

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Солонков Александр Алексеевич

**Свободные универсальные алгебры
с непрерывными и раздельно непрерывными
операциями**

Специальность 1.1.3. Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2025

Диссертация подготовлена на кафедре общей топологии и геометрии механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Сипачева Ольга Викторовна,
доктор физико-математических наук.

Официальные оппоненты:

Геворкян Павел Самвелович,
доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет, институт математики и информатики, кафедра математического анализа имени академика П.С. Новикова, заведующий кафедрой.

Осипов Александр Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН, отдел алгебры и топологии, сектор топологии, заведующий сектором.

Хмылева Татьяна Евгеньевна,
кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Томский государственный университет, механико-математический факультет, кафедра математического анализа и теории функций, доцент.

Защита диссертации состоится «21» ноября 2025 года в 17 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1., механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте АИС Диссовет:

<https://dissovet.msu.ru/dissertation/3559>

Автореферат разослан «___» октября 2025 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.011.4

кандидат физико-математических наук

В.А. Кибкало

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Работа посвящена универсальным топологическим и квазитопологическим алгебрам, т.е. универсальным алгебрам с топологией, относительно которой все операции непрерывны и, соответственно, раздельно непрерывны. Исследуются свободные топологические и квазитопологические универсальные алгебры. Особое внимание уделяется топологическим и квазитопологическим алгебрам с операцией Мальцева.

В 1954 году А. И. Мальцев доказал, что перестановочность всех конгруэнций на всех универсальных алгебрах из заданного многообразия эквивалентна наличию в сигнатуре этого многообразия специального тернарного термина, называемого теперь *мальцевским термом* или *операцией Мальцева*¹. Топологические пространства, допускающие непрерывную операцию Мальцева и называемые теперь *мальцевскими пространствами*, хорошо изучены. Так, например, для мальцевских компактов было выяснено, что они обладают свойством Суслина² и являются компактами Дугунджи³. Кроме того, было доказано, что мальцевские компакты являются ретрактами топологических групп⁴; позже было показано, что не все мальцевские пространства обладают этим свойством⁵.

В 1957 году Мальцевым было положено начало теории топологических алгебр⁶, которая с тех пор активно и плодотворно развивается. Квазитопологические алгебры, однако, обладают многими свойствами, отличающими их от топологических алгебр. Например, в диссертации Е. А. Резниченко⁷ (теорема 2.38) было выявлено уникальное категорное свойство этих алгебр: среди всех факторизаций любого непрерывного отображения квазитопологической алгебры данной сигнатуры в топологическое пространство через непрерывный гомоморфизм в другую квазитопологическую алгебру той же сигнатуры имеется максимальная (в естественном смысле) факторизация. Отметим, что в диссертации⁷, как и в некоторых других статьях, квазитопологические алгебры названы полутопологическими. Е. А. Резниченко также установил ряд условий, при которых непрерывные операции на пространстве X продолжаются до раз-

¹А. И. Мальцев, *К общей теории алгебраических систем*, Матем. сб., **35(77)** (1), 3–20 (1954).

²В. В. Успенский, *О непрерывных образах линделёфовых топологических групп*, Докл. АН СССР, **285** (4), 824–827 (1985).

³В. В. Успенский, *Ретракты топологических групп и компакты Дугунджи*, в кн.: *Топология и её приложения*, Труды Международной топологической конференции (Баку, 3–8 октября 1987 г.), Тр. МИАН СССР, **193**, Наука, М., 1992, 192–196.

⁴О. В. Сипачева, *Компакты с непрерывной операцией Мальцева и ретракты топологических групп*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Матем., Мех., № 1, 33–36 (1991).

⁵Р. М. Gartside, Е. А. Reznichenko, О. V. Sipacheva, *Mal'tsev and retral spaces*, Topology Appl., **80**, 115–129 (1997).

⁶А. И. Мальцев, *Свободные топологические алгебры*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **21** (2), 171–198 (1957).

⁷Е. А. Резниченко, *Группы с топологией и однородные пространства*, дисс. ... д-ра физ.-мат. наук, Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, М., 2023.

дельно непрерывных операций на βX ⁸ (до непрерывных операций они продолжаютс значительнореже).

Один из основных результатов настоящей работы состоит в том, что, как и в случае топологических алгебр, для каждого топологического пространства X в любом многообразии квазитопологических алгебр определена свободная квазитопологическая алгебра над многообразием квазитопологических алгебр.

Диссертант устанавливает, что топологическая факторалгебра квазитопологической алгебры является квазитопологической алгеброй; это является ещё одним фундаментальным отличием квазитопологических алгебр от топологических. С помощью этого факта и конструктивного описания абсолютно свободной квазитопологической алгебры автор получает конструктивное описание свободной квазитопологической алгебры над полным многообразием квазитопологических алгебр. Возможность такого описания является одним из преимуществ квазитопологических алгебр перед топологическими.

Как специальный случай автор рассматривает квазимальцевское пространство и доказывает, что оно является ретрактом некоторой квазитопологической группы, тогда как ретрактом топологической группы мальцевское пространство является только при дополнительных условиях. Многие другие результаты о топологических алгебрах тоже остаются верными и даже усиливаются для квазитопологических алгебр.

Напомним, что топологическое пространство X называется *кружевным*, если существует функция G , которая каждому $n \in \omega$ и каждому замкнутому подмножеству $H \subset X$ ставит в соответствие открытое множество $G_n(H)$, содержащее H и такое, что:

- 1) $H = \bigcap_n G_n(H)$;
- 2) если $H \subset K$, то $G_n(H) \subset G_n(K)$;
- 3) $H = \bigcap_n \overline{G_n(H)}$.

Кружевные топологические пространства (термин А. В. Архангельского, на английском языке они называются «*stratifiable*») были введены И. Седером в 1961 году в статье⁹ как обобщение метрических пространств. Интерес к ним возрос после доказательства И. Борджесом¹⁰ обобщения теоремы Дугунджи о продолжении на случай кружевных пространств.

Диссертант рассматривает важный частный случай свободной топологической универсальной алгебры — свободную топологическую группу $B(X)$, порождённую топологическим пространством X и доказывает, что для кружевного T_1 -пространства X $B(X)$ также является кружевным пространством.

⁸Е. А. Reznichenko, *Extensions and factorizations of topological and semitopological universal algebras*, arXiv:2402.01418[math.GN].

⁹J. Ceder, *Some generalizations of metric spaces*, Pacific J. Math., **11**, 105–125 (1961).

