная x_1 тоже существенная. Таким образом, все n переменных являются существенными.

(e) $0 < a_1 < n-1, 0 < b_1 < n-1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и еще хотя бы один, на котором функция равна единице.

Определим $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 0$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один, на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$, $f(1, 1, \ldots, 1, 0) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1, x_2 и x_n являются существенными.

2. $b_0 = 0, a_0 = 1$. Это соответствует тому, что $f(0, 1, \ldots, 1, 1) = 0$, $f(1, 1, \ldots, 1, 1) = 1$. Очевидно, что отсюда следует, что x_1 — существенная переменная. Для 1-го разряда представления возможны следующие варианты:

    (a) $0 < a_1 < n-1, b_1 = 0$. Справедливость равенства $b_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и еще хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 0$, $f(1, 1, \ldots, 1, 0) = 1$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

    (b) $0 < b_1 < n-1, a_1 = 0$. Выполнение соотношения $a_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$. Из этого следует, что переменные с x_2 по x_n являются существенными, а значит, все n переменных существенные.

    (c) $0 < a_1 < n-1, b_1 = n-1$. Равенство $b_1 = n-1$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$. Поскольку $f(0, 1, \ldots, 1) = 0$, следовательно, все переменные $x_2, \ldots, x_n$ являются существенными. Следовательно, все n переменных существенные.

(d) $0 < b_1 < n-1, a_1 = n-1$. Из равенства $a_1 = n-1$ следует, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, справедливо $f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и еще хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 0$, $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 1$. Таким образом, переменные x_1 и x_2 будут существенными.

(e) $0 < a_1 < n-1, 0 < b_1 < n-1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и еще хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 0$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один, на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1, x_2 и x_n являются существенными.

3. $b_0 = 1, a_0 = 0$. Это соответствует тому, что $f(0, 1, \ldots, 1, 1) = 1$, $f(1, 1, \ldots, 1, 1) = 0$. Очевидно, что отсюда следует существенность переменной x_1. Для 1-го разряда представления возможны следующие варианты:

(a) $0 < a_1 < n-1, b_1 = 0$. Справедливость равенства $b_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$. Из этого следует, что переменные с x_2 по x_n являются существенными, а значит, все n переменных существенные.

(b) $0 < a_1 < n-1, b_1 = n-1$. Равенство $b_1 = n-1$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено

$f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\ \text{ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один, на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$, $f(1, 1, \ldots, 1, 0) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

(c) $0 < b_1 < n-1, a_1 = 0$. Выполнение соотношения $a_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\ \text{ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\ \text{ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и еще хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

(d) $0 < b_1 < n-1, a_1 = n-1$. Из равенства $a_1 = n-1$ следует, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\ \text{ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, справедливо $f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$. Из такого определения функции следует, что существенными являются переменные с x_2 по x_n, а значит, все n переменных будут существенными.

(e) $0 < a_1 < n-1, 0 < b_1 < n-1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\ \text{ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и еще хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 0$, $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 1$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1\ \text{ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один, на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$, $f(1, 1, \ldots, 1, 0) = 0$. Таким образом, можем доопределить функцию f так, что переменные x_1, x_2 и x_n станут существенными.

4. $b_0 = 1, a_0 = 1$. Это соответствует тому, что $f(0,1,\ldots,1,1) = 1$, $f(1,1,\ldots,1,1) = 1$. Для 1-го разряда представления возможны следующие варианты:

   (a) $0 < a_1 < n-1, b_1 = 0$. Справедливость равенства $b_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(0,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = 0$, в том числе $f(0,0,1,\ldots,1) = 0$. Из этого следует, что переменные с x_2 по x_n являются существенными. Поскольку $a_1 > 0$, то найдется хотя бы один набор вида $(1, \underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, на котором функция равна единице, тогда можем доопределить $f(1,0,1,\ldots,1) = 1$. Отсюда следует, что x_1— существенная. Таким образом, все n переменных являются существенными.

   (b) $0 < b_1 < n-1, a_1 = 0$. Выполнение соотношения $a_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = 0$. в том числе $f(1,0,1,\ldots,1) = 0$. Из этого следует, что переменные с x_2 по x_n являются существенными. Поскольку $b_1 > 0$, то найдется хотя бы один набор вида $(0, \underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, на котором функция равна единице, тогда можем доопределить $f(0,0,1,\ldots,1) = 1$. Отсюда следует, что x_1— существенная, а значит, все n переменных являются существенными.

   (c) $0 < a_1 < n-1, b_1 = n-1$. Равенство $b_1 = n-1$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(0,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = 1$, в том числе $f(0,0,1,\ldots,1) = 1$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n-1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, есть хотя бы один, на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Тогда определим $f(1,1,\ldots,1,0) = 1$, $f(1,0,1,\ldots,1,1) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

   (d) $0 < b_1 < n-1, a_1 = n-1$. Равенство $a_1 = n-1$ означает, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, в том числе $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и еще хотя бы один, на котором функция равна единице. Тогда определим $f(0, 0, 1, \ldots, 1, 1) = 0$, $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

(e) $0 < a_1 < n - 1, 0 < b_1 < n - 1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и еще хотя бы один, на котором функция равна единице. Тогда определим $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 0$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один, на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Тогда определим $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$, $f(1, 1, \ldots, 1, 0) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1, x_2 и x_n являются существенными.

Таким образом, для возможных значений в 0-м и 1-м разрядах представления в случаях 1a, 1b, 1e, 2a, 2d, 2e, 3b, 3c, 3e, 4c, 4d и 4e не все переменные получится сделать существенными. Как следует из предыдущих рассуждений, для всех случаев 1e, 2e, 3e, 4e при переходе от 0-го к 1-му разряду представления получается определить функцию f так, чтобы сделать существенными переменные x_1, x_2, x_n. Таким образом, остается показать, что для этих случаев также и переменные с x_3 по x_{n-1} можно сделать существенными. Для остальных случаев удается сделать существенными переменные x_1, x_2. Соответственно, остается показать, что переменные с x_3 по x_n можно сделать существенными.

Рассмотрим, как доопределить функцию f при переходе от 1-го к 2-му разряду, чтобы все переменные стали существенными. Возможны два варианта. Первый вариант, когда хотя бы одно из значений b_2, a_2 не равно нулю, второй — когда $b_2 = a_2 = 0$.

Рассмотрим первый вариант. Для случаев 1e, 2e, 3e и 4e выполнено $1 \leq b_1 \leq n-2$ и $1 \leq a_1 \leq n-2$. Тогда поскольку хотя бы одно из значений b_2, a_2 не равно нулю и выполняется свойство представления, то хотя бы одно из этих значений больше нуля и меньше максимального значения, равного C_{n-1}^2. Тогда:

I. если $n-3 \leq b_2 < C_{n-1}^2$,

   – для случаев 1e, 2e и 4e уже определили, что $f(0,1,\ldots,1,0) = 1$, $f(0,0,1\ldots,1) = 0$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0,0,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},1)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, положим $f(0,0,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},1) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n-3$, а $b_2 \geq n-3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} будут существенными.

