МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Иванов-Погодаев Илья Анатольевич

Построение бесконечной конечно определенной нильполугруппы

Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2026

Диссертация подготовлена на кафедре дискретной математики Московского физико-технического института (национальный исследовательский университет).

Научные – консультанты	**Семенов Алексей Львович,** академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, **Белов Алексей Яковлевич,** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные – оппоненты	**Кожухов Игорь Борисович,** доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники» кафедра высшей математики №1, профессор **Пчелинцев Сергей Валентинович,** доктор физико-математических наук, профессор Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, факультет информационных технологий и анализа больших данных, кафедра математики, профессор **Шабат Георгий Борисович,** доктор физико-математических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет, отделение интеллектуальных систем в гуманитарной сфере, кафедра математики, логики и интеллектуальных систем в гуманитарной сфере, профессор

Защита диссертации состоится «19» июня 2026 г. в 17 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3839

Автореферат разослан « » апреля 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук **В.А. Кибкало**

Общая характеристика работы

Работа посвящена исследованиям в области комбинаторной алгебры. В диссертации автор разработал новый метод построения конечно определенных алгебраических объектов. Метод позволил решить проблему Шеврина – Сапира о существовании бесконечной конечно определенной нильполугруппы, одного из вопросов бернсайдовского типа. В перспективе метод может быть применен для построения конечно определенных колец и групп.

Актуальность темы

Вопросы бернсайдовского типа

Одним из важнейших вопросов алгебры, в значительной степени определивший ее развитие, является проблема Бернсайда[1], поставленная в 1902 году.

«A still undecided point in the theory of discontinuous groups is whether the order of a group may be not finite, while the order of every operation it contains is finite.»

Проблема Бернсайда с неограниченной экспонентой. Пусть конечнопорожденная группа является периодической, то есть каждый элемент имеет конечный порядок, возможно эти порядки неограничены в совокупности. Верно ли, что группа является конечной?

Проблема Бернсайда с ограниченной экспонентой (ограниченная проблема Бернсайда). Пусть конечнопорожденная группа является периодической, и порядки элементов ограничены в совокупности. То есть, выполняется тождество $x^n = 1$ для некоторой константы n. Верно ли, что группа является конечной?

Помимо основной постановки в теории групп, подобные вопросы были поставлены и в других структурах, кольцах, полугруппах, алгебрах Ли и оказали огромное влияние на развитие современной алгебры. Эта проблематика значительно стимулировала алгебраические исследования.

Первый контрпример к неограниченной проблеме был найден Е. С. Голодом[2] в 1964 году на основе универсальной конструкции Е. С. Голода – И. Р. Шафаревича[3], которая позволила построить конечнопорожденные бесконечные периодические группы неограниченной экспоненты.

В ограниченном случае для маленькой экспоненты, вопрос решается положительно. Для экспоненты 2 это вытекает из коммутативности таких групп. Для групп с тождеством $x^3 = 1$ доказать конечность несколько труднее (и она была доказана самим Бернсайдом[4]). Вопрос о конечности конечно порожденных групп

[1] *Burnside W., On an unsettled question in the theory of discontinuous groups*, Q. J. Pure Appl. Math., 33 (1902), 230–238

[2] *Е. С. Голод О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:2 (1964), 273–276

[3] *Е. С. Голод, И. Р. Шафаревич О башне полей классов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:2 (1964), 261–272

[4] *Burnside W., On an unsettled question in the theory of discontinuous groups*, Q. J. Pure Appl. Math., 33 (1902), 230–238

с тождеством $x^4 = 1$ стоял открытым чуть меньше 40 лет и был решен И.Н. Сановым[5], а с тождеством $x^6 = 1$ – свыше 50 и был решен М. Холлом[6]. Уже для экспоненты 5 вопрос является открытым.

Вопрос о конечности конечнопорожденных групп с тождеством $x^n = 1$ был решен отрицательно в знаменитых работах П. С. Новикова и С. И. Адяна[7,8]: для любого нечетного $n > 4381$ было доказано существование бесконечной группы с $m > 1$ образующими, удовлетворяющей тождеству $x^n = 1$. Эта оценка была улучшена до $n > 665$ С. И. Адяном[9]. А. И. Мальцев рассматривал результаты Новикова и Адяна как основное событие алгебры XX века.

Позднее были получены результаты в случае четной экспоненты. Для достаточно больших четных n примеры бесконечных 2-порожденных групп периода n были построены независимо С. В. Ивановым[10,11] и И. Г. Лысенком[12,13]. В условиях делимости на достаточно большую степень двойки, было исследовано строение свободных бернсайдовых групп.

Подробная библиография и история вопроса есть в обзоре С. И. Адяна[14].

Работы П. С. Новикова и С. И. Адяна оказали огромное влияние на творчество И. А. Рипса, который в дальнейшем разработал метод канонической формы и построил примеры бесконечных периодических групп, обладающих дополнительными свойствами. Позднее А. Ю. Ольшанский[15,16] предложил геометрически наглядный вариант доказательства для нечетных $n > 10^{10}$.

Бернсайдова проблематика естественным образом переносится из теории групп в теорию колец. Аналог проблемы Бернсайда для ассоциативных алгебр был сформулирован А. Г. Курошем в 30х годах:

Вопрос (Курош[17]). Пусть все 1-порожденные подалгебры конечно-порожденной ассоциативной алгебры A конечномерны. Будет ли алгебра A конечномерна, как векторное пространство?

---

[5] *Санов И. Н., Решение проблемы Бернсайда для показателя* 4, Уч. зап. Ленингр. ун-та, сер. матем., 10 (1940), 166–170.

[6] *Hall M.Jr., Solution of the Burnside problem for exponent* 6, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 43 (1957), 751–753.

[7] *Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах.*, (*I–III*), Изв. АН СССР. Сер. матем., 32 (1968)

[8] *Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975, 335 с.

[9] *Адян С. И. Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы*, УМН, 65:5(395) (2010), 5-–60

[10] *Ivanov S. V.*, *The free Burnside groups of sufficiently large exponents*, Internat. J. Alge bra Comput., 4:1—2 (1994), 1—308.

[11] *Ivanov S. V.*, “On the Burnside problem on periodic groups”, Bul l. Ame r. Math. Soc. (N. S.), 27:2 (1992), 257–260; arXiv: math/9210221.

[12] *Лысёнок И. Г. Бесконечность бернсайдовых групп периода* 2^k *при* $k > 13$, УМН, 47:2 (1992), 201-–202; *I. G. Lysenok The infinitude of Burnside groups of period* 2^k *for* $k > 13$, Russian Math. Surve ys, 47:2 (1992), 229-–230.

[13] *Лысёнок И. Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода*, Изв . РАН. Сер . матем ., 60:3 (1996), 3-–224; англ. пер.: *I. G. Lysenok*, *Infinite Burnside groups of even exponent*, Izv. Math., 60:3 (1996), 453—654.

[14] *Адян С. И. Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы*, УМН, 65:5(395) (2010), 5-–60

[15] *Ольшанский А. Ю. О теореме Новикова–Адяна*, Матем. сб., 118(160):2(6) (1982), 203–235

[16] *Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах.*, М.: Наука, 1989.

[17] *А. Г. Курош. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах.* Изв. АН СССР, Сер. Матем., №5, 1941, С. 233– 240.

Отрицательный ответ на этот вопрос был получен Е. С. Голодом[18] в 1964 году.

Также интересны бернсайдовские вопросы для алгебраических алгебр.