¹⁰C. J. R. Borges, *On stratifiable spaces*, Pacific J. Math., **17** (1), 1–16 (1966).

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются объекты универсальной алгебры, снабжённые топологией, относительно которой все определённые на них операции непрерывны или раздельно непрерывны. Предметом исследования являются существование, строение и общие свойства свободных топологических и квазитопологических универсальных алгебр, свойства важных конкретных объектов топологической алгебры, таких как мальцевские пространства, квазимальцевские пространства, свободные мальцевские и квазимальцевские алгебры и свободные топологические булевы группы, а также свойства квазитопологических алгебр, отличающие их от топологических.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

- 1) доказать существование и исследовать структуру и тополого-алгебраические свойства свободных топологических универсальных алгебр данного топологического пространства в заданных многообразиях топологических алгебр, в частности, абсолютно свободных топологических алгебр с заданной сигнатурой;
- 2) исследовать свойства свободных топологических алгебр в конгруэнц-перестановочных многообразиях топологических алгебр (т.е. многообразиях алгебр с непрерывной операцией Мальцева);
- 3) доказать, что свободная булева группа кружевного пространства является кружевной (и, тем самым, распространить теорему Дугунджи о существовании оператора продолжения на класс топологических векторных пространств над полем $\mathbb{F}_2$);
- 4) ввести понятие свободной квазитопологической универсальной алгебры (т.е. универсальной алгебры с топологией, относительно которой операции раздельно непрерывны), доказать существование и исследовать структуру и тополого-алгебраические свойства абсолютно свободных, свободных и общих квазитопологических алгебр;
- 5) исследовать строение и свойства свободных квазитопологических алгебр в конгруэнц-перестановочных многообразиях квазитопологических алгебр (т.е. многообразиях алгебр с раздельно непрерывной операцией Мальцева).

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту.

- 1) Для любого топологического пространства X и любой сигнатуры Σ существует абсолютно свободная топологическая Σ -алгебра $W^t(X)$. Она алгебраически изоморфна алгебре Σ -термов $W(X)$ и является индуктивным пределом подпространств, представляющих собой топологические суммы конечных степеней пространства X .
- 2) Свободные топологические алгебры в многообразиях топологических алгебр, представляющих особый интерес, а именно, в многообразиях топологических алгебр с перестановочными конгруэнциями (т.е. с непрерывными операциями Мальцева) и в многообразии булевых топологических групп (т.е. топологических векторных пространств над полем $\mathbb{F}_2$) обладают следующими свойствами:
 - каждая топологическая мальцевская алгебра является факторалгеброй некоторой свободной топологической мальцевской алгебры, причём соответствующий гомоморфизм представляет собой открытую ретракцию;
 - если свободная топологическая мальцевская алгебра $M(X)$ является T_0 -пространством или X является тихоновским пространством, то X гомеоморфно вкладывается в $M(X)$ в качестве замкнутого подпространства;
 - если пространство X функционально хаусдорфово, то свободная топологическая мальцевская алгебра $M(X)$ тоже функционально хаусдорфова;
 - для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств существует непрерывный гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow M(Y)$ со свойством $i_Y \circ f = h \circ i_X$ (где i_X и i_Y — канонические вложения пространств X и Y в $M(X)$ и $M(Y)$), причём если f факторно, то гомоморфизм h открыт;
 - свободная топологическая булева группа кружевного пространства является кружевным пространством.
- 3) В любом многообразии квазитопологических алгебр существует свободная квазитопологическая алгебра над произвольным топологическим пространством.
- 4) Для любого топологического пространства X и любой сигнатуры Σ существует абсолютно свободная квазитопологическая Σ -алгебра $W^q(X)$. Она алгебраически изоморфна алгебре Σ -термов $W(X)$ и является индуктивным пределом подпространств, представляющих собой топологические суммы конечных кросс-степеней пространства X .
- 5) Для каждого топологического пространства X в любом многообразии квазитопологических алгебр определена свободная квазитопологическая алгебра.

гебра над пространством X . Факторалгебра любой квазитопологической алгебры с факторной топологией является квазитопологической алгеброй.

6) Свободные и общие квазитопологические алгебры с отдельно непрерывной операцией Мальцева обладают следующими свойствами:

- все T_0 -пространства, допускающие отдельно непрерывные операции Мальцева, являются также T_1 -пространствами;
- всякое T_1 -пространство X гомеоморфно вкладывается в свободную квазитопологическую алгебру $M^q(X)$;
- всякое квазимальцевское пространство X является ретрактом своей свободной квазитопологической группы $F^q(X)$;
- всякое тихоновское квазимальцевское пространство X гомеоморфно ретракту тихоновской квазитопологической группы;
- для любого тихоновского пространства X и любого его подпространства Y тождественное вложение $Y \rightarrow X$ продолжается до замкнутого вложения $M^q(Y) \rightarrow M^q(X)$ тогда и только тогда, когда Y замкнуто в X .

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- 1) Предложено полное доказательство существования свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{U}}(X)$ произвольного топологического пространства X в любом многообразии $\mathcal{U}$ топологических алгебр. Изучено строение абсолютно свободной алгебры и получено её явное описание.
- 2) Доказано, что на факторалгебре любой топологической алгебры из конгруэнц-перестановочного многообразия топологических алгебр (т.е. из многообразия с операцией Мальцева) все операции многообразия непрерывны относительно факторной топологии. Таким образом, в таком многообразии имеет смысл понятие топологической факторалгебры. Приведён пример многообразия топологических алгебр, в котором топологические факторалгебры существуют не всегда.
- 3) Доказаны теоремы об аксиомах отделимости топологических алгебр с непрерывной операцией Мальцева.
- 4) Введено понятие свободной мальцевской алгебры топологического пространства (это свободная топологическая алгебра в многообразии всех топологических алгебр с операцией Мальцева). Выяснены условия, при которых топологическое пространство вкладывается в свою свободную мальцевскую алгебру (в качестве замкнутого подпространства).

