МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Бровкин Вадим Вадимович

О разрешимости второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых многообразиях

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2026

Диссертация подготовлена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	**Коньков Андрей Александрович**, доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Алхутов Юрий Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, педагогический институт, кафедра физико-математического образования и информационных технологий, профессор
	Корпусов Максим Олегович, доктор физико-математических наук, доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, профессор
	Пулькина Людмила Степановна, доктор физико-математических наук, профессор, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, механико-математичсекий факультет, кафедра дифференциальных уравнений и теории управления, профессор

Защита диссертации состоится «29» апреля 2026 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.8 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, по адресу: Российская Федерация, 119234, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 1610.

E-mail: ast.diffiety@gmail.com.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3799.

Автореферат разослан «___»__________2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Г. А. Чечкин

Общая характеристика работы

Представленная работа является исследованием в области общей теории нелинейных эллиптических уравнений. В диссертации рассматривается вторая краевая задача для p-лапласиана в областях на римановых многообразиях, изучаются необходимые и достаточные условия ее разрешимости, приводятся примеры применения основных результатов к конкретным краевым задачам.

Актуальность темы

В течение последних нескольких десятилетий теория эллиптических уравнений на римановых многообразиях получила достаточно существенное развитие. Эта теория берет свое начало в работах математиков, посвященных классификации некомпактных римановых многообразий в зависимости от их геометрических характеристик. Одним из наиболее важных вопросов данного направления является выделение класса многообразий, для которых выполнена теорема Лиувилля, утверждающая, что пространство решений рассматриваемого эллиптического уравнения на многообразии тривиально в некотором классе функций. Теоремы такого типа можно найти, например, в работах А. А. Григорьяна[1,2,3], Н. С. Надирашвили[3,4], K.-T. Sturm[5], S. T. Yau[6,7], P. Li, L. F. Tam[8]. В частности, некомпактные полные многообразия, на которых любая положительная супергармоническая функция равна константе, принято называть параболическими.

Условия параболичности многообразий исследовались такими математиками, как А. А. Григорьян[1], L. Karp[9], S. Y. Cheng, S. T. Yau[10], T. Lyons,

---

[1] Григорьян А. А. О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях // Матем. сб. 1985. Т. 170. № 3. С. 354–363.

[2] Григорьян А. А. О лиувиллевых теоремах для гармонических функций с конечным интегралом Дирихле // Матем. сб. 1987. Т. 174. № 4. С. 496–516.

[3] Григорьян А. А., Надирашвили Н. С. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи // Изв. вузов. Матем. 1987. № 5. С. 25–33.

[4] Надирашвили Н. С. Об одной теореме лиувиллева типа на римановом многообразии // УМН. 1985. Т. 40. № 5. С. 259–260.

[5] Sturm K.-T. Analysis on local Dirichlet spaces I. Recurrence, conservativeness and L^p-Liouville properties // J. Reine. Angew. Math. 1994. V. 456. P. 173—196.

[6] Yau S. T. Harmornic function on complete Riemannian manifolds // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. P. 201–228.

[7] Yau S. T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry // Indiana Univ. Math. J. 1976. V. 25. № 7. P. 659–670.

[8] Li P., Tam L. F. Harmonic functions and the structure of complete manifolds // J. Diff. Geom. 1992. V. 35. № 2. P. 359–383.

[9] Karp L. Subharmonic functions, harmonic mappings and isometric immersions // Ann. Math. Studies. 1982. № 102. P. 133–142.

[10] Cheng S. Y., Yau S. T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. № 3. P. 333–354.

D. Sullivan[11], J. L. Fernandez[12], I. Holopainen[13,14], В. М. Кесельман[15], J. Milnor[16], В. М. Миклюков[17] и другими. Один из первых результатов в этой области получен в работе S. Y. Cheng, S. T. Yau[10]. Именно, было доказано, что полное риманово многообразие является параболическим, если объем геодезического шара радиуса r растет не быстрее, чем r^2 при $r \to \infty$. Некоторые уточнения данного результата можно найти в работе L. Karp[9]. Позже А. А. Григорьян установил[1], что некомпактное полное риманово многообразие имеет параболический тип тогда и только тогда, когда вариационная емкость любого компакта равна нулю.

С другой стороны, как было обнаружено в 80-х годах 20-го века, имеется достаточно большой класс многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные решения эллиптических дифференциальных уравнений. Например, M. T. Anderson[18] и D. Sullivan[19] показали, что на односвязном римановом многообразии с отрицательной секционной кривизной, отделенной от нуля и бесконечности, множество нетривиальных ограниченных гармонических функций бесконечномерно. Эта тема нашла свое развитие в работах А. А. Григорьяна[1,20], А. Г. Лосева[21,22], P. Li, L. F. Tam[8], В. М. Миклюкова[17], H. Donelly[23], S. T. Yau[24] и других. В частности, в работе А. А. Григорьяна[20] исследовался вопрос об оценке размерности пространства гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях в терминах массивных множеств. Именно, было доказано, что размерность пространства гладких решений уравнения Лапласа, удовлетворяющих однородному условию Неймана, можно оценить снизу числом попарно непересекающихся массивных подмножеств многообразия.

---

[11]Lyons T., Sullivan D. Function theory, random paths and covering spaces // J. Diff. Geom. 1984. V. 19. № 2. P. 299-323.

[12]Fernandez J. L. On the existence of Green's function on Riemannian manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 96. P. 284–286.

[13]Holopainen I. Solutions of elliptic equations on manifolds with roughly Euclidean ends // Math. Z. 1994. V. 217. P. 459–477.

[14]Holopainen I. Volume growth, Green's functions and parabolicity of ends // Duke Math. J. 1999. V. 97. № 2. P. 319–346.

[15]Кесельман В. М. О римановых многообразиях α-параболического типа // Изв. вузов. Матем. 1985. № 4. С. 81–83.

[16]Milnor J. On Deciding Whether a Surface Is Parabolic or Hyperbolic // Amer. Math. Monthly. 1977. V. 84. № 1. P. 43–46.

[17]Миклюков В. М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей // Изв. РАН. Сер. Матем. 1996. Т. 60. № 4. С. 111–158.

[18]Anderson M. T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 701–721.