   – для случая 3e ранее уже определили, что $f(0,1,\ldots,1,0) = 0$, $f(0,0,1\ldots,1) = 1$. Тогда доопределим f следующим образом: на наборах вида $(0,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, положим $f(0,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n-3$, а $b_2 \geq n-3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} будут существенными.

II. если $1 \leq b_2 < n-3$ (это возможно только в случае $n \geq 5$),

   – для случаев 1e, 2e и 4e уже определили, что $f(0,1,\ldots,1,0) = 1$, $f(0,0,1\ldots,1) = 0$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 нуль}},0)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, положим $f(0,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n-4) > n-3$ для $n \geq 5$, тогда переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными.

   – для случая 3e ранее уже определили, что $f(0,1,\ldots,1,0) = 0$, $f(0,0,1\ldots,1) = 1$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0,0,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 нуль}},1)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, положим $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 1) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C^2_{n-1} - (n-4) > n-3$ для $n \geq 5$, тогда переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными.

III. если $n - 3 \leq a_2 < C^2_{n-1}$,

– для случаев 1е, 3е и 4е уже определили, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 нуль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n-3$, а $a_2 \geq n-3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} будут существенными.

– для случая 2е ранее уже определили, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$, $f(1, 1 \dots, 1, 0) = 1$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 нуль}}, 1)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 1) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n-3$, а $a_2 \geq n-3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} будут существенными.

IV. если $1 \leq a_2 < n-3$ (это возможно только в случае $n \geq 5$),

– для случаев 1е, 3е и 4е уже определили, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}}, 1)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 1) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C^2_{n-1} - (n-4) > n-3$ для $n \geq 5$, то переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными.

– для случая 2е ранее уже определили, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$, $f(1, 1 \dots, 1, 0) = 1$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше

$C_{n-1}^2 - (n-4) > n-3$ для $n \geq 5$, то переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными.

Таким образом, полностью показали, как надо определить функцию f, чтобы для случаев 1е, 2е, 3е и 4е все n переменных были существенными.

Рассмотрим случай 1а. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(1,0,1,\ldots,1) = 1$, $f(1,1,\ldots,1,0) = 0$.

Тогда возможны следующие варианты:

- $n-3 \leq a_2 < C_{n-1}^2$. Доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, положим, что $f(1,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n-3$, а $a_2 \geq n-3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} будут существенными. Также положим, что $f(1,0,1,\ldots,0) = 0$, тогда переменная x_n также будет существенной.

- $1 \leq a_2 < n-3$ (это возможно только для $n \geq 5$). Доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1,0,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, положим $f(1,0,\sigma_3,\ldots,\sigma_n) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2-(n-4) > n-2$ для $n \geq 5$, тогда переменные с x_3 по x_n являются существенными.

- $a_2 = C_{n-1}^2$, тогда по свойству представления $1 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. Из $a_2 = C_{n-1}^2$ следует, что на всех наборах вида $(1,\underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{\text{2 нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = 1$, в том числе на всех наборах вида $(1,\underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, $f(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1},0) = 1$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Кроме того, из равенства $b_1 = 0$ следует, в частности, что $f(0,0,1,\ldots,1) = 0$, а из того, что $b_2 \geq 1$ следует, что можем доопределить функцию так: $f(0,0,1,\ldots,1,0) = 1$. Тогда переменная x_n будет также существенной.

- $a_2 = 0$, поэтому на всех наборах вида $(1,\underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{\text{2 нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = 0$, в том числе на всех наборах вида

$(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, $f(1, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для случая 1a показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 1b. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 0$, $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 1$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 3 \leq b_2 < C^2_{n-1}$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим, что $f(0, 1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 3$, а $b_2 \geq n-3$, то переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Также определим $f(0, 0, 1, \ldots, 1, 0) = 0$, тогда переменная x_n также будет существенной.

- $1 \leq b_2 < n - 3$ (возможно только для $b \geq 5$). Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение не меньше, чем $C^2_{n-1} - (n-4) \geq n - 3$ для $n \geq 5$, тогда переменные с x_3 по x_n являются существенными.

- $b_2 = C^2_{n-1}$, тогда по свойству представления $1 \leq a_2 < C^2_{n-1}$. Из $b_2 = C^2_{n-1}$ следует, что на всех наборах вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{2 нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, в том числе на наборах вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Из того, что $a_2 \geq 1$, следует, что мы можем доопределить $f(1, 0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, отсюда в силу того, что $f(1, 0, 1 \ldots, 1) = 0$ (так как $a_1 = 0$), следует, что x_n будет существенной.

- $b_2 = 0$, тогда по свойству представления $1 \leq a_2 < C^2_{n-1}$. Из $b_2 = 0$ следует, что на всех наборах вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{2 нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено

$f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$, в том числе на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для случая 1b показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 2a. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 0$, $f(1, 1, \ldots, 1, 0) = 1$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 2 \leq a_2 < C^2_{n-1}$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 1$. Поскольку число подобных единичных наборов $n-2$, а $a_2 \geq n-2$, то переменные с x_3 по x_n являются существенными.

- $1 \leq a_2 < n - 2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C^2_{n-1} - (n-3) > n-3$ для $n \geq 4$, то переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Так как $a_2 \geq 1$, тогда определим $f(1, 0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, тогда x_n является существенной.

- $a_2 = 0$, тогда $1 \leq b_2 < C^2_{n-1}$. На всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Так как $b_2 \geq 1$, тогда определим $f(0, 0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, тогда x_n является существенной, так как $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 0$ (поскольку $b_1 = 0$).

- $a_2 = C^2_{n-1}$, тогда на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 1$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для случая 2a показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 2d. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(0,1,\ldots,1,0)=0$, $f(0,0,1,\ldots,1)=1$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n-3 \leq b_2 < C^2_{n-1}$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(0,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, положим $f(0,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0)=1$. Поскольку таких единичных наборов $n-3$, а $b_2 \geq n-3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} существенные. Далее положим $f(0,0,1,\ldots,1,0)=0$, тогда x_n является существенной.

- $1 \leq b_2 < n-3$ (возможно только для $n \geq 5$). Доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0,0,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, положим $f(0,0,\sigma_3,\ldots,\sigma_n)=0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C^2_{n-1}-(n-4) > n-2$ для $n \geq 5$, тогда переменные с x_3 по x_n являются существенными.

- $b_2 = 0$, тогда на всех наборах вида $(0,0,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(0,0,\sigma_3,\ldots,\sigma_n)=0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

- $b_2 = C^2_{n-1}$, тогда $1 \leq a_2 < C^2_{n-1}$. На всех наборах $(0,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(0,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0)=1$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Так как $a_2 < C^2_{n-1}$, тогда определим $f(1,0,1,\ldots,1,0)=0$, тогда x_n является существенной, так как $f(1,0,1,\ldots,1)=1$ (в силу $a_1 = n-1$).