- 5) Введено понятие свободной тихоновской мальцевской алгебры тихоновского пространства. Описаны основные свойства свободной тихоновской мальцевской алгебры.
- 6) Доказаны теоремы, характеризующие связь между свободными мальцевскими пространствами и свободными топологическими грудами тихоновских пространств.
- 7) Доказано, что свободная булева группа (т.е. свободное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2$) кружевного T_1 -пространства является кружевным пространством.
- 8) Доказано, что в любом многообразии квазитопологических алгебр определены топологические факторалгебры. А именно, на любой факторалгебре любой квазитопологической алгебры операции раздельно непрерывны относительно факторной топологии.
- 9) Введено понятие и доказано существование свободной квазитопологической алгебры произвольного топологического пространства в данном многообразии квазитопологических алгебр. Получено явное описание абсолютно свободной квазитопологической алгебры произвольной сигнатуры произвольного топологического пространства. Доказано, что свободная квазитопологическая алгебра произвольного пространства X является индуктивным пределом некоторых, естественным образом определённых, подалгебр. Для топологических алгебр это верно лишь в случае, когда пространство X обладает свойствами, близкими к компактности.
- 10) Введены свободные квазимальцевские алгебры и исследованы их свойства, в частности, аксиомы отделимости. Предъявлено явное описание свободной квазимальцевской алгебры данного топологического пространства. Доказано, что всякое квазимальцевское пространство является ретрактом некоторой квазитопологической группы, тогда как ретрактом топологической группы мальцевское пространство является только при дополнительных условиях. Кроме того, доказано, что если X — тихоновское пространство и Y — его замкнутое подпространство, то свободная квазимальцевская алгебра пространства Y является замкнутой подалгеброй свободной квазимальцевской алгебры пространства X .

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы общей топологии, теории множеств, топологической алгебры и теории универсальных алгебр, а также методика, предложенная автором.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в области общей топологии, топологической алгебры, универсальной алгебры и функционального анализа.

Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати. При публикации в журналах они были подвергнуты рецензированию. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация диссертации

Результаты диссертации опубликованы в четырёх статьях [1]–[4] в журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология и индексируемых в базах научного цитирования Scopus, Web of Science, RSCI, ядре РИНЦ. Также результаты были представлены на следующих всероссийских и международных научных конференциях и научно-исследовательских семинарах:

Доклады на международных конференциях:

- Топологическая конференция «Александровские чтения», посвящённая 125-летию со дня рождения Павла Сергеевича Александрова, 6–7 мая 2021 г., Москва, МГУ.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2023», 10–21 апреля 2023 г., Москва, МГУ.

Доклады на научно-исследовательских семинарах

- Научно-исследовательский семинар им. П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 24 марта 2022 г.
- Научно-исследовательский семинар им. П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 26 октября 2023 г.
- Научно-исследовательский семинар им. П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 22 февраля 2024 г.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, раздела «Основные понятия и предварительные сведения», пяти глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Объём диссертации составляет 105 страниц. Список литературы и публикаций автора включает в себя 39 наименований. Используется двойная нумерация определений, лемм, теорем, предложений, следствий, примеров и замечаний. Первое число означает номер главы, а второе — номер определения или утверждения внутри главы.

Краткое содержание работы

Во **введении** приводится краткая история вопроса, определяется область исследования, обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов, формулируются основные результаты диссертации. В разделе «Основные понятия и предварительные сведения» содержатся самые основные определения (остальные необходимые определения приводятся по ходу дела), а также формулируются и доказываются некоторые нужные в дальнейшем общие факты.

Глава 1 посвящена основным свойствам свободных топологических алгебр, свободных мальцевских алгебр, свободных мальцевских тихоновских алгебр, абсолютно свободных топологических алгебр. Приводится явное описание абсолютно свободной мальцевской алгебры. В первом разделе приводятся определения и основные свойства топологических алгебр, многообразий топологических алгебр и свободных топологических алгебр.

Определение 1.1¹¹. *Многообразием* топологических алгебр называется любой класс топологических алгебр с одинаковой сигнатурой, замкнутый относительно перехода к топологическим произведениям, гомоморфным образам с фактортопологией (при условии, что они являются топологическими алгебрами) и топологическим подалгебрам. Многообразие топологических алгебр называется *широким*, если оно замкнуто относительно перехода к непрерывным гомоморфным образам (при том же условии). Многообразие топологических алгебр, определённое системой тождеств (то есть состоящее из всех топологических алгебр, в которых выполнены эти тождества), называется *полным*.

Мы рассматриваем лишь *нетривиальные* многообразия топологических алгебр, т.е. многообразия, содержащие хотя бы одну алгебру, состоящую более чем из одного элемента.

Пусть A — топологическая алгебра. Через $\bar{A}$ мы будем обозначать ту же алгебру, но без топологии. Для данного многообразия $\mathcal{V}$ топологических алгебр через $\bar{\mathcal{V}}$ мы будем обозначать класс соответствующих абстрактных алгебр:

$$\bar{\mathcal{V}} = \{\bar{A} : A \in \mathcal{V}\}.$$

¹¹W. Taylor, *Varieties of topological algebras*, J. Austral. Math. Soc., Ser. A, **23**, 207–241 (1977).

Отметим, что по теореме Биркгофа¹² любое многообразие абстрактных алгебр определяется тождествами (состоит из всех Σ -алгебр, в которых выполнены данные тождества). В случае многообразия топологических алгебр это не так, однако известно¹³, что если $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, то $\overline{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр.

Определение 1.2¹⁴. Свободной топологической алгеброй произвольного топологического пространства X в данном многообразии $\mathcal{V}$ топологических алгебр называется топологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$ со свойствами:

- 1) алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ порождается множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$ в любую топологическую алгебру $A \in \mathcal{V}$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$ такой, что $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Предложение 1.1. Пусть $\mathcal{T}$ — топология пространства X . Топология на $F_{\mathcal{V}}(X)$ является самой сильной из согласованных со всеми операциями топологий, индуцирующих на $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ топологию $\mathcal{T}'$, относительно которой отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ непрерывно.

Теорема 1.1. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр и X — топологическое пространство. Тогда существует свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$. Кроме того,

- 1) абстрактная алгебра $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$ изоморфна свободной алгебре, порождённой множеством X в многообразии $\overline{\mathcal{V}}$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$, где $A \in \mathcal{V}$, гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$, для которого $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$, единствен;
- 3) отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ инъективно;
- 4) алгебра $F(X)$ и отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ определены однозначно с точностью до топологического изоморфизма, т.е. если алгебра F и отображение φ удовлетворяют условиям в определении 1.2¹⁴, то существует изоморфизм $i: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow F$, являющийся гомеоморфизмом, для которого $\varphi = i \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Теорема 1.3. Если $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр и X — тихоновское пространство, то отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ из определения свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ является топологическим вложением, а сама алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ является функционально хаусдорфовым пространством.