[19]Sullivan D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 723–732.

[20]Григорьян А. А. О размерности пространств гармонических функций // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 55–61.

[21]Лосев А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Матем. 1991. № 12. С. 15–24.

[22]Лосев А. Г. О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журнал. 1998. Т. 39. № 1. С. 87–93.

[23]Donnelly H. Bounded harmonic functions and positive Ricci curvature // Math. Z. 1986. V. 191. P. 559–565.

[24]Yau S. T. Nonlinear analysis in geometry // Enseign. Math. 1987. V. 33. № 2. P. 109–158.

Вопрос об оценке размерности пространства решений эллиптических уравнений в случае полных некомпактных римановых многообразий, имеющих несколько концов, изучался, в частности, авторами С. А. Корольков[25,26], А. Г. Лосев[25,27,26], Е. А. Мазепа[27], P. Li[8,28], L. F. Tam[8,28,29], C. J. Sung, J. Wang[29]. Открытое подмножество E многообразия M принято называть концом, если E связно, непредкомпактно и имеет компактную границу[8]. Говорят, что M — многообразие с концами, если M можно представить в виде объединения некоторого компакта и конечного числа непересекающихся концов. Обычно различают концы гиперболического и параболического типа[30]. P. Li и L. F. Tam[8] доказали, что размерность пространства ограниченных гармонических функций на многообразии с концами оценивается снизу числом гиперболических концов. В работе C. J. Sung, L. F. Tam, J. Wang[29] были получены некоторые уточнения данного результата.

В работе С. А. Королькова и А. Г. Лосева[25] рассматривалось уравнение

$$\Delta u + (b, \nabla u) - cu = 0 \tag{1}$$

на многообразии с концами, где b — гладкое векторное поле, а c — гладкая неотрицательная функция. Используя понятие массивности множества, введенное в работе А. А. Григорьяна[20], авторы получили условия существования и единственности решений некоторых краевых задач для уравнения (1), а также нашли оценки размерностей различных пространств решений. Эти идеи были продолжены в работах[31,32,33,34].

---

[25] Корольков С. А., Лосев А. Г. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Мат. Физ. 2011. № 1. С. 23–40.

[26] Korolkov S. A., Losev A. G. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // Math. Z. 2012. V. 272. № 1–2. P. 459–472.

[27] Лосев А. Г., Мазепа Е. А. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 1. С. 84–110.

[28] Li P., Tam L. F. Positive harmonic functions on complete manifolds with non-negative curvature outside a compact set // Ann. Math. 1987. V. 125. P. 171–207.

[29] Sung C. J., Tam L. F., Wang J. Spaces of Harmonic Functions // J. London Math. Soc. 2000. V. 61. № 3. P. 789–806.

[30] Grigor'yan A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 135–249.

[31] Losev A. G., Filatov V. V. Dimensions of solution spaces of the Schrodinger equation with finite Dirichlet integral on non-compact Riemannian manifolds // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. P. 1363–1370.

[32] Григорьян А. А., Лосев А. Г. О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // Матем. физика и компьют. моделирование. 2017. Т. 20. № 3. С. 34–42.

[33] Лосев А. Г., Филатов В. В. О некоторых емкостных характеристиках некомпактных римановых многообразий // Изв. вузов. Матем. 2021. № 3. С. 67–75.

[34] Лосев А. Г. Гармонические потенциалы на некомпактных римановых многообразиях // Матем. физика и компьют. моделирование. 2024. Т. 27. № 3. С. 6–14.

Авторами[3,16,35,36,37,38] исследовалось поведение решений эллиптических уравнений на сферически симметричных многообразиях, которые обычно называют модельными многообразиями. Были получены условия параболичности таких многообразий, найдены условия существования решений некоторых краевых задач.

Стоит также отметить, что в последнее время увеличивается количество работ, посвященных изучению асимптотического поведения решений квазилинейных уравнений[39,40,41,42,43,44].

Большая часть из упомянутых ранее работ посвящена краевым задачам для оператора Лапласа, обобщением которого является p-лапласиан. Уравнениями, содержащими p-лапласиан, записывается немалое количество задач в физике и механике. В частности, математические модели, в которых появляется p-лапласиан, возникают при изучении механики жидкостей[45], процессов реакции-диффузии[46], задач теории упругости[47], а также в климатологии[48], и гляциологии[49].

Исследованию разрешимости краевых задач для p-лапласиана посвящено множество работ. Среди первых результатов, касающихся существования и регулярности решений в ограниченных областях, можно отметить работы

[35] Лосев А. Г. О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журнал. 1998. Т. 39. № 1. С. 87–93.

[36] Murata M. Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds // Potential Theory. Walter de Gruyter. Berlin. 1992. P. 251–259.

[37] Davies E. B. L^1 properties of second order elliptic operators // Bull. London Math. Soc. 1985. V. 17. № 5. P. 417-436.

[38] Li P., Yau S. T. On the parabolic kernel of the Schrodinger operator // Acta Math. 1986. V. 156. P. 153—201.

[39] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1986. Т. 135. № 3. С. 346–360.

[40] Коньков А. А. Поведение решений квазилинейных эллиптических неравенств // СМФН. 2004. Т. 7. С. 3–158.

[41] Мазепа Е. А. Краевые задачи и лиувиллевы теоремы для полулинейных эллиптических уравнений на римановых многообразиях // Изв. вузов. Матем. 2005. № 3. С. 59–66.

[42] Мазепа Е. А. О существовании целых решений одного полулинейного эллиптического уравнения на некомпактных римановых многообразиях // Матем. заметки. 2007. Т. 81. № 1. С. 153–156.

[43] Мазепа Е. А. Лиувиллево свойство и краевые задачи для полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журнал. 2012. Т. 53. № 1. С. 165–179.

[44] Мазепа Е. А. О разрешимости краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 1026–1034.

[45] Bognar G. Numerical and analytic investigation of some nonlinear problems in fluid mechanics // Comput. Simul. Mod. Sci. 2008. V. 2. P. 172–179.

[46] Aris R. The Mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts. Oxford: Clarendon Press, 1975.

[47] Otani M. A remark on certain nonlinear elliptic equations // Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. 1984. V. 19. P. 23—28.