Определение. Элемент ассоциативной алгебры называется алгебраическим, если порожденная им подалгебра является конечномерной, или, что равносильно, что элемент обладает аннулирующим многочленом из основного поля. Алгебра алгебраическая, если все ее элементы алгебраические.

Индексом алгебраической алгебры A называется супремум степеней минимальных аннулирующих многочленов элементов A.

Классом нильпотентности или ниль-индексом ассоциативной алгебры A называется минимальное натуральное число n такое, что $A^n = 0$.

Теорема (Курош[19], 1941.) Любая удовлетворяющая тождеству $x^2 = 0$ алгебра над полем характеристики $\geqslant 3$ или 0 является нильпотентной класса 3.

Любая нильпотентная конечнопорожденная алгебра конечномерна.

В 1941 году А. Г. Курош[20] сформулировал аналог проблемы Бернсайда для алгебр конечного индекса:

1. Верно ли, что конечно-порожденная нильалгебра конечного ниль-индекса нильпотентна?

2. Верно ли, что конечно-порожденная алгебра конечного индекса конечномерна?

В 1946 году И. Капланский[21] и Д. Левицкий[22] ответили на эти вопросы положительным образом для алгебр с допустимым полиномиальным тождеством, где полиномиальное тождество называется *допустимым*, если один из его коэффициентов равен 1. Заметим, что в случае ассоциативных алгебр над полями любое полиномиальное тождество эквивалентно допустимому.

Дальнейшие результаты в этом направлении получил А. И. Ширшов[23][24].

Проблемы бернсайдовского типа для полугрупп рассматривались в монографии М. В. Сапира[25], с участием М. В. Волкова и В. С. Губы .

---

[18] *Е. С. Голод О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:2 (1964), 273–276

[19] *А. Г. Курош. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах.* Изв. АН СССР, Сер. Матем., №5, 1941, С. 233– 240.

[20] *А. Г. Курош. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах.* Изв. АН СССР, Сер. Матем., №5, 1941, С. 233– 240.

[21] *I. Kaplansky On a problem of Kurosch and Jacobson.* Bull. Amer. Math. Soc., No52, 1946, P. 496–500.

[22]. *J. Levitzki. On a problem of A. Kurosch.* Bull. Amer. Math. Soc., No52, 1946, P. 1033–1035.

[23] *Ширшов А. И. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах.*, Мат. сб., 1957, 41, 3, 381–394. (РЖМат, 1958, 164)

[24] *Ширшов А. И. О кольцах с тождественными соотношениями.*, Мат. сб., 1957, 43, 2, 277–283. РЖМат, 1958, 7544)

[25] *Mark V. Sapir* with contributions by Victor S. Guba and Mikhail V. Volkov *Combinatorial algebra: syntax and semantics* Springer, 2014, 355pp.

Проблемы конечной определенности

Все имеющиеся примеры бесконечных периодических групп бесконечно определены. Естественно задаться вопросом, можно ли достичь каких-либо бернсайдовских свойств с помощью конечного числа определяющих соотношений.

Из факта существования бесквадратных слов над трехбуквенным алфавитом, сразу следует, что в 3-порожденная полугруппа с тождеством x^2 может быть бесконечной, для этого достаточно ввести определяющие соотношения $W^2 = 0$ для всех слов W.

То есть существуют бесконечных нильполугруппы с тождеством $x^2 = 0$. (Аналогично можно построить 2-порожденную бесконечную нильполугруппу с тождеством $x^3 = 0$.)

Если же ограничиться конечным числом определяющих соотношений, но задать ограничение, что они все мономиальные, то есть вида $W = 0$, то ответ меняется. Всякая конечно порожденная нильполугруппа с конечным числом мономиальных соотношений является нильпотентной (конечной).

В настоящее время известно не так уж много конструкций конечно определенных объектов. Поэтому методы, дающие возможность построения таких объектов, особенно интересны.

Чрезвычайно глубоким и вдохновляющим является следующий открытый вопрос (входящий в список основных алгебраических проблем в теории групп):

Конечно определенная проблема Бернсайда.
Существует ли конечно определенная бесконечная периодическая группа?

В работе А. Ю. Ольшанского и М. В. Сапира[26] была построена конечно определенная группа являющаяся расширением конечно порожденной бесконечной периодической группы с помощью циклической.

На проблематику, связанную с построением разного рода экзотических объектов с помощью конечного числа определяющих соотношений обратил внимание В. Н. Латышев [27].

Им же была поставлена проблема существования конечно определенного нилькольца[28].

Проблема В. Н. Латышева. *Существует ли конечно определенное бесконечномерное нилькольцо?*

В качестве продвижения в решении этого вопроса можно рассматривать результаты Г. П. Кукина[29], В. Я. Беляева[30] о вложениях рекурсивно определенных объек-

[26] *Ol'shanskii Alexander Yu., Sapir Mark V. Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups.* Publications Mathematiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques May 2003, Volume 96, Issue 1, pp 43–169.

[27] *Latyshev V. On the recognizable properties of associative algebras.* Special vol. J.S.C.: On computational aspects of commutative algebras. London: Acad. Press, 1988, 237–254.

[28] *Днестровская тетрадь: оперативно-информац. сборник* — 4-е изд. — Новосибирск: изд. ин–та матем. СО АН СССР, 1993, 73.

[29] *Kukin G. P. The variety of all rings has Higman's property.* Algebra and Analysis. Irkutsk. 1989 91–101

[30] *Belyaev V. Ya. Imbeddability of recursively defined inverse semigroups in finitely presented semigroups.* Sibirsk. Math. Journal 25 no. 2., 1984. 50–54.

тов в конечно определенные. В. А. Уфнаровским[31] был построен пример конечно определенной алгебры промежуточного роста. В работе В. В. Щиголева[32] была изучена связь между понятиями ниль и нильпотентности конечно определённых алгебр в зависимости от количества определяющих соотношений и порождающих. Также построен пример алгебр с малым количеством определяющих соотношений, у которых все слова длины два нильпотентны. Кроме того, построению конечно определенных объектов и автоматному подходу в алгебраических структурах посвящен ряд других результатов[33,34,35,36,37,38,39,40,41].

Основные цели и задачи диссертации

Фундаментальную проблему существования конечно определенной нильполугруппы поставили Л. Н. Шеврин и М. В. Сапир[42] в Свердловской Тетради (3.61б), а также вопрос 3.8 в обзоре[43].

Вопрос (Л. Н. Шеврин, М. В. Сапир). *Существует ли конечно определенная бесконечная нильполугруппа?*

Этот вопрос привлекал внимание автора диссертации в течение многих лет. Ряд результатов автора, таких как конструкция конечно определенной полугруппы с нецелой размерностью Гельфанда–Кириллова[44], построение алгебр с конечным базисом Гребнера, но неразрешимой проблемой делителей нуля и проблемой нильпотентности[45], возникли из работы над этой проблемой. Также был построен пример конечно определенной полугруппы, содержащий ненильпотентый ниль-идеал[46].

[31] *Уфнаровский В. А. О росте алгебр.* Вестник МГУ. вып 1, 1978, 4, 59–65.

[32] *Щиголев В. В., О ниль и нильпотентных конечноопределённых алгебрах*, Фунд. и прикл. матем., 2000, т. 6, выпуск 4, стр. 1239—1245.

[33] *Иыуду Н. К. Стандартные базисы и распознаваемость свойств алгебр, заданных копредставлением.* Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук — Москва, 1996, 73.