¹²Общая алгебра, под ред. Л. А. Скорнякова, т. 2, Наука, М., 1991.

¹³W. Taylor, Varieties of topological algebras, J. Austral. Math. Soc., Ser. A, **23**, 207–241 (1977).

¹⁴А. И. Мальцев, Свободные топологические алгебры, Изв. АН СССР. Сер. матем., **21** (2), 171–198 (1957).

Второй раздел первой главы посвящён абсолютно свободным топологическим алгебрам.

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{W}$ — многообразие всех топологических алгебр данной сигнатуры Σ . Свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{W}}(X)$ называется *абсолютно свободной топологической Σ -алгеброй* пространства X и обозначается $W^t(X)$.

Пусть X — топологическое пространство. Из теоремы 1.1 вытекает, что абсолютно свободная топологическая алгебра пространства X существует и изоморфна алгебре термов $W(X)$. Второй раздел первой главы диссертации завершается конструктивным описанием абсолютно свободной топологической Σ -алгебры $W^t(X)$ и изоморфизма $\Phi: W^t(X) \rightarrow W(X)$.

Глава 2 посвящена мальцевским алгебрам, их строению и свойствам. В первом разделе приводятся основные определения и свойства абстрактных и топологических мальцевских алгебр.

Определение 2.1¹⁵. Пусть X — множество и $R_1, R_2 \subset X \times X$ — произвольные отношения на множестве X . *Произведением* конгруэнций $R_1 \circ R_2$ называется множество пар (p, q) , где $p, q \in X$, определяемое условием: $(p, q) \in R_1 \circ R_2$ тогда и только тогда, когда найдётся элемент t такой, что $(p, t) \in R_2$, $(t, q) \in R_1$. Конгруэнции R_1 и R_2 называются *перестановочными*, если $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Отметим¹⁶, что произведение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда эти отношения перестановочны.

Следующее определение восходит к работе А.И. Мальцева¹⁷.

Определение 2.2. *Конгруэнц-перестановочными* называются многообразия, в которых любые две конгруэнции перестановочны.

Теорема 2.1¹⁷. *Многообразие топологических алгебр $\mathcal{W}$ конгруэнц-перестановочно тогда и только тогда, когда среди термов данного многообразия найдётся терм Мальцева, то есть многочлен $f(x, y, z)$, удовлетворяющий условиям $f(x, x, y) = y$ и $f(x, y, y) = x$ для всех $x, y \in A$, где A — любая алгебра из $\mathcal{W}$.*

Топологической мальцевской алгеброй называется топологическая алгебра, среди производных операций которой найдётся операция μ , удовлетворяющая тождествам

$$x = \mu(x, y, y) = \mu(y, y, x).$$

При этом тернарная операция μ называется *операцией Мальцева*. Многообразие топологических алгебр сигнатуры $\{\mu\}$, где μ — тернарная операция, удовлетворяющая выписанным выше тождествам, будем обозначать $\mathcal{M}$.

¹⁵ A. de Morgan, *On the syllogism: IV, and on the logic of relations*. Trans. Cambridge Philosophical Soc., **10** (1860).

¹⁶ А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.

¹⁷ А. И. Мальцев, *К общей теории алгебраических систем*, Матем. сб., **35(77)** (1), 3–20 (1954).

Определение 2.3. Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве A . Насыщением множества $U \subset A$ относительно $\sim$ или $\sim$ -насыщением множества U называется множество

$$\{y \in A : \exists x \in U (x \sim y)\}.$$

Следующая теорема была сформулирована и доказана Мальцевым¹⁸ для так называемых примитивных классов топологических алгебр, т.е. классов всех хаусдорфовых топологических алгебр данной сигнатуры, в которых выполнены данные тождества.

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{V}$ — конгруэнц-перестановочное многообразие топологических алгебр, $\sim$ — конгруэнция на произвольной алгебре $A \in \mathcal{V}$. Тогда $\sim$ -насыщение произвольного открытого подмножества $U \subset A$ открыто.

Замечание 2.1. Если X — любое топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на X и $X/\sim$ — факторпространство пространства X (т.е. множество $X/\sim$ с фактортопологией), то естественное факторное отображение $f: X \rightarrow X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда насыщение любого открытого множества $U \subset X$ относительно $\sim$ открыто.

Следствие 2.1. Для любой топологической алгебры A из конгруэнц-перестановочного многообразия определена топологическая факторалгебра по любой конгруэнции $\sim$. А именно, все операции на каждой абстрактной факторалгебре $A/\sim$ непрерывны относительно фактортопологии, причём каноническое отображение $A \rightarrow A/\sim$ — непрерывный открытый гомоморфизм.

Следствие 2.2. Для любых топологических алгебр A и B из любого конгруэнц-перестановочного многообразия топологических алгебр любой факторный гомоморфизм $h: A \rightarrow B$ открыт.

Пример 2.1. Существует многообразие топологических алгебр, в котором переход к факторалгебрам не сохраняет непрерывность операций.

Предложение 2.1. Все T_0 -пространства, допускающие непрерывные операции Мальцева, хаусдорфовы.

Следствие 2.3. Если A — T_0 -пространство, допускающее непрерывную операцию Мальцева, то любые две точки имеют непересекающиеся окрестности с непересекающимися замыканиями.

Замечание 2.2. Мальцевская алгебра, являющаяся T_0 -пространством, не обязана быть регулярной.

Теорема 2.3. Пусть $\mathcal{V}$ — конгруэнц-перестановочное многообразие топологических алгебр. Тогда для любой алгебры $A \in \mathcal{V}$ и любой конгруэнции R на A следующие условия эквивалентны:

¹⁸ А. И. Мальцев, *Свободные топологические алгебры*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **21** (2), 171–198 (1957).

- 1) топологическая факторалгебра A/R хаусдорфова;
- 2) все классы эквивалентности R замкнуты в A ;
- 3) отношение R замкнуто в $A \times A$.

Более того, если A — подалгебра алгебры $B \in \mathcal{U}$, то замыкание множества R в $B \times B$ является конгруэнцией на замыкании алгебры A в B .

Второй раздел второй главы посвящён свободным топологическим мальцевским алгебрам.

Определение 2.4. Свободной топологической мальцевской алгеброй пространства X называется свободная топологическая алгебра пространства X в многообразии $\mathcal{M}$. Иначе говоря, $M(X)$ — топологическая алгебра, для которой существует непрерывное отображение $i_X: X \rightarrow M(X)$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $M(X)$ алгебраически порождается множеством $i_X(X)$;
- 2) для любой алгебры $M \in \mathcal{M}$ и для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow M$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow M$ такой, что $f = h \circ i_X$.