[48] Diaz J. I., Hernandez J., Tello L. On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in climatology // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 216. № 2. P. 593–613.

[49] Glowinski R., Rappaz J. Approximation of a nonlinear elliptic problem arising in a non-Newtonian fluid model in glaciology // M2AN Math. Model. Numer. Anal. 2003. V. 37. № 1. P. 175–186.

М. И. Вишика[50], О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой[51], J. Serrin[52]. В монографии О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой[53] изложена достаточно полная теория линейных и квазилинейных эллиптических уравнений, в том числе и для уравнений с p-лапласианом. Позднее теорию существования решений эллиптических уравнений для p-лапласиана усовершенствовал Ж.-Л. Лионс[54]. Также вопросу регулярности решений краевых задач для уравнений с p-лапласианом посвящены работы C. L. Evans[55], J. L. Lewis[56,57], K. Ulenbeck[58].

В работах M. Franca[59] и B. Franchi, E. Lanconelli, J. Serrin[60] исследованы вопросы существования и единственности радиально-симметричных решений для p-лапласиана, а также изучено качественное поведение ограниченных радиально-симметричных решений, убывающих на бесконечности.

Вопросы существования и единственности решения задач Дирихле и Неймана для p-лапласиана в областях в $\mathbb{R}^n$, представляющих собой дополнение некоторого компакта, изучались в работе G. Auchmuty, Q. Han[61].

В последнее время увеличивается число работ, посвященных исследованию разрешимости краевых задач для уравнений, содержащих p-лапласиан, в случае областей, имеющих особенности на границе. Так, в работе В. Г. Мазья и С. В. Поборчий[62] рассматривали ограниченные области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с вершиной пика на границе. Авторы получили необходимые и достаточные условия существования решения задачи Неймана

$$-\Delta_p u + a|u|^{p-2}u = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad |\nabla u|^{p-2}\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = h,$$

где $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ — оператор p-Лапласа, $p > 1$, ν — вектор внешней

[50] Вишик М. И. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму // Тр. ММО. 1963. Т. 12. С. 125–184.

[51] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи со многими независимыми переменными // УМН. 1961. Т. 16. № 1. С. 19–90.

[52] Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations // Acta Math. 1964. V. 111. P. 247—302.

[53] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

[54] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Пер. с фр. М.: Мир, 1972.

[55] Evans C. L. A new proof of local $C^{1,\alpha}$ regularity for solutions of certain degenerate elliptic P.D.E. // J. Differ. Equ. 1982. V. 45. P. 356–373.

[56] Lewis J. L. Smoothness of certain degenerate elliptic equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 80. P. 201–224.

[57] Lewis J. L. Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations // Indiana Univ. Math. J. 1983. V. 32. № 6. P. 849–858.

[58] Ulenbeck K. Regularity for a class of nonlinear elliptic systems // Acta Math. 1977. V. 138. P. 219—240.

[59] Franca M. Radial ground states and singular ground states for a spatial-dependent p-Laplace equation // J. Differ. Equ. 2010. V. 218. P. 2629–2656.

[60] Franchi B., Lanconelli E., Serrin J. Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in $\mathbb{R}^n$ // Adv. Math. 1996. V. 118. № 2. P. 177–243.

[61] Auchmuty G., Han Q. p-Laplacian boundary value problems on exterior regions // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 417. № 1. P. 260–271.

[62] Мазья В. Г., Поборчий С. В. О разрешимости задачи Неймана в области с пиком // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 5. С. 109–154.

нормали к $\partial\Omega$, $a \in L_\infty(\Omega)$, $a(x) \geqslant \mathrm{const} > 0$ почти всюду в Ω, h — однородный и аддитивный функционал на множестве $W_p^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, обращающийся в нуль на $C_0^\infty(\Omega)$. Также в случае ограниченных областей с нерегулярной границей критерий разрешимости задачи Неймана для оператора p-Лапласа получен в работе[63], где в качестве краевых условий и правых частей уравнения рассматривались заряды (разности конечных мер).

В работе С. М. Бакиева и А. А. Конькова[64] рассматривалась задача Дирихле для уравнения p-Лапласа на полном римановом многообразии с краем. Был получен критерий ее разрешимости в терминах емкости, ассоциированной с функцией.

Некоторые определения и обозначения

Договоримся о следующих обозначениях:

M — связное n-мерное ориентированное полное риманово многообразие с краем (возможно, пустым);

g_{ij} — метрический тензор, согласованный с римановой связностью, g^{ij} — тензор, дуальный к метрическому, т.е. $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$;

$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$, $r > 0$.

Напомним следующие определения. Пусть N — гладкое m-мерное многообразие. Отображение $\Phi : M \to N$ называется гладким отображением класса C^s, если для любых локальных систем координат $(x^1, ..., x^n)$ в окрестности любой точки $P \in M$ и $(y^1, ..., y^m)$ в окрестности точки $Q = \Phi(P) \in N$ представление функции Φ в виде вектор-функции $(y^1, ..., y^m) = (y^1(x^1, ..., x^n), ..., y^m(x^1, ..., x^n))$ является вектор-функцией класса гладкости C^s (см.[65]). Другими словами, для любых карт (U, φ) на M и (V, ψ) на N отображение

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{2}$$

является гладким (класса C^s) на своей области определения, то есть, на множестве $\varphi(\Phi^{-1}(\Phi(U) \cap V))$. Аналогично, отображение $\Phi : M \to N$ называется липшицевым, если для любых карт (U, φ) на M и (V, ψ) на N отображение (2) является липшицевым на множестве $\varphi(\Phi^{-1}(\Phi(U) \cap V))$ (см. рисунок 1).

[63] Maz'ya V. Solvability criteria for the Neumann p-Laplacian with irregular data // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 3. С. 129–139.

[64] Бакиев С. М., Коньков А. А. О существовании решений задачи Дирихле для p-лапласиана на римановых многообразиях // Матем. заметки. 2023. Т. 114. № 5. С. 659–668.

