

**ОТЗЫВ научного руководителя
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Сорина Бориса Владимировича
на тему: «Компактификации ультратранзитивных групп преобразований
дискретных и линейно упорядоченных пространств»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология**

Одним из актуальных направлений современной математики является исследование (топологических) групп, рассматривая их представления на топологических пространствах. S. Teleman (1957) показал, что каждая (хаусдорфова) топологическая группа G может быть представлена: как подгруппа группы гомеоморфизмов $\text{Hom}(X)$ компактного пространства X ; или как подгруппа группы (сюръективных) изометрий $\text{Iso}(V)$ банахова пространства V . Представление группы подгруппой группы изометрий – современная, активно развивающаяся область исследований. Обзор актуальных результатов имеется в работе Э. Гласнера и М. Мегрелишвили “*Представление динамических систем на банаховых пространствах*” (*Recent Progress in General Topology* III, 2014). К числу основных результатов, связанных с представлением групп на компактных пространствах, следует отнести следующие. Существование *право топологической полугрупповой компактификации* у любой топологической группы. Метод Р. Эллиса (1960) построения *право топологических полугрупповых* (несобственных) *компактификаций* топологических групп. Выделение класса *экстремально аменабельных групп* (имеющих неподвижную точку при любом непрерывном действии на компактном пространстве). Понятие экстремальной аменабельности связано с вопросом Т. Митчелла (1970) и исследованиями В. Херера и Дж. Кристенсена (1975), С. Гласнера (1976), М. Громова и В. Мильмана (1983), В. Пестова (1998), Т. Джордано и В. Пестова (2002) и др. ученых.

Диссертация Б.В. Сорина посвящена исследованию Roelcke-предкомпактности и построению *право топологических полугрупповых собственных компактификаций* (под)групп преобразований “простейших”

топологических пространств: дискретных и линейно упорядоченных пространств.

Roelcke-равномерность на топологической группе определена В. Роэлке (1974) и имеет простое описание. В. Успенский (2001) назвал топологическую группу *Roelcke-предкомпактной*, если Roelcke-равномерность вполне ограничена, и установил Roelcke-предкомпактность многих важных топологических групп. Общие условия, гарантирующие Roelcke-предкомпактность группы, исследованы в работах Т. Цанкова (2012), Э. Гласнера и М. Мегрелишвили (2021) и К.Л. Козлова (2022). На Roelcke-предкомпактные группы возможно распространение результатов, справедливых для компактных групп, и Roelcke-предкомпактность связана с *минимальностью топологической группы*. Поэтому В. Пестов выделяет Roelcke-предкомпактные группы как "малые" группы среди "больших" групп. Э. Гласнер и М. Мегрелишвили (2008) получили критерий, когда *Roelcke-компактификация* Roelcke-предкомпактной топологической группы является право топологической полугрупповой компактификацией.

Подгруппа G группы перестановок $S(X)$ дискретного пространства X или группы $\text{Aut}(X)$ автоморфизмов (сохраняющих порядок биекций) линейно упорядоченного пространства X имеют естественные представления на самом пространстве X . В случае дискретного пространства X перестановочная топология (совпадающая с топологией поточечной сходимости) на $S(X)$ является наименьшей допустимой групповой топологией. Оказывается, что в случае линейно упорядоченного пространства X топология поточечной сходимости на $\text{Aut}(X)$ также является наименьшей допустимой групповой топологией (С. Овчинников (2001) и Б.В. Сорин (2022)). Далее, во-первых, если топологическая группа G τ_p -представима (К.Л. Козлов и Б.В. Сорин (2025)) на топологическом пространстве X (исходная топология совпадает с топологией поточечной сходимости при непрерывном действии G на X , и данное представление допускает эквивариантные компактификации X), то G τ_p -представима на любой эквивариантной компактификации X (К.Л. Козлов и

Б.В. Сорин (2025)). Во-вторых, если G τ_p -представима на компактном пространстве X , то *обертывающая полугруппа* Эллиса является собственной компактификацией топологической группы G (К.Л. Козлов и Б.В. Сорин (2025)), право топологической полугруппой и называется *Эллисовской компактификацией*. Построение Эллисовских компактификаций и их сравнение с Roelcke-компактификацией представляет, в частности, информацию о Roelcke-предкомпактности группы и об алгебраических свойствах ее Roelcke-компактификации.

Группа перестановок $S(X)$ (в перестановочной топологии) является классической группой, которая хорошо изучена. Она является неархимедовой Roelcke-предкомпактной (Е. Гаугхан 1976) группой. Roelcke-предкомпактность подгруппы $S(X)$, элементы которой имеют конечные носители, установлена Т. Банахом, И. Гураном и А. Равским (2021).