Теорема 2.4. 1) Для любого топологического пространства X определена свободная мальцевская топологическая алгебра $M(X)$ (вместе с соответствующим непрерывным отображением $i_X: X \rightarrow M(X)$). Она единственна с точностью до топологического изоморфизма.

- 2) Отображение $i_X: X \rightarrow M(X)$ инъективно и алгебра $M(X)$ свободно порождена множеством $i_X(X)$.
- 3) Каждая топологическая мальцевская алгебра M является образом топологической алгебры $M(M)$ при непрерывном открытом гомоморфизме, являющемся ретракцией. Следовательно, каждая топологическая мальцевская алгебра является факторалгеброй некоторой свободной топологической мальцевской алгебры.
- 4) Для всякого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow M(Y)$, для которого $i_Y \circ f = h \circ i_X$, и если $i_Y \circ f \circ i_X^{-1}: i_X(X) \rightarrow i_Y(Y)$ факторно, то h открыто.
- 5) Если $M(X)$ — T_0 -пространство, то $i(X)$ замкнуто в $M(X)$.
- 6) Если X — тихоновское пространство, то X гомеоморфно вложено в $M(X)$ в качестве замкнутого подпространства.
- 7) Если X функционально хаусдорфово, то $M(X)$ также функционально хаусдорфово.

Вместе с многообразием мальцевских алгебр $\mathcal{M}$ в диссертации рассматривается *многообразие тихоновских мальцевских алгебр* $\mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$, которое состоит из всех топологических мальцевских алгебр, являющихся тихоновскими пространствами.

Определение 2.5. *Свободной тихоновской мальцевской алгеброй $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ тихоновского пространства X называется алгебра из $\mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$, для которой найдётся непрерывное отображение $i_X: X \rightarrow M^{3\frac{1}{2}}(X)$, удовлетворяющее условиям:*

- 1) $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ порождается множеством $i_X(X)$;
- 2) Для любой топологической алгебры $M \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$ и произвольного непрерывного отображения $f: X \rightarrow M$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M^{3\frac{1}{2}}(X) \rightarrow M$ такой, что $f = h \circ i_X$.

Теорема 2.5. 1) *Для любого топологического пространства X определена свободная тихоновская мальцевская алгебра $M^{3\frac{1}{2}}(X) \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$. Она единственна с точностью до топологического изоморфизма.*

- 2) *Отображение i_X — топологическое вложение пространства X в $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ в качестве замкнутого подпространства.*
- 3) *Алгебра $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ свободно порождается множеством $i_X(X) = X$.*
- 4) *Каждая тихоновская мальцевская алгебра M является образом алгебры $M^{3\frac{1}{2}}(M)$ при непрерывном открытом гомоморфизме, являющемся ретракцией. Следовательно, каждая тихоновская топологическая мальцевская алгебра является факторпространством свободной тихоновской мальцевской алгебры.*
- 5) *Любое факторное отображение $X \rightarrow M$, где $M \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$, продолжается до открытого гомоморфизма $M^{3\frac{1}{2}}(X) \rightarrow M$.*

При исследовании свободных мальцевских алгебр конструкция абсолютно свободной топологической алгебры оказывается особенно полезной. Допуская вольность речи, мы называем абсолютно свободную топологическую алгебру сигнатуры $\{\mu\}$, где μ — тернарная операция, *абсолютно свободной мальцевской алгеброй*. Согласно общей конструкции абсолютно свободной топологической алгебры, изложенной в параграфе 1.2, *абсолютно свободная мальцевская алгебра $W^t(X)$ пространства X определяется по индукции следующим образом.* Положим

$$\begin{aligned} W_0^t(X) &= X; \\ W_1^t(X) &= W_0^t(X) \times W_0^t(X) \times W_0^t(X); \\ W_n^t(X) &= \bigoplus_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ \max(i,j,k)=n-1}} W_i^t(X) \times W_j^t(X) \times W_k^t(X). \end{aligned}$$

Очевидно, $W_i^t(X) \cap W_j^t(X) = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть

$$W^t(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} W_i^t(X).$$

Тернарную операцию μ на $W(X)^t$ зададим так:

$$\mu(x, y, z) = (x, y, z) \in W_i^t(X) \times W_j(X)^t \times W_k^t(X) \subset W_{\max\{i, j, k\}+1}^t(X).$$

Легко видеть, что эта операция непрерывна.

Определим отношение R на $W^t(X)$ следующим образом. Будем считать, что xRy , если найдётся $z \in W^t(X)$ такой, что $x = (z, z, y) = (y, z, z)$. Пусть $\sim$ — минимальная конгруэнция, содержащая R (то есть конгруэнция, являющаяся пересечением всех конгруэнций, содержащих R). Тогда $M(X) = W^t(X) \setminus \sim$. Пусть j — соответствующий факторный гомоморфизм. Положим

$$M_k(X) = j(W_k^t(X))$$

при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Предложение 2.2. *Топологическое пространство X является мальцевским тогда и только тогда, когда оно является ретрактом пространства $M_1(X)$.*

Теорема 2.6. *Пусть X — тихоновское пространство и $Y \subset X$ — его замкнутое подмножество. Тогда*

- все $M_n(X)$ замкнуты в $M(X)$;
- подалгебра $\langle Y \rangle$ алгебры $M(X)$, порождённая множеством Y , замкнута в $M(X)$.

Накладывая на операцию Мальцева естественное условие ассоциативности, мы приходим к определению груды. Топологическим грудам посвящён третий раздел второй главы.

Определение 2.6. *Грудой называется множество с тернарной операцией $[\ast \ast \ast]$, удовлетворяющей системе тождеств:*

$$\begin{aligned} [[xyz]uv] &= [x[uzv]v] = [xy[zuv]], \\ [xyy] &= [yxy] = x. \end{aligned}$$

Из теоремы Бэра–Вагнера следует, что на всякой груде существуют производные групповые операции¹⁹. Различие лишь в том, что в груде нет фиксированной единицы. Таким образом, топологические груды (которые можно назвать ассоциативными мальцевскими пространствами) тесно связаны с топологическими группами.

¹⁹ А. Г. Курош, *Общая алгебра*, Физматлит, М., 1979.