[65] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

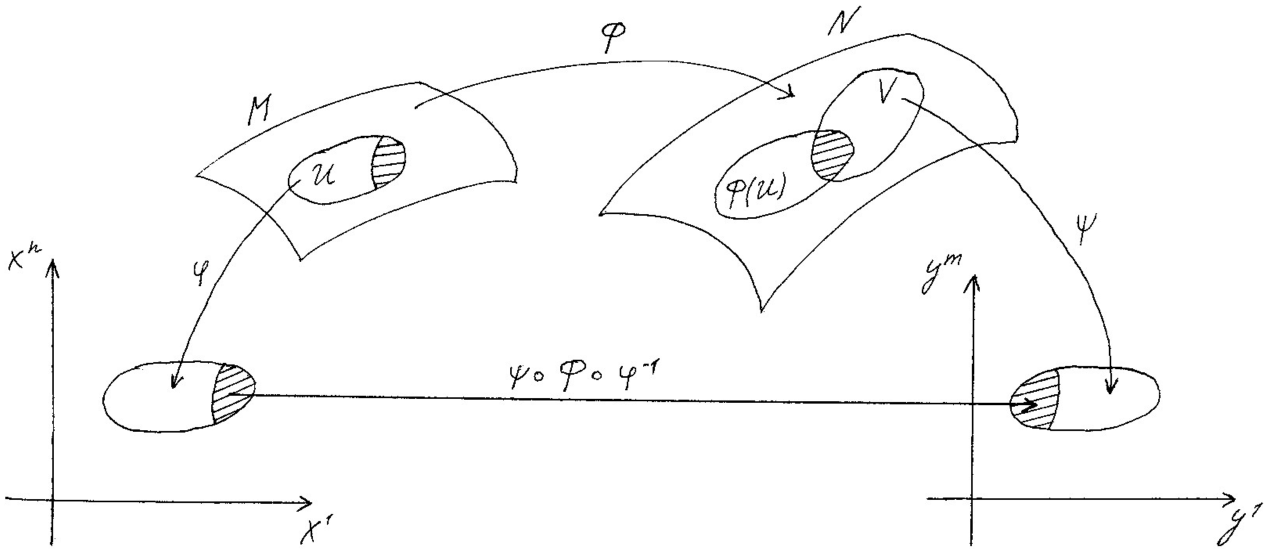

Рисунок 1

Будем говорить, что $\omega \subset M$ — липшицева область (область с липшицевой границей), если у любой точки $x \in \partial\omega$ существует окрестность $U \subset M$ и взаимно-однозначное липшицево отображение

$$\Phi : U \cap \overline{\omega} \to V \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant 0\},$$

где V — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, и при этом $\Phi(U \cap \partial\omega) = V \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$.

Задача, рассматриваемая в диссертации

Пусть $\Omega \subset M \setminus \partial M$ — липшицева область. Будем рассматривать задачу

$$\Delta_p u = f \quad \text{в } \Omega, \quad |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = h, \tag{3}$$

где

$$\Delta_p u = \nabla_i (g^{ij} |\nabla u|^{p-2} \nabla_j u), \quad p > 1,$$

— оператор p-Лапласа, ν — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, а f и h — обобщенные функции из $\mathcal{D}'(M)$, причем $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}$, $\operatorname{supp} h \subset \partial\Omega$. При этом $|\nabla u| = (g^{ij}\nabla_i u \nabla_j u)^{1/2}$.

Следуя[66], под $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\omega)$, где ω — открытое подмножество M, будем подразумевать пространство измеримых функций, принадлежащих $W^1_p(\omega' \cap \omega)$ для любого открытого множества $\omega' \subset M$ с компактным замыканием. Пространство $L_{p,\mathrm{loc}}(\omega)$ определяется аналогично.

[66] Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.

Решением задачи (3) называется функция $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такая, что

$$-\int\limits_{\Omega} g^{ij}|\nabla u|^{p-2}\nabla_j u \nabla_i \varphi \, dV = (f-h, \varphi)$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, где dV — элемент объема многообразия M.

В качестве условия на бесконечности потребуем, чтобы решения (3) удовлетворяли соотношению

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dV < \infty. \tag{4}$$

Обозначим для краткости

$$F = f - h. \tag{5}$$

Цель работы — получить необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (3), (4) в общем случае, применить полученные результаты к случаю многообразий с модельными концами и областей вращения в $\mathbb{R}^n$.

Научная новизна результатов

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные результаты состоят в следующем:

1. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае функционала F общего вида. Отдельно рассмотрен случай функционала F с компактным носителем.

2. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда M является многообразием с модельными концами и $\Omega = M \setminus \partial M$.

3. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, а Ω — область, образованная вращением графика липшицевой функции.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет, в первую очередь, теоретический характер и представляет интерес для специалистов в области общей теории нелинейных эллиптических уравнений. При этом в диссертации рассмотрены примеры, демонстрирующие применение основных результатов к конкретным краевым задачам. Также материалы диссертации могут послужить основой для специального курса в области нелинейных эллиптических уравнений.

Методы исследований

В диссертации использованы методы нелинейной емкости, функционального анализа и дифференциальной геометрии.

Соответствие паспорту научной специальности

В диссертации изучаются необходимые и достаточные условия существования решений второй краевой задачи для p-лапласиана в областях на римановых многообразиях, поэтому тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика по направлениям исследований: общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

1. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае функционала F с компактным носителем.

2. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае функционала F общего вида.

3. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда M является многообразием с модельными концами и $\Omega = M \setminus \partial M$.

4. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, а Ω — область, образованная вращением графика липшицевой функции.

Все выносимые на защиту положения — новые и получены автором лично.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2023”, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10–21 апреля 2023 г.

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 28 июня–4 июля 2024 г.

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2025”, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11–25 апреля 2025 г.

- Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная И. Г. Петровскому, Москва, Россия, 19–24 мая 2025 г.

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах:

- Межвузовский научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений (МГУ имени М. В. Ломоносова, РЭУ имени Г. В. Плеханова, МГТУ имени Н. Э. Баумана) под руководством проф., д.ф.-м.н. И. В. Асташовой, проф., д.ф.-м.н. А. В. Филиновского (14 декабря 2024 г., 20 декабря 2025 г.).
- Научный семинар по уравнениям математической физики под руководством проф., д.ф.-м.н. Г. А. Чечкина, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (ноябрь 2025 г.).

Публикации автора по теме диссертации

По теме исследования опубликовано 4 работы, все — в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности и отрасли наук.