Таким образом, для случая 2d показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 3b. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(1,0,1,\ldots,1)=1$, $f(1,1,\ldots,1,0)=0$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n-3 \leq a_2 < C^2_{n-1}$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, положим

$f(1, 1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 3$, а $a_2 \geq n - 3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} существенные. Кроме этого, положим $f(1, 0, 1, \ldots, 1, 0) = 0$, тогда x_n станет существенной.

- $1 \leq a_2 < n - 3$ (возможно только для $n \geq 5$). Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 4) > n - 2$ для $n \geq 5$, то переменные с x_3 по x_n являются существенными.

- $a_2 = 0$, тогда на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 0$. Переменные с x_3 по x_n являются существенными.

- $a_2 = C_{n-1}^2$, тогда $1 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. На всех наборах $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Тогда все переменные с x_3 по x_{n-1}— существенные. Дополнительно, так как $b_2 < C_{n-1}^2$, доопределим $f(0, 0, 1, \ldots, 1, 0) = 0$ (заметим, что $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 1$ в силу $b_1 = n - 1$). Тогда все переменные с x_3 по x_n станут существенными.

Таким образом, для случая 3b показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 3c. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 0$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 2 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 нуль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 2$, а $b_2 \geq n - 2$, то все переменные с x_3 по x_n будут существенными.

- $1 \leq b_2 < n - 2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 нуль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим

$f(0,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0)=0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2-(n-3)>n-3$ для $n\geq 4$, тогда переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Дополнительно определим $f(0,0,1,\ldots,1,0)=1$, тогда x_n станет существенной переменной.

- $b_2=0$, тогда $1\leq a_2<C_{n-1}^2$. На всех наборах вида $(0,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i\in\{0;1\}$, выполнено $f(0,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0)=0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Кроме того, поскольку $a_2\geq 1$ определим $f(1,0,1,\ldots,1,0)=1$, соответственно, в силу того, что $f(1,0,1,\ldots,1)=0$, переменная x_n станет существенной.

- $b_2=C_{n-1}^2$, тогда на всех наборах вида $(0,0,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i\in\{0;1\}$, выполнено $f(0,0,\sigma_3,\ldots,\sigma_n)=1$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для случая 3с показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 4с. Напомним, что, среди прочего, мы определили для функции f ранее, что $f(1,1,\ldots,1,0)=1$, $f(1,0,1,\ldots,1,1)=0$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n-2\leq a_2<C_{n-1}^2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1,0,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i\in\{0;1\}$, положим $f(1,0,\sigma_3,\ldots,\sigma_n)=1$. Поскольку таких единичных наборов $n-2$, а $a_2\geq n-2$, то все переменные с x_3 по x_n будут существенными.

- $1\leq a_2<n-2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i\in\{0;1\}$, положим $f(1,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0)=0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2-(n-3)>n-3$ для $n\geq 4$, то переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Кроме того, определим $f(1,0,1,\ldots,1,0)=1$, тогда x_n станет существенной.

- $a_2 = 0$, тогда $1 \le b_2 < C_{n-1}^2$. На всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}}_{1\text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Тогда переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Поскольку $b_2 < C_{n-1}^2$, то определим $f(0, 0, 1, \ldots, 1, 0) = 0$, а поскольку $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 1$ (в силу $b_1 = n - 1$), то x_n станет существенной.

- $a_2 = C_{n-1}^2$, тогда на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{1\text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 1$. Тогда все переменные с x_3 по x_n будут существенными.

Таким образом, для случая 4c показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 4d. Напомним, что среди прочего, мы определили для функции f ранее, что $f(0, 0, 1, \ldots, 1, 1) = 0$, $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 2 \le b_2 < C_{n-1}^2$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{1\text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 2$, а $b_2 \ge n - 2$, то все переменные с x_3 по x_n будут существенными.

- $1 \le b_2 < n - 2$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}}_{1\text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n-3) > n-3$ для $n \ge 4$, тогда переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Также определим $f(0, 0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, тогда x_n является существенной.

- $b_2 = 0$, тогда $1 \le a_2 < C_{n-1}^2$. На всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}}_{1\text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Кроме того, определим $f(1, 0, 1, \ldots, 1, 0) = 0$, соответственно, в силу того, что $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$ (поскольку $a_1 = n - 1$), переменная x_n станет существенной.

- $b_2 = C_{n-1}^2$, тогда на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 1$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для случая 4d показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим второй вариант, когда $b_2 = 0$ и $a_2 = 0$. Из следствия 4.10 и свойства представления следует справедливость соотношения:

$$a_0 + b_1 - a_1 - b_0 = 5B, \tag{4.2}$$

где $B \in \mathbb{Z}$.

Разберем, как доопределить функцию так, чтобы все переменные стали существенными, для всех двенадцати случаев.

Случай 1a. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.0a_1.00.$$

Из соотношения 4.2 следует, что $a_1 = 5l$, где $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, $a_1 \geq 5$.

Ранее для этого случая было получено в том числе, что выполнено $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 нуль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 1b. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.b_10.00.$$

Из соотношения 4.2 следует, что $b_1 = 5l$, где $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, $b_1 \geq 5$. Ранее для этого случая определили, что $f(0, 0, 1, \ldots, 1) = 1$, в силу того, что $b_2 = 0$, на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 1e. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.b_1a_1.00.$$

Из соотношения 4.2 следует, что $b_1 - a_1 = 5B$, где $B \in \mathbb{Z}$. Ранее для этого случая определили, что $f(0,1,\ldots,1,0) = 1$. В силу того, что $b_2 = 0$, для всех наборов вида $(0,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(0,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} существенные.

Случай 2a. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.0a_1.01.$$

Из соотношения 4.2 следует, что $1 - a_1 = 5B$, где $B \in \mathbb{Z}$.

Если $B = 0$, то это соответствует представлению для числа $X = 10$, этот случай не рассматриваем в рамках данной леммы. Если $B \neq 0$, то получаем, что $a_1 \geq 6$. Ранее для этого случая было в том числе определено, что $f(1,1,\ldots,1,0) = 1$, $f(1,0,1\ldots,1) = 0$, доопределим $f(1,1,0,1,\ldots,1) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(1,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 2d. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.b_1C_{n-1}^1.01.$$

В силу того, что $a_1 = C_{n-1}^1 = n-1$, для всех наборов вида $(1,\underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1,\underbrace{\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{\text{2 нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 2e. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.b_1a_1.01.$$

Для данного случая справедливо, что $1 \leq b_1, a_1 < C_{n-1}^1$. Ранее для этого случая, в частности, было определено, что $f(0,1,\ldots,1,0) = 1$. Поскольку $b_2 = 0$, то для всех наборов $(0,1,\underbrace{\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}},0)$, где $\sigma_i \in \{0;1\}$, выполнено $f(0,1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{n-1},0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными.