[34] *Иванов-Погодаев И. А., Алгебра с конечным базисом Грёбнера и неразрешимой проблемой делителей нуля*, Фундамент. и прикл. матем., 12:8 (2006), 79–96

[35] *Пионтковский Д. И. Некоммутативные базисы Гребнера, когерентность ассоциативных алгебр и делимость в полугруппах.*, Фунд. и прикл. матем.,2001, 7, 2, 495–513.

[36] *Пионтковский Д. И. Базис Грёбнера и когерентность мономиальной ассоциативной алгебры.*, Фунд. и прикл. матем., 1996, 2, 2, 501–509.

[37] *Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре.*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. М.: ВИНИТИ, 1990, 57, 5–177.

[38] *Уфнаровский В. А. О росте алгебр.* Вестник МГУ. вып 1, 1978, 4, 59–65.

[39] *Белов А. Я. Линейные рекуррентные уравнения на дереве.* Математические заметки, 78, N5, 643–651.

[40] *Bokut L. A., Kukin G. P. Algoritmic and combinatorial aldebra.* Math. and its appl. 233.

[41] *Sapir M. V. Algorithmic Problems for Amalgams of Finite Semigroups.*

[42] *Свердловская тетрадь: Нерешённые задачи теории полугрупп. Выпуск третий*, Свердловск, 1989. — 40 с

[43] *Kharlampovich O. G., Sapir M. V.. Algorithmic problems in varieties.* International Journal of Algebra and Computation, Vol. 5, Nos. 4–5 (1995), 379–602

[44] *Belov A. Ya. Ivanov I. A. Construction of Semigroups with Some Exotic Properties*, Comm. in Algebra, Volume 31, Num 2, 2003. 673–696.

[45] *Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S. Finite Groebner Basis Algebra With Unsolvable Problems Of Nilpotency and Zero Divisors* J. Algebra 508 (2018), 575-588.

[46] *Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S., Sapir O. A construction of a finitely presented semigroup*

В диссертации проводится построение требуемой нильполугруппы, то есть автор доказывает следующую теорему.

Теорема 3.1. *Существует конечно определенная бесконечная нильполугруппа, удовлетворяющая тождеству* $x^9 = 0$.

Получение этого результата являлось основной целью исследований. В процессе работы над этой задачей был разработан метод контроля над соотношениями, который может быть использован для построения конечно определенных полугрупп. В перспективе этот метод может дать использован также для построений в конечно определенных кольцах и группах.

Этот результат интересен не только как решение важной проблемы бернсайдовского типа в алгебре, но и как возможный подход к алгоритмическим задачам: набором конечных локальных правил можно задавать свойства (в частности, апериодичность) бесконечной системы.

Основные результаты и научная новизна

Диссертация включает в себя следующие основные результаты:

1. (Геометрическая часть.) Автор разработал новый метод конструирования определяющих соотношений, как пар эквивалентных путей на специальном геометрическом комплексе. Слова в полугруппе соответствуют кратчайшим путям на комплексе, а пары эквивалентных путей соответствуют клеткам комплекса.

2. (Комбинаторная часть.) Автор доказал комбинаторную лемму: вершины и ребра последовательности комплексов (подходящая по геометрическим свойствам для задания определяющих соотношений) может быть раскрашена в конечное число цветов с соблюдением свойства детерминированности, когда раскраска пути по двум сторонам каждой четырехугольной клетки однозначно определяет раскраску пути по другим двум сторонам этой клетки.

3. (Основной результат.) Автор построил конечно определенную бесконечную нильполугруппу, где каждое слово в девятой степени равно нулю. Слова в полугруппе соответствуют кодировкам путей на последовательности комплексов. Определяющие соотношения делятся на мономиальные (запрещающие некоторые кодировки путей) и флиповые, приравнивающие эквивалентные пути для клетки каждого типа.

Таким образом, в диссертации решен вопрос существования конечно определенной нильполугруппы, поставленный Л. Н. Шевриным и М. В. Сапиром в Свердловской Тетради (3.61б)[47].

Также диссертация содержит дополнительные результаты:

1. Конструкция алгебры с конечным базисом Гребнера и неразрешимой проблемой делителей нуля.

2. Конструкция алгебры с конечным базисом Гребнера и неразрешимой проблемой нильпотентности.

---

containing an infinite square-free ideal with zero multiplication International Journal of Algebra and Computation Vol. 28, No. 08, pp. 1565-1573 (2018)

[47] *Свердловская тетрадь: Нерешённые задачи теории полугрупп. Выпуск третий*, Свердловск, 1989. — 40 с

3. Конструкция конечно определенной полугруппы, содержащей бесконечный идеал, свободный от квадратов.

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Положения, выносимые на защиту

1. Метод построения конечно определенных объектов с контролем над следствиями из определяющих отношений. Каждое слово представляется в виде пути на геометрическом комплексе с набором свойств.

2. Конструкция бесконечной конечно определенной полугруппы с тождеством $x^9 = 0$ (решение проблемы Шеврина-Сапира о существовании бесконечной конечно определенной нильполугруппы).

3. Конструкция алгебры с конечным базисом Гребнера, но неразрешимой проблемой делителей нуля.

4. Конструкция алгебры с конечным базисом Гребнера, но неразрешимой проблемой нильпотентности.

5. Конструкция конечно определенной полугруппы, содержащей бесконечный идеал, свободный от квадратов.

Методология и методы исследования

Диссертация использует методы комбинаторной алгебры и комбинаторики слов.

Основная часть посвящена новому методу построения конечно определенных полугрупп когда каждое вводимое соотношение рассматривается как клетка на геометрическом комплексе с заданным набором свойств. Элементы полугруппы при этом рассматриваются как кратчайшие пути на построенном геометрическом комплексе. Ниже кратко приводится основное содержание и идеи метода.

Теоретическая и практическая ценность диссертации

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теоретических разделах математики, таких, как алгебра, комбинаторная теория групп и полугрупп. Также подходы построений могут быть использованы в теории колец.

Степень достоверности

Все основные результаты диссертации являются оригинальными, обоснованными с помощью строгих математических доказательств и опубликованы как в международных, так и в российских рецензируемых журналах. Результаты других авторов, использованные в диссертации, снабжены соответствующими ссылками.

Апробация и доклады по теме диссертации

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на семинарах академика С. И. Адяна, академика С. П. Новикова, а также на следующих семинарах и конференциях:

1. International Conference on Algebra and Related Topics (ICCA), The Center of Combinatorial Algebra, South China Normal University. Гуаньчжоу, 23-27 июня 2009.

2. Special session dedicated to prof. B.Plotkin, International Conference "Modern Algebra and Its Applications"Батуми, 19-25 сентября 2010.

3. Межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике, Долгопрудный, 17 октября 2012.

4. CIRM, Marseille, 2013, SubTile 2013 Pavages: systemes dynamiques, combinatoire, theorie des nombres, decidabilite, geometrie discrete, geometrie non-commutative. Марсель, Франция, 14-18 января 2013.

5. Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory, Stefan Banach International Mathematical Center, 2013, 14. Бедлево, Польша, 14-20 июля 2013

6. Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, XII межд. конф., посв. 80-летию проф. В. Н. Латышева, Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого, Тула, 21–25 апреля 2014.

7. Дискретная и вычислительная геометрия, Москва, ИППИ РАН 23 сентября 2014.

8. Geometric and Combinatorial Group Theory In honor of Eliyahu Rips, Givat-Ram (invited talk) Einstein Institute of Mathematics, Jerusalaem. 14-19 декабря 2014.

9. Алгоритмические вопросы алгебры и логики, Москва, ГЗ МГУ, 14 апреля 2015.