Свободную топологическую группу $F(X)$ тихоновского пространства X можно представить в виде:

$$F(X) = \bigcup_{k \in \omega} F_k(X),$$

где $F_k(X) = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} : n \leq k, \varepsilon_i = \pm 1, x_i \in X\}$. Пусть $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$, тогда каждое подпространство $F_k(X)$ является образом пространства $(X \oplus \{e\} \oplus X^{-1})^k$ при естественном отображении (умножении)

$$m_k(x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_n^{\varepsilon_n}) = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}.$$

Определим свободную топологическую груду $G(X)$ как подпространство в свободной топологической группе $F(X)$:

$$G(X) = \bigcup_{n \in \omega} G_n(X), \text{ где}$$

$$G_n(X) = \{x_1 \cdot x_2^{-1} \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{2n}^{-1} \cdot x_{2n+1}\} \subset F_{2n+1}(X).$$

Операцию μ на $G(X)$ определим так: $\mu(a, b, c) = a \cdot b^{-1} \cdot c$. Отметим, что с этой операцией $G(X)$ действительно является грудой, так как

$$\mu(\mu(a, b, c), d, e) = \mu(a, \mu(d, c, b), e) = \mu(a, b, \mu(c, d, e)).$$

Теорема 2.7. Пусть $\mathcal{V}$ — полное топологическое подмногообразие многообразия $\mathcal{M}$, т.е. класс топологических мальцевских алгебр сигнатуры $\{\mu\}$, являющийся полным топологическим многообразием. Тогда для каждого топологического пространства X свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ является топологической факторалгеброй алгебры $M(X)$. В частности, для тихоновского пространства X топологическая груда $G(X)$ — факторпространство пространства $M(X)$.

Предложение 2.3. Определённая выше топологическая груда $G(X)$ вместе с тождественным вложением $X \rightarrow G(X)$ является свободной топологической грудой пространства X .

В диссертации приведён пример пространства X , для которого $M_1(X)$ и $G_1(X)$ не гомеоморфны.

Предложение 2.4. Пусть X — тихоновское пространство и отображение

$$\bar{m}_3 = m_3|_{X \times X^{-1} \times X} : X \times X^{-1} \times X \rightarrow G_1(X), (x, y^{-1}, z) \mapsto xy^{-1}z$$

факторно, тогда $M_1(X)$ гомеоморфно пространству $G_1(X)$. Если, кроме того, X — мальцевское пространство, то X — ретракт пространства $G_1(X)$.

Условие факторности операции $\bar{m}_3$ (или m_3) — достаточное, но не необходимое условие того, что тихоновское мальцевское пространство X является ретрактом пространства $G_1(X)$.

Предложение 2.5. Пусть X — тихоновское пространство, для которого $M(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $M_n(X)$, $n \geq 0$. Тогда $G(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $G_n(X)$, $n \geq 0$.

Предложение 2.6. Топологическое пространство X является ретрактом топологической группы тогда и только тогда, когда X является ретрактом группы $G(X)$.

В последнем разделе второй главы приводится явное описание свободной мальцевской алгебры.

В главе 3 рассматривается важный частный случай топологических алгебр, а именно, булевы топологические группы или, что то же самое, топологические векторные пространства над полем $\mathbb{F}_2$. Третья глава целиком посвящена доказательству того, что свободные булевы группы кружевных пространств²⁰ являются кружевными, а значит, на них распространяется знаменитая теорема Дугунджи о существовании оператора продолжения.

Глава 4 посвящена изучению квазитопологических алгебр, то есть универсальных алгебр с раздельно непрерывными операциями. Определения и теоремы этой главы во многом аналогичны определениям и теоремам главы 1.

В первом разделе приводятся необходимые определения и доказываются основные свойства квазитопологических алгебр.

Определение 4.1. Квазитопологическая алгебра сигнатуры Σ — это алгебра A с топологией, относительно которой все операции $\sigma: A^n \rightarrow A$, где $n \geq 0$ и $\sigma \in \Sigma_n$, раздельно непрерывны.

Следующая теорема является важным свойством квазитопологических алгебр, выгодно отличающим их от топологических.

Теорема 4.1. Пусть A — квазитопологическая алгебра, $\sim$ — конгруэнция на A и B — факторалгебра $A/\sim$ с фактортопологией относительно канонического гомоморфизма. Тогда B является квазитопологической алгеброй, то есть операции на B раздельно непрерывны.

Определение 4.2. Многообразием квазитопологических алгебр называется любой класс квазитопологических алгебр, замкнутый относительно перехода к топологическим произведениям, образам гомоморфизмов с фактортопологией и топологическим подалгебрам.

Определение 4.3. Полным многообразием квазитопологических алгебр называется класс квазитопологических алгебр, состоящий из всех алгебр, удовлетворяющих некоторой заданной системе тождеств над Σ .

²⁰G. Gruenhage, *Generalized metric spaces*, in: *Handbook of set theoretic topology*, eds. K. Kunen, J.E. Vaughan, Amsterdam, North-Holland, 1984, 423–501.

Как и в случае топологических алгебр, для квазитопологической Σ -алгебры A через $\overline{A}$ мы обозначаем абстрактную Σ -алгебру, которая как множество совпадает с A и имеет те же операции. Аналогично, для многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр через $\overline{\mathcal{V}}$ мы обозначаем класс всех абстрактных алгебр, алгебраически изоморфных алгебрам из $\mathcal{V}$; он состоит из тех же алгебр, что и $\mathcal{V}$, только без топологии.

Предложение 4.1. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие квазитопологических алгебр. Тогда $\overline{\mathcal{V}}$ является многообразием абстрактных алгебр.

Определение 4.4. Свободной квазитопологической алгеброй произвольного топологического пространства X в данном многообразии $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр назовём квазитопологическую алгебру $F_{\mathcal{V}}^q(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}^q(X)$ со свойствами:

- 1) алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ порождается множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$ в произвольную квазитопологическую алгебру $A \in \mathcal{V}$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}^q(X) \rightarrow A$ такой, что $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Предложение 4.2. Пусть $\mathcal{T}$ — топология пространства X . Топология на $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ является самой сильной из топологий, относительно которой все операции сигнатуры раздельно непрерывны и которые индуцируют на $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ топологию $\mathcal{T}'$, относительно которой отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ непрерывно.

Определение 4.5. Пусть $\mathcal{W}$ — многообразие всех топологических алгебр данной сигнатуры Σ . Свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{W}}(X)$ называется абсолютно свободной квазитопологической Σ -алгеброй пространства X и обозначается $W^q(X)$.