В работе [1] автору принадлежат теоремы 1–4, леммы 4–6 (0.625 п.л.), А.А. Конькову принадлежат методы исследования и постановка задачи.

Также автор имеет 4 публикации в материалах международных конференций.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего **85** наименований, включая работы автора. Объём диссертации составляет **123** страницы.

Основное содержание работы

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, посвящённых изучению эллиптических уравнений на римановых многообразиях, а также результатов, касающихся существования и свойств решений краевых задач для уравнений, содержащих p-лапласиан. Обзор подкрепляется ссылками на научные работы, приведённые в списке литературы. Объясняется актуальность темы исследований и научная новизна поставленной задачи, а также значимость полученных результатов. Также во введении приведены основные результаты диссертации.

В **первой главе** получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в областях на римановых многообразиях, которые являются естественным обобщением областей в $\mathbb{R}^n$.

В **первом параграфе первой главы** получен общий критерий разрешимости задачи (3), (4).

Через $L_p^1(\omega)$, где ω — открытое подмножество M, будем обозначать пространство функций $u \in W_{p,\mathrm{loc}}^1(\omega)$, для которых $\nabla u \in L_p(\omega)$. Полунорма в $L_p^1(\omega)$

определяется равенством

$$\|u\|_{L^1_p(\omega)} = \left(\int\limits_{\omega} |\nabla u|^p \, dV \right)^{1/p}.$$

Для всех $l \in \mathcal{D}'(M)$ обозначим

$$N_\omega(l) = \sup_{\varphi} |(l, \varphi)|,$$

где sup берется по всем функциям $\varphi \in C^\infty(M)$ таким, что $\operatorname{supp} \varphi \Subset M$,

$$\operatorname{supp} \varphi \cap \overline{\Omega} \subset \omega \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{L^1_p(\Omega)} = 1.$$

Предложение 1.1. *Для разрешимости задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$N_M(F) < \infty,$$

где функционал F определен формулой (5).

Во **втором параграфе первой главы** вводится понятие p-гиперболических и p-параболических областей, изучаются некоторые их свойства.

Пусть $U \subset M \setminus \partial M$ — произвольное открытое множество.

Определение 1.1. (p, U)*-Емкостью компакта $K \subset \overline{U} \cap \omega$ относительно открытого множества $\omega \subset M$ называется величина*

$$\operatorname{cap}_{p,U}(K, \omega) = \inf_{\varphi} \int\limits_{\omega \cap U} |\nabla \varphi|^p \, dV,$$

где inf *берется по всем функциям $\varphi \in C^\infty(\omega)$ таким, что* $\operatorname{supp} \varphi \Subset \omega$ *и* $\varphi \equiv 1$ *в окрестности K. В случае $\omega = M$ пишем $\operatorname{cap}_{p,U}(K)$ вместо $\operatorname{cap}_{p,U}(K, M)$. Для произвольного замкнутого множества $H \subset \overline{U}$ полагаем*

$$\operatorname{cap}_{p,U}(H) = \sup_{K} \operatorname{cap}_{p,U}(K),$$

где sup *берется по всем компактам $K \subset H$. (p, U)-Емкость пустого множества считается равной нулю.*

Определение 1.2. *Область Ω называется p-гиперболической, если* $\operatorname{cap}_{p,\Omega}(\overline{\Omega}) > 0$. *В противном случае область Ω называется p-параболической.*

Определение 1.3. *Многообразие M называется p-гиперболическим, если* $\operatorname{cap}_{p,M\setminus\partial M}(M) > 0$. *В противном случае многообразие M называется p-параболическим.*

Лемма 1.1. *Пусть* $\operatorname{cap}_{p,\Omega}(K) = 0$ *для некоторого компакта $K \subset \overline{\Omega}$ нену-*

левой меры. Тогда Ω *— p-параболическая область.*

Лемма 1.2. *Пусть* Ω *— p-гиперболическая область, а* $K \subset \overline{\Omega}$ *— произвольный компакт. Тогда*

$$\|\varphi\|_{L_p(K)} \leqslant C\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}$$

для всех функций $\varphi \in C^\infty(M)$ *таких, что* $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$*, где постоянная* $C > 0$ *не зависит от* φ.

В **третьем параграфе первой главы** получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае функционала F с компактным носителем.

Теорема 1.1. *Пусть* Ω *— p-гиперболическая область и функционал* F*, определенный формулой (5), имеет компактный носитель. Тогда для существования решения (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы* $N_\omega(F) < \infty$ *для некоторого открытого множества* $\omega \subset M$ *такого, что* $\operatorname{supp} F \subset \omega$.

Теорема 1.2. *Пусть* Ω *— p-параболическая область и функционал* F*, определенный формулой (5), имеет компактный носитель. Тогда для существования решения (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы* $N_\omega(F) < \infty$ *для некоторого открытого множества* $\omega \subset M$ *такого, что* $\operatorname{supp} F \subset \omega$*, и при этом*

$$\lim_{s\to\infty}(F, \eta_s) = 0 \tag{6}$$

для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ *таких, что* $\operatorname{supp}\eta_s \Subset M$,

$$\lim_{s\to\infty}\|\eta_s\|_{L_p^1(\Omega)} = 0 \quad \text{и} \quad \eta_s|_K = 1, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где $K \subset \overline{\Omega}$ *— некоторый компакт положительной меры.*

Следствие 1.1. *Пусть* Ω *— p-гиперболическая область с компактной границей и* h *— функционал из* $\mathcal{D}'(M)$ *такой, что* $\operatorname{supp} h \subset \partial\Omega$*. Тогда для существования решения задачи*

$$\Delta_p u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = h, \tag{8}$$

удовлетворяющего условию (4), необходимо и достаточно, чтобы $N_\omega(h) < \infty$ *для некоторого открытого множества* $\omega \subset M$ *такого, что* $\partial\Omega \subset \omega$.

Следствие 1.2. *Пусть* Ω *— p-параболическая область с компактной границей и* h *— функционал из* $\mathcal{D}'(M)$ *такой, что* $\operatorname{supp} h \subset \partial\Omega$*. Тогда для существования решения задачи (8), (4) необходимо и достаточно, чтобы* $N_\omega(h) < \infty$ *для некоторого открытого множества* $\omega \subset M$ *такого, что* $\partial\Omega \subset \omega$*, и при этом*

$$(h, 1) = 0. \tag{9}$$

В **четвертом параграфе первой главы** получены критерии существования решения задачи (3), (4) в случае функционала F общего вида.