Случай 3b. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.C_{n-1}^1 a_1.10.$$

В силу того, что $b_1 = C_{n-1}^1 = n-1$, для всех наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$. Поскольку $b_2 = 0$, то для всех наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{2 нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 3c. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.b_1 0.10.$$

Из соотношения 4.2 следует, что $b_1 - 1 = 5B$, где $B \in \mathbb{Z}$. Если $B = 0$, то это соответствует представлению для числа $X = 15$, этот случай не рассматриваем в рамках данной леммы. Если $B \neq 0$, то получаем, что $b_1 \geq 6$. Ранее для этого случая, в частности, было определено, что $f(0, 1, \ldots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \ldots, 1, 1) = 0$. Поскольку $b_1 \geq 6$, тогда доопределим $f(0, 1, \ldots, 1, 0, 1) = 1$. Поскольку $b_2 = 0$, то для всех наборов вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}}_{\text{1 ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 3e. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.b_1 a_1.10.$$

Для данного случая справедливо, что $1 \leq b_1, a_1 < C_{n-1}^1$. Ранее для этого случая, в частности, было определено, что $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 4c. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.C_{n-1}^1 a_1.11.$$

В силу того, что $b_1 = C_{n-1}^1 = n-1$, для всех наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$. Поскольку $b_2 = 0$, то для всех наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{2 нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 4d. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.b_1 C_{n-1}^1.11.$$

В силу того, что $a_1 = C_{n-1}^1 = n-1$, для всех наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \ldots, \sigma_n}_{\text{2 нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 4e. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\ldots}_{\text{нули}}.00.b_1 a_1.11.$$

Для данного случая справедливо, что $1 \leq b_1, a_1 < C_{n-1}^1$. Ранее для этого случая, в частности, было определено, что $f(1, 0, 1, \ldots, 1) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \ldots, \sigma_n}_{\text{1 ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для второго варианта также показали, как можно определить функцию f для того, чтобы все n переменных были существенными.

Следует заметить, что при указании на то, как определить функцию f, только для части наборов задано жестко, будет на них функция равна нулю или единице. Соотвественно, на оставшейся части наборов при определении функции руководствуемся алгоритмом, описанным в лемме 4.8. Это доопределение не будет влиять на существенность переменных, и следовательно, для некоторых чисел по представлению можно построить несколько функций без фиктивных переменных.

Таким образом, лемма доказана, показали, что для любой дроби $X/5^n$, у которой $20 \leq X \leq 5^n/2$, $n \geq 4$, сможем построить n-местную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ со всеми существенными переменными, которая индуцирует вероятностную функцию $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$, для которой $\exists \widehat{x}_i \in A(5)$, $i \in \{1, \ldots, n\} : \widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = X/5^n$. $\square$

4.2 Доказательство конечной порожденности

Лемма 4.12. *Для множества* 5*-несократимых функций* $\mathcal{N}_5$ *выполняется* $A(5^3) \subset V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

Доказательство. Введем обозначения для некоторых вероятностных функций, индуцированных булевыми функциями из $\mathcal{N}_5$. Будем обозначать как $\widehat{\&}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ функцию, индуцированную конъюнкцией n переменных $x_1 \& \ldots \& x_n$, как $\widehat{h}_1(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ — функцию, индуцированную $x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$, и наконец обозначим как $\widehat{h}_2(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)$ функцию, индуцированную $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3$. Запишем выражения для индуцированных функций: $\widehat{\&}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \widehat{x}_1 \ldots \widehat{x}_n$, $\widehat{h}_1(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = 1 - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2 + 2\widehat{x}_1\widehat{x}_2$, $\widehat{h}_2(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) = 1 - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2 - \widehat{x}_3 + \widehat{x}_1\widehat{x}_2 + \widehat{x}_1\widehat{x}_3 + 2\widehat{x}_2\widehat{x}_3 - \widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_3$.

Рассмотрим различные правильные дроби $a/5^3 \in A(5^3)$. Возможно несколько вариантов.

1. Если числитель a у правильной дроби $a/5^3$ кратен 5, т. е. представим в виде $a = 5b$, то получаем, что $a/5^3 = 5b/5^3 = b/5^2$, а любая правильная дробь $b/5^2 \in A(5^2)$. Следовательно такая дробь уже принадлежит $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$, так как $V^1_{\mathcal{N}_5}(A(5^2)) = A(5^2)$.

2. Если числитель a у правильной дроби $a/5^3$ представим в виде $a = bc$, где $1 \le b \le 24$, $b \in \mathbb{N}$, $b \bmod 5 \ne 0$, $c \in \{1, 2, 3, 4\}$, то такая дробь может быть получена следующим образом: $\widehat{\&}(b/5^2, c/5) = bc/5^3 = a/5^3$, где $b/5^2 \in A(5^2)$, $c/5 \in A(5)$. Следовательно, $a/5^3 \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

3. Если числитель a у правильной дроби $a/5^3$ может быть представлен как $a = 125 - bc$, где $1 \le b \le 24$, $b \bmod 5 \ne 0$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \{1, 2, 3, 4\}$, то в силу того, что $bc/5^3 \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$, как показано в предыдущем пункте, и следствия 4.5 получаем, что поскольку $a/5^3 = (125 - bc)/5^3 = 1 - bc/5^3$, то выполнено $a/5^3 \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

   Приведенными выше способами можно выразить все числители правильных дробей из $A(5^3)$, кроме числителей из множества $\{31, 43, 47, 58, 67, 78, 82, 94\}$.

4. Дроби $a/5^3$ с числителями $31, 43, 47, 58$ могут быть получены следующим образом:

$$\widehat{h}_2(3/5, 1/5, 3/5) = 31/125,$$

$$\widehat{h}_2(2/5, 2/5, 2/5) = 47/125,$$

$$\widehat{h}_1(4/5, 6/25) = 43/125,$$

$$\widehat{h}_1(2/5, 17/25) = 58/125.$$

Таким образом, эти дроби принадлежат $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

5. Дроби $a/5^3$ с числителями $94, 82, 78, 67$ в силу следствия 4.5 и того, что $31/125, 43/125, 47/125, 58/125 \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$, также будут принадлежать $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

Таким образом, показали, что все правильные дроби со знаменателем 5^3 из множества $A(5^3)$ принадлежат множеству $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$. Лемма доказана. □

Теорема 4.13 [70]. *Класс булевых функций* $\mathcal{N}_5$ *является конечно порождающим в множестве* $\Gamma[5]$. *В качестве начального множества можно взять* $A(5^2)$.

Доказательство. Очевидно, что если дробь $X/5^n$ является несократимой, то в результате операции $1 - X/5^n = (5^n - X)/5^n$ также получим несократимую дробь. Возьмем произвольную правильную дробь $Y/5^{n_0} \in \Gamma[5]$, $n_0 \geq 1, n_0 \in \mathbb{N}$. Представим ее в виде несократимой дроби $X/5^n \in \Gamma[5]$, $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Тогда для показателя степени знаменателя n возможны следующие варианты:

1. Если $n \leq 2$, то по определению $X/5^n \in A(5^2)$, т. е. $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2)))$.