Теорема 4.2. Пусть $\mathcal{V}$ — (нетривиальное) многообразие квазитопологических алгебр и X — топологическое пространство. Тогда существует свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}^q(X)$. Кроме того,

- 1) абстрактная алгебра $\overline{F_{\mathcal{V}}^q(X)}$ изоморфна свободной алгебре множества X в многообразии $\overline{\mathcal{V}}$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$, где $A \in \mathcal{V}$, гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}^q(X) \rightarrow A$, для которого $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$, единствен;
- 3) отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ инъективно;
- 4) алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ и отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ определены однозначно с точностью до топологического изоморфизма, т.е. если алгебра F и отображение φ удовлетворяют условиям в определении 4.4, то существует изоморфизм $i: F_{\mathcal{V}}^q(X) \rightarrow F$, являющийся гомеоморфизмом, для которого $\varphi = i \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Во втором разделе четвёртой главы описана конструкция абсолютно свободной квазитопологической алгебры $W^q(X)$ топологического пространства X : она совершенно аналогична конструкции абсолютно свободной топологической алгебры, единственное отличие состоит в том, что обычные произведения пространств заменяются на кросс-произведения.

Следующая теорема демонстрирует ещё одно отличие квазитопологических алгебр от топологических:

Теорема 4.4. *Для любого топологического пространства X и любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр топология свободной квазитопологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ является фактортопологией относительно естественного гомоморфизма Q алгебры $W^q(X)$ на $F_{\mathcal{V}}(X)$.*

Теорема 4.5. *Пусть $\mathcal{V}$ — полное многообразие квазитопологических алгебр, X — топологическое пространство, $\Phi: W^q(X) \rightarrow W(X)$ — алгебраический изоморфизм из раздела 4.3, $\sim$ — конгруэнция на $W(X)$, для которой $W(X)/\sim$ является абстрактной свободной алгеброй $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ в абстрактном многообразии $\overline{\mathcal{V}}$, $f: W(X) \rightarrow W(X)/\sim$ — факторотображение и $Q = \Phi \circ f$. Положим $F_{\mathcal{V}}(X) = W(X)/\sim$ с фактортопологией относительно отображения Q и $\varphi_X^{\mathcal{V}} = Q$.*

Тогда $F_{\mathcal{V}}(X)$ с отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ является свободной квазитопологической алгеброй пространства X в многообразии $\mathcal{V}$.

Ещё одно свойство, которое выгодно отличает квазитопологические алгебры от топологических, сформулировано в следующей теореме.

Теорема 4.6. *Для любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр и всякого топологического пространства X свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $F_{\mathcal{V}}^q(X) = \bigcup_{n \geq 0} F_n(X)$.*

Четвертый раздел четвёртой главы посвящён аксиомам отделимости в квазитопологических алгебрах

Теорема 4.7. *Пусть X — тихоновское пространство, $\mathcal{V}$ — полное многообразие квазитопологических алгебр и $F_{\mathcal{V}}(X)$ вместе с отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ — свободная квазитопологическая алгебра пространства X в $\mathcal{V}$. Тогда $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ — гомотоморфное вложение, $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ замкнуто в $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ и $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ является хаусдорфовым пространством.*

Теорема 4.8. *Пусть X — функционально хаусдорфово пространство, тогда пространство $F_{\mathcal{V}}(X)$ тоже функционально хаусдорфово для любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр.*

Глава 5 посвящена изучению квазитопологических алгебр, то есть квазитопологических алгебр, среди производных операций которых найдётся раздельно непрерывная операция Мальцева. Как обычно, в первом разделе содержатся определения и основные свойства квазимальцевских алгебр.

Определение 5.1. *Квазимальцевской алгеброй* мы будем называть квазитопологическую алгебру с квазинепрерывной операцией Мальцева μ . Многообразие квазимальцевских алгебр сигнатуры $\{\mu\}$ будем называть *многообразием квазимальцевских алгебр* и обозначать через $\mathcal{M}^q$. Свободную квазитопологическую группу топологического пространства X в этом многообразии будем называть *свободной квазимальцевской алгеброй* пространства X и обозначать через $M^q(X)$.

В первом разделе содержится также описание конструкции абсолютно свободной квазимальцевской алгебры $W^q(X)$ (т.е. абсолютно свободной квазитопологической алгебры сигнатуры $\{\mu\}$, где μ — тернарная операция). Она представляет собой частный случай конструкции абсолютно свободной квазитопологической алгебры произвольной сигнатуры, описанной ранее.

Теорема 5.1. *Для любого топологического пространства X пространство $M^q(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $M^q(X) = \bigcup_{n \geq 0} M_n^q(X)$.*

Во втором разделе рассматриваются аксиомы отделимости в квазимальцевских алгебрах.

Предложение 5.1. *Все T_0 -пространства, допускающие раздельно непрерывные операции Мальцева, являются также T_1 -пространствами.*

Теорема 5.3. *Любое T_1 -пространство X гомеоморфно вкладывается в $M^q(X)$.*

В третьем разделе рассматриваются ретракты квазитопологических групп. Напомним, что *квазитопологической группой* называется группа G с топологией, относительно которой умножение раздельно непрерывно, а операция взятия обратного элемента непрерывна. Мы будем обозначать свободную квазитопологическую алгебру топологического пространства X в многообразии всех квазитопологических групп через $F^q(X)$.

Теорема 5.5. *Всякое квазимальцевское пространство X является ретрактом своей свободной квазитопологической группы $F^q(X)$.*

Теорема 5.6. *Всякое тихоновское квазимальцевское пространство X гомеоморфно ретракту тихоновской квазитопологической группы.*

Наконец, в последнем разделе мы доказываем следующую теорему.

Теорема 5.9. *Пусть X — тихоновское пространство и $Y \subseteq X$. Тогда тождественное вложение $Y \rightarrow X$ продолжается до замкнутого вложения $M^q(Y) \rightarrow M^q(X)$ тогда и только тогда, когда Y замкнуто в X .*

Заключение

В диссертации содержится систематическое исследование свободных топологических алгебр с непрерывными и раздельно непрерывными операциями (ранее подобные исследования не проводились). Она вносит также заметный вклад

в исследование топологических алгебр с непрерывными и раздельно непрерывными операциями.