10. Growth, Symbolic Dynamics and Combinatorics of Words in Groups, Ecole normale superieure, Париж, 1-5 июня 2015.

11. Groups and Rings, Theory and Applications, GRiTA2015, Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences, София, Болгария, 15-22 июля, 2015.

12. First Joint International Meeting of the Israel Mathematical Union and the Mexican Mathematical Society , Instituto Tecnologico de Oaxaca, 2015, 13 Оаксака, 7-11 сентября 2015.

13. *Ivanov-Pogodaev Ilya*, Groups, Algebras and Identities, Honoring Boris Plotkin's 90th Birthday, Jerusalem Hebrew University, Jerusalem, Bar Ilan University, Tel-Aviv, Иерусалим, 20-24 марта 2016.

14. Transversal Aspects of Tilings, Олерон, Франция, 6-10 июня 2016.
15. Мальцевские чтения, Новосибирск, Россия 16–20 ноября 2020 года
16. Новосибирск, Мальцевские чтения, Россия 13-17 ноября 2023 года
17. Polynomial Computer Algebra 2025 (September 29 - October 4, 2025, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia)

Кроме того, по смежным с данной диссертацией темам были проведены проекты со школьниками и студентами.

1. Летняя школа «Современная Математика» имени Виталия Арнольда, Июль 2019 года. «Апериодические замощения и алгебраические конструкции и computer-science» был прочитан мини-курс из 4 лекций.

   https://old.mccme.ru//dubna//2019/courses/ivanov-kanel.html
2. Проектная смена в образовательном центре Сириус, Май 2022. Был проведен проект по математической логике.
3. Проектная смена в образовательном центре Сириус, Май 2023. Был проведен проект по апериодическим мозаикам и подстановочным системам.
4. Проектная смена в образовательном центре Сириус, Май 2024. Был проведен проект по комбинаторной теории групп и проблеме Бернсайда.
5. Летняя конференция Турнира Городов, август 2018. Был проведен проект по апериодическим мозаикам и подстановочным системам.

Основные публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы изложены в 15 работах, которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Структура диссертации

Диссертация состоит из семи глав, включая введение, а также списка литературы. Текст диссертации изложен на 141 странице. Список литературы содержит 143 наименования.

Во введении проводится обзор результатов комбинаторной алгебры, относящихся к проблемам бернсайдовского типа, а также результатов, посвященных конечно определенному случаю.

В первой главе обсуждаются методы построений в конечно определенном случае, использующие автоматные методы, в частности, реализации машины Тьюринга в конечно определенных объектах. В частности, такими методами получаются результаты автора: о построении алгебры с конечным базисом Гребнера, но с неразрешимой проблемой делителей нуля, а также о построении алгебры с конечным базисом Гребнера, но с неразрешимой проблемой нильпотентности.

Вторая, третья и четвертая главы посвящены изложению основного результатата диссертации, построения бесконечной конечно определенной нильполугруппы.

Во второй главе проводится геометрическая часть построения. Строится последовательность комплексов со свойствами равномерной эллиптичности. В дальнейшем эта геометрическая структура используется как пространство путей. Каждый путь на комплексе (точнее, его кодировка) будет отвечать полугрупповому слову.

В третьей главе проводится комбинаторная часть построения. Доказывается основное свойство построенной последовательности комплексов – слабая детерминированность. Слабая детерминированность доказывает взаимно однозначное соответствие между кодировками путей, проходящим по двум смежным сторонам клетки двумя различными способами. Это свойство позволяет корректно ввести определяющие соотношения на полугруппе путей: теперь пути (и слова, сопоставленные их кодировкам) являются эквивалентными. Что в свою очередь позволяет приводить кодировки путей к каноническому виду и вообще дает контроль над определяющими соотношениями и следствиями.

В четвертой главе проводится финализация построения. Описывается алгоритм приведения каждого слова к канонической форме. Доказывается, что девятая степень каждого слова приводится к нулю.

В пятой главе обсуждаются вопросы поведения автоматов при обходе лабиринта, заданного бернсайдовской группой. А также обсуждаются вопросы, связанные с эволюцией клеточного автомата на регулярной решетке.

В шестой главе обсуждается метод канонической формы Рипса: геометрический подход к построению бернсайдовской группы. Геометрические методы в группах во многом перекликаются с мозаичными идеями в полугруппах, обсуждаемых в 3-5 главах.

В седьмой главе обсуждаются смежные вопросы к идеям основной части диссертации. Одна часть посвящена поведению автоматов при обходе лабиринта, заданного бернсайдовской группой. Далее обсуждаются вопросы, связанные с эволюцией клеточного автомата на регулярной решетке. Третья часть (Приложение) – применение мозаик в геометрии при построении самозаклинивающихся структур.

Основное содержание работы

Построение конечно определенных объектов и системы конечных автоматов

Обсудим трудности построения конечно определенных объектов и контроль над соотношениями. При построении алгебраических объектов основной задачей является контроль над следствиями из вводимых соотношений, в особенности тогда, когда нужно доказать, что некое соотношение не является следствием заданных.

Зачастую используются три метода контроля над соотношениями:

1. Базис Гребнера и бриллиантовая лемма;

2. Теория малых сокращений;

3. Реализация машины Тьюринга или машины Минского.

В конечно определенном случае вопросы, связанные с построением объектов, обладающих заданными свойствами, сильно усложняются и наибольшее значение приобретает третий метод. При этом буква интерпретируется как состояние конечного автомата, а слово – как цепочка взаимодействующих конечных автоматов. Если число соотношений конечно, то это взаимодействие *локально* и мы получаем связь с задачами самоорганизации, типа задачи Майхилла о стрелка́х:

Задача синхронизации стрелков. Можно ли так запрограммировать конечную одномерную цепочку конечных автоматов , чтобы из стартового состояния все автоматы одновременно перешли в конечное состояние, независимо от длины цепочки, если состояние каждого автоматы в следующий момент времени зависит от его состояния и состояния соседних клеток.

На этом пути автор ранее решил задачу о построении конечно определенных полугрупп с рекурсивной размерностью Гельфанда – Кириллова[48]. Отметим, что подобная техника довольно громоздка для построений, требующих малого роста. Например, не удалось пока построить конечно определенную полугруппу с размерностью Гельфанда – Кириллова равной 2.5.

Также автором ранее был получен ответ на известный открытый вопрос, поставленный В. Н. Латышевым – была построена алгебра с неразрешимой проблемой делителей нуля и конечным базисом Грёбнера[49], а также алгебра с неразрешимой проблемой нильпотентности и конечным базисом Грёбнера[50]. Отметим, что для автоматных мономиальных алгебр (в частности, конечно определенных) а также *алгебр с ограниченной переработкой* аналогичный вопрос, также поставленный

[48] *Иванов-Погодаев И. А. Машина Минского, свойства нильпотентности и размерность Гельфанда-Кириллова в конечно определенных полугруппах.* Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук — Москва, 2006, 77с.

[49] *Иванов-Погодаев И. А. Машина Минского, свойства нильпотентности и размерность Гельфанда-Кириллова в конечно определенных полугруппах.* Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук — Москва, 2006, 77с.

[50] *Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S. Finite Groebner Basis Algebra With Unsolvable Problems Of Nilpotency and Zero Divisors* J. Algebra 508 (2018), 575-588.

В. Н. Латышевым, решается положительно[51,52,53].