2. Если $n = 3$, то по доказанному в Лемме 4.12 получаем, что $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

3. Если $n \geq 4$ и $1 \leq X < 25$, то $X/5^n = \widehat{\&}(X/5^2, 1/5, \ldots, 1/5) = X/5^n$, где $\&$ — $(n-1)$-местная конъюнкция. Тогда получаем, что $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2)))$.

4. Если $n \geq 4$ и $5^n - 25 < X \leq 5^n - 1$, то $X/5^n = (5^n - R)/5^n = 1 - R/5^n$, где $1 \leq R < 25$ и по доказанному выше выполнено $R/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2)))$. Тогда согласно следствию 4.5 имеем, что $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2)))$.

5. Если $n \geq 4$ и $25 < X < 5^n/2$, то по доказанному выше в теореме 4.6 и лемме 4.8 для числителя дроби $X/5^n$ можем записать представление, позволяющее построить n-местную булеву функцию f, чья индуцированная порождает указанную дробь из $A(5)$. Поскольку дробь $X/5^n$ — несократимая, а у булевой функции n переменных, то по лемме 4.3 у булевой функции f все переменные существенные и по лемме 4.1 выполнено $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{N}_5}$. Следовательно, $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2)))$.

6. Если $n \geq 4$ и $5^n/2 < X < 5^n - 25$, то $X/5^n = 1 - R/5^n$, где $25 < R < 5^n/2$, и по доказанному выше выполнено $R/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2)))$. Тогда согласно следствию 4.5 имеем, что $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2)))$.

Таким образом, для любой правильной дроби из $\Gamma[5]$ показали, что она принадлежит множеству $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2)))$, т. е. $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))) = \Gamma[5]$. □

Теорема 4.14 [70]. *Класс булевых функций* $\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}$ *является конечно порождающим в множестве* $\Gamma[5]$. *В качестве начального множества можно взять* $A(5)$.

Доказательство. Пусть $X/5^n$— произвольная правильная дробь, $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $X/5^n$ принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

Будем проводить доказательство по индукции. Пусть $n = 1$, очевидно, что $X/5$ принадлежит $A(5)$, а значит, $X/5$ принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

Пусть для некоторого $i \in \mathbb{N}$ выполняется, что всякая правильная дробь $X/5^i$ принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$. Докажем, что для $i+1$ всякая правильная дробь $Y/5^{i+1}$ также принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

Обозначим как $f_u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3$ универсальную функцию и $\widehat{f}_u(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) = \widehat{x}_3 - \widehat{x}_1 \widehat{x}_3 + \widehat{x}_1 \widehat{x}_2 = \widehat{x}_3 + \widehat{x}_1(\widehat{x}_2 - \widehat{x}_3)$ — индуцированную ей вероятностную функцию. Очевидно, что $f_u(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{Z}$.

Рассмотрим дробь $Y/5^{i+1}$. Для нее возможно несколько вариантов.

1. Если $Y \bmod 5 = 0$, то числитель дроби Y может быть представлен как $Y = 5^m D$, где $m \in \mathbb{N}$, $D \bmod 5 \neq 0$. Тогда $Y/5^{i+1} = 5^{m-1}D/5^i$, отсюда следует, что дробь $Y/5^{i+1}$ с числителем в указанном диапазоне принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

2. Если $5^i < Y < 4 \cdot 5^i$, то используем способ построения дроби $Y/5^{i+1}$, изложенный Ф. И. Салимовым в [61]. Представим $Y = a \cdot 5^i + b$, где $1 \leq a \leq 3$, $0 < b < 5^i$. Тогда очевидно, что таким образом можем

выразить все числители, кроме $2 \cdot 5^i, 3 \cdot 5^i$, которые кратны 5. Дробь $Y/5^{i+1}$ можем получить следующим образом:

$$Y/5^{i+1} = \widehat{f}_u(b/5^i, (a+1)/5, a/5) = a/5 + b/5^i((a+1)/5 - a/5) = \\ = a/5 + b/5^i \cdot 1/5 = (5^i \cdot a + b)/5^{i+1},$$

при этом $b/5^i, (a+1)/5, a/5$ принадлежат $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$. Таким образом, дробь $Y/5^{i+1}$ с числителем в указанном диапазоне принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

3. Если $0 < Y < 5^i$, то запишем $Y/5^{i+1}$ следующим образом: $Y/5^{i+1} = (Y \cdot 5^2)/5^{i+3}$. Очевидно, что выполнено $20 < 25 \leq Y \cdot 5^2 < 5^{i+2} < 5^{i+3}/2$. Тогда для числителя $Y \cdot 5^2$ согласно теореме 4.6 можем построить представление с использованием $i+3$ разрядов, а по представлению согласно леммам 4.8 и 4.11 — построить функцию f с $(i+3)$-мя существенными переменными, чья индуцированная функция позволяет выразить дробь $(Y \cdot 5^2)/5^{i+3}$, используя значения переменных из множества $A(5)$. Поскольку $Y \cdot 5^2$ кратно 5, то по лемме 4.1 получаем, что $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{R}_5} \cup \widehat{\mathcal{Z}}$, следовательно, $f \in \mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}$, и дробь $Y/5^{i+1}$ с числителем в указанном диапазоне принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

4. Если $4 \cdot 5^i < Y < 5^{i+1}$, то имеем, что по доказанному ранее $1 - Y/5^{i+1}$ принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$. Тогда согласно следствию 4.5 дробь $Y/5^{i+1}$ с числителем в указанном диапазоне тоже принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

Таким образом, по индукции имеем, что любая правильная дробь $X/5^n$ принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$. Следовательно, класс булевых функций $\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}$ является конечно порождающим в $\Gamma[5]$. $\square$

Заключение

Полученные в диссертации результаты расширяют имеющиеся представления как о свойствах конечно порождающих систем булевых функций, индуцирующих вероятностные функции, так и о бесповторно замкнутых классах булевых функций. Доказанная бесконечная порожденность для функции голосования для простого $p, p \geq 5,$ показывает, что системы функций, позволяющие аппроксимировать произвольное бернуллиевское распределение с произвольной точностью, не обязательно являются конечно порождающими для множества рациональных распределений.

Свойство p-сократимости для классификации вероятностных индуцированных функций позволило получить новые результаты при решении задачи конечной порожденности классов p-ично-рациональных распределений для простых $p, p \geq 5$. Примечательно, что известные до сих пор конечно порождающие системы имеют непустое пересечение как с классом булевых функций, индуцирующих p-сократимые функции, так и классом булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции. Для p-сократимых вероятностных индуцированных функций оценена доля среди всех вероятностных индуцированных функций от n переменных, эта оценка позволяет говорить о том, что p-несократимые функции составляют большую часть индуцированных функций для простого p при $n \to \infty$. Тем значительнее представляется полученное необходимое условие для конечно порождающей системы булевых функций, индуцирующих p-несократимые вероятностные функции, для простого $p, p \geq 5$. Тем самым для части систем булевых функций мы можем установить, что они не являются конечно порождающими для некоторых множеств рациональных вероятностей.

