ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертационную работу
Гармановой Татьяны Алексеевны
«Константы вложения в пространствах Соболева»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук по специальности
1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа Т.А. Гармановой посвящена нахождению точных констант вложения в пространствах Соболева с условиями Дирихле, а также получению точных оценок промежуточных производных через норму старшей производной для функций из пространств Соболева. Данная проблематика имеет длинную историю, у истоков которой стояли такие математики как В.А. Стеклов, Г.Х. Харди, В.И. Левин и Э. Шмидт. В последние 15 лет этой тематикой активно занимались Г.А. Калябин, А.И. Назаров и др.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Во введении дан подробный обзор истории исследований данной задачи, обосновывается актуальность темы работы и новизна полученных результатов, сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе решаются две важные задачи: нахождение точных констант вложения пространств $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ и тесно связанная с ними задача об описании функций $A_{n,k,2}(a)$, являющихся наилучшими в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k,2}(a)\|f^{(n)}\|_{L_2[0,1]}, \quad f \in \mathring{W}_2^n[0,1],$$

где $a \in [0,1]$ и $k = 0,1,\ldots,n-1$. Сами константы вложения пространства $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ равны норме оператора вложения и определяются равенствами

$$\Lambda_{n,k,2,\infty} := \max_{a\in[0,1]} A_{n,k,2}(a).$$

До работы Т.А. Гармановой были известны результаты только для случаев $n \in \mathbb{N}$, $k = 0,1,2$. В работе Г.А. Калябина была высказана гипотеза о том, что при четных k середина отрезка является точкой глобального максимума, а при нечетных — точкой локального минимума.

Автором диссертации, на основе обнаруженных ей рекуррентных соотношений между $A^2_{n,k,2}(x)$ и первообразными многочленов Лежандра, описана структура функций $A^2_{n,k,2}$ в точках локальных максимумов и, таким образом, гипотеза Г.А. Калябина была полностью доказана. Было показано, что справедлив более сильный результат.

Теорема. *При фиксированных n и k, значения функций $A^2_{n,k,2}(x)$ в точках локальных максимумов, лежащих на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$, образуют неубывающую последовательность, а в точках локальных максимумов, лежащих на отрезке $[\frac{1}{2},1]$ — невозрастающую последовательность.*

Также, в первой главе получено явное описание функций $A^2_{n,k,2}$ в терминах гипергеометрических функций типа ${}_3F_2$.

Теорема. *При всех $n > k \geqslant 0$, функции $A^2_{n,k,2}(x)$ имеют вид*

$$A^2_{n,k,2}(x) = \frac{-t^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)((n-k-1)!)^2}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix}-k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k \\ n-k,\, 2n-2k\end{matrix}; -4t\right],$$

где $t = x^2 - x$.

Основным результатом первой главы является следующий результат.

Теорема. *Точные значения констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных $k \geqslant 0$ имеют вид*

$$\Lambda_{n,k,2,\infty} = A_{n,k,2}\,(1/2) = \frac{(k-1)!!}{2^{2n-3k/2-1}\,(n-k/2-1)!\,\sqrt{(2n-2k-1)}}.$$

При нечетных k получены двусторонние сходящиеся оценки для $\Lambda_{n,k,2,\infty}$.

Вторая глава диссертации Т.А. Гармановой посвящена теории вложений пространств $\mathring{W}^n_p[0,1]$ в пространства $\mathring{W}^k_\infty[0,1]$ при произвольных значениях параметра p. В этой главе получены новые результаты, центральным из которых является описание задачи теории аппроксимаций, которая эквивалентна задаче об описании функций $A_{n,k,p}$, являющихся наилучшими в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k,p}(a) \|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]}, \quad f \in \mathring{W}^n_p[0,1],$$

где $a \in [0,1]$ и $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Центральный результат второй главы можно сформулировать в следующем утверждении.

Теорема. *При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ выполнено равенство*

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|S_{n,k}(\,\cdot\,, a) - u\|_{L_{p'}[0,1]}\,,$$

где $S_{n,k}(x,a) := \frac{(a-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \cdot \chi_{[0,a]}(x)$ и $\chi_{[0,a]}$ — характеристическая функция отрезка $[0,a]$, $\mathcal{P}_{n-1}$ — пространство вещественных многочленов степени не выше $n-1$, $1/p + 1/p' = 1$.

На этом пути Т.А. Гармановой удается получить точное описание констант вложения $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$ и получить почти оптимальные оценки для $\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty}$

В третьей главе получены новые результаты о соотношениях между первообразными многочленов Лежандра $P^{(-j)}_m$, $0 \leqslant j \leqslant m$. Эти результаты обобщают классические утверждения Уиттекера и Ватсона и состоят в следующем.

Теорема. *Для любых $0 \leqslant j \leqslant m$ и $l = 0, 1, \ldots, j$, справедливы соотношения*

$$\int\limits_0^1 P^{(-j)}_m(x) P^{(-j)}_{m+2l}(x)dx = (-1)^l C^{j-l}_{2j} \frac{(m-j+l+1)_{2j}}{(2m-2j+2l+1)_{4j+1}},$$

где $(x)_n := x(x+1)\ldots(x+n-1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$ — символ Похгаммера.

В заключении перечислены основные результаты и приведены возможные направления дальнейших исследований. Диссертационная работа Т.А. Гармановой является законченным научным исследованием на актуальную тему и содержит новые результаты, имеющие существенное значение для теории вложений в пространствах Соболева, функционального анализа и теории функций. Научная достоверность результатов не вызывает сомнения. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации являются новыми и актуальными, они обоснованы в виде строгих математических доказательств. Результаты работы получены автором самостоятельно, полно и своевременно опубликованы в 7 научных статьях, 1 из которых опубликована без соавторов, в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных Web of Science, SCOPUS и RSCI. В работах, выполненных в соавторстве, вклад соискателя был определяющим. Работа неоднократно апробировалась на международных и всероссийских конференциях и научно-исследовательских семинарах.

Считаю, что диссертация Т.А. Гармановой «Константы вложения в пространствах Соболева», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.011.3.

Научный руководитель:
профессор кафедры теории функций и функционального анализа
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова,
(119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, д. 1,
МГУ имени М.В.Ломоносова, Главное здание,
механико-математический факультет,
кафедра теории функций и функционального анализа,
(тел. +7(495)9395540, email: iasheip@yandex.ru)
доктор физико-математических наук, доцент Шейпак И.А. Шейпак

15.01.2025г

Подпись профессора
кафедры теории функций и функционального анализа,
доктора физико-математических наук,
И.А.Шейпака удостоверяю,
Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН, профессор А.И. Шафаревич