Задача о построении конечно определенной бесконечной нильполугруппы имеет интерпретацию в этих терминах. Рассмотрим цепочку локально взаимодействующих конечных автоматов. У них есть цвета корпусов. Если автомат объявляет себя нулем (совершает самоубийство), то вся цепочка погибает. Мы задаем локальный закон взаимодействия, но начальные внутренние состояния автоматов могут быть любыми. Можно ли добиться того, чтобы преобразования были обратимы (если $u = v$, то $v = u$), при этом существовали сколь угодно длинные живые цепочки, и чтобы любая цепочка, у которой несколько раз подряд повторились цвета корпусов, погибала.

Хотя решение проблемы построения бесконечной нильполугруппы было достигнуто другими (геометрическими) методами, данная интерпретация демонстрирует связь с самоорганизующимися системами и может быть интересной с точки зрения получения результата в этой области. Иначе говоря, задание определяющих соотношений приводит к системе, обладающей интересными свойствами, сходными с самоорганизацией. Есть основания полагать что метод построения конечно определенной полугруппы может быть использован в качестве алгоритмического метода.

Идея подхода к конструированию. Мозаики

Пусть W – бесквадратное слово над алфавитом из трех букв. Если каждое его неподслово (т.е. антислово) объявить нулем, то естественно возникающая полугруппа слов обладает тождеством $x^2 = 0$. Однако естественная конструкция, связанная с заданием множества нулевых слов как подслов слов из некоторого семейства в конечно определенном случае работает плохо.

Невозможно задать конечно определенную ненильпотентную нильполугруппу только *мономиальными* соотношениями, т.е. соотношениями типа $v = 0$. Ибо если есть конечный список запретов и бесконечное слово без запрещенных подслов, то есть и бесконечное *периодическое* слово также без запрещенных подслов.

Итак, в данном случае, не получается набором локальных правил-запретов добиться того, чтобы не было периодичности. Однако, существует подобная ситуация, в которой это возможно, и это - аперидические мозаики. Известно, что существуют конечные наборы многоугольников (плиток) которыми можно замостить плоскость лишь непериодически. Впервые такой набор был построен Робертом Бергером[54]. В дальнейшем были построены более простые примеры, например, Рафаэлем Робинсоном[55]. Широко известна также мозаика Пенроуза. Итак, имеются контактные правила, для которых:

[51] *Belov A. J., Borisenko V. V., Latysev V. N. Monomial Algebras.* NY. Plenum, 1997.

[52] *Белов А. Я. Линейные рекуррентные уравнения на дереве.* Математические заметки, 78, N5, 643–651.

[53] *Иыуду Н. К. Алгоритмическая разрешимость проблемы распознавания делителей нуля в одном классе алгебр.* Фунд. и прикл. матем., 1995, 2, 1, 541–544.

[54] *R. Berger*, *The undecidability of the domino problem*, Ph.D. thesis, Harvard University, July 1964.

[55] *Robinson R. M.*, *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, Inventiones Mathematicae 12 (1971), 177-209.

- Существует замощение всей плоскости, удовлетворяющее запретам.
- Однако таких периодических замощений не существует.

Итак, в двумерной ситуации набором локальных правил удается задать отсутствие периодичности. Как использовать это при построении нильполугруппы? Если бы можно было бы умножать слева-справа-сверху-снизу, то такого рода объекты можно было бы построить.

Но как придать всему этому смысл? Будем интерпретировать элементы полугруппы как пути на мозаике (дальнейший анализ показывает, что удобно иметь дело с кратчайшими путями – иначе можно много раз проходить один и тот же цикл). Буквы кодируют плитки и переходы между ними. Если локальный непорядок (два символа плитки без символа перехода между ними и т.д.) – то произведение ноль. Кроме того, если локальный участок не располагается на мозаике, или не располагается как участок кратчайшего пути – то он также нулевой.

Если же любую пару узлов, соединяемую кратчайшим путем с кодом s_1 можно соединить кратчайшим путем с кодом s_2 и наоборот, то $s_1 = s_2$.

Итак, пусть есть периодическое слово $U = W^n$. Начинаем добавлять клетки к слову U, локально перебрасывая пути. Оно окружается мозаикой. Поскольку U периодично, то не может быть расположено на нашей мозаике. Поэтому в какой-то момент вставлять клетки не получится и мы доберемся до локального участка, несовместимого с мозаикой. Тем самым устанавливается равенство слова $U = W^n$ нулю.

Таким образом, возникает мозаика со своей глобальной структурой, которая и обеспечивает апериодичность. Локальные правила задают эту самую структуру, и путь, «перекидывание» которого задает область на мозаике. Возникают три языка: геометрический язык, описывающий глобальное поведение комплекса, комбинаторно геометрический язык контактов (локальных правил) и полугрупповой язык соотношений – переброски путей. Для решения задачи следует научиться переводить с одного языка на другой и, главное, обеспечить саму эту возможность.

Иерархия и апериодичность

Рассмотрим подстановочный способ получения непериодических замощений. Пусть имеется конечное число типов плиток и мы задаем правила, по которым из нескольких маленьких плиток можно составлять большие макроплитки тех же типов.

> **Пример.** *Плитки могут быть квадратами A и B, при этом, чтобы составить квадрат A второго уровня, нужно взять четыре квадрата A, A, A, B. А чтобы составить квадрат B, нужно взять четыре квадрата B A B A.*

Таким образом, получается иерархическая система. Каждую плитку можно разбить на требуемое число уровней иерархии. Можно показать, что получаемое замощение будет непериодично. Аналогичный способ построения используется в подстановочных системах, например, с помощью подстановок $1 \to 10$, $0 \to 01$ получается бескубное слово

$$1001011001101001\ldots$$

Оказывается, язык граничных условий и язык иерархий схожи. А именно, частно иерархическую систему можно задать конечным числом граничных условий.

Пусть имеется конечное число типов плиток, причем заданы правила иерархии, по которым плитка уровня n составляется из нескольких плиток уровня $n-1$. Тогда для начального набора плиток первого уровня можно задать конечную систему граничных условий так, чтобы задавалась мозаика, получаемая при иерархическом способе задания.

Иерархичность системы плиток гарантирует непериодичность замощения. Вследствие этого можно задавать с помощью граничных условий мозаики, которые будут с гарантией непериодическими.

Демо-версия доказательства

Рассмотрим одну из классических мозаик – знаменитую *мозаику Пенроуза* (см. рисунок 1).

Конструкция мозаики Пенроуза. Используются плитки двух видов – толстый и тонкий ромбы. Есть граничные условия: стороны каждого ромба раскрашены в две пары цветов. Соприкасаться два ромба могут только сторонами двух цветов, образующих пару. На рисунке 1 цвета обозначены внешними и внутренними насечками двух типов.

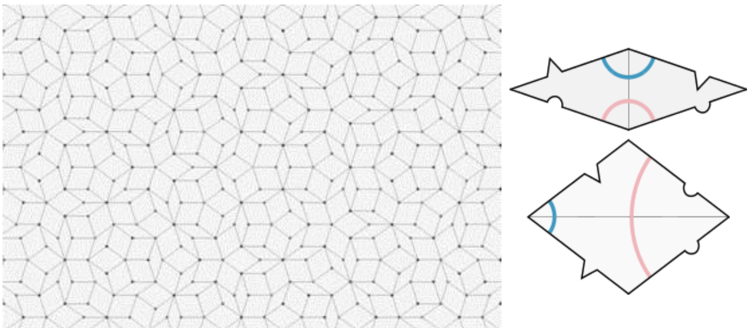

Рис. 1: Мозаика Пенроуза.

Конструкция полугруппы мозаики Пенроуза. Легко видеть, возможно конечное количество типов узлов-вершин где сходятся несколько плиток. Кроме того, ребра в мозаике могут иметь десять возможных направлений. Можно выписать все возможные типы узлов и обозначить их буквами алфавита. Теперь последовательность букв (слово) будет кодировать последовательность узлов, которые мы проходим вдоль пути.