Было установлено, что классы булевых функций, классифицируемых согласно виду индуцируемых ими вероятностных функций, являются бесповторно замкнутыми. Более того, удалось установить, что существует континуум различных бесповторно замкнутых классов булевых функций.

Известно, что не существует разбиения множества всех булевых функций P_2 на непересекающиеся замкнутые классы. В ходе проведенного исследования удалось установить, что класс всех булевых функций P_2 может быть представлен в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов булевых функций.

Отметим, что изучавшиеся ранее в литературе конечно порождающие системы имеют непустое пересечение как с классом булевых функций, индуцирующих p-сократимые функции, так и классом булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции. В диссертации доказано, что классы булевых функций, индуцирующие 5-сократимые и 5-несократимые функции, по отдельности являются конечно порождающими для множества всех пятерично-рациональных вероятностей.

Таким образом, удалось получить принципиально новые представления о свойствах конечно порождающих систем булевых функций для множеств рациональных распределений, и выделить новые бесповторно замкнутые классы булевых функций.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам по теории функциональных систем, математической кибернетике и теоретической информатике.

Литература

Список литературы

[1] Байрамов Р. А., “Об одной серии предполных классов в k-значной логике”, *Кибернетика*, 1967, № 1, 7–9.

[2] Бурле Г. А., “Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной”, *Дискретный анализ*, **10** (1967), 3–7.

[3] Бухараев Р. Г., “Об управляемых генераторах случайных величин”, *Учен. зап. Казан. ун-та.*, **123**:6 (1963), 68–87.

[4] Вороненко А. А., “О длине проверяющего теста для бесповторных функций в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$”, *Дискретная математика*, **17**:2 (2005), 139–143.

[5] Гурвич В. А., “О бесповторных булевых функциях”, *УМН*, **32**:1(193) (1977), 183–184.

[6] Данильченко А. Ф., “О параметрической выразимости функций трехзначной логики”, *Алгебра и логика*, **16**:4 (1977), 397–416.

[7] Дудакова О. С., “Об одном семействе предполных классов функций k-значной логики, не имеющих конечного базиса”, *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, 2006, № 2, 29–33.

[8] Дудакова О. С., “О классах k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два”, *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, 2008, № 1, 31–37.

[9] Дудакова О. С., “О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики”, *Математические вопросы кибернетики*, **17**, Физматлит, Москва, 2008, 13–104.

[10] Еременко А. Р., Яшунский А. Д., “О весе функций, заданных бесповторными И/ИЛИ формулами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:3 (2019), 41–55.

[11] Захарова Е. Ю., “Об одном достаточном условии полноты в P_k”, *Проблемы кибернетики*, **16**, Наука, Москва, 1966, 239–244.

[12] Захарова Е. Ю., “Критерий полноты системы функций из P_k”, *Проблемы кибернетики*, **18**, Наука, Москва, 1967, 5–10.

[13] Зубков О. В., “Нахождение и оценка числа бесповторных булевых функций в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$”, *Известия вузов. Математика*, 2008, № 10, 17–24.

[14] Касим-Заде О. М., “О неявной выразимости булевых функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, 1995, № 2, 44–49.

[15] Касим-Заде О. М., “О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр”, *Доклады РАН*, **348**:3 (1996), 299–301.

[16] Колпаков Р. М., “О порождении некоторых классов рациональных чисел вероятностными π-сетями”, *Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика*, 1991, № 2, 27—30.

[17] Колпаков Р. М., “О порождении рациональных чисел вероятностными контактными сетями”, *Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика*, 1992, № 5, 46—52.

[18] Колпаков Р. М., "Об оценках сложности порождения рациональных чисел вероятностными контактными π-сетями", *Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика*, 1992, № 6, 62–65.

[19] Колпаков Р. М., "О порождении рациональных чисел монотонными функциями", *Теоретические и прикладные аспекты математических исследований: Сб. науч. тр.*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1994, 13–17.

[20] Колпаков Р. М., "Критерий порождения множеств рациональных вероятностей в классе булевых функций", *Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1*, **6**:2 (1999), 41–61.

[21] Колпаков Р. М., "О преобразованиях булевых случайных величин", *Математические вопросы кибернетики*, **9**, Физматлит, Москва, 2000, 227–252.

[22] Колпаков Р. М., "Замкнутые классы булевых случайных величин с рациональнозначными распределениями", *Математические вопросы кибернетики*, **10**, Физматлит, Москва, 2001, 215–224.

[23] Колпаков Р. М., "Замыкания одноэлементных множеств бинарных распределений с рациональными вероятностями для многозначных преобразований", *Математические вопросы кибернетики*, **11**, Физматлит, Москва, 2002, 63–76.

[24] Колпаков Р. М., "О дискретных преобразованиях конечных распределений с рациональными вероятностями", *Математические вопросы кибернетики*, **12**, Физматлит, Москва, 2003, 109–146.

[25] Колпаков Р. М., "Замкнутые классы конечных распределений рациональных вероятностей", *Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1*, **11**:3 (2004), 16–31.

[26] Колпаков Р. М., *Дискретные преобразования конечных распределений рациональных вероятностей*, Дис. …докт. физ.-матем. наук, Москва, 2004, 180 с.

[27] Колпаков Р. М., "О многозначных преобразованиях конечных множеств бинарных распределений с рациональными вероятностями", *Дискретная математика*, **17**:1 (2005), 102–128.

[28] Кон П., *Универсальная алгебра*, Мир, Москва, 1968, 351 с.

[29] Кудрявцев В. Б., *Функциональные системы*, Изд-во МГУ, Москва, 1982, 158 с.

[30] Кузнецов А. В., "О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем", *Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда*, **2**, Изд-во АН СССР, Москва, 1956, 145–146.

[31] Кузнецов А. В., "О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики", *Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики*, Труды МИАН СССР, **51**, Изд-во АН СССР, Москва, 1958, 186–225.

[32] Кузнецов А. В., "Алгебра логики и её обобщения", *Математика в СССР за 40 лет (1917– 1957)*, **1**, Физматгиз, Москва, 1959, 102–115.

[33] Кузнецов А. В., "О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости", *Логический вывод*, Наука, Москва, 1979, 5–33.

[34] Мальцев А. И., "Итеративные алгебры и многообразия Поста", *Алгебра и логика*, **5**:3 (1966), 5–24.

[35] Мальцев А. И., "Некоторые свойства клеточных подалгебр Поста и их основных клеток", *Алгебра и логика*, **11**:5 (1972), 571–587.

[36] Мальцев А. И., "Некоторые свойства клеток алгебр Поста", *Дискретный анализ*, **23** (1973), 24–31.