Согласно теории моделей, действие группы автоморфизмов $\aleph_0$ -категоричной структуры на ее конечных степенях содержит всю теоретико-множественную информацию о ней, и позволяет исследовать (алгебраическое) свойство *олигоморфности* групп. Данный подход использован И. Бен Яковым, Т. Ибарлюсией и Т. Цанковым (2018) при исследовании подгрупп группы $S(\mathbb{N})$ перестановок $\mathbb{N}$.

Roelcke-компактификация $S(\mathbb{N})$ - (алгебраически) изоморфна *симметрическому инверсному моноиду* $I_{\mathbb{N}}$ (множеству частичных биекций $\mathbb{N}$) и, следовательно, является *WAP-компактификацией* $S(\mathbb{N})$. Эти результаты ранее были установлены Э. Гласнером и М. Мегрелишвили (2008). Для построения Roelcke-компактификация $S(\mathbb{N})$ ими использована конструкция Эллиса (с продолженным действием $S(\mathbb{N})$ на Александровскую компактификацию $\alpha\mathbb{N}$). Также ими показано, что Roelcke-компактификация $S(\mathbb{N})$ гомеоморфна канторову множеству.

Группа автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ (в перестановочной топологии) ультраоднородного линейно упорядоченного множества X (подгруппа $S(X)$) является неархимедовой Roelcke-предкомпактной группой (Э. Гласнер и

М. Мегрелишвили 2021). Она экстремально аменабельна (В. Пестов 1998). Roelcke-компактификация группы $\text{Aut}(\mathbb{Q})$ не является компактной полугрупповой компактификацией $\text{Aut}(\mathbb{Q})$, WAP-компактификация $\text{Aut}(\mathbb{Q})$ - полутопологический *инверсный моноид* с непрерывной инверсией (множество частичных автоморфизмов $\mathbb{Q}$) (И. Бен Яков, Т. Ибарлюсия, Т. Цанков 2018).

В главе 2 диссертации Б.В. Сориным представлена топологическая версия олигоморфности группы. А именно, олигоморфность действия группы G на (дискретном пространстве) X эквивалентна вполне ограниченности максимальной эквивариантности на X и эквивалентна Roelcke предкомпактности G (в перестановочной топологии), если у действия конечное число орбит. Данное обобщение результатов Т. Цанкова (2012) для подгрупп $S(\mathbb{N})$ позволило в главах 3 и 4 диссертации установить Roelcke-предкомпактность ультратранзитивных подгрупп группы $S(X)$ (в перестановочной топологии). Использование иерархии топологии поточечной сходимости и перестановочной топологии, приводит к результатам главы 5 о Roelcke-предкомпактности группы $\text{Aut}(X)$ LOTS X .

Описания Roelcke-компактификаций и Эллисовских компактификаций подгрупп группы $S(X)$ (в перестановочной топологии) и группы $\text{Aut}(X)$ (в топологии поточечной сходимости) содержатся в главах 3, 4 и 5.

В главе 3 установлена (алгебраическая) изоморфность Roelcke-компактификации ультратранзитивно действующей подгруппы G группы перестановок $S(X)$ (бесконечного) дискретного пространства X симметрическому инверсному моноиду I_X и ее совпадение с WAP-компактификацией G .

Для группы автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ (в перестановочной топологии) ультраоднородного линейно упорядоченного множества X в главе 4 установлено следующее. Существует пять эквивариантных компактификаций ультраоднородного линейно упорядоченного множества X (и приведено их описание). Установлено совпадение ее Roelcke-компактификации с Эллисовской компактификацией, соответствующей максимальной эквивариантной

компактификации X , в том и только в том случае, если X - непрерывно упорядочено. Иначе, эта Эллисовская компактификация является наименьшей из право топологических полугрупповых компактификаций $\text{Aut}(X)$, больших чем Roelcke-компактификация $\text{Aut}(X)$. Эллисовская компактификация группы $\text{Aut}(X)$, соответствующая Александровской одноточечной компактификации αX (наименьшей эквивариантной компактификации X), является полутопологическим инверсным моноидом с непрерывной инверсией, алгебраически изоморфным инверсному моноиду всех частичных автоморфизмов X .