Для каждого узла введем также два параметра: по какому ребру мы в него вошли и по какому ребру мы вышли (включая информацию о цветах ребер). Теперь можно расширить алфавит, добавив буквы для всевозможных сочетаний параметров для разных типов узлов. Некоторые последовательности букв с гарантией не смогут представлять путь на мозаике (например, если ребро, по которому мы пришли в узел не соответствует по цвету ребру, по которому мы вышли из предыдущего узла). Такие последовательности мы будем заносить в список запрещенных.

Некоторые пути на мозаике можно объявить *эквивалентными*: например путь по двум соседним ребрам ромба эквивалентен пути по другой паре сторон. Можно выписать все такие эквивалентности для разных вариантов получающихся узлов и получить полный конечный список. Тогда, с помощью локальных замен, можно переводить одни пути в другие.

Таким образом, с мозаикой Пенроуза можно связать конечно определенную полугруппу, где словам соответствуют пути. Запрещенные пути – это нулевые слова. Можно также запретить пути, которые не являются кратчайшими между двумя узлами. Для этого нужно сначала внести в список запрещенных короткие такие пути. После этого можно показать что с помощью локальных замен любой некратчайший путь приводится к виду содержащему запрещенный короткий подпуть.

В случае, если бы можно было бы показать, что любой путь, не вкладывающийся в мозаику, приводится к нулю с помощью указанных локальных правил, получающаяся полугруппа была бы нильполугруппой, так как на мозаике не лежит периодических путей.

Почему нужна другая мозаика. Проблема заключается в том, что на мозаике Пенроуза есть пути, которые недостаточно сильно меняются локальными заменами, то есть, недостаточно «извиваются». Это приводит к тому, что можно сконструировать путь, каждый локальный кусок которого может быть вложен в мозаику, но весь путь не может быть вложен. Локальные замены меняют его незначительно и преобразовать его в достаточной мере, чтобы диагностировать несоответствие мозаике, не получается.

В целом, каждый путь можно трактовать как массив информации о его окрестности. Когда мы производим локальные замены, происходит перенос информации вдоль пути. В случае, если пути можно шевелить незначительно, канал переноса информации будет ограничен, что не позволит выявить ситуацию, когда длинный кусок пути не может являться частью мозаики. (Например, когда путь – это степень разрешенного слова.)

Язык контактов vs язык соотношений. Подклейки.

Итак, если осуществлять нашу программу на базе классических мозаик, то возникают трудности, связанные с тем, что в некоторых направлениях геодезические пути не поддаются изгибу и вокруг них ничего из переброски не наращивается. А именно достаточно протяженный в двух измерениях кусок мозаики обеспечивает вычислительный процесс.

Перевод с языка соотношений (т.е. движения геодезического пути) на язык контактов вещь более сложная и обеспечить его возможность не так просто. Чтобы локальное шевеление геодезической заполнило достаточную область, пространство должно быть *равномерно-эллиптическим.* Пространство называется *равномерно-эллиптическим*, если любые две точки A и B на расстоянии D соединяются системой геодезических, образующих диск ширины $\lambda \cdot D$ для некоторой глобальной константы $\lambda > 0$. (Априори не очевидно, что такое пространство существует.) Такое пространство следует собрать из мозаики и установить аналог теоремы Гудмана-Штраусса для этой сборки.

Равномерно-эллиптическое пространство строится из подстановочной системы, указанной на рисунке 2 при этом следует озаботиться тем, чтобы степени узлов были бы ограничены, что усложняет конструкцию, вынуждая сделать композицию разных подстановок.

Мы хотим добиться того, что никакой узел X на пути из A в B не являлся обязательным пунктом посещения (узким местом). Для этого вводятся *подклейки.* Для некоторых путей AXB мы будем вклеивать макроплитку $AXBZ$, где Z – новая создаваемая вершина, вне плоскости AXB. На дальнейших этапах разбиения проводятся подклейки к подклейкам. Если путь устроен так, что мы входим внутрь подклейки, а потом возвращаемся из нее, то участок на пути, находящийся вне базовой плоскости все время является односвязным.

> Это, в частности, означает, что нельзя деформировать участок пути в подклейку так, чтобы он частично стал лежать в базовой плоскости. Кроме того, размеры подклеек к плиткам, подклеек к подклейкам и т.д. экспоненциально убывают достаточно быстро. Тем самым, помимо всего прочего, обеспечивается гомотопическая тривиальность комплекса, образованного «подклейками».

Последовательная канонизация. Завершение доказательства.

Доказательство завершается так. Рассмотрим слово. Надо его либо привести к кодировке, соответствующей пути на комплексе (тем самым оно непериодично), либо к нулю. Оно последовательно приводится к *k-каноническому виду* и при этом k растет, т.е. оно состоит из участков границ плиток k-го уровня иерархии, кроме начала и конца, целиком содержащихся в плитке уровня $k-1$ (возможно в подклейке $(k-1)$-го уровня) и при этом являющихся $(k-1)$-каноническими.

Далее с помощью соотношений (в том числе отвечающих выходу в подклейку) проверяется согласование соседних участков пути, расположенных на границах плиток k-го уровня, их нахождение в $(k+1)$-ом уровне или возможность находиться в двух соседних плитках $(k+1)$-го уровня. Отсутствие согласования означает, что пути с такой кодировкой не существует на комплексе – т.е. в этом случае слово можно привести к нулю.

В начале рассматривается плоский процесс. Если имеются команды входа в подклейку и выхода из нее, то мы преобразуем слово между ними и производим сокращение – убирается один выход в подклейку.

Согласование означает возможность преобразования к $(k+1)$-каноническому виду, после чего процесс повторяется. Он заканчивается канонической формой слова. В нашем случае каноничность не означает однозначности, поскольку можно выбирать разные стороны плиток. Наверное, существует такой выбор – но он более сложен и ситуация похожа на теорию канонической формы элементов в гиперболических (или в более общем случае, в группах с неположительной кривизной) развитую И. А. Рипсом, когда вначале строится предканоническая форма (для данного уровня иерархии), потом осуществляется выбор.

Апериодические замощения в конструкции

Как уже говорилось, существуют конечные наборы многоугольников (плиток) которыми можно замостить плоскость лишь непериодически. Методы построения таких мозаик, как правило, опираются на иерархические правила построения: задаются универсальные правила построения плиток уровня $n+1$ из плиток уровня n, для нескольких типов плиток $A_1, \ldots, A_k$. Х. Гудман-Штраусс[56] показал, что иерархические мозаики можно получить, задав конечное число локальных правил. Таким образом, локальные условия (конечность набора) могут приводить к глобальному эффекту (непериодичности замощения).

Итак, основной задачей является конструирование мозаики, в которой указанные выше трудности были бы решены. Для этого она должна обладать несколькими свойствами:

1. **Локальная конечность** Речь идет о конечности числа возможных типов узлов, конечности изначально задаваемых пар эквивалентных путей, а также конечности списка запрещенных путей.

2. **Возможность «шевеления» любого пути** Любой длинный путь, соединяющий узлы A и B может быть переведен локальными заменами в другой путь, отличающийся достаточно сильно от начального.

   Более точно, пусть длина пути равна n и точка M – его середина (или такая точка, что расстояния вдоль путей AM и MB различаются на 1). Пусть $AM'B$ – эквивалентный путь, M' – соответствующая M точка. Пусть $R_{AMB}(n)$ – максимальное расстояние от M до M' по всем эквивалентным путям $AM'B$. Требуемое нами условие означает, что $R_{AMB}(n)$ является неограниченной возрастающей функцией от n.