Будем предполагать, что многообразие M допускает локально конечное покрытие

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \tag{10}$$

кратности $k < \infty$, где $\Omega_i \subset M$ — области с компактным замыканием такие, что $\Omega \cap \Omega_i \cap \Omega_{i+1} \neq \varnothing$ и $\Omega \cap \Omega_i$ — липшицева область для каждого $i \in \mathbb{N}$. Пусть при этом $\gamma : M \to (0, \infty)$ — измеримая функция, отделенная от нуля и бесконечности на каждом компактном подмножестве многообразия M.

Теорема 1.3. *Пусть Ω — p-гиперболическая область, а $\psi_i \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}\psi_i \Subset \Omega_i$, — разбиение единицы в окрестности $\overline{\Omega}$, подчиненное покрытию (10), такое, что*

$$|\nabla\psi_i(x)|^p \leqslant \gamma(x), \quad x \in \Omega_i \cap \Omega, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Пусть также для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, справедливо неравенство Харди

$$\int\limits_{\Omega} \gamma|\varphi|^p \, dV \leqslant C \int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^p \, dV, \tag{12}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ. Тогда для существования решения (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(F) < \infty, \tag{13}$$

где F определено с помощью (5).

Теорема 1.4. *Пусть Ω — p-параболическая область, а $\psi_i \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}\psi_i \Subset \Omega_i$, — разбиение единицы в окрестности $\overline{\Omega}$, подчиненное покрытию (10), удовлетворяющее условию (11). Пусть также для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$, равной нулю на множестве $\Omega_1 \cap \Omega$, справедливо неравенство Харди (12), где постоянная $C > 0$ не зависит от φ. Тогда для существования решения (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы имело место (13) и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp}\eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, были выполнены условия (6) и (7), где $K \subset \overline{\Omega}$ — некоторый компакт положительной меры.*

Пусть $\omega_0 \subset M$ — липщицева область с компактным замыканием.

Определение 1.4. *Говорим, что функция $\mathcal{E}$ является решением задачи*

$$\Delta_p \mathcal{E} = 0 \quad \text{на } M \setminus \overline{\omega}_0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial M \setminus \overline{\omega}_0, \tag{15}$$

где ν — вектор внешней нормали к $\partial M \setminus \overline{\omega}_0$, если $\mathcal{E} \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M \setminus \overline{\omega}_0)$ и при этом

$$\int\limits_{M\setminus\overline{\omega}_0} g^{ij}|\nabla\mathcal{E}|^{p-2}\nabla_i\mathcal{E}\nabla_j\psi\, dV = 0 \tag{16}$$

для любой функции $\psi \in C^\infty(M \setminus \overline{\omega}_0)$ такой, что $\operatorname{supp}\psi \Subset M \setminus \overline{\omega}_0$.

Лемма 1.7. *Пусть непрерывная функция $\mathcal{E}$ является решением задачи (14), (15) и при этом $0 < \mathcal{E} < 1$ на $M \setminus \overline{\omega}_0$, $\mathcal{E}(x) \to 1$ при $\operatorname{dist}(x, \omega_0) \to 0$. Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \Subset M$, справедливо неравенство (12), где $\Omega = M \setminus \partial M$,*

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0 \dfrac{|\nabla\mathcal{E}|^p}{\mathcal{E}^p}, & \text{на } M \setminus \overline{\omega}_0, \\ \gamma_0, & \text{на } \overline{\omega}_0, \end{cases} \tag{17}$$

$\gamma_0 > 0$ — некоторое вещественное число, постоянная $C > 0$ не зависит от φ.

Лемма 1.8. *Пусть непрерывная функция $\mathcal{E}$ является решением задачи (14), (15) и при этом $\mathcal{E} > 0$ на $M \setminus \overline{\omega}_0$, $\mathcal{E}(x) \to 0$ при $\operatorname{dist}(x, \omega_0) \to 0$. Пусть также для любого вещественного числа $A > 0$ множество $\omega_A = \{x \in M \setminus \overline{\omega}_0 : \mathcal{E}(x) < A\}$ предкомпактно. Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$, равной нулю в окрестности множества $\overline{\omega}_0$, справедливо неравенство (12), где $\Omega = M \setminus \partial M$, функция γ задается равенством (17), а постоянная $C > 0$ не зависит от φ.*

Теорема 1.5. *Пусть M — p-гиперболическое многообразие, $\omega_0 \subset M$ — липщицева область с компактным замыканием, $\mathcal{E}$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию леммы 1.7, и при этом для любых вещественных чисел A и B таких, что $0 < A < B < 1$, множество $\{x \in M \setminus \omega_0 : A < \mathcal{E}(x) < B\}$ является липшицевой областью с компактным замыканием. Тогда для разрешимости задачи (3), (4), где $\Omega = M \setminus \partial M$, необходимо и достаточно, чтобы имело место (13), где функционал F задан равенством (5), $\Omega_1 = \omega_0 \cup \{x \in M \setminus \omega_0 : \mathcal{E}(x) > 1/4\}$ и $\Omega_i = \{x \in M \setminus \omega_0 : 2^{-1-i} < \mathcal{E}(x) < 2^{1-i}\}$, $i \geqslant 2$.*

Теорема 1.6. *Пусть M — p-параболическое многообразие, $\omega_0 \subset M$ — липщицева область с компактным замыканием, $\mathcal{E}$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию леммы 1.8, и при этом для любого вещественного числа $A > 0$ множество $\omega_A = \{x \in M \setminus \overline{\omega}_0 : \mathcal{E}(x) < A\}$ является липшицевой областью. Тогда для разрешимости задачи (3), (4), где $\Omega = M \setminus \partial M$, необходимо и достаточно, чтобы имело место (13), где функционал F задан равенством (5), $\Omega_1 = \omega_0 \cup \{x \in M \setminus \omega_0 : \mathcal{E}(x) < 4\}$ и $\Omega_i = \{x \in M \setminus \omega_0 : 2^{i-1} < \mathcal{E}(x) < 2^{i+1}\}$, $i \geqslant 2$, и при этом для некоторой* *последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что* $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, *были выполнены условия* (6) *и* (7), *где K — некоторый компакт положительной меры.*

Во **второй главе** получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда M является многообразием с модельными концами и $\Omega = M \setminus \partial M$.