[37] Мальцев А. И., *Итеративные алгебры Поста*, Изд-во НГУ, Новосибирск, 1976.

[38] Мартынюк В. В., "Исследование некоторых классов в многозначных логиках", *Проблемы кибернетики*, **3**, Наука, Москва, 1960, 49–60.

[39] Марченков С. С., *Основы теории булевых функций*, Физматлит, Москва, 2014, 136 с.

[40] Марченков С. С., “О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики”, *Проблемы кибернетики*, **36**, Наука, Москва, 1979, 5–22.

[41] Марченков С. С., “О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики II”, *Проблемы кибернетики*, **40**, Наука, Москва, 1983, 261–266.

[42] Марченков С. С., “Основные отношения S-классификации функций многозначной логики”, *Дискретная математика*, **8**:1 (1996), 99–128.

[43] Марченков С. С., “S-классификация идемпотентных алгебр с конечными носителями”, *Докл. РАН*, **348**:5 (1996), 587–589.

[44] Марченков С. С., “S-классификация функций многозначной логики”, *Дискретная математика*, **9**:3 (1997), 125–152.

[45] Маршалл А., Олкин И., *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения: Пер. с англ.*, Мир, Москва, 1983, 576 с.

[46] Мур Э. Ф., Шеннон К. Э., “Надежные схемы из ненадежных реле”, *Кибернетический сборник*, **1**, ИЛ, Москва, 1960, 109–148.

[47] Нгуен Ван Хоа, “О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики в P_3”, *Дискретная математика*, **4**:4 (1992), 82–95.

[48] Нгуен Ван Хоа, “О семействах самодвойственных замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами”, *Дискретная математика*, **5**:4 (1993), 87–108.

[49] Нгуен Ван Хоа, “писание замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами”, *Докл. АН Беларуси*, **38**:3 (1994), 16–19.

[50] фон Нейман Дж., “Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент”, *Автоматы*, ИЛ, Москва, 1956, 68-–139.

[51] Нурмеев Н. Н., “О булевых функциях с аргументами, принимающими случайные значения”, *Проблемы теоретической кибернетики*, Тезисы докладов VIII Всесоюзной конференции, **2**, Горький, 1988, 59–60.

[52] Нурмеев Н. Н., “О сложности реализации преобразователей вероятностей схемами из функциональных элементов”, *Методы и системы технической диагностики: Межвуз. сб. науч. тр.*, **18**, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 1993, 131–132.

[53] Орехова Е. А., “Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике”, *Математические вопросы кибернетики*, **12**, Физматлит, Москва, 2003, 27–75.

[54] Перязев Н. А., “Реализация булевых функций бесповторными формулами”, *Дискретная математика*, **7**:3 (1995), 61–68.

[55] Риордан Дж., *Комбинаторные тождества*, Наука, Москва, 1982, 255 с.

[56] Салимов Ф. И., “К вопросу моделирования булевых случайных величин функциями алгебры логики”, *Вероятностные методы и кибернетика*, **15** (1979), 68—89.

[57] Салимов Ф. И., “Об одной системе образующих для алгебр над случайными величинами”, *Изв. вузов. Математика*, 1981, № 5, 78—82.

[58] Салимов Ф. И., “Конечная порожденность некоторых алгебр над случайными величинами”, *Дискретная математика и математическая кибернетика*, 1982, 122–130.

[59] Салимов Ф. И., “О шефферовых элементах в алгебрах распределений”, *III Всесоюз. симпоз. по вероятностным автоматам и их приложениям: Тез. докл.*, Казань, 1983, 104.

[60] Салимов Ф. И., “О максимальных подалгебрах алгебр распределений”, *Изв. вузов. Математика*, 1985, № 7, 14–20.

[61] Салимов Ф. И., “Об одном семействе алгебр распределений”, *Изв. вузов. Математика*, 1988, № 7, 64–72.

[62] Салимов Ф. И., “Конечная порожденность алгебр распределений”, *Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1*, **4**:2 (1997), 43–50.

[63] Старостин М. В., *Критериальная система неявно предполных классов в трехзначной логике*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Москва, 2021, 133 с.

[64] Схиртладзе Р. Л., “О синтезе p-схемы из контактов со случайными дискретными состояниями”, *Сообщ. АН ГрузССР*, **26**:2 (1961), 181–186.

[65] Схиртладзе Р. Л., “О методе построения булевой величины с заданным распределением вероятностей”, *Дискретный анализ*, **7** (1966), 71–80.

[66] Схиртладзе Р. Л., *Моделирование случайных величин функциями алгебры логики*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Тбилиси, 1966, 70 с.

[67] Трифонова Е. Е., “О некоторых свойствах конечно порождающих систем преобразователей p-ичных дробей”, *Материалы XIV Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова*, 2022, 138–141

[68] Трифонова Е. Е., “О числе p-сократимых индуцированных вероятностных функций”, *Дискретные модели в теории управляющих систем: XI Международная конференция* (Москва и Подмосковье, 26–29 мая 2023 г.), ред. Ложкин С. А., Романов Д. С., Подымов В. В., Труды, М: МАКС Пресс, 2023, 107–110.

[69] Трифонова Е. Е., “О бесповторно замкнутых классах булевых функций и индуцированных преобразованиях рациональных вероятностей”, *Проблемы теоретической кибернетики: материалы XX Международной научной конференции* (Москва, 5–8 декабря 2024 г.), ред. Ложкин С. А., Романов Д. С., Подымов В. В., М.: МАКС Пресс, 2025, 140–143.

[70] Трифонова Е. Е., “О возможности построения произвольной пятеричной дроби с помощью индуцированных вероятностных функций”, *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*, 2025, № 38, 40 с.

[71] Угольников А. Б., “О некоторых задачах в области многозначных логик”, *Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения»* (Москва, МГУ, 1–6 февраля, 2010 г.), ред. Касим-Заде О. М., Изд-во механико-математического факультета МГУ, Москва, 2010, 18–34.

[72] Черемушкин А. В., “К вопросу о линейной декомпозиции двоичных функций”, *Прикладная дискретная математика*, 2016, № 1(31), 46–56.

[73] Черемушкин А. В., “О линейной разложимости двоичных функций”, *Прикладная дискретная математика*, 2018, № 40, 10–22.

[74] Яблонский С. В., “О функциональной полноте в трехзначном исчислении”, *ДАН СССР*, **95**:6 (1954), 1152–1156.

[75] Яблонский С. В., “Функциональные построения в k-значной логике”, *Труды матем. ин-та АН СССР им. Стеклова*, **51** (1958), 5–142.

[76] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*, Наука, Москва, 1966, 120 с.

[77] Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*, Высш шк., Москва, 2008, 384 с.

[78] Янов Ю. И., Мучник А. А., “О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса”, *ДАН СССР*, **127**:1 (1959), 44–46.

[79] Яшунский А. Д., “Об асимптотике вероятности значений случайных булевых выражений”, *Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 1*, **13**:2 (2006), 59–99.