3. **Апериодичность** На мозаике не должно быть путей, отвечающих периодическим словам.

Как уже говорилось, мы используем геометрическую интерпретацию для алгебраических построений. Запрет для двух (или более) плиток находиться рядом друг с другом схож с запретом для двух букв стоять рядом в разрешенном слове. Возникает интерпретация слова как последовательности плиток на выложенной мозаике. Апериодичность мозаики приводит к непериодичному характеру таких «плиточных слов». В свою очередь, непериодических замощений можно добиться, если применять иерархический способ построения.

В связи с этим используются языки плиточных примыканий и иерархий. Эти языки во многом схожи, например, заданные правила иерархии, когда плитки

[56] *C. Goodman-Strauss*, *Matching rules and substitution tilings*, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 1, 181–223.

$A_1, \ldots, A_k$ уровня $n+1$ составляются из плиток $A_1, \ldots, A_k$ уровня n, можно выразить с помощью конечного множества локальных правил для набора $A_1, \ldots, A_k$. Эти локальные правила будут порождать те же непериодические мозаики что и исходные правила иерархии.

Дальнейшее развитие этих языков приводит к появлению более универсального языка путей на графе. То есть плиточная мозаика рассматривается как граф, где вершины это узлы мозаики, а ребра – границы плиток. В этом смысле понятие плитки можно обобщить, рассматривая их уже как локальные подграфы из которых, с помощью локальных правил, можно составлять граф, покрывающий плоскость.

Аналогом буквы будет тип вершины графа, аналогом слова – путь, проходящий через несколько вершин. Аналогом соотношения будет эквивалентность между путями с общими концами: например, в простом 4-цикле $ABCD$ выполнено соотношение $ABC = ADC$. Помимо таких, есть также мономиальные соотношения, выражающие идею о невозможности существования какого-то пути на мозаике. Также, для обеспечения необходимого контроля над множеством ненулевых слов, вводятся мономиальные соотношения, обнуляющие слова, соответствующие некратчайшим путям. Оказывается, что при этом можно обойтись конечным числом соотношений. Немономиальные соотношения, при этом, не меняют длины слова.

Язык путей на мозаике-графе позволяет выразить те же концепции и определить те же мозаики, что и языки иерархических плиток или граничных условий. Таким образом возникает связанная с мозаикой конечно определенная полугруппа с набором свойств, индуцированных мозаикой.

Для построения нильполугруппы используется мозаика сгенерированная с помощью следующего иерархического правила разбиения (рисунок 2).

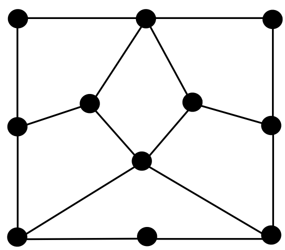

Рис. 2: Правило разбиения.

От мозаики нужно потребовать ряд дополнительных свойств. В частности, любой длинный путь должен допускать возможность «шевеления» то есть, локальных преобразований над ним, позволяющих в достаточной мере менять его. Для достижения этого свойства к плоской мозаике производятся «подклейки», представляющие собой небольшие плоские подграфы, не лежащие в исходной плоскости, и позволяющие обходить «узкие места» на исходном плоском графе. Структура подклеек также имеет иерархическую природу и так же может быть задана на языке преобразований путей конечным образом.

В итоге мы получаем граф, обладающий набором важных для нас свойств, в котором любой путь, соединяющий произвольные точки A и B, является членом семейства геодезических эквивалентных друг другу путей, соединяющих эти точки. Причем эквивалентность двух путей из этого семейства может быть получена путем цепочки локальных преобразований переводящих один путь в другой. «Шевеление» пути играет роль передачи информации. Фактически, определяющие соотношения задают правила передачи информации по пути. Если задан произвольный длинный путь, мы можем начать работать над ним, совершая локальные преобразования. При этом возможна альтернатива:

1. В результате этой работы можно получить внутри некратчайший подпуть, либо подпуть, указанный в числе запрещенных. В этом случае наш путь представляет нулевое слово.

2. В результате этой работы мы восстанавливаем некоторый кусок мозаики, внутри которого лежит пучок геодезических путей, эквивалентных нашему.

Мозаика не может содержать в себе путей, выражаемых периодическим словом. То есть, все периодические слова могут быть приведены к нулю локальными преобразованиями. При этом геодезические пути, лежащие на мозаике не приводятся к нулю, и могут иметь любую длину. Таким образом полугруппа, соответствующая построенному графу-мозаике, будет конечно определенной нильполугруппой.

Заключение

Диссертация открыла новый путь к построению конечно определенных алгебраических объектов. Возможность представлять слова в качестве кодировок путей на геометрических комплексах позволяет получить эффективный метод контроля определяющих соотношений. Этот метод позволил решить крупную алгебраическую проблему Шеврина-Сапира о существовании конечно определенной бесконечной нильполугруппы. В перспективе развитие этого метода может привести к прогрессу в других проблемах, связанных с построением конечно определенных объектов - проблеме Латышева о конечно определенном нилькольце и проблеме Бернсайда в конечно определенном случае.

Помимо решения проблемы Шеврина-Сапира, диссертация содержит решение ряда вопросов конструктивного характера, связанных с конечно определенными построениями и алгоритмическими методами. В частности, построены алгебра с конечным базисом Гребнера и неразрешимой проблемой делителей нуля и алгебра с конечным базисом Гребнера и неразрешимой проблемой нильпотентности, это вопросы, поставленные В. Н. Латышевым.

Диссертация также содержит обзор перспективных направлений, связанных с алгоритмическими методами и применением мозаик.

Благодарности

Автор глубоко благодарен своим научным консультантам — академику РАН, профессору Алексею Львовичу Семенову и доктору физико-математических наук, профессору Алексею Яковлевичу Белову за обсуждение результатов, постоянное внимание к работе и поддержку.

Автор также благодарен доктору физико-математических наук, профессору Николаю Константиновичу Верещагину, кандидату физико-математических наук, Александру Ханиевичу Шеню, доктору физико-математических наук, профессору Анне Геннадьевне Эршлер за обсуждения различных математических вопросов, связанных с этой работой.

Диссертация посвящается памяти Виктора Николаевича Латышева и Александра Васильевича Михалёва, многолетним руководителям научного семинара, создавшим уникальную атмосферу на кафедре Высшей алгебры механико-математического факультета МГУ.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы изложены в работах, которые опубликованы в научных изданиях, рекомендованных для защиты из списка МГУ и рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

1. *И.Иванов-Погодаев, А.Канель-Белов. Конечно определенная нильполугруппа: комплексы с равномерной эллиптичностью* // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2021. Т. 85. № 6. С. 126–163.

   2.375 п.л. EDN: JWHKHL. Импакт фактор 0.624 (РИНЦ).

   Английский перевод I. A. Ivanov-Pogodaev, A. Ya. Kanel-Belov *Finitely presented nilsemigroups: complexes with the property of uniform ellipticity* // Izvestiya. Mathematics. 2021. vol. 85. №6. 1146–1180.

   2.187 п.л. EDN: XPSWZM. Импакт фактор 0.9 (JIF).

   Ивановым-Погодаевым И.А. были доказаны все теоремы. Общая доля диссертанта 50% 1.19 п.л.

2. *I. A. Ivanov-Pogodaev, A.Ya. Kanel-Belov Deterministic coloring of a family of complexes* // Journal of Mathematical Sciences. 2023. vol. 275. №4. pp. 403-501.