В диссертации содержится полное доказательство существования свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ произвольного топологического пространства X в любом многообразии $\mathcal{V}$ топологических алгебр, изучено строение абсолютно свободной алгебры и получено её явное описание. Во второй главе диссертации доказано, что на факторалгебре любой топологической алгебры из конгруэнц-перестановочного многообразия топологических алгебр (т.е. из многообразия с операцией Мальцева) все операции многообразия непрерывны относительно факторной топологии. Таким образом, в таком многообразии имеет смысл понятие топологической факторалгебры. Приведён пример многообразия топологических алгебр, в котором топологические факторалгебры существуют не всегда. Исследованы аксиомы делимости алгебр с операцией Мальцева. Введено понятие свободной мальцевской алгебры топологического пространства (это свободная топологическая алгебра в многообразии всех топологических алгебр с операцией Мальцева). Выяснены условия, при которых топологическое пространство вкладывается в свою свободную мальцевскую алгебру (в качестве замкнутого подпространства). Введено понятие свободной тихоновской мальцевской алгебры тихоновского пространства и описаны её основные свойства. Кроме того, исследована связь между свободными мальцевскими пространствами и свободными топологическими грейдами тихоновских пространств. Наконец, приведено явное описание свободной мальцевской алгебры, которое оказывается весьма полезным техническим инструментом.

В третьей главе доказано, что свободная булева группа (т.е. свободное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2$) кружевного T_1 -пространства является кружевным пространством.

Четвёртая и пятая главы посвящены квазитопологическим алгебрам, т.е. алгебрам с раздельно непрерывными операциями. Введены понятия квазитопологической алгебры, многообразия квазитопологических алгебр и свободной квазитопологической алгебры. Доказано существование свободной квазитопологической алгебры произвольного топологического пространства в данном многообразии квазитопологических алгебр. Получено явное описание абсолютно свободной квазитопологической алгебры произвольной сигнатуры произвольного топологического пространства. Доказано, что в любом многообразии квазитопологических алгебр определены топологические факторалгебры, а именно, на любой факторалгебре любой квазитопологической алгебры операции раздельно непрерывны относительно фактортопологии. Особое внимание уделено свободным квазимальцевским алгебрам и их свойствам, в частности, аксиомам делимости. Предъявлено явное описание свободной квазимальцевской алгебры данного топологического пространства. Доказано, что всякое квазимальцевское пространство является ретрактом некоторой квазитопологической группы, тогда как ретрактом топологической группы мальцевское пространство является только при дополнительных условиях. Кроме того, доказано, что если X — тихоновское пространство и Y — его замкнутое подпространство, то свобод-

ная квазимальцевская алгебра пространства Y является замкнутой подалгеброй свободной квазимальцевской алгебры пространства X .

Наконец, в диссертации установлены важные свойства, отличающие квазитопологические алгебры от топологических. Так, одним из фундаментальных отличий квазитопологических алгебр от топологических является тот факт, что топологическая факторалгебра квазитопологической алгебры является квазитопологической алгеброй. Этот факт и конструктивное описание абсолютно свободной квазитопологической алгебры позволяют получить конструктивное описание свободной квазитопологической алгебры над полным многообразием квазитопологических алгебр. Это одно из преимуществ квазитопологических алгебр перед топологическими. В диссертации показано, многие результаты о топологических алгебрах остаются верными и даже усиливаются для квазитопологических алгебр. Таким образом, диссертация открывает путь для исследования новых классов пространств, что является актуальной задачей, представляющей как теоретический, так и практический интерес.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. профессору Сипачёвой Ольге Викторовне за постановку задач, научное руководство, заботу, терпение и помощь в работе.

Автор глубоко благодарен Тэттару Антонине Константиновне и Тэттару Людмиле Штефановне за полезные обсуждения и всестороннюю поддержку.

Автор благодарен кафедре общей топологии и геометрии за доброжелательную и творческую атмосферу.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

- [1] О. В. Сипачева, А. А. Солонков, *Свободная топологическая алгебра с раздельно непрерывной операцией Мальцева* // Функциональный анализ и его приложения. – 2023. – Т. 57, вып. 4. – С. 89–99.

EDN: EMSLQV, объём 0,688 п.л.

Перевод: О. V. Sipacheva, A. A. Solonkov, *Free topological algebra with separately continuous Mal'tsev operation* // Functional Analysis and Its Applications. – 2023. – Vol. 57, no. 4. – Pp. 337–345.

EDN: LPOPEJ, объём 0,563 п.л.

Импакт фактор 0.374 (SJR), 0.557 (РИНЦ).

А.А. Солонковым доказаны теоремы 2 и 4, а также внесён значительный вклад в формулировку и доказательство теорем 3, 5, 6. Общая доля диссертанта составляет 60%.

- [2] О. В. Сипачева, А. А. Солонков, *Оператор продолжения отображений для подпространств векторных пространств над полем $\mathbb{F}_2$* // Функциональный анализ и его приложения. – 2022. – Т. 56, вып. 2. – С. 64–74.
EDN: EZUNBA, объём 0.688 п.л.
Перевод: О. V. Sipacheva, A. A. Solonkov, *Extension Operator for Subspaces of Vector Spaces over the Field $\mathbb{F}_2$* // Functional Analysis and Its Applications. – 2022. – Vol. 56, no. 2. – Pp. 130–137.
EDN: KYZGEB, объём 0.5 п.л.
Импакт фактор 0.374 (SJR), 0.557 (РИНЦ).
А.А. Солонков доказал основную лемму и внёс значительный вклад в доказательство утверждения 1 и теоремы 1. Общая доля диссертанта составляет 75%.
- [3] О. V. Sipacheva, A. A. Solonkov, *Free topological Mal'tsev algebras* // Topology and Its Applications. – 2025. – Vol. 374. – P. 109257.
First online 15 January 2025,
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0166864125000550>
EDN: YZALWD, объём 0.938 п.л.
Импакт фактор 0.449 (SJR).
А.А. Солонковым внесён значительный вклад в доказательство теорем 1 и 2. Общая доля диссертанта составляет 50%.
- [4] А. А. Солонков, *Свободные универсальные алгебры с раздельно непрерывными операциями* // Математические заметки. – 2025. – Т. 117, вып. 5. – С. 750–763.
EDN: BSMLQR, объём 0.875 п.л.
Перевод: А. А. Solonkov, *Free Universal Algebras with Separately Continuous Operations* // Mathematical Notes. – 2025. – Vol. 117, no. 5. – Pp. 837–849.
EDN: ODWKIP, объём 0.813 п.л.
Импакт фактор 0.508 (SJR), 0.696 (РИНЦ).