Группа $\text{Aut}([0, 1])$ (в компактно-открытой топологии, совпадающей с топологией поточечной сходимости) Roelcke-предкомпактна, и ее Roelcke-компактификация отождествляется с множеством монотонных кривых в $[0, 1] \times [0, 1]$ начинающихся в $(0, 0)$ и оканчивающихся в $(1, 1)$, как замкнутых отношений на $[0, 1]$ в топологии Вьеториса (В. Успенский 2001). WAP-компактификация $\text{Aut}([0, 1])$ тривиальна (М. Мегрелишвили 2001). Группа $\text{Aut}([0, 1])$ гомеоморфна ℓ_2 (К. Бессага, А. Пелчинский 1975) и является экстремально аменабельной (В. Пестов 1998).

В главе 5 диссертации дано описание всех эквивариантных компактификаций ультраоднородного LOTS X (их две) и соответствующих Эллисовских компактификаций группы его автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ (в топологии поточечной сходимости). Установлено, что ее Roelcke-компактификация строго меньше Эллисовской компактификации $\text{Aut}(X)$, соответствующей максимальной эквивариантной компактификации X . Эллисовская компактификация $\text{Aut}(\mathbb{R})$ является ретрактом пространства Хелли. Вторая Эллисовская компактификация $\text{Aut}(X)$ несравнима с ее Roelcke-компактификацией.

В § 1.5 диссертации определено понятие вполне ограниченной квазиэллисовской эквивариантности на группе $\text{Aut}(X)$. В главе 5 диссертации для X отрезка, “длинного отрезка” и лексикографически упорядоченного квадрата (компактных LOTS) построены семейства попарно не гомеоморфных

эквивариантных компактификаций группы $\text{Aut}(X)$, соответствующих этим эквивариантностям. Установлено, что существуют эквивариантные компактификации группы $\text{Aut}([0,1])$, гомеоморфные гильбертову кубу, и не существует эквивариантных компактификаций, соответствующих квазиэллисовским эквивариантностям, гомеоморфных тихоновским кубам несчетного веса.

Т. Охкумой (1953) начато изучение структуры однородных линейно упорядоченных множеств. Простое линейно упорядоченное множество или ультраоднородно, или жестко и линейно изоморфно подгруппе $\mathbb{R}$ (А. Гласс, Ю. Гуревич, В. Холланд, С. Шелах 1981). В главе 6 диссертации, с помощью вводимого Б.В. Сориным понятия топологического сплетения групп, устанавливается связь структуры однородного линейно упорядоченного множества и его группы автоморфизмов. А именно, группа автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ однородного линейно упорядоченного множества X ((а) в перестановочной топологии, если X дискретно, (б) топологии поточечной сходимости, если X LOTS) топологически изоморфна топологическому сплетению групп автоморфизмов регулярного промежутка J (в перестановочной топологии, если (а), топологии поточечной сходимости, если (б)) и факторпространства X/J в перестановочной топологии. Охарактеризована Roelcke-предкомпактность группы $\text{Aut}(X)$.

Результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми, получены Б.В. Сориным самостоятельно. Они докладывались на международных и всероссийских научных конференциях и семинарах.

Стоит отметить, что Б.В.Сорин является заинтересованным и исключительно трудолюбивым исследователем. Обладает терпением и стойкостью в преодолении возникающих трудностей. Он получил яркие и важные результаты в области топологической алгебры. Хочется надеяться, что он не ограничится настоящей работой и продолжит начатые исследования.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание

диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Сорина Бориса Владимировича удовлетворяет всем требованиям “Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В.Ломоносова” и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент,
научный сотрудник математического факультета
университета Бен-Гурион в Негеве

КОЗЛОВ Константин Леонидович

28.05.2026

Контактные данные:
тел.: , email:
Специальность, по которой научным руководителем
защищена диссертация:
01.01.04 — Геометрия и топология

Адрес места работы:
8410501 Р.О Вох 653, Израиль, г. Беэр-Шева, булв. Давида Бен-Гуриона 1, университет
Бен-Гурион в Негеве,
Тел.: +7(972) 8-646-1600; email: math.bgu@bgu.ac.il

Подпись Козлова Константина Леонидовича
удостоверена в Генеральном консульстве Российской Федерации в Хайфе,
Израиль

Государство Израиль, г. Хайфа
двадцать восьмое мая две тысячи двадцать шестого года

Я, Левченко Ирина Юрьевна, атташе Генерального консульства Российской Федерации в г. Хайфе, свидетельствую подлинность подписи гражданина Российской Федерации Козлова Константина Леонидовича.

Подпись сделана в моем присутствии.
Личность подписавшего документ установлена

Зарегистрировано в реестре № 1-480.

Взыскан консульский сбор взыскан (по тарифу): 60 новых израильских шекелей.
Уплачены сборы в счёт возмещения фактических расходов: 0 новых израильских шекелей.

МП _____(И.Ю.Левченко)