В **первом параграфе второй главы** введено понятие модельного конца многообразия, доказан критерий p-гиперболичности и p-параболичности модельного конца.

Определение 2.1. *Множество $E \subset M$ называется модельным концом многообразия M, если оно представимо в виде $E = D \times [r_0, \infty)$, где D — компактное риманово многообразие с краем (возможно пустым), $r_0 > 0$ — некоторое вещественное число, причем на E задана метрика*

$$ds^2 = a^2(r)\, dr^2 + b^2(r) \tilde{g}_{ij}(\theta)\, d\theta^i d\theta^j,$$

где a и b — положительные, бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty)$, $\tilde{g}_{ij}$ — метрический тензор на D, θ^i — локальные координаты на D.

Определение 2.2. *Будем говорить, что модельный конец E многообразия M имеет p-гиперболический (p-параболический) тип, если E является p-гиперболическим (p-параболическим) многообразием.*

Предложение 2.1. *Пусть E — модельный конец многообразия M. Тогда E имеет p-гиперболический тип в том и только том случае, когда*

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{a(r)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(r)}\, dr < \infty,$$

и p-параболический тип в том и только том случае, когда

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{a(r)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(r)}\, dr = \infty.$$

Во **втором параграфе второй главы** получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) на многообразиях с модельными концами. Отдельно рассмотрен случай многообразия, имеющего один модельный конец.

Предположим, что найдется липшицева область $\omega \subset M$ с компактным замыканием, такая, что

$$M \setminus \omega = \bigcup_{\tau=1}^{q} E_\tau, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

где $E_\tau = D_\tau \times [r_{0,\tau}, \infty)$ — модельные концы многообразия M с метрикой

$ds_\tau^2 = a_\tau^2(r)\, dr^2 + b_\tau^2(r)\tilde g_{ij,\tau}(\theta)\, d\theta^i d\theta^j$, $\tau = 1, ..., q$, D_τ — компактные римановы многообразия с краем (возможно пустым), $r_{0,\tau} > 0$ — некоторые вещественные числа, a_τ и b_τ — положительные, бесконечно гладкие функции на $[r_{0,\tau}, \infty)$, $\tilde g_{ij,\tau}$ — метрический тензор на D_τ, θ^i — локальные координаты на D_τ.

Положим

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \omega \cup D_1 \times [r_{0,1}, r_{2,1}) \cup \ldots \cup D_q \times [r_{0,q}, r_{2,q}),\\ &\Omega_{i,\tau} = D_\tau \times (r_{i-1,\tau}, r_{i+1,\tau}), \quad i \geqslant 2,\ \tau = 1, \ldots, q, \end{aligned} \tag{19}$$

где последовательность вещественных чисел $r_{i,\tau}$, $i \in \mathbb{N}$, для каждого $\tau = 1, \ldots, q$ определяется из соотношений

$$\int\limits_{r_{i,\tau}}^{\infty} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = \frac{1}{2} \int\limits_{r_{i-1,\tau}}^{\infty} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \in \mathbb{N},$$

в случае, если E_τ — модельный конец p-гиперболического типа, и

$$\int\limits_{r_{0,\tau}}^{r_{1,\tau}} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2, \quad \int\limits_{r_{0,\tau}}^{r_{i+1,\tau}} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2\int\limits_{r_{0,\tau}}^{r_{i,\tau}} \frac{a_\tau(s)}{b_\tau^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \in \mathbb{N},$$

в случае, если E_τ — модельный конец p-параболического типа.

Теорема 2.1. *Пусть p-гиперболическое многообразие M удовлетворяет условию* (18). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$N_{\Omega_1}(F) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{\tau=1}^{q} \sum_{i=2}^{\infty} N_{\Omega_{i,\tau}}^{p/(p-1)}(F) < \infty, \tag{20}$$

где функционал F задан равенством (5), *а области Ω_1, $\Omega_{i,\tau}$, $i \geqslant 2$, $\tau = 1, \ldots, q$, определены соотношениями* (19).

Теорема 2.2. *Пусть p-параболическое многообразие M удовлетворяет условию* (18). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (20), *где области Ω_1, $\Omega_{i,\tau}$, $i \geqslant 2$, $\tau = 1, \ldots, q$, определены соотношениями* (19), *и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, были выполнены условия* (6) *и* (7), *где функционал F задаётся равенством* (5), *а K — некоторый компакт положительной меры.*

Предположим, что многообразие M представимо в виде

$$M = \omega \cup E, \tag{21}$$

где $E = D \times [r_0, \infty)$ — модельный конец многообразия M с метрикой

$$ds^2 = a^2(r)\, dr^2 + b^2(r)\tilde{g}_{ij}(\theta)\, d\theta^i d\theta^j,$$

где a и b — положительные, бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty)$, $\tilde{g}_{ij}$ — метрический тензор на D, θ^i — локальные координаты на D. Далее будем обозначать

$$M_{r_0} = \omega \quad \text{и} \quad M_r = \omega \cup D \times [r_0, r), \quad r > r_0.$$

Теорема 2.3. *Пусть M — p-гиперболическое многообразие с модельным концом* (21). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (13), *где функционал F задан равенством* (5), $\Omega_1 = M_{r_2}$, $\Omega_i = M_{r_{i+1}} \setminus \overline{M}_{r_{i-1}}$, $i \geqslant 2$, *а вещественные числа $r_i > r_0$ определяются из соотношений*

$$\int\limits_{r_i}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = \frac{1}{2} \int\limits_{r_{i-1}}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.4. *Пусть M — p-параболическое многообразие с модельным концом* (21). *Тогда для существования решения задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно, чтобы имело место* (13), *где* $\Omega_1 = M_{r_2}$, $\Omega_i = M_{r_{i+1}} \setminus \overline{M}_{r_{i-1}}$, $i \geqslant 2$, *а вещественные числа $r_i > r_0$ определяются из соотношений*

$$\int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2, \qquad \int\limits_{r_0}^{r_i} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds = 2 \int\limits_{r_0}^{r_{i-1}} \frac{a(s)}{b^{\frac{n-1}{p-1}}(s)}\, ds, \quad i \geqslant 2,$$

и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_s \in C^\infty(M)$ таких, что $\operatorname{supp} \eta_s \Subset M$, $s \in \mathbb{N}$, *были выполнены условия* (6) *и* (7), *где функционал F задаётся равенством* (5), *а K — некоторый компакт положительной меры.*

В **третьей главе** получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3), (4) в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, а Ω — область, образованная вращением графика липшицевой функции.