[80] Яшунский А. Д., “О равномерном приближении непрерывных функций функциями вероятности булевых базисов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2007, № 2, 37–43.

[81] Яшунский А. Д., “О преобразованиях распределений вероятностей бесповторными квазигрупповыми формулами”, *Дискрет. матем.*, **25**:2 (2013), 149–159.

[82] Яшунский А. Д., “О бесповторных преобразованиях случайных величин над конечными полями”, *Дискрет. матем.*, **27**:3 (2015), 145–157.

[83] Яшунский А. Д., “Преобразования бернуллиевских распределений булевыми функциями из замкнутых классов”, *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*, 2016, № 38, 23 с.

[84] Яшунский А. Д., "Выпуклые многогранники распределений, сохраняемые операциями конечного поля", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2017, № 4, 54–58.

[85] Яшунский А. Д., "Алгебры вероятностных распределений на конечных множествах", *Комплексный анализ, математическая физика и приложения*, Сборник статей, Труды МИАН, **301**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2018, 320–335.

[86] Яшунский А. Д., "Конечные алгебры бернуллиевских распределений", *Дискрет. матем.*, **30**:2 (2018), 148–161.

[87] Яшунский А. Д., "Выпуклые алгебры вероятностных распределений, индуцированные конечными ассоциативными кольцами", *Дискретная математика*, **31**:1 (2019), 133–142.

[88] Яшунский А. Д., "Полиномиальные преобразования случайных величин на конечных множествах", *Матем. заметки*, **106**:6 (2019), 951–954.

[89] Яшунский А. Д., "Алгебры бернуллиевских распределений с единственной предельной точкой", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2019, № 4, 3–9.

[90] Яшунский А. Д., "О необходимых условиях предельных вероятностных теорем в конечных алгебрах", *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **493** (2020), 47–50.

[91] Яшунский А. Д., "Об аппроксимации случайных величин над конечной цепью", *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, **27**:3 (2020), 109–125.

[92] Barris S., Willard R., "Finitely many primitive positive clones", *Proc. of the American Mathematical Society*, **101**:3 (1987), 427–430.

[93] Demetrovics J., Hannák L., "The cardinality of closed sets in precomplete classes in k-valued logics", *Acta Cybernetica*, **4**:3 (1979), 273–277.

[94] Demetrovics J., Hannák L., "On the cardinality of self-dual closed classes in k-valued logics", *MTA SZTAKI Közlemenyek*, **23** (1979), 7–16.

[95] Demetrovics J., Hannák L., "Some remarks on the structure of P_3", *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **2** (1980), 215–219.

[96] Demetrovics J., Hannák L., "The number of reduct of a preprimal algebra", *Algebra Universalis*, **16**:1 (1983), 178–185.

[97] Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L., "Near unanimity functions and partial orderings", *Proc.14 ISMVL, Manitoba*, 1984, 52–56.

[98] Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L., "On algebraic properties of monotone clones", *Order*, **3** (1986), 219–225.

[99] Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L., "On monotone clones", *MTA SZTAKI Tanulmanyok*, **202** (1987), 39–62.

[100] Gill A., "Synthesis of probability transformers", *J. Franklin Inst.*, **274**:1 (1962), 1–19.

[101] Lau D., "Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik", *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math.*, **24** (1978), 79–96.

[102] Lo Czu Kai, "Precompleteness of a set and rings of linear functions", *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis*, **2** (1963), 1–14.

[103] Lo Czu Kai, "On the precompleteness of the classes of functions preserving a partition", *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis*, **2** (1963), 105–116.

[104] Lo Czu Kai, Lju Sjui Hua, "Precomplete classes defined by binary relations in many-valued logics", *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis*, **4** (1963), 27–33.

[105] Lo Czu Kai, "Precomplete classes defined by normal k-ary relations in k-valued logics", *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis*, **3** (1964), 39–50.

[106] Pan Jun-Cze, "A solving method for finding all precomplete classes in many-valued logics", *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis*, **2** (1963).

[107] Post E. L., "Introduction to a general theory of elementary propositions", *Amer. J. Math.*, **43**:3 (1921), 163–185.

[108] Post E. L., “The two-valued iterative systems of mathematical logic”, *Annals of Math. Studies*, 1941, № 5, 122 c.

[109] Qian W., Riedel M. D., Zhou H., Bruck J., “Transforming probabilities with combinational logic”, *Comput.-Aided Des. Integr. Circuits Syst*, **30**:9 (2011), 1279—1292

[110] Rosenberg I. G., “La structure des functions de plusieurs variables sur un ensemble fini”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **260** (1965), 3817–3819

[111] Rosenberg I. G., “Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken”, *Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd.*, **80** (1970), 3–93

[112] Salomaa A., “Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain I”, *Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI*, 1962, № 53, 19 c.

[113] Salomaa A., “Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain II”, *Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI*, 1963, № 63, 10 c.

[114] Slupecki J., “Kriterium pe lnosci wielowartosciowych systemow logiki zdań”, *C. R. Séanc. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III*, **32** (1939), 102–109

[115] Tardos G., “A not finitely generated maximal clone of monotone operations”, *Order*, **3** (1986), 211–218

[116] Wilhelm D., Bruck J., “Stochastic switching circuit synthesis”, Proc. 2008 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT), 2008, 1388—1392

[117] Zhou H., Bruck J., “On the expressibility of stochastic switching circuits”, Proc. 2009 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT), 2009, 2061—2065

[118] Yashunsky A. D., “Clone-induced approximation algebras of Bernoulli distributions”, *Algebra Universalis*, **80**:1 (2019), 1–16

[119] Yashunsky A. D., “Limit Points of Bernoulli Distribution Algebras Induced by Boolean Functions”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **40**:9 (2019), 1423–1432

[120] Yashunsky A. D., “On Necessary Conditions of Finite-valued Random Variable Algebraic Approximation”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:1 (2021), 216–220

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

[121] Трифонова Е. Е., “О бесконечной порожденности пятеричных дробей в одном классе преобразователей вероятностей”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2021, № 1 (57), 39–48 (IF: РИНЦ 0,227).

[122] Трифонова Е. Е., “О некоторых свойствах конечно порождающих систем преобразователей p-ичных дробей”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **29**:4 (2022), 124–135 (IF: РИНЦ 0,109); англ.пер.: Trifonova E. E., “On Some Properties of Finitely Generating Transformer Sets for p-ary Fractions”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **16**:4 (2023), 834–840 (IF: SJR 0,315).

[123] Трифонова Е. Е., “О бесповторно замкнутых классах булевых функций, индуцирующих некоторые преобразования рациональных вероятностей”, *Дискрет. матем.*, **37**:1 (2025), 119–129 (IF: РИНЦ 0,385).

Публикации в рецензируемых научных изданиях из дополнительного списка МГУ, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и входящих в список ВАК

[124] Трифонова Е. Е., “О числе p-сократимых индуцированных вероятностных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **27**:1 (2023), 134–142 (IF: РИНЦ 0,023).