   6.187 п.л. EDN: PACKNG. Импакт фактор 0.250 (SJR).

   Иванову-Погодаеву И.А. принадлежат все основные теоремы и доказательство детерминированности, вклад 50% 3.09 п.л.

3. *И. А. Иванов-Погодаев О детерминированности путей на подстановочных комплексах* // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 521. С. 43–62.

   1.25 п.л. EDN: BTFBYV. Импакт фактор 0.624 (РИНЦ).

   Английский перевод I.A. Ivanov-Pogodaev *On the determinism of paths on substitutions complexes* // Doklady Mathematics. 2025. vol. 111. pp. 74-90.

   1.062 п.л. EDN: SPJQGS. Импакт фактор 0.6 (JIF).

4. *И. А. Иванов-Погодаев Полугруппа путей на семействе равномерно эллиптических комплексов*// Функциональный анализ и его приложения. 2023. Т. 57. №2. С. 41–74.

   2.125 п.л. EDN: IOENTW. Импакт фактор 0.203 (РИНЦ).

   Английский перевод I. A. Ivanov-Pogodaev *A semigroup of paths on a sequence of uniformly elliptic complexes* // Functional Analisys and Applications. 2023. vol. 57. №2. pp. 117–142.

   1.625 п.л. EDN: MJJLAI. Импакт фактор 0.7 (JIF).

5. *А.Я. Белов-Канель, И.А. Иванов-Погодаев Конструкция бесконечной конечно определенной нильполугруппы*// Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. №1. С. 5-10.

   0.25 п.л. EDN: SKECOV. Импакт фактор 0.624 (РИНЦ).

   Английский перевод A. Ya. Belov, I. A. Ivanov-Pogodaev *Construction of infinite finitely presented nilsemigroup*// Doklady Mathematics. 2020. vol. 101. №2. pp. 81–85.

   0.312 п.л. EDN: SQIRFO. Импакт фактор 0.6 (JIF).

   Иванову-Погодаеву И.А. принадлежит техническая реализация конструкции, вклад 50% 0.125 п.л.

6. *И. А. Иванов-Погодаев Об оценках на экспоненту в конструкции бесконечной конечно представленной полугруппы*// Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 525. №1. С. 130-134.

   0.312 п.л. EDN: ITRNCX. Импакт фактор 0.624 (РИНЦ).

   Английский перевод I. A. Ivanov-Pogodaev *On estimates on the exponent in the construction of finitely presented infinite semigroup* // Doklady Mathematics. 2025. vol. 525. №1. pp 130-134.

   0.312 п.л. Импакт фактор 0.6 (JIF).

7. *Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S. Finite Groebner Basis Algebra With Unsolvable Problems Of Nilpotency and Zero Divisors* // Journal of Algebra. 2018. vol. 508. pp. 575-588.

   0.875 п.л. EDN: YBVBOP. Импакт фактор 0.8 (SJR).

Иванову-Погодаеву И.А. принадлежит доказательство всех теорем, общая доля диссертанта 50%, объем 0.44 п.л.

8. *Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S., Sapir O. A construction of a finitely presented semigroup containing an infinite square-free ideal with zero multiplication* // International Journal of Algebra and Computation. 2018. vol. 28. № 8. pp. 1565-1573.

   0.562 п.л. EDN: GYVCAE. Импакт фактор 0.5 (SJR).

   Иванову-Погодаеву И.А. принадлежат ключевые шаги в доказательстве всех теорем, общая доля диссертанта 40%, объем 0.225 п.л.

9. *I. Ivanov-Pogodayev, A. Kanel-Belov Construction of finitely presented infinite nil-semigroups* // Journal of Mathematical Sciences. 2012. vol. 186. № 5. pp. 751–752.

   0.125 п.л. EDN: UYFMSY. Импакт фактор 0.125 (SJR).

   Иванову-Погодаеву И.А. принадлежит техническая реализация конструкции и доказательство всех теорем, общая доля диссертанта 50%, объем 0.06 п.л.

10. *Anton Beletsky, Ilya Ivanov-Pogodaev Combinatorial Estimations on Burnside Type Problems* // Mathematics. Special Issue Combinatorial Algebra, Computation, and Logic, 2nd Edition. 2024. vol. 12. №5. pp. 665.

    1.1875 п.л. EDN: XWRDNM. Импакт фактор 0.475 (SJR).

    Иванову-Погодаеву И.А.принадлежит применение геометрических идей для мозаик, общая доля диссертанта 50% объем 0.594 п.л.

11. *И. А. Иванов-Погодаев, О. А. Рыжова. О эволюции, заданной клеточным автоматом*// Чебышевский сборник. 2025. Т. 26. № 3. С. 284-291.

    0.5 п.л. EDN: FGECBH. Импакт фактор 0.302 (РИНЦ).

    Английский перевод I. A. Ivanov-Pogodaev, O. A. Ryzhova *On the evolution defined by a cellular automaton* // Chebyshevskii Sbornik. 2025. vol. 26 №3. 284-291.

    0.5 п.л. Импакт фактор 0.432 (SJR).

    Иванову-Погодаеву И.А. принадлежит критерий выживаемости шаблона и доказательство периодичности в симметричном случае, общая доля диссертанта 50% 0.25 п.л.

12. *Д. В. Гусев, И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов Коллектив автоматов в конечно-порожденных группах* // Математические заметки. 2020. Т. 108. №5. С. 692–701.

    0.625 п.л. EDN: OHBKFY. Импакт фактор 0.599 (РИНЦ).

    Английский перевод D.V.Gusev, A. Ivanov-Pogodaev *Collectives of automata in finitely generated groups* // Mathematical Notes. 2020. vol. 108. №5-6. pp. 671–678.

0.5 п.л. Импакт фактор 0.599 (SJR).

Иванову-Погодаеву И.А. принадлежит применение автоматных идей в доказательстве теорем, общая доля диссертанта 33% 0.206 п.л.

13. *Alexei Kanel-Belov, Alexei Chilikov, Ilya Ivanov-Pogodaev, Sergey Malev, Eugeny Plotkin, Jie-Tai Yu and Wenchao Zhang Nonstandard Analysis, Deformation Quantization and Some Logical Aspects of (Non)Commutative Algebraic Geometry* // Mathematics. 2020. vol. 8. №10. pp. 1-33.

    2.0625 п.л. EDN: QJOLES. Импакт фактор 0.47 (SJR).

    Иванову-Погодаеву И.А. принадлежит применение автоматных идей и геометрических методов в теоремах, общая доля диссертанта 20% 0.4125 п.л.

14. *A. J. Kanel-Belov, A. V. Dyskin, Y. Estrin, E. Pasternak, I. A. Ivanov-Pogodaev Interlocking of convex polyhedra: towards a geometric theory of fragmented solids*// Moscow Mathematical Journal. 2010. vol. 10 №2. pp. 337–342.

    0.375 п.л. EDN: OHMLJL. Импакт фактор 0.338 (SJR).

    Иванову-Погодаеву И.А. принадлежит проверка заклиненности конструкции, общая доля диссертанта 20% 0.075 п.л.

15. *Ivanov-Pogodaev I.A., Kanel-Belov A.Ya. Construction of a Nilsemigroup of Paths in a Countable Family of Uniformly Elliptic Complexes* // Algebra and Logic. 2025. vol. 63. № 6. pp. 410-438.

    1.8125 п.л. EDN: SZKICX. Импакт фактор 0.235 (SJR).

    Иванову-Погодаеву И.А. принадлежат все теоремы, общая доля диссертанта 50% 0.91 п.л.