Пусть x_1, ..., x_n — декартова система координат в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим сферические координаты r, θ, θ^1, ..., θ^{n-2}, сопоставляя каждой точке $P \in \mathbb{R}^n$ длину $r(P)$ её радиус-вектора, угол $\theta(P) \in [0, \pi]$ между радиус-вектором и положительным направлением оси Ox_n и $\tilde{\theta}(P) = (\theta^1(P), \dots, \theta^{n-2}(P))$ — локальные координаты на единичной $(n-2)$-мерной сфере $\mathbb{S}^{n-2}$.

Пусть $\Theta : [r_0, +\infty) \to (0, \pi)$, $r_0 > 0$, — липшицева функция такая, что

$$A_1 \Theta(r_1) \leqslant \Theta(r_2) \leqslant A_2 \Theta(r_1) \quad \text{при } r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant 2r_1,$$

где $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$ — некоторые постоянные. Предположим, что

$$\Omega = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M},$$

где $\mathcal{M} = \{P \in \mathbb{R}^n : r(P) \in [r_0, +\infty),\, \theta(P) \in [0, \Theta(r)),\, \tilde{\theta} \in \mathbb{S}^{n-2}\}$, а область $\mathcal{M}_0$ содержится в шаре B_{r_0}. Далее будем обозначать $R(r) = r\Theta(r)$, $r \geqslant r_0$.

Положим $r_i = 2^i r_0$, $i \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_1 = B_{r_2}, \quad \Omega_i = B_{r_{i+1}} \setminus \overline{B}_{r_{i-1}},\ i \geqslant 2. \tag{22}$$

Теорема 3.1. *Пусть Ω — p-гиперболическая область и при этом*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{r^{p-1}}{R^{n-1}(r)} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{R^{n-1}(t)}{t^p}\, dt < \infty.$$

Тогда для разрешимости задачи (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы имело место (13), где функционал F задан равенством (5), а области Ω_i определены с помощью (22).

Теорема 3.2. *Пусть Ω — p-параболическая область и при этом выполнены условия*

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{R^{n-1}(t)}{t^p}\, dt < \infty, \quad \varlimsup_{r\to\infty} \frac{r^{p-1}}{R^{n-1}(r)} < \infty.$$

Тогда для разрешимости задачи (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы имело место (13), где области Ω_i определены с помощью (22), и при этом для некоторой последовательности функций $\eta_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ были выполнены условия (6) и (7), где функционал F задаётся равенством (5), а $K \subset \overline{\Omega}$ — некоторый компакт положительной меры.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Конькову Андрею Александровичу за постановку задачи, ее обсуждение, полезные советы и постоянную поддержку. Автор выражает благодарность сотрудникам кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за внимание к работе и ценные замечания.

Заключение

В настоящей диссертации получены необходимые и достаточные условия разрешимости второй краевой задачи для p-лапласиана в областях на римановых многообразиях. Подробно рассмотрены случаи p-гиперболических и p-параболических областей. Получены следствия для многообразий с модельными концами, а также для областей вращения. Результаты работы могут быть интересны специалистам, работающим в исследовании краевых задач на гладких многообразиях и в неограниченных областях.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с обобщением полученных результатов на внешние формы и тензоры произвольного ранга.

Основные публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.8 по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

[1] Бровкин В. В., Коньков А. А. О существовании решений второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых многообразиях // Математические заметки. 2021. Т. 109. № 2. С. 180–195.
EDN: OOOWMY. Импакт-фактор 0,684 (РИНЦ). 1,25 п.л.

Brovkin V. V., Kon'kov A. A. Existence of solutions to the second boundary value problem for the p-Laplacian on riemannian manifolds // Mathematical Notes. 2021. V. 109. № 2. P. 171–183.
EDN: XYTGOZ. Импакт-фактор 0,6 (JIF). 1,32 п.л.

В работе [1] автору принадлежат теоремы 1–4, леммы 4–6 (0.625 п.л.), А.А. Конькову принадлежат методы исследования и постановка задачи.

[2] Бровкин В. В. О существовании решений задачи Неймана для p-лапласиана на гиперболических многообразиях с модельным концом // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 139–141.
EDN: CLXXEG. Импакт-фактор 0,73 (РИНЦ). 0,25 п.л.

Brovkin V. V. On the existence of solutions of the Neumann problem for the p-Laplacian on hyperbolic manifolds with a model end // Differential Equations. 2022. V. 58. № 1. P. 139–141.
EDN: SWCUQX. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 0,25 п.л.

[3] Бровкин В. В. О существовании решений задачи Неймана для p-лапласиана на параболических многообразиях с модельным концом // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 1. С. 30–34.
EDN: OBUWCJ. Импакт-фактор 0,73 (РИНЦ). 0,406 п.л.

Brovkin V. V. On the existence of solutions of the Neumann problem for the p-Laplacian on parabolic manifolds with a model end // Differential Equations. 2023. V. 59. № 1. P. 29–33.
EDN: RBFEJW. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 0,406 п.л.

[4] Бровкин В. В. О разрешимости задачи Неймана для p-лапласиана на многообразиях с модельным концом // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2024. № 3. С. 3–10.
EDN: TKQNOD. Импакт-фактор 0,323 (РИНЦ). 0,814 п.л.

Brovkin V. V. On the solvability of the Neumann Boundary value problem for the p-Laplacian on manifolds with a model end // Moscow University Mathematics Bulletin. 2024. Vol. 79. № 3. P. 103–111.
EDN: OZAFKL. Импакт-фактор 0,2 (JIF). 0,83 п.л.